

# Formelsammlung Statistik

Lukas Warode

## Maße der zentralen Tendenz

### Modus

- Nominales Skalenniveau
- Häufigster Wert

$$x_{mod}$$

### Median

- Ordinales Skalenniveau
- Mittlere Ausprägung bei Anordnung der Variable

Ungerade Anzahl an Fällen (n):

$$\tilde{x} = x_{(\frac{n+1}{2})}$$

## [1] 1 7 10 18 20 24 25 26 36 37 40

## [1] 24

Gerade Anzahl an Fällen (n):

$$\tilde{x} = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$$

## [1] 1 7 10 18 20 24 25 26 36 37

## [1] 22

### Arithmetisches Mittel

- Metrisches Skalenniveau
- Summe aller Fälle durch Anzahl der Fälle teilen

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

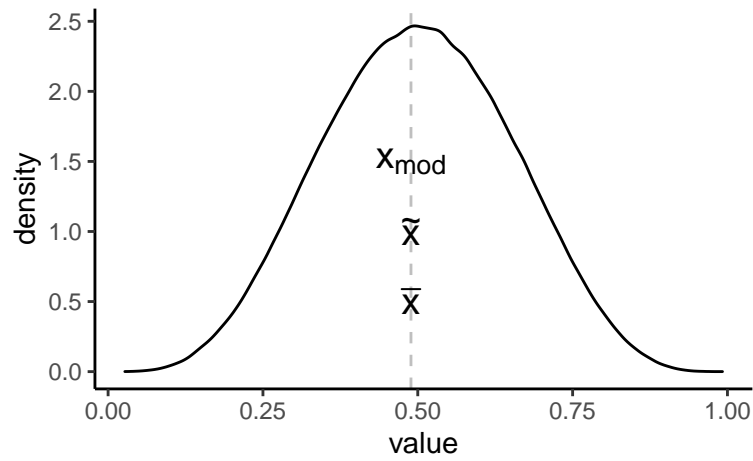
## [1] 37 1 25 10 36 18 24 7 20 26

## [1] 20.4

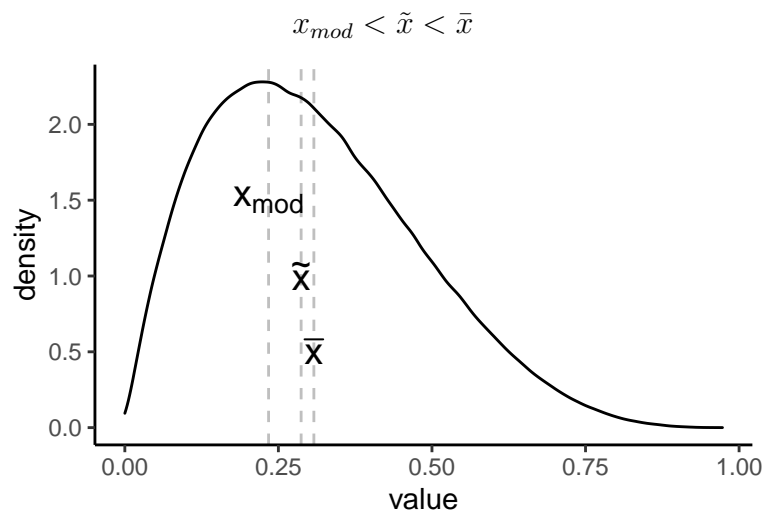
## Verteilungsformen

### Symmetrisch (Normalverteilung)

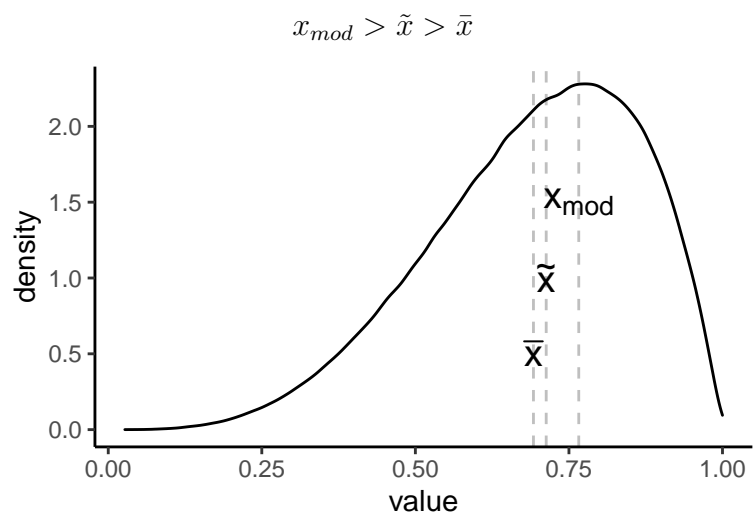
$$x_{mod} = \tilde{x} = \bar{x}$$



Linkssteil / Rechtsschief



Rechtssteil / Linksschief



## Streuungsmaße

### Spannweite

- Ordinales Skalenniveau
- Differenz zwischen größter und kleinster Ausprägung

$$R = x_{max} - x_{min}$$

### Interquartilsabstand (IQR)

- Ordinales Skalenniveau
- Intervall der mittleren 50% der Stichprobe

$$IQR = Q_{0.75} - Q_{0.25}$$

### Variation (Summe der Abweichungsquadrate)

- Metrisches Skalenniveau
- Englisch: *Sum of squares / sum of squared deviations*

$$SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

### Varianz

- Metrisches Skalenniveau
- Standardisierte Variation

$$Var(x) = s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

### Standardabweichung

- Metrisches Skalenniveau
- Quadratwurzel der Varianz
- Durchschnittliche Abweichung von Werten zum Arithmetischen Mittel

$$\sigma_{x_{Population}} = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s_{x_{Stichprobe}} = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

### Variationskoeffizient (Abweichungskoeffizient)

- Metrisches Skalenniveau
- Relatives Streuungsmaß, d.h. nicht abhängig von der Maßeinheit der Variable
- Standardabweichung in Relation zum Arithmetischen Mittel

$$V_x = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

## Standardfehler

- (Durchschnittliche) Abweichung von Stichprobenkennwerten zu Populationskennwerten, z.B. vom Mittelwert

### Standardfehler des Arithmetischen Mittelwertes (*Standard error of the mean*)

- Symbol des Populationsmittelwertes:  $\mu$
- Symbol des Stichprobenmittelwertes  $\bar{x}$

$$\sigma_{\bar{x}_{Population}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$s_{\bar{x}_{Stichprobe}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}_{Population, geschätzt}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{s^2}{n-1}}$$

### Standardfehler des Anteilwertes

- Symbol des Populationsanteilwertes:  $\pi$
- Symbol des Stichprobenanteilwertes:  $p_x$

$$\sigma(p_x)_{Population} = \sqrt{\frac{\pi_x \cdot (1 - \pi_x)}{n}}$$

Schätzung der Populationsvarianz:  $\pi_x \cdot (1 - \pi_x)$  aus der Stichprobenvarianz:  $p_x \cdot (1 - p_x)$

$$\hat{\sigma}(p_x)_{Population} = \sqrt{\frac{p_x \cdot (1 - p_x)}{n}}$$

## Konfidenzintervall

- Generalisierbarkeit von Parametern aus der Stichprobe (auf die Population)
- Geschätzter Intervallbereich, in dem Parameter der Grundgesamtheit mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegen
- Z-Standardisierung:  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

### Konfidenzintervall des Populationsmittelwertes ( $\mu_x$ )

- Kleine Stichproben: t-Verteilung
- Große Stichproben: Standardnormalverteilung

Bestimmung der Intervallgrenzen:

$$\bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n-1}} \cdot z_{(1-\frac{\alpha}{2})} < \mu_x < \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n-1}} \cdot z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$$

### Konfidenzintervall des Populationsanteilswertes ( $\pi_x$ )

- Standardnormalverteilung (wenn Stichprobe ausreichend groß)

Bestimmung der Intervallgrenzen:

$$p_x - \sqrt{\frac{p_x \cdot (1-p_x)}{n}} \cdot z_{(1-\frac{\alpha}{2})} < \pi_x < p_x + \sqrt{\frac{p_x \cdot (1-p_x)}{n}} \cdot z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$$

## t-Test

### t-Test: Mittelwert

#### t-Test für einen Mittelwert

- $H_0: \mu_1 = \mu$
- $H_A: \mu_1 \neq \mu$

Teststatistik:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s_x}{\sqrt{n-1}}}$$

- Kritische Testwerte bei  $z_\alpha$  und  $z_{(1-\alpha)}$

#### t-Test für 2 Mittelwerte

- $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
- $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Teststatistik:

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_{x_1}^2}{n_1-1} - \frac{s_{x_2}^2}{n_2-1}}}$$

- Kritische Testwerte bei  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  und  $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$

### t-Test: Populationsanteil

#### t-Test für einen Populationsanteil

- $H_0: \pi_1 = \pi$
- $H_A: \pi_1 \neq \pi$

Teststatistik:

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}}$$

- Kritische Testwerte bei  $z_\alpha$  und  $z_{(1-\alpha)}$

### t-Test für 2 Populationsanteile

- $H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$
- $H_A: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

Teststatistik:

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}}}$$

- Kritische Testwerte bei  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  und  $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$

### Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest ( $\chi^2$ )

- Bivariater Test auf stochastische Unabhängigkeit
  - $H_0$ : Beide Zufallsvariablen sind stochastisch *unabhängig* voneinander
  - $H_A$ : Beide Zufallsvariablen sind stochastisch *nicht unabhängig* voneinander

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- $i$ : "Zeilen"
- $j$ : "Spalten"
- $n_{ij}$ : Beobachtete Häufigkeiten
- $e_{ij}$ : Erwartete Häufigkeiten
  - $e_{ij} = \frac{n_i \cdot n_j}{n}$ 
    - \*  $n_i$ : Zeilenhäufigkeit
    - \*  $n_j$ : Spaltenhäufigkeit

Berechnung der Freiheitsgrade (*degrees of freedom*):  $df = (I - 1) \cdot (J - 1)$

### Zusammenhangsmaße auf Basis von $\chi^2$

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

$$\text{Cramer's } V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot (k - 1)}}$$

$$\text{Kontingenzkoeffizient } C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

$$C_{\text{korrigiert}} = \frac{C}{\sqrt{\frac{k-1}{k}}}$$

- $k$  = Kleinste Zeilenzahl oder Spaltenzahl

### F-Test – Einfaktorielle Varianzanalyse

- F-Test testet den Anteil erklärter Varianz an unerklärter Varianz zwischen mehreren Gruppen
- $x_{ij}$ : Beobachtung  $i$  in der Gruppe  $j$

- $\bar{x}_j$ : Mittelwert der Gruppe  $j$
- Varianz zwischen den Gruppen:  $\sum_{j=1}^p n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$   
–  $df_1 : j - 1$
- Varianz innerhalb der Gruppen:  $\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$   
–  $df_2 : n - j$

Teststatistik:

$$F = \frac{\text{erklärte Varianz}}{\text{unerklärte Varianz}} = \frac{\frac{\text{Varianz zwischen den Gruppen}}{df_1}}{\frac{\text{Varianz innerhalb der Gruppen}}{df_2}} = \frac{\frac{\sum_{j=1}^p n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{j-1}}{\frac{\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n-j}}$$

## Metrische Zusammenhangsmaße

### Kovarianz

- Kovarianz: Gemeinsame Varianz von 2 Variablen  
–  $[-\infty, \infty]$

$$Cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

### Korrelation (Pearson-Korrelation: $r$ )

- Korrelationskoeffizient: Standardisierte Kovarianz  
–  $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} r_{x,y} = Corr(x, y) &= \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \end{aligned}$$

## Lineare Regression

### Einfache lineare Regression

Lineare Modellfunktion:  $y = \alpha + \beta x$

- $y$ : Zielgröße
- $\alpha$ : Konstante ( $y$ -Achsenabschnitt)
- $\beta$ : Steigung

Lineare Regressionsgleichung:  $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$

- Ziel: Finden der geschätzten Werte  $\hat{\alpha}$  und  $\hat{\beta}$  für die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$ , die die Regressionsgleichung am besten nachbilden können (den besten *fit* ermöglichen)
- $x_i$ : Beobachtung  $i$  der unabhängigen Variable  $x$

- $\varepsilon_i$ : Fehlerterm (Residuum): Abweichung der empirischen Beobachtung  $y_i$  und dem geschätzten Wert der Regressionsgleichung  $\hat{y}_i$
- “Geschätzte” Abweichung der Regressionsgerade von der empirischen Beobachtung:  $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \alpha - \beta_{x_i}$

Ziel der geschätzten Regressionsgleichung (Regressionsgerade): Minimierung der Summe der residualen Quadrate  $\hat{\varepsilon}_i^2$  - Minimierung von:  $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta_{x_i})^2$

Schätzung des Regressionskoeffizienten  $\beta$ :  $\hat{\beta}$

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{Cov(x, y)}{Var(x)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= r_{x,y} \cdot \frac{s_y}{s_x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\end{aligned}$$

Schätzung der Regressionskonstanten  $\alpha$ :  $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

## Multiple linear Regression

Multiple linear Regressionsgleichung:  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$

- Schätzung der linearen Regression anhand  $k$  unabhängiger Variablen für  $i = 1, \dots, n$

Matrixschreibweise der Multiplen linearen Regressionsgleichung:  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$

- Schätzung von  $\beta$  anhand Kleinste-Quadrate-Schätzung (*OLS*):

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

- $\mathbf{X}'$ : Transponierte Matrix von  $\mathbf{X}$
- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ : Inverse Matrix von  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$