# 2020 考研-数学-基础阶段
# 第三次测试卷

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________ 得分__________

**一、解答题**：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本小题满分 20 分）设函数 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，试讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性。

$f(x)\begin{cases}(x-a)\varphi(x) & x>a\\(a-x)\varphi(x) & x<a\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)'=-\varphi(a)$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)'=\varphi(a)$

$f'(x)\begin{cases}\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x), & x>a\\-\varphi(x)+(a-x)\varphi'(x), & x<a\end{cases}$

∵左右导数存在但不相等

故，$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

2、（本小题满分 20 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x+y)+x\ln y=2$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

$f'(x)\ \dfrac{dy}{dx}=-\sin(x+y)\cdot y'+\dfrac{x}{y}\cdot y'+\ln y$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(f'(x))}{dx}=-\cos(x+y)y'^2-\sin(x+y)\cdot y''+\dfrac{(xy''+y')\cdot y-x\cdot y'\cdot y'}{y^2}+\dfrac{y'}{y}$

3、设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t^2),\\y=\arctan t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$\begin{cases}x'=1-\dfrac{2t}{1+t^2}\\y'=\dfrac{1}{1+t^2}\end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1+t^2-2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{1-2t+t^2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{1}{1-2t+t^2}\right)'\Big/\dfrac{dt}{dx}$

$=-\dfrac{(2t-2)}{(1-2t+t^2)^2}\cdot\Big(\dfrac{1+t^2-2t}{1+t^2}$

$=\dfrac{2}{(1-t)(1+t^2)}$

4、（本小题满分 20 分）设函数 $y=f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ 满足 $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

$$\frac{dy}{dx}=y'=f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$$

5、（本小题满分 20 分）求函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(0)$（$n>1$）。

解：由莱布尼茨定律可得：

$$f^{n}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}\cdot(2^x)^{(n-k)}$$

$$=C_n^0(x^2)^0\cdot(2^x)^n+C_n^1(x^2)'(2^x)^{(n-1)}+C_n^2(x^2)''(2^x)^{(n-2)}$$

$2x$

$$+C_n^3(x^2)'''(2^x)^{(n-3)}+\cdots+C_n^n(x^2)^{(n)}(2^x)^0$$

∵ $x^2$ 的3阶导数及其n阶导数 $(n\geq3)$ 为零故可将~~其~~后省略.

$$\therefore f^n(x)=2^x\cdot\ln2^n+2nx\cdot2^x\ln2^{(n-1)}$$

$$+n(n-1)\cdot2^x\ln2^{(n-2)}$$