假设 $T_L(\hat{\Sigma}) = \begin{cases} \hat{\sigma}_{ij} & \text{if } L_{ij}=1 \\ \hat{\sigma}_{ij} & \text{if } L_{ij}=0,\ \hat{\sigma}_{ij}>t \\ 0 & \text{if } \hat{\sigma}_{ij}<t \end{cases}$ 可以改成 soft threshold

现在做 $\|T(\hat{\Sigma})-\Sigma\| \leq \underbrace{\|T(\hat{\Sigma})-T(\Sigma)\|}_{\text{II}} + \underbrace{\|T(\Sigma)-\Sigma\|}_{\text{I}}$

$$\text{I} = \| [\sigma_{ij}\hat{L}^0_{ij}(\sigma_{ij}<t)] \| \leq \max_i \sum_{j=1}^{p} |\sigma_{ij}| \hat{L}^0_{ij} \, 1(\sigma_{ij}<t)$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^{p} |\sigma_{ij}| L^0_{ij} (\sigma_{ij}<t) + \max_i \sum_{j=1}^{p} |\sigma_{ij}| |\hat{L}_{ij}-L_{ij}| \{\sigma_{ij}<t\}$$

Assume $\max_{ij} |\hat{L}_{ij} - L_{ij}| = O_p(k_n)$

$$\text{I} = O_p(t^{1-q} c_0(p)) + \max_i \sum_{j=1}^{p} |\sigma_{ij}| \{\sigma_{ij}<t\} \cdot O_p(k_n)$$

$$= O_p(t^{1-q} c_0(p)) + O_p(t^{1-q} c_0(p) k_n + t c_1(p) k_n) \qquad \text{I}$$

$$\text{II} = \|T(\hat{\Sigma}) - T(\Sigma)\| = \begin{cases} \hat{L}_{ij}=1 & |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| & \text{II}_1 \\ \hat{L}_{ij}=0 & |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| \{\hat{\sigma}_{ij}>t,\ \sigma_{ij}>t\} & \text{II}_2 \\ & |\hat{\sigma}_{ij}| \{\hat{\sigma}_{ij}>t,\ \sigma_{ij}\leq t\} & \text{II}_3 \\ & |\sigma_{ij}| \{\hat{\sigma}_{ij}<t,\ \sigma_{ij}>t\} & \text{II}_4 \end{cases}$$

$$\text{II} \leq \max_i \sum_j |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| \hat{L}^1_{ij} + \hat{L}^0_{ij} [\text{II}_2 + \text{II}_3 + \text{II}_4]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{If } L^1_{ij},\ \hat{L}^1_{ij} - L^1_{ij} = \{0, -1\} \\ L^0_{ij},\ \hat{L}^1_{ij} - L^1_{ij} = \{1, 0\} \end{array}}$$

$$\text{II}_1 \leq \max_i \sum_j |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| L^1_{ij} + \max \sum_j |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| (\hat{L}^1_{ij} - L^1_{ij})$$

$$\lesssim \max_{ij} \{ |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| L^1_{ij} \} + t^{1-q} c_0(p) k_n$$

$$\cancel{\max_{ij} |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| L_{ij} = O_p\left(p c_1(p) \sqrt{\frac{\log p}{n}}\right)}$$

$$\max_i \sum_j |\hat{\sigma}_{ij}-\sigma_{ij}| L^1_{ij}, \quad P\left[\max_i \sum_j \geq \tau\right] \leq c_1(p) p e^{-n\tau^2\gamma}$$

$$A e^{-B\tau^2} = e^{\log A - B\tau^2} = e^{-x}$$

$$\tau = M\sqrt{\frac{\log A}{B}} \qquad e^{\log A - M^2 \frac{\log A}{B} \cdot B} = e^{\log A (1-M^2)}$$

$\therefore\ \mathrm{II}_1 \lesssim \sqrt{\frac{\log p}{n}}\, C_1(p)$

For $\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3, \mathrm{II}_4$, it's same as usual thresholding except, adding $\hat{L}^0_{ij} - L^0_{ij} \le L^1_{ij}(\hat{L}^0_{ij})$

假设 $R_n \to 0$, then everything is fine.