作业2

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 9 月 22 日

题目1. 针对复矩阵的高斯消元/LU分解,其执行过程中加减/乘法运算的操作次数是否相等?

解答. 设对于同一大小的实矩阵进行高斯消元/LU分解时,执行过程中加减和乘法运算的次数分别为p_1, p_2.另设$z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$,则复数加减操作为

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

即复数加减操作的运算次数$q_1 = 2p_1$.
复数的乘法操作为

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

即复数乘法操作的运算次数$q_2 = 2p_1 + 4p_2$.
又已知$p_1 = p_2$,故$q_2 = 3q_1$,即复矩阵在高斯消元/LU分解的过程中,执行加减/乘法运算的操作次数不相等.

题目2. 用两种算法求对称正定阵A的Cholesky分解.(即求下三角阵L,满足$A = LL^T$)

解答.

算法1

设

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

则由$A = LL^T$,得

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk}, \qquad 1 \leq j \leq i \leq n. \tag{1}$$

对于第1列,由式(1)在$j = 1$时的特例$a_{i1} = l_{i1} l_{11}$,即得

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}.$$

特别地,有

$$a_{11} = (l_{11})^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}},$$

从而可以计算得L阵的第1列元素.

对于第j列,由式(1)可得

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}.$$

特别地,有

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} (l_{jk})^2 \Rightarrow l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2},$$

从而可以递推计算得L阵所有元素.

算法2

设L_0为单位下三角阵,设D是对角元均为正数的对角阵,令$A = L_0 D {L_0}^T$,得

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} + l_{ij} d_j, \qquad 1 \leq j \leq i \leq n. \tag{2}$$

对于第1列,由式(2)在$j=1$时的特例$a_{i1}=l_{i1}d_1$,即得

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}}{d_1}.$$

对于第j列,由(2)式可得

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1}l_{ik}d_kl_{jk}}{d_j}.$$

特别地,当$i=j$时,有$l_{ij}=1$,则

$$d_j=a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}d_kl_{jk}.$$

从而通过递推计算得L_0阵和D阵的所有元素,进而得到

$$L=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ l_{21} & d_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

题目3. 证明：严格对角占优的矩阵A在高斯消元过程中得到的子矩阵依然严格对角占优.

解答. 设

$$P=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & & \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

设一步高斯消元后得到的矩阵为$B=PA$,则

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}.$$

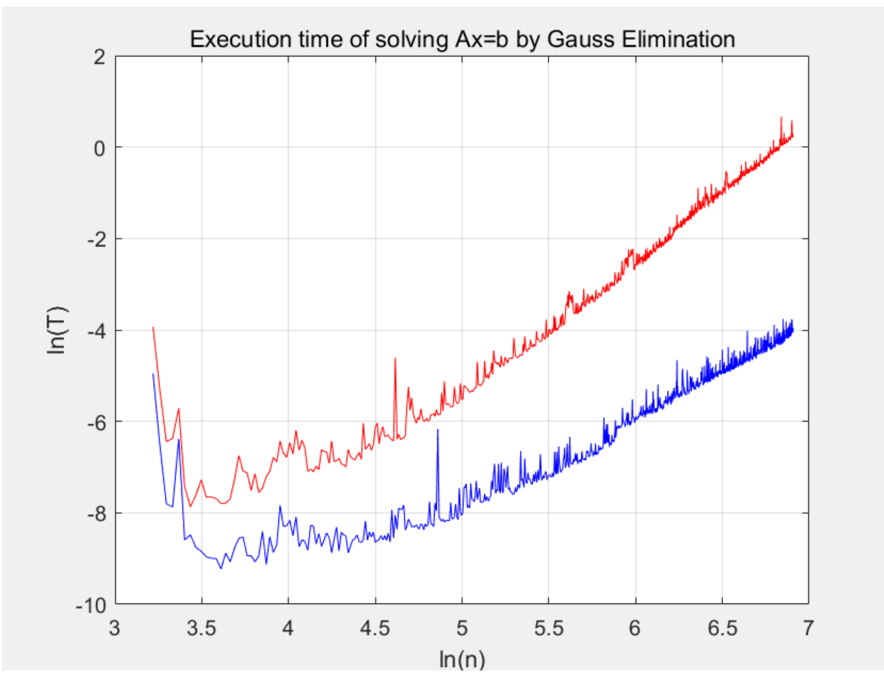
于是

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}|b_{ij}| &= \sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}\left|a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right| \\ &\le \sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}|a_{ij}| + \sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}\left|\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right| \\ &= \sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}|a_{ij}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|\sum_{\substack{2\le j\le n\\ j\ne i}}|a_{1j}| \\ &= \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}|a_{ij}| - |a_{i1}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|\sum_{2\le j\le n}|a_{1j}| - \left|\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right| \\ &< |a_{ii}| - |a_{i1}| + |a_{i1}| - \left|\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right| \\ &< \left|a_{ii}-\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right| \\ &= |b_{ii}|.\end{aligned}$$

从而矩阵B严格对角占优.

题目4. 比较全主元三角分解和列主元三角分解的效率.

解答. 全主元三角分解(红线)和列主元三角分解(蓝线)在不同大小的系数矩阵下的运行效率关系图如下



题目5. 证明：存在误差矩阵E,使得$(A+E)x = fl(Ax)$.并确定E中元素的上界.

解答. 设$b = Ax = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$,则

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

设

$$S_{ik} = fl(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j),$$

则

$$\begin{aligned}
S_{i1} &= a_{i1}x_1(1+\gamma_{i1}), |\gamma_{i1}| \le \mathbf{u}.\\
S_{ik} &= fl[S_{i(k-1)} + fl(a_{ik}x_k)]\\
&= [S_{i(k-1)} + a_{ik}x_k(1+\gamma_{ik})](1+\delta_{ik}), |\gamma_{ik}|, |\delta_{ik}| \le \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

故

$$fl(b_i) = S_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(1+\gamma_{ij}) \prod_{k=j}^{n} 1+\delta_{ik}.$$

令$1+\varepsilon_{ij} = (1+\gamma_{ij}) \prod\limits_{k=j}^{n} (1+\delta_{ik})$,则

$$fl(b_i) = \sum_{j=1}^{n} (1+\varepsilon_{ij})a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \varepsilon_{ij}a_{ij})x_j.$$

其中

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= (1+\gamma_{ij}) \prod_{k=j}^{n} (1+\delta_{ik}) - 1\\
&\le (1+\mathbf{u})(1+\mathbf{u})^{n-j+1} - 1\\
&\le (1+\mathbf{u})e^{(n-j+1)\mathbf{u}} - 1\\
&\le (1+\mathbf{u})[1 + 1.01(n-j+1)\mathbf{u}] - 1\\
&= 1.01(n-j+2)\mathbf{u} + o(\mathbf{u}^2).
\end{aligned}$$

则对于误差矩阵$E = (e_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$,有

$$|e_{ij}| = |\varepsilon_{ij}a_{ij}| \le 1.01(n-j+2) |a_{ij}| \mathbf{u}.$$

其中$\mathbf{u}$是机器精度.