作业11

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 11 月 28 日

题目1. 找一个使得Jacobi迭代收敛但Gauss-Seidel迭代不收敛的线性方程组,并证明.

解答. 设

$$A = D - L - U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

则$\rho(D^{-1}(L+U)) = 0$,而$\rho((D-L)^{-1}U) = 2+2\sqrt{5}$,故对于该矩阵Jacobi迭代收敛但Gauss-Seidel迭代不收敛.

题目2. 找一个使得Jacobi迭代不收敛但Gauss-Seidel迭代收敛的正定线性方程组,并证明.

解答. 设

$$A = D - L - U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \succ 0,$$

则$\rho(D^{-1}(L+U)) = 1$,而$\rho((D-L)^{-1}U) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,故对于该矩阵Jacobi迭代不收敛但Gauss-Seidel迭代收敛.

题目3. 设$B \in \mathbb{C}^{n\times n}, g \in \mathbb{C}^n$, 并假定$\rho(B) = 0$.证明迭代方案

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

对于任意初始$x^{(0)}$都将在n步内收敛为$x = Bx + g$的解.

解答. 设残差$r^{(k)} = x^{(k)} - x$,则

$$r^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = Bx^{(k)} - Bx = Br^{(k)},$$

故$r^{(n)} = B^n r^{(0)}$.结合$\rho(B) = 0$,可得$B^n = 0$,于是

$$r^{(n)} = 0,$$

即$x^{(n)}$收敛为x.

题目4. 设$B, M \in \mathbb{C}^{n\times n}, g \in \mathbb{C}^n$, 并假定$M$和$M - B^*MB$都是正定的.证明迭代方案

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

对于任意初始$x^{(0)}$都将收敛为$x = Bx + g$的解.

解答. 设B的任意特征对为(λ, x),则

$$x^*(M - B^*MB)x > 0 \Rightarrow x^*Mx - (Bx)^*M(Bx) > 0 \Rightarrow (1 - \lambda^2)x^*Mx > 0.$$

结合$x^*Mx > 0$,可得$\lambda^2 < 1$,也即

$$\rho(B) < 1.$$

于是对于任意初始$x^{(0)}$,该收敛方案均能收敛.

题目5. 在数值意义上解单位正方形$[0, 1]^2$上的2D拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

该方程有边界条件

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0, y(x, 0) = \sin(\pi x).$$

使用Jacobi迭代或Gauss-Seidel迭代来解这个离散系统.可视化解和收敛历程.

解答. (代码见Problem5.m)

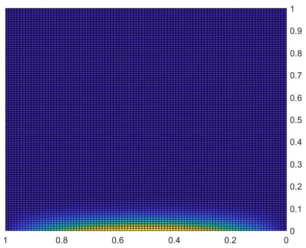


图 1: iter=0

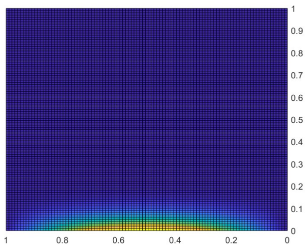


图 2: iter=50

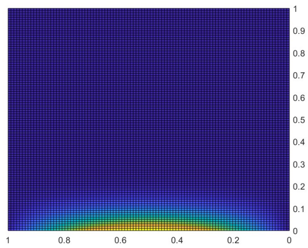


图 3: iter=100

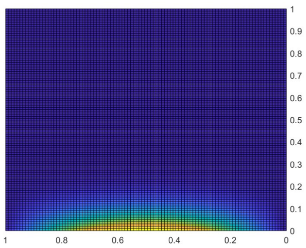


图 4: iter=150

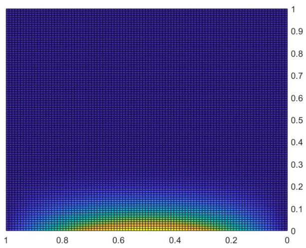


图 5: iter=200

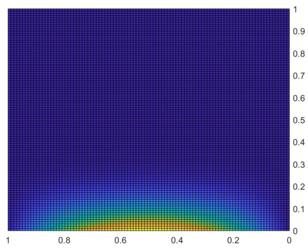
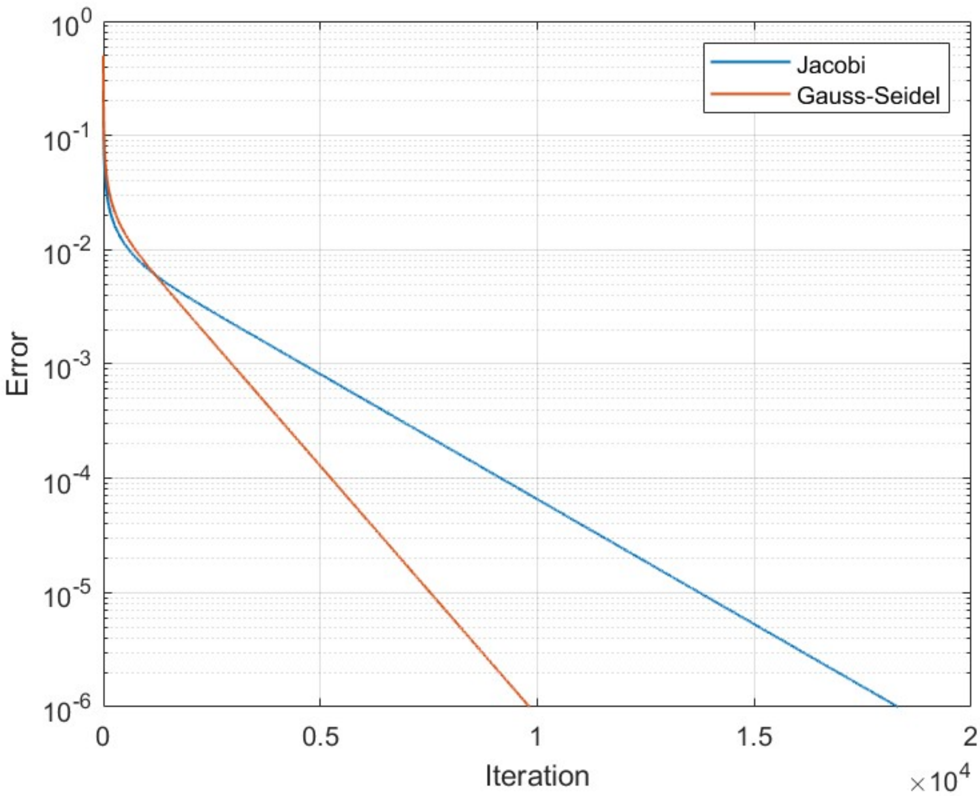


图 6: iter=250

Jacobi迭代(初始设定$u = 0$)



Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代的收敛历程