2019 考研数学强化阶段乐学

线性代数结课测试卷

考试时间：60 分钟　　　姓名___________

一、**选择题**：1～4 小题，每小题 8 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，那么与 $\boldsymbol{A}$ 既相似又合同的矩阵是（　　）

（A）$\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{bmatrix}$

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(ax_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+ax_3)^2$ 是正定二次型的充分必要条件是（　　）

（A）$a=0$　（B）$a>0$　（C）$a<0$　（D）任意的 a

3.已知 $7\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，$r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

4.行列式 $\begin{vmatrix}101&0&1&0&1\\3&-1&1&1&4\\198&0&-2&0&2\\2&1&1&1&3\\203&0&2&0&2\end{vmatrix}=$（　　）

（A）8　（B）-8　（C）4　（D）-4

二、**填空题**：5–8 小题，每小题 8 分，共 32 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

5.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=$__________。

6.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 等价，则 $k=$________。

7.矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，则 $a=$__________。

8.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,0$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$__________。

三、解答题：9—10 小题，共 36 分请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9.（本题满分 18 分）已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

（1）方程组仅有零解；

（2）方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系。

10.（**本题满分 18 分**）设 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2bx_2x_3$，$\boldsymbol{\xi}=[1,1,1]^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，求正交变换化二次型为标准型。