作业5

(数值算法与案例分析)

李维杰

2024 年 10 月 22 日

题目1. 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}(m \geq n)$.编写程序,分别使用CGS,MGS,CGS2,MGS2算法求矩阵A的QR分解,并通过一些例子可视化正交性损失$\|Q^*Q - I_n\|_{\mathsf{F}}$.

解答.

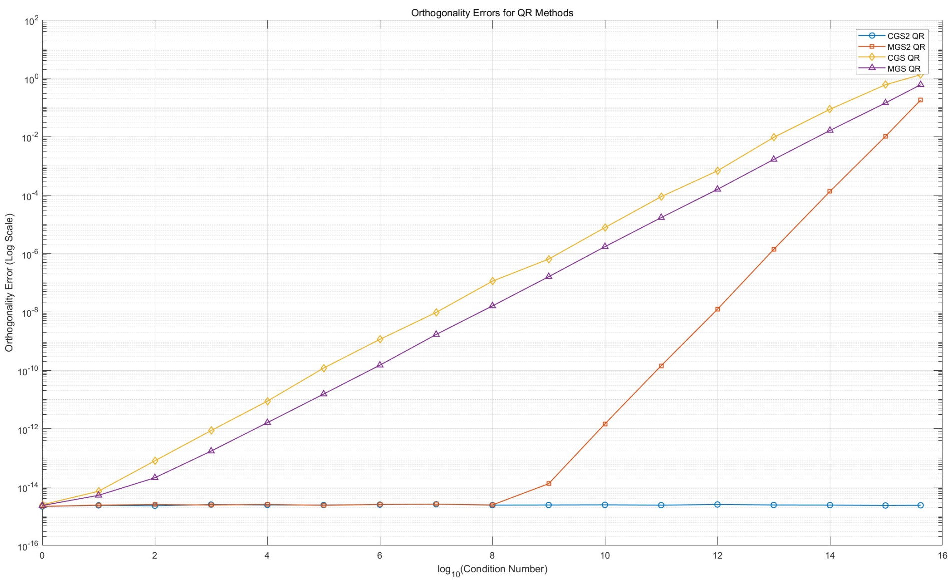

图 1: $\|Q^*Q - I_n\|_{\mathsf{F}}$与$\lg \kappa(A)$的关系曲线图

注记. 暂不清楚为什么我的代码跑出来的MGS2在条件数较大时数值稳定性会变差.debug未果...

题目2. 生成一些满足$\kappa \in [10^0, 10^{15}]$的瘦高矩阵,并可视化Householder-QR,Cholesky-QR,CGS,MGS这四种算法下的正交性损失$\|Q^*Q - I_n\|_{\mathsf{F}}$和剩余范数$\|A - QR\|_{\mathsf{F}}$.

解答.

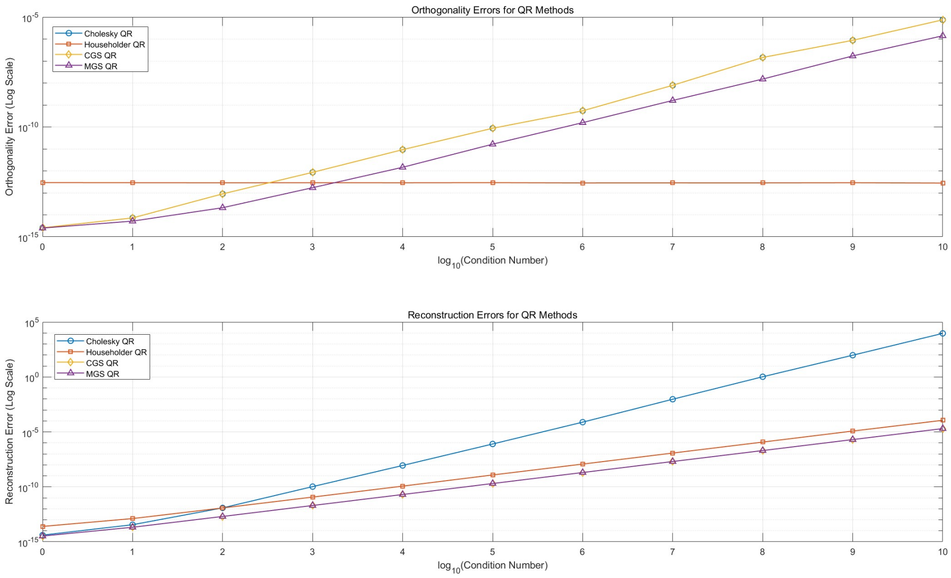

图 2: $\|Q^*Q - I_n\|_{\mathsf{F}}$和$\|A - QR\|_{\mathsf{F}}$与$\lg \kappa(A)$的关系曲线图

题目3. 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.证明:$AA^\dagger$和$I_n - A^\dagger A$分别是$\mathrm{Range}(A)$和$\mathrm{Ker}(A)$的正交投影.

解答. 由于

$$(AA^\dagger)^2 = A(A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^\dagger,$$

故$AA^\dagger$是一个幂等矩阵,即其是一个投影矩阵. 另外,由于

$$(AA^\dagger)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^\dagger,$$

故此时有

$$\begin{aligned}
< AA^\dagger x, (I - AA^\dagger)x > &= (AA^\dagger)^*(I - AA^\dagger) \\
&= (AA^\dagger)^* - (AA^\dagger)^*AA^\dagger \\
&= AA^\dagger - (AA^\dagger)^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

即$AA^\dagger$是一个正交投影阵. 进一步地,对于Range(A)中的任意向量Ax,均有

$$AA^\dagger Ax = A(A^*A)^{-1}A^*Ax = Ax,$$

故可知$AA^\dagger$是作用于Range(A)上的正交投影阵.
另一方面,$(I - AA^\dagger)x$是$AA^\dagger x$的正交分量,且Ker$(A)\perp$Range(A), 于是可以直接得到$I - AA^\dagger$是作用于Ker(A)上的正交投影阵.

题目4. 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, X \in \mathbb{C}^{n\times m}$.假设对于任意的$b \in \mathbb{C}^m$,$x = Xb$总是最小二乘问题$\min_x \|Ax-b\|_2$的极小值点.证明$AXA = A$,且$(AX)^* = AX$.

解答. 作为最小二乘问题$\min_x \|Ax-b\|_2$的极小值点,x应满足

$$A^*Ax = A^*b,$$

代入$x = Xb$,即得

$$A^*AXb = A^*b.$$

由于b是任意的m维向量,故上式始终成立当且仅当

$$A^*AX = A^*. \tag{1}$$

对(1)式左乘X^*,得

$$(AX)^*AX = (AX)^*.$$

对(1)式两边同时取转置,得

$$(AX)^*A = A \Rightarrow (AX)^*AX = AX.$$

综合以上二式,即得

$$(AX)^* = AX.$$

从而得到

$$(AX)^*A = A \Rightarrow AXA = A.$$

题目5. 找出针对数据集$\{(n, \ln n) \in \mathbb{R}^2 : n \in \{2,3,4,5,6,7\}\}$最好的拟合直线.可视化这一结果并解释拟合最优的原因.

解答. 设拟合直线为$\hat{y} = kx + t$,实际值为$y = \ln x$.又设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 3 \\ \ln 4 \\ \ln 5 \\ \ln 6 \\ \ln 7 \end{bmatrix},$$

则只需找到合适的x,使得$\|Ax - y\|_2$最小化即可.极小值点为

$$x = A^{\dagger} y = \begin{bmatrix} 0.245 \\ 0.319 \end{bmatrix}.$$

利用Matlab计算拟合直线并制图如下

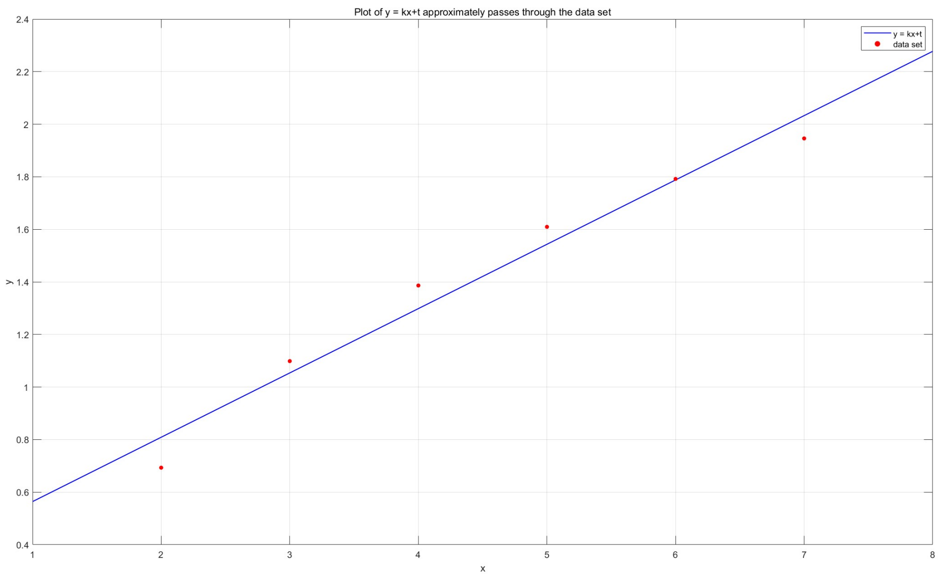

图 3: 数据集的拟合直线