# 连续、导数补充题目

## 历年真题

【第 1 题】【2003—3 10 分】设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$，使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续。

【第 2 题】【2008—2 4 分】$f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$__________。

【第 3 题】【2008—3 4 分】设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le c \\ \frac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$__________。

【第 4 题】【2004—2 4 分】设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$__________。

【第 5 题】【2004—3 4 分】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则（ ）

（A）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

（B）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

（C）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

（D）$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 $a$ 的取值有关

【第 6 题】【2005—2 4 分】设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（ ）

（A）$x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B）$x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

**【第 7 题】【2007—2　4 分】**函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$（　　）

（A）$0$　　（B）$1$　　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

**【第 8 题】【2008—2　4 分】**判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$ 间断点的情况（　　）

（A）有一个可去间断点，一个跳跃间断点

（B）有一个跳跃间断点，一个无穷间断点

（C）有两个无穷间断点

（D）有两个跳跃间断点

**【第 9 题】【2009—2、3　4 分】**函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为（　　）

（A）$1$　　（B）$2$　　（C）$3$　　（D）无穷多个

**【第 10 题】【2010—2　4 分】**函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为（　　）

（A）$0$　　（B）$1$　　（C）$2$　　（D）$3$

**【第 11 题】【2013—3　4 分】**函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）

（A）$0$　　（B）$1$　　（C）$2$　　（D）$3$

**【第 12 题】【2015—2　4 分】**函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　）

（A）连续　　（B）有可去间断点

（C）有跳跃间断点　　（D）有无穷间断点

【第 13 题】【2003—2　4 分】已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的解，则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为（　）

（A）$-\dfrac{y^2}{x^2}$　　（B）$\dfrac{y^2}{x^2}$　　（C）$-\dfrac{x^2}{y^2}$　　（D）$\dfrac{x^2}{y^2}$

【第 14 题】【2006—2　4 分】设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)},h'(1)=1,g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于（　）

（A）$\ln 3-1$　　（B）$-\ln 3-1$　　（C）$-\ln 2-1$　　（D）$\ln 2-1$

【第 15 题】【2006—3　4 分】设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)},f(2)=1$，则 $f'''(2)=$________。

【第 16 题】【2007—2　10 分】已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定，设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$。

【第 17 题】【2012—3　4 分】设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\ge 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$，$y=f(f(x))$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________。

【第 18 题】【2015—2　4 分】设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=3t+t^3\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________。

【第 19 题】【2017—2　4 分】设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$________。

【第 20 题】【2015—2　4 分】函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(0)=$________。

# 参考答案

【第 1 题】【**2003—3　10 分**】【答案】$\dfrac{1}{\pi}$。

【解析】为使函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，需要求出函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的左极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，然后将 $f(1)$ 定义成该极限值即可。

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin \pi x}{\pi(1-x)\sin \pi x}。$$

令 $t=\pi(1-x)$，则 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\pi(1-x)-\sin \pi x}{\pi(1-x)\sin \pi x}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\sin(\pi-t)}{t\sin(\pi-t)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\sin t}{t\sin t}$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\sin t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{2t}=0，$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{1}{\pi}+0=\dfrac{1}{\pi}$。

定义 $f(1)=\dfrac{1}{\pi}$，从而有 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{1}{\pi}=f(1)$，此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续。

又 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续。

【第 2 题】【**2008—2　4 分**】【答案】$2$。

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot[xf(x)]^2}{x^2 f(x)}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{f(0)}{2}=1$，

所以 $f(0)=2$。

**【第 3 题】【2008—3 4 分】【答案】**1。

**【解析】**由题设知 $0\le|x|\le c$，所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x>c\\ x^2+1, & -c\le x\le c\\ -\dfrac{2}{x}, & x<-c\end{cases}$。

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以 $f(x)$ 必在 $x=c$ 处连续；

且 $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c^-}(x^2+1)=c^2+1=f(c)$， $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{c}$，

所以 $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=f(c)$，即 $c^2+1=\dfrac{2}{c}$，解得 $c=1$。

**【第 4 题】【2004—2 4 分】【答案】**0。

**【解析】**本题需要确定由极限定义的函数的连续性与间断点。对不同的 $x$，先用求极限的方法得出对应的 $f(x)$ 的表达式，再讨论 $f(x)$ 的间断点。

由 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，显然当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x}{x^2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$。

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$。

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点。

**【第 5 题】【2004—3 4 分】【答案】**（D）。

**【解析】**先考查极限 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 是否存在，如果存在，再考查其是否等于 $g(0)$。通过变

量代换 $u=\dfrac{1}{x}$，可将极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 转化为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$。

因为 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=a$，且有 $g(0)=0$，

所以当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$，即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续；

当 $a\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} g(x)\neq g(0)$，即 $x=0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点。

综上所述，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 $a$ 的取值有关，故选（D）。

**【第 6 题】【2005—2　4 分】【答案】**（D）。

**【解析】**由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$、$x=1$ 点处无定义，因此这两点是间断点。

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为第二类间断点；

又由于 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$，所以 $x=1$ 为第一类间断点，故应选（D）。

**【第 7 题】【2007—2　4 分】【答案】**（A）。

**【解析】**首先找出 $f(x)$ 的所有不连续点，然后逐个考虑 $f(x)$ 在各个间断点处的极限。

$f(x)$ 的不连续点为 $x=0$、$x=1$、$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$；第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。逐个考虑各个选项即可。

选项（A）：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=1$（$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$）；

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=-1$（$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$）。

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限均存在，但 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（可去间断点），故选（A）。

类似地，可验证其余选项是第二类间断点：$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}f(x)=\infty$。

**【第 8 题】【2008—2　4 分】【答案】**（A）。

**【解析】** 当 $x=0$、$x=1$ 时，函数 $f(x)$ 无定义，故 $x=0$、$x=1$ 是函数的间断点。

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x}=0$$

，

同理 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$。

又 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1^+}\sin x=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\cdot\sin 1=\sin 1$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\cdot\lim\limits_{x\to 1^-}\sin x=-\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x}\cdot\sin 1=-\sin 1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$。

故 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点。

**【第 9 题】【2009—2、3　4 分】【答案】**（C）。

**【解析】** 由于 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$，则当 $x$ 取任何整数时，均有 $\sin\pi x=0$，则 $f(x)$ 均无意义，故 $f(x)$ 的间断点有无穷多个。但可去间断点是极限存在的点，故只可能是 $x-x^3=0$ 的解 $x=0$、$1$ 或 $-1$。下面逐个进行判断。

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$，

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}\ 。$$

因此$f(x)$在$x=0$，$x=1$，$x=-1$这三个点处的左右极限均存在且相等，故这三个点都是可去间断点。

**【第 10 题】【2010—2 4 分】【答案】**（B）。

**【解析】**因为$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$有间断点$x=0$、$x=1$、$x=-1$，下面逐个计算$f(x)$ 在各点处的极限，再做判断。

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|},$$

所以$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，故$x=0$为跳跃间断点。

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}，故 x=1 为可去间断点。$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x}{|x|}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x}{|x|}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{-x}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\infty \quad，故 x=-1 为无穷间断点。$$

综上所述，无穷间断点仅有$x=-1$，所以应该选（B）。

**【第 11 题】【2013—3 4 分】【答案】**（C）。

**【解析】**函数$f(x)$可能的间断点为：$x=0$、$x=-1$、$x=1$，下面逐个计算$f(x)$在各点处的极限，再做判断。

原极限式化简为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}$ 。

分左右极限讨论：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1$$

（因为 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^+} x=0$，所以 $e^{x\ln x}-1\sim x\ln x$），

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x\ln(-x)}=1$$

（因为 $\lim\limits_{x\to0^-} x\ln(-x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$，所以 $e^{x\ln(-x)}-1\sim x\ln(-x)$），

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=1$，可知 $x=0$ 为可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x\ln(-x)}-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$（因为 $\lim\limits_{x\to-1} x\ln(-x)=(-1)\cdot\ln1=0$，所以 $e^{x\ln(-x)}-1\sim x\ln(-x)$），故 $x=-1$ 为无穷间断点；

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x(x+1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$（因为 $\lim\limits_{x\to1} x\ln x=1\cdot\ln1=0$，所以 $e^{x\ln x}-1\sim x\ln x$），故 $x=1$ 为可去间断点。

综上所述，可去间断点为 $x=0$ 和 $x=1$，共 2 个。故选（C）。

**【第 12 题】【2015—2 4 分】【答案】**（B）。

**【解析】** $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{x}\cdot\frac{x^2}{t}}=e^x$。

但是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，而由题中条件可知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限是存在的，所以是可去间断点。

**【第 13 题】【2003—2 4 分】【答案】**（A）。

**【解析】** 将 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 $y'=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，

得：$\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\dfrac{1}{\ln x}+\varphi(\ln x)$，即 $\varphi(\ln x)=-\dfrac{1}{\ln^2 x}$。

令 $\ln x=u$，有 $\varphi(u)=-\dfrac{1}{u^2}$，以 $u=\dfrac{x}{y}$ 代入，得 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)=-\dfrac{y^2}{x^2}$，故选（A）。

**【第 14 题】【2006—2　4 分】【答案】**（C）。

**【解析】**利用复合函数求导法则，

$h(x)=e^{1+g(x)}$ 两边对 $x$ 求导，得 $h'(x)=g'(x)e^{1+g(x)}$

由已知条件可得 $1=2e^{1+g(1)}$，即 $g(1)=\ln\dfrac{1}{2}-1=-\ln 2-1$，故选（C）。

**【第 15 题】【2006—3　4 分】【答案】**$2e^3$。

**【解析】**题目考查抽象函数在某点处的高阶导数。利用题目已知的函数关系式进行求导便可得出。

由 $f'(x)=e^{f(x)}$，有 $f''(x)=(e^{f(x)})'=e^{f(x)}f'(x)=e^{2f(x)}$，

所以 $f'''(x)=(e^{2f(x)})'=e^{2f(x)}(2f(x))'=2e^{2f(x)}f'(x)=2e^{3f(x)}$，

将 $x=2$ 代入，得 $f'''(2)=2e^{3f(x)}=2e^3$。

**【第 16 题】【2007—2　10 分】【答案】**$0$；$1$。

**【解析】**在 $y-xe^{y-1}=1$ 中，令 $x=0$，得 $y(0)=1$；

$y-xe^{y-1}=1$ 两边对 $x$ 求导，$y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0$，由 $x=0,y=1$，得 $y'\big|_{x=0}=1$；

$y''-2e^{y-1}y'^2-xe^{y-1}y'-xe^{y-1}(y')^2-xe^{y-1}y''=0$，由 $x=0,y=1,y'=1$ 得 $y''\big|_{x=0}=2$。

因为 $\dfrac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)$，故 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}=0$；

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)+f'(\ln y-\sin x)\left(\frac{y''}{y}-\frac{(y')^2}{y^2}+\sin x\right),$$

故 $\dfrac{d^2z}{dx^2}=f'(0)(2-1)=1$。

**【第 17 题】【2012—3 4 分】【答案】** 4。

**【解析】** $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'(f(x))f'(x)\big|_{x=0}=f'(f(0))f'(0)=f'(-1)f'(0)$，

由 $f(x)$ 的表达式可知 $f'(0)=f'(-1)=2$，可知 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=4$。

**【第 18 题】【2015—2、3 4 分】【答案】** 48。

**【解析】** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3(1+t^2)}{\dfrac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{12t(1+t^2)}{\dfrac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2$，故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48$。

**【第 19 题】【2017—2 4 分】【答案】** $-\dfrac{1}{8}$。

**【解析】** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\left(\dfrac{\cos t}{1+e^t}\right)'}{1+e^t}=\frac{\dfrac{-\sin t(1+e^t)-e^t\cos t}{(1+e^t)^2}}{1+e^t}$$

$$=\frac{-\sin t-e^t\sin t-e^t\cos t}{(1+e^t)^3}。$$

所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$。

**【第 20 题】【2015—2 4 分】【答案】** $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$。

**【解析】** 因为 $f^{(n)}(x)=(x^2\cdot 2^x)^{(n)}=C_n^0(2^x)^{(n)}x^2+C_n^1(2^x)^{(n-1)}2x+C_n^2(2^x)^{(n-2)}2$，

故 $f^{(n)}(0)=(C_n^2(2^x)^{(n-2)}2)\big|_{x=0}=\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^{n-2}\cdot 2\right)\Big|_{x=0}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$ 。