The Theories and Principles behind Hardware

Implementation of Any Point DFT

DFT变换有几种常用的表达形式，这几种表达形式之间只有一个常数因子的差别，其表达的内容是一样的。在通信中，通常使用下式表示**点DFT变换：

 （1）

相应的，*N*点IDFT表示为：

 （2）

由（1）和（2）式可知，对DFT运算的输入取复数共轭，输出结果再取复数共轭，便可以得到IDFT变换结果，因此所有对DFT相关论述都可自然推广到IDFT。

实际上，可以用大点数的DFT来计算小点数的DFT，如果大点数DFT的变换长度选择为则可以用FFT实现。下面说明如何由*M*点的DFT精确得到*N*点DFT结果 （*M>N*），在随后的分析当中，DFT/IDFT变换公式的常数因子将不予考虑。

根据数字信号处理理论，离散傅立叶变换（DFT）其实就是取离散时间周期信号的傅立叶级数（DFS）的一个周期的结果。由于涉及采样率转换等问题，使用DFS并不太方便，本发明使用离散时间周期信号的傅里叶变换（DTFT）进行相关描述。DTFT的谱线是强度和DFS级数相对应函数。在随后的描述中，各公式中不影响运算结果性质的常数因子不予考虑。

图1是一个连续的周期信号，其周期为，图中对该周期信号作了采样得到周期性离散信号，其每个周期有*N*个均匀分布的采样点，采样周期为，则以下关系成立。

 （3）

,  （4）



Figure 1

对这*N*个点做DFT的结果和图2所示的DTFT频谱中DFT窗所示的*N*个频谱响应值是一致的，而DFT结果可以通过下面的公式方便计算（注：在以后的DFT公式中均不考虑前面的常数因子）。

,  （5）

相邻频率点的频率间隔

 （6）



Figure 2

根据抽样定理，图2所示的DTFT通过图3所示的低通滤波器后可以恢复图1所示的连续时间周期信号。而图2的频谱通过图3所示的低通滤波器后剩下的谱线可以根据（5）式的DFT变换结果得到。因此，根据傅里叶变换的性质，可以按照下式重构得到无失真的原来的连续时间周期信号。

 （7）



Figure 3

图4为（7）式所示的重构后的连续时间周期信号，该信号和图1所示的信号是一样的。现在对（7）式所示的信号相对于图1进行上采样，每个周期均匀采样*M*个样点（*M*>*N*），采样结果同样表示在图4中。



Figure 4

The time domain samples in IDFT window shown in figure 4 can be obtained through the following expressions:

 （8）

,

 （9）

*M*点的DFT表示在图5的DFT窗中，其对应的频率间隔如下所示。

 （10）

因此，图5所示的频率点和图2所示的频率点的位置是准确对齐的。还可以用IDFT用下式求得。

Therefore, there is a one-to-one relationship between the *N* spectrum lines in figure 2 and those in figure 5, and the frequency values of the corresponding frequency indices in the left side points are the same.  can also be obtained by IDFT according to the following formula.

,  （11）



Figure 5

是的DFT变换结果（变换长度为*M*），（11）式和（9）式表示的是同一组数据，使其各项相等并利用复指数函数的周期性特征，我们可以得到以下关系（注意：推导过程略去了DFT/IDFT公式前面的常数因子，这不影响结果的正确性）。

 （12）

where,  is the result of *N*-point DFT.

综上所述，在理论上完全可以用*M*点的DFT来精确计算任何比*M*小的*N*点的DFT。如果，则*M*点的DFT可以用FFT（快速傅立叶变换）来实现，也就是是说经过恰当地设计，任何变换长度的DFT都可以通过FFT来完成。

根据以上理论分析，用*M*点DFT来计算*N*点DFT需要对*N*点输入数据作无限的周期扩展并使用理想低通滤波器滤波。在实际的实现过程中，理想低通滤波器是不可能实现的，也不可能对输入数据做无限的周期扩展。但是我们可以通过一些数字信号处理手段，使得用*M*点DFT计算得到的*N*点DFT结果无限逼近于其按照（1）或者（5）式计算得到的DFT变换结果。