Paweł Dziewulski
Mikroekonomia II
6.04.2010

Zadanie 3.12 *Rozpatrz gospodarkę z jednym konsumentem i jedną firmą. Konsument posiada początkowy zasób kapitału w wysokości k_0, oraz jednostkę czasu wolnego, którą może rozdzielić pomiędzy pracę (l) i czas wolny (n) (tym samym $l + n = 1$). Konsument wynajmuje firmie swój kapitał po cenie r oraz pracę, otrzymując wynagrodzenie w. Cały swój dochód przeznacza na konsumpcję, którą zakupuje po zadanej cenie p. Preferencje konsumenta są opisane za pomocą $u(c, n) = c^{\alpha} n^{1-\alpha}$.*

Firma wynajmuje od konsumenta pracę i kapitał po zadanych cenach w i r, aby zmaksymalizować zysk z produkcji dobra konsumpcyjnego, uzyskiwanego za pomocą technologii opisanej przez $f(K, L) = K^{\beta} L^{1-\beta}$. Firma sprzedaje dobro konsumpcyjne po zadanej cenie p.

Rozwiązanie zadania 3.12: Zaczynamy od definicji równowagi w powyższej gospodarce.

Definicja 1 (Równowaga) *Równowaga będzie zdefiniowana jako następujący zbiór $\{p^*, r^*, w^*, c^*, k^*, K^*, l^*, L^*, n^*\}$, którego elementy spełniają warunki:*

(i) przy c^*, k^*, l^*, n^* konsument maksymalizuje swoją użyteczność, traktując ceny p^*, r^*, w^* jako dane, tj.

$$\begin{aligned} u(c^*, n^*) &= \max\nolimits_{c,k,l,n}\{u(c, n)\}, \\ p.w. \quad & 0 = r^*k + w^*l - p^*c, \\ & 0 = 1 - l - n, \\ & 0 = k_0 - k. \end{aligned}$$

(ii) przy K^*, L^* firma maksymalizuje swój zysk, traktując ceny p^*, r^*, w^* jako dane, tj.

$$p^* f(K^*, L^*) - w^* L^* - r^* K^* = \max_{K,L}\{p^* f(K, L) - w^* L - r^* K\}.$$

(iii) przy cenach p^*, r^*, w^* rynki się czyszczą , tj.

$$\begin{aligned} l^* &= L^*, \\ k^* &= K^*, \\ c^* &= f(K^*, L^*), \end{aligned}$$

Konsument Wpierw znajdziemy rozwiązanie problemu konsumenta. Rozpoczynamy od zapisania równania Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, k, l, n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= c^{\alpha} n^{1-\alpha} \\ &+ \lambda_1 \left[r^* k + w^* l - p^* c \right] \\ &+ \lambda_2 \left[1 - l - n \right] \\ &+ \lambda_3 \left[k_0 - k \right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Wartości c^*, k^*, l^*, n^* spełniają następujące warunki pierwszego rzędu:

$$\alpha {c^*}^{\alpha-1} {n^*}^{1-\alpha} - \lambda_1 p^* = 0, \tag{2}$$
$$\lambda_1 r^* - \lambda_3 = 0, \tag{3}$$
$$\lambda_1 w^* - \lambda_2 = 0, \tag{4}$$
$$(1-\alpha) {c^*}^{\alpha} {n^*}^{-\alpha} - \lambda_2 = 0, \tag{5}$$
$$r^* k^* + w^* l^* - p^* c = 0, \tag{6}$$
$$1 - l^* - n^* = 0, \tag{7}$$
$$k_0 - k^* = 0. \tag{8}$$

Z warunku (8) automatycznie wynika, że $k^* = k_0$. Z warunków (4) oraz (5) otrzymujemy

$$(1-\alpha) {c^*}^{\alpha} {n^*}^{-\alpha} - \lambda_1 w^* = 0, \tag{9}$$

co w połączeniu z warunkiem (2) daje

$$n^* = \frac{(1-\alpha) p^*}{\alpha w^*} c^*. \tag{10}$$

Dzięki (10) oraz (6) i (7) otrzymujemy

$$c^* = \frac{\alpha (r^* k_0 + w^*)}{p^*}, \tag{11}$$

które po podstawieniu do (10) daje nam

$$n^* = \frac{(1-\alpha)(r^* k_0 + w^*)}{w^*}. \tag{12}$$

Oczywiście z (12) oraz (7) bezpośrednio wynika, że $l^* = \alpha - \frac{(1-\alpha) r^* k_0}{w^*}$. Tym samym rozwiązaniem konsumenta jest następująca czwórka wartości:

$$c^* = \frac{\alpha (r^* k_0 + w^*)}{p^*}, \tag{13}$$
$$k^* = k_0, \tag{14}$$
$$l^* = \alpha - \frac{(1-\alpha) r^* k_0}{w^*}, \tag{15}$$
$$n^* = \frac{(1-\alpha)(r^* k_0 + w^*)}{w^*}. \tag{16}$$

Firma Rozwiązanie $\{K^*, L^*\}$ problemu firmy, zapisanego w podpunkcie (ii) definicji 1, musi spełniać następujące warunki:

$$p^*\beta K^{*\beta-1}L^{*1-\beta} - r^* = 0, \tag{17}$$
$$p^*(1-\beta)K^{*\beta}L^{*-\beta} - w^* = 0. \tag{18}$$

Łatwo zauważyć, że w (17) $p^*\beta K^{*\beta-1}L^{*1-\beta} = p^*\beta\frac{K^{*\beta}L^{*1-\beta}}{K^*} = p^*\beta\frac{f(K^*,L^*)}{K^*}$, analogicznie w (18). Powyższe warunki można zatem zapisać w następujący sposób:

$$p^*\beta\frac{f(K^*,L^*)}{K^*} = r^*, \tag{19}$$
$$p^*(1-\beta)\frac{f(K^*,L^*)}{L^*} = w^*. \tag{20}$$

Rynki Zgodnie z podpunktem (iii) definicji 1 szukamy cen p^*, w^*, r^*, przy których rynki się czyszczą. Przede wszystkim korzystamy z warunku, że $K^* = k^* = k_0$. Następnie korzystamy z faktu, że w równowadze $c^* = f(k_0, L^*)$. Wykorzystując ten warunek do zależności (13), oraz podstawiając ją do (19) otrzymujemy:

$$p^*\beta\frac{\alpha(r^*k_0 + w^*)}{p^*k_0} = r^*,$$

a stąd

$$\frac{r^*}{w^*} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha\beta)k_0}. \tag{21}$$

Dzieląc przez siebie warunki (19) i (20) otrzymujemy

$$\frac{\beta L^*}{(1-\beta)k_0} = \frac{r^*}{w^*},$$

które po podstawieniu do (21) umożliwia nam policzenie

$$L^* = \frac{\alpha\beta}{\beta(1-\alpha\beta)}. \tag{22}$$

Oznacza to, że w równowadze obierane są następujące alokacje:

$$l^* = L^* = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}, \tag{23}$$
$$k^* = K^* = k_0, \tag{24}$$
$$c^* = f(k_0, L^*), \tag{25}$$
$$n^* = \frac{1-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta}. \tag{26}$$

Jako ceny w równowadze będziemy zatem rozumieli wszystkie trójki $\{p^*, r^*, w^*\}$ spełniające następujące warunki:

$$\frac{r^*}{w^*} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha\beta)k_0}, \tag{27}$$

$$r^* = p^*\beta\frac{c^*}{k_0}, \tag{28}$$

$$w^* = p^*(1-\beta)\frac{c^*}{L^*}. \tag{29}$$

Przykładowo normalizując cenę $p^* = 1$, $r^* = \beta\frac{c^*}{k_0}$, $w^* = (1-\beta)\frac{c^*}{L^*}$. ■