作业12

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 12 月 7 日

题目1. 实现GMRES算法,并用至少两个包含1000+个未知数的稀疏线性方程组(对称的和非对称的)测试,绘制残差的变化历程.

解答. (代码见Problem1.m)

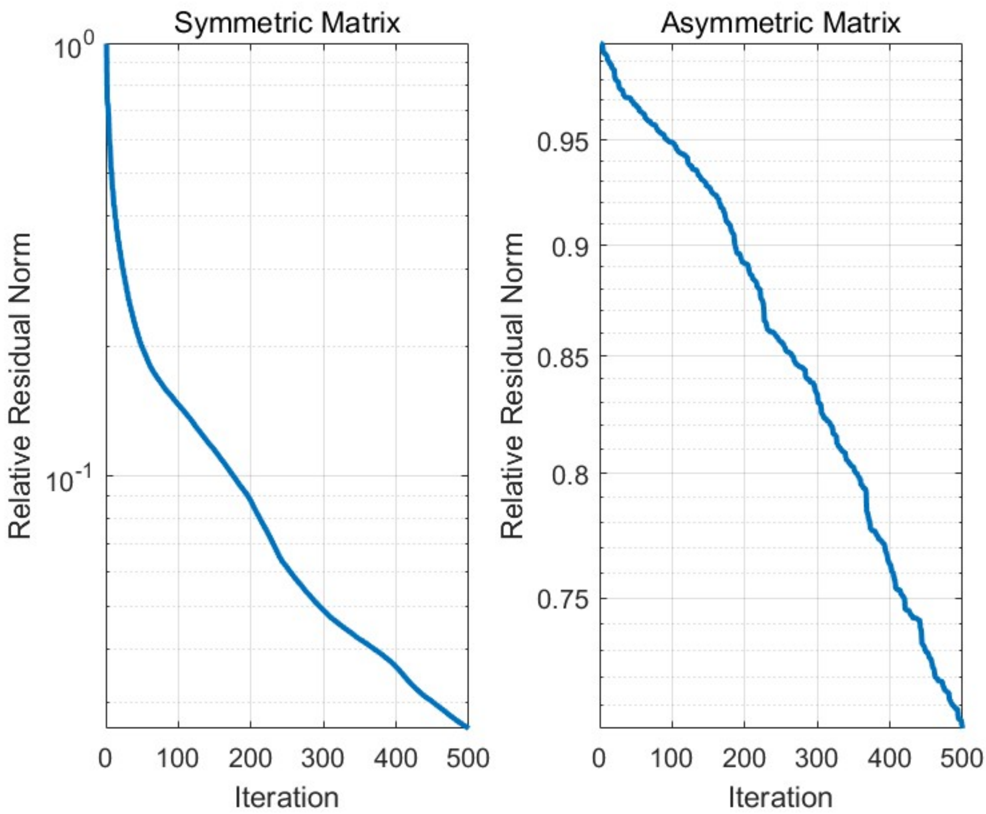

图 1: GMRES算法分别作用于包含1000个未知数的两种类型线性方程组的表现

题目2. 给定对称正定阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 设$r_k$是SD算法解$Ax=b$时的第$k$步迭代时的残差向量. 证明:当$r_{k+1}=0$时,$r_k$是$A$的一个特征向量.

解答. 根据SD法的迭代步骤,有$x_{k+1}=x_k+\frac{r_k^Tr_k}{r_k^TAr_k}r_k$.则当$r_{k+1}=0$时,我们有

$$Ax_k+A\frac{r_k^Tr_k}{r_k^TAr_k}r_k-b=0,$$

即

$$r_k=A\frac{r_k^Tr_k}{r_k^TAr_k}r_k \Rightarrow Ar_k=\frac{r_k^TAr_k}{r_k^Tr_k}r_k.$$

题目3. 给定对称正定阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.设$x_k$是SD算法解$Ax=b$时的第$k$步迭代时的近似答案. 证明:

$$f(x_{k+1}) \le (1-\kappa^{-1})f(x_k),$$

其中$f(x)=x^TAx-2b^Tx$并且$\kappa=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2$.

解答. 由于

$$\begin{aligned} f(x_k)-f(x_{k+1}) &= \langle x_k,x_k\rangle_A-2\langle b,x_k\rangle-\langle x_k+\alpha_kr_k,x_k+\alpha_kr_k\rangle_A+2\langle b,x_k+\alpha_kr_k\rangle \\ &= -2\alpha_k\langle x_k,r_k\rangle_A+2\alpha_k\langle b,r_k\rangle-{\alpha_k}^2\langle r_k,r_k\rangle_A \\ &= \frac{(r_k^Tr_k)^2}{r_k^TAr_k}, \end{aligned}$$

又由于A^{-1}也是对称正定的,故

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \langle x_k,x_k\rangle_A-2\langle b,x_k\rangle \\ &= \left\langle A^{-1}(b-r_k),A^{-1}(b-r_k)\right\rangle_A-2\left\langle b,A^{-1}(b-r_k)\right\rangle \\ &= r_k^TA^{-1}r_k-b^TA^{-1}b \\ &\le r_k^TA^{-1}r_k. \end{aligned}$$

则证明$f(x_{k+1}) \le (1-\kappa^{-1})f(x_k)$,等价于$\kappa \ge \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k+1})}$,即只需证

$$\frac{r_k^TA^{-1}r_k}{r_k^Tr_k}\frac{r_k^TAr_k}{r_k^Tr_k} \le \kappa=(\frac{\lambda_n(A^2)}{\lambda_1(A^2)})^{1/2}.$$

事实上由Rayleigh-Ritz定理,我们有

$$\max\frac{r_k^TA^{-1}r_k}{r_k^Tr_k}=\lambda_n(A^{-1})=\frac{1}{\lambda_1(A)}$$

$$\max\frac{r_k^TAr_k}{r_k^Tr_k}=\lambda_n(A)$$

于是

$$\frac{r_k^T A^{-1} r_k}{r_k^T r_k} \frac{r_k^T A r_k}{r_k^T r_k} \leq \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_1(A)} = (\frac{\lambda_n(A^2)}{\lambda_1(A^2)})^{1/2}.$$

题目4. 使用SD算法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 20 & \\ & 1 \end{bmatrix} x = 0,$$

实现时,以$x_0 = [1, 5]^T$为初始假设, 并绘制中间近似值$x_k (0 \leq k \leq 10)$.

解答. (代码见Problem4.m)

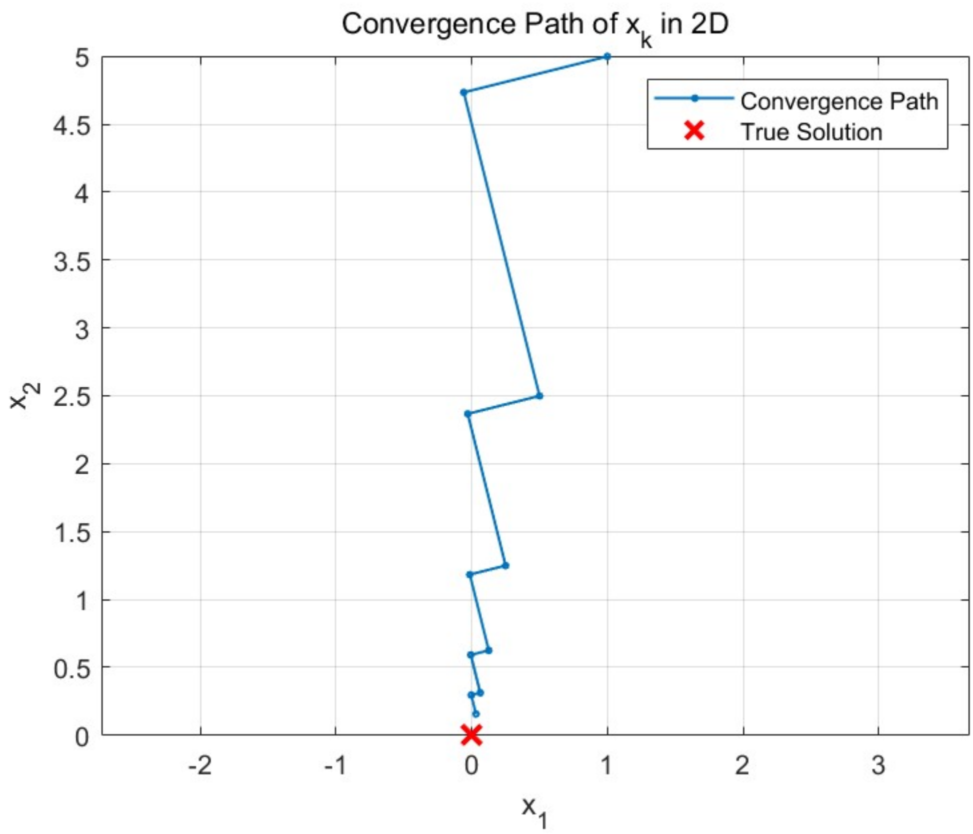

图 2: 中间近似值$x_k (0 \leq k \leq 10)$