Charakterystyka zbioru równowag w submodularnych grach z indywidualną podażą dóbr publicznych

Łukasz Woźny[1]

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Streszczenie

W pracy rozpatrujemy statyczną i dynamiczną gospodarkę z indywidualną podażą wydatków na dobro publiczne. Celem pracy jest podanie warunków wystarczających na istnienie równowagi Nasha gry opisującej takie gospodarki oraz charakterystyka struktury zbioru tych równowag dla ogólnych funkcji produkcji dobra publicznego.

Metody użyte w pracy bazują na wynikach odnośnie optymalizacji funkcji super- i submodularnych (Topkis 1995) i są uogólnieniem na wypadek szerszej klasy agregatów metod użytych w (Amir, Lambson 2000) oraz (Sundaram 1989a).

Słowa kluczowe: dobra publiczne, strategiczna substytucyjność, gry submodularne

Kody JEL: C72, C73, H41

[1]Adres: Katedra Teorii Systemu Rynkowego, Al. Niepodległości 164, 02-554 Warszawa; e-mail: lukasz.wozny@sgh.waw.pl.

1 Wstęp

Rozpatrzmy gospodarkę z indywidualną podażą wydatków na dobro publiczne. Najczęściej (por. Bergstrom, Blume i Varian 1986) spotykanym w literaturze opisem takiej gospodarki jest model niekooperacyjnej gry w postaci strategicznej pomiędzy skończoną liczbą graczy, z których każdy wybiera strategie maksymalizujące użyteczność z konsumpcji jednego dobra prywatnego i jednego dobra publicznego produkowanego przez agregat zadany w postaci sumy indywidualnych nakładów na dobro publiczne. Określając dynamikę dobra publicznego analogicznie opisuję się także dynamiczną gospodarkę z indywidualną podażą dobra publicznego. Podkreślmy, iż założenie o funkcji produkcji/agregacie w postaci sumy oznacza doskonałą substytucyjność nakładów i jest stosowane głównie w przypadku, w którym nakłady poszczególnych podmiotów do produkcji dobra publicznego da się przedstawić za pomocą jednostek pieniężnych.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków wystarczających na istnienie równowagi Nasha gry opisującej statyczną i dynamiczną gospodarkę z indywidualną podażą dobra publicznego oraz charakterystyka struktury zbioru tych równowag bez odwoływania się do założenia o agregacie w postaci sumy nakładów. Aby osiągną ten cel, wykorzystamy własności komplementarności i substytucyjności (Samuelson 1974) preferencji oraz funkcji produkcji (agregacji) dobra publicznego, powodujących powstawanie ich strategicznych odpowiedników (Bulow, Geanakoplos i Klemperer 1985).

Zauważmy, iż przyjmowane założenia o monotoniczności funkcji produkcji dobra publicznego (agregatu) i preferencji powodują, iż substytucyjność strategii jest niejako wpisana w strukturę analizowanej gospodarki. Poza wypadkiem silnej komplementarności w funkcji agregatu zachodzi bowiem: im więcej inny gracze przeznaczają na dobro publiczne tym wyższa użyteczność danego gracza, a więc i jego skłonność do analogicznego zachowania może być osłabiona. Z tego powodu w pracy skoncentrujemy się na gospodarkach ze strategiczną substytucyjnością modelując je przy wykorzystaniu gier (quasi–) submodularnych.

Ze względu na brak symetrycznych wyników odnośnie punktów stałych dla odwzorowań rosnących i malejących, dotychczasowe wyniki (odnośnie istnienie i struktury zbiory równowag) dla gier ze strategiczną substytucyjnością nie są tak bogate jak dla gier ze strategiczną komplementarnością. Pracą analizującą gry ze strategiczną substytucyjnością jest np. artykuł Dubey, Haimanko i Zapechelnyuk (2006), a gry z agregatami publicznymi teksty Kukushkina (1994a, 1994b). Twierdzenia przedstawione w niniejszej pracy wpisują się więc w tą literaturę i można je interpretować jako dalszą próbę wypełniania luki pomiędzy wynikami dla gier ze strategiczną substytucyjnością i komplementarnością.

Pozostała część pracy jest zorganizowana w następujący sposób: w części 2 przedstawiamy genezę problemu i budujemy intuicję odnośnie dalszych wyników. W części 3 omawiamy wyniki literatury z tego zakresu, w części 4 przedstawiamy najważniejsze wyniki dla gospodarki statycznej, a w części 5 analogiczne dla gospodarki dynamicznej. Pracę kończą wnioski, dowody twierdzeń oraz bibliografia.

2 Geneza problemu

Zanim szczegółowo omówimy wyniki pracy przedstawimy nieformalną dyskusję prezentującą genezę analizowanego zagadnienia. Dyskusja ta ma za zadanie uzasadnić wybór problematyki oraz zbudować intuicję odnośnie wyników przeprowadzonych badań. Dla sprecyzowania rozważań, jako przykład dobra publicznego przyjmiemy jakość środowiska naturalnego.

Rozpatrzmy wypadek samotnego Robinsona, który czerpie użyteczność z konsumpcji oraz jakości środowiska naturalnego, w którym żyje. Konsumpcja zwiększa użyteczność, ale także poziom zanieczyszczeń (bezpośrednio oraz pośrednio przez produkcję dóbr konsumpcyjnych). Posiadane zasoby (czas, majątek) Robinson może przeznaczyć na zakup lub produkcję dóbr konsumpcyjnych albo na poprawę jakości środowiska (np. redukcję zanieczyszczeń). W dalszej części rozpatrzymy tylko wypadek, w którym jakość środowiska nie jest satysfakcjonująca (np. na skutek własnych bądź cudzych decyzji o poziomie produkcji oraz konsumpcji). Sytuacja komplikuje się, gdy na wyspie Robinsona pojawiają się nowe jednostki. Wtedy ujawnia się bowiem, że środowisko naturalne jest dobrem publicznym, generującym efekty zewnętrzne. W tej sytuacji decyzje Robinsona odnośnie podaży nakładów od czyszczenia środowiska są strategicznie uwarunkowane decyzjami pozostałych mieszkańców wyspy. Ze względu na publiczny charakter dobra, jakim jest jakość środowiska, analizowana sytuacja najprawdopodobniej (poza wypadkiem silnej komplementarności w technologii czyszczenia środowiska) charakteryzuje się strategiczną substytucyjnością tzn. nakłady poszczególnych podmiotów na ochronę środowiska są substytucyjne względem siebie. A zatem: im więcej inni mieszkańcy wyspy przeznaczają na ochronę środowiska, tym mniej nakładów przeznacza Robinson w optymalnej odpowiedzi na te zachowania. Interesujące jest więc zagadnienie istnienia oraz charakterystyki równowagi dla gospodarki tak opisanych interakcji. Dodatkowo, ze względu na potencjalną możliwość występowania wielu omawianych równowag uzasadniona jest także próba ich porównania / rozróżnienia. Wreszcie zasadne jest także postawienie pytania: jak współzależne decyzje wynikające z preferencji, oczekiwań, czy schematów zachowań będą determinowały ewolucję jakości środowiska na analizowanej wyspie? Inaczej: do jakiego stanu będzie zmierzać sytuacja na wyspie w długim okresie przy uwzględnieniu współzależnych zachowań podmiotów? Pytania te ujawniają swoją wagę, jeżeli uwzględnimy trzy obserwacje (i) dzisiejsze decyzje wpływające na jakość środowiska mogą ujawnić swoją wagę dopiero po długim okresie czasu, (ii) nawet niewielkie zaburzenia systemu mogą w długim okresie wytrącić go ze stanu ustalonego i powodować dalekosiężne skutki, oraz (iii) część procesów rządzących ewolucją jakości środowiska może mieć charakter nieodwracalny.

Wyniki badań biologicznych i ekologicznych wskazują, że zarówno agregacja zanieczyszczeń poszczególnych podmiotów, jak i dynamika zagregowanych poziomów zanieczyszczeń w środowisku może być wysoce skomplikowana, a w szczególności nie addytywna i nie liniowa (por. np. Scheffer (1997)). Z tego powodu jak również z faktu, iż wciąż nie wszystkie agregaty i dynamiki poziomu zanieczyszczeń w środowisku są dobrze opisane w ich analizie nie możemy się ograniczyć do agregatów zadanych w postaci sumy nakładów oraz jedynie linowych dynamik akumulacji (por. prace K. Arrowa, W. Brocka, P. Dasgupty, K. Maelera np. w (Dasgupta, Maeler, 2003)). Z tych też powodów zasadne jest opracowanie narzędzi teoretycznych do analizowania gospodarek z indywidualną podażą dóbr (czy anty-dóbr) publicznych przy ogólnych klasach funkcji agregujących jak i opisujących dynamikę ich zagregowanego poziomu w równowagowych strategiach doskonałych ze względu na pod-gry.

Zaznaczmy wreszcie, iż jakość środowiska naturalnego nie jest jedynym dobrem publicznym dla którego przyjmowanie założeń o addytywności, (quasi-) wklęsłość, czy nawet ciągłości agregatu jest mało uzasadnione. Do tej klasy można zaliczyć bowiem np. gry z indywidualną podażą nakładów do prac projektowych przynoszących użyteczność dla wszystkich jego uczestników (z zastrzeżeniem do takich, które spełniają definicję dobra publicznego w ramach danej organizacji). Tego typu gry (por. Dubey, Haimanko i Zapechelnyuk 2006) mogą wyróżniać się kilkoma istotnymi cechami wykluczającymi zastosowanie „standardowych'' agregatów. Przykładowo Milgrom i Roberts (1990) oraz Kremer (1993) argumentują, iż wiele zadań w nowoczesnych przedsiębiorstwach cechuje się wysoką komplementarnością poszczególnych nakładów. Już ten fakt wyklucza możliwość zastosowania w analizie agregatów w postaci sumy nakładów, a więc cechujących się doskonałą substytucyjnością wysiłku poszczególnych pracowników. Tak samo zmienna w trakcie prac projektowych lub trudna do identyfikacji krańcowa produktywność nakładów poszczególnych pracowników znacząco ogranicza stosowalność założenia o wklęsłości funkcji produkcji / agregacji. Wreszcie podkreślmy, iż niejednokrotnie nawet małe zmiany nakładów w pracach projektowych poszczególnych pracowników mogą powodować duże (a nawet decydujące o powodzeniu całego projektu) zmiany / skoki jego efektów. W konsekwencji założenie o ciągłości funkcji agregacji może być także restrykcyjne.

3 Dotychczasowe wyniki

W niniejszej części pracy wskażemy najważniejsze[2] wyniki odnośnie istnienia równowag i charakterystyki struktury zbioru równowag Nasha dla statycznych i dynamicznych gier z indywidualną podażą dobra publicznego.

Bergstrom, Blume i Varian (1986, 1992) oraz Fraser (1992) wykazują warunki na istnienie jedynej równowagi Nasha w grze z podażą wydatków na dobro (także wiele dóbr) publiczne, z agregatem w postaci sumy i ściśle quasi-wklęsłą funkcją użyteczności dla każdego gracza, poprzez analizę odwzorowań najlepszej odpowiedzi. Porównaj takż z (Watts 1996). Analogiczne wyniki dowodzą także Cornes, Hartley i Sandler (1999) za pomocą twierdzenia o punkcie stałym dla odwzorowań zbliżających. Alternatywnie Cornes i Hartley (2007) stosują metodę opartą o analizę tzw. funkcji „zastąpienia" (ang. *replacement function*), wykazując istnienie równowagi oraz omawiając wyniki z zakresu statyki komparatywnej; choć znów opierają się na założeniu, iż odwzorowanie najlepszej odpowiedzi jest funkcją.

Najsłabsze znane autorowi warunki odnośnie istnienia równowagi Nasha w grze z publicznym agregatem zawierają prace Kukushkina (1994a) oraz Dubey, Haimanko, i Zapechelnyuk (2006). Kukushkin (1994a) wykazuje, iż warunkiem wystarczającym na istnienie równowagi Nasha w omawianych grach jest rozłączność funkcji użyteczności względem dobra publicznego i prywatnego. Dodajmy także, iż warunek rozdzielności Kukushkina jest także wystarczający, w takim rozumieniu, że dla klasy rozłącznych funkcji użyteczności istnieją zbiory strategii oraz funkcje agregujące, dla których odpowiadające im gry nie mają równowag Nasha. Z kolei metoda Dubey, Haimanko i Zapechelnyuk (2006) analizy równowag Nasha bazuje na łącznym wykorzystaniu monotoniczności i półciągłości selekcji z odwzorowania najlepszej dopowiedzi (por. twierdzenie 2 i 3 w ich pracy) oraz tzw. gier potencjalnych (ang. *potential games*).

Wykorzystując metodę zaproponowaną w (Amir i Lambson 2000) w pracy przedstawimy alternatywny do prac (Kukushkin 1994a) czy (Dubey, Haimanko i Zapechelnyuk 2006) i intuicyjnie interpretowalny zestaw założeń gwarantujący występowanie równowag Nasha gier statycznych z agregatem publicznym. Ponadto zaprezentujemy szereg wyników charakteryzujących strukturę gier z substytucyjnością strategii.

Wyniki literatury odnośnie gier dynamicznych nie są tak obszerne. Standardową (por. np. Fudenberg i Tirole 2002) metodą udowadniania istnienia oraz charakterystyki struktury równowag Nasha jest analiza punktów stałych odwzorowania najlepszej odpowiedzi, a więc z przestrzeni strategii w siebie. Analogicznie do dyskusji w (Sundaram 1989a) lub (Leininger 1986)[3] zaznaczymy występowanie następującego „błędnego koła" poszukiwania równowag Nasha tą metodą. Niech przykładowo strategie Markowa pozostałych graczy będą półciągłe z góry, wtedy odwzorowanie najlepszej odpowiedzi będzie posiadało mierzalny wybór, choć niekoniecznie półciągły z góry[4], co uniemożliwia zastosowanie wyników odnośnie punktów stałych odwzorowania (najlepszej odpowiedzi) przestrzeni strategii w siebie. Jeżeli dalej ograniczymy się do ciągłych strategii przeciwników, wtedy zgodnie z Berge'a twierdzeniem o maksimum (por. Berge 1997) wiemy, iż odwzorowanie najlepszej odpowiedzi będzie półciągłe z góry, ale niekoniecznie będzie posiadało ciągły wybór. Silniejsze warunki odnośnie strategii pozostałych graczy nie pozwalają na przerwanie tego błędnego koła. Tak więc metoda poszukiwania równowagi Nasha jako punktu stałego odwzorowania zbioru strategii w siebie, na analizowanym poziomie ogólności, nie przynosi rezultatów.

Alternatywnie[5] Sundaram (1989a, 1989b) proponuje metodę poszukiwania równowagi Nasha jako punktu stałego operatora zadanego na przestrzeni zagregowanych decyzji poszczególnych graczy. W

---

[2]Zainteresowanych czytelników odsyłamy do obszernego przeglądu literatury w (Woźny 2008).
[3]Leininger (1986) omawia model spadków międzypokoleniowych za pomocą gry dynamicznej, a więc struktura przedstawionego przez niego zagadnienia jest różna od analizowanej w pracy. Tym niemniej dyskusja dotycząca poszukiwania równowagi Nasha jako punktu stałego odwzorowania zbioru strategii w siebie jest analogiczna do przedstawionej w pracy.
[4]Porównaj przykład w (Sundaram 1989a).
[5]Amir (1989) oraz Sundaram (1989a) omawiają symetryczną, dynamiczną grę akumulacji kapitału i podają warunki na istnienie symetrycznej równowagi Markowa w grze z agregatem w postaci sumy.

pracy rozszerzymy tę metodę na klasę ogólnych postaci funkcyjnych agregatów (produkcji dobra publicznego).

4 Gospodarka statyczna i główne wyniki

Rozpatrzmy $I \in \mathbb{N}$ jednoosobowych gospodarstw domowych, każde (i-te, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, I\} = N$) reprezentowane przez użyteczność postaci: $U^i(c^i, q)$, gdzie c^i oznacza poziom konsumpcji i-tego gospodarstwa, a q to wielkość dobra publicznego (lub krótko agregat). Każde z gospodarstw podlega ograniczeniu budżetowemu opisanemu przez równanie: $w^i = c^i + pa^i$, gdzie w^i to dochód i-tego gospodarstwa, a^i indywidualne nakłady do produkcji dobra publicznego (lub krótko nakłady), p - cena jednostki nakładu do produkcji dobra publicznego. Wielkość dobra publicznego q jest determinowana przez funkcję Q nakładów $a = (a^i, a^{-i})$, czyli profilu indywidualnych nakładów do produkcji dobra publicznego, gdzie $a^{-i} = (a^1, a^2, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^I)$ reprezentuje nakłady gospodarstw innych niż i; analogicznie definiujemy c^{-i} i w^{-i}.

Rozpatrzmy przeformułowanie funkcji U^i do postaci:

$$F^i(a^i, Q(a), \theta) \equiv U^i(w^i - pa^i, Q(a^i, a^{-i})), \tag{1}$$

gdzie $\theta \in \Theta$ to wektor parametrów.

Ze względów interpretacyjnych będziemy także używać zapisu funkcji $D^i : \times_{i \in N} A^i \times \Theta \to \mathbb{R}$, gdzie $D^i(a, \theta) = F^i(a^i, Q(a), \theta)$ albo, przy niewielkim nadużyciu notacji, zapisu $D^i(a)$.

Na potrzeby dalszej analizy przyjmiemy następujące założenie.

Założenie 1

Dla każdego $i \in N$ zachodzi:

- $A^i = [0, \bar{a}^i]$, *gdzie* $\bar{a}^i = \frac{w^i}{p}$,
- $\mathcal{Q} = [\underline{Q}, \overline{Q}] \subset \mathbb{R}$, *gdzie* $\underline{Q} = Q(0, \ldots, 0)$, $\overline{Q} = Q(\bar{a}^i, \bar{a}^{-i})$,
- $w^i \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{R}_+$, *a* $\Theta = \{(w, p) : w^i \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}_+, \}$ *to zbiór parametrów,*
- $F^i : A^i \times \mathcal{Q} \times \Theta \to \mathbb{R}$, *jest półciągła z góry, malejąca z pierwszym i rosnąca z drugim argumentem dla każdej wartości* $\theta \in \Theta$,
- $Q : \times_{i=1}^I A^i \to \mathcal{Q}$, *jest półciągła z góry i rosnąca z* a *oraz* $Q(a^1, \ldots, a^I) = Q(a^{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a^{\sigma^{-1}(I)})$ *dla każdej permutacji* σ *zbioru graczy.*

Zauważmy: założenie o tym, iż Q jest funkcją rosnącą z a wyklucza agregaty np. postaci[6] minimum oraz maksimum[7]. Natomiast założenie o funkcji produkcji/agregacji dobra publicznego ma odzwierciedlać obserwację, iż agregat nie rozróżnia poszczególnych jednostek. Podkreślmy, iż założenie o półciągłości z góry funkcji użyteczności można zawęzić do założenia o jej ciągłości (np. dla ”standardowych” (ciągłych) klas preferencji). Jednakże próba zawężenia założenia o półciągłości agregatu założeniem o jego ciągłości w świetle uwag z rozdziału 2 jest już dużo bardziej restrykcyjna. Między innymi ze względu na ograniczenie możliwości występowania nieciągłości w produkcji / akumulacji dobra publicznego charakterystycznej dla takich dóbr publicznych jak jakość środowiska naturalnego, czy wyniki / skutki prac projektowych.

Oznaczamy przez $\mathscr{G}_{MSP} = (N, \{F^i, A^i\}_{i \in N}, Q, \mathcal{Q}, \theta)$ statyczną gospodarkę I podmiotów z zupełną informacją. Formalnie równowagę gospodarki $\mathscr{G}_{MSP}$ zdefiniujemy następująco:

Definicja 4.2 (Równowaga $\mathscr{G}_{MSP}$) *Równowagą gospodarki $\mathscr{G}_{MSP}$ jest profili a_* taki, że $(\forall i \in N)\, a_*^i \in \arg\max_{a^i \in A^i} D^i(a^i, a_*^{-i}, \theta)$.*

Równowagami gospodarki $\mathscr{G}_{MSP}$ są więc równowagi Nasha w strategiach czystych (PSNE) gry Γ w postaci strategicznej, gdzie $\Gamma = (N, \{A^i, D^i\}_{i \in N})$. Z tego powodu używając narzędzi z teorii gier niekooperacyjnych skoncentrujemy się na analizie gry Γ odpowiadającej gospodarce $\mathscr{G}_{MSP}$.

Rozpoczniemy od zdefiniowania ($\forall i \in N$) odwzorowania najlepszej odpowiedzi: $\Upsilon^{i,\theta} : \times_{j \neq i} A^j \rightrightarrows A^i$, gdzie:

$$\Upsilon^{i,\theta}(a^{-i}) = \{a_*^i : a_*^i \in \arg\max_{a^i \in A^i} D^i(a^i, a^{-i}, \theta)\},$$

a $\theta \in \Theta$. Niech także $\Upsilon^\theta : \times_{i=1}^I A^i \rightrightarrows \times_{i=1}^I A^i$, gdzie $\Upsilon^\theta = (\Upsilon^{i,\theta})_{i=1}^I$. Zauważmy, iż istnienie rozwiązania problemu maksymalizacyjnego dla każdej jednostki (a więc poprawność sformułowania odwzorowania najlepszej odpowiedzi) jest zagwarantowane przez półciągłość z góry ($\forall i \in N, \forall a^{-i}$) funkcji D^i względem zmiennej a^i i zwartość dziedziny A^i.

Kolejno przedstawimy teraz główne wyniki pracy: w twierdzeniu 4.3 uogólnimy podejście prezentowane m.in. przez Amira i Lambsona (2000) i podamy alternatywną do omówionych w

---

[6]Porównaj z dyskusją w (Hirshleifer 1983), (BlissNalebuff 1984)

części 3 metodę otrzymania warunków na istnienie symetrycznej równowagi Nasha w symetrycznej grze Γ, bez odwoływania się do założenia o ciągłości funkcji F^i przyjmując natomiast (intuicyjnie interpretowalne) założenia odnośnie przyrostów[8] funkcji F^i i Q.

Twierdzenie 4.3 (O istnieniu PSNE) *Rozpatrujemy symetryczną[9] grę Γ. Jeżeli funkcja F^i ma malejące przyrosty między (a^i, q) oraz jest wklęsła względem pierwszego argumentu, a funkcja Q jest ciągła oraz ma rosnące przyrosty z a, wtedy gra Γ ma najmniejszą i największą, symetryczną PSNE.*

Zaznaczmy, iż w szczególności najmniejsza i największa, symetryczna równowaga Nasha może być jednym równowagowym profilem strategii. Interpretacja twierdzenia 4.3 przebiega analogicznie do jego dowodu: rozpatrzmy przeformułowanie gry Γ w taki sposób, że każdy z graczy zamiast strategii a^i wybiera optymalną wielkość agregatu, znając wielkość agregatu, gdyby wybrał on taką samą strategię, jak pozostali gracze $q = Q(a^j, a^j, \ldots, a^j)$. Przyjęte w twierdzeniu założenia nie gwarantują monotoniczności odwzorowań najlepszej odpowiedzi Υ^i, ale gwarantują monotoniczności najlepszej odpowiedzi w grze z tak przeformułowanymi strategiami. Dzięki temu przeformułowaniu możliwe jest zastosowanie twierdzeń o punktach stałych dla odwzorowań niemalejących. Dalsza cześć dowodu polega właśnie na wykorzystaniu uogólnienia (dla odwzorowań) twierdzenia Tarskiego o punkcie stałym przez Veinott (1992) oraz Zhou (1994).

Na tym etapie warto podkreślić jak wyniki w twierdzeniu 4.3 różni się od wyników prac omówionych w rozdziale 3. Po pierwsze zauważmy, iż w przeciwieństwie do założeń Kukushkina (1994a) warunki w twierdzeniu nie wymagają rozdzielności preferencji względem dobra prywatnego ani agregatu. Dodajmy, iż warunki ,,konieczne'' na istnienie równowagi Nasha z pracy Kukushkina nie mają tutaj

[7] Tj. $Q(a) = \min_i a^i$ albo $Q(a) = \max_i a^i$.

[8] Weźmy X i T będące zbiorami częściowo uporządkowanymi, a f rzeczywistą funkcją określoną na $S \subset X \times T$. Jeżeli $f(x, s) - f(x, t)$ jest izotoniczna (antytoniczna, ściśle izotoniczna, ściśle antytoniczna) ze względu na x w $S_s \cap S_t$ dla każdych $t \prec s$ w T, to f ma rosnące przyrosty (malejące przyrosty, ściśle rosnące przyrosty, ściśle malejące przyrosty) ze względu na (x, t) w S.

[9] Grę: $(N, \{A^i, D^i, i \in N\})$, gdzie $N = \{1, 2, \ldots, I\}$ to zbiór graczy, A^i zbiór strategii, a $D^i : \times_{i \in N} A^i \longrightarrow \mathbb{R}$ wypłata i-tego gracza, nazywamy symetryczną, gdy: gracze mają takie same zbiory strategii $A^1 = \ldots = A^n$ i wypłaty spełniają zależność:

bezpośredniego zastosowania, gdyż zarówno funkcja użyteczności jaki i agregująca posiadają dodatkowe, nie analizowane przez niego, własności. Po drugie w przeciwieństwie do założeń z pracy Dubey, Haimanko i Zapechelnyuk (2006) warunki twierdzenia 4.3 nie zakładają istnienia ciągłej (ani nawet półciągłej z góry) selekcji z odwzorowania najlepszej dopowiedzi, a ponadto dopuszczają szerszą klasę agregatów nieaddytywnych. Po trzecie warunki nałożone w twierdzeniu 4.3 mają intuicyjną interpretację ekonomiczną: malejące przyrosty użyteczności pomiędzy nakładem i agregatem oznaczają komplementarność w rozumieniu Samuelsona dóbr prywatnych i publicznych, a rosnące przyrosty agregatu oznaczają komplementarność nakładów w jego produkcji[10]. Innymi słowy w przeciwieństwie do części wyników literatury (np. Kukushkin 1994a) warunki nałożone w twierdzeniu są łatwo sprawdzalne. Po czwarte przypomnijmy, iż choć użyte w dowodzie uogólnienie twierdzenie Tarskiego nie jest konstruktywne to są znane jego konstruktywne uogólnienia (por. Amann 1967), których zastosowanie umożliwia zaproponowanie metody numerycznej pozwalającej na obliczenie poszukiwanych punktów stałych (por. Topkis 1998, rozdział 4.3), tj. równowag Nasha. Jest to szczególnie istotne przy próbie zastosowania tych wyników do analiz empirycznych i także odróżnia otrzymane wyniki od tych z prac Kukushkina czy Dubey, Haimanko i Zapechelnyuk bazujących na argumentach topologicznych, a nie porządkowych. Pamiętajmy także, iż odchodząc od założenia o funkcji agregacji (produkcji) w postaci sumy nakładów poszczególnych graczy tracimy zarówno wnioski odnośnie istnienia jedynej równowagi Nasha, jak i jej symetryczności (por. np. Bergstrom, Blume i Varian 1986). Zaznaczmy wreszcie, iż twierdzenie 4.3 mówi o równowagach symetrycznych w grach symetrycznych co jest niewątpliwe ograniczeniem jego zastosowalności.

W kolejnych twierdzeniach podamy charakterystykę struktury zbioru równowag Nasha dla analizowanych gier. Bazując na metodzie przedstawionej przez Topkisa (1995), poniższy warunek podaje założenia gwarantujące, by gra Γ była submodularna[11]. Łącząc wyniki lematu z tezami twierdzeń 4.5–4.9 otrzymamy charakterystykę zbioru PSNE dla klasy gier (ściśle) submodularnych.

$D^i(a^1,\ldots,a^n) = D^{\sigma(i)}(a^{\sigma^{-1}(1)},\ldots,a^{\sigma^{-1}(n)})$ dla każdego i, każdego $a \in A \equiv \times_i A^i$ i każdej permutacji σ zbioru N.

[10] Więc krańcowa użyteczność z konsumpcji dobra prywatnego nie maleje wraz ze wzrostem konsumpcji dobra publicznego oraz krańcowa produktywność produkcji dobra publicznego nakładów poszczególnych graczy nie maleje wraz z nakładami pozostałych graczy.

[11] Niech S będzie kratą, a $f : S \to \mathbb{R}$. Jeśli dla każdych $x, y \in S$ zachodzi:

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \leq f(x) + f(y),$$

Lemat 4.4 *Jeżeli dla każdego $i \in N$ wklęsła z q funkcja F^i ma malejące przyrosty z (a^i, q), a funkcja Q ma malejące przyrosty dla każdej pary $(a^i, a^j), \forall j \neq i$, wtedy D^i ma malejące przyrosty dla każdej pary $(a^i, a^j), j \neq i$, a Γ jest grą submodularną. Jeżeli choćby jedna z własności hipotezy jest ścisła, wtedy Γ jest grą ściśle submodularną.*

Dowód lematu pomijamy gdyż jest on prostym zastosowaniem wyników z pracy Topkisa (1998). Warunki gwarantujące submodularność gry Γ mają intuicyjną interpretację ekonomiczną. Po pierwsze malejące przyrosty użyteczności F^i gwarantują komplementarność dobra publicznego i prywatnego stwarzając zachętę do obniżenia własnych nakładów do produkcji dobra publicznego na wzrost nakładów pozostałych graczy. Po drugie wklęsłość funkcji użyteczności F^i względem dobra publicznego powoduje, iż jego krańcowa użyteczność jest malejąca co znów stwarza zachętę do obniżenia własnych nakładów a^i na wzrost nakładów pozostałych graczy. Wreszcie trzecim efektem działającym w tym samym kierunku są malejące przyrosty funkcji agregacji powodujące, iż krańcowa produktywność nakładów jednostki nie rośnie z nakładami pozostałych. Łącząc te trzy efekty otrzymujemy, iż optymalne wybory nakładów a^i są substytucyjne względem siebie, a odwzorowania najlepszej odpowiedzi są nierosnące (w silnym porządku Veinott (1992)).

Jako, że submodularność funkcji implikuje jej quasisubmodularność, a także zważywszy na fakt, iż submodularność (ani też warunki hipotezy lematu 4.4) nie jest konieczna do tego, aby gra Γ była (ściśle) quasisubmodularna, twierdzenia charakteryzujące zbiór równowag Nasha podamy bezpośrednio dla quasisubmodularnej gry Γ.

---

to f jest submodularna na S. Jeśli nierówność jest ostra dla wszystkich nieuporządkowanych x i y to f jest ściśle submodularna. Gra $\Gamma = (N, \{A^i, D^i,\ i \in N\})$ jest (ściśle) submodularna, jeżeli dla każdego gracza $i \in N$:

1. A^i jest kratą zupełną,
2. $D^i : \times_{i \in N} A^i \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ jest półciągła z góry względem porządku w A^i (dla ustalonego a^{-i}),
3. D^i jest (ściśle) submodularna z a^i (dla ustalonego a^{-i}),
4. D^i ma (ściśle) malejące przyrosty względem a^i i a^{-i}.

Twierdzenie 4.5 (O nieuporządkowaniu równowag) *Jeżeli quasisubmodularna*[12] *gra* Γ *ma ścisłą PSNE, wtedy nie ma innej PSNE, która jest w stosunku do niej uporządkowana*[13]*. Jeżeli* Γ *jest ściśle quasisubmodularna, wtedy nie ma uporządkowanych PSNE.*

Bezpośrednio z twierdzenia 4.5 otrzymujemy następujące wniosek:

Wniosek 4.6 (O równowagach symetrycznych) *Quasisubmodularna gra* Γ *ma co najwyżej jedną symetryczną, ścisłą PSNE. Ściśle quasisubmodularna gra* Γ *ma co najwyżej jedną, symetryczną PSNE.*

Twierdzenie 4.5 i wniosek 4.6 wynikają bezpośrednio z faktu, iż dla gier (ściśle) quasisubmodularnych odwzorowania najlepszej odpowiedzi są (malejące) nierosnące w silnym porządku Veinott (1992). Twierdzenie 4.5 implikuje także, iż jeżeli (ścisła) gra quasisubmodularna ma więcej niż jedną równowagę Nasha, wtedy muszą występować (nieuporządkowane w stosunku do niej) równowagi asymetryczne. Występowanie takich równowag, nawet w grze symetrycznej, jest możliwe, gdy odwzorowanie najlepszej odpowiedzi ma więcej niż jedno rozwiązanie dla jednej wartości agregatu q, a ponadto asymetryczne wybory a^i odpowiednio kształtują wielkość q. Podkreślmy, iż twierdzenie 4.5 oraz wniosek 4.6 pozostają w mocy także dla agregatu będącego jedynie niemalejącą funkcją a. Zaznaczmy wreszcie, iż gdy odwzorowanie najlepszej odpowiedzi będzie funkcją (tj. funkcja wypłaty będzie odpowiednio wklęsła), wtedy wniosek twierdzenia 4.5 pozostaje w mocy nawet dla założenia o PSNE, czy quasisubmodularności. Wynik ten otrzymujemy

[12]Niech X będzie kratą. Powiemy, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest quasisupermodularna, jeżeli $\forall x, y \in X$ zachodzi $f(x) > f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \vee y) > f(y)$ oraz $f(x) \geq f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \vee y) \geq f(y)$. Jeżeli ostatnia nierówność jest ostra to własność jest ścisła. Jeżeli natomiast $f(x) > f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \vee y) \geq f(y)$ to własność jest słaba. Funkcje (ściśle, słabo) quasisubmodularne definiujemy analogicznie. Gra $\Gamma = (N, \{A^i, D^i, \ i \in N\})$ jest (ściśle) quasisubmodularna, jeżeli dla każdego gracza $i \in N$:

1. A_i jest kratą zupełną,
2. $D^i : \times_{i \in N} A^i \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ jest półciągła z góry względem porządku w A^i (dla ustalonego a^{-i}),
3. D^i jest (ściśle) quasisubmodularna po a^i (dla ustalonego a^{-i}),
4. D^i spełnia (ścisły) warunek odwrotny jednokrotnego przecięcia pomiędzy a^i i a^{-i}.

[13]Względem standardowego porządku w $\mathbb{R}^I$, a więc porządku po współrzędnych na zbiorze strategii $\times_{i=1}^{I} A^i$.

stosując np. stwierdzenie 1.1 autorstwa Dacić (1979) odnośnie punktów stałych dla funkcji malejących.

Rozważania w zakresie struktury zbioru równowag Nasha kontynuujemy podając obserwacje odnośnie uporządkowania wypłat w PSNE (twierdzenie 4.7) oraz Pareto-uporządkowaniu PSNE (twierdzenie 4.8) oraz ich ekonomicznej interpretacji.

Twierdzenie 4.7 (O uporządkowaniu wypłat w równowadze asymetrycznej) *W asymetrycznej PSNE* (a^i, a^{-i}) *symetrycznej gry* Γ *wypłaty graczy są uporządkowane poziomem* a^i*, tj.* $F(\min_i a^i, \cdot) \geq \ldots \geq F(\max_i a^i, \cdot)$*, z przynajmniej jedną nierównością ostrą.*

Podkreślmy, iż warunek o symetryczności gry Γ jest konieczny do otrzymania tego wyniku. Bez tego założenia, nawet dla jednakowych preferencji wszystkich gospodarstw, nie jesteśmy w stanie utrzymać w moc powyższego twierdzenia, ze względu na potencjalne różnice w dochodach oraz potencjalną nieliniowość optymalnej a^i względem w^i.

Twierdzenie 4.8 (O Pareto nieuporządkowaniu równowag) *Jeżeli ściśle quasisubmodularna gra* Γ *dla* $I = 2$ *ma więcej niż jedną PSNE, wtedy nie są one Pareto uporządkowane. Jeżeli ściśle quasisubmodularna gra* Γ *ma więcej niż jedną PSNE z tą samą wartością agregatu, wtedy równowagi te nie są Pareto uporządkowane.*

Pytanie, czy intuicyjna obserwacja, zawarta w twierdzeniu 4.8, o Pareto nieuporządkowaniu PSNE dla quasisubmodularnej gry Γ, jest prawdziwa dla $I > 2$ pozostaje kwestią otwartą.

Interpretacja powyższych wyników jest intuicyjna. Strategiczna substytucyjność wpisana w gry z agregatem publicznym wyklucza uporządkowane profile strategii równowagowych. W konsekwencji może istnieć co najwyżej jedna równowaga symetryczna analizowanej gry. Wskazuje to, iż w przypadku gier z substytucyjną podażą dóbr publicznych spotykane w literaturze ekonomicznej wyniki odnośnie tzw. błędów koordynacji nie mają zastosowania. Innymi słowy analizowana gospodarka może się co prawda znaleźć w jednej (z potencjalnie wielu) równowag asymetrycznych, które nie muszą być jednak uporządkowane w rozumieniu Pareto. Są to obserwacje znacząco różniące klasę gier z substytucyjnością strategii w stosunku do tych z ich komplementarnością (por. (Amir R., Jakubczyk, Knauff 2008)). Wreszcie kolejną cechą rozróżniającą obie klasy gier jest brak symetrycznych wyników odnośnie statyki komparatywnej. Dla gier z substytucyjnymi strategiami monotoniczna zmiana parametrów gry może bowiem prowadzić zarówno do „monotonicznego przesunięcia zbioru" równowag, jak również do jego przesunięcia uniemożliwiającego takie porównania (por. (Sunanda, Sabarwal 2008)).

Na zakończenie zaznaczmy, iż występowanie pozytywnych efektów zewnętrznych zwiększenia podaży dobra publicznego sugeruje, iż alokacje odpowiadające równowadze Nasha nie muszą być optymalne w rozumieniu Pareto. Zależność ta występuje także w analizowanych w pracy grach. Z drugiej strony można wykazać, iż rozwiązania Pareto-optymalne (poza szczególnymi wypadkami) nie są równowagami Nasha. Ze względu na fakt, iż są zależności te są znane zainteresowanego czytelnika odsyłamy do literatury przedmiotu.

Powyższe rozważania, odnośnie istnienia, struktury równowag Nasha (a także statyki komparatywnej por. (Woźny 2008)) można zastosować np. do gier analizowanych przez Cornes (1993), lub Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk (2006).

Przykład:

Za Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk (2006) rozpatrzmy problem indywidualnej podaży nakładów do projektu przynoszącego wspólny zysk dla jego uczestników. Niech funkcja wypłaty będzie przyjmowałą wartości postaci, $F_i(Q, a_i) = Q - c_i(a_i)$ *gdzie* c_i *to punkcja opisująca koszty nakładu i-tego gracza, a agregat cechuje się a) własnością komplementarności nakładów a w drugim przykładzie b) własnością substytucyjności.*

Twierdzenia Kukushkin (1994a) oraz Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk (2006) wskazują, że taka gra ma równowagę Nasha natomiast wyniki uzyskane w niniejszej pracy charakteryzują dodatkowo zbiór równowag tej gry dla wypadku substytucyjności agregatu. W szczególności nieuporządkowanie równowagowych profili strategii oraz istnienie co najwyżej jednej równowagi symetrycznej. Wreszcie wykazane w pracy twierdzenie 4.3. pozwala rozszerzyć wyniki o istnieniu dla wypadku komplementarności agregatu oraz preferencji ogólnej postaci: $F_i(Q, a_i)$ *o ile spełniają przyjęte w pracy założenia odnośnie monotoniczności jej przyrostów.*

5 Gospodarka dynamiczna i główne wyniki

Rozpatrzymy sytuację, w której każde (i-te) z I (gdzie $\{1, 2, \ldots, I\} = N$) gospodarstw domowych znając stan początkowy podejmuje decyzję maksymalizującą zdyskontowaną na dziś użyteczność ze strumienia konsumpcji prywatnej i agregatu publicznego:

$$\sup_{(a_t^i)_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F^i(a_t^i, q_t), \tag{2}$$

wiedząc, że dynamika agregatu zależy także od decyzji pozostałych graczy. Przez $a_t^i \in A$ oznaczymy podaż nakładów do produkcji dobra publicznego gospodarstwa $i \in N$ w okresie $t < T$, a przez $a_t = (a_t^1, a_t^2, \ldots, a_t^I) = (a_t^i, a_t^{-i})$ profil nakładów I graczy. Funkcja g opisuje dynamikę agregatu: $q_{t+1} = g(a_t, q_t)$, a q_0 jest dane. Dalej przyjmiemy następujące założenia odnośnie funkcji F^i i g:

Założenie 5.1 (Preferencje i agregat) *zachodzi:*

- $A = [0, \bar{a}] \subset \mathbb{R}$ *oraz* $\mathcal{Q} = [\underline{Q}, \overline{Q}] \subset \mathbb{R}$,
- $(\forall i \in N)\, F^i : A \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ *klasy* $\mathscr{C}^2$ *jest malejąca z* a^i *i rosnąca z* q *oraz* $(\forall q \in \mathcal{Q})(\forall a^i \in A)\, F^i(a^i, q) = F^j(a^i, q) \equiv F(a^i, q)$,
- $(\forall q \in \mathcal{Q})\ \lim_{a \to \bar{a}} F(a, q) = \infty$,
- $g : A^I \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ *klasy* $\mathscr{C}^2$ *jest rosnąca z każdym argumentem.*

Jak wyżej zdefiniujemy symetryczną, dynamiczną gospodarkę wielu podmiotów, w warunkach pewności oznaczając ją przez: $\mathscr{G}_{MDP} = (N, F, A, \beta, g, \mathcal{Q}, \theta, w)$, gdzie parametry θ, w są definiowane jak w poprzedniej części.

Przystąpimy teraz do definicji gry Γ^D, za pomocą której będziemy analizować równowagi i dynamikę gospodarki $\mathscr{G}_{MDP}$. Niech $H_t = \{q_0, a_0, \ldots, q_{t-1}, a_{t-1}\}$ oznacza historię do okresu t, a $\mathcal{H}_t$ oznacza zbiór wszystkich historii rozpoczętych z q_0 do okresu t. Dla każdego $i \in N$ ciąg funkcji $\eta^i = (\eta_t^i)_{t=0}^T$ nazwiemy strategią gracza i, gdzie dla każdego okresu t, η_t^i określa decyzję o poziomie a_t^i jako funkcję historii H_t. Mówimy, że strategia η^i jest strategią Markowa, jeżeli $(\forall t)\ \eta_t^i$ jest funkcją jedynie zmiennej q_t. Strategia Markowa jest stacjonarna, jeżeli $(\forall t, k)\ \eta_t^i = \eta_k^i \equiv \bar{\eta}^i$.

Niech η^{-i} oznacza strategie graczy innych niż i. Biorąc pod uwagę zależności wynikające ze strategii pozostałych graczy, każdy z graczy rozwiązuje problem maksymalizacyjny (2), gdzie wybrane strategie określają ciąg decyzji $(a_t^i)_{t=0}^T$ i dynamikę $(q_t)_{t=0}^T$.

Dalej skoncentrujemy się na poszukiwaniu równowag Nasha gry Γ^D. Aby skorzystać z metod programowania dynamicznego oraz wykluczyć równowagi Nasha oparte na tzn. pogróżkach bez pokrycia (ang. *empty threats*) ograniczmy się[14] do analizy równowag Markowa doskonałych ze względu na pod-gry (MPNE).

Definicja 5.2 (Równowagi PSNE, SPNE i~MPNE) *Równowagą Nasha (PSNE) gry Γ^D jest profil strategii $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^I)$ taki, że dla każdego gracza $i \in N$ strategia η^i rozwiązuje problem (2) traktując η^{-i} jako dane. Niech $\eta^i(t, H_t)$ oznacza kontynuacje strategii η^i od momentu t przy danej historii $H_t \in \mathcal{H}_t$. Wtedy PSNE $(\eta^i)_{i\in N}$ jest równowagą doskonałą ze względu na pod-gry (SPNE), jeżeli dla każdego t i H_t profil strategii $(\eta^i(t, H_t))_{i\in N}$ jest PSNE gry rozpoczętej od okresu t. SPNE jest strategią Markowa doskonałą ze względu na pod-gry (MPNE), gdy dodatkowo strategie graczy, w każdym okresie (t) są jedynie funkcjami zmiennej stanu (q_t).*

Ze względu na trudności związane z analizą równowag asymetrycznych ograniczymy się od poszukiwania stacjonarnych, symetrycznych równowag typu MPNE. W tym wypadku problem maksymalizacyjny możemy sprowadzić do równania Bellmana postaci:

$$V_{\bar{\eta}}(q) = \max_{a\in A}\{F(a,q) + \beta V_{\bar{\eta}}(g(a, \underbrace{\bar{\eta}, \ldots, \bar{\eta}}_{I-1}, q))\}, \tag{3}$$

gdzie $V_{\bar{\eta}}$ to funkcja wartości od stanu q przy założeniu, iż pozostali gracze wybierają strategie $\bar{\eta}$. Niech $\Upsilon_{\bar{\eta}} : \mathcal{Q} \rightrightarrows A$, gdzie $\Upsilon_{\bar{\eta}}(q) = \{a \in A : V_{\bar{\eta}}(q) = F(a,q) + \beta V_{\bar{\eta}}(g(a, \bar{\eta}, \ldots, \bar{\eta}, q))\}$ będzie odwzorowaniem (przy założeniu, iż pozostali gracze grają strategią $\bar{\eta}$) z własnością, iż stacjonarna strategia jest rozwiązaniem problemu maksymalizacyjnego (2) wtedy i tylko wtedy, gdy jest (mierzalnym) wyborem z $\Upsilon_{\bar{\eta}}$.

[14]Ograniczenie się do analizy strategii Markowa pozwala nam na uniknięcie problemów interpretacyjnych wynikających z zastosowania strategii *open-loop*, które w analizowanym modelu nie mają uzasadnienia.

Analogicznie do poprzedniej części, modyfikując dowód przedstawiony w (Sundaram 1989a, 1989b), łącząc go z metodą prezentowaną w (Amir 1989) oraz wykorzystując agregatowy charakter dobra publicznego otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.3 *Niech funkcja F ma rosnące przyrosty z (a, q) oraz jest wklęsła na A. Niech ponadto $(\forall i \neq j)(\forall q \in Q)$ funkcja g ma rosnące przyrosty pomiędzy (a^i, a^j) oraz $(\forall i \in N)$ i ($\forall j \neq i$), ustalonych a^j rosnące przyrosty z (a^i, q). Jeżeli przynajmniej jedna z własności rosnących przyrostów jest ścisła, wtedy istnieje symetryczna MPNE gry Γ^D. Profile strategii są w wypadku tej równowagi niemalejącymi i półciągłymi z góry funkcjami q.*

Twierdzenie 5.3 mówi, że w warunkach komplementarności nakładów graczy oraz komplementarności nakładów i agregatu w technologii akumulacji oraz substytucyjności dóbr w preferencjach U istnieje monotoniczny, symetryczny profil strategii równowagowych. Rola poszczególnych założeń w twierdzeniu jest podobna do roli założeń w twierdzeniu 4.3, przeniesionych jedynie na wypadek dynamiczny. Analogicznie do gry Γ^B nawet w tak skomplikowanym środowisku decyzyjnym otrzymujemy relatywnie słabe warunki na ten dość intuicyjny wniosek, wynikający z wzajemnego sprzężenia decyzji graczy i agregatu.

Wypadek substytucyjności (preferencji F i nakładów w g) nie jest symetryczny pod względem wyników m.in. z uwagi na fakt, iż jeżeli gracze używają strategii nierosnących z q, wtedy wpływ wzrostu q na jego wielkość w następnym okresie „przejawia się dwoma kanałami": bezpośrednim wpływem q na g i pośrednim (przeciwstawnym, co do znaku) wpływem q przez η na g. W konsekwencji bez przyjęcia konkretnej postaci funkcyjnej nie jesteśmy w stanie podać wyników dla gry Γ^D w wypadku substytucyjności preferencji.

Na tym etapie znów warto skomentować miejsce otrzymanego wyniku wśród innych wyników literatury. Nawiązują do dyskusji z rozdziału 3go przypomnijmy, iż wyniki z zakresu równowag doskonałych dla dynamicznych gier z podażą dóbr publicznych są nieliczne. W tym świetle podkreślmy po pierwsze ogólność stosowanych założeń, a więc i otrzymanych wyników. Po drugie, analogicznie do analizowanej w rozdziale 4 gry statycznej, podkreślmy łatwą sprawdzalność i intuicyjną interpretowalność stosowanych założeń. Wreszcie po trzecie zaznaczmy możliwy do otrzymania konstruktywny charakter wyników twierdzenia 5.3.

Dalej można zadać pytanie o dynamikę generowaną równowagowym profilem strategii: $q' = \zeta(q) := g(\tilde{\eta}(q), \ldots, \tilde{\eta}(q), q)$, gdzie $(\tilde{\eta}, \ldots, \tilde{\eta})$ to MPNE.

Twierdzenie 5.4 *Niech profil $(\tilde{\eta}, \ldots, \tilde{\eta})$ będzie MPNE gry Γ^D, jak w twierdzeniu 4.3, tj. zadaną przez półciągłe z góry i niemalejące funkcje zmiennej stanu. Wtedy funkcja ζ, gdzie $\zeta(q) := g(\tilde{\eta}(q), \ldots, \tilde{\eta}(q), q)$, posiada najmniejszy i największy punkt stały (stan ustalony w słabym sensie[15]). Ponadto ciąg generowany równaniem $(\forall t \geq 0)\ q_{t+1} = \zeta(q_t)$, gdzie $Q_0 = \overline{Q}$ jest nierosnący i zbieżny do największego punktu stałego (stanu ustalonego).*

Interpretacja wyników i dowód twierdzenia 5.4 pozostawiamy czytelnikowi. Zwróćmy jedynie uwagę na konstruktywne własności wyniku 5.4. Wniosek o monotonicznej zbieżności do największego stanu ustalonego wynika z półciągłości z góry optymalnych polityk, a więc i $\zeta(q)$. Podkreślmy, iż ze względu na nieciągłość polityk dynamika zadana ζ od $\underline{Q}$ nie musi jednak zbiegać do minimalnego stanu ustalonego. Analogiczne rozumowanie odnośnie istnienia stanów ustalonych i zbieżności zmiennej stanu, nie musi działać w wypadku nierosnących równowagowych (o ile istnieją) polityk Markowa ze względu na możliwą nieciągłość dynamiki zmiennej stanu. Dodajmy znów, iż w wypadku malejących strategii występowanie przeciwstawnych efektów q na wielkość q' dodatkowo utrudnia analizę na tym poziomie ogólności. Na zakończenie podkreślmy, iż znów łatwo wykazać, że (poza szczególnymi wypadkami) równowagowe alokacje dóbr w analizowanej grze nie są Pareto-optymalne.

6 Wnioski

Podsumowując pokrótce otrzymane wyniki rozpoczniemy od wypadku gry statycznej. Dla ogólnych klas preferencji i agregacji dobra publicznego podano warunki (por. twierdzenie 4.3) na istnienie symetrycznej równowagi Nasha w symetrycznej grze Γ dla wypadku komplementarności preferencji względem dobra publicznego i prywatnego, oraz wklęsłości funkcji użyteczności względem dobra prywatnego oraz komplementarności w technologii produkcji dobra publicznego. Dalej wykazano (por. twierdzenie 4.5), iż ściśle quasisubmodularna gra z dobrem publicznym nie może mieć uporządkowanych, względem porządku po współrzędnych na zbiorze strategii, równowag Nasha. Gra quasisubmodularna może mieć uporządkowane równowagi Nasha, choć już nie ścisłe równowagi Nasha. W konsekwencji ściśle quasisubmodularna gra dla dwóch graczy nie może mieć Pareto-uporządkowanych równowag (por. twierdzenie 4.8). Warunkami gwarantującymi strategiczną substytucyjność, a więc (quasi-) submodularność gry są: komplementarność preferencji, substytucyjność nakładów produkcji dobra publicznego oraz malejąca użyteczność krańcowa dla dobra publicznego. Dodajmy, że ze względu na występowanie efektów zewnętrznych, wewnętrzne równowagi Nasha nie są Pareto-optymalne.

Przechodząc do wypadku dynamicznego, rozpatrzono model optymalnej podaży nakładów na dobro publiczne w strategiach Markowa, doskonałych ze względu na pod-gry. Znów dla ogólnych klas preferencji i dynamiki dobra publicznego: w wypadku substytucyjnosci w preferencjach między dobrem prywatnym i publicznym oraz komplementarności produkcji otrzymujemy wyniki odnośnie istnienia symetrycznej równowagi MPNE ze strategiami półciągłymi z góry niemalejącymi względem q (por. twierdzenie 5.3). Wyniki (twierdzenie 5.4) odnośnie dynamiki gospodarki przy tak zadanych politykach opisują także możliwą równowagowa ścieżkę redukcji poziomu dobra publicznego.

Dodajmy, że przedstawione w pracy wyniki znajdują swoje zastosowanie w sytuacjach *stricte* ekonomicznych. Przykładem takiego zastosowania może być problem (i) dobrowolnego finansowania budowy dóbr użyteczności publicznej, (ii) wyników pracy grupowej w projektach w warunkach substytucyjności wysiłku / zadań, czy wreszcie, nawiązując do dyskusji w rozdziale 2, (iii) zanieczyszczania wspólnych zasobów (jezior, lasów, łąk itp.) przez grupę podmiotów (gospodarstw domowych czy przedsiębiorstw). Konkretniej Woźny (2008) analizuje, jak przedstawione wyniki z zakresu gier z substytucyjnością strategii mogą być użyte do poszerzenie wyników literatury biologicznej i ekonomicznej z zakresu optymalnej podaży fosforu do tzw. płytkich jezior.

Kończąc dyskusję wyników opracowania omówimy możliwości ich rozszerzenia. Przedstawione w opracowaniu wnioski prowadzą bowiem do dalszych pytań badawczych. Przykładowo rozwiązanie kwestii (i) warunków koniecznych na zaistnienia wielu równowag w analizowanym modelu pozwoliłoby wyeliminować wiele trudnych do analizy na takim poziomie ogólności zagadnień związanych np. ze statyką i dynamiką komparatywną. Pamiętajmy bowiem, że dla gier z substytucyjnymi strategiami monotoniczna zmiana parametrów gry może prowadzić zarówno do

„monotonicznego przesunięcia zbioru” równowag, jak również do jego przesunięcia uniemożliwiającego takie porównania (por. (Sunanda, Sabarwal 2008)).

Dodajmy także, iż (ii) odejście od metody analizy cząstkowej na rzeczy równowagi ogólnej ze strategicznymi zależnościami pozwoliłoby by uchwycić rolę efektu dochodowego (tj. zmiany cen dóbr na dochód gospodarstw) oraz mechanizm kształtowania cen dóbr publicznych przez wybory podmiotów (por. np. (Villanaccia, Zenginobuzb 2005)). Wspomniane jedynie (iii) możliwości numerycznego rozwiązania poszukiwania równowag danej gospodarki rodzą potrzebę dalszych badań teoretycznych i empirycznych. Ten punkt jest szczególnie istotny w przypadku prób weryfikacji wyników teoretycznych na gruncie danych empirycznych, jak i prób prognozowania obserwowanych zachowań. Przypomnijmy, że dotychczasowe wyniki w literaturze omówionej w rozdziale 3cim nie bazują na metodach konstruktywnych. W konsekwencji (poza szczególnym wypadkiem istnienia tylko jednej równowagi) nie tylko nie pozwalają na porównanie wyników modeli teoretycznych z empirią, ale także nie wskazują (numerycznych) metod jej obliczenia i oszacowania otrzymanych błędów.

Wreszcie podkreślmy, iż (iv) wyniki otrzymane w pracy bazują na założeniu o istnieniu funkcji agregującej oraz strategicznej substytucyjności i jako takie nie mają bezpośredniego zastosowania do klas gier nie wpisujących się w tę strukturę.

6 Dowody

Lemat 1 *Niech X, Y będą łańcuchami. Niech malejąca z pierwszym i rosnąca z drugim argumentem funkcja $b : X \times Y \to \mathbb{R}_{+0}$ cechuje się malejącymi przyrostami. Niech malejąca z pierwszym argumentem i rosnąca z drugim funkcja $F : \mathbb{R}_{+0} \times Y \to \mathbb{R}$ ma malejące przyrosty oraz jest wklęsła z pierwszym argumentem. Wtedy $F(b(x, y), y)$ ma rosnące przyrosty z (x, y).*

Dowód lematu 1 *Niech $x' > x, y' > y$ należą do odpowiednich zbiorów. Wtedy zachodzi[16]:*

$$\begin{aligned}
&F(b(x',y'),y') + F(b(x,y),y) - F(b(x',y),y) - F(b(x,y'),y') = \\
&= [F(b(x',y'),y') - F(b(x',y') + b(x,y) - b(x',y),y')] - [F(b(x',y),y') + \\
&- F(b(x,y),y')] + [F(b(x',y') + b(x,y) - b(x',y),y') - F(b(x,y'),y')] + \\
&- [F(b(x,y),y') - F(b(x',y),y') + F(b(x',y),y) - F(b(x,y),y)] \geq 0,
\end{aligned}$$

gdzie (i) wyrażenie w pierwszej linijce po znaku równości jest dodatnie ze względu wklęsłość F i jej antytoniczność z pierwszym argumentem, (ii) w drugiej ze względu na antytoniczność F z pierwszym

[16]Dowód przeprowadzamy według schematu zaproponowanego przez Topkis (1995).

argumentem i malejące przyrosty b i jej monotoniczność, (iii) ze względu na monotoniczność b i malejące przyrosty F.

Dowód twierdzenia *4.3* *Rozpatrzmy zbiór B taki, że*

. $B = \{(x,y) \in \mathcal{Q}^2 : (\exists \hat{a} \in A) Q(\hat{a}, \tilde{a} \ldots, \tilde{a}) = y, \text{ gdzie } Q(\tilde{a}, \ldots, \tilde{a}) = x\}$

Zauważmy, iż skoro $\underline{Q} = Q(0, \ldots, 0)$ oraz $\overline{Q} = Q(\bar{a}, \ldots, \bar{a})$ i Q jest ciągła i rosnąca, wtedy $(\forall x \in \mathcal{Q})(\exists \tilde{a} \in A)$ taki, że $Q(\tilde{a}, \ldots, \tilde{a}) = x$. Niech $W : \mathcal{Q} \rightrightarrows \mathcal{Q}$, $W(x) = \{y \in B|_x\}$ i zauważmy, iż $W(x)$ jest rosnącą z x rodziną zbiorów. Ponadto ze względu na ciągłość Q, zbiór $W(x)$ jest niepusty i zwarty dla każdego x. Zdefiniujmy wreszcie

. $b : B \to A, b(x,y) = \{a \in A : Q(a, \tilde{a}, \ldots, \tilde{a}) = y, \text{ gdzie } Q(\tilde{a}, \ldots, \tilde{a}) = x\}$

i zauważmy, iż z monotoniczności Q wiemy, iż jest to funkcja malejąca z pierwszym oraz rosnąca z drugim argumentem. Niech $x = Q(\tilde{a}, \ldots, \tilde{a})$ wtedy $b(x, \cdot) : B|_x \to A$ jest ciągła, ponieważ funkcja $Q(\cdot, \tilde{a}, \ldots, \tilde{a}) : A \to B|_x$ jest ciągłą bijekcją, a zbiór A zwarty. Wreszcie ponieważ Q ma rosnące przyrosty, jest monotoniczna i ciągła wiemy, iż: $(\forall a'' > a \in A)(\forall \tilde{a}' > \tilde{a} \in A)(\exists a' \in A)$ takie, że $a'' \geq a' \geq a$, że
$Q(a'', \tilde{a}, \ldots, \tilde{a}) - Q(a, \tilde{a}, \ldots, \tilde{a}) = Q(a', \tilde{a}', \ldots, \tilde{a}') - Q(a', \tilde{a}', \ldots, \tilde{a}')$,
a więc taka sama zmiana wartości Q może być osiągnięta przez niższą zmianę a dla większych wyborów pozostałych graczy. Stąd konkludujemy, iż „częściowa funkcja odwrotna” do Q, tj. $b(x, \cdot) : B|_x \to A \subset \mathbb{R}$ ma malejące przyrost z (y, x).

Przy użyciu funkcji b decyzję każdego gracza można sprowadzić do:

$$\max_{y \in W(x)} F(b(x,y), y).$$

Zauważmy, iż maksymalizowana funkcja jest supermodularna z y i półciągła z góry względem y. Zastosujemy teraz wyniki lematu 1. Zauważmy, iż dowodzie lematu obliczamy wartość funkcji F dla pierwszego argumentu $b(x', y') + b(x,y) - b(x', y)$. Stosując lemat 1 musimy się więc upewnić, iż argument jest dostępny, tj. $0 \leq b(x', sy') + b(x,y) - b(x',y) \leq \bar{a}$. Otrzymujemy to na mocy malejących przyrostów b, jej monotonczności oraz $b(\cdot, \cdot) > 0$;
$0 < b(x,y) - b(x',y) < b(x',y') + b(x,y) - b(x',y) \leq b(x,y') \leq \bar{a}$. *Konkludujemy, iż funkcja $F(b(x,y), y)$ ma rosnące przyrosty między (y, x).*

Wiedząc, że Q jest zbiorem częściowo uporządkowanym, a $W(x)$ zwartym (por. MilgromShannon 1994) (a więc domkniętym łańcuchem dla każdego x), otrzymujemy na mocy twierdzenia Topkisa (Topkis 1968), że dla każdego $x \in Q$ zbiór $\arg\max_{y \in W(x)} F$ jest niepustym, domkniętym łańcuchem, a ponadto jest niemalejący na Q (por. Veinott 1992). Niech $BR : Q \rightrightarrows Q$, $BR(x) = \arg\max_{y \in W(x)} F(b(x, y), x)$. Stosując uogólnienie twierdzenia Tarskiego przez Veinott (1992) oraz Zhou (1994) dla odwzorowania BR otrzymujemy, iż zbiór punktów stałych jest niepustą kratą zupełną, a więc w szczególności ma największy i najmniejszy element. Zauważmy wreszcie, iż punkty stałe odwzorowania BR są symetrycznymi równowagami Nasha gry Γ.

Dowód twierdzenia 4.5 *Niech $\tilde{a}, a$ będą dwoma równowagami Nasha. Pokażemy, nie wprost, że nie może zachodzić (w porządku po współrzędnych) $\tilde{a} \geq a$ z przynajmniej jedną ostrą nierownością.
Z warunku równowagi Nasha dla $\tilde{a}$ mamy:*

$$F(a^i, Q(a^i, \tilde{a}^{-i}))) \leq F(\tilde{a}, Q(\tilde{a}, \tilde{a}^{-i})).$$

Łącząc tą zależność z własnością jednokrotnego przecięcia otrzymujemy:

$$F(a^i, Q(a^i, a^{-i}))) \leq F(\tilde{a}, Q(\tilde{a}, a^{-i})).$$

Co przeczy temu, że a ścisłą równowagą Nasha albo równowagą Nasha, gdy własność jednokrotnego przecięcia jest ścisła.

Dowód twierdzenia 4.7 *Wynika bezpośrednio z monotoniczności funkcji wypłaty F po a^i przy ustalonym poziomie q dla każdego gracza i.*

Dowód twierdzenia 4.8 *Dla $I = 2$ z twierdzenia ? mamy, że występowanie więcej niż jednej równowagi Nasha oznacza, że dla dwóch dowolnych równowag Nasha: (a^1, a^2) i (b^1, b^2) zachodzi $a^1 \geq b^1$ i $a^2 < b^2$. Z warunku równowagi Nasha dla (b^1, b^2) i monotoniczności funkcji Q otrzymujemy:*

$$F^1(b^1, Q(b^1, b^2)) \geq F^1(a^1, Q(a^1, b^2)) > F^1(a^1, Q(a^1, a^2)).$$

Łącząc z analogicznymi warunkami dla drugiego gracza otrzymujemy tezę. Dla wypadku $I > 2$ oraz równowag Nasha z tą samą wartością Q

Dowód twierdzenia 5.3 *Podążając za schematem w pracach Amir (1989), Sundaram (1989a) oraz przekształceniem zaproponowanym w dowodzie twierdzenia ? rozpatrzmy następujące przeformułowanie gry Γ^D. Niech dla zadanej niemalejącej i półciągłej z góry stacjonarnej strategii η:*

$$\phi(q) \equiv g(\underbrace{\eta(q), \ldots, \eta(q)}_{I}, q), \tag{7}$$

Ponieważ g jest ciągłe i monotoniczne znajomość ϕ jest wystarczająca do określenia η. Oznaczmy: $\overline{g}_\phi(q) \equiv g(\bar{a}, \eta(q), \ldots, \eta(q), q)$ oraz $\underline{g}_\phi(q) \equiv g(0, \eta(q), \ldots, \eta(q), q)$, gdzie ϕ jest zadane równaniem (5). Rozpatrzmy zbiór $B_\phi = \{(q', q) : q \in \mathcal{Q}, \exists a \in A, q' = g(a, \eta(q) \ldots, \eta(q), q)\}$, gdzie znów η jest zadane przez ϕ. Zdefiniujmy odwzorowanie $b : B_\phi \to A$ takie, że $b_\phi(y, q) = \{a \in A : g(a, \eta(q), \ldots, \eta(q), q) = y\}$, gdzie znów ϕ jest zadane równaniem (7). Analogicznie do dowodu twierdzenia 3.3 łatwo wykazać, iż b_ϕ jest funkcją, a $b(\cdot, q) : B_\phi|_q \to A$ jest ciągła.

Zadanie (por. problem (?)) poszukiwania najlepszej odpowiedzi danego gracza na zadaną, symetryczną, stacjonarną, strategię Markowa pozostałych graczy przedstawia się następująco:

$$\max_{(y_t)_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(b_\phi(y_t, q_t), q_t), \tag{8}$$

gdzie $(\forall t \leq T)\, y_t \in [\underline{g}_\phi(q_t), \overline{g}_\phi(q_t)]$ oraz $q_{t+1} = y_t$, $q_0 \in \mathcal{Q}$. Zdefiniujmy następujące równanie Bellmana:

$$M_\phi(q) = \max_{y \in [\underline{g}_\phi(q), \overline{g}_\phi(q)]} \{F(b_\phi(y, q), q) + \beta M_\phi(y)\}, \tag{9}$$

i zbiór $\Phi = \{\phi : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q} |\, \phi \text{ jest półciągłe z góry i niemalejące}\}$. Niech wreszcie odwzorowanie $\mathcal{X}_\phi(q) = \{y \in [\underline{g}_\phi(q), \overline{g}_\phi(q)] : M_\phi(q) = F(b_\phi(y, q), q) + \beta M_\phi(y)\}$ oznacza zbiór maksymalizatorów równania Bellmana.

Po tych oznaczeniach dowód twierdzenia rozpoczniemy (lemat 2) od wykazania, iż rozwiązanie równania Bellmana (9) odpowiada rozwiązaniu problemu (8) dla półciągłej z góry i niemalejącej strategii η. W lemacie 3 wykażemy istnienie jedynej najlepszej odpowiedzi gracza i na zadaną strategię graczy $-i$ na danej dziedzinie strategii. Wreszcie w twierdzeniu 1 łącząc wyniki lematów 2 i lemat 3 oraz używając wyników lematu II.10 (Sundaram 1989a) oraz 1-3 (Sundaram 1989b) zdefiniujemy oraz wykażemy ciągłość odwzorowania pomiędzy przestrzenią „zagregowanych strategii" pozostałych graczy $-i$, a przestrzenią „zagregowanych strategii" wszystkich graczy. Zastosowanie twierdzenia Schaudera o punkcie stałym skończy dowód.

Uwaga: Sundaram (1989a) dla uniknięcia problemów brzegowych rozszerza analizowaną przestrzeń zmiennej stanów, a następnie wykazuje, że równowaga Nasha otrzymana na takiej przestrzeni pozostaje równowagą po ograniczeniu przestrzeni zmiennej stanów do analizowanej w modelu. Taka metoda jest skuteczna także i w analizowanym modelu. Dla uproszczenia notacji pominiemy jednak ten krok odsyłając czytelnika do pracy (Sundaram 1989a).

Lemat 2 *Niech gracze* $-i$ *używają niemalejącej, stacjonarnej, półciągłej z góry strategii* η. *Wtedy istnieje najlepsza odpowiedź gracza* i: $\tilde{\eta}$ *(tj. rozwiązująca problem maksymalizacyjny (6) dla zadanej* η*).*

Dowód lematu 2 *Analogicznie do dowodu przedstawionego w Sundaram (1989a). Niech* BU *oznacza przestrzeń ograniczonych, półciągłych z góry funkcji:* $Q \rightarrow A$ *z metryką supremum. Zdefiniujmy operator* Λ:

$$(\Lambda m)(q) = \max_{y \in [\underline{g}_{\phi}(q), \overline{g}_{\phi}(q)]} \{F(b_{\phi}(y,q),q) + \beta m(y)\}, \tag{10}$$

Łatwo wykazać, że Λm *należy do* BU, *a operator* Λ *jest zbliżający. Ponieważ BU jest zupełną przestrzenią metryczną, na mocy zasady Banacha posiada jedyny punkt stały* $M_{\phi} = \Lambda M_{\phi}$ *a odwzorowanie maksymalizatorów z równania (10) dla* $m = M_{\phi}$ *ma (mierzalny) wybór:* $\tilde{\eta}$. *To, że* $\tilde{\eta}$ *jest rozwiązaniem problemu wynika z zasady maksimum i obserwacji, że* F *jest ograniczona. Ponadto funkcja wartości* M_{ϕ} *jest rosnąca na* Q.

Lemat 3 *Niech* $\hat{\phi}(q) = \max \mathcal{X}_{\phi}(q)$ *będzie najwyższym wyborem z* $\mathcal{X}$ *dla każdego* q. *Wtedy* $\hat{\phi}$ *jest jedynym półciągłym z góry wyborem z* $\mathcal{X}$.

Dowód lematu 3 *Dla uproszczenia pomijamy subskrypty oznaczające strategię* ϕ. *Na mocy założeń funkcja* b *ma malejące przyrosty pomiędzy* (y,q). *W połączeniu z wklęsłością oraz rosnącymi przyrostami* F *(względem* a, q*) otrzymujemy, iż* $F(b(y,q),q) + M(q)$ *ma ściśle rosnące przyrosty z* (y,q). *W konsekwencji (por. MilgromShannon 1994) wszystkie optymalne wybory z odwzorowania* $\mathcal{X}$ *są niemalejące z* q. *W szczególności funkcja* $\hat{\phi}(q) = \max \mathcal{X}(q)$ *jest niemalejąca na zwartym zbiorze* Q, *a więc jest prawie wszędzie ciągła. Aby niemalejąca funkcja* $\hat{\phi}$ *była półciągła z góry wystarczy wykazać, iż jest ona prawostronnie ciągła w każdym punkcie nieciągłości.*

Niech q będzie punktem nieciągłości $\hat{\phi}$. Rozpatrzmy malejący ciąg $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ zbiegający do q z prawej strony. Odpowiadający $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ ciąg $(\hat{\phi}(q_n))_{n=0}^{\infty}$ jest monotoniczny i ograniczony, a więc zbieżny. Punkt zbieżności tego ciągu oznaczymy przez $\check{\phi}$. Łatwo widać, iż $\check{\phi} \geq \hat{\phi}(q)$. Dalej nie wprost wykażemy, iż $\check{\phi} = \hat{\phi}(q)$.

Niech $\check{\phi} < \hat{\phi}(q)$. Z monotoniczności F mamy:

$$F(b(y, q_n), q_n)+M(y) > F(b(y, q_{n+1}), q_{n+1})+M(y) > \ldots > F(b(y, q), q)+M(y).$$

Wiedząc także, iż $\underline{g}$ oraz $\overline{g}$ są półciągłe z góry i rosnące wiemy, iż dla n odpowiednio dużego zachodzi:

$$\max F(b(y, q_n), q_n)+M(y) > \max F(b(y, q_n), q_n)+M(y) > \ldots > \max F(b(y, q), q)+M(y),$$

gdzie $\max$ jest brany względem zbiorów dostępnych dla odpowiedniej zmiennej stanu. W przeciwieństwie do modelu rozpatrywanego przez Sundaram (1989a) zbiór dostępnych decyzji $[\underline{g}(\cdot), \overline{g}(\cdot)]$ jest rosnący (względem silnego porządku Veinott (1992)), co może prowadzić do tego, iż decyzja dostępna dla q nie musi być już dostępna dla q_n. Tym niemniej z monotoniczności i półciągłość z góry funkcji $\underline{g}, \overline{g}$ wnioskujemy o ich prawostronnej ciągłości. A więc, jeżeli $\hat{\phi}(q) \in (\underline{g}(q), \overline{g}(q)]$ wiemy, iż dla dużego n wartość $\hat{\phi}(q)$ musi być dostępna także dla zmiennej stanu q_n. Gdy $\hat{\phi}(q) = \underline{g}(q)$, wtedy z prawostronnej ciągłości $\underline{g}$ i ciągłości F i b mamy także zagwarantowane istnienie odpowiednio dużego n, dla którego analizowana nierówność będzie spełniona.

Dalej:

$$F(b(\hat{\phi}(q_n), q_n), q_n) + M(\hat{\phi}(q_n)) > F(b(\hat{\phi}(q_{n+1}), q_{n+1}), q_{n+1}) + M(\hat{\phi}(q_{n+1})) > \ldots > F(b(\check{\phi}, q), q) + M(\check{\phi}),$$

skąd mamy, że dla dużych n zachodzi

$$F(b(\hat{\phi}(q_n), q_n), q_n) + M(\hat{\phi}(q_n)) < F(b(\hat{\phi}(q), q), q) + M(\hat{\phi}(q)) \leq F(b(\hat{\phi}(q), q_n), q_n) + M(\hat{\phi}(q)),$$

co przeczy definicji $\hat{\phi}$.

To, że funkcja $\hat{\phi}(\cdot)$ jest jedynym półciągłym z góry wyborem z $X(\cdot)$ udowadniamy analogicznie do dowodu lematu II.7 w (por. Sundaram 1989a).

Twierdzenie 1 *Gra* Γ^D *ma symetryczną równowagę Nasha doskonałą we względu na pod-gry na zbiorze* BU. *Równowagowe profile strategii są więc niemalejącymi, półciągłymi z góry funkcjami* q.

Dowód twierdzenia 1 *Zauważmy, iż zbiór* Φ *jest zwarty (w topologii zbieżności punktowej) i wypukły. Zdefiniujmy operator* B *z* Φ *w siebie poprzez* $B(\phi)(q) = \hat{\phi}(q)$. *Ponieważ* Φ *jest zbiorem zwartym i wypukłym, a* B *ciągły (por. Sundaram 1989a, 1989b) (w topologii zbieżności punktowej) na mocy twierdzenia Schaudera wiemy, iż* B *ma punkt stały* $B(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}$. *Dalej otrzymujemy:* $\tilde{\phi}(q) \equiv g(\eta(q), \ldots, \eta(q), q) = g(\tilde{\eta}(q), \eta(q), \ldots, \eta(q), q) = \tilde{\phi}(q)$, *a więc* $\eta = \tilde{\eta}$. *Profil strategii* $(\tilde{\eta}, \ldots, \tilde{\eta})$ *jest symetryczną równowagą Nasha gry* Γ^D. *Zauważmy też, iż* $\tilde{\eta}$ *jest niemalejąca i półciągła z góry.*

Dowód twierdzenia 5.4 *Zauważmy, że dla półciągłych z góry i niemalejących strategii funkcja* ζ ze zbioru wartości agregatu w siebie jest niemalejąca i półciągła z góry. Stąd na mocy twierdzenie Tarskiego posiada najmniejszy i największy punkt stały, będą stanem ustalonym dynamiki dobra publicznego w tej gospodarce. Półciągłość z góry funkcji ζ gwarantuje zbieżność z maksymalnego poziomu dobra publicznego do największego punktu stałego.

Bibliografia

AMIR R. (1989), *A lattice-theoretic approach to a class of dynamic games*, "Computers and Mathematic with Applications", Vol. 17, No. 8/9, s. 1345–1349.

AMIR R., JAKUBCZYK M., KNAUFF M. (2008), *Symmetric versus asymmetric equilibria in symmetric supermodular games,* "International Journal of Game Theory", Vol. 37, No. 3, s. 307 – 320.

AMIR R., LAMBSON V. E. (2000), *On the effects of entry in Cournot markets*, "Review of Economic Studies", Vol. 67, No. 2, s. 235–54.

Amann H. (1976): *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, "SIAM Review", Vol. 18, No. 4, s. 620–709.

BERGE C. (1997), *Topological spaces. Including a treatment of multi-valued functions, vectors paces and convexity*, Dover Publications, Inc., New York.

BERGSTROM T., BLUME L., VARIAN H. (1986), *On the private provision of public goods*, "Journal of Public Economics", Vol. 29, No. 1, s. 25–49.

BERGSTROM T., BLUME L., VARIAN H. (1992), *Uniqueness of Nash equilibrium in private provision of public goods: an improved proof*, "Journal of Public Economics", Vol. 49, No. 3, s. 389–390.

BLISS C., NALEBUFF B. (1984), *Dragon-slaying and balroom dancing: the private supply of a public good*, "Journal of Public Economics", Vol. 25, No. 1-2, s. 1–12.

BULO J., GEANAKOPLOS J., KLEMPERER P. (1985), *Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements*, "Journal of Political Economy", Vol. 93, s. 488–511.

CORNES R. (1993), *Dyke maintenance and other stories: some neglected types of public goods*, "Quarterly Journal of Economics", Vol. 108, No. 1, s. 259–71.

CORNES R., HARTLEY R. (2007), *Aggregative public good games*, "Journal of Public Economic Theory", Vol. 9, No. 2, s. 201–219.

CORNES R., HARTLEY R., SANDLER T. (1999), *Equilibrium existence and uniqueness in public good models: an elementary proof via contraction*, "Journal of Public Economic Theory", Vol. 1, No. 4, s. 499–509.

DACIĆ R. M. (1979), *Fixed points of antitone mappings in conditionally complete partially ordered sets*, "Publications De L'Institut Mathématique", Vol. 40, No. 30, s. 83–90.

DASGUPTA P., MAELER K.G. (2003), *The Economics of Non-Convex Ecosystems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUBEY P., HAIMANKO O., ZAPECHELNYUK A. (2006), *Strategic complements, substitutes and potential games*, "Games and Economic Behavior", Vol. 54, No. 1, s. 77–94.

FRASER C. (1992), *The uniqueness of Nash equilibrium in the private provision of public goods: an alternative proof*, "Journal of Public Economics", Vol. 49, s. 389–390.

FUDENBERG D., TIROLE J. (2002), *Game theory,* MIT Press, Cambridge.

HIRSHLEIFER J. (1983), *From the weakest-link to best-shot: The voluntary provision of public goods*, "Public Choice", Vol. 41, s. 371–386.

KREMER M. (1993), *The O-Ring Theory of Economic Development,* "Quarterly Journal of Economics", Vol. 108, No. 3, s. 551-575.

KUKUSHKIN N. S. (1994a), *A condition for the existence of a Nash equilibrium in games with public and private objectives*, "Games and Economic Behavior", Vol. 7, s. 177–192.

KUKUSHKIN N. S. (1994b), *A fixed-point theorem for decreasing mappings,* "Economic Letters", Vol. 46, s. 43-26.

LEININGER W. (1986), *The existence of perfect equilibria in model of growth with altruism between generations*, "Review of Economic Studies", Vol. 53, No. 3, s. 349–368.

MILGROM P., ROBERTS J., (1990), *The economics of modern manufacturing: technology, strategy, and organization*, "American Economic Review", Vol. 80, Nr. 3, s. 511–528.

MILGROM P., SHANNON C. (1994), *Monotone comparative statics*, "Econometrica", Vol. 62, No. 1, s. 157–180.

SUNANDA R., SABARWAL T., (2008), *On the (non-)lattice structure of the equilibrium set in games with strategic substitutes,* "Economic Theory", Vol. 37, s. 161–169.

SAMUELSON P. A. (1954), *The pure theory of public expenditures*, "Review of Economic and Statistics", Vol. 36, No. 4, s. 387–389.

SAMUELSON P. A (1974), *Complementarity: an essay on the 40th anniversary of the Hicks-Allen revolution in demand theory*, "Journal of Economic Literature", Vol. 12, No.4, s. 1255–1289.

SCHEFFER M. (1997), *Ecology of shallow lakes*, Chapman and Hall, New York.

SUNDARAM R. K. (1989a), *Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games*, "Journal of Economic Theory", Vol. 47, No. 1, s. 153–177.

SUNDARAM R. K (1989b), *Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games: corrigendu*, "Journal of Economic Theory", Vol. 49, s. 358–387.

TOPKIS D. M. (1968), *Ordered optimal solutions*, Ph.D. thesis, Standford University.

TOPKIS D. M. (1995), *Comparative statics of the firm*, “Journal of Economic Theory”, Vol. 67, s. 370–401.

TOPKIS D. M. (1998), *Supermodularity and complementarity*, Princeton University Press.

VEINOTT (1992), *Lattice programming: qualitative optimization and equilibria*, MS Standford.

Villanaccia A., U. Zenginobuzb (2005), *Existence and regularity of equilibria in a general equilibrium model with private provision of a public good*, “Journal of Mathematical Economics”, Vol. 41, s. 617–636.

WATTS A. (1996), *On the uniqueness of equilibrium on Cournot oligopoly and other games*, “Games and Economic Behavior”, Vol. 13, s. 269–285.

WOŹNY Ł. (2008), *Modelowanie strategicznych współzależności decyzyjnych w obszarze dóbr publicznych*, praca doktorska, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.

ZHOU L. (1994), *The set of Nash equilibria of a supermodular game is a complete lattice*, “Games and Economic Behavior”, Vol. 7, s. 295–300.