作业13

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 12 月 16 日

题目1. 给定对称正定阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$和向量$b \in \mathbb{R}^n$. 假设$\mathcal{V}$是$\mathbb{R}^n$的一个子空间.证明:

$$x_0 = \arg\min_{x\in\mathcal{V}} \left\|x - A^{-1}b\right\|_A$$

成立当且仅当$b - Ax_0 \in \mathcal{V}^\perp$(正交补由标准内积定义).

解答. 设$A^{-1}b = x_* + x_\perp$, 其中$x_* \in \mathcal{V}$, $x_\perp \in \mathcal{V}^\perp$, 则$x_0 = x_*$. 这等价于

$$b - Ax_0 = Ax_\perp \in \mathcal{V}^\perp.$$

题目2. 给定列满秩矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$和向量$b \in \mathbb{R}^m$.通过解最小二乘问题$\min_x \|Ax - b\|_2$, CG算法可以被用于解决正规方程$A^TAx = A^Tb$. 请为该方法提供详细的迭代方案. 并确保避免使用操作$v \to A^TAv$.

解答. 做n步迭代.对于第k步迭代,依次进行以下操作

$$\begin{cases} r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1}Ap_{k-1} \\ \beta_{k-1} = \frac{p_{k-1}^*Ar_k}{p_{k-1}^*Ap_{k-1}} \\ p_k = r_k - \beta_{k-1}p_{k-1} \\ \alpha_k = \frac{r_k^*p_k}{p_k^*Ap_k} \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \end{cases},$$

其中初始化$p_0 = r_0 = b, x_0 = 0, \alpha_0 = \frac{r_0^*p_0}{p_0^*Ap_0}, x_1 = p_0\alpha_0$.

题目3. 使用CG算法解单位正方形$[0,1]^2$上的2D拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

该方程有边界条件

$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,1) = 0, y(x,0) = \sin(\pi x).$$

可视化解和收敛历程.

解答. (代码见Problem3.m)

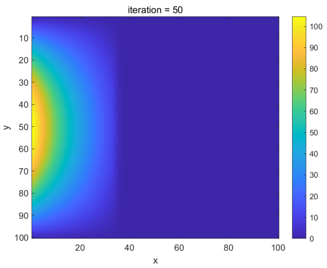


图 1: iter=50

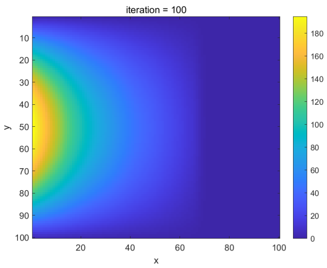


图 2: iter=100

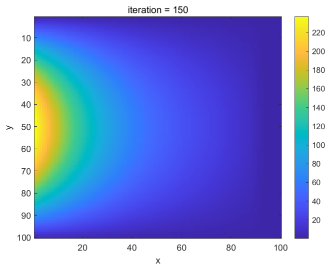


图 3: iter=150

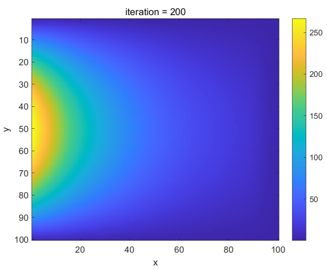


图 4: iter=200

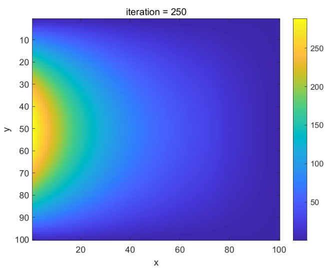


图 5: iter=250

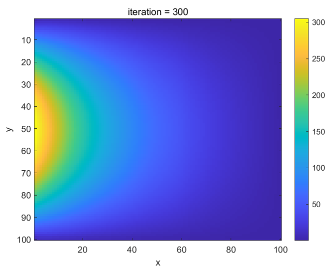
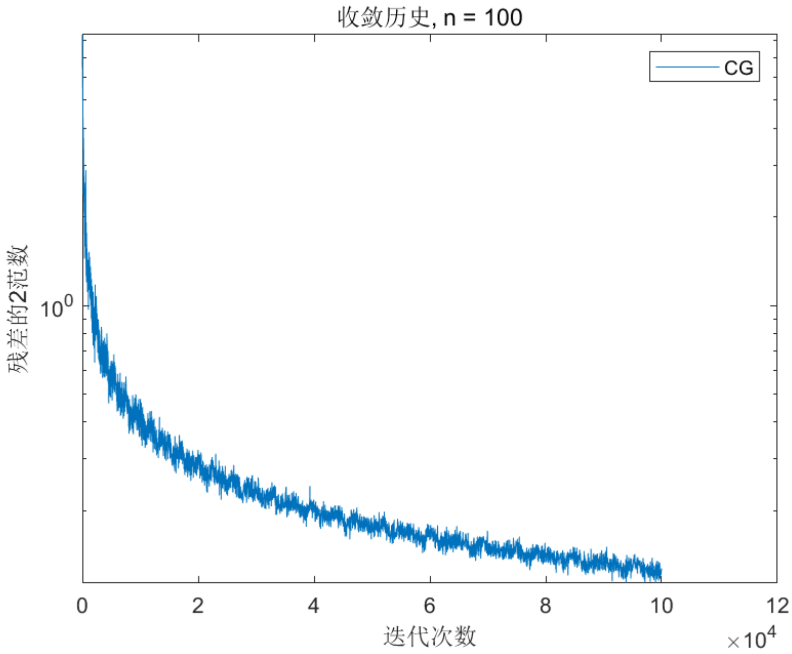


图 6: iter=300

CG算法(初始设定$u = 0$)



CG算法的收敛历程

题目4. 针对对称特征值问题使用Lanczos算法，并用一些稀疏Hermite阵测试它. 说明Ritz对的收敛性和Lanczos向量的正交性.

解答. (代码见Problem4.m)

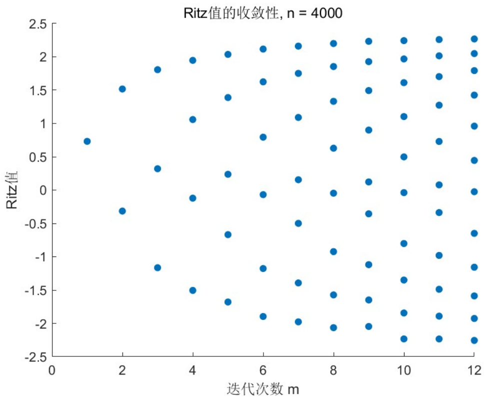


图 9: Ritz值的收敛性

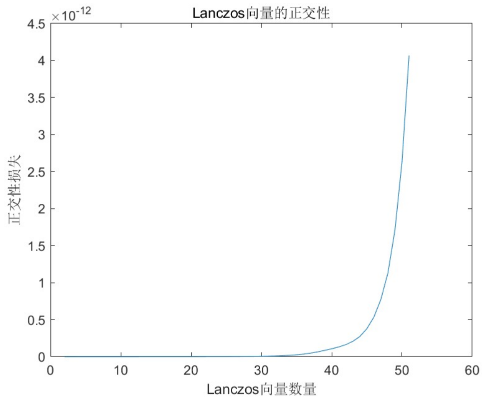


图 10: Lanczos向量的正交性