Trzy użyteczne twierdzenia z rachunku różniczkowego odwzorowań

Łukasz Woźny*

9 lutego 2006

Twr. 1 (O różniczkowalności złożenia odwzorowań) *Niech* $T_1 : U \to \mathbb{R}^m$, *gdzie* $U \subset \mathbb{R}^n$ *jest otwartym podzbiorem przestrzeni* $\mathbb{R}^n$, *oraz niech* $T_2 : V \to \mathbb{R}^k$, *gdzie* V *jest otwartym podzbiorem przestrzeni* $\mathbb{R}^m$ *i* $T_1(U) \subset V$, *będą odwzorowaniami różniczkowalnymi odpowiednio w* x *i* $T_1(x)$. *Wówczas złożenie* $T_2 \circ T_1 : U \to \mathbb{R}^k$ *jest odwzorowaniem różniczkowalnym w* x *oraz*

$$(T_2 \circ T_1)'(x) = T_2'(T_1(x))T_1'(x).$$

Twr. 2 (O lokalnej odwracalności odwzorowania różniczkowalnego) *Niech* $T : U \to \mathbb{R}^n$, *gdzie* U *jest otwartym podzbiorem przestrzeni* $\mathbb{R}^n$, *będzie odwzorowaniem różniczkowalnym w sposób ciągły w pewnej kuli* $K(x_0, r) \subset U$ *oraz* $\det T'(x_0) \neq 0$. *Wówczas:*

- *istnieje takie otoczenie* $O = K(x_0, \varepsilon)$, *gdzie* $\varepsilon < r$, *punktu* x_0, *że odwzorowanie* $\tilde{T} : O \to V$, *gdzie* $\tilde{T} = T|_O$ *i* $V = T(O)$ *jest odwracalne;*
- *odwzorowanie* $\tilde{T}^{-1} : V \to O$ *odwrotne do odwzorowania* $\tilde{T}$ *jest różniczkowalne w punkcie* $y_0 = T(x_0)$ *oraz* $(\tilde{T}^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$.

Twr. 3 (O pochodnej funkcji uwikłanej) *Niech* $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $H : O \to Y$, *gdzie* $O \subset X \times Y$ *jest otwartym podzbiorem* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, *będzie odwzorowaniem klasy* $\mathscr{C}^1$. *Niech* H_x' *i* H_y' *oznaczają macierze pochodnej odwzorowania* H *po* x *i* y. *Jeśli istnieje taki punkt* $(x_0, y_0) \in O$, *że* $H(x_0, y_0) = 0$ *oraz* $\det H_y'(x_0, y_0) \neq 0$, *to odwzorowanie* H *lokalnie generuje odwzorowanie* F *pewnej kuli* $K(x_0, r)$ *w* Y *(czyli* $H(x, F(x)) = 0$ *dla* $x \in K(x_0, r)$*), które jest różniczkowalne, a pochodna odwzorowania uwikłanego w punkcie* x_0 *dana jest wzorem:*

$$F'(x_0) = -H_y'(x_0, y_0)^{-1} H_x'(x_0, y_0).$$

Opracowane na podstawie:

Dubnicki W., J. Kłopotowski, T. Szapiro, *Analiza matematyczna. Podręcznik dla ekonomistów*, Warszawa 1999.

*lukasz.wozny@sgh.waw.pl.