2020 考研-数学-基础阶段
第二次测试卷解析

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________　　　　　　　　　　得分__________

一、解答题： 请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本题满分 20 分）计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3^x+\ln 3x^2)(3^x+x^9)}{4\cdot 3^{2x}+\log_3 x}$。

【答案】$\dfrac{1}{4}$。

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3^x+\ln 3x^2)(3^x+x^9)}{4\cdot 3^{2x}+\log_3 x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot 3^x}{4\cdot 3^{2x}}=\dfrac{1}{4}$。

2、（本题满分 20 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$。

【答案】$\dfrac{1}{2}$。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(x\sqrt{1+\sin^2 x}-x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$。

3、（本题满分 20 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$。

【答案】1。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(x^x-1)\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(e^{x\ln x}-1)\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x(\ln x)^2}=e^0=1$。

4、（本题满分 20 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$。

【答案】$-\frac{1}{12}$。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+1-\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{\left[\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)-(1+x^2)+o(x^2)\right]x^2}=-\frac{1}{12}$。

5、（本题满分 20 分）求函数 $f(x)=\frac{x+1}{x}\ln(1+x)\arctan\frac{1}{x-1}$ 间断点的类型。

【答案】函数 $f(x)$ 的可去间断点为 $x=0$，跳跃间断点为 $x=1$

【解析】由题易知，函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$， $x=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x}\ln(1+x)\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=-\frac{\pi}{4}$，故 $x=0$ 是可去间断点；$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x}\ln(1+x)\arctan\frac{1}{x-1}=2\ln 2\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\frac{1}{x-1}=\pi\ln 2$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x}\ln(1+x)\arctan\frac{1}{x-1}=2\ln 2\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{x-1}=-\pi\ln 2$， 故 $x=1$ 是跳跃间断点。