Rozpatrzmy problem:

$$\max_{\{k_t\}_{t=0}^{T+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})$$

po warunkiem $k_t \geq 0, f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1} \geq 0$ i zadanym $k_0 > 0$, gdzie założenia są takie jak przyjęte na zajęciach. Warunkami koniecznymi i wystarczającymi na jedyne wewnętrzne rozwiązanie są:

$$(f'(k_t) + 1 - \delta)\beta u'(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) = u'(f(k_{t-1}) + (1-\delta)k_{t-1} - k_t),$$
$$k_{T+1} = 0, k_0 \text{ dane.}$$

Rozpatrzmy teraz problem z nieskończonym horyzontem czasowym:

$$\max_{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})$$

pod warunkiem $f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1} \geq 0$ oraz $k_t \geq 0$.

Twierdzenie 1 *Jeżeli dostępny ciąg $\{k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ spełnia warunki:*

- $(f'(k_t^*) + 1 - \delta)\beta u'(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*) = u'(f(k_{t-1}^*) + (1-\delta)k_{t-1}^* - k_t^*)$,
- $k_0^* = k_0$
- $\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*)k_{t+1}^* = 0$

Wtedy $\{k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ jest rozwiązaniem optymalnym.

Dowód: Ponieważ u, f są wklęsłe:

$$u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) - u(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*) \leq$$
$$(f(k_t^*) + (1-\delta))u'(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*)(k_t - k_t^*) - u'(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*)(k_{t+1} - k_{t+1}^*)$$

A więc dla skończonego T (korzystając z warunków koniecznych) mamy:

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) \leq \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*) +$$
$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t[(f(k_t^*) + (1-\delta))u'(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*)(k_t - k_t^*) - u'(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*)(k_{t+1} - k_{t+1}^*)] =$$
$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*) - \beta^T u'(f(k_T^*) + (1-\delta)k_T^* - k_{T+1}^*)(k_{T+1} - k_{T+1}^*) \leq$$
$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*) + \beta^T u'(f(k_T^*) + (1-\delta)k_T^* - k_{T+1}^*)k_{T+1}^*.$$

Biorąc granicę przy $T \to \infty$ i korzystając z warunku TVC otrzymujemy:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t^*) + (1-\delta)k_t^* - k_{t+1}^*).$$

■