1 Wstęp

Celem opracowania jest rozwiązanie następującego równania:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \tag{1}$$

Przyjmując że $G = 1$

Z następującymi warunkami brzegowymi:

$$\phi(0) = 5$$
$$\phi(3) = 7$$

Gdzie ϕ jest funkcją poszukiwaną taką, że:

$$[0, 3] \ni x \to \phi(x) \in \mathbb{R}$$

Funkcja ρ jest dana:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \\ 0, & x \in (2, 3] \end{cases}$$

2 Wprowadzenia sformułowania wariacyjnego

Mnożymy obie strony równania przez funkcję testową v:

$$\phi''(x)v(x) = 4\pi\rho(x)v(x) \tag{2}$$

Całkujemy obustronnie po dziedzinie:

$$\int_0^3 \phi''(x)v(x)\,dx = 4\pi \int_0^3 \rho(x)v(x)\,dx \tag{3}$$

Całkujemy przez części żeby pozbyć się drugiej pochodnej:

$$\phi'(x)v(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 \phi'(x)v'(x)\,dx = 4\pi \int_1^2 v(x)\,dx \tag{4}$$

Ponieważ obustronnie zadano warunek Dirichleta, funkcje testowe v zerują się na brzegu dziedziny:

$$-\int_0^3 \phi'(x)v'(x)\,dx = 4\pi G\int_1^2 v(x)\,dx \tag{5}$$

Będziemy poszukiwać rozwiązań w formie $\phi = w + u$, gdzie:

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 5\\ \phi(3) &= 7\\ w(0) &= 0\\ w(3) &= 0\end{aligned}$$

Przyjmujemy więc funkcję u która posłuży nam na końcu żeby przesunąć rozwiązanie:

$$u(x) = \frac{2}{3}x + 5 \tag{6}$$

Wzory na B oraz L:

$$B(\phi, v) = -\int_0^3 \phi'(x)v'(x)\,dx \tag{7}$$

$$L(v) = 4\pi\int_1^2 v(x)\,dx \tag{8}$$

3 Funkcje testowe

Obieramy N punktów podziałowych dla obszaru dziedziny, gdzie N zawiera również punkty brzegowe. Biorąc pod uwagę, że z każdej strony został określony brzeg Dirichleta, ostatnia oraz pierwsza funkcja testowa może zostać pominięta. Niech $h = \frac{3}{N}$ oznacza długość przedziału. Funkcje testowe definiujemy następująco: (gdzie n jest w $\{1, 2, \ldots, (N-2)\}$):

$$e_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - n + 1, & x \in [h(n-1), hn] \\ \frac{x}{h} - n + 1, & x \in [hn, h(n+1)] \end{cases}$$

4 Równanie w postaci macierzowej

Otrzymujemy więc następujące równanie macierzowe: $A \cdot W = X$

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \cdots & B(e_{N-2},e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & \cdots & B(e_{N-2},e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1,e_{N-2}) & B(e_2,e_{N-2}) & \cdots & B(e_{N-2},e_{N-2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{N-2}) \end{bmatrix}$$

Gdzie W jest rozwiązaniem równania dla kolejnych węzłów bez shiftu.

Żeby uwzględnić warunki Diricheleta każdy element W mnożymy przez u

5 Uproszczenie wartości $B(u, v)$

Każdą pojedynczą całkę $B(e_i, e_j)$ liczymy w granicach $[h(n-1), h(n+1)]$, ponieważ poza tym przedziałem się zerują.

Dla każdej całki $B(e_a, e_b)$, gdzie $|a-b| > 1$, mamy $B(e_a, e_b) = 0$, ponieważ iloczyny takich funkcji sprowadzają się do zera.

Dla dowolnego e_a i e_b zachodzi $B(e_a, e_b) = B(e_b, e_a)$, ponieważ jest to forma symetryczna.