

dr Łukasz Patryk Woźny  
email: lukasz.wozny@sgh.waw.pl  
[akson.sgh.waw.pl/lwozny/](http://akson.sgh.waw.pl/lwozny/)  
semestr zimowy 2008  
konsultacje: ..., KTSR, 1115F

## Metody rekursywne w ekonomii

**Cel:** Zapoznanie słuchaczy z zastosowaniem metod rekursywnych w sekwencyjnych problemach decyzyjnych w ekonomii. Nacisk położony zostanie na modelowanie zjawisk makroekonomicznych zarówno w ujęciu deterministycznym i stochastycznym. Omówione zostanie także zastosowanie metod rekursywnych w grach dynamicznych.

**Prerekwizyty:** Analiza matematyczna I, Rachunek prawdopodobieństwa.

**Program:** Przedmiot składa się z trzech części: (i) przypomnienie podstaw analizy funkcjonalnej, teorii miary i procesów stochastycznych, (ii) zastosowanie metod rekursywnych w ekonomii oraz (iii) wprowadzenie to wykorzystania metod numerycznych w ekonomii z programem Matlab/Octave.

**Ocena:** 40% zadania domowe, 60% egzamin końcowy.

**Literatura obowiązkowa:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989), (Judd 1998).

**Literatura dodatkowa:** Niezbędne podstawy matematyczne można znaleźć m.in. w książkach kierowanych do ekonomistów: (Aliprantis i Border 1994), (Moore 1999) lub świetnych opracowaniach: (Dieudonné 1960), (Berge 1997), (Rudin 1998), (Rudin 2001), (Atkinson i Weimin 2000). Formalnie metody rekursywne prezentują: (Bertsekas i Shreve 1996) oraz (Bertsekas 2005-2007). Zastosowanie metod rekursywnych w ekonomii prezentują m.in.: (Ljungqvist i Sargent 2000), (Marimon i Scott 2001), (Hansen i Sargent 2005a), (Hansen i Sargent 2005b).

### Semestralny plan zajęć:

- |    |   |
|----|---|
| W1 | Postawienie problemu. Przykłady zastosowania w mikro-, makroekonomii i teorii gier.<br><b>literatura:</b> (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 1-2;<br><b>literatura dodatkowa:</b> (Bertsekas i Shreve 1996): 1.         |
| W2 | Podstawy matematyczne: przestrzenie metryczne i wektorowe. Pojęcia ciągłości odwzorowania.<br><b>literatura:</b> (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 3;<br><b>literatura dodatkowa:</b> (Aliprantis i Border 1994): 2-5. |
| W3 | Zasada Banacha, twierdzenie Blackwella i zasada maksimum.<br><b>literatura:</b> (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 4;<br><b>literatura dodatkowa:</b> (Moore 1999): vol. II, r. 9,12.                                   |

- W4 Programowanie dynamiczne w wypadku pewności. Funkcja wartości i zasada optimum. Równania Eulera i warunki transwersalności.  
**literatura:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 4;  
**literatura dodatkowa:** (Schäl 1975), (Michel 1982), (Araujo i Scheinkman 1983), (Michel 1990), (Santos 1991), (Araujo 1991), (Alvarez i Stokey 1998), (Askri i Le Van 1998), (Kamihigashi 2001), (Milgrom i Segal 2002).
- W5 Zastosowania w ekonomii: model wzrostu, optymalizacja firmy  
**literatura:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 5.
- W6 Teoria miary. Przestrzenie i funkcje mierzalne  
**literatura:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 7, (Hildenbrand 1974): 1D;  
**literatura dodatkowa:** (Aliprantis i Border 1994): 11-12, (Bertsekas i Shreve 1996): 2, (Dubnicki, Kłopotowski i Szapiro 1999): 9-10.
- W7 Krótkie wprowadzenie do procesów stochastycznych.  
**literatura:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 8;  
**literatura dodatkowa:** (Aliprantis i Border 1994): 15.
- W8 Programowanie dynamiczne w wypadku ryzyka. Funkcja wartości i zasada optimum. Stochastyczne równania Eulera.  
**literatura:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 9;  
**literatura dodatkowa:** (Bertsekas i Shreve 1996): 3-6.
- W9 Zastosowania w ekonomii: model wzrostu, optymalizacja firmy  
**literatura:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 10, (Ljungqvist i Sargent 2000): 3-4.
- W10 O dynamice i zbieżności systemów: wybrane zagadnienia.  
**literatura:** (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 6, 11-13;  
**literatura dodatkowa:** (Boldrin i Montrucchio 1986), (Hopenhayn i Prescott 1992), (Aliprantis i Border 1994): 16.
- W11 Programowanie dynamiczne w grach dynamicznych. Wypadek pewności i ryzyka.  
**literatura:** (Abreu, Pearce i Stachetti 1990), (Fudenberg i Tirole 2002): 13;  
**literatura dodatkowa:** (Ljungqvist i Sargent 2000): 22.
- W12 Podstawy metod numerycznych. Wybrane twierdzenia o punktach stałych.  
**literatura:** (Judd 1998): 2, 6-7, (Stokey, Lucas i Prescott 1989): 17;  
**literatura dodatkowa:** (Ljungqvist i Sargent 2000) 12.
- W13 Podstawy języka Matlab/Octave. Wybrane metody: dyskretyzacja i perturbacja.  
**literatura:** (Judd 1998): 10-12, (Uhlig 2001);  
**literatura dodatkowa:** (Marimon i Scott 2001).
- W14 Inne wybrane metody projekcji.  
**literatura:** (Judd 1998): 13-15,  
**literatura dodatkowa:** (Santos 2000), (Santos 2005).

Na egzaminie obowiązują wszystkie zadania i zagadnienia poruszone podczas zajęć i umieszczone na stronie. W studiowaniu przedmiotu mogą być przydatne wyszukiwarki tekstów naukowych m.in.: [ideas.repec.org](http://ideas.repec.org), [econpapers.repec.org](http://econpapers.repec.org) i [scholar.google.com](http://scholar.google.com) oraz biblioteki artykułów np. [www.jstor.org](http://www.jstor.org), [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com) i [www.nber.org](http://www.nber.org).

## Literatura

- ABREU D., D. PEARCE, E. STACHETTI (1990): "Towards a Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting," *Econometrica*, 58(5), 1041–1063.
- ALIPRANTIS C. D., K. C. BORDER (1994): *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide*. Springer-Verlag Heilbelberg.
- ALVAREZ F., N. L. STOKEY (1998): "Dynamic Programming with Homogeneous Functions," *Journal of Economic Theory*, 82(1), 167–189.
- ARAUJO A. (1991): "The Once but Not Twice Differentiability of the Policy Function," *Econometrica*, 59(5), 1383–1393.
- ARAUJO A., J. A. SCHEINKMAN (1983): "Maximum Principle and Transversality Condition for Concave Infinite Horizon Economic Models," *Journal of Economic Theory*, 30, 1–16.
- ASKRI K., C. LE VAN (1998): "Differentiability of the Value Function of Nonclassical Optimal Growth Models," *Journal of Optimization Theory and Applications*, 97(3), 591–604.
- ATKINSON K., H. WEIMIN (2000): *Theoretical Numerical Analysis. A functional analysis framework*. Springer.
- BERGE C. (1997): *Topological spaces*. Dover Publications, New York.
- BERTSEKAS D. (2005-2007): *Dynamic Programming and Optimal Control*, vol. 1-2. Athena Scientific, Massachusetts.
- BERTSEKAS D., S. SHREVE (1996): *Stochastic optimal control: the discrete-time case*. Athena Scientific, Massachusetts.
- BOLDRIN M., L. MONTRUCCHIO (1986): "On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths," *Journal of Economic Theory*, 40, 26–29.
- DIEUDONNÉ J. (1960): *Foundations of modern analysis*. Academic Press, New York.
- DUBNICKI W., J. KŁOPOTOWSKI, T. SZAPIRO (1999): *Analiza matematyczna. Podręcznik dla ekonomistów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- FUDENBERG D., J. TIROLE (2002): *Game theory*. MIT Press, Cambridge.
- HANSEN L., T. J. SARGENT (2005a): *Recursive Models of Dynamic Linear Economies*. Unpublished.
- (2005b): *Robustness*. Unpublished.

- HILDENBRAND W. (1974): *Core and equilibria of a large economy*. Princeton University Press, Princeton.
- HOPENHAYN H. A., E. C. PRESCOTT (1992): "Stochastic monotonicity and stationary distribution for dynamic economies," *Econometrica*, 60(6), 1387–1406.
- JUDD K. (1998): *Numerical Methods in Economics*. MIT Press, Cambridge.
- KAMIHIGASHI T. (2001): "Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems," *Econometrica*, 69(4), 995–1012.
- LJUNGQVIST L., T. SARGENT (2000): *Recursive Macroeconomic Theory*. The MIT Press.
- MARIMON R., A. SCOTT (red.) (2001): *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Oxford Scholarship Online Monographs.
- MICHEL P. (1982): "On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems," *Econometrica*, 50(4), 975–985.
- (1990): "Some Clarifications on the Transversality Condition," *Econometrica*, 58(3), 705–723.
- MILGROM P., I. SEGAL (2002): "Envelope theorems for arbitrary choice sets," *Econometrica*, 70(2), 583–601.
- MOORE J. C. (1999): *Mathematical Methods for Economic Theory*, vol. 1,2. Springer, Heidelberg.
- RUDIN W. (1998): *Analiza rzeczywista i zespolona*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- (2001): *Analiza funkcjonalna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa,.
- SANTOS M. (1991): "Smoothness of the Policy Function in Discrete Time Economic Models," *Econometrica*, 59(5), 1365–1382.
- SANTOS M. (2000): "Accuracy of numerical solutions using the Euler equations residuals," *Econometrica*, 68(6), 1377–1402.
- (2005): "Accuracy of numerical solutions for stochastic dynamic economies," *Econometrica*, 73(6), 1939–1976.
- SCHÄL M. (1975): "Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal," *Probability Theory and Related Fields*, 32(3), 179–196.
- STOKEY N., R. LUCAS, E. PRESCOTT (1989): *Recursive methods in economic dynamics*. Harvard University Press.
- UHLIG H. (2001): "A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily," w: *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, red.: R. Marimon, A. Scott. Oxford Scholarship Online Monographs.