Wprowadzenie z dynamicznej optymalizacji

Łukasz Woźny*

29 kwietnia 2007

Spis treści

*lukasz.wozny@sgh.waw.pl.

1 Optymalizacja statyczna a optymalizacja dynamiczna

1.1 Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych - statyka

Rozpatrzmy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, a $n \in \mathbb{N}$:

Definicja 1.1 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\bar{x} \in X$* minimum (maksimum) lokalne *wtt., gdy*

$$\exists r > 0 \, \forall x \in K(\bar{x}, r) \quad f(\bar{x}) \leq f(x) \quad (f(\bar{x}) \geq f(x))^{1},$$

gdzie $K(\bar{x}, r)$ jest otwartą kulą o środku w $\bar{x}$ i promieniu r.

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu punktu $\bar{x} \in X$ ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu i $f'(\bar{x}) = \boldsymbol{0}$, to*[2]*:*

- *f ma minimum (maksimum) lokalne w $\bar{x}$, gdy macierz $f''(\bar{x})$ jest dodatnio (ujemnie) określona,*
- *f nie ma ekstremum lokalnego w $\bar{x}$, gdy macierz $f''(\bar{x})$ jest nieokreślona.*

Ograniczenia zadane równaniami

Definicja 1.2 *Niech $f, g_1, g_2, \ldots, g_m : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset R^n$ jest zbiorem otwartym a $n > m$. Niech ponadto:*

$$G = [g_1, g_2, \ldots, g_m]^T, \quad M = \{x \in X : G(x) = 0\}.$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\bar{x} \in M$ minimum (maksimum) lokalne warunkowe *na zbiorze M wtt., gdy:*

$$\exists r > 0 \, \forall x \in M \cap K(\bar{x}, r) \quad f(\bar{x}) \leq f(x) \quad (f(\bar{x}) \geq f(x))^{3}.$$

Poniżej zakładamy, że funkcje f oraz g_i gdzie $i = 1, \ldots, m$ są różniczkowalne.

Definicja 1.3 *Punkt $\bar{x} \in M$ nazywamy* punktem regularnym *ograniczeń wtt. $rz G'(\bar{x}) = m$ a więc wiersze macierzy $G'(\bar{x})$ są liniowo niezależne.*

[1] Jeżeli nierówność jest spełniona dla wszystkich argumentów $x \in X$, to $\bar{x}$ nazywamy minimum (maksimum) globalnym f na X

[2] Symbol **0** oznacza wektor $[0, \ldots, 0]^T$ o wymiarze $1 \times n$.

[3] Jeżeli nierówność jest spełniona dla każdego $x \in M$, to $\bar{x}$ nazywamy minimum (maksimum) globalnym f na M

Definicja 1.4 Funkcją Lagrange'a *dla problemu ekstremum warunkowego zadanego przez f i G nazywamy funkcję $\mathscr{L} : X \to \mathbb{R}$ o wartościach*

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T G(x),$$

gdzie $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych, a $\lambda \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem parametrów (mnożników Lagrange'a).

Twierdzenie 1.2 *W problemie zadanym przez różniczkowalne $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ funkcja f może mieć ekstremum lokalne na M tylko w takim $\bar{x}$, że:*

- *$\bar{x}$ jest punktem nieregularnym w M,*
- *$\bar{x}$ wraz z danym wektorem $\bar{\lambda}$ spełnia układ:*

$$\begin{cases} \mathscr{L}'(\bar{x}, \bar{\lambda}) & = & \mathbf{0}, \\ G(\bar{x}) & = & \mathbf{0}. \end{cases}$$

Twierdzenie 1.3 *Jeśli w problemie na ekstremum warunkowe zadanym przez f i G funkcje $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ mają ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, $\bar{x}$ jest punktem regularnym w M i $\mathscr{L}'(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \mathbf{0}$ to:*

- *f ma minimum (maksimum) lokalne na M, jeśli forma kwadratowa zadana macierzą $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ jest dodatnio (ujemnie) określona na $C = Ker\, G'(\bar{x})$,*[4]
- *f nie ma ekstremum lokalnego na M, jeśli forma kwadratowa zadana macierzą $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ jest nieokreślona na $C = Ker\, G'(\bar{x})$*

Przypomnijmy: $C = \operatorname{Ker} G'(\bar{x}) = \{h \in \mathbb{R}^n : G'(\bar{x})h = \mathbf{0}\}$ a dodatnia (ujemna) określoność $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ na jądrze C oznacza, że $(\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})h|h) > (<)0$ dla $h \in C \setminus \{0\}$.

Ograniczenia zadane nierównościami Rozpatrzmy następujące problem: $\max_{x \in X} f(x)$ przy warunkach $g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$ oraz $h_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, k$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ a $m, k \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq k + m$. Zauważmy, gdy $m = 0$ wtedy mamy tylko ograniczenia zadane nierównościami a gdy $k = 0$ wtedy mamy tylko ograniczenia zadane równaniami. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ oznacza zbiór rozwiązań dopuszczalnych, tzn. $M = \{x \in \mathbb{R}^n\ g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, k\}$. Zakładamy, że funkcje f, $g_i, i = 1, \ldots, m$ oraz $h_j, j = 1, \ldots, k$ są różniczkowalne.

Definicja 1.5 *Punkt $\bar{x} \in M$ nazywamy* punktem regularnym *ograniczeń wtt. gdy ograniczenia, które są spełnione dla $\bar{x}$ co do równości są niezależne tzn. gdy wiersze macierzy $D = [G'(\bar{x})H'(\bar{x})]^T$ gdzie $G(\bar{x}) = [g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \ldots, g_m(\bar{x})]^T$, $H(\bar{x}) = [h_j(\bar{x}), \forall j$ takich, że $h_j(\bar{x}) = 0]^T$ są liniowo niezależne.*

[4] W szczególności, gdy macierz $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ jest dodatnio (ujemnie) określona.

Twierdzenie 1.4 (Warunki Kuhn'a-Tucker'a) *Niech punkt $\bar{x} \in M$ będzie punktem regularnym ograniczeń. Wtedy istnieją mnożniki $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ oraz $\lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \ldots, k$, takie, że*

- *dla każdego $l = 1, \ldots, n$ zachodzi:*

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial h_j(\bar{x})}{\partial x_l},$$

  oraz

- *dla każdego $j = 1 \ldots, k$ zachodzi $\lambda_j h_j(\bar{x}) = 0$, tzn. $\lambda_j = 0$ dla każdego ograniczenia j, które nie jest spełnione co do równości.*

Twierdzenie 1.5 *Niech $m = 0$ oraz funkcja h_j będzie quasi-wypukła dla każdego j. Niech ponadto funkcja f spełnia warunek $f'(x_1)(x_2 - x_1)^T > 0$ dla każdych x_2, x_1 takich, że $f(x_2) > f(x_1)$. Jeżeli $\bar{x}$ będący punktem regularnym ograniczeń spełnia warunki Kuhn'a-Tucker'a wtedy $\bar{x}$ jest maksimum globalnym funkcji f na zbiorze M.*

Twierdzenie 1.6 *Niech zbiór M będzie wypukły a funkcja f silnie quasi-wklęsła na M, wtedy istnieje jeden punkt $\bar{x} \in M$ rozwiązujący problem maksymalizacyjny z ograniczeniami.*

Przypomnijmy: f jest quasi-wypukła na zbiorze A wtt. $\forall x_1, x_2 \in A$ oraz $\mu \in [0, 1]$ zachodzi $f(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Funkcja f jest silnie quasi-wypukła jeżeli nierówność jest ostra dla $\mu \in (0, 1)$ i każdych $x_1 \neq x_2$. Każda funkcja wypukła jest także quasi-wypukła. Funkcja f jest quasi-wklęsła gdy funkcja $-f$ jest quasi-wypukła.

1.2 O naturze dynamicznej optymalizacji

Intuicja i przykłady dla podstawowych pojęć:

- funkcjonał,
- zmienne warunki końcowe (pionowa i pozioma linia końcowa, krzywa końcowa),
- warunek transwersalności.

Alternatywne podejścia do dynamicznej optymalizacji:

- rachunek wariacyjny,
- teoria optymalnego sterowania,
- programowanie dynamiczne.

Twierdzenie 1.7 (Zasada Leibniza) *Rozważmy całkę oznaczoną:* $I(x) \equiv \int_a^b F(t,x)dt$*, gdzie* $F'_x(t,x)$ *jest ciągłe na przedziale* $[a,b]$ *wtedy:*

$$\frac{dI}{dx} = \int_a^b F'_x(t,x)dt,$$

ponadto oznaczając: $J(b,a) \equiv \int_a^b F(t,x)dt$ *mamy reguły cząstkowe:*

$$\frac{\partial J}{\partial b} = F(b,x),$$
$$\frac{\partial J}{\partial a} = -F(a,x).$$

2 Przypadek ciągły - teoria sterowania optymalnego

2.1 Najprostszy problem sterowania optymalnego

$$\begin{array}{ll} \max & V = \int_0^T F(t,y,u)dt, \\ \text{przy warunkach} & \dot{y} = f(t,y,u), \\ & y(0) = A, \quad y(T) \text{ swodobne (A,T - dane)} \\ \text{oraz} & u(t) \in \mathcal{U} \text{ dla wszystkich } t \in [0,T]. \end{array}$$

Zakładamy, że funkcje F i f są ciągłe i mają ciągłe pochodne pierwszego rzędu względem t i y. Przyjmiemy, iż $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

2.2 Hamiltonian i zasada maksimum

Definicja 2.1 Funkcję Hamiltona (hamiltonian) *dla problemu (2.1) definiujemy jako:*

$$H(t,y,u,\lambda) \equiv F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u),$$

gdzie λ *jest tzw.* zmienną dualną.

Twierdzenie 2.1 (Zasada maksimum) *Dla problemu (2.1) warunki zasady maksimum są następujące:*

$$\begin{array}{ll} \max_u H(t,y,u,\lambda) & \textit{dla każdego } t \in [0,T], \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, & [\textit{równanie ruchu dla } y] \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}, & [\textit{równanie ruchu dla } \lambda] \\ \lambda(T) = 0 & [\textit{warunek transwersalności}]. \end{array}$$

Twierdzenie 2.2 (Mangasariana) *Dla problemu*

$$\begin{array}{ll} \max_u & V = \int_0^T F(t,y,u)dt, \\ \textit{przy warunkach} & \dot{y} = f(t,y,u), \\ & y(0) = y_0 \quad (y_0, T \textit{ dane}). \end{array}$$

warunki zasady maksimum są wystarczające do globalnej maksymalizacji V o ile

- *obie funkcje F i f są różniczkowalne i wklęsłe oraz różniczkowalne łącznie względem zmiennych (y, u) oraz*
- *jeśli f jest nieliniowe względem y lub u to dla rozwiązania optymalnego zachodzi: $\lambda(t) \geq 0$ dla każdego $t \in [0, T]$.*

Twierdzenie Mangasariana jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Arrowa:

Twierdzenie 2.3 (Arrowa) *Niech $u^* = u^*(t, y, u)$ maksymalizuje hamiltonian w każdej chwili, przy danych wartościach zmiennej stanu y i zmiennej dualnej λ. Stwórzmy zmaksymalizowany hamitlonian:*

$$H^0(t, y, u) = F(t, y, u^*) + \lambda f(t, y, u^*),$$

dla problemu z poprzedniego twierdzenia warunki zasady maksimum są wystarczające na globalną maksymalizację V, o ile zmaksymalizowany hamiltonian H^0 jest wklęsły względem y dla wszystkich $t \in [0, T]$ dla danego λ.

2.3 Problem z wieloma zmiennymi stanu i zmiennymi sterującymi

$$\begin{array}{ll} \max & V = \int_0^T F(t, y_1, y_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m) dt, \\ \text{przy warunkach} & \dot{y}_j = f^j(t, y_1, y_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m), \\ & y_j(0) = y_{j0}, \quad y_j(T) = y_{jT}, \\ \text{oraz} & u_i(t) \in \mathcal{U}_i \quad (i = 1, \ldots m, j = 1, \ldots n). \end{array}$$

Dla takiego problemu otrzymujemy hamiltonian:

$$H \equiv F(t, y_1, y_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f^j(t, y_1, y_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

zasada maksimum przybiera postać:

Twierdzenie 2.4 (Zasada maksimum) *Dla problemu wielowymiarowego warunki zasady maksimum są następujące:*

$$\begin{array}{l} \max_u H(t, y, u, \lambda), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda^T}, \\ \dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \textit{gdzie } \dot{\lambda}^T \textit{ to transpozycja } \dot{\lambda}, \\ H_{t=T} = 0 \quad (\textit{lub } \lambda_j(T) = 0) \textit{ jeśli } T \; (\textit{lub } y_{jT}) \textit{ jest swobodne}, \end{array}$$

gdzie $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$, $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ i $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^T$.

2.4 Alternatywne warunki końcowe

Wróćmy do problemu jednowymiarowego (2.1). Dla alternatywnych warunków końcowych pierwsze trzy warunki zasady maksimum pozostają niezmienione, zmianie podlega warunek transwersalności:

- ustalony punkt końcowy: $y(T) = y_T$ $((T, y_T)$ - dane),
- pozioma linia końcowa: $[H]_{t=T} = 0$,
- krzywa końcowa postaci $y_T = \phi(T)$: $[H - \lambda\phi']_{t=T} = 0$,
- obcięta pionowa linia końcowa ($y_T \geq y_{min}$, T i y_{min} dane): $\lambda(T) \geq 0$, $y_T \geq y_{min}$, $(y_T - y_{min})\lambda(T) = 0$,
- obcięta pozioma linia końcowa ($T^* \leq T_{max}$): $[H]_{t=T} \geq 0$, $T \leq T_{max}$, $(T - T_{max})[H]_{t=T} = 0$.

2.5 Dyskontowanie i hamiltonian wartości bieżącej

Gdy funkcja podcałkowa F zawiera czynnik dyskontujący $e^{-\rho t}$: $F(t, y, u) = G(t, y, u)e^{-\rho t}$ wtedy hamiltonian można przekształcić do postaci hamiltonianu wartości bieżącej:

Definicja 2.2 Hamiltonian wartości bieżącej *definiujemy jako:*

$$H_c(t, y, u, \lambda) \equiv He^{\rho t} = G(t, y, u) + mf(t, y, u),$$

gdzie $m = \lambda e^{\rho t}$ *jest tzw.* zmienną dualną.

Twierdzenie 2.5 (Skorygowana zasada maksimum) *Dla problemu z czynnikiem dyskontującym warunki skorygowanej zasady maksimum są następujące:*

$$\begin{array}{ll}
\max_u H_c(t, y, u, \lambda) & \textit{dla każdego } t \in [0, T] \\
\dot{y} = \frac{\partial H_c}{\partial m} & [\textit{równanie ruchu dla } y] \\
\dot{m} = -\frac{\partial H_c}{\partial y} + \rho m & [\textit{równanie ruchu dla } \lambda] \\
m(T)e^{-\rho T} = 0 & [\textit{warunek transwersalności}].
\end{array}$$

2.6 Zagadnienie z nieskończonym horyzontem czasowym

Uwaga na zbieżność całki!! Dalej jak wyżej, zmieniamy tylko warunek transwersalności:

$$\begin{array}{ll}
\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0, & [\text{dla swobodnego stanu końcowego}] \\
\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq 0 \text{ oraz } \lim_{t\to\infty} \lambda(t)[y(t) - y_{min}] = 0, & [\text{dla ograniczonego stanu końcowego}].
\end{array}$$

3 Przypadek dyskretny - programowanie dynamiczne

3.1 Nieskończony horyzont

Rozpatrzmy problem[5]:

$$\begin{array}{ll} \text{(SP)} & \max_{(x_{t+1})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & \text{p.w. } x_{t+1} \in \Gamma(x_t), t = 0, 1 \ldots, \\ & \text{i danym } x_0 \in X. \end{array}$$

Zauważmy, że:

Twierdzenie 3.1 *Weźmy $f : X \to \mathbb{R}$ oraz $g : X \times Y \to \mathbb{R}$. Przyjmijmy, że $\max_{y \in Y}\{g(x, y)\}$ oraz $\max_{(x,y)}\{f(x) + g(x, y)\}$ istnieją wtedy:*

$$\max_{(x,y)}\{f(x) + g(x, y)\} = \max_x\{f(x) + \max_y\{g(x, y)\}\}.$$

Zadanemu problemowi (SP) optymalizacyjnemu odpowiada równanie funkcyjne postaci:

$$\text{(FE)} \quad V(x) = \max_{y \in \Gamma(x)}\{F(x, y) + \beta V(y)\}, \forall x \in X.$$

Niech $\Pi(x_0) = \{(x_t)_{t=0}^{\infty} : x_{t+1} \in \Gamma(x_t), t = 0, 1, \ldots\}$ oznacza zbiór planów dostępnych z x_0 a $\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ oznacza element zbioru $\Pi(x_0)$. Przyjmiemy następujące założenie:

Założenie 3.1 *Zbiór wartości $\Gamma(x)$ jest niepusty dla każdego $x \in X$. Dla każdego x_0 i $\underline{x} \in \Pi(x_0)$ granica $\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ istnieje.*

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $u_n : \Pi(x_0) \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem: $u_n(\underline{x}) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ a $u : \Pi(x_0) \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie zadane: $u(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x})$. Niech $V^*(x_0) = \max_{\underline{x} \in \Pi(x_0)} u(\underline{x})$.

Twierdzenie 3.2 *Niech X, Γ, F, β spełniają założenie 3.1 wtedy funkcja V^* spełnia (FE).*

Twierdzenie 3.3 *Niech X, Γ, F, β spełniają założenie 3.1 a funkcja V spełnia (FE) oraz $\lim_{n\to\infty} \beta^n V(x_n) = 0$ dla każdego $\underline{x} \in \Pi(x_0)$ i każdego $x_0 \in X$ wtedy $V = V^*$.*

Twierdzenie 3.4 *Niech X, Γ, F, β spełniają założenie 3.1 a plan $\bar{x}^* \in \Pi(x_0)$ osiąga maksimum (SP) dla danego x_0. Wtedy*

$$V^*(x_0^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta V^*(x_{t+1}^*), \forall t. \tag{3.1}$$

Twierdzenie 3.5 *Niech X, Γ, F, β spełniają założenie 3.1 a plan $\bar{x}^* \in \Pi(x_0)$ spełnia równanie (3.1) i warunek $\lim\max_{t\to\infty} \beta^n V^*(x_t^*) \le 0$. Wtedy $\underline{x}^*$ osiąga maksimum w (SP) dla danego x_0.*

[5]Dla uproszczenia zakładamy, że maksimum tego problemu istnieje.

3.2 Twierdzenie o obwiedni

Twierdzenie 3.6 *Weźmy funkcję $f(x, \alpha)$ różniczkowalną po x i α oraz załóżmy, że dla każdego α istnieje $\max_x\{f(x, \alpha)\}$ wtedy:*

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha) = f_2(\bar{x}(\alpha), \alpha),$$

gdzie $F(\alpha) \equiv \max_x\{f(x, \alpha)\}$ a $\bar{x}(\alpha) \equiv \arg\max_x\{f(x, \alpha)\}$ są różniczkowalne.

3.3 Schemat

Schemat:

- maksymalizacja „prawej strony” równania Belmanna po zmiennej sterującej,
- stosujemy twierdzenie o obwiedni dla równania Belmanna i zmiennej stanu,
- zapisujemy równanie Eulera,
- dodajemy warunek transwersalności,
- rozwiązujemy.

3.4 Skończony horyzont

Funkcja celu dla skończonego horyzontu: $\sum_{t=0}^{T} \beta^t F_t(x_t, x_{t+1}) + \beta^{T+1} F_{T+1}(x_{T+1})$.

Definicja 3.1 *Funkcją wartości $V_\tau(x_\tau)$ nazywamy odwzorowanie przyporządkowujące każdemu stanowi maksymalną możliwą do osiągnięcia wypłatę:*

$$\max_{(x_{t+1})_{t=\tau}^{T+1}} \left\{ \sum_{t=\tau}^{T} \beta^{t-\tau} F_t(x_t, x_{t+1}) + \beta^{T+1-\tau} F_{T+1}(x_{T+1}) \right\}.$$

Zinterpretuj: $V_0(x_0)$ i $V_{T+1}(x_{T+1})$.

Twierdzenie 3.7 *Równanie Belmanna dla problemu ze skończonym horyzontem:*

$$V_t(x_t) = \max_{x_{t+1} \in \Gamma(x_t)} \left\{ F_t(x_t, x_{t+1}) + \beta V_{t+1}(x_{t+1}) \right\}.$$

Pamiętajmy o warunku transwersalności: $V_{T+1}(x_{t+1}) = 0$.

Literatura

[1] Chiang A.C., *Elementy dynamicznej optymalizacji*, Warszawa 2002.

[2] Dubnicki W., J. Kłopotowski, T. Szapiro, *Analiza matematyczna. Podręcznik dla ekonomistów*, Warszawa 1999.

[3] Rockafellar, R.T., *Convex analysis*, Princeton University Press 1997.

[4] Stokey, N., R.E. Lucas i E.C. Prescott, *Recursive methods in economic dynamics*, Cambridge 1989.