2020 考研-数学-基础阶段
第三次测试卷解析

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________ 得分__________

一、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本小题满分 20 分）设函数 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，试讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性。

【答案】当 $\varphi(a)=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导；当 $\varphi(a)\neq 0$ 时，$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导。

【解析】将 $f(x)$ 表达式中的绝对值符号去掉，得 $f(x)=\begin{cases}(x-a)\varphi(x), & x>a,\\ 0, & x=a,\\ -(x-a)\varphi(x), & x<a,\end{cases}$ 由左右导数的定义，得 $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{-(x-a)\varphi(x)}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a^-}\varphi(x)=-\varphi(a)$，

$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a)$，当 $\varphi(a)=0$ 时，

$f'_-(a)=f'_+(a)=0$，$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)=0$；当 $\varphi(a)\neq 0$ 时，$f'_-(a)\neq f'_+(a)$，$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导。

2、（本小题满分 20 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos\left(x+y\right)+x\ln y=2$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

【答案】 $y'=\dfrac{y[\sin(x+y)-\ln y]}{x-y\sin(x+y)}$， $y''=\dfrac{y^2(1+y')^2\cos(x+y)-yy'-y'(y-xy')}{xy-y^2\sin(x+y)}$。

【解析】方程两端同时对 x 求导，得 $-\sin(x+y)\cdot(1+y')+\ln y+\frac{xy'}{y}=0$ (•)，解得，

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin(x+y)-\ln y}{\frac{x}{y}-\sin(x+y)}=\frac{y[\sin(x+y)-\ln y]}{x-y\sin(x+y)}$，将 (•) 式两端同时对 x 求导，得

$\frac{y'}{y}-(1+y')^2\cos(x+y)-y''\sin(x+y)+\frac{(y-xy')y'}{y^2}+\frac{xy''}{y}=0$，整理得，

$y''=\frac{y^2(1+y')^2\cos(x+y)-yy'-y'(y-xy')}{xy-y^2\sin(x+y)}$。

3、设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

【答案】$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(t-1)^2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2(1+t^2)}{(t-1)^5}$。

【解析】根据参数方程求导法则，$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{(t-1)^2}$，

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{(t-1)^3}\cdot\frac{1+t^2}{(t-1)^2}=\frac{-2(1+t^2)}{(t-1)^5}$。

4、（本小题满分 20 分）设函数 $y=f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ 满足 $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

【答案】$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+1)^2}\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$。

【解析】$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$，又因

$f'(x)=\frac{1}{3}\ln x$，故 $f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$，因此，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{1}{(x+1)^2}\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right);$$

5、（本小题满分 20 分）求函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$（$n>1$）。

【答案】$f^{(n)}(0)=n(n-1)\cdot(\ln 2)^{n-2}$

【解析】由莱布尼茨公式可得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(2^x)^{(n-k)}$$

$$=x^2\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^n+2nx\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^{n-2},$$

则 $f^{(n)}(0)=n(n-1)\cdot(\ln 2)^{n-2}$。