作业10

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 11 月 24 日

题目1. 设A是一个Hermite阵.详细描述如何在应用隐式QR算法之前,把A酉相似变换为一个实三对角矩阵.

解答. 对于第k次循环,取Householder矩阵H_k,使得$A \leftarrow H_k A$后,有

$$\begin{cases} A(k+1,k) \leftarrow \|A(k+1:n,k)\|_2 \\ A(k+2:n,k) \leftarrow 0 \end{cases},$$

则对称地,在$A \leftarrow AH_k$后,A阵上三角的对应部分同时会被消成0. 上述过程循环$n-2$次,每次均做迭代$A \leftarrow H_k A H_k^*$,即得

$$T = (H_{n-2}H_{n-3}...H_1)A(H_1...H_{n-3}H_{n-2})$$

是一个三对角阵.

题目2. 设A,B均为$n \times n$的实对称矩阵,其中B还是一个正定阵.证明:AB是可对角化的,并设计一种算法来计算AB的所有特征对.

解答. 对称正定阵B有Cholesky分解$B = LL^T$,于是有

$$L^T AB(L^T)^{-1} = L^T AL.$$

这表明AB相似于一个实对称阵,故AB是可对角化的.

于是计算AB的所有特征对相当于计算实对称阵$L^T AL$的所有特征对,采用对称QR算法即可.

题目3. 实现计算矩阵指数的scaling-and-squaring算法(结合截断Taylor级数).通过一些已知谱分解的可对角化矩阵来测试算法的准确性.

解答. (图1代码见Problem3.m)

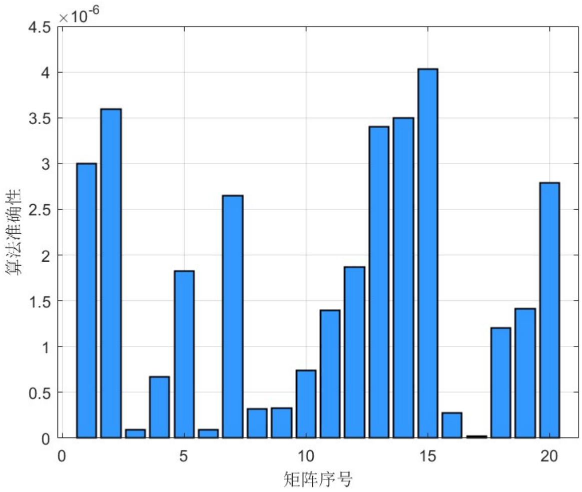

图 1: scaling-and-squaring算法的准确性$\left\|(e^{\frac{A}{2^k}})^{2^k} - \mathrm{expm}(A)\right\|_F$

题目4. 设A和E是满足$AE = EA$的Hermite矩阵.尝试给出

$$\|\exp(A+E) - \exp(A)\|_2$$

的上界.同时确保这个上界在$\|E\|_2 \to 0$时趋于0.

解答. 由于A, E均为Hermite矩阵,故A, E均可酉对角化.又$AE = EA$,故存在酉阵U,使得

$$D_A = UAU^* \qquad D_E = UEU^*.$$

设$D_A = \mathrm{Diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$, $D_E = \mathrm{Diag}(e_1, e_2, ..., e_n)$, 并规定$a, e$均按从大到小的顺序顺次排列,则

$$\begin{aligned}
\|\exp(A+E) - \exp(A)\|_2 &= \|\exp(D_A + D_E) - \exp(D_A)\|_2 \\
&= \|\exp(D_A)(\exp(D_E) - I)\|_2 \\
&\leq \|\exp(D_A)\|_2 \|\exp(D_E) - I\|_2 \\
&= \exp(a_1)(\exp(e_1) - 1) \\
&= \exp(\|A\|_2)(\exp(\|E\|_2) - 1).
\end{aligned}$$

题目5. 复现附件论文中包含的实验.

解答. (图2代码见Problem5_1.m)

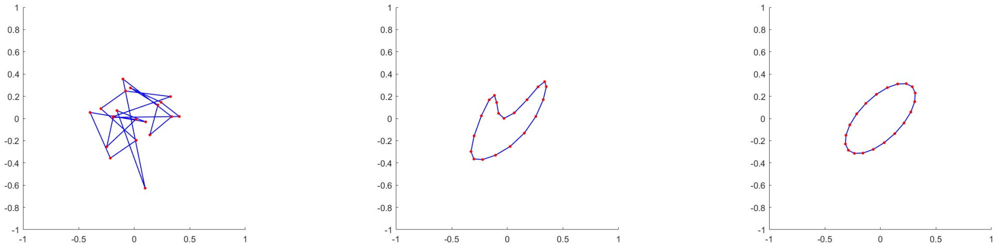

图 2: The progression from P_0 to P_{18} to P_{200} for an $n = 20$ example.

(图3代码见Problem5_2.m,其中使用Problem5_1.m的结果初始化c和s)

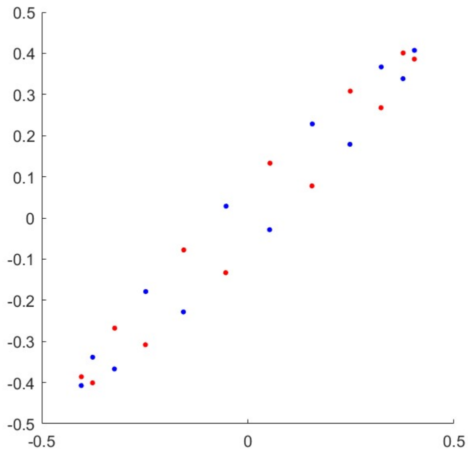

图 3: The vertices of P_{even} (red) and P_{odd} (blue) ($n = 12$)