作业9

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 11 月 17 日

题目1. 设$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$是实对称矩阵A的一个近似特征向量,且满足$\|\hat{x}\|_2 = 1$.证明:存在一个实对称矩阵ΔA,使得

$$(A + \Delta A)\hat{x} = \hat{x}\hat{\lambda}, \qquad \|\Delta A\|_2 \leq \left\|A\hat{x} - \hat{x}\hat{\lambda}\right\|_2$$

成立,其中$\hat{\lambda} = \hat{x}^T A\hat{x}$.

解答. 对$(A + \Delta A)\hat{x} = \hat{x}\hat{\lambda}$两边同时左乘$\hat{x}^T$,可得此式的一个必要条件

$$\hat{x}^T \Delta A\hat{x} = 0,$$

也即$\Delta A\hat{x} \perp \hat{x}$.又由于

$$\hat{x}^T(\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}) = 0,$$

即$\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x} \perp \hat{x}$, 故$\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x} \mathbin{//} \Delta A\hat{x}$. 定义Householder镜射向量

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \frac{\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}}{\left\|\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}\right\|_2}),$$

则$\Delta A = k(I - 2vv^T)$是符合要求的一个必要条件,其中k是常数.事实上,当$k = \left\|\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}\right\|_2$时,有

$$(A + \Delta A)\hat{x} = A\hat{x} + \left\|\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}\right\|_2 \hat{x} - [(\left\|\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}\right\|_2 - \hat{\lambda})I + A]\hat{x} = \hat{x}\hat{\lambda},$$

且

$$\|\Delta A\|_2 = \left\|\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}\right\|_2 \|I - 2vv^T\|_2 = \left\|\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}\right\|_2.$$

于是此时的ΔA即为一个符合题意的构造.

题目2. 给定$x, y \in \mathbb{R}^n$.详细描述如何构建一个旋转矩阵Q,使得$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Q$的列向量是相互正交的.

解答. 设$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,则在旋转作用后,相应元素变换为

$$\begin{cases} x_i \leftarrow x_i \cos\theta - y_i \sin\theta \\ y_i \leftarrow x_i \sin\theta + y_i \cos\theta \end{cases},$$

我们希望变换后满足$x^T y = 0$, 也即

$$\begin{aligned} x^T y &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cos\theta \sin\theta - y_i^2 \cos\theta \sin\theta + x_i y_i (\cos^2\theta - \sin^2\theta)) \\ &= (\|x\|_2^2 - \|y\|_2^2) \cos\theta \sin\theta + x^T y (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

进一步整理成方程

$$x^T y \tan^2\theta - (\|x\|_2^2 - \|y\|_2^2) \tan\theta - x^T y = 0.$$

解上述关于$\tan\theta$的一元二次方程即可得满足题意的旋转矩阵Q.

题目3. 设$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$是具有不同特征值的对角阵, $z \in \mathbb{R}^n$是一个没有零元素的向量,以及$\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. 假设$(\lambda, u)$是$D + \rho z z^T$的一个特征对,证明:
(1) $\lambda I - D$是非奇异的;
(2) $(\lambda I - D)^{-1} z$是$D + \rho z z^T$的一个特征向量;
(3) $z^T u \neq 0$.

解答. (1) 由于(λ, u)是$D + \rho z z^T$的一个特征对,故$Du + \rho z z^T u = \lambda u$, 进而有

$$(\lambda I - D) u = \rho z z^T u = (\rho z^T u) z,$$

即对角阵$(\lambda I - D)$将u映射到不包含零元素的向量z的方向上,故$(\lambda I - D)$是非奇异的.
(2) 对于$(D + \rho z z^T)$, 由于特征多项式

$$f(\lambda) = (1 - \rho z^T (D - \lambda I)^{-1} z) \det D = 0 \Rightarrow (\rho z^T (\lambda I - D)^{-1} z) - 1 = 0.$$

于是有

$$\begin{aligned}(D+\rho zz^T)(\lambda I-D)^{-1}z &= -z+\lambda(\lambda I-D)^{-1}z+\rho z^T(\lambda I-D)^{-1}zz\\ &= [\rho z^T(\lambda I-D)^{-1}z-1]z+\lambda(\lambda I-D)^{-1}z\\ &= \lambda(\lambda I-D)^{-1}z,\end{aligned}$$

也即$(\lambda,(\lambda I-D)^{-1}z)$是$D+\rho zz^T$的一个特征对.

(3) 由(2)知$u=(\lambda I-D)^{-1}z$, 以及

$$(\rho z^T(\lambda I-D)^{-1}z)-1=0 \Rightarrow z^T(\lambda I-D)^{-1}z=\frac{1}{\rho}\neq 0.$$

题目4. 随机生成一个线性相关的小规模实对称矩阵$A=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,...,d_n\}+zz^T$, 其中$d_i$互不相同, 且$z$不含有零元素. 可视化函数

$$f(\lambda)=1-\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{\lambda-d_i}.$$

同时在plot中突出显示A的特征值,确保它们与$f(\lambda)$的零点相匹配.为了简化问题, 你可以使用已有的函数库来计算A的特征值.

解答. (代码见Problem4.m)

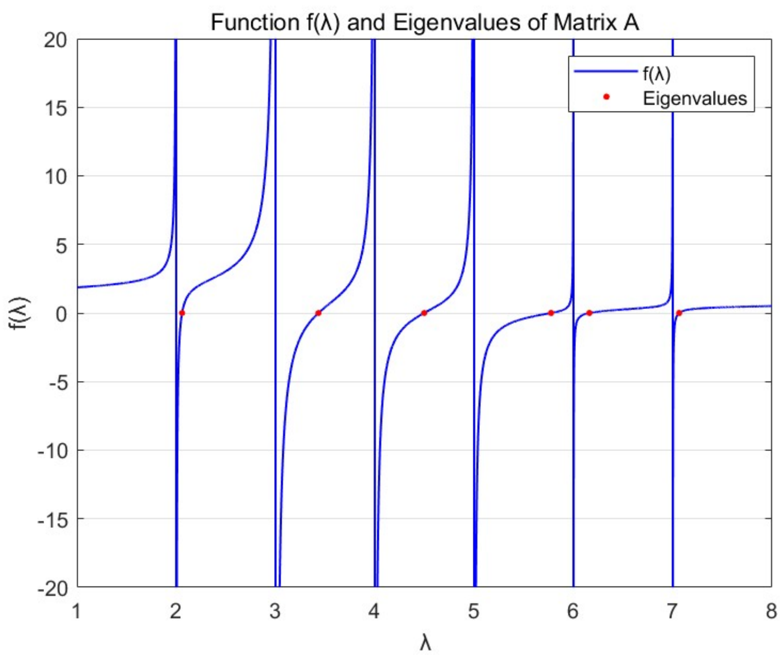

图 1: $f(\lambda)$图像与λ分布的关系图

题目5. 对实对称矩阵运用Jacobi对角化算法.可视化算法对一些规模不同的矩阵的表现. 同时可视化一个例子的收敛历程.
鼓励可视化分量收敛结果和尝试选择错误Jacobi旋转矩阵(即不选最大元进行操作)的循环Jacobi算法.

解答. (代码见Problem5(1).m)

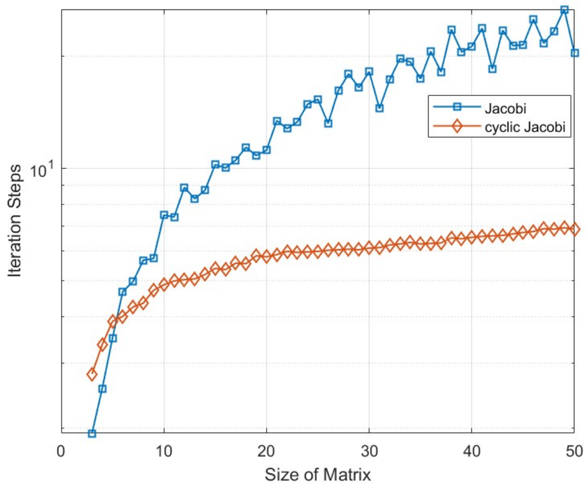

图 2: 两类Jacobi算法的迭代表现

(代码见Problem5(2).m,其中刻画矩阵与对角阵的距离的量为$\|A - Diag(A)\|_\mathsf{F}$)

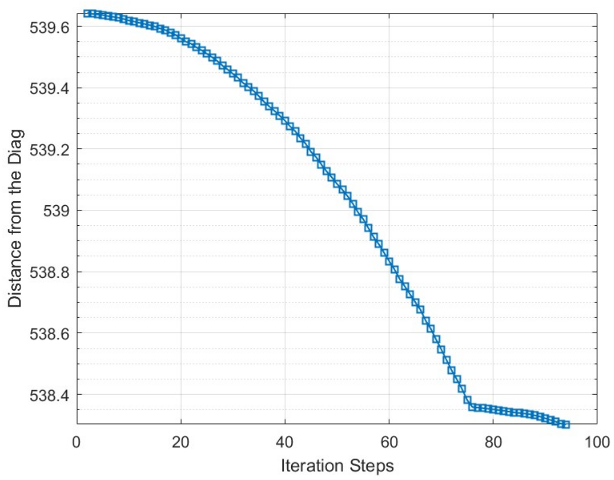

图 3: Jacobi算法对1000×1000矩阵迭代的收敛历程