第一章　函数、极限补充题目

历年真题

【第 1 题】【2003—2　4 分】若 $x \to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________。

【第 2 题】【2005—2、3　4 分】当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与

$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ ________。

【第 3 题】【2007—1、2、3　4 分】当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

【第 4 题】【2009—1、2、3　4 分】当 $x \to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）

（A）$a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　（B）$a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$

（C）$a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　（D）$a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$

【第 5 题】【2010—3　4 分】设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有（　　）

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$　　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$　　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$

【第 6 题】【2011—2、3　4 分】已知当 $x \to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）

（A）$k=1$，$c=4$　　（B）$k=1$，$c=-4$

（C）$k=3$，$c=4$　　（D）$k=3$，$c=-4$

【第 7 题】【2013—2 4 分】设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $\left|\alpha(x)\right|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（ ）

（A）比 x 高阶的无穷小 （B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小 （D）与 x 等价的无穷小

【第 8 题】【2009—2 9 分】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$。

【第 9 题】【2011—3 10 分】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$。

【第 10 题】【2014—2 4 分】设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$（ ）

（A）1 （B）$\dfrac{2}{3}$ （C）$\dfrac{1}{2}$ （D）$\dfrac{1}{3}$

【第 11 题】【2016—3 4 分】已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________。

【第 12 题】【2004—3 8 分】求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$。

【第 13 题】【2005—3 8 分】求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$。

【第 14 题】【2006—3 7 分】设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$，求

（I）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

（II）$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$。

【第 15 题】【2012—2 10 分】已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

（I）求 a 的值；

（II）若当 $x \to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k。

【第 16 题】【2004—2　10 分】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$。

【第 17 题】【2010—1　4 分】极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$（　）

（A）1　　（B）e　　（C）e^{a-b}　　（D）e^{b-a}

【第 18 题】【2010—3　10 分】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$。

【第 19 题】【2011—1　10 分】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$。

【第 20 题】【2013—2　4 分】$\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$________。

【第 21 题】【2016—2、3　10 分】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$。

参考答案

【第 1 题】【2003—2　4 分】【答案】 -4。

【解析】 本题利用等价无穷小替换求解。

当 $x \to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1 \sim -\frac{1}{4}ax^2$，$x\sin x \sim x^2$。

由题设知，当 $x \to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则有

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a$$，所以 $a=-4$。

【第 2 题】【2005—2、3　4 分】【答案】 $k=\frac{3}{4}$。

【解析】 由题设，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2k}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right);$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4k}$。

由题设，当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)\sim\beta(x)$，所以 $\frac{3}{4k}=1$，解得 $k=\frac{3}{4}$。

【第 3 题】【2007—1、2、3　4 分】【答案】（B）。

【解析】法一： 排除法，根据常见的等价无穷小进行判断。

当 $x\to 0^+$ 时，有 $1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x})$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2$。因此可以排除选项（A）、（C）、（D），故选（B）。

法二： $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$。

当 $x \to 0^+$ 时，$\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \to 0$；又因为当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \sim x$，

所以 $\ln\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \sim \dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$，故选（B）。

法三：$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}} = = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+x} \cdot \left(\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\right)'}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+x} \cdot \dfrac{1-\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)}{(1-\sqrt{x})^2}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}-2x+1+x}{(1+x)(1-\sqrt{x})} = 1。$$

故选（B）。

【第 4 题】【2009—1、2、3　4 分】【答案】（A）。

【解析】法一：由题设知，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是 $x \to 0$ 时的等价无穷小，则有

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin ax}{-bx^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-a\cos ax}{-3bx^2} = 1。$$

若上式成立，则有 $\lim\limits_{x\to 0}(1-a\cos ax) = 0$，故 $a=1$。

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^2 \sin ax}{-6bx} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{a^3}{6b}\right) \cdot \dfrac{\sin ax}{ax} = -\dfrac{a^3}{6b} = 1$，即 $a^3 = -6b$，解得 $b = -\dfrac{1}{6}$。

法二：将 $\sin ax$ 用麦克劳林公式展开，得

$\sin ax = ax - \dfrac{(ax)^3}{3!} + o[(ax)^3] = ax - \dfrac{a^3}{6} \cdot x^3 + o(x^3)$，代入极限式可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left[ax - \dfrac{a^3}{6} \cdot x^3 + o(x^3)\right]}{x^2 \cdot (-bx)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{a^3}{6}\cdot x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1\text{。}$$

比较系数，有$\begin{cases}1-a=0\\ \frac{a^3}{6}=-b\end{cases}$，可解得$\begin{cases}a=1\\ b=-\frac{1}{6}\end{cases}$。

综上所述，本题选（A）。

【第 5 题】【2010—3　4 分】【答案】（C）。

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\frac{1}{10}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{10}}=+\infty$，所以，当 x 充分大时，有 $h(x)>g(x)$。

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}10\cdot\frac{\ln^9 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=10\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^9 x}{x}$

$$=10\cdot 9\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^8 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\cdots=10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=10!\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

所以当 x 充分大时，有 $f(x)<g(x)$。

综上所述，当 x 充分大时，有 $f(x)<g(x)<h(x)$。

【第 6 题】【2011—2、3　4 分】【答案】（C）。

【解析】将 $\sin x$ 和 $\sin 3x$ 分别用麦克劳林公式展开，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]-\left[3x-\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)\right]}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+o(x^3)}{cx^k}=1$$

比较系数即得$\begin{cases}c=4\\ k=3\end{cases}$。故选（C）。

【第 7 题】【2013—2　4 分】【答案】（C）。

【解析】由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$，又因为 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$。又

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\alpha(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小，故选（C）。

【第 8 题】【2009—2 9 分】【答案】 $\dfrac{1}{4}$。

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan^2 x}{4x}=\frac{1}{4}$$

【第 9 题】【2011—3 10 分】【答案】 $-\dfrac{1}{2}$。

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+2\sin x}}\cdot 2\cos x-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}=-\frac{1}{2}。$$

【第 10 题】【2014—2 4 分】【答案】 $\dfrac{1}{3}$。

【解析】 注意到（1）$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$；（2）当 $x\to 0$ 时，$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$。

由于 $f(x)=xf'(\xi)$，所以可知 $f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\arctan x}{x}$，$\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}。$$

【第 11 题】【2016—3　4 分】【答案】6。

【解析】由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$。由等价无穷小替换得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=2$，可以求得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$。

【第 12 题】【2004—3　8 分】【答案】$\dfrac{4}{3}$。

【解析】求 $\infty-\infty$ 型极限，先通分，再使用洛必达法则求解。

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{12x}=\frac{4}{3}。$$

【第 13 题】【2005—3　8 分】【答案】$\dfrac{3}{2}$。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}。$$

【第 14 题】【2006—3　7 分】【答案】（I）$g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}$；（II）$\pi$。

【解析】本题考查二元函数的极限。求解 $g(x)$ 时，可以将 y 视为常数。

（I）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)$。

由于$x\neq 0$，所以$\lim\limits_{y\to+\infty}y\sin\dfrac{\pi x}{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}y\cdot\dfrac{\pi x}{y}=\pi x$，$\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{1+xy}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+x}=\dfrac{1}{x}$，

所以$g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}$。

（II）

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{2x(1+x^2)}+\pi=\pi$$。

【第 15 题】【2012—2　10 分】【答案】（I）$a=1$；（II）$k=1$。

【解析】（I）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，即$a=1$。

（II）$f(x)-a=f(x)-1=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$。

由题中条件，有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-a}{x^k}=C(C\neq0,1)$，

则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-a}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^{k+1}\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}$。

故由上式有$k+2=3$，解得$k=1$。

【第 16 题】【2004—2　10 分】【答案】$-\dfrac{1}{6}$。

【解析】此极限属于$\frac{0}{0}$型未定式，可利用洛必达法则，并结合等价无穷小替换方法求解。

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}\text{。}$$

【第 17 题】【**2010—1 4 分**】【答案】（C）。

【解析】求1^∞型极限，通过凑成重要极限形式来求解，可直接使用下列公式：

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}\text{。}$$

$$\text{则}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}\text{。}$$

$$\text{而}\lim_{x\to\infty}x\cdot\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{(a-b)x}{(x-a)(x+b)}=a-b\,,$$

所以原式$=e^{a-b}$，故选（C）。

【第 18 题】【**2010—3 10 分**】【答案】e^{-1}。

$$\text{【解析】}\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}},$$

$$\text{其中}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\frac{1}{x}\cdot\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)=-1\text{，故原式}=e^{-1}\text{。}$$

【第 19 题】【**2011—1 10 分**】【答案】$e^{-\frac{1}{2}}$。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\cdot\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$。

【第 20 题】【**2013—2 4 分**】【答案】$e^{\frac{1}{2}}$。

【解析】由于$\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，

所以原式$=e^{\frac{1}{2}}$。

【第 21 题】【**2016—2、3 10 分**】$e^{\frac{1}{3}}$。

【解析】由重要极限可得，原式$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\cdot(2x)^2+\frac{1}{24}\cdot(2x)^4+2x\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-1+o(x^4)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$。