作业3

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 10 月 21 日

题目1. 设

$$A = \begin{bmatrix} 610 & 987 \\ 987 & 1597 \end{bmatrix}.$$

考察线性方程组$Ax = b$,要求分别构造b及其微小扰动δb,使之分别满足以下两种情形：

(1) $\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$极小时,$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$极大.

(2) $\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$极大时,$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$极小.

解答. (1) 构造

$$b = \begin{bmatrix} 1597 \\ 2584 \end{bmatrix}, \delta b = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

此时$Ax = b$的解向量为

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \delta x = \begin{bmatrix} -256.4 \\ 159.7 \end{bmatrix}.$$

相对误差分别为

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 3.87 \times 10^{-5}, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2.56 \times 10^{2}.$$

(2) 构造

$$b = \begin{bmatrix} -0.110 \\ -0.118 \end{bmatrix}, \delta b = \begin{bmatrix} 159.7 \\ 258.4 \end{bmatrix}.$$

此时$Ax=b$的解向量为

$$x=\begin{bmatrix} 9.886 \\ -6.110 \end{bmatrix}, \delta x=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

相对误差分别为

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}=2.19\times 10^3, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}=1.01\times 10^{-2}.$$

题目2. 设$Z\in\mathbb{C}^{n\times n}$,令

$$A=\begin{bmatrix} I_n & Z \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

求$\kappa_{\mathsf{F}}(A)=\|A\|_{\mathsf{F}}\|A^{-1}\|_{\mathsf{F}}$.

解答. 考虑

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ Z^* & I_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I_n & Z \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n & Z \\ Z^* & Z^*Z+I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$\|A\|_{\mathsf{F}}=(tr(A^*A))^{1/2}=(2n+\|Z\|_{\mathsf{F}}^2)^{1/2}.$$

由于$A^{-1}=\begin{bmatrix} I_n & -Z \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$,则有

$$\begin{aligned} (A^*)^{-1}A^{-1} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -Z^* & I_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I_n & -Z \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n & -Z \\ -Z^* & Z^*Z+I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\mathsf{F}}=(tr((A^*)^{-1}A^{-1}))^{1/2}=(2n+\|Z\|_{\mathsf{F}}^2)^{1/2}.$$

于是

$$\kappa_{\mathsf{F}}(A)=2n+\|Z\|_{\mathsf{F}}^2.$$

题目3. 可以证明进行没有选主元操作的高斯消元在解严格对角占优线性方程组时具有数值稳定性,即此时增长因子有界.求这里增长因子的上界.

注： 增长因子定义为$\rho = \max\limits_{i,j,k} \frac{|a_{i,j}^{(k)}|}{\|A\|_\infty}$.

解答. 设经过k步消元后,A阵变为$A^{(k+1)} = L_k A$.考察$A^{(k+1)}$阵中的某个元素的模数

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = |a_{ij}^{(k)} + \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}| \le |a_{ij}^{(k)}| + |\frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}||a_{ik}^{(k)}|.$$

结合上次作业中证明得到的结论:严格对角占优的矩阵在高斯消元过程中得到的中间矩阵依然严格对角占优.可知

$$\begin{aligned}\sum_{j=k+1}^{n} |a_{ij}^{(k+1)}| &\le \sum_{j=k+1}^{n} |a_{ij}^{(k)}| + |a_{ik}^{(k)}| \sum_{j=k+1}^{n} |\frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}| \\ &\le \sum_{j=k+1}^{n} |a_{ij}^{(k)}| + |a_{ik}^{(k)}| \\ &= \sum_{j=k}^{n} |a_{ij}^{(k)}|.\end{aligned}$$

依此类推,得

$$\sum_{j=k+1}^{n} |a_{ij}^{(k+1)}| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(1)}|.$$

因此

$$\begin{aligned}\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}| &\le \max_{i,k} \sum_{j=k}^{n} |a_{ij}^{(k)}| \\ &\le \max_{i} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(1)}| \\ &= \|A\|_\infty.\end{aligned}$$

即得$\rho \le 1$.且当$A = I$时恰有$\rho = 1$,故上界可以取到.

题目4. 可以证明进行带列选主元的高斯消元在解非奇异三对角线性方程组时具有数值稳定性,即此时增长因子有界.求这里增长因子的上界.
注： 增长因子定义为$\rho = \max\limits_{i,j,k} \frac{|a_{i,j}^{(k)}|}{\|A\|_\infty}$.

解答. 设A阵经列主元行变换得到的矩阵为$B^{(1)}$阵,即$B^{(1)} = PA$.考虑$B^{(1)}$阵中任意元素的模数,由于$B^{(k)}$中列主元占优,故

$$|b_{ij}^{(k+1)}| = |b_{ij}^{(k)} + \frac{b_{ik}^{(k)}}{b_{kk}^{(k)}} b_{kj}^{(k)}| \le |b_{ij}^{(k)}| + |\frac{b_{ik}^{(k)}}{b_{kk}^{(k)}}||b_{kj}^{(k)}|, \qquad i > k+1.$$

由引理可知只需考虑$j = k+1, j = k+2, j = k+3$三种情况.
当$j = k+3$时,

$$|b_{i(k+3)}^{(k+1)}| = |b_{i(k+3)}^{(1)}|.$$

当$j = k+2$时,

$$\begin{aligned} |b_{i(k+2)}^{(k+1)}| &\le |b_{i(k+2)}^{(k)}| + |\frac{b_{ik}^{(k)}}{b_{kk}^{(k)}}||b_{k(k+2)}^{(k)}| \\ &= |b_{i(k+2)}^{(1)}| + |\frac{b_{ik}^{(k)}}{b_{kk}^{(k)}}||b_{k(k+2)}^{(1)}|. \end{aligned}$$

当$j = k+1$时, 由引理知$b_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}, b_{i(k-1)}^{(k-1)}, b_{k(k-1)}^{(k-1)}$中应当仅有两个不为零,且主元$b_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}$必定不为零,故

$$\begin{cases} b_{i(k-1)}^{(k-1)} = 0 \\ 0 < \frac{b_{k(k-1)}^{(k-1)}}{b_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}} < 1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} b_{k(k-1)}^{(k-1)} = 0 \\ 0 < \frac{b_{i(k-1)}^{(k-1)}}{b_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}} < 1 \end{cases}$$

于是得到

$$\begin{aligned} |b_{i(k+1)}^{(k+1)}| &\le |b_{i(k+1)}^{(k)}| + |b_{k(k+1)}^{(k)}| \\ &\le |b_{i(k+1)}^{(1)}| + |\frac{b_{i(k-1)}^{(k-1)}}{b_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}}||b_{(k-1)(k+1)}^{(1)}| + |b_{k(k+1)}^{(1)}| + |\frac{b_{k(k-1)}^{(k-1)}}{b_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}}||b_{(k-1)(k+1)}^{(1)}| \\ &\le 3\max_{i,j} |b_{ij}^{(1)}| \end{aligned}$$

由于A阵中各元素地位等价,故在理想状态下,可令$\|A\|_\infty = 3\max\limits_{i,j}|a_{ij}^{(1)}|$.因此

$$\begin{aligned}\max_{i,j,k}|a_{ij}^{(k)}| &= \max_{i,j,k}|b_{ij}^{(k)}| \\ &\le 3\max_{i,j}|b_{ij}^{(1)}| \\ &= 3\max_{i,j}|a_{ij}^{(1)}| \\ &= \|A\|_\infty.\end{aligned}$$

即得$\rho \le 1$.且当$A = I$时恰有$\rho = 1$,故上界可以取到.

引理. 设A阵经列选主元行变换得到B阵.若$b_{ik}^{(k)} \neq 0$,则$\forall t \ge k+3$,均有$b_{it}^{(k)} = 0$.

证明. 当$n = 3$时,结论显然成立.

假设当$n = m$时,结论成立.现考虑$n = m+1$的情况.

对于A阵,仅有$a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{21}^{(1)} \neq 0$.则$B$阵的第一行或为$A$阵的第一行(非零列数为2),或为$A$阵的第二行(非零列数为3).于是在第一步高斯消元中,仅有一行的至多前三列被更新.

因此,对于第一步高斯消元后$B^{(2)}$阵,其右下角的$m \times m$阵与原先的B阵拥有同样的性质,即该子阵的第一行或为非零列数为2的一行,或为非零列数为3的一行.由假设可知该子阵在后续的高斯消元中保持结论性质不变.

综上,结论得证.

题目5. 分别利用选主元和不选主元的高斯消元法解以下两个线性方程组,并把解向量与精确解作比较,讨论解法的数值稳定性.

(1)

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & & & & & \\ 6 & 8 & 1 & & & & \\ & 6 & 8 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 6 & 8 & 1 & \\ & & & & 6 & 8 & 1 \\ & & & & & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{98} \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & & & & & \\ 8 & 6 & 1 & & & & \\ & 8 & 6 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 8 & 6 & 1 & \\ & & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{98} \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

解答. (1) 选主元高斯消元:

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2.2204 \times 10^{-16}.$$

不选主元高斯消元:

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2.2204 \times 10^{-16}.$$

(2) 选主元高斯消元:

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.8333 \times 10^{-1}.$$

不选主元高斯消元:

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 3.5182 \times 10^{13}.$$

综上,利用高斯消元法解非严格对角占优的线性方程组时,选主元法的数值稳定性远优于不选主元法.(本题的详细代码见codes文件夹内的Problem5.m)