第一周作业

问题 1.

当$|x-\hat{x}| \ll x$时，可以认为$\widetilde{E}_{rel} \approx E_{rel}$，此时二者均可以表征$x$与$\hat{x}$之间的相对误差。但由于计算$\widetilde{E}_{rel}$时无需$x$的精确值，只需$\hat{x}$与$x$之间的绝对误差和$x$的估计值$\hat{x}$即可求解，故在此情形下，可以用$\widetilde{E}_{rel}$替代$E_{rel}$表征 x与$\hat{x}$之间的相对误差。

更精确地，由于

$$\frac{E_{rel}}{\widetilde{E}_{rel}} = \frac{|\hat{x}|}{|x|} \leq \frac{|x| + |\hat{x} - x|}{|x|} = 1 + E_{rel}$$

得

$$E_{rel} \leq \frac{\widetilde{E}_{rel}}{1 - \widetilde{E}_{rel}}$$

同理，有

$$\frac{E_{rel}}{\widetilde{E}_{rel}} = \frac{|\hat{x}|}{|x|} \geq \frac{|\hat{x}|}{|x - \hat{x}| + |\hat{x}|} = \frac{1}{1 + \widetilde{E}_{rel}}$$

得

$$E_{rel} \geq \frac{\widetilde{E}_{rel}}{1 + \widetilde{E}_{rel}}$$

于是

$$\frac{\widetilde{E}_{rel}}{1 + \widetilde{E}_{rel}} \leq E_{rel} \leq \frac{\widetilde{E}_{rel}}{1 - \widetilde{E}_{rel}}$$

基于此，在需要更精确相对误差的情况下，可以根据计算得到的$\widetilde{E}_{rel}$进一步精确估计E_{rel}的值。

问题 2.

采用$Taylor$展开，在$x \approx 0$ 时，有

$$f(x) = \tan x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right) = \frac{x^3}{2} + o(x^5)$$

即使用$\frac{x^3}{2}$估计$f(x)$的值可以一定程度上避免数值误差。

问题 3.

记矩阵A在第i行的主元为$pivot_i(A)$。一方面，由于

$$col_i(L) = \frac{col_i(A)}{pivot_i(A)}$$

故$A_{i,j} = 0 \Leftrightarrow L_{i,j} = 0$，也即矩阵$L$同样含有半宽带$\beta$。

另一方面，U是A进行高斯消元过程中回代步骤前的中间矩阵。基于高斯消元的步骤，处于上方行的 0 元素不会在之后的操作中被修改。由归纳法，可知U阵同样含有半宽带β。

问题 4.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

问题 5.

可执行 Matlab 代码见 Problem5.m。描述高斯消元法解多元方程组$Ax = b$的时间效率与方阵大小关系的图线如下(对数底数为e)