2020 考研-数学-基础阶段
第一次测试卷解析

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________ 得分__________

一、选择题：1～3 小题，每小题 10 分，共 30 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

1、设 $g(x)=\begin{cases}2-x,x\le 0\\ x+2,x>0\end{cases}$， $f(x)=\begin{cases}x^2,x<0\\ -x,x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]$ 为（ ）

（A）$\begin{cases}2+x^2,x<0\\ 2-x,x\ge 0\end{cases}$（B）$\begin{cases}2-x^2,x<0\\ 2+x,x\ge 0\end{cases}$（C）$\begin{cases}2-x^2,x<0\\ 2-x,x\ge 0\end{cases}$（D）$\begin{cases}2+x^2,x<0\\ 2+x,x\ge 0\end{cases}$

【答案】（D）

【解析】当 $x<0$ 时， $f(x)=x^2>0$，则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$；当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=-x\le 0$，则 $g[f(x)]=2-f(x)=2+x$， $g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2,x<0\\ 2+x,x\ge 0\end{cases}$，选（D）。

2、①“$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{10}}$”是“$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$”的充要条件；

②“$\forall$ 正整数 N，$\exists$ 正整数 K，当 $0<|x-a|<\dfrac{1}{K}$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\dfrac{1}{2N}$”是“$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$”的充要条件；

③“$\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists$ 正整数 N，当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-A|<2\varepsilon$”是“数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a”

的充要条件；

以上三个说法中，正确的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】C

【解析】极限是当函数在极限点“附近”时，函数值与极限值无限接近。所以②③正确，①中$\left|f(x)-A\right|<e^{\frac{\varepsilon}{10}}$不是无限接近。

3、当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$与$x\sin x^n$是同阶无穷小，则正整数n等于（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（C）

【解析】当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}$，则有$n+1=4$，故$n=3$，应选（C）。

二、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分.

4、（本题满分 15 分）计算$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{2x-4}$。

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-2+1)}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{2x-4}=\frac{1}{2}$。

5、（本题满分 15 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}+1\right)\ln\cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}$。

【答案】$-\dfrac{3}{2}$

【解析】

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}+1\right)\ln\cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=-\frac{3}{2}。$$

6、（本题满分 20 分）计算 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+1}{2x+1}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}$。

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】由“抓大头”可知，$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+1}{2x+1}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{2x}\cdot\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{2}$。

7、（本题满分 20 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2\sqrt{\cos x}}-e^2}{\sqrt{1+\arcsin^2 x}-1}$。

【答案】$-e^2$

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sqrt{\cos x}}-e^2}{\sqrt{1+\arcsin^2 x}-1}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sqrt{\cos x}-2}-1}{\frac{1}{2}\arcsin^2 x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{\cos x}-2}{\frac{1}{2}x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x-1}-1}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{\frac{1}{2}x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-e^2。$$