1 konsument, N-dóbr, preferencje:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} a_i c_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

CES, stała elastyczność substytucji $0 < \rho < 1, a_i > 0, A_i > 0$. Technologia: $A_i l_i = y_i = c_i$

Szukamy alokacji Paretto:

$$\max_{\{l_i\}_{i=1}^{N} \geq 0} \left[\sum_{i=1}^{N} a_i (A_i l_i)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$\sum l_i = 1$$

Warunki konieczne na maksymalizację:

$$[\dots]^{1/\rho-1} a_i A_i^{\rho} l_i^{\rho-1} = \lambda$$

. Stąd: $l_i = [\frac{a_1 A_1^{\rho}}{a_i A_i^{\rho}}]^{\frac{1}{\rho-1}} l_1$. Korzystając z ograniczenia $\sum_i l_i = 1$ mamy:

$$l_1 = \frac{(a_1 A_1^{\rho})^{\frac{1}{1-\rho}}}{\sum_{i=1}^{N} (a_i A_i^{\rho})^{\frac{1}{\rho-1}}}.$$

i podobnie dla pozostałych l_i.

1 Model konkurencji monopolistycznej

Ref: Dixit, Stiglitz. Wyprowadźmy popyt na dobro i przy dochodzie Y i wektorze cen $(p_i)_{i=1}^{N}$, tzn: $\sum_{i=1}^{N} p_i c_i = Y$, Niech $A_i = 1$. Licząc krańcową stopę substytucji mamy:

$$c_i^* = (\frac{a_1}{a_i})^{\frac{1}{\rho-1}} (\frac{p_i}{p_1})^{\frac{1}{\rho-1}} c_1^*.$$

$$Y = \sum c_i^* p_i = c_1^* \sum (\frac{a_i}{a_1})^{\frac{1}{1-\varrho}} (\frac{p_i}{p_1})^{\frac{1}{\rho-1}} p_i$$

Występuje tylko jedna niewiadoma c_1^*, można wyprowadzić popyt.

$$c_1^* = a_1^{\frac{1}{1-\rho}} p_1^{\frac{1}{\rho-1}} Y \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}.$$

Oznaczmy przez $I = \sum_{i=1}^{N} a_i^{\frac{1}{1-\rho}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}$ indeks cenowy i oznaczmy: $d_i(p_i, I, Y) = B_i p_i^{\frac{1}{\rho-1}}$, gdzie $B_i := a_i^{\frac{1}{1-\rho}} \frac{Y}{I}$

1.1 Równowaga ogólna w warunkach konkurencji monopolistycznej

Niech $a_i = 1$. Symetryczną równowagą w warunkach konkurencji monopolistycznej jest: $c^*, l^*, p^*, \pi^*, w^*$ oraz funkcja d^* taka, że:

- Biorąc ceny i zyski jako dane: $\forall_i c_i = c^*$ oraz l^* rozwiązują:
$$\max_{\{c_i\}_{i=1}^N} \left[\sum_{i=1}^N c_i^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}$$
pod warunkiem:
$$\sum_{i=1}^N p^* c_i = w^* l + N\pi^*$$
- Biorąc funkcje d^* jako daną, p^* rozwiązuje problem maksymalizacji zysków firmy:
$$\max_p d^*(p, Np^{*\frac{\rho}{\rho-1}}, w^* + N\pi^*)(p - w^*)$$
oraz:
$$\pi^* = d^*(p^*, Np^{*\frac{\rho}{\rho-1}}, w^* + N\pi^*)(p^* - w^*)$$
- Rynki się czyszczą
$$d^*(p^*, Np^{*\frac{\rho}{\rho-1}}, w^* + N\pi^*) = c^*$$
- Rynek pracy się czyści
$$l^* = Nd^*(p^*, Np^{*\frac{\rho}{\rho-1}}, w^* + N\pi^*)$$

Z wcześniejszych obliczeń:
$$d^*(p, Np^{*\frac{\rho}{\rho-1}}, w^* + N\pi^*) = Bp^{\frac{1}{\rho-1}}.$$
Rozwiążmy problem firmy:
$$\max_p Bp^{\frac{1}{\rho-1}}(p - w^*).$$
Warunek konieczny:
$$Bp^{*\frac{1}{\rho-1}}\left[1 + \frac{1}{\rho-1}(1 - \frac{w^*}{p^*})\right] = 0$$
. Stąd:
$$1 - \frac{w^*}{p^*} = 1 - \rho$$
$$p^* = \frac{1}{\rho} w^* > w^* = MC$$

2 Misc

Pojawia się pytanie, co determinuje liczbę N? Jakie N jest optymalne a jakie kontestowalne? Koszty wejścia $\bar{l}$ dla każdej firmy. Kontestowalna liczba firm, taka dla której zysk z wejścia na rynek jest równy kosztą wejścia $\pi^* = w^*\bar{l}$.