

# 第七章 参数估计

李德山

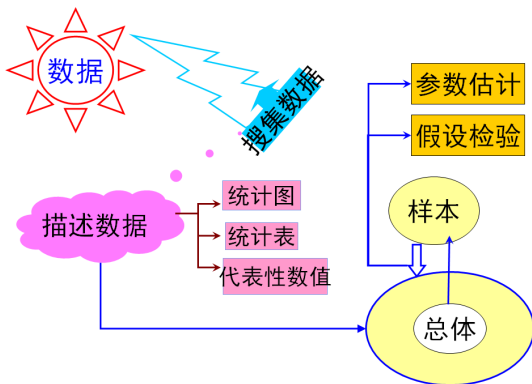
四川师范大学商学院

2022 年 4 月 2 日

# Contents

- ① 参数估计的一般问题
- ② 一个总体参数的区间估计
- ③ 两个总体参数的区间估计
- ④ 样本量的确定

- 推断统计：参数估计、假设检验



# 问题的提出

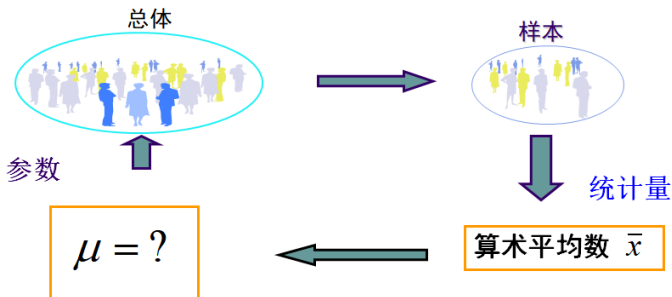
- 总体参数的估计量往往会有多个，我们总希望选择“较好”的估计量来对未知参数作出推断，如何判断一个估计量“好”还是“不好”呢？
- “好”的标准是什么？

- ① 参数估计的一般问题
- ② 一个总体参数的区间估计
- ③ 两个总体参数的区间估计
- ④ 样本量的确定

# 估计量与估计值

- 估计量 (estimator): 用于估计总体参数的随机变量
  - 如样本均值, 样本比例, 样本方差等
  - 例如: 样本均值就是总体均值  $\mu$  的一个估计量
- 参数用  $\theta$  表示, 估计量用  $\hat{\theta}$  表示
- 估计值 (estimated value): 估计参数时计算出来的统计量的具体值
  - 如果样本均值  $\bar{x}=80$ , 则 80 就是  $\mu$  的估计值

# 估计量与估计值



# 点估计 point estimate

- 用样本的估计量的某个取值直接作为总体参数的估计值
  - 例如：用样本均值直接作为总体均值的估计；用两个样本均值之差直接作为总体均值之差的估计
- 无法给出估计值接近总体参数程度的信息
  - 虽然在重复抽样条件下，点估计的均值可望等于总体真值，但由于样本是随机的，抽出一个具体的样本得到的估计值很可能不同于总体真值
  - 一个点估计量的可靠性是由它的抽样标准误差来衡量的，这表明一个具体的点估计值无法给出估计的可靠性的度量

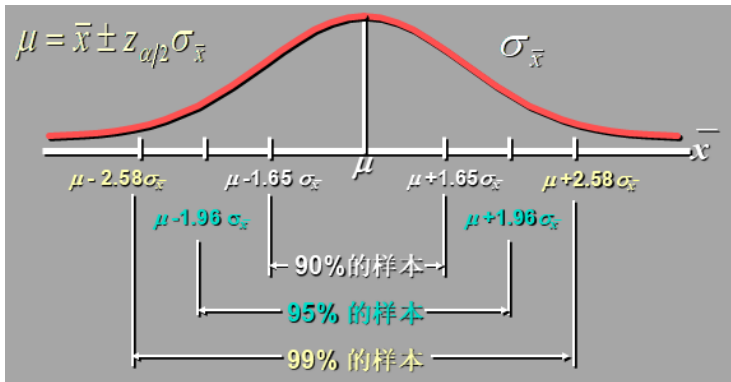


## 区间估计 interval estimate

- 在点估计的基础上，给出总体参数估计的一个区间范围，该区间由样本统计量加减估计误差而得到
- 根据样本统计量的抽样分布能够对样本统计量与总体参数的接近程度给出一个概率度量
  - 比如，某班级平均分数在 75 ~ 85 之间，置信水平是 95%



# 区间估计 interval estimate



# 置信水平 confidence level

- 将构造置信区间的步骤重复很多次，置信区间包含总体参数真值的次数所占的比例称为置信水平
- 表示为  $(1-\alpha)\%$ 
  - $\alpha$  为是总体参数未在区间内的比例
- 常用的置信水平值有 99%, 95%, 90%
  - 相应的  $\alpha$  为 0.01, 0.05, 0.10

## 置信区间 confidence interval

- 由样本统计量所构造的总体参数的估计区间称为置信区间
- 统计学家在某种程度上确信这个区间会包含真正的总体参数，所以给它取名为置信区间
- 用一个具体的样本所构造的区间是一个特定的区间，我们无法知道这个样本所产生的区间是否包含总体参数的真值
  - 我们只能是希望这个区间是大量包含总体参数真值的区间中的一个，但它也可能是少数几个不包含参数真值的区间中的一个
  - 总体参数以一定的概率落在这一区间的表述是错误的

# 置信区间 confidence interval

- 置信区间的推导：

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

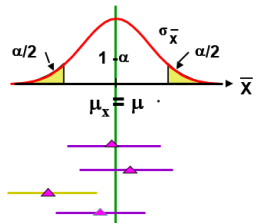
$$\Rightarrow \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 有限总体不重复抽样时，样本均值或比例的方差需要乘以“有限总体校正系数”（当抽样比  $f=n/N$  小于 0.05 时可以忽略不计），前面的公式需要进行相应的修改。

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

# 置信区间 confidence interval

- 在所有的置信区间中，有  $(1 - \alpha) * 100\%$  的区间包含总体真实值。
- 对于计算得到的一个具体区间，“这个区间包含总体真实值”这一结论有  $(1 - \alpha) * 100\%$  的可能是正确的。
- 说“总体均值有 95% 的概率落入某一区间”是不严格的，因为总体均值是非随机的。



# 置信区间 confidence interval

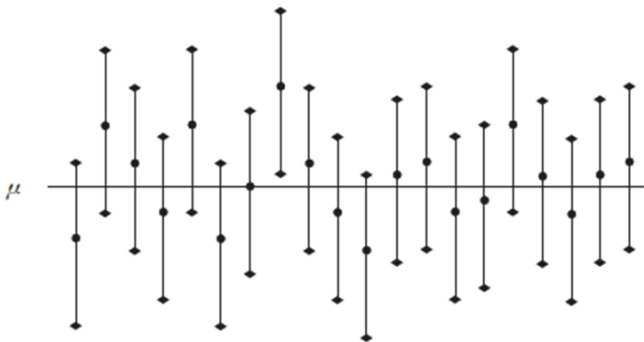


Figure: 重复构造出  $\mu$  的 20 个 95% 置信区间

# 评价准则

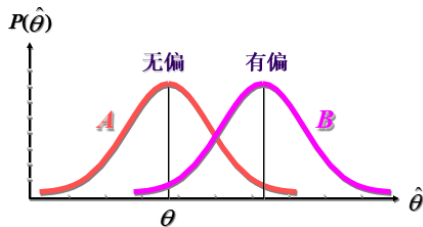
- 无偏性
- 有效性
- 一致性



# 无偏性 unbiasedness

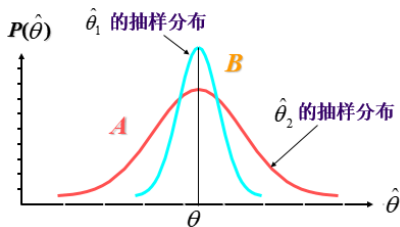
- 无偏性：估计量抽样分布的数学期望等于被估计的总体参数

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$



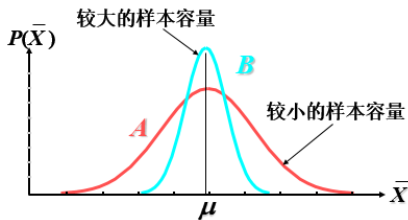
# 有效性 efficiency

- 有效性：对同一总体参数的两个无偏点估计量，有更小标准差的估计量更有效



# 一致性 consistency

- 一致性：随着样本量的增大，估计量的值越来越接近被估计的总体参数



- ① 参数估计的一般问题
- ② 一个总体参数的区间估计
- ③ 两个总体参数的区间估计
- ④ 样本量的确定

# 一个总体参数的区间估计

总体参数	符号表示	样本统计量
均值	$\mu$	$\bar{x}$
比例	$\pi$	$p$
方差	$\sigma^2$	$s^2$

## 一个总体参数的区间估计（大样本）

- 假定条件: 总体服从正态分布, 且方差  $\sigma^2$  已知; 如果不是正态分布, 可由正态分布来近似 ( $n \geq 30$ )
- 使用正态分布统计量  $z$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

- 总体均值  $\mu$  在  $\alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\sigma$  未知时

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

## 一个总体参数的区间估计（大样本）

- 【例】一家食品生产企业以生产袋装食品为主，为对食品质量进行监测，企业质检部门经常要进行抽检，以分析每袋重量是否符合要求。现从某天生产的一批食品中随机抽取了 25 袋，测得每袋重量如下表所示。已知产品重量的分布服从正态分布，且总体标准差为 10g。试估计该批产品平均重量的置信区间，置信水平为 95%

25袋食品的重量				
112.5	101.0	103.0	102.0	100.5
102.6	107.5	95.0	108.8	115.6
100.0	123.5	102.0	101.6	102.2
116.6	95.4	97.8	108.6	105.0
136.8	102.8	101.5	98.4	93.3

## 一个总体参数的区间估计（大样本）

- 解：已知  $X \sim N(\mu, 10^2)$ ,  $n = 25$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ ,  $z_{\alpha/2} = 1.96$ 。根据样本数据计算得： $\bar{x} = 105.36$ 。由于是正态总体，且方差已知。总体均值  $\mu$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned}\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 105.36 \pm 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{25}} \\ &= 105.36 \pm 3.92 \\ &= (101.44, 109.28)\end{aligned}$$

- 该食品平均重量的置信区间为 101.44g~109.28g



# 一个总体参数的区间估计（大样本）

- 【例】一家保险公司收集到由 36 个投保人组成的随机样本，得到每个投保人的年龄（单位：周岁）数据如下表。试建立投保人年龄 90% 的置信区间

36个投保人年龄的数据					
23	35	39	27	36	44
36	42	46	43	31	33
42	53	45	54	47	24
34	28	39	36	44	40
39	49	38	34	48	50
34	39	45	48	45	32

## 一个总体参数的区间估计（大样本）

- 解：已知  $n = 36$ ,  $1 - \alpha = 90\%$ ,  $z_{\alpha/2} = 1.645$ 。根据样本数据计算得： $\bar{x} = 39.5$ 。总体均值  $\mu$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned}\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} &= 39.5 \pm 1.645 \times \frac{7.77}{\sqrt{36}} \\ &= 39.5 \pm 2.13 \\ &= (37.37, 41.63)\end{aligned}$$

- 投保人平均年龄的置信区间为 37.37 岁 ~ 41.63 岁

## 总体均值的区间估计（小样本）

- 假定条件: 总体服从正态分布, 但方差  $\sigma^2$  未知; 小样本 ( $n < 30$ )
- 使用  $t$  统计量

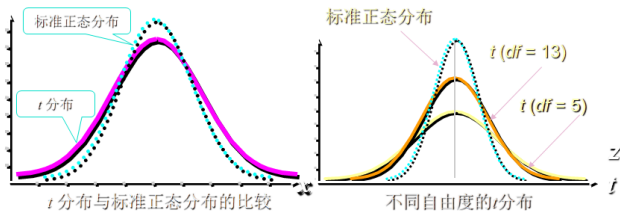
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- 总体均值  $\mu$  在  $1-\alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

## 总体均值的区间估计（小样本）

- $t$  分布是类似正态分布的一种对称分布，它通常要比正态分布平坦和分散。一个特定的分布依赖于称之为自由度的参数。随着自由度的增大，分布也逐渐趋于正态分布



## 总体均值的区间估计（小样本）

- 【例】已知某种灯泡的寿命服从正态分布，现从一批灯泡中随机抽取 16 只，测得其使用寿命（单位： $h$ ）如下。建立该批灯泡平均使用寿命 95% 的置信区间

16灯泡使用寿命的数据			
1510	1520	1480	1500
1450	1480	1510	1520
1480	1490	1530	1510
1460	1460	1470	1470

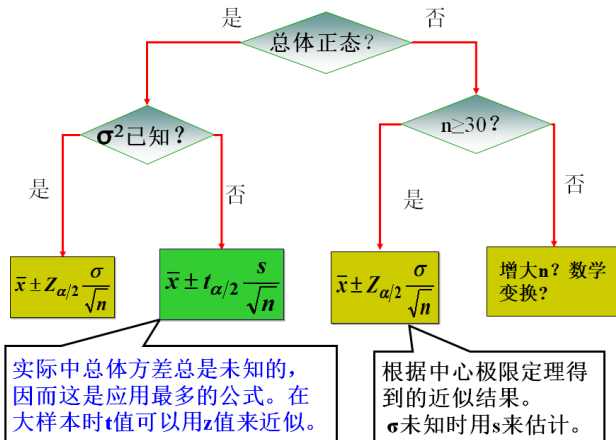
## 总体均值的区间估计（小样本）

- 解：已知  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $n = 16$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ ,  $t_{\alpha/2} = 2.131$ 。根据样本数据计算得： $\bar{x} = 1490$ 。  $s = 24.77$ 。总体均值  $\mu$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned}\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} &= 1490 \pm 2.131 \times \frac{24.77}{\sqrt{16}} \\ &= 1490 \pm 13.2 \\ &= (1476.8, 1503.2)\end{aligned}$$

- 该种灯泡平均使用寿命的置信区间为 1476.8h~1503.2h

# 总体均值的区间估计



## 总体比例的区间估计

- 假定条件: 总体服从二项分布; 可以由正态分布来近似
- 使用正态分布统计量  $z$

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

- 总体比例  $\pi$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$p \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- 当  $n\hat{p} \geq 5$ ,  $n(1 - \hat{p}) \geq 5$  时总体比例的置信区间可以使用正态分布来进行区间估计。



## 总体比例的区间估计

- 【例】某城市想要估计下岗职工中女性所占的比例，随机地抽取了 100 名下岗职工，其中 65 人为女性职工。试以 95% 的置信水平估计该城市下岗职工中女性比例的置信区间
- 解：已知  $n = 100$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ ,  $z_{\alpha/2} = 1.96$ 。根据样本数据计算得下岗职工中女性比例  $\pi$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned} & p \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= 65\% \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{65\%(1-65\%)}{100}} \\ &= 65\% \pm 9.35\% \\ &= (55.65\%, 74.35\%) \end{aligned}$$

- 该城市下岗职工中女性比例的置信区间为 55.65%~74.35%

## 总体比例的区间估计

- 【例】某城市想要估计下岗职工中女性所占的比例，随机地抽取了 100 名下岗职工，其中 65 人为女性职工。试以 95% 的置信水平估计该城市下岗职工中女性比例的置信区间
- 解：已知  $n = 100$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ ,  $z_{\alpha/2} = 1.96$ 。根据样本数据计算得下岗职工中女性比例  $\pi$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned} & p \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= 65\% \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{65\%(1-65\%)}{100}} \\ &= 65\% \pm 9.35\% \\ &= (55.65\%, 74.35\%) \end{aligned}$$

- 该城市下岗职工中女性比例的置信区间为 55.65%~74.35%

# 总体方差的区间估计

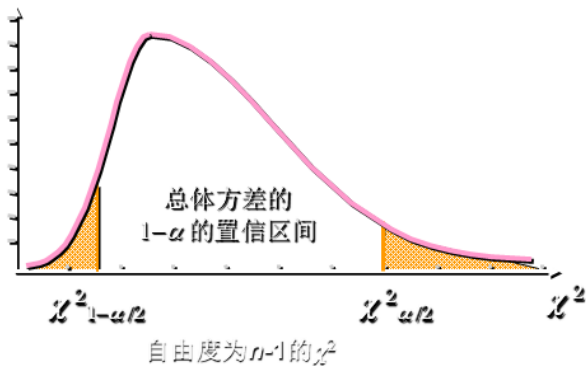
- 估计一个总体的方差或标准差
- 假设总体服从正态分布
- 总体方差  $\sigma^2$  的点估计量为  $s^2$ , 且

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 总体方差在  $1-\alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}$$

# 总体方差的区间估计



## 总体方差的区间估计

- 【例】一家食品生产企业以生产袋装食品为主，现从某天生产的一批食品中随机抽取了 25 袋，测得每袋重量如下表所示。已知产品重量的分布服从正态分布。以 95% 的置信水平建立该种食品重量方差的置信区间

25袋食品的重量				
112.5	101.0	103.0	102.0	100.5
102.6	107.5	95.0	108.8	115.6
100.0	123.5	102.0	101.6	102.2
116.6	95.4	97.8	108.6	105.0
136.8	102.8	101.5	98.4	93.3

## 总体方差的区间估计

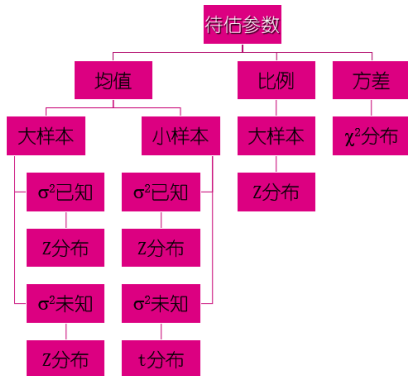
- 解：已知  $n = 25$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ 。根据样本数据计算得  $s^2 = 93.21$ ,  $\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(24) = 39.3641$ ,  $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(24) = 12.4011$
- $\sigma^2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\frac{(25-1) \times 93.21}{39.3641} \leq \sigma^2 \leq \frac{(25-1) \times 93.21}{12.4011}$$

$$56.83 \leq \sigma^2 \leq 180.39$$

- 该企业生产的食品总体重量标准差的的置信区间为 7.54g~13.43g

# 一个总体参数的区间估计



- ① 参数估计的一般问题
- ② 一个总体参数的区间估计
- ③ 两个总体参数的区间估计
- ④ 样本量的确定



# 两个总体参数的区间估计

总体参数	符号表示	样本统计量
均值差	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
比例差	$\pi_1 - \pi_2$	$p_1 - p_2$
方差比	$\sigma_1^2 / \sigma_2^2$	$s_1^2 / s_2^2$

## 两个总体参数的区间估计（大样本）

- 假定条件：
- 两个总体都服从正态分布， $\sigma_1^2$ 、 $\sigma_2^2$  已知
- 若不是正态分布，可以用正态分布来近似 ( $n_1 \geq 30$  和  $n_2 \geq 30$ )
- 两个样本是独立的随机样本
- 使用正态分布统计量  $z$

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

## 两个总体参数的区间估计

- $\sigma_1^2$ 、 $\sigma_2^2$  已知时，两个总体均值之差  $\mu_1 - \mu_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- $\sigma_1^2$ 、 $\sigma_2^2$  未知时，两个总体均值之差  $\mu_1 - \mu_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

## 两个总体参数的区间估计

- 【例】某地区教育管理部门想估计两所中学的学生高考时的英语平均分数之差，为此在两所中学独立抽取两个随机样本，有关数据如右表。建立两所中学高考英语平均分数之差 95% 的置信区间

两个样本的有关数据	
中学1	中学2
$n_1=46$	$n_2=33$
$\bar{x}_1=86$	$\bar{x}_2=78$
$s_1=5.8$	$s_2=7.2$

## 两个总体参数的区间估计

- 两个总体均值之差在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned} & (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \\ & = (86 - 78) \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{5.8^2}{46} + \frac{7.2^2}{33}} \\ & = 8 \pm 2.97 = (5.03, 10.97) \end{aligned}$$

- 两所中学高考英语平均分数之差的置信区间为 5.03 分 ~ 10.97 分

## 两个总体参数的区间估计

- 两个总体均值之差在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned} & (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \\ & = (86 - 78) \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{5.8^2}{46} + \frac{7.2^2}{33}} \\ & = 8 \pm 2.97 = (5.03, 10.97) \end{aligned}$$

- 两所中学高考英语平均分数之差的置信区间为 5.03 分 ~ 10.97 分

## 两个总体均值之差的估计（小样本，方差相等）

- 假定条件：
- 两个总体都服从正态分布
- 两个总体方差未知但相等， $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- 两个独立的小样本（ $n_1 < 30$  和  $n_2 < 30$ ）
- 总体方差的合并估计量

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- 估计量  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  的抽样标准差

$$\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

## 两个总体均值之差的估计

- 两个样本均值之差的标准化的

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

- 两个总体均值之差  $\mu_1 - \mu_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \sqrt{s_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$



## 两个总体均值之差的估计

- 【例】为估计两种方法组装产品所需时间的差异，分别对两种不同的组装方法各随机安排 12 名工人，每个工人组装一件产品所需的时间 (单位: min) 下如表。假定两种方法组装产品的时间服从正态分布，且方差相等。试以 95% 的置信水平建立两种方法组装产品所需平均时间差值的置信区间

两个方法组装产品所需的时间			
方法1		方法2	
28.3	36.0	27.6	31.7
30.1	37.2	22.2	26.0
29.0	38.5	31.0	32.0
37.6	34.4	33.8	31.2
32.1	28.0	20.0	33.4
28.8	30.0	30.2	26.5

## 两个总体均值之差的估计

- 解：根据样本数据计算得， $\bar{x}_1 = 32.5, s_1^2 = 15.996, \bar{x}_2 = 28.8, s_2^2 = 19.358$
- 合并估计量为

$$s_p^2 = \frac{(12-1) \times 15.996 + (12-1) \times 19.358}{12+12-2} = 17.677$$

$$(32.5 - 28.8) \pm 2.0739 \times \sqrt{17.677 \times \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right)} = 3.7 \pm 3.56$$

- 两种方法组装产品所需平均时间之差的置信区间为 0.14min~7.26min

# 两个总体均值之差的估计（小样本，方差不等）

- 假定条件：
- 两个总体都服从正态分布
- 两个总体方差未知但不相等， $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- 两个独立的小样本（ $n_1 < 30$  和  $n_2 < 30$ ）
- 使用估计量

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(v)$$

## 两个总体均值之差的估计

- 两个总体均值之差  $\mu_1 - \mu_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2}(v) \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

## 两个总体均值之差的估计

- 【例】沿用前例。假定第一种方法随机安排 12 名工人，第二种方法随机安排 8 名工人，即  $n_1=12$ ,  $n_2=8$ ，所得的有关数据如表。假定两种方法组装产品的时间服从正态分布，且方差不相等。以 95% 的置信水平建立两种方法组装产品所需平均时间差值的置信区间

两个方法组装产品所需的时间			
方法1		方法2	
28.3	36.0	27.6	31.7
30.1	37.2	22.2	26.5
29.0	38.5	31.0	
37.6	34.4	33.8	
32.1	28.0	20.0	
28.8	30.0	30.2	

## 两个总体均值之差的估计

- 解: 根据样本数据计算得,  $\bar{x}_1 = 32.5, s_1^2 = 15.996, \bar{x}_2 = 27.875, s_2^2 = 23.014$
- 自由度为:

$$v = \frac{\left(\frac{15.996}{12} + \frac{23.014}{8}\right)^2}{\frac{(15.996/12)^2}{12-1} + \frac{(23.014/8)^2}{8-1}} = 13.188 \approx 13$$

$$(32.5 - 27.875) \pm 2.1604 \times \sqrt{\frac{15.996}{12} + \frac{23.014}{8}} = 4.625 \pm 4.433$$

- 两种方法组装产品所需平均时间之差的置信区间为 0.192min~9.058min

## 两个总体均值之差的区间估计 (匹配大样本)

- 假定条件:
- 两个匹配的大样本 ( $n_1 \geq 30$  和  $n_2 \geq 30$ )
- 两个总体各观察值的配对差服从正态分布
- 两个总体均值之差  $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\bar{d} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

- $\bar{d}$  为对应差值的均值,  $\sigma_d$  为对应差值的标准差

## 两个总体均值之差的估计 (匹配小样本)

- 假定条件:
- 两个匹配的小样本 ( $n_1 < 30$  和  $n_2 < 30$ )
- 两个总体各观察值的配对差服从正态分布
- 两个总体均值之差  $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$



## 两个总体均值之差的估计

- 【例】由 10 名学生组成一个随机样本，让他们分别采用 A 和 B 两套试卷进行测试，结果如下表。试建立两种试卷分数之差  $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$  95% 的置信区间

10名学生两套试卷的得分			
学生编号	试卷A	试卷B	差值d
1	78	71	7
2	63	44	19
3	72	61	11
4	89	84	5
6	91	74	17
5	49	51	-2
7	68	55	13
8	76	60	16
9	85	77	8
10	55	39	16

## 两个总体均值之差的估计

- 解: 根据样本数据计算得

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n_d} = \frac{110}{10} = 11, s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n_d - 1}} = 6.53$$

$$\begin{aligned} \bar{d} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s_d}{\sqrt{n}} &= 11 \pm 2.2622 \times \frac{6.53}{\sqrt{10}} \\ &= 11 \pm 4.67 \end{aligned}$$

- 两种试卷所产生的分数之差的置信区间为 6.33 分 ~ 15.67 分

## 两个总体比例之差的区间估计

- 假定条件:
- 两个总体服从二项分布
- 可以用正态分布来近似
- 两个样本是独立的
- 两个总体比例之差  $\pi_1 - \pi_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$(p_1 - p_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

## 两个总体比例之差的估计

- 【例】在某个电视节目的收视率调查中，农村随机调查了 400 人，有 32% 的人收看了该节目；城市随机调查了 500 人，有 45% 的人收看了该节目。试以 95% 的置信水平估计城市与农村收视率差别的置信区间

## 两个总体比例之差的估计

- 解：已知  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 400$ ,  $p_1 = 45\%$ ,  $p_2 = 32\%$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ ,  $z_{\alpha/2} = 1.96$
- 两个总体比例之差  $\pi_1 - \pi_2$  在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned} & (45\% - 32\%) \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{45\% \times (1 - 45\%)}{500} + \frac{32\% \times (1 - 32\%)}{400}} \\ & = 13\% \pm 6.32\% = (6.68\%, 19.32\%) \end{aligned}$$

- 城市与农村收视率差值的置信区间为 6.68%~19.32%

## 两个总体方差比的区间估计

- 比较两个总体的方差比
- 用两个样本的方差比来判断
  - 如果  $s_1^2/s_2^2$  接近于 1, 说明两个总体方差很接近
  - 如果  $s_1^2/s_2^2$  远离 1, 说明两个总体方差之间存在差异
- 总体方差比在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}}$$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2, n_1)}$$

# 两个总体方差比的区间估计

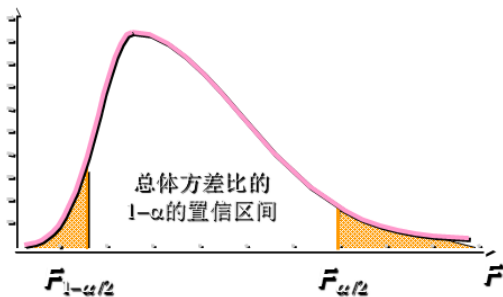


Figure: 方差比置信区间示意图

## 两个总体方差比的区间估计

- 【例】为了研究男女学生在生活费支出 (单位: 元) 上的差异, 在某大学各随机抽取 25 名男学生和 25 名女学生, 得到下面的结果。试以 90% 置信水平估计男女学生生活费支出方差比的置信区间

$$\begin{array}{ll} \text{男学生: } \bar{x}_1 = 520 & s_1^2 = 260 \\ \text{女学生: } \bar{x}_2 = 480 & s_2^2 = 280 \end{array}$$

Figure: 方差比置信区间示意图



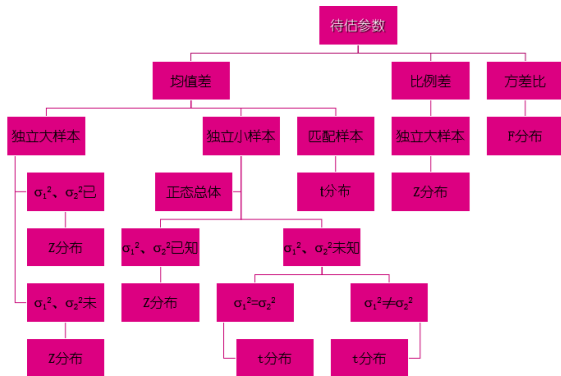
## 两个总体方差比的区间估计

- 解:  $n_1 = 25 - 1 = 24$ ,  $n_2 = 25 - 1 = 24$ , 查表  $F_{\alpha/2}(24) = 1.98$ ,  $F_{1-\alpha/2}(24) = 1/1.98 = 0.505$
- 总体方差比在  $1 - \alpha$  置信水平下的置信区间为

$$\frac{260/280}{1.98} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{260/280}{0.505}$$

- 男女学生生活费支出方差比的置信区间为 0.47~1.84

# 两个总体参数的区间估计



- ① 参数估计的一般问题
- ② 一个总体参数的区间估计
- ③ 两个总体参数的区间估计
- ④ 样本量的确定

## 估计总体均值时样本量的确定

- 估计总体均值时样本量  $n$  为

$$n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 \sigma^2}{E^2}, \text{ 其中: } E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 样本量  $n$  与总体方差  $\sigma^2$ 、估计误差  $E$ 、可靠性系数  $Z$  或  $t$  之间的关系为：与总体方差成正比；与估计误差的平方成反比；与可靠性系数成正比。
- 样本量的圆整法则：当计算出的样本量不是整数时，将小数点后面的数值一律进位成整数，如 24.68 取 25，24.32 也取 25 等等

## 估计总体均值时样本量的确定

- 【例】拥有工商管理学士学位的大学毕业生年薪的标准差大约为 2000 元，假定想要估计年薪 95% 的置信区间，希望估计误差为 400 元，应抽取多大的样本量？
- 解：已知  $\sigma=2000$ ,  $E=400$ ,  $1-\alpha=95\%$ ,  $z_{\alpha/2}=1.96$
- 应抽取的样本量为

$$\begin{aligned} n &= \frac{(z_{\alpha/2})^2 \sigma^2}{E^2} = \frac{(1.96)^2 \times 2000^2}{400^2} \\ &= 96.04 \approx 97 \end{aligned}$$

## 估计总体均值时样本量的确定

- 【例】拥有工商管理学士学位的大学毕业生年薪的标准差大约为 2000 元，假定想要估计年薪 95% 的置信区间，希望估计误差为 400 元，应抽取多大的样本量？
- 解：已知  $\sigma=2000$ ,  $E=400$ ,  $1-\alpha=95\%$ ,  $z_{\alpha/2}=1.96$
- 应抽取的样本量为

$$\begin{aligned} n &= \frac{(z_{\alpha/2})^2 \sigma^2}{E^2} = \frac{(1.96)^2 \times 2000^2}{400^2} \\ &= 96.04 \approx 97 \end{aligned}$$

# 估计总体比例时样本量的确定

- 根据比例区间估计公式可得样本量  $n$  为

$$n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 \cdot \pi(1 - \pi)}{E^2} \quad \text{其中: } E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}$$

- $E$  的取值一般小于 0.1
- $\pi$  未知时, 可取使方差达到最大的值 0.5

## 估计总体均值时样本量的确定

- 【例】根据以往的生产统计，某种产品的合格率约为 90%，现要求估计误差为 5%，在求 95% 的置信区间时，应抽取多少个产品作为样本？
- 解：已知  $\pi=90\%$ ， $\alpha=5\%$ ， $z_{\alpha/2} = 1.96$ ， $E=5\%$
- 应抽取的样本量为

$$\begin{aligned} n &= \frac{(z_{\alpha/2})^2 \cdot \pi(1-\pi)}{E^2} \\ &= \frac{(1.96)^2 \times 0.9 \times (1-0.9)}{0.05^2} \\ &= 138.3 \approx 139 \end{aligned}$$



## 估计总体均值时样本量的确定

- 【例】根据以往的生产统计，某种产品的合格率约为 90%，现要求估计误差为 5%，在求 95% 的置信区间时，应抽取多少个产品作为样本？
- 解：已知  $\pi=90\%$ ， $\alpha=5\%$ ， $z_{\alpha/2} = 1.96$ ， $E=5\%$
- 应抽取的样本量为

$$\begin{aligned} n &= \frac{(z_{\alpha/2})^2 \cdot \pi(1-\pi)}{E^2} \\ &= \frac{(1.96)^2 \times 0.9 \times (1-0.9)}{0.05^2} \\ &= 138.3 \approx 139 \end{aligned}$$

# 补充内容

- 内容参见 Bilibili 《计量经济学》-概率论与统计相关知识

## 参考资料

- 贾俊平. 《统计学》(第八版) [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2021.
- 洪永淼. 《概率论与统计学 (第二版)》[M]. 北京: 中国统计出版社, 2022.
- 刘杨. 《统计学》[M]. 北京: 中国统计出版社, 2010.

Q&A

THANK YOU