

## 数值算法与案例分析 I (DATA130002)

### 期末考试

2024 年 12 月 24 日

1.(15分) 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对称矩阵. 若对  $A$  进行不选主元的  $LU$  分解后, 得到的  $U$  中所有对角元素均为正数, 证明或否定:  $A$  是正定矩阵.

2.(15分) 给定非奇异下三角阵  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  和向量  $b \in \mathbb{R}^n$ , 给出解  $Lx = b$  的伪代码, 并做浮点运算下的向后误差分析.

3.(15分) (普通班) 设列满秩矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 并给定矩阵  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ , 设计一个基于 MGS 的算法来解决

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n \times k}} \|AX - B\|_F.$$

(荣誉班) 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是列不满秩的, 并给定矩阵  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ , 设计一个基于 MGS 的算法来解决

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n \times k}} \|AX - B\|_F.$$

4.(15分) 设计一个高效的算法, 解上双对角矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$  的奇异值分解.

5.(15分) 设方阵  $A$  满足  $\|A\|_\infty \leq 1$ . 使用有限项 Taylor 展开近似求  $\exp(A)$  (假定以复平面的原点为零点), 如何有效估计算法的截断误差?

6.(15分) 考虑线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(1) 若使用 Jacobi 迭代法可以收敛, 求  $\alpha$  的取值范围;

(2) 若使用 Gauss-Seidel 迭代法可以收敛, 求  $\alpha$  的取值范围.

7.(15分) (普通班)设Hermite正定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 以及向量 $b \in \mathbb{C}^n$ , 给出最速下降法的迭代格式. 并据此推出预条件 $M$ 处理下的迭代格式.

(荣誉班)设Hermite正定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 以及向量 $b \in \mathbb{C}^n$ , 给出共轭梯度法的迭代格式. 并据此推出预条件 $M$ 处理下的迭代格式.

8.(15分) 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 在 $(1, 2)$ 上存在不超过20个特征值, 利用围道积分FEAST算法求解 $A$ 在 $(1, 2)$ 上的特征值, 并简述原理.