高等数学目录

线性代数目录

概率论与数理统计目录

模块一　函数

Ⅰ经典习题

1．求下列函数的自然定义域.

（1）$\sin\sqrt{x}$；　　（2）$\tan(x+1)$；

（3）$\arcsin(x-3)$；　　（4）$\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x-1}$；

（5）$\dfrac{1}{[x+1]}$.

2．已知 $f(x)=e^{x^2}$， $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$，则 $\varphi(x)=$__________.

3．设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

4．设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & |x|\geq 1\end{cases}$，试求 $f[g(x)]$， $g[f(x)]$.

5．求函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ x^2, & 1\leq x\leq 4\\ 2^x, & x>4\end{cases}$，求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

6．设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\cos x}$，则 $f(x)$ 是（　　）

（A）偶函数　　（B）有界函数　　(C)周期函数　　(D)单调函数

7．设函数 $f(x)$ 是奇函数，且是周期为 4 的周期函数. 已知当 $x\in[0,2]$ 时，

$f(x)=x^2-2x$，求 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上的解析式.

8．讨论下列函数在其定义域内的有界性.

（1）$\sqrt{x}$；　　（2）$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$；　　（3）$x\cos x$.

II 参考答案

1．（1）**【答案】** $\{x \mid x \geq 0\}$.

【解析】 基本初等函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \geq 0\}$.

（2）**【答案】** $\left\{x \middle| x \neq -1+\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$.

【解析】 基本初等函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$，故函数 $\tan(x+1)$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x \neq -1+\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$.

（3）**【答案】** $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$.

【解析】 基本初等函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$，故函数 $\arcsin(x-3)$ 的定义域为 $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$.

（4）**【答案】** $\{x \mid x>1\}$.

【解析】 初等函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq \pm 1\}$，初等函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $\{x \mid x \geq 1\}$，两者取交集 $\{x \mid x>1\}$.

（5）**【答案】** $\{x \mid x<-1 \text{或} x \geq 0\}$.

【解析】 分段函数 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$ 的定义域为 $\{x \mid [x+1] \neq 0\}$，分段函数 $[x+1] \neq 0$ 解得 $\{x \mid x<-1 \text{或} x \geq 0\}$.

2．**【答案】** $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, (x \leq 0)$.

【解析】 由 $f[\varphi(x)]=1-x$ 可得 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，所以 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，$x \leq 0$.

又 $\varphi(x)\ge 0$，则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},(x\le 0)$.

3.【答案】$f(x)=x^2-2$.

【解析】令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$，即 $f(t)=t^2-2$.

4.【答案】$f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\le|x|<2,\\ 1, & |x|<1\text{或}|x|\ge 2,\end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0,\\ -1, & x\ge 0.\end{cases}$

【解析】当 $g(x)<0$ 时，$f[g(x)]=0$，此时 $1\le|x|<2$；

当 $g(x)\ge 0$ 时，$f[g(x)]=1$，此时 $|x|<1$ 或 $|x|\ge 2$.

当 $x<0$ 时，$|f(x)|=0$，则 $g[f(x)]=2-f^2(x)=2$；

当 $x\ge 0$ 时，$|f(x)|=1$，则 $g[f(x)]=|f(x)|-2=-1$.

5.【答案】$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\le x\le 16,\\ \dfrac{\ln x}{\ln 2}, & x>16.\end{cases}$

【解析】当 $x<1$ 时，$y<1$；当 $1\le x\le 4$ 时，$1\le y\le 16$；当 $x>4$ 时，$y>16$；故反函数为：当 $x<1$ 时，$f^{-1}(x)=x$；当 $1\le x\le 16$ 时，$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$；当 $x>16$ 时，$f^{-1}(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

6.【答案】（A）.

【解析】$f(-x)=(-x)\tan(-x)e^{\cos(-x)}=x\tan xe^{\cos x}=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

7.【答案】$f(x)=-x^2+6x-8$.

【解析】$f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$. 当 $x\in[-2,0]$ 时，$-x\in[0,2]$，

$f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，则 $f(x)=-x^2-2x$.又 $f(x)$ 周期为4，当

$x\in[2,4]$时，$x-4\in[-2,0]$，故$f(x)=f(x-4)=-(x-4)^2-2(x-4)=-x^2+6x-8$.

8.（1）【答案】无界.

【解析】当$x\to+\infty$时，$\sqrt{x}\to+\infty$.

（2）【答案】无界.

【解析】取$x=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$k$为整数. 当$k\to+\infty$时，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\to+\infty$.

（3）【答案】无界.

【解析】取$x=2k\pi$，k为整数. 当$k\to+\infty$时，$x\cos x=2k\pi\to+\infty$.

模块二　极限

Ⅰ经典习题

题型一、极限定义

1．设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ 0, & x=0\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 为（　　）

（A）不存在　　（B）-1　　（C）0　　（D）1

题型二、四则运算

2．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{10}}{(2x^3+1)^2(x^2+1)^2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2^{x+1}+x^{10}-\sin x\cdot\ln x)^2}{2^x(2^{x+1}+5x^8)}$；

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x+(x^{10}+\ln|x|+1)^{10}}{2^{1+2x}+x^{100}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$.

题型三、等价无穷小替换

3．当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $\sin 2x-2\sin x$ 是 x^2 的（　　）无穷小.

（A）高阶　　（B）低阶　　（C）等价　　（D）同阶但非等价

4．当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是 $x\sin x^n$ 的高阶无穷小，而 $x\sin x^n$ 是 $e^{x^2}-1$ 的高阶无穷小，则正整数 n 等于（　　）

（A） 1　　（B）　　（C）3　　（D） 4

5．当 $x\to 0$ 时，下列阶数最高的函数是（　）

（A）$2x-x^5$ （B）x^2-x^3 （C）$x+x^4$ （D）$\frac{1}{2}x$

6．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$； （2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})\arctan\frac{x}{2}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x}\arcsin\dfrac{x^2+1}{(2x+1)^3}$； （4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2+1}-e}{\ln\cos x}$； （6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\ln(1-x^3)}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{\frac{1+2x}{2+x}}-1}{\ln x}$； （8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$； （10）$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

题型四、洛必达法则

7．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$； （2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2x}{\arcsin\left(\frac{x}{6}\right)\ln(1+x^2)}$； （4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\cos x}{\arctan x-x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{1-\sqrt[3]{1-\sin^2 x}}$； （6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

8．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x^2}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$；

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+\sin x}-x)$.

9．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$__________.

10．.求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{e^x-1}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}-e^{-1}}{x}$.

题型五、泰勒公式

11．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan x}{\tan\sin x-\sin x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)+2\cos x-2}{(x-\tan x)\ln(1+x)}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{e^{x-\ln(1+x)}-1}}$.

12．设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-2f(x)+f(0)}{x^2}$.

13．设 $f(x)$ 二阶可导，$f''(x_0)\neq 0$，证明：当 $h\to 0$ 时，$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)$

是 h^2 的同阶无穷小.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$____________.

15. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有（　　）

（A） $b=4d$　　（B） $b=-4d$　　（C） $a=4c$　　（D） $a=-4c$

16. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　　）

（A） $a=1$，$b=-\dfrac{5}{2}$　　（B） $a=0$，$b=-2$

（C） $a=0$，$b=-\dfrac{5}{2}$　　（D） $a=1$，$b=-2$

题型六、数列极限的计算

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n+1}{n^2+a^2}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

18. 设 $x_n\le a\le y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\{x_n\},\{y_n\}$（　　）

（A）都收敛于 a　　（B）都收敛，但不一定收敛于 a

（C）可能收敛，也可能发散　　（D）都发散

19. 求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2^{2x}+x^{10}+\ln|x|}{4^x+x^{20}+10000!}(\sin^2 x+\cos 2x)$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\frac{1}{x}+10}{x^2e^{\frac{1}{x}}-x}$.

20. 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$（　　）

（A） a　　（B） a^{-1}　　（C） b　　（D） b^{-1}

21. 求下列极限.

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n^3+2}+\dfrac{4n}{n^3+4}+\cdots+\dfrac{2n^2}{n^3+2n}\right)$.

22．已知 $x_1=\sqrt{a},x_{n+1}=\sqrt{a+x_n},n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

23．设 $x_1=2,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n},n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

24．设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n},n=1,2,3\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$__________.

25．证明：

设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，若对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

Ⅱ 参考答案

题型一、极限定义

1.【答案】(A).

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x-1)=-1$；$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+x^2)=1$，左右极限不相等，

则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

题型二、四则运算

2.(1)【答案】$\frac{1}{4}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^{10}}{(2x^3+1)^2(x^2+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{(2x^3)^2(x^2)^2}=\frac{1}{4}$.

(2)【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$.

(3)【答案】2.

【解析】该题极限式类型为$\frac{\infty}{\infty}$，所以可采用抓大头的方法，先抓函数类型（当$x\to+\infty$时，指数函数≫幂函数≫对数函数），再抓高次，因此，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^{x+1}+x^{10}-\sin x\cdot\ln x)^2}{2^x(2^{x+1}+5x^8)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^{x+1})^2}{2^x(2^{x+1})}=2.$$

(4)【答案】1.

【解析】当 $x\to-\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}4^x=\lim\limits_{x\to-\infty}2^{1+2x}=0$，因此，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+(x^{10}+\ln|x|+1)^{10}}{2^{1+2x}+x^{100}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{100}}{x^{100}}=1.$$

（5）【答案】$-\frac{\pi}{8}$.

【解析】分析题目易得 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{\pi}{4}\neq 0$，所以应用极限四则运算法则

得 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)\cdot\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x-x}=-\frac{\pi}{8}.$$

题型三、等价无穷小替换

3.【答案】（A）.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^3}{x^2}=0$，故当 $x\to0$ 时，无穷小量 $\sin 2x-2\sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小.

4.【答案】（B）.

【解析】当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，

故 $2<n+1<4$，因此，正整数 n 等于 2.

5.【答案】（B）.

【解析】由（A）$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-x^5}{x}=2$，（C）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+x^4}{x}=1$，（D）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$，（B）

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{x}=0$，则 x^2-x^3 阶数最高，故选（B）.

6.（1）【答案】6.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\dfrac{1}{3}x^2\cdot\dfrac{1}{2}\sin x}=6$.

（2）【答案】1.

【解析】

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})\arctan\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1+\cos x-1}}{(1-\cos\sqrt{x})\arctan\dfrac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{1}{2}(\cos x-1)}{\dfrac{(\sqrt{x})^2}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x^2}{4}}{\dfrac{(\sqrt{x})^2}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}=1.$$

（3）【答案】$\dfrac{1}{8}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x}\arcsin\dfrac{x^2+1}{(2x+1)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x}\cdot\dfrac{x^2+1}{(2x+1)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x}\cdot\dfrac{x^2}{(2x)^3}=\dfrac{1}{8}$.

（4）【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

（5）【答案】$-2e$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2+1}-e}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e(e^{x^2}-1)}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e\cdot x^2}{-\dfrac{1}{2}x^2}=-2e$.

（6）【答案】$-\dfrac{1}{2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\ln(1-x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{-x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{-x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^3}{-x^3}=-\dfrac{1}{2}$.

（7）【答案】$\frac{1}{6}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{\frac{1+2x}{2+x}}-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{1+\frac{x-1}{2+x}}-1}{\ln(1+x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2+x}}{x-1}=\frac{1}{6}$.

（8）【答案】$-\frac{1}{12}$.

【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x-1)^{\frac{1}{3}}-1}{\ln\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}\cdot(\cos x-1)}{\frac{2x^2}{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{\frac{2x^2}{1-x^2}}=-\frac{1}{12}.$$

（9）【答案】$\frac{3}{2}$.

【解析】分析题目易得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\neq0$，且当 $x\to0$ 时有等价无穷小替换 $\ln(1+x)\sim x$，所以应用极限四则运算法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}\right),$$

其中由“无穷小量 $\times$ 有界量 $=$无穷小量”可得 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$，从而原式 $=\frac{3}{2}$.

（10）【答案】2.

【解析】分析题目易得 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 这两个极限值均存在，故可以使用极限的四则运算法则，得

$$\lim_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{3}{x}-\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x}=2.$$

题型四、洛必达法则

7.（1）【答案】2.

【解析】法一：使用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1}=2$.

法二：使用等价无穷小替换：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$.

（2）【答案】1.

【解析】法一：使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sec x\tan x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin x(\sec^2 x+1)}=1;$$

法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos x(\sec^2 x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos x\tan^2 x}=1$.

（3）【答案】-8.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2x}{\arcsin\left(\dfrac{x}{6}\right)\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2x}{\dfrac{x}{6}\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\cos 2x-1)}{\dfrac{1}{2}x^2}=-8$.

（4）【答案】$\dfrac{3}{2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\cos x}{\arctan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\cos x-1)}{\arctan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^3}{\arctan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{3}{2}x^2}{\dfrac{1}{1+x^2}-1}=\dfrac{3}{2}$.

（5）【答案】3.

【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{1-\sqrt[3]{1-\sin^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{\frac{1}{3}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x-1}{\frac{2}{3}x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\cos x}{\frac{2}{3}}=3.$$

（6）【答案】$\frac{1}{6}$.

【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

8.（1）【答案】∞.

【解析】令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0}xe^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^{t^2}}{t}=\infty$.

（2）【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}$.

（3）【答案】-1.

【解析】此题括号中极限为$\infty-\infty$型且含有分式，可以先进行通分，变为$\frac{0}{0}$的极限类型，然后再进行化简计算.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{1-x^3}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$$

（4）【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】该题极限式类型为$\frac{\infty}{\infty}$，考查的是抓大头的方法.当 $x\to+\infty$ 时，$x\gg\sin x$，函数类型相同时抓高次.得，

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+\sin x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+x+\sin x}+x}=\frac{1}{2}.$$

9.【答案】0.

【解析】由等价无穷小替换 $1-\sqrt{1-x^2}=-[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1]\sim-\frac{1}{2}(-x^2)=\frac{1}{2}x^2$ 得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}$. 该极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，再使用洛必达法则，

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=0$.

10.（1）【答案】1.

【解析】分析题目可知，该极限为 ∞^0 型，故先用对数恒等式对其变形，得

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(\ln x)}=1$.

（2）【答案】e.

【解析】分析得到该极限为 1^∞ 型，应用公式 $\lim\limits_{x\to0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}[u(x)-1]\cdot v(x)}$ 解题.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\cos x-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x}=1$，故

$\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^1=e$.

（3）【答案】$-\dfrac{1}{4}$.

【解析】本题中，幂指函数作为极限式的一部分出现，所以首先对 $\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}$ 应用对数恒等式变形得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}-1}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\dfrac{\cos x-1}{2}}{2x^3}=-\dfrac{1}{4}$.

（4）【答案】$-\dfrac{1}{2e}$.

【解析】此题中，幂指函数作为极限式的一部分出现，只能用对数恒等式进行变形.因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}-e^{-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)}-e^{-1}}{x}=e^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1-x)}{x}+1}-1}{x}=\frac{1}{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}=-\frac{1}{2e}.$$

题型五、泰勒公式

11.（1）【答案】$-\frac{1}{2}$.

【解析】本题中将 $\arcsin x$，$\sin x$，$\arctan x$ 和 $\tan x$ 分别按泰勒公式展开后，第一项被抵消；由多退少补的原则，需展开至第二项.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]}{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}=-\frac{1}{2}.$$

（2）【答案】$-\frac{1}{12}$.

【解析】本题中将 $\cos x$ 和 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 分别按泰勒公式展开后，二次被抵消；由多退少补的原则，需展开至四次.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

（3）【答案】$\frac{3}{2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}\right)$

本题中$\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}},\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}$按泰勒公式展开后，第一项被抵消；由多退少补的原则，需展开至第二项.

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{3}{2}.$$

（4）【答案】2.

【解析】本题中$\tan(\tan x)$，$\sin(\sin x)$，$\tan x$和$\sin x$分别按泰勒公式展开后，一次项被抵消；由多退少补的原则，均需展开至三次项.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\frac{1}{3}\tan^3x-\sin x+\frac{1}{6}\sin^3x+o(x^3)}{x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^3-x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3}=2.$$

（5）【答案】$\frac{1}{6}$.

【解析】本题中将$\cos x$，$e^{-\frac{x^2}{2}}$和$\ln(1-x)$分别按泰勒公式展开后，分母留下四次项；由上下同阶原则，分子也展开至四次项.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+o(x^4)}{x^2[x-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=\frac{1}{6}.$$

（6）【答案】$\frac{2}{3}$.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x(x-\frac{1}{6}x^3-x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3))}{x^4}=\frac{2}{3}.$$

（7）【答案】$-\frac{1}{2}$.

【解析】本题可以采用等价无穷小替换公式 $x\to 0, x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，$x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$ 的广义化形式.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan x}{\tan\sin x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}(\tan x)^3}{\frac{1}{3}(\sin x)^3}=-\frac{1}{2}.$$

（8）【答案】$\frac{5}{4}$.

【解析】本题中 $\ln(1+x^2)$ 和 $\cos x$ 分别按泰勒公式展开后，常数项和平方项均被抵消，由多退少补的原则，二者需展开至四次项.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)+2\cos x-2}{(x-\tan x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2-\frac{(x^2)^2}{2}+o(x^4)\right]+2\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{(x^2)^2}{4!}+o(x^4)\right]-2}{-\frac{1}{3}x^3\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5x^4}{12}+o(x^4)}{-\frac{1}{3}x^4}=\frac{5}{4}.$$

（9）【答案】e^{-1}.

【解析】该题目极限为 1^{∞} 型，应用公式 $\lim\limits_{x\to 0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[u(x)-1]\cdot v(x)}$ 解题，对 $\ln(1-x)$ 进行泰勒公式展开至二次项.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{e^{x-\ln(1+x)}-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^{x-\ln(1+x)}-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}}=e^{-1}.$$

12.【答案】 $f''(0)$.

【解析】由泰勒公式，将函数 $f(x)$ 和 $f(2x)$ 分别在 $x=0$ 处展开，可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

$$f(2x)=f(0)+f'(0)\cdot 2x+\frac{f''(0)}{2}(2x)^2+o(x^2),$$

则有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-2f(x)+f(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=f''(0)$.

13.【证明】由泰勒公式，将函数 $f(x_0+h)$ 和 $f(x_0-h)$ 分别在 $x=x_0$ 处展开，可得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2),$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\frac{f''(x_0)}{2}(-h)^2+o(h^2),$$

从而 $f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)h+\dfrac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)$

$+f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(-h)^2+o(h^2)-2f(x_0)=f''(x_0)h^2+o(h^2)$，又

$f''(x_0)\neq 0$，因此，$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)$ 是 h^2 的同阶无穷小.原题得证.

14.【答案】$\dfrac{1}{6}$.

【解析】首先对原极限式进行变形，得

$$\lim_{x\to 0}\cot x\cdot\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x};$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，由极限四则运算法则及无穷小替换公式 $x\to 0$， $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，

可得，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

15.【答案】（D）.

【解析】题中各函数的泰勒公式需要展开到 x 的二次项，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{a[x+o(x)]+b\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]}{c[-2x+o(x)]+d[1-(1-x^2+o(x^2))]}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\frac{b}{2}x^2+o(x^2)}{-2cx+dx^2+o(x^2)}=2$， 因 $a^2+c^2\neq 0$，则原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+o(x)}{-2cx+o(x)}=2$.

上式成立要求 $\dfrac{a}{-2c}=2$，即 $a=-4c$.

16.【答案】（A）.

【解析】题中所给的函数中， x 的最高次为 2 次，所以根据泰勒公式有 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.由题可得，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-\frac{1+2b}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=2,$$

上式成立要求 $1-a=0$， $-\dfrac{1+2b}{2}=2$，解得 $a=1$， $b=-\dfrac{5}{2}$.

题型六、数列极限的计算

17.【答案】1.

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n+1}{n^2+a^2}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^n+1}}{\sqrt[n]{n^2+a^2}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+a^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln(n^2+a^2)}}\cdot 1=1.$$

18.【答案】（A）.

【解析】由 $x_n\le a\le y_n$ 得 $0\le a-x_n\le y_n-x_n$；又 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}(a-x_n)=0$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，由此得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.故应选（A）.

19．本题考查夹逼定理的重要推论：无穷小量 × 有界量=无穷小量.

（1）【答案】 0 .

【解析】当 $x\to-\infty$ 时可使用抓大头的方法，可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{2x}+x^{10}+\ln|x|}{4^x+x^{20}+10000!}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{10}}{x^{20}}=0$；

而 $\sin^2x+\cos 2x$ 有界，故由“无穷小量 × 有界量 = 无穷小量”可知，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{2x}+x^{10}+\ln|x|}{4^x+x^{20}+10000!}(\sin^2x+\cos 2x)=0.$$

（2）【答案】 0 .

【解析】分析题目可知 $\lim\limits_{x\to0^+}x^2e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2e^{\frac{1}{x}}-x}=0$；又因为 $\sin\dfrac{1}{x}+10$ 有界，

故由“无穷小量 × 有界量=无穷小量”可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin\frac{1}{x}+10}{x^2e^{\frac{1}{x}}-x}=0$.

20.【答案】（B）.

【解析】由 $0<a<b$ 得 $0<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$.利用结论：若 $a_1,a_2,\cdots a_m>0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}$ 可得，

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\max\{a^{-1},b^{-1}\}=\dfrac{1}{a}$.

21.（1）【答案】 1.

【解析】对原式进行放缩得，

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+2}},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=1$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)=1$.

（2）【答案】1.

【解析】对原式进行放缩得，

$$\frac{2n}{n^3+2}+\frac{4n}{n^3+4}+\frac{6n}{n^3+6}+\ldots+\frac{2n^2}{n^3+2n} \le \frac{2n+4n+\ldots+2n^2}{n^3+2}=\frac{n^2(n+1)}{n^3+2},$$

$$\frac{2n}{n^3+2}+\frac{4n}{n^3+4}+\frac{6n}{n^3+6}+\ldots+\frac{2n^2}{n^3+2n} \ge \frac{2n+4n+\ldots+2n^2}{n^3+n}=\frac{n^2(n+1)}{n^3+2n},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)}{n^3+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)}{n^3+2n}=1$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n^3+2}+\frac{4n}{n^3+4}+\frac{6n}{n^3+6}+\ldots+\frac{2n^2}{n^3+2n}\right)=1$.

22.【答案】$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

【解析】先证 $\{x_n\}$ 有界，显然 $x_1=\sqrt{a}<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，设 $x_k<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，则

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}=\frac{\sqrt{4a+2+2\sqrt{1+4a}}}{2}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{1+4a})^2}}{2}$$

$=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，由数学归纳法可知 $\{x_n\}$ 有上界为 $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，

再证 $\{x_n\}$ 单调性，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{a+x_n}-x_n=\frac{a+x_n-x_n^2}{\sqrt{a+x_n}+x_n}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}-x_n\right)\left(\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}+x_n\right)}{\sqrt{a+x_n}+x_n}>0,$$

$n=1,2,\cdots$，则 $\{x_n\}$ 单调增加，

综上，$\{x_n\}$ 单调增加且有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则对递推公式左右两端同时取极限可得 $l=\sqrt{a+l}$，解得 $l=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 或 $l=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$，因为 $\{x_n\}$ 每一项大于零，则 $l=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ 舍去.所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

23.【答案】$1+\sqrt{2}$.

【解析】此题考查单调有界收敛定理.先证明该数列收敛，再求极限值.

$$x_{n+2}=2+\frac{1}{x_{n+1}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{x_n}}=2+\frac{x_n}{2x_n+1},n=1,2,3\cdots,$$

$$x_{n+2}-x_n=2+\frac{x_n}{2x_n+1}-x_n=\frac{2(2x_n+1-x_n^2)}{2x_n+1}=\frac{2(x_n-1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}-x_n)}{2x_n+1},$$

$x_1=2<1+\sqrt{2}$，设 $x_k<1+\sqrt{2},x_{k+2}=2+\dfrac{x_k}{2x_k+1}<1+\sqrt{2}$，故 $x_{n+2}-x_n>0$，奇数项单调递增有上界，奇数项极限存在，

$x_2=2+\dfrac{1}{2}>1+\sqrt{2}$，设 $x_k>1+\sqrt{2},x_{k+2}=2+\dfrac{x_k}{2x_k+1}>1+\sqrt{2}$，故 $x_{n+2}-x_n<0$，偶数项单调递减有下界，偶数项极限存在，

设奇数项极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对递推公式左右两端同时取极限可得 $a=2+\dfrac{1}{a}$，解得

$a=1\pm\sqrt{2}$，每一项均大于0，$1-\sqrt{2}$舍，则奇数项极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$，

设偶数项极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对递推公式左右两端同时取极限可得$a=2+\dfrac{1}{a}$，解得

$a=1\pm\sqrt{2}$，每一项均大于0，$1-\sqrt{2}$舍，则偶数项极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$，

奇数项偶数项极限存在且相同，则数列极限存在且也为$1+\sqrt{2}$.

24.【答案】$\sqrt{3}$.

【解析】首先证有界性，$a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}<3$，故$0<a_{n+1}<3$．下证单调性．

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}-\dfrac{3(1+a_{n-1})}{3+a_{n-1}}=\dfrac{6(a_n-a_{n-1})}{(3+a_n)(3+a_{n-1})}$，又因$(3+a_n)(3+a_{n-1})>0$，因此$a_{n+1}-a_n$与$a_n-a_{n-1}$同号，说明数列$\{a_n\}$具有单调性. 根据单调有界收敛定理可得，数列$\{a_n\}$有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对方程$a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$两边同时取极限得，

$a=\dfrac{3(1+a)}{3+a}$，解得$a=\sqrt{3}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$.

25.【证明】设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$，

先证数列$\{a_n\}$单调递减，

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

因$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，所以$\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<0$，得到$a_{n+1}<a_n$；

再证明数列$\{a_n\}$有下界，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$$

得到数列$\{a_n\}$有下界，利用单调递减数列且有下界得到数列$\{a_n\}$收敛.

模块三　连续

Ⅰ经典习题

题型一、连续性

1．下面哪个函数在其定义域内不连续（　　）

（A）$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0 \\ x-1, & x<0 \end{cases}$　　（B）$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>1 \\ x^2, & x\le 1 \end{cases}$

（C）$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$　　（D）$f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x>0 \\ x^2+1, & x\le 0 \end{cases}$

2．讨论 $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & |x|>1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \end{cases}$ 在 $|x|=1$ 的连续性.

3．补充定义 $f(0)$ 使得函数 $f(x)=(1+mx)^{\frac{n}{x}}$ 在 $x=0$ 连续.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 R 上连续，求 a,b 应该满足的关系.

5．设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}, & x<0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{a+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，求 a,b.

6. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，则常数 a,b 应满足（　　）

（A）$a<0,b<0$　　（B）$a>0,b>0$

（C）$a\le 0,b>0$　　（D）$a\ge 0,b<0$

7．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处（　　）

（A）不连续　　（B）连续，但不可导

（C）可导，但导数不连续　　（D）可导，且导数连续

题型二、间断点类型

8．设函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）无穷间断点　　（D）振荡间断点

9．设函数 $f(x)=[x]\sin\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）无穷间断点　　（D）振荡间断点

10．找出下列函数所有的间断点，并说明其类型.

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$；　　（2）$f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

11．求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x\leq 0\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0\end{cases}$ 的间断点，并指出其类型.

12．函数 $f(x)=\dfrac{(e^x+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点为__________.

13．函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\pi x}{1+(2x)^{2n}}$ 的间断点的个数为（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

14．函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$ 的第一类间断点是__________.

15．函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　）

（A）连续　（B）有可去间断点　（C）有跳跃间断点　（D）有无穷间断点

题型三、闭区间上连续函数的性质

16．证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

17． $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，满足对任意 $x\in[0,2]$ 有 $f(x)\in(0,2)$，证明：$\exists\xi\in(0,2)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

18．设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 存在相等的最大值，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

II 参考答案

题型一、连续性

1.【答案】(D).

【解析】选项(A):当$x>0$时,$f(x)$为初等函数,连续;当$x<0$时,亦然.故$f(x)$在其定义域内连续.

选项(B):当$x>1$时,$f(x)$为初等函数,连续;当$x<1$时,亦然.由于$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$,$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)=1$,所以

$f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$,故$f(x)$在其定义域内连续.

选项(C):$f(x)$为初等函数,初等函数在其定义域内连续.

选项(D):由于$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)=0$,所以

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,故$f(x)$在其定义域内不连续.

2.【答案】$f(x)$在$x=1$连续;$f(x)$在$x=-1$不连续且$x=-1$为跳跃间断点.

【解析】由于$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$,$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}|x-1|=0$,则

$f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$,故$f(x)$在$x=1$连续;

由于$\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}|x-1|=2$,$\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$,则

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x),\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$存在但不相等,$f(x)$在$x=-1$不连续且$x=-1$为跳跃间断点.

3.【答案】e^{mn}.

【解析】$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{n}{x}\cdot mx}=e^{mn}$.

4.【答案】$a=b$.

【解析】$f(x)$在R上连续,只需保证在$x=0$连续即可,由于

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a$， $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=b$，由

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ 可得 $a=b$.

5.【答案】$a=b=0$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=a$，

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，则 $a=b=0$.

6.【答案】（D）.

【解析】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$f(x)$ 要有意义，即 $a+e^{bx}$ 恒不为 0，又因 $e^{bx}>0$

则 $a\geq 0$.又 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0$，所以当 $x\to -\infty$ 时，$a+e^{bx}$ 极限应为无穷，则 $b<0$.

7.【答案】（A）.

【解析】观察题目发现 $x=1$ 为分段函数 $y=\left|x^2-1\right|$ 的分段点，且在分段点左右两边函

数表达式不同，因此求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x-1}$ 应分左、右极限进行讨论.

右极限 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，

左极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$，

故 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

再由连续与可导的关系“可导必连续”，所以不连续一定不可导，故（C）（D）选项错误.

题型二、间断点类型

8.【答案】（B）.

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$， $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}=1$，

则 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

9.【答案】（D）.

【解析】$[x]$ 为取整函数，表示不超过 x 的最大整数，当 $x\in(0,1)$ 时，$[x]=0$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$[x]=-1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}[x]\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$，极限不存在.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}[x]\sin\dfrac{1}{x} = 0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

10.（1）【答案】 $f(x)$ 的可去间断点为 $x=1$.

【解析】可疑点 $x=1$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{3}$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

（2）【答案】 $f(x)$ 的可去间断点为 $x=0$.

【解析】可疑点 $x=0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^2$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

11.【答案】振荡间断点为 $x=0$，可去间断点为 $x=-1$，无穷间断点为 $x=-2,-3,-4,\cdots$.

【解析】首先考虑分段函数的分段点 $x=0$.

左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\pi x}(x^2-1) = -\dfrac{1}{\pi}$；

右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2}\right]$ 不存在且不为 ∞，因此 $x=0$ 为振荡间断点.

其次考虑 $x<0$ 部分，

函数 $\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$ 可能的间断点为 $\sin\pi x=0$ 的解，即 $x=-k, k=1,2,3,\cdots$.

$\lim\limits_{x\to -k} f(x)=\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{x(x^2-1)}{\sin\pi x}$，注意当$-k\neq -1$时，极限式中分子会趋于非零常数，而分母趋于零，因此函数趋于无穷，所以$x=-2,-3,-4,\cdots$为函数的无穷间断点.而当$-k=-1$时，由洛必达法则可得$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-1}{\pi\cos\pi x}=-\dfrac{2}{\pi}$.但$x=-1$时函数本身无定义，因此$x=-1$为函数的可去间断点.

最后考虑$x>0$部分，此时函数$\ln(1+x)$和$\sin\dfrac{1}{x^2}$均无间断点，因此函数连续.

综上，函数有振荡间断点$x=0$，可去间断点$x=-1$以及无穷间断点$x=-2,-3,-4,\cdots$.

12.【答案】$x=0$.

【解析】显然$f(x)$为初等函数，故可能的间断点为不在其定义域内的点.在$[-\pi,\pi]$区间内，不在其定义域内的点有$x=0$、$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$和$x=1$.接下来逐一判断它们是否为第一类间断点.

$\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} f(x)=\infty$；$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{(1+e)\tan x}{ex}=-\dfrac{1+e}{e}$.

根据间断点的分类可知，$x=0$为第一类间断点.

13.【答案】（B）.

【解析】易得$f(x)$的表达式为$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\pi x}{1+(2x)^{2n}}=\begin{cases}\sin\pi x, & |x|<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}, & x=-\dfrac{1}{2}\\ 0, & |x|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

由于$f(x)$在其定义域的每一段上均为初等函数且连续，因此$f(x)$可能的间断点为

$x=\pm\frac{1}{2}$.

下面逐一进行判断：

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=1$；$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=0$.

可以看出，在 $x=\pm\frac{1}{2}$ 左右两侧极限均存在但不相等，所以它们均为跳跃间断点.

14.【答案】$x=\pm1$.

【解析】$f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -x, & |x|>1 \end{cases}$，则可能的间断点为 $x=\pm1$，且 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-1,\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1$，则 $x=1$ 为跳跃间断点，故为第一类间断点；$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-1,\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=1$，则 $x=-1$ 为跳跃间断点，故为第一类间断点；故第一类间断点为 $x=\pm1$.

15.【答案】（B）.

【解析】$f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{x}\cdot\frac{x^2}{t}}=e^x$，但是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，而有上述可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在，所以是可去间断点.

题型三、闭区间上连续函数的性质

16.【证明】令 $f(x)=\sin x+x+1$，$f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，

且有 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}>0$.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，由零点存在定理可知，存在 $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(\xi)=0$.

即方程$\sin x+x+1=0$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

17.【证明】令$F(x)=f(x)-x$，$F(x)$在闭区间$[0,2]$上连续，且有$F(0)=f(0)-0>0$，$F(2)=f(2)-2<0$，$F(0)\cdot F(2)<0$，由零点存在定理可知，$\exists\xi\in(0,2)$，使得$F(\xi)=0$，即$\exists\xi\in(0,2)$，使得$f(\xi)=\xi$.

18.【证明】令$F(x)=f(x)-g(x)$，$f(x),g(x)$在开区间(a,b)内相等的最大值为M，

当$f(x),g(x)$在(a,b)内的相同点$\xi_1\in(a,b)$取最大值时，则$F(\xi_1)=f(\xi_1)-g(\xi_1)=M-M=0$，

当$f(x),g(x)$在(a,b)内的不同点$\eta_1,\eta_2\in(a,b)$分别取最大值时，则$F(\eta_1)=f(\eta_1)-g(\eta_1)=M-g(\eta_1)>0$，$F(\eta_2)=f(\eta_2)-g(\eta_2)=f(\eta_2)-M<0$

因为$F(\eta_1)\cdot F(\eta_2)<0$，由零点存在定理可知，存在$\xi_2\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得$F(\xi_2)=0$，

综上，$\exists\xi\in(a,b)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=g(\xi)$.

模块四　可导与可微

Ⅰ经典习题

题型一、导数定义

1．利用定义计算下列各函数在指定点处的导数.

（1）$f(x)=x^3,x\in R$；　　（2）$f(x)=\sqrt{x},(x>0)$；

（3）$f(x)=\cos x,x=0$；　　（4）$f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$.

2．求下列函数在 $x=0$ 处的左右导数，并判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

（1）$f(x)=|\sin x|$；　　（2）$f(x)=\sqrt{1-\cos x}$；

（3）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ \dfrac{e^{-x}+1}{2}, & x\leq 0\end{cases}$；　　（4）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{2+e^{-\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

题型二、可导与连续

3．已知 $f(x)=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $a>0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导　　（D）可导

4．已知 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导　　（D）可导

5．已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b.

6．已知 $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x>0 \\ ax^2, & x\le 0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）不连续　　（B）左右导数都存在但不相等

（C）可导　　（D）可导性与 a 的取值有关

7．函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0 \\ ae^x+b, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b.

8．函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}, & x<0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

Ⅱ参考答案

题型一、导数定义

1.（1）【答案】$3x^2$.

【解析】设x_0为R上任意一点，$f(x)$在点x_0处的导数为：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-{x_0}^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+{x_0}^2)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+{x_0}^2)=3{x_0}^2,$$ 由

x_0的任意性可得，$f(x)$在点x处的导数为$3x^2$.

（2）【答案】$\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

【解析】设x_0为$x>0$内任意一点，$f(x)$在点x_0处的导数为：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

由x_0的任意性可得，$f(x)$在点x处的导数为$\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

（3）【答案】0.

【解析】$f(x)$在$x=0$处的导数为：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$，则$f(x)$在$x=0$处的导数为$0$.

（4）【答案】$-\frac{1}{x^2}$.

【解析】根据导数的定义有：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}$.

2.（1）【答案】$f'_-(0)=-1$，$f'_+(0)=1$；函数$f(x)$在$x=0$处不可导.

【解析】左导数为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$；

右导数为 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

左右导数不相等，从而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

（2）【答案】 $f'_-(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $f'_+(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【解析】左导数为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

右导数为 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

左右导数不相等，从而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

（3）【答案】 $f'_-(0)=f'_+(0)=-\dfrac{1}{2}$；函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【解析】左导数为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{e^{-x}+1}{2}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-x}{x}=-\dfrac{1}{2}$；

右导数为 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

左右导数相等，从而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（4）【答案】 $f'_-(0)=0$， $f'_+(0)=\dfrac{1}{2}$；函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【解析】左导数为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\arctan x}{2+e^{-\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{1}{2+e^{-\frac{1}{x}}}=0\text{，其中}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$；

右导数为 $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{\arctan x}{2+e^{-\frac{1}{x}}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan x}{x} \cdot \dfrac{1}{2+e^{-\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{2}$，其中

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

左右导数不相等，从而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

题型二、可导与连续

3.【答案】（D）.

【解析】因为 $a>0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{1+a}=0$. 当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 间振荡，但是为有界量. 由无穷小量×有界量＝无穷小量，可知 $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{1+a}\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右导数分别为：

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(-|x|^a \sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} |x|^a \sin\frac{1}{x} = 0,$$

$f'_-(0)=f'_+(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故选（D）.

4.【答案】（C）.

【解析】由无穷小量×有界量=无穷小量，可知 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数为：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$.当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 间振荡，极限不存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，选（C）.

5.【答案】$a=b=0$.

【解析】因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，首先满足 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

由于左极限 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)=b$；右极限 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2=0$，故 $b=0$.所以

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ ax, & x\le0\end{cases}$. 其次，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，即 $f'_+(0)=f'_-(0)$.

又因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax}{x}=a$；

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{x}=0$，所以 $a=0$.

6.【答案】（B）.

【解析】由于 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}xe^x=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}ax^2=0$，所以

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

左导数为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^2}{x}=0$，

右导数为 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xe^x}{x}=1$，

从而左右导数都存在，但不相等，故选（B）.

7.【答案】$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$.

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，而左极限 $\lim\limits_{x\to0^-}f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}(ae^x+b)=a+b$，右极限

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.故 $a+b=1$，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ ae^x+1-a, & x\le0\end{cases}$.

其次，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，即 $f'_+(0)=f'_-(0)$.

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ae^x-a}{x}=a\text{ ，}$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}\text{，}$$

所以 $a=-\frac{1}{2}$， $b=1-a=\frac{3}{2}$.

8.【答案】 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2\sin x}{x^2}-\dfrac{4(1-\cos x)}{x^3}, & x<0\end{cases}$.

【解析】当 $x>0$ 时， $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$；

当 $x=0$ 时， $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$，

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}$$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2(\cos x-1)}{6x}=0$，所以 $f'(0)=0$；

当 $x<0$ 时， $f'(x)=\dfrac{2\sin x}{x^2}-\dfrac{4(1-\cos x)}{x^3}$.

故 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2\sin x}{x^2}-\dfrac{4(1-\cos x)}{x^3}, & x<0\end{cases}$.

模块五　导数的计算

经典习题

题型一、幂指函数求导

1．设 $y=x+(\cos x)^{\sin^2 x}$，则 $y'=$________.

2．计算下列函数的导数.

（1）$y=\arcsin(x^2)$；

（2）$y=(1+\sin x)^x$；

（3）$y=(x+\cos x)^{\arctan x}+(\ln x)^{\ln x}$；

（4）$y=(\cos x)^x$；

（5）$y=\sin(x^{\sqrt{x}})$.

题型二、隐函数求导

3．设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，则 $dy=$________.

4．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\ln\dfrac{y}{1+x}=0$ 所确定，求 $y'(0)$， $y''(0)$.

5．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

6．设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于1，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

题型三、参数方程求导（*数学一、数学二）

7．对下列参数形式的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

（1）$\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} x = t^2 \sin t \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x = e^{-2t} \cos^2 t \\ y = e^{-2t} \sin^2 t \end{cases}$；（4）$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$.

8．设 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$________.

9．设 $f(t)$ 三阶可导，$f'(t^2) \neq 0, t \neq 0$，且 $\begin{cases} x = f(t^2) \\ y = [tf'(t^2)]^2 \end{cases}$，试求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

题型四、抽象函数求导

10．$y = f\left(\dfrac{x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x) = \arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$（　）

（A）π　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　（D）$\dfrac{\pi}{4}$

11．已知 $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，则 $df(\sqrt{1-x^2}) =$（　）

（A）$-2xdx$　（B）$-\dfrac{2x}{|x|}dx$　（C）$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　（D）$\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

12．设 $y = e^{3u}, u = f(t), t = \ln x$，其中 $f(u)$ 可微，则 $dy =$________.

13．设 $y = y(x)$ 二阶可导，且满足微分方程 $4yy'' - 4(y')^2 + y^2 \ln y = 0$，试作变量代换 $u = \ln y, x = 2t$ 将该方程化为 u 关于 t 的微分方程.

题型五、高阶导数的计算

14．设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

15．设 $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$，则 $y^{(n)}=$________.

16．设 $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}(n\geq 2)$.

17．设 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$，求 $y^{(n)}$.

18．求函数 $f(x)=(x^2+x)\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数，$n\geq 3$.

19．已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 是大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数是（　）

（A）$n![f(x)]^{n+1}$　（B）$n[f(x)]^{n+1}$　（C）$[f(x)]^{2n}$　（D）$n![f(x)]^{2n}$

Ⅱ 参考答案

题型一、初等函数求导

1.【答案】$y'=1+(\cos x)^{\sin^2 x}(2\sin x\cos x\ln\cos x-\sin^2 x\tan x)$.

【解析】由对数恒等式可得 $y=x+e^{\sin^2 x\ln\cos x}$，则

$$y'=1+(\cos x)^{\sin^2 x}(2\sin x\cos x\ln\cos x-\sin^2 x\tan x).$$

2.（1）【答案】$y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

【解析】由复合函数求导法则可得：$y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

（2）【答案】$y'=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\dfrac{x\cdot\cos x}{1+\sin x}\right]$.

【解析】因为 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，所以

$$y'=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cdot\cos x}{1+\sin x}\right].$$

（3）【答案】

$$y'=(x+\cos x)^{\arctan x}\left[\frac{1}{1+x^2}\ln(x+\cos x)+\arctan x\cdot\frac{1-\sin x}{x+\cos x}\right]+(\ln x)^{\ln x}\left[\frac{\ln(\ln x)}{x}+\frac{1}{x}\right].$$

【解析】$y'=[e^{\arctan x\ln(x+\cos x)}+e^{\ln x\ln(\ln x)}]'$

$$=(x+\cos x)^{\arctan x}\left[\frac{1}{1+x^2}\ln(x+\cos x)+\arctan x\cdot\frac{1-\sin x}{x+\cos x}\right]+(\ln x)^{\ln x}\left[\frac{\ln(\ln x)}{x}+\frac{1}{x}\right].$$

（4）【答案】$y'=(\ln\cos x-x\tan x)\cos^x x$.

【解析】 $y'=(\cos^x x)'=(e^{x\ln\cos x})'=(\ln\cos x-x\tan x)\cos^x x\cdot$

（5）【答案】 $y'=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}(x^{\sqrt{x}})\cos(x^{\sqrt{x}})$.

【解析】 $y'=\left[\sin(e^{\sqrt{x}\ln x})\right]'=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}(x^{\sqrt{x}})\cos(x^{\sqrt{x}})$.

题型二、隐函数求导

3.【答案】 $dy=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$.

【解析】两边同时对 x 求导得： $y'\sin x+y\cos x+\sin(x-y)\cdot(1-y')=0$，解得

$y'=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$，从而 $dy=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$.

4.【答案】 $y'(0)=\dfrac{e-1}{e^2},y''(0)=\dfrac{2-4e}{e^3}$.

【解析】对方程分别对 x 求一阶导数和二阶导数，得方程：

$$\begin{cases} e^{xy}(y+xy')+\dfrac{y'(1+x)-y}{y(1+x)}=0 \\ e^{xy}(y+xy')^2+e^{xy}(2y'+xy'')+\dfrac{y''(1+x)y(1+x)-[y'(1+x)-y][y'(1+x)+y]}{y^2(1+x)^2}=0 \end{cases},$$

由原方程可得： $x=0,y=\dfrac{1}{e}$，代入方程组得： $y'(0)=\dfrac{e-1}{e^2},y''(0)=\dfrac{2-4e}{e^3}$.

5.【答案】 $\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.

【解析】方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 两边同时对 x 求导得

$e^{x+y}\cdot(1+y')-\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$，由此解得 $y'=\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.

6.【答案】$\dfrac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}$.

【解析】等式 $y=f(x+y)$ 两边同时对 x 求导，得 $y'=f'(x+y)\cdot(1+y')$ …….(*)，则在(*)式的基础上再对 x 求导，得 $y''=f''(x+y)\cdot(1+y')^2+f'(x+y)\cdot y''$，再将(*)整理得到 $y'=\dfrac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$，由上式可解得 $y''=\dfrac{f''(x+y)\cdot(1+y')^2}{1-f'(x+y)}=\dfrac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}$.

题型三、参数方程求导（*数学一、数学二）

7.（1）【答案】$\dfrac{3bt}{2a}$.

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3bt^2}{2at}=\dfrac{3bt}{2a}$.

（2）【答案】$\dfrac{-t\sin t+2\cos t}{t\cos t+2\sin t}$.

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t\cos t-t^2\sin t}{2t\sin t+t^2\cos t}=\dfrac{-t\sin t+2\cos t}{t\cos t+2\sin t}$.

（3）【答案】$\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}\tan t$.

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-2e^{-2t}\sin^2 t+e^{-2t}2\sin t\cos t}{-2e^{-2t}\cos^2 t-e^{-2t}2\sin t\cos t}=\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}\tan t$.

（4）【答案】$\dfrac{t}{2}$.

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$.

8.【答案】$\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

【解析】本题考查参数方程求导.由参数方程求导公式得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-\sin t}{2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx}=\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

9.【答案】$\frac{dy}{dx}=f'(t^2)+2t^2f''(t^2)$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3f''(t^2)+2t^2f'''(t^2)}{f'(t^2)}$.

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2tf'(t^2)\cdot[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{2tf'(t^2)}=f'(t^2)+2t^2f''(t^2)$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{2tf''(t^2)+4tf''(t^2)+4t^3f'''(t^2)}{2tf'(t^2)}=\frac{3f''(t^2)+2t^2f'''(t^2)}{f'(t^2)}.$$

题型四、抽象函数求导

10.【答案】（C）.

【解析】由复合函数求导法则得$\frac{dy}{dx}=\arctan\left(\frac{x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{8}{(3x+2)^2}$，所以$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\pi}{2}$.

11.【答案】（B）.

【解析】由复合函数求导法则可知$[f(\sqrt{1-x^2})]'=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2x}{|x|}$.结合微分的定义可得$df(\sqrt{1-x^2})=-\frac{2x}{|x|}dx$.

12.【答案】$dy=3e^{3f(\ln x)}f'(\ln x)\frac{1}{x}dx$.

【解析】$dy=3e^{3u}du=3e^{3u}f'(t)dt=3e^{3u}f'(\ln x)\frac{1}{x}dx=3e^{3f(\ln x)}f'(\ln x)\frac{1}{x}dx$.

13.【答案】$\frac{d^2u}{dt^2}+u=0$.

【解析】分析本题函数的复合关系为：$y\to u\to t\to x$.由复合函数链式求导法则$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}$，其中$\frac{dy}{du}=\frac{1}{\frac{du}{dy}}=y$，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}$.

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{du}{dt}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{du}{dt}+y\cdot\dfrac{d^2u}{dt^2}\cdot\dfrac{dt}{dx}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot y\cdot\dfrac{du}{dt}\cdot\dfrac{du}{dt}+\dfrac{1}{2}\cdot y\cdot\dfrac{d^2u}{dt^2}\right)$

$=\dfrac{y}{4}\left[\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2+\dfrac{d^2u}{dt^2}\right]$.将上述结果代入原微分方程，化简即得 $\dfrac{d^2u}{dt^2}+u=0$.

题型五、高阶导数的计算

14.【答案】$\dfrac{2\cdot(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

【解析】首先将函数变形为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}=-\dfrac{x-1}{x+1}=-\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)=\dfrac{2}{x+1}-1$.

由高阶导数公式可得， $y^{(n)}=2\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}=2\cdot(-1)^n n!(x+1)^{-1-n}$.

15.【答案】$\dfrac{-5\cdot(-2)^{n-1}\cdot n!}{(2x+1)^{n+1}}$.

【解析】首先将函数变形为 $y=\dfrac{x+3}{2x+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+1+5}{2x+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{2x+1}$,

由高阶导数公式可得

$$y^{(n)}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)}=\frac{5}{2}\cdot 2^n\cdot(-1)^n n!(2x+1)^{-1-n}=\frac{-5\cdot(-2)^{n-1}\cdot n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

16.【答案】$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\dfrac{8}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right](n\geq 2)$.

【解析】$y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}=x+3+\dfrac{7x-6}{(x-2)(x-1)}=x+3+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

则 $y^{(n)}=(x+3)^{(n)}+[8(x-2)^{-1}]^{(n)}-[(x-1)^{-1}]^{(n)}$

$$=0+(-1)^n\cdot 8\cdot n!(x-2)^{-1-n}-(-1)^n\cdot n!(x-1)^{-1-n}$$

$$=(-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right](n\geq 2).$$

17.【答案】$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left[2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$.

【解析】$y=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\sin 2x=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x)$

$$=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x),$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left[2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

18.【答案】$(-1)^{n-3}\cdot n\cdot(n-3)!(n\geq 3)$.

【解析】由莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$ 得

$$f^{(n)}(x)=C_n^0\cdot(x^2+x)\cdot[\ln(1+x)]^{(n)}+C_n^1\cdot(2x+1)\cdot[\ln(1+x)]^{(n-1)}$$

$$+C_n^2\cdot 2\cdot[\ln(1+x)]^{(n-2)},$$

$$f^{(n)}(x)=(x^2+x)\cdot(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n}+C_n^1\cdot(2x+1)\cdot(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot(1+x)^{-(n-1)}$$

$$+C_n^2\cdot 2\cdot(-1)^{n-3}\cdot(n-3)!\cdot(1+x)^{-(n-2)}$$

将 $x=0$ 代入上式得

$$f^{(n)}(x)=C_n^1\cdot(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!+C_n^2\cdot 2\cdot(-1)^{n-3}\cdot(n-3)!$$

$$=n\cdot(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!+n\cdot(n-1)\cdot(-1)^{n-3}\cdot(n-3)!$$

$$=(-1)^{n-3}\cdot n\cdot(n-3)!(n\geq 3).$$

19.【答案】（A）.

【解析】由题得 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$；

假设 $f^{(k)}(x)=k![f(x)]^{k+1}$，则 $f^{(k+1)}(x)=(k+1)k![f(x)]^k f'(x)=(k+1)![f(x)]^{k+2}$；

由数学归纳法可得，$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$ 对一切大于 2 的正整数 n 均成立.所以选（A）.

模块六 不定积分

Ⅰ经典习题

题型一、基本积分方法

1．算下列不定积分.

（1）$\int\frac{2^x+3^x}{2^x}dx$；（2）$\int e^x(x^2e^{-x}+2)dx$；

（3）$\int\sin^2\frac{x}{2}dx$；（4）$\int\cot^2 xdx$；

（5）$\int\frac{1+x^2+x}{x(1+x^2)}dx$；（6）$\int\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

2．计算下列不定积分.

（1）$\int(7x-9)^{99}dx$；（2）$\int\frac{x^2}{(\cos x^3)^2}dx$；

（3）$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；（4）$\int\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$；

（5）$\int\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$；（6）$\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan^2 x}}dx$.

3．计算下列不定积分.

（1）$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$；（2）$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$；

（3）$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；（4）$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}dx$.

题型二、有理函数的积分

4．计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{x^3}{x+3}dx$；

（2）$\int \frac{2x+1}{x^2+3x-10}dx$；

（3）$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$；

（4）$\int \frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$；

（5）$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$；

（6）$\int \frac{3x-2}{x(x-1)^2}dx$；

（7）$\int \frac{1}{1+x^3}dx$；

（8）$\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$；

（9）$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$；

（10）$\int \frac{1}{x(x^{10}+1)^2}dx$；

（11）$\int \frac{1}{x^4-1}dx$；

（12）$\int \frac{1}{x^4+1}dx$；

（13）$\int \frac{1}{(x^4+1)^2}dx$；

（14）$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$.

题型三、可化为有理函数的积分

5．计算下列不定积分.

（1）$\int \tan^3 x dx$；

（2）$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$；

（3）$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$；

（4）$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$；

（5）$\int \frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}dx$；

（6）$\int \frac{1}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}dx$；

（7）$\int \sin^4 x\cos^2 x dx$；

（8）$\int \frac{1}{(2\cos x+3\sin x)^2}dx$；

（9）$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$；

（10）$\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx$；

（11）$\int \frac{1}{1+\tan x}dx$.

6．计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{e^{5x}+1}{e^x+1}dx$；

（2）$\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$；

（3）$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

7．计算下列不定积分.

（1）$\int e^{\sqrt{x}}dx$；

（2）$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$；

（3）$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$；

（4）$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{3x^2+6x}}$；

（5）$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$；

（6）$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$；

（7）$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$；

（8）$\int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$.

题型四、分部积分法

8．计算下列不定积分.

（1）$\int x\cos^2 x dx$；

（2）$\int \frac{x^2+\ln(1+x^2)}{x^3}dx$；

（3）$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$；

（4）$\int (\arccos x)^2 dx$；

（5）$\int \frac{1-2\ln x}{x^3}dx$；（6）$\int \cos(\ln x)dx$.

9．计算下列不定积分.

（1）$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$；（2）$\int x\ln^2 xdx$；

（3）$\int \arcsin\sqrt{x}dx$；（4）$\int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}dx$；

（5）$\int x(1+x^2)\arctan xdx$；（6）$\int \arctan\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$；

（7）$\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$；（8）$\int \frac{1+x}{x^3}e^{-2x}dx$.

10．已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(e,-1)$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $\frac{\ln\ln x}{x}$，求 $f(x)$.

11．已知 $f(x)$ 有二阶连续导数，证明：

$$\int xf''(2x-1)dx=\frac{x}{2}f'(2x-1)-\frac{1}{4}f(2x-1)+C.$$

12．设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$________.

13．设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$.

Ⅱ参考答案

题型一、基本积分方法

1.（1）【答案】$x+\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\left(\frac{3}{2}\right)^x+C$.

【解析】$\int\frac{2^x+3^x}{2^x}dx=\int 1+\left(\frac{3}{2}\right)^x dx=x+\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\left(\frac{3}{2}\right)^x+C$.

（2）【答案】$\frac{1}{3}x^3+2e^x+C$.

【解析】$\int e^x(x^2e^{-x}+2)dx=\int(x^2+2e^x)dx=\frac{1}{3}x^3+2e^x+C$.

（3）【答案】$\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}+C$.

【解析】$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}+C$.

（4）【答案】$-\cot x-x+C$.

【解析】$\int\cot^2 xdx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\cot x-x+C$.

（5）【答案】$\ln|x|+\arctan x+C$.

【解析】$\int\frac{1+x^2+x}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\ln|x|+\arctan x+C$.

（6）【答案】$\ln|x|+\arcsin x+C$.

【解析】$\int\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\ln|x|+\arcsin x+C$.

2．（1）【答案】$\frac{1}{700}(7x-9)^{100}+C$.

【解析】$\int(7x-9)^{99}dx=\frac{1}{7}\int(7x-9)^{99}d(7x-9)=\frac{1}{700}(7x-9)^{100}+C$.

（2）【答案】$\frac{1}{3}\tan x^3+C$.

【解析】$\int\frac{x^2}{(\cos x^3)^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(\cos x^3)^2}dx^3=\frac{1}{3}\tan x^3+C$.

（3）【答案】$2\arctan\sqrt{x}+C$.

【解析】. $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}+C$.

（4）【答案】$-\cos(\ln x)+C$.

【解析】$\int\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx=\int\sin(\ln x)d(\ln x)=-\cos(\ln x)+C$.

（5）【答案】$-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+C$.

【解析】$\int\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx=-\int\cos\left(\frac{1}{x}\right)d\frac{1}{x}=-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+C$.

（6）【答案】$\arcsin(\tan x)+C$.

【解析】$\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan^2 x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}}d(\tan x)=\arcsin(\tan x)+C$.

3．（1）【答案】$2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C$；

【解析】$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx\overset{t=\sqrt[4]{x}}{=}\int\frac{4t^3}{t^2+t}dt=4\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=2t^2-4t+4\ln|1+t|+C$

$$=2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C.$$

（2）【答案】$2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+C$.

【解析】

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx\overset{x=2\sin t}{=}16\int\sin^2 t\cos^2 tdt=4\int\sin^2 2tdt=2\int(1-\cos 4t)dt=2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C$$

$$=2t-2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+C.$$

（3）【答案】$\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$.

【解析】$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt=\int\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int 1+\cos 2tdt$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$$

（4）【答案】$\frac{x-1}{3\sqrt{x^2-2x+4}}+C$.

【解析】$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}dx=\int\frac{1}{[3+(x-1)^2]^{\frac{3}{2}}}dx\overset{x-1=\sqrt{3}\tan t}{=}\frac{1}{3}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}dt=\frac{1}{3}\sin t+C$

$$=\frac{x-1}{3\sqrt{x^2-2x+4}}+C.$$

题型二、有理函数的积分

4.（1）【答案】$\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

【解析】若分式中分子次数高于分母的次数，需要将分子降幂.

$$\int\frac{x^3}{x+3}dx=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}\right)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C.$$

（2）【答案】$\frac{9}{7}\ln|x+5|+\frac{5}{7}\ln|x-2|+C$.

【解析】设 $\frac{2x+1}{x^2+3x-10}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-2}$，得 $A=\frac{9}{7},B=\frac{5}{7}$，

$$\int\frac{2x+1}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{\frac{9}{7}}{x+5}+\frac{\frac{5}{7}}{x-2}dx=\frac{9}{7}\ln|x+5|+\frac{5}{7}\ln|x-2|+C.$$

（3）【答案】$\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C$.

【解析】$\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{x-1}{(x-1)^2+4}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C.$$

（4）【答案】$\frac{-(3x^{10}+3x^5+1)}{15(x^5+1)^3}+C$.

【解析】$\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}=\frac{1}{5}\int\frac{x^{10}d(x^5+1)}{(x^5+1)^4}\overset{t=x^5+1}{=}\frac{1}{5}\int\frac{(t-1)^2dt}{t^4}$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4}dt=\frac{-(3x^{10}+3x^5+1)}{15(x^5+1)^3}+C.$$

（5）【答案】$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$.

【解析】设 $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$，得 $A=1,B=-\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2},D=-\frac{1}{2}$.

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1+x}{2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

（6）【答案】$-2\ln|x|+2\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+C$.

【解析】设 $\dfrac{3x-2}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$，解得 $A=-2,B=2,C=1$.

$$\int\frac{3x-2}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=-2\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

（7）【答案】$\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

【解析】$\displaystyle\int\frac{1}{1+x^3}dx=\int\frac{dx}{(1+x)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

（8）【答案】$\arctan x-\dfrac{1}{x^2+1}+C$.

【解析】$\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\arctan x-\frac{1}{x^2+1}+C$.

（9）【答案】$\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-3\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C$.

【解析】由题得，$\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-x}=x^2+x+1+\dfrac{x^2+x-8}{x^3-x}$，

设 $\dfrac{x^2+x-8}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$，其中 $A=8,B=-3,C=-4$.

故 $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=\int x^2+x+1+\frac{8}{x}+\frac{-3}{x-1}+\frac{-4}{x+1}dx$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-3\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C.$$

（10）**【答案】** $\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C$.

【解析】原式$=\int\frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+1)^2}dx=\frac{1}{10}\int\frac{1}{x^{10}(x^{10}+1)^2}dx^{10}$，

令$t=x^{10}$，得

$$\frac{1}{10}\int\frac{1}{x^{10}(x^{10}+1)^2}dx^{10}=\frac{1}{10}\int\frac{1}{t(t+1)^2}dt$$

$$=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{1}{10}(\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1})+C$$

$$=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+\frac{1}{10(t+1)}+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right|+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C$$

故$\int\frac{1}{x(x^{10}+1)^2}dx=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C$.

（11）**【答案】** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

【解析】 $\int\frac{1}{x^4-1}dx=\int\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx$

设$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$，

解得$A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4},C=0,D=-\frac{1}{2}$.

原式$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

（12）【答案】 $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)]+C$.

【解析】原式 $=\int\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$,

解得 $A=\frac{\sqrt{2}}{4},B=\frac{1}{2},C=-\frac{\sqrt{2}}{4},D=\frac{1}{2}$,

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)]+C.$$

（13）【答案】 $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3\sqrt{2}}{32}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{3\sqrt{2}}{16}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C$.

【解析】设 $\frac{1}{(x^4+1)^2}=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}\right)'+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}$,

解得 $A=B=D=E=F=G=0,C=\dfrac{1}{4},H=\dfrac{3}{4}$.

原式$=\displaystyle\int\left(\frac{x}{4(x^4+1)}\right)'dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x^4+1}dx$，

利用（12）题结论可得，

$$\int\frac{1}{(x^4+1)^2}dx=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3\sqrt{2}}{32}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{3\sqrt{2}}{16}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C.$$

（14）**【答案】** $\dfrac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{1}{9}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

【解析】 设 $\dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\left(\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}$，

解得 $A=\dfrac{5}{3},B=\dfrac{2}{3},C=\dfrac{2}{9},D=-\dfrac{2}{9},E=\dfrac{11}{9}$.

故原式$=\displaystyle\int\left(\frac{\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right)'dx+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{2x-11}{x^2+x+1}dx$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{2x-11}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{4}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

题型三、可化为有理函数的积分

5．（1）**【答案】** $\dfrac{1}{2}\sec^2x+\ln|\cos x|+C$ 或 $\dfrac{1}{2}\tan^2x+\ln|\cos x|+C$.

【解析】方法一：$\int \tan^3 x dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} d\cos x = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} d\cos x$

$$= -\int \frac{1}{\cos^3 x} d\cos x + \int \frac{1}{\cos x} d\cos x = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

方法二：

$$\int \tan^3 x dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan x d\tan x - \int \tan x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

（2）【答案】$\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C$.

【解析】$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} d\sin x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} d\sin x$

$$= \int \frac{1}{\sin x} d\sin x - \int \sin x d\sin x = \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

（3）【答案】$-\frac{1}{2}\arctan\cos 2x + C$.

【解析】$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2} dx$

$$= \int \frac{2\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2 + (1+\cos 2x)^2} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d\cos 2x}{(1+\cos^2 2x)} = -\frac{1}{2}\arctan\cos 2x + C.$$

（4）【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\sin x\right) + C$.

【解析】$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} d\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 x}} d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\sin x\right) + C.$$

（5）【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + \arctan\sin x + C$.

【解析】$\int\frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx+\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx+\int\frac{d\sin x}{1+\sin^2 x}$

$$\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx\ \underline{\underline{t=\tan x}}\ \int\frac{1}{1+2t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t\right)+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+C,\int\frac{d\sin x}{1+\sin^2 x}=\arctan\sin x+C,$$

故原式$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+\arctan\sin x+C$.

（6）【答案】$\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan x\right)+C$.

【解析】

$$\int\frac{1}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}dx=\int\frac{\sec^2 x}{3+4\tan^2 x}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d\tan x}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\int\frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan x\right)+C.$$

（7）【答案】$\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

【解析】

$$\int\sin^4 x\cos^2 x dx=\frac{1}{8}\int\left[\sin^2 2x\left(1-\cos 2x\right)\right]dx=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

（8）【答案】$-\frac{1}{3(2+3\tan x)}+C$.

【解析】

$$\int\frac{1}{\left(2\cos x+3\sin x\right)^2}dx=\int\frac{\sec^2 x}{\left(2+3\tan x\right)^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(2+3\tan x)}{\left(2+3\tan x\right)^2}=-\frac{1}{3(2+3\tan x)}+C.$$

（9）【答案】$\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

【解析】

$$\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx\ \underline{\underline{t=\tan\frac{x}{2}}}\ \int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{1+t}dt=\ln|1+t|+C$$

$$=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

（10）【答案】$x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}(\tan x+\frac{1}{2})\right]+C$.

【解析】

$$\int\frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx\ \underline{\underline{t=\tan x}}\ \int\frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{1+t^2}dt-\int\frac{1}{1+t+t^2}dt,$$

$$\int\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan t+C=x+C$$

$$\int\frac{1}{1+t+t^2}dt=\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)+C$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}(\tan x+\frac{1}{2})\right]+C$$

故原式$=x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}(\tan x+\frac{1}{2})\right]+C$.

（11）【答案】$\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+C$.

【解析】$\int\frac{1}{1+\tan x}dx\ \underline{\underline{t=\tan x}}\ \int\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t-1}{1+t^2}\right)dt$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\int\frac{2tdt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+\tan x|-\frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x)+\frac{1}{2}x+C=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+C.$$

6.（1）【答案】$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}+x+C$.

【解析】

$$\int\frac{e^{5x}+1}{e^x+1}dx\ \underline{\underline{t=e^x}}\ \int\frac{t^5+1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{t^4-t^3+t^2-t+1}{t}dt=\int\left(t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+\ln|t|+C=\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C.$$

（2）【答案】$\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left(\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right)+C$.

【解析】

$$\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}dx\ \underline{\underline{t=\left(\frac{3}{2}\right)^x}}\ \frac{1}{\ln 3-\ln 2}\int\frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left(\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right)+C.$$

（3）【答案】$2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+1\right)-2e^{-\frac{x}{2}}+C$.

【解析】$\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}\ \underline{\underline{t=e^{\frac{x}{2}}}}\ \int\frac{1}{t+t^2}\cdot\frac{2}{t}dt=2\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$=2\ln|t+1|-2\ln|t|-\frac{2}{t}+C=2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+1\right)-2e^{-\frac{x}{2}}+C.$$

7.（1）【答案】$2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$.

【解析】$\int e^{\sqrt{x}}dx\ \underline{\underline{t=\sqrt{x}}}\ \int 2te^t dt=2te^t-2\int e^t dt=2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C\cdot$

（2）【答案】$-\frac{64}{15}\sqrt{2-x}-\frac{16}{15}x\sqrt{2-x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{2-x}+C$.

【解析】

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx\ \underline{\underline{t=\sqrt{2-x}}}\ -2\int\left(2-t^2\right)^2dt=\int\left(-8+8t^2-2t^4\right)dt=-8t+\frac{8}{3}t^3-\frac{2}{5}t^5+C$$

$$=-8\sqrt{2-x}+\frac{8}{3}\left(\sqrt{2-x}\right)^3-\frac{2}{5}\left(\sqrt{2-x}\right)^5+C$$

$$=-\frac{64}{15}\sqrt{2-x}-\frac{16}{15}x\sqrt{2-x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{2-x}+C.$$

（3）【答案】$\frac{2}{3}e^x\sqrt{e^x+1}-\frac{4}{3}\sqrt{e^x+1}+C$.

【解析】$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx \xlongequal{t=\sqrt{e^x+1}} \int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{3}t^3-2t+C$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{e^x+1}\right)^3-2\sqrt{e^x+1}+C=\frac{2}{3}e^x\sqrt{e^x+1}-\frac{4}{3}\sqrt{e^x+1}+C.$$

（4）【答案】$\frac{\sqrt{3}}{6}\arccos\frac{1}{x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}+C$.

【解析】$\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{3x^2+6x}}=\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{3(x+1)^2-3}} \xlongequal{x+1=\sec t} \int\frac{\sec t\tan tdt}{\sec^3 t\sqrt{3}\tan t}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\cos^2 tdt=\frac{\sqrt{3}}{6}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{\sqrt{3}}{6}t+\frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2t+C.$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\arccos\frac{1}{x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}+C.$$

（5）【答案】$\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\right)+C$.

【解析】

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}} \xlongequal{x+1=2\tan t} \int\frac{2\sec^2 t(2\tan t-1)dt}{2\sec t}=2\int\sec t\tan tdt-\int\sec tdt$$

$$=2\sec t-\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C=\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right)+C$$

$$=\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\right)+C.$$

（6）【答案】$\arcsin\frac{x-2}{2}+C$.

【解析】$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} \xlongequal{x-2=2\sin t} \int\frac{2\cos tdt}{2\cos t}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$.

（7）【答案】$(x+a)\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}-2a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)+C$.

【解析】$\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx \xlongequal{t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} \int td\left(\frac{a\left(1+t^2\right)}{1-t^2}\right) =\frac{at\left(1+t^2\right)}{1-t^2}-a\int\frac{1+t^2}{1-t^2}dt$

$\displaystyle=\frac{at\left(1+t^2\right)}{1-t^2}-a\int\left(-1+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt =\frac{at\left(1+t^2\right)}{1-t^2}+at-a\ln|t+1|+a\ln|1-t|+C$

$\displaystyle=\frac{at\left(1+t^2\right)}{1-t^2}+at-a\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=(x+a)\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-2a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)+C$.

（8）【答案】$\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)-\arccos e^{-x}+C$.

【解析】$\displaystyle\int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx \xlongequal{e^x=\sec t} \int\frac{\sec t-1}{\tan t}\tan tdt=\int(\sec t-1)dt$

$=\ln|\sec t+\tan t|-t+C=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)-\arccos e^{-x}+C$.

题型四、分部积分法

8.（1）【答案】$\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$.

【解析】原式$\displaystyle=\int x\cos^2 xdx=\int x\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int xdx+\frac{1}{4}\int xd\sin 2x$

$\displaystyle=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2xdx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

（2）【答案】$2\ln|x|-\dfrac{(1+x^2)\ln(1+x^2)}{2x^2}+C$.

【解析】

$$\int\frac{x^2+\ln(1+x^2)}{x^3}dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)dx^{-2}=\ln|x|-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

设 $\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$，解得 $A=1,B=-1,C=0$，

$$\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{1+x^2}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,$$

从而原式 $=2\ln|x|-\frac{(1+x^2)\ln(1+x^2)}{2x^2}+C$.

（3）【答案】$-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\ln\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}+C$.

【解析】令 $t=e^x$，则 $dx=\frac{1}{t}dt$，

$$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=\int\frac{\arcsin t}{t^2}dt=-\int\arcsin t\,dt^{-1}=-\left[t^{-1}\arcsin t-\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}\right],$$

令 $t=\sin u$，得

$$\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{du}{\sin u}=\ln|\csc u-\cot u|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}\right|+C,$$

从而原式 $=-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\ln\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}+C\cdot$

（4）【答案】$x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C$.

【解析】

$$\int(\arccos x)^2dx=x(\arccos x)^2+\int\frac{2x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x(\arccos x)^2-2\int\arccos x\,d\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C\cdot$$

（5）【答案】$\frac{\ln x}{x^2}+C$.

【解析】$\int\frac{1-2\ln x}{x^3}dx=\int\frac{1}{x^3}dx-\int\frac{2\ln x}{x^3}dx=\int\frac{1}{x^3}dx+\int\ln x dx^{-2}$

$=\int\frac{1}{x^3}dx+\frac{\ln x}{x^2}-\int\frac{1}{x^3}dx=\frac{\ln x}{x^2}+C$.

（6）【答案】$\frac{x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)}{2}+C$.

【解析】使用分部积分法.

$\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)-\int xd\cos(\ln x)=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx$

$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx,$

故$\int\cos(\ln x)dx=\frac{x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)}{2}+C$.

9.（1）【答案】$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

【解析】$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

（2）【答案】$\frac{1}{2}x^2\ln^2x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$.

【解析】$\int x\ln^2xdx=\frac{1}{2}\int\ln^2xdx^2=\frac{1}{2}x^2\ln^2x-\int x\ln xdx=\frac{1}{2}x^2\ln^2x-\frac{1}{2}\int\ln xdx^2$

$=\frac{1}{2}x^2\ln^2x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln^2x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$.

（3）【答案】$x\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$.

【解析】$\int\arcsin\sqrt{x}dx=x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$，

令$t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$，则$x=1-\frac{1}{t^2+1}$，则

$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int td\frac{-1}{t^2+1}=\frac{-t}{t^2+1}+\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{-t}{t^2+1}+\arctan t+C$

$$=-\sqrt{x(1-x)}+\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

故$\int\arcsin\sqrt{x}dx=x\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$.

（4）【答案】$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln|1+x|+C$.

【解析】$\int\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\int\arctan\sqrt{x}dx^{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int 1-\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln|1+x|+C.$$

（5）【答案】$\frac{1}{4}(1+x^2)^2\arctan x-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{12}+C$.

【解析】$\int x(1+x^2)\arctan xdx=\frac{1}{4}\int\arctan xd[(1+x^2)^2]$

$$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\arctan x-\frac{1}{4}\int(1+x^2)dx=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\arctan x-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{12}+C.$$

（6）【答案】$-\left(x+\frac{1}{2}\right)\arctan\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$.

【解析】令$t=\sqrt{\frac{x}{1+x}},x=-1+\frac{1}{1-t^2}$，

$$\int\arctan\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int\arctan td\frac{1}{1-t^2}=\frac{\arctan t}{1-t^2}-\int\frac{1}{(1-t^2)(t^2+1)}dt,$$

设$\frac{1}{(1-t^2)(t^2+1)}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$，解得$A=\frac{1}{4},B=\frac{1}{4},C=0,D=-\frac{1}{2}$，

$$\int\frac{1}{(1-t^2)(t^2+1)}dt=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t+1}dt+\frac{1}{4}\int\frac{1}{1-t}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\arctan t+C\text{，}$$

原式$=\dfrac{\arctan t}{t^2-1}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right|+\dfrac{1}{2}\arctan t+C$

$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)\arctan\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C.$$

（7）**【答案】** $\ln(x+a)\ln(x+b)+C$.

【解析】 法一：原式$=\displaystyle\int\frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$$=\int\ln(x+a)\,d\ln(x+b)+\int\ln(x+b)\,d\ln(x+a)$$

$$=\int\ln(x+a)\,d\ln(x+b)+\ln(x+b)\ln(x+a)-\int\ln(x+a)\,d\ln(x+b)$$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)+C.$$

法二：原式$=\displaystyle\int\frac{\ln(x+a)}{x+b}+\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$$=\int\ln(x+a)[\ln(x+b)]'+[\ln(x+a)]'\ln(x+b)dx$$

$$=\int[\ln(x+a)\ln(x+b)]'dx=\ln(x+a)\ln(x+b)+C.$$

（8）**【答案】** $-\dfrac{1}{2x^2}e^{-2x}+C$.

【解析】

$$\int\frac{1+x}{x^3}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2}{x^2}e^{-2x}+\frac{-2}{x^3}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}e^{-2x}\right)'dx=-\frac{1}{2x^2}e^{-2x}+C.$$

10.**【答案】** $y=\ln x(\ln\ln x-1)$.

【解析】由题知 $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln\ln x}{x}$，可知 $y=\int\frac{\ln\ln x}{x}dx$，

由分部积分法得

$$y=\int\frac{\ln\ln x}{x}dx=\int\ln\ln x d(\ln x)=\ln x\ln\ln x-\int\ln x\frac{1}{x\ln x}dx=\ln x(\ln\ln x-1)+C.$$

因为曲线 $y=f(x)$ 过点 $(e,-1)$，故 $C=0$，所以所求曲线为 $y=\ln x(\ln\ln x-1)$.

11．【证明】使用分部积分法，

方法一：

$$\int xf''(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int xf''(2x-1)d(2x-1)$$

$$=\frac{1}{2}\int xdf'(2x-1)=\frac{1}{2}\left[xf'(2x-1)-\int f'(2x-1)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}[xf'(2x-1)-\frac{1}{2}\int f'(2x-1)d(2x-1)]=\frac{x}{2}f'(2x-1)-\frac{1}{4}f(2x-1)+C$$.即证.

方法二：

$$(\frac{x}{2}f'(2x-1)-\frac{1}{4}f(2x-1)+C)'=\frac{1}{2}f'(2x-1)+xf''(2x-1)-\frac{1}{2}f'(2x-1)=xf''(2x-1)$$

即证.

12．【答案】$x+e^x+C$.

【解析】令 $\ln x=t, x=e^t$，即 $f'(t)=1+e^t$，则 $f(t)=\int(1+e^t)dt=t+e^t+C$，故

$f(x)=x+e^x+C\cdot$

13．【答案】$x+2\ln|x-1|+C$.

【解析】令 $x^2-1=t$，则 $f(t)=\ln\frac{t+1}{t-1}$. 由 $f(\varphi(x))=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$ 可知

$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$，从而 $\int\varphi(x)dx=\int\frac{x+1}{x-1}dx=x+2\ln|x-1|+C$.

模块七　定积分

Ⅰ经典习题

题型一、定积分定义求极限

1．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}+\sqrt{1-\cos\frac{4\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\cos\frac{2n\pi}{n}}\right]$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^{\frac{2\pi}{n}}+e^{2\cdot\frac{2\pi}{n}}+\cdots+e^{2\pi}\right]$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

题型二、定积分比较大小

2．判断下列定积分的大小关系.

（1）$\int_0^1 x^n dx$ 和 $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n dx$；

（3）$\int_a^1 \ln(1+x^2)dx$ 和 $\int_a^1 \ln(1+x^4)dx$，（$a>0$且$a\neq1$）；

（4）$\int_1^2 \ln(1+2^x)dx$ 和 $\int_{-2}^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)dx$.

3．设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(\sin x)dx$，则（　　）

（A）$I_1<1<I_2$　　　（B）$1<I_1<I_2$

（C）$I_2<1<I_1$　　　（D）$I_1<I_2<1$

4．设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x) \le g(x)$，且对任何 $c \in (0,1)$（　）

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$

（C）$\int_{c}^{1} f(t)dt \ge \int_{c}^{1} g(t)dt$　　（D）$\int_{c}^{1} f(t)dt \le \int_{c}^{1} g(t)dt$

5．设 $F(x)=\int_{x}^{x+\pi} e^{\sin 2t} \sin 2t dt$，则 $F(x)$（　）

（A）为正常数　　（B）为负常数

（C）恒为零　　（D）不为常数

6．已知广义积分 $\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln(x-2)}{x^2-4x+5} dx$ 是收敛的，则它的数值（　）

（A）为正数　　（B）为负数

（C）为零　　（D）无法确定正负

7．证明：$I=\int_{0}^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$.

题型三、变限积分求导

8．设 $g(x)=\int_{0}^{x} f(u)du$，其中 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+1}{2}, 0 \le x < 1, \\ \frac{x-1}{3}, 1 \le x \le 2, \end{cases}$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内（　）

（A）无界　　（B）递减　　（C）不连续　　（D）连续

9．设函数 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\int_{0}^{x} f(t)dt$ 是（　）

（A）连续的奇函数　　（B）连续的偶函数

（C）在 $x=0$ 处间断的奇函数　　（D）在 $x=0$ 处间断的偶函数

10．求函数 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)dt$ 的导数.

11．设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} tf(x^2-t^2)dt =$（　）

（A）$xf(x^2)$　　（B）$-xf(x^2)$　　（C）$2xf(x^2)$　　（D）$-2xf(x^2)$

12．设 $f(x)$ 连续，求下列函数的导数.

（1）$\int_0^x f(2x-t)dt$；（2）$\int_0^x e^t f(e^x-e^t)dt$；

（3）$\int_0^{x^2} tf(x^2-t)dt$；（4）$\int_0^1 f(te^x)dt$；

（5）$\int_0^{x^2} xf(x+t)dt$；（6）$\int_{x^2}^0 x\cos t^2 dt$；

（7）$\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}$，假设 $t>0$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

13．求函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt,(x>0)$ 的单调递减区间.

14．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{\int_0^{\ln(1+x^2)} t^2 dt}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

15．设 $f(x)$ 连续且满足 $\int_0^x tf(t-x)dt=\int_0^x \sin tdt$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 的值.

16．设 $f(x)$ 连续且满足 $\int_0^{2x} xf(t)dt+2\int_x^0 tf(2t)dt=2x^3(x-1)$，求 $f(x)$.

题型四、分段函数的定积分

17．设 $f(x)=\begin{cases} x^3, x<1 \\ e^{-x}, x\ge 1 \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

18．计算 $I=\int_{-\pi}^x (1+|\sin t|)dt, -\pi\le x\le \pi$.

19．已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & 1<x\le 2 \end{cases}$，设 $F(x)=\int_1^x f(t)dt\ (0\le x\le 2)$，则 $F(x)$ 为（　　）

（A）$\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$　　（B）$\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

（C）$\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$　　（D）$\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

题型五、对称区间上的定积分

a．利用被积函数奇偶性

20．设 $M=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\tan x}{1+x^4}+x^8\right)dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^8 x+\ln(x+\sqrt{1+x^2}))dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan^8 x+e^x\cos x-e^{-x}\cos x)dx$，则（　　）

（A）$P>N>M$　　（B）$N>P>M$

（C）$N>M>P$　　（D）$P>M>N$

21．计算下列定积分.

（1）$\int_{-1}^{1}(\sin x+x^2)e^{-|x^3|}dx$；　　（2）$\int_{-\pi}^{\pi}(x^5+\cos x)e^{-|x|}dx$；

（3）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{(1+|x|)^3}dx$；　　（4）$\int_{-2}^{2}[(1+x)^2e^{-|x|}+\cos x\cdot\dfrac{1-e^x}{1+e^x}]dx$.

22．$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$________.

b．利用积分区间可加性

23．计算下列定积分

（1）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1+3^x}dx$；　　（2）$\int_{-1}^{1}x^{2020}\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$；

（3）$\int_{-1}^{1}x\cdot\ln(1+e^{\arctan x})dx$；　　（4）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx$.

题型六、变量代换的特殊技巧

24． $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^a x}$．

25． $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx$．

题型七、抽象函数的定积分和递推公式

26．设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可导，$\int_0^{\pi}\cos xf(x)dx=1$，求 $\int_0^{\pi}\sin xf'(x)dx$．

27．设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上二阶可导，

证明 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f''(x)+f(x)]\cos xdx=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$．

28．设 $f(x)$ 具有连续的导数，$f(x)-f'(x)=x$，$f'(0)=f'(1)=0$，计算

$\int_0^1\left[\frac{f''(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$．

29．设 $f(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}dt$，计算 $\int_0^1 xf(x)dx$．

30．设 $f(x)=\int_0^{x-a} e^{y^2+2ay}dy$，计算 $\int_0^a f(x)dx$．

31．设 $f(x)=\int_x^2 e^{-(y-1)^2}dy$，计算 $I=\int_1^2 f(x)dx$．

32．设 $f(x)=\int_0^x e^{y(2-y)}dy$，计算 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$．

33．计算下列积分的递推公式：（1）$I_n=\int cs\,\mathrm{c}^n xdx$；（2）$I_n=\int \cot^n xdx$．

题型八、反常积分

34．下列广义积分收敛的是（　　）

（A）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$　　（B）$\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

（C）$\int_{e^2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx$　　（D）$\int_{0}^{1}\ln xdx$

35．$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$.

36．计算$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$.

37．计算$\int_{0}^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

38．计算下列反常积分.

（1）$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(1+e^x)^2}$　　（2）$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{(x+3)\sqrt{x-1}}dx$；

（3）$\int_{3}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$；　　（4）$\int_{3}^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$；

（5）$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}$；　　（6）$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}$.

II 参考答案

题型一、定积分定义求极限

1．求下列极限.

（1）**【答案】**$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}+\sqrt{1-\cos\frac{4\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\cos\frac{2n\pi}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2\pi i}{n}}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1-\cos 2\pi x}dx=\int_0^1\sqrt{2\sin^2\pi x}dx=\sqrt{2}\int_0^1\sin\pi xdx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

（2）【答案】$\dfrac{e^{2\pi}-1}{2\pi}$.

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^{\frac{2\pi}{n}}+e^{2\cdot\frac{2\pi}{n}}+\cdots+e^{2\pi}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2\pi i}{n}}=\int_0^1 e^{2\pi x}dx=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}.$$

（3）【答案】$2\ln 2-1$.

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)dx$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-x\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

题型二、定积分比较大小

2.【答案】

（1）$\int_0^1 x^n dx>\int_0^1\ln(1+x^n)dx$；　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^n dx$；

（3）$\int_a^1\ln(1+x^2)dx>\int_a^1\ln(1+x^4)dx$；　（4）$\int_{-2}^{-1}\ln\left(1+\dfrac{1}{2^x}\right)dx=\int_1^2\ln(1+2^x)dx$.

【解析】此题考查定积分的比较定理.

（1）当$x\in(0,1)$时，$x>\ln(1+x)$，则$x^n>\ln(1+x^n)$，故$\int_0^1 x^n dx>\int_0^1\ln(1+x^n)dx$；

（2）当$x>0$时，$x>\sin x$，则$x^n>\sin x^n$，故$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^n dx$；

（3）当$0<a<1$时，$a<x<1$，则$\ln(1+x^2)>\ln(1+x^4)$；当$a>1$时，$1<x<a$，则.

$\ln(1+x^2)<\ln(1+x^4)$，故当$a>0$且$a\neq 1$时，均有$\int_a^1\ln(1+x^2)dx>\int_a^1\ln(1+x^4)dx$；

（4）令$x=-t$，则

$$\int_{-2}^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)dx=-\int_2^1\ln\left(1+\frac{1}{2^{-t}}\right)dt=\int_1^2\ln(1+2^t)dt=\int_1^2\ln(1+2^x)dx$$

.

3.【答案】(A).

【解析】当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\tan x>x>\sin x$，又 $\sin x\in(0,1)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，故

$\tan(\sin x)>\sin x>\sin(\sin x)$，由定积分的比较定理可知，

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(\sin x)dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx=I_1$，即 $I_2>1>I_1$，故选(A).

4.【答案】(D).

【解析】本题考查定积分的比较定理，由于 $c\in(0,1)$，得 $c<1$，又有条件 $f(t)\le g(t)$，

则 $\int_c^1 f(t)dt\le\int_c^1 g(t)dt$，故选(D).

5.【答案】(A).

【解析】因为 $F'(x)=e^{\sin 2(x+\pi)}\sin 2(x+\pi)-e^{\sin 2x}\sin 2x=0$，所以 $F(x)$ 为常数.

$$F(x)=F(-\frac{\pi}{2})=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin 2t}\sin 2tdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{\sin 2t}\sin 2tdt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin 2t}\sin 2tdt$$

$$\xlongequal{t+\frac{\pi}{2}=u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin 2\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\sin 2\left(u-\frac{\pi}{2}\right)du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin 2t}\sin 2tdt$$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\sin 2u}\sin 2udu+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin 2t}\sin 2tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin 2t}-e^{-\sin 2t})\sin 2tdt>0$，故 $F(x)$ 为正常数.

6.【答案】(C).

【解析】$\int_2^{+\infty}\dfrac{\ln(x-2)}{x^2-4x+5}dx=\int_2^{+\infty}\dfrac{\ln(x-2)}{1+(x-2)^2}dx\xlongequal{x-2=t}\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln t}{1+t^2}dt$，

因为 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx=I_1+I_2$.将 I_1 化成 $(1,+\infty)$ 上的积分，即令

$x=\dfrac{1}{t}$，$I_1=\int_0^1\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_{+\infty}^1\dfrac{\ln t}{1+t^2}dt=-\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln t}{1+t^2}dt=-\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx$，

则$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0$.

7.【证明】令$t=x^2, I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$，由于被积函数在$[0,2\pi]$上变号，且当$t\in(0,\pi)$时取正值，当$t\in(\pi,2\pi)$时取负值，则令$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt=I_1+I_2$，再将$I_2$转化为$(0,\pi)$上的积分，然后再比较被积函数，即令$t=s+\pi$，则$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin(s+\pi)}{2\sqrt{s+\pi}}ds=-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t+\pi}}dt$，又当$x\in(0,\pi)$时，$\sin t>0,\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}>0$，

故得$I=I_1+I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)dt>0$.

题型三、变限积分求导

8.【答案】（D）.

【解析】虽然$f(x)$在$x=1$处不连续，但在$[0,2]$上有界，事实上$0\le f(x)\le 1$，则积分上限函数$g(x)=\int_a^x f(u)du$在$[0,2]$上连续且有界，当$0<x<1$时，$g'(x)=\frac{x^2+1}{2}>0$，当$1<x<2$时，$g'(x)=\frac{x-1}{3}>0$，又$g(x)$在$x=1$处连续，因此，$g(x)$在区间$(0,2)$内单调增加，故选（D）.

9.【答案】（B）.

【解析】由函数$f(x)$是奇函数，则积分上限函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，有

$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt\xlongequal{t=-u}-\int_0^x f(-u)du=\int_0^x f(u)du=F(x)$，则$F(x)=\int_0^x f(t)dt$为偶函数，且除$x=0$外开区间内均连续，$x=0$是其第一类间断点，则

$F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0,\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0^+}xf(\xi)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot A=0$，同理

$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x\cdot B=0$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$在$x=0$连续，则$F(x)=\int_0^x f(t)dt$处处连

续，故$\int_0^x f(t)dt$为连续的偶函数.

10.【答案】$f'(x)=-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$.

【解析】此题考查变上限积分函数求导法则，有

$$f'(x)=\left(\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt\right)'=(\cos x)'\cdot\cos(\pi\cos^2 x)-(\sin x)'\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$$

$$=-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x).$$

11.【答案】（A）.

【解析】此题考查变上限积分函数求导，令$u=x^2-t^2$，则

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\int_{x^2}^0 tf(u)\left(-\frac{1}{2t}\right)du=\int_{x^2}^0\left(-\frac{1}{2}\right)f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du,$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}f(u)du=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot(x^2)'=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2).$$

12.（1）【答案】$2f(2x)-f(x)$.

【解析】作变量代换：令$u=2x-t$，则$dt=-du$，代入题目得$\int_0^x f(2x-t)dt=-\int_{2x}^x f(u)du=\int_x^{2x}f(u)du$.

$$[\int_0^x f(2x-t)dt]'=[\int_x^{2x}f(u)du]'=f(2x)\cdot(2x)'-f(x)=2f(2x)-f(x).$$

（2）【答案】$e^x f(e^x-1)$.

【解析】作变量代换，令$u=e^x-e^t$，则

$$\int_0^x e^t f(e^x-e^t)dt=\int_0^x f(e^x-e^t)de^t=\int_{e^x-1}^0 f(u)d(e^x-u)=\int_0^{e^x-1}f(u)du,$$

所以$[\int_0^x e^t f(e^x-e^t)dt]'=[\int_0^{e^x-1}f(u)du]'=e^x f(e^x-1)$.

（3）【答案】$2x\int_0^{x^2}f(u)du$.

【解析】作变量代换，令$u=x^2-t$，则

$$\int_0^{x^2} tf(x^2-t)dt = -\int_{x^2}^0 (x^2-u)f(u)du = \int_0^{x^2}(x^2-u)f(u)du = x^2\int_0^{x^2} f(u)du - \int_0^{x^2} uf(u)du$$

所以$[\int_0^{x^2} tf(x^2-t)dt]' = [x^2\int_0^{x^2} f(u)du - \int_0^{x^2} uf(u)du]'$

$= 2x\int_0^{x^2} f(u)du + x^2 f(x^2)\cdot(2x) - x^2 f(x^2)\cdot(2x) = 2x\int_0^{x^2} f(u)du$.

（4）**【答案】** $f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du$.

【解析】作变量代换，令$u = te^x$，则$\int_0^1 f(te^x)dt = e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du$.

所以

$$[\int_0^1 f(te^x)dt]' = [e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du]' = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du + e^{-x}f(e^x)e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du$$

（5）**【答案】** $\int_x^{x+x^2} f(u)du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)]$.

【解析】作变量代换，令$u = x+t$，则$\int_0^{x^2} xf(x+t)dt = \int_x^{x+x^2} xf(u)du = x\int_x^{x+x^2} f(u)du$.

所以$[\int_0^{x^2} xf(x+t)dt]' = [x\int_x^{x+x^2} f(u)du]' = \int_x^{x+x^2} f(u)du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)]$.

（6）**【答案】** $\int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - 2x^2\cos x^4$.

【解析】 $\left(\int_{x^2}^0 x\cos t^2 dt\right)' = \left(x\int_{x^2}^0 \cos t^2 dt\right)' = \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - x\cos x^4 \cdot 2x$

$= \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - 2x^2\cos x^4$.

（7）**【答案】** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{2t\sin t^2}$.

【解析】 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t^2 - 2t^2\sin t^2 - \dfrac{1}{2t}\cos t^2\cdot 2t}{-2t\sin t^2} = t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{1}{-2t\sin t^2}.$$

13.【答案】$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

【解析】$F'(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，当$F'(x)<0$时，解得$0<x<\dfrac{1}{4}$，则$F(x)$的单调递减区间是$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

14.（1）【答案】1.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$.

（2）【答案】1.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{\int_0^{\ln(1+x^2)}t^2dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1+x^4)}{\dfrac{2x}{1+x^2}\ln^2(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$.

（3）【答案】$\dfrac{\pi}{6}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{\dfrac{1}{2}x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)dt}{\dfrac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{\pi}{6}.$$

15.【答案】1.

【解析】已知$f(x)$连续，所以原方程可导.

作变量代换，令$u=t-x$，则

$$\int_0^x tf(t-x)dt=\int_{-x}^0(u+x)f(u)du=\int_{-x}^0 uf(u)du+x\int_{-x}^0 f(u)du,$$

因此原方程化为$\int_{-x}^0 uf(u)du+x\int_{-x}^0 f(u)du=\int_0^x \sin t dt$.

等式两边同时对 x 求导得 $\int_{-x}^{0} f(u)du = \sin x$，

将 $x = -\dfrac{\pi}{2}$ 代入，即得 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 1$.

16.【答案】$f(x) = 3x^2 - 3x$.

【解析】原方程变形为 $x\int_{0}^{2x} f(t)dt + 2\int_{x}^{0} tf(2t)dt = 2x^3(x-1)$.

已知 $f(x)$ 连续，则上式中的两个变上限积分均可导.所以等式两边同时对 x 求导得

$\int_{0}^{2x} f(t)dt + 2xf(2x) - 2xf(2x) = 6x^2(x-1) + 2x^3$，即 $\int_{0}^{2x} f(t)dt = 8x^3 - 6x^2$.

上述等式两边再同时对 x 求导得 $2f(2x) = 24x^2 - 12x$.

令 $t = 2x$，则 $f(t) = 3t^2 - 3t$，即 $f(x) = 3x^2 - 3x$.

题型四、分段函数的定积分

17.【答案】$\dfrac{e-1}{e^2}$.

【解析】作变量代换，令 $x-2=t$，则 $\int_{1}^{4} f(x-2)dx = \int_{-1}^{2} f(t)dt$，由定积分的区间可加性可得，原式$=\int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3dx + \int_{1}^{2} e^{-x}dx = \dfrac{e-1}{e^2}$.

18.【答案】$I = \begin{cases} x + \cos x + \pi + 1, -\pi \le x \le 0 \\ x - \cos x + \pi + 3, 0 < x \le \pi \end{cases}$.

【解析】当 $-\pi \le x \le 0$ 时，

$$I = \int_{-\pi}^{x} (1 + |\sin t|)dt = \int_{-\pi}^{x} (1 - \sin t)dt = (t + \cos t)\Big|_{-\pi}^{x} = x + \cos x + \pi + 1,$$

当 $0 < x \le \pi$ 时，

$$I = \int_{-\pi}^{x} (1 + |\sin t|)dt = \int_{-\pi}^{0} (1 - \sin t)dt + \int_{0}^{x} (1 + \sin t)dt = (t + \cos t)\Big|_{-\pi}^{0} + (t - \cos t)\Big|_{0}^{x}$$

$$= 1 + \pi + 1 + x - \cos x + 1 = x - \cos x + \pi + 3,$$

综上，$I=\begin{cases}x+\cos x+\pi+1,-\pi\le x\le 0,\\ x-\cos x+\pi+3,0<x\le\pi.\end{cases}$

19.【答案】（D）.

【解析】

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\begin{cases}\int_1^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x\le 1\\ \int_1^x 1dt=x-1, & 1<x\le 2\end{cases}.$$

题型五、对称区间上的定积分

20.【答案】（D）.

【解析】因为$\tan x$，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$e^x\cos x-e^{-x}\cos x$为奇函数，所以

$$M=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x}{1+x^4}+x^8\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x^8dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^8dx,$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^8x+\ln(x+\sqrt{1+x^2}))dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^8xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^8xdx,$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan^8x+e^x\cos x-e^{-x}\cos x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^8xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^8xdx,$$

要比较定积分的大小，只要比较被积函数的大小即可.当$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，

$\tan x>x>\sin x>0$，则$\tan^8x>x^8>\sin^8x$，故$P>M>N$.

21.（1）【答案】$\frac{2(1-e^{-1})}{3}$.

【解析】本题可借助定积分对称区间的奇偶性来化简计算，关键是能够正确判断出被积函数的奇偶性，并熟练使用对称区间积分的结论.

$$\int_{-1}^1(\sin x+x^2)e^{-|x^3|}dx=\int_{-1}^1x^2e^{-|x^3|}dx=2\int_0^1x^2e^{-x^3}dx=-\frac{2}{3}e^{-x^3}\Big|_0^1=\frac{2(1-e^{-1})}{3}.$$

（2）【答案】$e^{-\pi}+1$.

【解析】$\int_{-\pi}^{\pi}(x^5+\cos x)e^{-|x|}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos xe^{-|x|}dx=2\int_{0}^{\pi}\cos xe^{-x}dx$

$$=(\sin x-\cos x)e^{-x}\Big|_0^{\pi}=e^{-\pi}+1.$$

（3）【答案】$\frac{3}{4}$.

【解析】$\int_{-1}^{1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{(1+|x|)^3}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+|x|)^3}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1}{(1+x)^3}dx=-\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_0^1=\frac{3}{4}$.

（4）【答案】$2(3-11e^{-2})$.

【解析】$\int_{-2}^{2}[(1+x)^2e^{-|x|}+\cos x\cdot\frac{1-e^x}{1+e^x}]dx=\int_{-2}^{2}(1+x)^2e^{-|x|}dx$

$$=\int_{-2}^{2}(1+2x+x^2)e^{-|x|}dx=2\int_{0}^{2}(1+x^2)e^{-x}dx=2(3-11e^{-2}).$$

22.【答案】2.

【解析】$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=\int_{-1}^{1}1dx+\int_{-1}^{1}2x\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-1}^{1}1dx=2$.

23.（1）【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+3^x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 t}{1+3^t}+\frac{\cos^2 t}{1+3^{-t}}\right)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi}{4}$.

（2）【答案】$\frac{1}{2021}$.

【解析】$\int_{-1}^{1}x^{2020}\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\int_{0}^{1}\left(x^{2020}\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}+x^{2020}\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)dx$

$$=\int_{0}^{1}\left(x^{2020}\frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)dx=\int_{0}^{1}x^{2020}dx=\frac{1}{2021}.$$

（3）【答案】$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

【解析】由题意得，$\int_{-1}^{1} x\cdot\ln(1+e^{\arctan x})dx=\int_{0}^{1}[x\cdot\ln(1+e^{\arctan x})-x\ln(1+e^{-\arctan x})]dx$

$$=\int_{0}^{1} x\cdot\arctan x dx=\frac{1}{2}x^{2}\arctan x\bigg|_{0}^{1}-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{x^{2}}{x^{2}+1}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

（4）【答案】$\dfrac{\pi}{4}$.

【解析】令 $x=-t$，则原式 $I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}\sin^{2}t}{1+e^{-t}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2}t}{1+e^{t}}dt$，故

$$I=\frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}\sin^{2}x}{1+e^{x}}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2}x}{1+e^{x}}dx\right)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}xdx=\frac{\pi}{4}.$$

题型六、变量代换的特殊技巧

24.【答案】$\dfrac{\pi}{4}$.

【解析】令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{1+(\cot x)^{\alpha}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dt}{1+(\tan t)^{\alpha}}$，

$$I=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(\tan t)^{\alpha}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)^{\alpha}dx}{1+(\tan x)^{\alpha}}\right]=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{4}.$$

25.【答案】$\dfrac{\pi-1}{4}$.

【解析】令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^{3}t}{\cos t+\sin t}dt$，

$$I=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{3}x}{\sin x+\cos x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{3}x}{\cos x+\sin x}dx\right]=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{3}x+\cos^{3}x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2}x-\sin x\cos x+\cos^{2}x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx=\frac{\pi-1}{4}.$$

题型七、抽象函数的定积分和递推公式

26.【答案】-1.

【解析】对$\int_0^{\pi}\sin xf'(x)dx$运用分部积分法可得，

$$\int_0^{\pi}\sin xf'(x)dx=\int_0^{\pi}\sin xdf(x)=\sin xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos xf(x)dx=-1.$$

27.【证明】根据所给条件可得，运用分部积分法得：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f''(x)+f(x)]\cos xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f''(x)\cos xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdf'(x)+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx=\cos xf'(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\sin xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdf(x)+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx=\sin xf(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx$$

$$=\sin xf(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$，证毕.

28.【答案】$\frac{1}{2}-\ln 2$.

【解析】运用分部积分法可得，

$$\int_0^1\left[\frac{f''(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}df'(x)-\int_0^1\frac{f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$=\frac{f'(x)}{1+x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{f'(x)}{(1+x)^2}dx-\int_0^1\frac{f(x)}{(1+x)^2}dx=0+\int_0^1\frac{f'(x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=-\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}dx$$

$$=-\int_0^1\frac{x+1-1}{(1+x)^2}dx=-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{1+x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

29.【答案】$\frac{\cos 1-1}{2}$.

【解析】运用分部积分法可得：

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2 = \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cdot \frac{\sin x}{x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x dx = \frac{\cos x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\cos 1 - 1}{2}.$$

30.【答案】$\frac{1}{2e^{a^2}} - \frac{1}{2}$.

【解析】由分部积分法可得：

$$\int_0^a f(x)dx = xf(x)\Big|_0^a - \int_0^a xf'(x)dx = -\int_0^a xe^{(x-a)^2+2a(x-a)}dx$$

$$= -\int_0^a xe^{x^2-a^2}dx = -e^{-a^2}\int_0^a xe^{x^2}dx = -\frac{1}{2e^{a^2}}e^{x^2}\Big|_0^a = \frac{1}{2e^{a^2}} - \frac{1}{2}.$$

31.【答案】$\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.

【解析】由分部积分法可得：

$$I = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(x)d(x-1) = (x-1)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)f'(x)dx$$

$$= 0 + \int_1^2 (x-1)e^{-(x-1)^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-(x-1)^2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

32.【答案】$\frac{1}{6}(e-2)$.

【解析】用分部积分法可得，

$$I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)d(x-1)^3 = \frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{x(2-x)}dx$$

$= -\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{x(2-x)}dx$ ，再令 $x-1=t$ 可得，

原式$= -\frac{1}{3}\int_{-1}^0 t^3 e^{1-t^2}dt = -\frac{1}{12}\int_{-1}^0 e^{1-t^2}dt^4 \overset{u=t^2}{=\!=\!=} \frac{1}{6}\int_0^1 ue^{1-u}du = \frac{1}{6}(e-2)$.

33.【答案】（1）$I_n = -\frac{1}{n-1}\cot x \cdot \csc^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$ ；

（2）$I_n=-\dfrac{1}{n-1}\cot^{n-1}x-I_{n-2}$.

【解析】（1）$I_n=\int\csc^n xdx=\int\csc^{n-2}x\cdot\csc^2 xdx=\int\csc^{n-2}x\cdot(\cot^2 x+1)dx$

$$=\int\csc^{n-2}x\cdot\cot^2 xdx+\int\csc^{n-2}xdx=\int\csc^{n-2}x\cdot\cot^2 xdx+I_{n-2},$$

又$\int\csc^{n-2}x\cdot\cot^2 xdx=-\dfrac{1}{n-2}\int\cot xd\csc^{n-2}x=-\dfrac{1}{n-2}(\cot x\cdot\csc^{n-2}x+\int\csc^n xdx)$

$$=-\frac{1}{n-2}\cot x\cdot\csc^{n-2}x-\frac{1}{n-2}I_n,$$

整理即可得$(n-1)I_n=-\cot x\cdot\csc^{n-2}x+(n-2)I_{n-2}$，即有

$$I_n=-\frac{1}{n-1}\cot x\cdot\csc^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

（2）$I_n=\int\cot^n xdx=\int\cot^{n-2}x\cdot\cot^2 xdx=\int\cot^{n-2}x\cdot(\csc^2 x-1)dx$

$$=\int\cot^{n-2}x\cdot\csc^2 xdx-\int\cot^{n-2}xdx=-\int\cot^{n-2}xd\cot x-\int\cot^{n-2}xdx$$

$=-\dfrac{1}{n-1}\cot^{n-1}x-I_{n-2}$.即有$I_n=-\dfrac{1}{n-1}\cot^{n-1}x-I_{n-2}$.

题型八、反常积分

34.【答案】（D）.

【解析】选项（A）发散，$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int_{0}^{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$，而

$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}=+\infty$，发散，所以$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$发散.

选项（B）发散，泊松积分$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}d\ln x=2\sqrt{\ln x}\Big|_e^{+\infty}$，发散.

选项（C）发散，$\int_{e^2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\ln[\ln(\ln x)]\Big|_{e^2}^{+\infty}=+\infty$，发散.

选项（D）收敛，$\int_0^1\ln xdx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}x\ln x\Big|_\varepsilon^1-x\Big|_0^1=-1$，收敛.

故选（D）.

35.【答案】$\ln 2$.

【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx=-\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\frac{\ln 2}{2}+\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\frac{\ln 2}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]+\frac{\ln 2}{2}=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln 2.$$

36.【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right)dx$

$$=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2(1+x)^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

37.【答案】$\ln 2$.

【解析】

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}dx=\int_0^{+\infty}xd\left(-\frac{1}{1+e^x}\right)=x\cdot\frac{-1}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=\ln 2.$$

38.（1）【答案】$\ln 2-\frac{1}{2}$.

【解析】令 $t=e^x$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t)^2}=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=\left(\ln t-\ln(1+t)+\frac{1}{1+t}\right)\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

（2）【答案】$\frac{\pi}{2}$.

【解析】令 $\sqrt{x-1}=t$， $x=1+t^2$ 则

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+3)\sqrt{x-1}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+4)t}2tdt=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+4}dt=\arctan\frac{t}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

（3）【答案】$\frac{1}{3}(1+\ln 3)$.

【解析】$\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int_3^{+\infty}\ln x d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_3^{+\infty}+\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1+\ln 3}{3}$.

（4）【答案】$-\frac{9\ln 3}{20}+\frac{1}{4}\ln 10$.

【解析】

$$\int_3^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln x\Big|_3^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\ln 3}{20}-\frac{1}{4}\ln\frac{9}{10}=-\frac{9\ln 3}{20}+\frac{1}{4}\ln 10.$$

（5）【答案】$\frac{\pi}{4e}$.

【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}\overset{令t=e^x}{=\!=\!=}\int_e^{+\infty}\frac{1}{t}\frac{dt}{t+\frac{e^2}{t}}=\frac{1}{e}\arctan\frac{t}{e}\Big|_e^{+\infty}=\frac{\pi}{4e}$.

（6）【答案】$\frac{\pi}{8}$.

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{8}$

模块八　多元函数微分学

Ⅰ经典习题

1．讨论下列二重极限是否存在，如果存在求出极限值.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\cos\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{1}{x^2+y^2}}$；（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{(|x|+|y|)^2}$；

2．讨论下列函数在$(0,0)$处是否连续，偏导数是否存在，是否可微.

（1）$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$；

（2）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xy}\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

3．连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,\ y)+2x+y-3}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则$dz\Big|_{(0,1)}=$________.

4．如果函数$f(x,y)$在$(0,0)$处连续，则下列命题正确的是（　　）

（A）若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,\ y)}{\sqrt{|x|+|y|}}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微

（B）若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,\ y)}{(x^2+y^2)^2}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微

（C）若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,\ y)}{\sqrt{|x|+|y|}}$存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x，y)}{(x^2+y^2)^2}$ 存在

Ⅱ参考答案

1.（1）【答案】0.

【解析】当 $x\to 0$ 且 $y\to 0$ 时，$|x|+|y|$ 为无穷小量，$\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 为有界量，由“无穷小量×有界量＝无穷小量”可得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$.

（2）【答案】0.

【解析】$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{|x|+|y|}+\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y^2}{|x|+|y|}$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|+|y|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|+|y|}\cdot|x|$，

易知 $0<\frac{|x|}{|x|+|y|}<1$，所以 $\frac{|x|}{|x|+|y|}$ 为有界量.又知当 $x\to 0$ 时，$|x|$ 为无穷小量，故由“无穷小量×有界量＝无穷小量”得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|+|y|}=0$.同理可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y^2}{|x|+|y|}=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$.

（3）【答案】$e^{-\frac{1}{2}}$.

【解析】分析极限式可知，该极限为1^∞ 型，由重要极限公式可得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\cos\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{1}{x^2+y^2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

（4）【答案】不存在.

【解析】取特殊路径 $y=kx$，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{k^2}{(1+k^2)^2}$，即该极限值与 k 有关.故由极限存在的唯一性可知，本题中极限不存在.

（5）【答案】0.

【解析】易知 $0<\left|\dfrac{xy^2}{(|x|+|y|)^2}\right|=|x|\cdot\left(\dfrac{|y|}{|x|+|y|}\right)^2<|x|$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|=0$，由夹逼定理可得

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{(|x|+|y|)^2}=0$.

2.（1）【答案】连续，偏导数存在 $(f_x'(0,0)=0,f_y'(0,0)=0)$，不可微.

【解析】由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$ 可知，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

由偏导数定义，$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，所以偏导数存在.

再考虑可微性. $\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}$，

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

取特殊路径 $\Delta y=k\Delta x$，则上式 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$，可以看出该极限值与 k 相关，所以该极限不存在，所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

（2）【答案】连续，偏导数存在 $(f_x'(0,0)=0,f_y'(0,0)=0)$，不可微.

【解析】由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy}\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$ 可知，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

由偏导数定义，

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

所以偏导数存在.

再考虑可微性. $\Delta z = f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\sqrt{\Delta x\Delta y}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{\Delta x\Delta y}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

取特殊路径 $\Delta y = k\Delta x$，则上式$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$，极限值与 k 相关，所以极限不存在，所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

3.【答案】$-2dx-dy$.

【解析】连续函数满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,\ y)+2x+y-3}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 后便可微，则此极限式就是多元函数可微的充要条件.因此，对照充要条件的形式

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$，可以从该极限式中直接读出 $z_x'(0,1)=-2$，$z_y'(0,1)=-1$，因此，再根据全微分的定义可知，

$$dz\Big|_{(0,1)}=-2dx-dy.$$

4.【答案】（B）.

【解析】由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续可知，如果极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,\ y)}{(x^2+y^2)^2}$ 存在，则必有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$，这样 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^2}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^2}$，也即极限

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}$存在，可知

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}=0$，也即

$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，进而由可微的定义可知

$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

模块九　偏导数的计算

Ⅰ经典习题

题型一、 基本运算

1．计算下列偏导数.

（1）设 $z=e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（2）设 $z=e^{xy}\ln\sin\left(x+y\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（3）设 $z=\left(x+y\right)^2+\cos\left(x+y+\arcsin y\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2．设 $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 在点 $\left(1,\ -1\right)$ 处的值为________.

3．设方程 $xyz+\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{1}{2}\ln 2$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，则在 $(0,-1,1)$ 的全微分 $dz=$________.

4．设 $u=ze^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $3x^2+2y^2+z^2=6$ 确定的隐函数，且 $z(1,1)=1$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$________.

题型二、复合函数求导法则的使用

5．设 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$， $f(u)$ 可导，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6．计算下列偏导数.

（1）设 $F(xz,yz)=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

（2）设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7．设 $z=f(2x-y,\ y\sin x)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8．设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f、φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$.

9．设 $f(x)$、$g(x)$ 是连续函数，$F(x,\ y)=\int_{x^2}^{1}du\int_0^{u^2y}f(tu)g(\frac{1}{u})dt$，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=$________.

10．设 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}$，且 $z(1,y)=\sin y$，则 $z(x,y)=$________.

11．设 $z=f(2x-y,\ y\sin x)+g(x^2,xy)$，其中函数 $f(x,y)$ 与 $g(u,v)$ 均具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12．设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$，求 $\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

13．设函数 $z=\frac{x}{y}f(x^2-y^2,\ e^{xy})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

14．设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$，其中 u 是关于 x,y 的函数，$f(u)$，$\varphi(u)$ 可微，$p(t),\varphi(t)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$；求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$.

15．设 $z=f\left(x^2+y^2,2xy\right)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

16．设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，且 $f(x,x^2)=1$，$f_x'(x,x^2)=x$，求 $f_y'(x,x^2)$.

17．已知函数$z=z(x,y)$满足$x^2\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$.设$u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，$\psi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$，其中函数$\psi=\psi(u,v)$，求$\frac{\partial \psi}{\partial u}$.

18．设$f(u,v)$是二元可微函数，$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

题型三、隐函数求导

19．假设$z=f\left(x,y\right)$由方程$\int_0^{z+xy}e^{-t^2}dt=\tan(xz)$所确定，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

20．设$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$所确定的函数，其中$\varphi$具有 2 阶导数且$\varphi'\neq-1$，求$dz$.

21．已知函数$z=f(x,y)$具有连续的二阶偏导数，且$f_x(x,y)\neq 0$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$，又设$x=x(y,z)$是由$z=f(x,y)$所确定的函数，试求$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2$.

II 参考答案

题型一、基本运算

1.（1）【答案】$e^{\arctan\frac{y}{x}}\dfrac{y^2-x^2-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

【解析】先求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，等式两边对 x 求偏导数可得，

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\arctan\frac{y}{x}}\left(\dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\right)=-e^{\arctan\frac{y}{x}}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$①，①式两边再对 y 求偏导可得，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^{\arctan\frac{y}{x}}\left(\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\right)\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)-e^{\arctan\frac{y}{x}}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=e^{\arctan\frac{y}{x}}\frac{y^2-x^2-xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

（2）【答案】$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}\ln\sin\left(x+y\right)+2ye^{xy}\cot(x+y)-e^{xy}\csc^2(x+y)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}\ln\sin\left(x+y\right)+2xe^{xy}\cot(x+y)-e^{xy}\csc^2(x+y);$$

【解析】先求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，两边同时分别对 x 和 y 求偏导数可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}(y\ln\sin(x+y)+\cot(x+y)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}(x\ln\sin(x+y)+\cot(x+y));$$

上面两式中继续分别对 x 和 y 求偏导数可得，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=ye^{xy}[y\ln\sin(x+y)+\cot(x+y)]+e^{xy}[y\cot(x+y)-\csc^2(x+y)]$$

$$= y^2e^{xy}\ln\sin(x+y)+2ye^{xy}\cot(x+y)-e^{xy}\csc^2(x+y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xe^{xy}[x\ln\sin(x+y)+\cot(x+y)]+e^{xy}[x\cot(x+y)-\csc^2(x+y)]$$

$$=x^2e^{xy}\ln\sin(x+y)+2xe^{xy}\cot(x+y)-e^{xy}\csc^2(x+y).$$

（3）**【答案】** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2-\cos\left(x+y+\arcsin y\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)$.

【解析】先求$\frac{\partial z}{\partial x}$，等式两边对$x$求偏导数可得，

$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x+y)-\sin(x+y+\arcsin y)$ ①，①式两边再对 y 求偏导数可得，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2-\cos(x+y+\arcsin y)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right).$$

2．**【答案】** $-\frac{1}{2}$.

【解析】由偏导数求导法则知，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{|y|}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

所以$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,-1)}=-\frac{1}{2}$.

3．**【答案】** $2dx+dy$.

【解析】 由一阶微分形式不变性，对方程两边求微分得

$$xydz+xzdy+yzdx+\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

将 $x=0$、 $y=-1$ 和 $z=1$ 代入上式可得 $-dx+\dfrac{dz-dy}{2}=0$，整理后即得在点 $(0,-1,1)$ 的全微分 $dz=2dx+dy$.

4.【答案】 $2e(\cos 2-\sin 2)$.

【解析】由 u 的表达式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}e^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)+\frac{z}{y}e^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)+2xze^{\frac{x}{y}}\cos(x^2+y^2)\ ①.$$

然后方程 $3x^2+2y^2+z^2=6$ 两边同时对 x 求导，可得 $6x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ ②.

将 $x=1$、 $y=1$、 $z=1$ 代入②式，可得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-3$.

再将 $x=1$、 $y=1$、 $z=1$ 和 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-3$ 代入①式，可得.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2e(\cos 2-\sin 2).$$

题型二、复合函数求导法则的使用

5.【答案】 $2z$.

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\dfrac{y}{x}\right)+xyf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+xyf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf\left(\frac{y}{x}\right)=2z.$$

6.（1）【答案】

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF_1'+yF_2')^3}\left\{y^2z^2[(F_1')^2F_{22}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_2')^2F_{11}'']-2z(F_1')^2(xF_1'+yF_2')\right\}.$$

【解析】等式两端对 x 求偏导数，得 $F_1'\cdot\left(z+x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ ①,

①式两端同时对 x 求偏导数，得

$$F_{11}''\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F_{12}''y\frac{\partial z}{\partial x}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_1'\left(2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+F_{21}''\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)y\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+F_{22}''y^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F_2'y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

再代入 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$，得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF_1'+yF_2')^3}\left\{y^2z^2[(F_1')^2F_{22}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_2')^2F_{11}'']-2z(F_1')^2(xF_1'+yF_2')\right\}.$$

（2）**【答案】** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$.

【解析】 等式两端对 x 求偏导数，得 $F_1'+F_2'\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_3'\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0$；于是，

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$；同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$.

7.**【答案】** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+\frac{1}{2}yf_{22}''\sin 2x+f_2'\cos x$.

【解析】 令 $u=2x-y$，$v=y\sin x$，则 $z=f(u,\ v)$，由偏导数求导法则，

有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

$$=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2\sin x-y\cos x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{2}y\sin 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+\frac{1}{2}yf''_{22}\sin 2x+f'_2\cos x.$$

8.【答案】$\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos x-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi'_2)$.

【解析】本题中自变量为 x， y 和 z 均为关于 x 的函数，因此 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}$，且由题中条件可知， $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$.

再在等式 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 的两侧同时对 x 求偏导得

$\varphi'_1\dfrac{d(x^2)}{dx}+\varphi'_2\dfrac{d(e^y)}{dx}+\varphi'_3\dfrac{dz}{dx}=\varphi'_1 2x+\varphi'_2 e^{\sin x}\cos x+\varphi'_3\dfrac{dz}{dx}=0$，式中 $\varphi'_3=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$.

从中解得 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi'_2)$，将上述结论代入即得

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cos x-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi'_2).$$

9.【答案】$-2x^5 g(\dfrac{1}{x^2})f(x^6 y)$.

【解析】由 $F(x,y)=\int_{x^2}^{1}du\int_0^{u^2 y}f(tu)g(\dfrac{1}{u})dt$，可得 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-2x\int_0^{x^4 y}f(tx^2)g(\dfrac{1}{x^2})dt$，

上式两边再同时对 y 求导，即得 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-2xg(\dfrac{1}{x^2})f(x^4 y\cdot x^2)x^4=-2x^5 g(\dfrac{1}{x^2})f(x^6 y)$.

10.【答案】$(2-x)\sin y+\frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|$.

【解析】等式$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}$两边同时对 x 积分可得

$$z(x,y)=\int\left(-\sin y+\frac{1}{1-xy}\right)dx=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+g(y).$$

又因$z(1,y)=-\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-y|+g(y)=\sin y$，故有

$$g(y)=2\sin y+\frac{1}{y}\ln|1-y|.$$

从而$z(x,y)=(2-x)\sin y+\frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|$.

11.【答案】

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''_{11}+\frac{y}{2}\sin 2xf''_{22}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+f'_2\cos x+2x^2g''_{12}+g'_2+xyg''_{22}.$$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'_1+f'_2y\cos x+2xg'_1+yg'_2$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(-f''_{11}+f''_{12}\sin x)+(-f''_{21}+f''_{22}\sin x)y\cos x+f'_2\cos x+2x^2g''_{12}+g'_2+xyg''_{22}$$

$$=-2f''_{11}+\frac{y}{2}\sin 2xf''_{22}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+f'_2\cos x+2x^2g''_{12}+g'_2+xyg''_{22}.$$

12.【答案】$-2e^{-x^2y^2}$.

【解析】两个一阶偏导数分别为：$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$，$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$；

三个二阶偏导数依次为：$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2}$，

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$.将上面偏导数分别代入所求式，整理即得

$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$.

13.【答案】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f+\frac{x}{y}\left(2xf_1'+ye^{xy}f_2'\right)=\frac{1}{y}f+\frac{2x^2}{y}f_1'+xe^{xy}f_2'$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{6x}{y}f_1'+e^{xy}(2+xy)f_2'+\frac{4x^3}{y}f_{11}''+xye^{2xy}f_{22}''+2x^2e^{xy}(y+1)f_{12}''；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f-2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)f_1'+\left(\frac{x}{y}+x^2\right)e^{xy}f_2'-4x^2f_{11}''+x^2e^{2xy}f_{22}''$$
$$+\left(\frac{2x^3}{y}e^{xy}-2xye^{xy}\right)f_{12}''.$$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f+\frac{x}{y}\left(2xf_1'+ye^{xy}f_2'\right)=\frac{1}{y}f+\frac{2x^2}{y}f_1'+xe^{xy}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}\left(2xf_1'+ye^{xy}f_2'\right)+\frac{4x}{y}f_1'+\frac{2x^2}{y}\left(2xf_{11}''+ye^{xy}f_{12}''\right)+e^{xy}f_2'$$
$$+xye^{xy}f_2'+xe^{xy}\left(2xf_{21}''+ye^{xy}f_{22}''\right)$$
$$=\frac{6x}{y}f_1'+e^{xy}(2+xy)f_2'+\frac{4x^3}{y}f_{11}''+xye^{2xy}f_{22}''+2x^2e^{xy}(y+1)f_{12}''；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f+\frac{1}{y}\left(-2yf_1'+xe^{xy}f_2'\right)-\frac{2x^2}{y^2}f_1'+\frac{2x^2}{y}\left(-2yf_{11}''+xe^{xy}f_{12}''\right)+x^2e^{xy}f_2'$$
$$+xe^{xy}\left(-2yf_{21}''+xe^{xy}f_{22}''\right)$$
$$=-\frac{1}{y^2}f-2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)f_1'+\left(\frac{x}{y}+x^2\right)e^{xy}f_2'-4x^2f_{11}''+x^2e^{2xy}f_{22}''+\left(\frac{2x^3}{y}e^{xy}-2xye^{xy}\right)f_{12}''.$$

14.【答案】0.

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$，因为$u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+p(x)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}-p(y)$，则有 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

15.【答案】$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+4x^2f_{11}''+8xyf_{12}''+4y^2f_{22}''$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2f_2'+4xyf_{11}''+4\left(x^2+y^2\right)f_{12}''+4xyf_{22}''$.

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'2x+f_2'2y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+4x^2f_{11}''+8xyf_{12}''+4y^2f_{22}''$；

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2f_2'+4xyf_{11}''+4\left(x^2+y^2\right)f_{12}''+4xyf_{22}''$.

16.【答案】$-\dfrac{1}{2}$.

【解析】对 $f(x,x^2)=1$ 应用链式法则，有 $\dfrac{d}{dx}f(x,x^2)=f_x'(x,x^2)+2xf_y'(x,x^2)=0$，

又由于 $f_x'(x,x^2)=x$，则有 $x[1+2f_y'(x,x^2)]=0$；

因此，当 $x\neq 0$ 时，$f_y'(x,x^2)=-\dfrac{1}{2}$.再由 f_y' 的连续性，对任意的 x 总有 $f_y'(x,x^2)=-\dfrac{1}{2}$.

17.【答案】$-\dfrac{1}{u^2}$.

【解析】 由$\begin{cases}u=x\\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=u\\ y=\dfrac{u}{uv+1}\end{cases}$.可以得到 $\psi=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$ 是 u， v的复合函数，

对 u 求偏导数，$\dfrac{\partial\psi}{\partial u}=-\dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)+\dfrac{1}{u^2}=-\dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{1}{(1+uv)^2}\right)+\dfrac{1}{u^2}$，

利用 $\dfrac{1}{1+uv}=\dfrac{y}{x}$ 和函数 $z=z(x,y)$ 所满足的关系表达式可得，

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2x^2}(x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y})+\frac{1}{u^2}=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{u^2}.$$

18.【答案】$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-2\left(f_1'\frac{y}{x}-f_2'\frac{x}{y}\right)$.

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\left(\frac{1}{y}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\left(\frac{1}{x}\right)+f_2'\left(-\frac{x}{y^2}\right)$，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-2\left(f_1'\frac{y}{x}-f_2'\frac{x}{y}\right).$$

题型三、隐函数求导

19.【答案】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\sec^2(xz)-ye^{-(z+xy)^2}}{e^{-(z+xy)^2}-x\sec^2(xz)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xe^{-(z+xy)^2}}{e^{-(z+xy)^2}-x\sec^2(xz)}$.

【解析】方法一：根据隐函数求导法则，方程两边同时对 x 求偏导数，有：

$e^{-(z+xy)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+y\right)=\sec^2(xz)\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，整理可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\sec^2(xz)-ye^{-(z+xy)^2}}{e^{-(z+xy)^2}-x\sec^2(xz)}$，方程两边同时对 y 求偏导数，有：$e^{-(z+xy)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+x\right)=\sec^2(xz)x\frac{\partial z}{\partial y}$，整理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xe^{-(z+xy)^2}}{e^{-(z+xy)^2}-x\sec^2(xz)}.$$

方法二：令 $F(x,y,z)=\int_0^{z+xy}e^{-t^2}dt-\tan(xz)=0$，分别对 x,y,z 求导得

$F_x'=ye^{-(z+xy)^2}-z\sec^2(xz)$，$F_y'=xe^{-(z+xy)^2}$，$F_z'=e^{-(z+xy)^2}-x\sec^2(xz)$.

则由隐函数存在定理得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{z\sec^2(xz)-ye^{-(z+xy)^2}}{e^{-(z+xy)^2}-x\sec^2(xz)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{-xe^{-(z+xy)^2}}{e^{-(z+xy)^2}-x\sec^2(xz)}.$$

20.【答案】$dz=\dfrac{2x-\varphi'(x+y+z)}{\varphi'(x+y+z)+1}dx+\dfrac{2y-\varphi'(x+y+z)}{\varphi'(x+y+z)+1}dy$.

【解析】方法一：根据隐函数求导法则，方程 $x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$ 两边同时对 x 求偏导数，有 $2x-\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x+y+z)\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，又因为 $\varphi'\neq-1$，故

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-\varphi'\left(x+y+z\right)}{\varphi'\left(x+y+z\right)+1}$，同理可得，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-\varphi'\left(x+y+z\right)}{\varphi'\left(x+y+z\right)+1}$，

所以有：$dz=\dfrac{2x-\varphi'(x+y+z)}{\varphi'(x+y+z)+1}dx+\dfrac{2y-\varphi'(x+y+z)}{\varphi'(x+y+z)+1}dy$.

方法二：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)=0$，分别对 x,y,z 求导得

$F_x'=2x-\varphi'(x+y+z)$，$F_y'=2y-\varphi'(x+y+z)$，$F_z'=-1-\varphi'(x+y+z)$.

因 $\varphi'\neq-1$，则 $F_z'\neq0$，由隐函数存在定理得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{2x-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{2y-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$.

所以有：$dz=\dfrac{2x-\varphi'\left(x+y+z\right)}{\varphi'\left(x+y+z\right)+1}dx+\dfrac{2y-\varphi'\left(x+y+z\right)}{\varphi'\left(x+y+z\right)+1}dy$.

21.【答案】0.

【解析】记 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，则 $F_x{}'=f_x{}'$，$F_y{}'=f_y{}'$，$F_z{}'=-1$，由隐函数求导公式得 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y{}'}{F_x{}'}=-\dfrac{f_y{}'}{f_x{}'}$，$\dfrac{\partial x}{\partial z}=-\dfrac{F_z{}'}{F_x{}'}=\dfrac{1}{f_x{}'}$；

对上式继续求偏导数可得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=-\frac{\left(f_{yx}''\cdot\dfrac{\partial x}{\partial y}+f_{yy}''\right)f_x'-f_y'\left(f_{xx}''\cdot\dfrac{\partial x}{\partial y}+f_{xy}''\right)}{(f_x')^2}=\frac{2f_x'f_y'f_{yx}''-f_x'^2f_{yy}''-f_y'^2f_{xx}''}{(f_x')^3},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{f_{xx}''\dfrac{\partial x}{\partial z}}{(f_x')^2}=-\frac{f_{xx}''}{(f_x')^3},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}=-\frac{f_{xx}''\dfrac{\partial x}{\partial y}+f_{xy}''}{(f_x')^2}=\frac{f_{xx}''f_y'-f_{xy}''f_x'}{(f_x')^3},$$

由已知条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$，故

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2=\frac{2f_x'f_y'f_{yx}''-f_x'^2f_{yy}''-f_y'^2f_{xx}''}{(f_x)^3}\cdot\left(-\frac{f_{xx}''}{(f_x')^3}\right)-\frac{(f_y'f_{xx}''-f_x'f_{xy}'')^2}{(f_x')^6}$$

$$=\frac{(f_x')^2f_{xx}''f_{yy}''-(f_x')^2(f_{xy}'')^2}{(f_x')^6}=\frac{(f_x')^2[f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2]}{(f_x')^6}=0.$$

模块十　二重积分

Ⅰ经典习题

题型一、直角坐标

1．$\iint\limits_{D} x^{-\frac{2}{3}}\csc 2y\,dxdy=$________，其中$D$是由$y$轴，$y=\dfrac{\pi}{4}$，$y=\arctan x$所围成.

2．计算二重积分$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma$，其中$D$是由直线$x=2,y=2,x+y=1$，$x+y=3$以及$x$轴与$y$轴所围成的平面区域.

3．计算二重积分$\iint\limits_{D}x^2dxdy$，其中D是由$x=3y$，$y=3x$，$x+y=8$在第二象限所围成的平面区域.

4．计算$\iint\limits_{D}ydxdy$，其中D是由$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1\left(a>0,b>0\right)$，$y=0$，$x=0$所围成的平面区域.

5．计算$\iint\limits_{D}xydxdy$，其中D是由$y=-2x$，$x=-2y$，$xy=-8$所围成的平面区域.

6．设$f(x,y)$连续，且$f(x,y)=e^{x^2+y^2}+xy\iint\limits_{D}xyf(x,y)dxdy$，其中$D$表示区域$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，则$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=$（　　）

（A）$4xye^{x^2+y^2}+\dfrac{9}{16}(e-1)^2$　　（B）$2xye^{x^2+y^2}+\dfrac{9}{32}(e-1)$

（C）$4xye^{x^2+y^2}+\dfrac{9}{32}(e-1)^2$　　（D）$4xye^{x^2+y^2}+\dfrac{9}{16}(e-1)$

7．已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0,f(x,1)=0$，$\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=a$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

8．设 $D=\{(x,y)\big||x|\le y\le 1\}$ 则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=$________.

9．交换积分次序 $I=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}f(x，y)dy=$________.

10．交换积分次序 $I=\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x，y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x，y)dx=$________.

11．已知 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$，则二重积分 $\int_0^1 dy\int_0^{1-y}f(x)dx=$（　　）

（A）2　　（B）0　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）1

题型二、极坐标

12．设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（　　）

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（C）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

13．求二重积分 $\iint\limits_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由 $x^2+y^2=1,x=0$ 和 $y=0$ 在第一象限内所围成的区域.

14．设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$ ________.

15．计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|0\le x\le\sqrt{2y-y^2},y\ge\sqrt{1-x^2}\}$

16．计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,\ y)\big|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2,\ y\ge x\right\}$.

17．计算 $\iint\limits_D xy^2dxdy$，其中 $D=\left\{(x,\ y)\big|x^2+y^2\le 2x\right\}$.

题型三、极坐标化为直角坐标

18．累次积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$（其中，

$D=\left\{(r,\ \theta)\big|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$）可以写成________.

19．计算二重积分：$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta\sqrt{\tan\theta}}\frac{r}{r\cos\theta-1}dr$.

题型四、对称性

20．计算二重积分：$I=\int_0^2dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}x(x+y)dy$.

21．计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)^3dxdy$，其中 D 是由曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 与直线

$x+\sqrt{3}y=0$ 及 $x-\sqrt{3}y=0$ 围成的平面区域.

22．计算积分 $\iint\limits_D(|x|+ye^{x^2})dxdy$，其中 D 是由曲线 $|x|+|y|=1$ 所围成的区域.

23．计算 $\iint\limits_D(xy^2+xe^x\sin^3 y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2x\}$.

24．计算二重积分 $\iint\limits_D x^2(1+y\sin x)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2,y\ge x^2\}$.

25．设区域D由曲线$y=\tan x$，$x=\pm\dfrac{\pi}{4}$，$y=1$围成，则$\iint\limits_D (x^5 y-1)dxdy=$（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{2}$　　（B）1　　（C）$-1-2$　　（D）$-\dfrac{\pi}{2}$

26．累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \dfrac{1-\sqrt{r\cos x}}{2-\sqrt{r\cos x}-\sqrt{r\sin x}} rdr=$________

27．设平面区域$D=\{(x,y)\big|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，计算

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy.$$

28．设区域D是由曲线$y=x^2, y=\sqrt{x}$围成的有界区域，计算二重积分$\iint\limits_D (x-y)dxdy$.

29．计算$\iint\limits_D \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x\cos y}{4x^2+y^2}\right)d\sigma$，其中$D$由$x^2+y^2\ge 1$，$|x|+|y|\le 2$所围成.

30．计算$\iint\limits_D (y+\sin xy)d\sigma$，其中$D$由$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{-x}$所围成.

II 参考答案

题型一、直角坐标

1.【答案】$\dfrac{9}{2}$.

【解析】$\iint\limits_D x^{-\frac{2}{3}}\csc 2y dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\csc 2y dy\int_0^{\tan y}x^{-\frac{2}{3}}dx=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\csc 2y\, x^{\frac{1}{3}}\Big|_0^{\tan y}dy$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^{\frac{1}{3}}y}{\sin 2y}dy=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^{\frac{1}{3}}y}{\tan y\cos^2 y}dy=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{-\frac{2}{3}}y d\tan y$

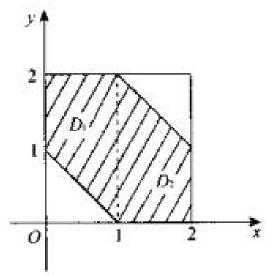
$=\dfrac{9}{2}\tan^{\frac{1}{3}}y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{9}{2}$.

2.【答案】$\dfrac{23}{3}$.

【解析】由题设可知，积分区域是如图的六边形区域，且 $D=D_1+D_2$，其中

$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 1-x\le y\le 2\}$，

$D_2=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2, 0\le y\le 3-x\}$，于是



$\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)d\sigma$

$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2(x^2+y^2)dy+\int_1^2 dx\int_0^{3-x}(x^2+y^2)dy$

$=\int_0^1\left\{x^2[2-(1-x)]+\dfrac{8-(1-x)^3}{3}\right\}dx+\int_1^2\left[x^2(3-x)+\dfrac{(3-x)^3}{3}\right]dx$

$=\int_0^1\left[x^2(1+x)+\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}(1-x)^3\right]dx+\int_1^2\left[x^2(3-x)+\dfrac{1}{3}(3-x)^3\right]dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-x)^4}{4}\right]\Bigg|_0^1+\left[x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(3-x)^4}{4}\right]\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{8}{3}-\frac{1}{12}+7-\frac{15}{4}-\frac{1}{12}(1-16)=\frac{23}{3}.$$

3.【答案】$\frac{416}{3}$.

【解析】

$$\iint_D x^2dxdy=\int_0^2 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy$$

$$=\int_0^2\frac{8}{3}x^3dx+\int_2^6\left(8x^2-\frac{4}{3}x^3\right)dx=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^2+\frac{1}{3}\left(8x^3-x^4\right)\Big|_2^6=\frac{416}{3}.$$

4.【答案】$\frac{ab^2}{30}$.

【解析】

$$\iint_D ydxdy=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)^2}ydy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a b^2\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4dx\,\overset{t=1-\sqrt{\frac{x}{a}}}{=\!=\!=\!=}\,\frac{b^2}{2}\int_0^1 t^4(1-t)2adt=\frac{ab^2}{30}.$$

5.【答案】$-32\ln 2$.

【解析】$\iint_D xydxdy=\int_{-4}^{-2}xdx\int_{-\frac{x}{2}}^{-\frac{8}{x}}ydy+\int_{-2}^{0}xdx\int_{-\frac{x}{2}}^{-2x}ydy$

$$=\int_{-4}^{-2}\frac{1}{2}x\left(\frac{64}{x^2}-\frac{1}{4}x^2\right)dx+\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}x\left(4x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx=-32\ln 2.$$

6.【答案】（C）.

【解析】注意$\iint_D xyf(x,y)dxdy$为常数，只需确定此常数即可，令$\iint_D xyf(x,y)dxdy=A$，则由$f(x,y)=e^{x^2+y^2}+xy\iint_D xyf(x,y)dxdy$，有$f(x,y)=e^{x^2+y^2}+Axy$，

$xyf(x,y)=xye^{x^2+y^2}+Ax^2y^2$，

于是 $A=\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy+A\iint\limits_D x^2y^2dxdy$，经计算得，

$\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{4}(e-1)^2$，$\iint\limits_D x^2y^2dxdy=\frac{1}{9}$，即

$A=\frac{1}{4}(e-1)^2+\frac{1}{9}A\Rightarrow A=\frac{9}{32}(e-1)^2$，可见，$f(x,y)=e^{x^2+y^2}+\frac{9}{32}(e-1)^2xy$，故

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}+\frac{9}{32}(e-1)^2$，因此应选（C）.

7.【答案】a.

【解析】$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y)$

$$=\int_0^1 xdx[yf'_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy]=\int_0^1 xdx[yf'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy],$$

因为 $f(x,1)=0$，所以 $f'_x(x,1)=0$，

则 $I=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f_x{}'(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf_x{}'(x,y)dx$

$$=-\int_0^1 dy[xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx]=-\int_0^1 dy[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx]$$

$$=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a.$$

8.【答案】$\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$.

【解析】$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=2\int_0^1 dy\int_{-y}^{y}x^2e^{-y^2}dx=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$.

9.【答案】$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f\left(x,\ y\right)dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f\left(x,\ y\right)dx$.

【解析】还原积分区域可知 D 是由 $x=-1$，$x=2$，$y=x^2$，$y=x+2$ 所围成的平面区

域，根据 D 的形状，交换积分次序，有 $I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)dx$.

10.【答案】$I=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_{x^2}^{x} f(x,\ y)dy$.

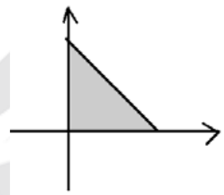
【解析】还原积分区域可知 D 是由 $y=0$，$y=\dfrac{1}{4}$，$y=x$，$x=\sqrt{y}$，以及

$y=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$，$y=x$，$x=\dfrac{1}{2}$ 所围成的平面区域，根据 D 的形状交换积分次序，有

$I=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_{x^2}^{x} f(x,\ y)dy$.

11.【答案】（B）.

【解析】将二重积分交换积分次序，再进行计算，先还原出积分区域，如图所示，



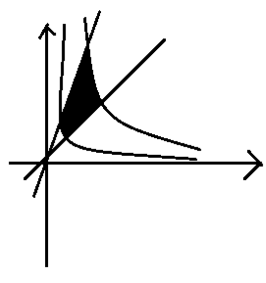
则 $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x)dx=\iint\limits_D f(x)dxdy$，再先对 y 积分得

$\iint\limits_D f(x)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x)dy=\int_0^1[f(x)-xf(x)]dx$，因为

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$，故 $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xf(x)dx=0$.

题型二、极坐标

12.【答案】（B）.



【解析】积分区域如图所示，可知 θ 的取值范围为

$\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$，$r$ 的取值范围为

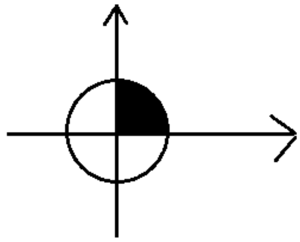
$\dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\le r\le\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$，另外需要注意极坐标和直角

坐标之间的变换公式 $dxdy=rd\theta dr$，故选（B）.

13.【答案】$\dfrac{\pi}{2}\left(\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$.

【解析】积分区域如图所示，由于积分区域是一个圆域，因此选择极坐标下进行求解，

作极坐标变换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$,



区域D的极坐标表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1\right\},$$

故原式$=\displaystyle\iint_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1-r^2}{1+r^2}rdr$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left(\frac{2r}{1+r^2}-r\right)dr=\frac{\pi}{2}\left[\ln(1+r^2)-\frac{1}{2}r^2\right]\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

14.【答案】$\dfrac{\pi}{4}R^4\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$.

【解析】因为积分区域D关于$y=x$对称，则由轮换对称性可得，原式

$$=\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)dxdy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

15.【答案】$\dfrac{9}{16}$.

【解析】$\displaystyle\iint_D xydxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{2\sin\theta}r^3\sin\theta\cos\theta dr$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\sin^5\theta\cos\theta-\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta=\left(\frac{2}{3}\sin^6\theta-\frac{1}{8}\sin^2\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{16}.$$

16.【答案】$-\frac{8}{3}$.

【解析】将积分式化为极坐标形式：

$$\iint_D (x-y)\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}r(\cos\theta-\sin\theta)rdr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)^3\,d\theta=-\frac{8}{3}.$$

17.【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】

$$\iint_D xy^2 d\sigma=\iint_D r^4\cos\theta\sin^2\theta drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^4\cos\theta\sin^2\theta dr$$

$$=\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{64}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{64}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6\theta-\cos^8\theta)d\theta$$

$$=\frac{64}{5}\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

题型三、极坐标化为直角坐标

18.【答案】$\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$.

【解析】

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,drd\theta=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$$

.

19.【答案】$-\frac{5}{6}$.

【解析】首先还原积分区域，由题设可知$0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\sec\theta\sqrt{\tan\theta}$，所以积分区域$D=\{(x,y)\big|0\le x\le1,x^3\le y\le x\}$，从而$I=\int_0^1dx\int_{x^3}^{x}\frac{1}{x-1}dy=-\frac{5}{6}$.

题型四、对称性

20.【答案】$\frac{5\pi}{4}$.

【解析】由二重积分的积分限可知积分区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le2x\}$.由于积分区域为圆域，故考虑极坐标变换.另外，积分区域关于x轴对称，所以$\iint\limits_D xydxdy=0$，$\iint\limits_D x^2dxdy=2\iint\limits_{D_1}x^2dxdy$，其中$D_1$为$D$在第一象限的部分.从而$I=\iint\limits_D x^2dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\cos^2\theta\cdot rdr=\frac{5\pi}{4}$.

21.【答案】$\frac{7}{30}$.

【解析】

$$\iint\limits_D(x+y)^3dxdy=\iint\limits_D\left(x^3+y^3+3x^2y+3xy^2\right)dxdy=\iint\limits_D\left(x^3+3xy^2\right)dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^1\left(r^3\cos^3\theta+3r^3\sin^2\theta\cos\theta\right)rdr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta\right)\frac{1}{5}d\theta=\frac{2}{5}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\sin^2\theta\right)d\sin\theta+3\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta d\sin\theta\right]$$

$$=\frac{2}{5}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}+3\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{30}.$$

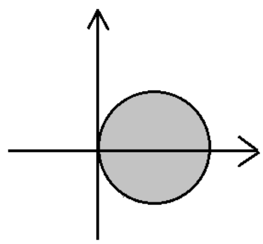
22.【答案】$\frac{2}{3}$.

【解析】根据曲线 $|x|+|y|=1$ 围成的图形可知，积分区域关于 x 轴和 y 轴对称，$\iint\limits_D (|x|+ye^{x^2})dxdy$ 中 ye^{x^2} 关于 y 是奇函数，所以积分就只需要计算

$$\iint\limits_D |x|dxdy = 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xdy = 4\int_0^1 x(1-x)dx = 4\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

23.【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】积分区域如图所示. 由于积分区域关于 x 轴对称，$xe^x\sin^3 y$ 关于 y 为奇函数，故 $\iint\limits_D (xy^2+xe^x\sin^3 y)dxdy = \iint\limits_D xy^2dxdy$，对该积分利用极坐标进行计算可得



$$\iint\limits_D xy^2d\sigma = \iint\limits_D r^4\cos\theta\sin^2\theta drd\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^4\cos\theta\sin^2\theta dr$$

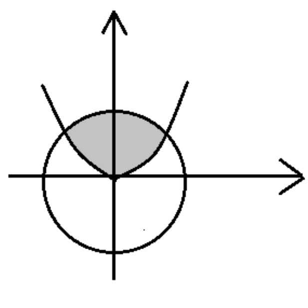
$$=\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{64}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{64}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6\theta-\cos^8\theta)d\theta$$

$$=\frac{64}{5}\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

24.【答案】$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$.

【解析】积分区域如图示. 由于积分区域关于 y 轴对称，$x^2y\sin x$ 关于 x 是奇函数，所以由对称性可知，



$$\iint_D x^2(1+y\sin x)dxdy=\iint_D x^2dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy$$

$$=\int_{-1}^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

25.【答案】（D）.

【解析】在积分区域内补充一条曲线：$y=-\tan x$，这样就使得积分区域关于被分为两个部分，$\iint_D (x^5y-1)dxdy=\iint_D x^5ydxdy-\iint_D dxdy$

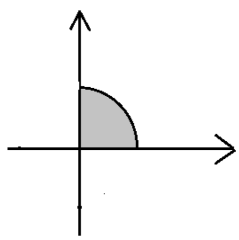
$=\iint_{D_{上}\cup D_{下}} x^5ydxdy-\iint_D dxdy=\iint_{D_{上}} x^5ydxdy+\iint_{D_{下}} x^5ydxdy-\iint_D dxdy$，上面的部分关于 y 轴对称，被积函数 x^5y 是关于 x 的奇函数，所以 $\iint_{D_{上}} x^5ydxdy=0$，同理 $\iint_{D_{下}} x^5ydxdy=0$，

故 $\iint_D (x^5y-1)dxdy=-\iint_D dxdy=-\dfrac{\pi}{2}$. 故选（D）.

26.【答案】$\dfrac{\pi}{8}$.

【解析】根据给出的极坐标系下的二重积分，画出积分区域，如图所示.

把极坐标的转化成直角坐标，有



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \frac{1-\sqrt{r\cos x}}{2-\sqrt{r\cos x}-\sqrt{r\sin x}}rdr=\iint_D \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}-\sqrt{y}}dxdy,$$

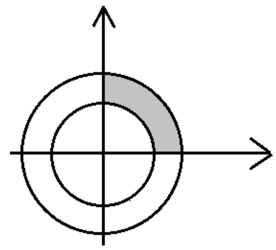
再根据积分区域关于 $y=x$ 对称，有

$\iint_D \dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}-\sqrt{y}}dxdy=\iint_D \dfrac{1-\sqrt{y}}{2-\sqrt{x}-\sqrt{y}}dxdy$，所以

原式 $=\iint_D \dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}-\sqrt{y}}dxdy=\dfrac{1}{2}\iint_D \dfrac{2-\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2-\sqrt{x}-\sqrt{y}}dxdy=\dfrac{1}{2}\iint_D dxdy=\dfrac{\pi}{8}$.

27.【答案】$-\dfrac{3}{4}$.

【解析】积分区域如图所示，由于积分区域关于 $y=x$ 对称，所以有



$$\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_{D_{yx}}\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy,$$

所以

$$\iint\limits_{D}\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy,$$

根据积分区域可知，计算这个二重积分需要转化为极坐标，

$$\iint\limits_{D}\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\iint\limits_{D}\sin(\pi r)rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin(\pi r)rdr=-\frac{3}{2},$$ 故原式

$$=-\frac{3}{4}.$$

28.【答案】0.

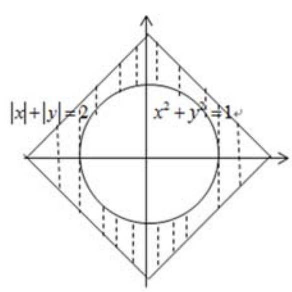
【解析】积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，从而由轮换对称性可知

$$\iint\limits_{D}(x-y)dxdy=\iint\limits_{D}(y-x)dxdy,$$ 所以

$$\iint\limits_{D}(x-y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[(x-y)+(y-x)]dxdy=0.$$

29.【答案】$8\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2\pi$.

【解析】积分区域如图所示，注意到积分区域分别关于 x 轴，y 轴对称，故首先考虑奇偶性. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 关于 x，y 均为偶函数，所以由对称性可知原积分等于在第一象限积分的 4 倍；$\dfrac{x\cos y}{4x^2+y^2}$ 关于 x，



y 均为奇函数，所以积分等于0，故

$$\iint_D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x\cos y}{4x^2+y^2}\right)dxdy=\iint_D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy\text{，}$$

由极坐标可得：

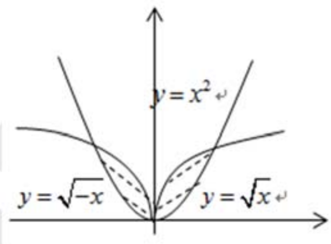
$$\iint_D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta-2\pi$$

$$=8\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2\pi.$$

30.**【答案】** $\frac{3}{10}$.

【解析】 积分区域如图所示，注意到积分区域关于 y 轴对称，利用奇偶性，可得

$$\iint_D(y+\sin(xy))d\sigma=\iint_D ydxdy=2\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}ydy=\frac{3}{10}.$$



模块十一 空间解析几何（*数学一）

Ⅰ经典习题

题型一、向量的运算关系

1．若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则有（　　）

（A）$\boldsymbol{a}=0$或者$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$　　（B）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$且$\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$

（C）$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　　（D）$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

2．设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$均为单位向量，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$等于（　　）

（A）1　　（B）$-\dfrac{3}{2}$　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）-1

3．已知三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，其中$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$，$|\boldsymbol{a}|=6,|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=3$，

则$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$________.

4．设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=$________.

题型二、空间直线与平面

5．设有直线$L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$及平面$\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线$L$（　　）

（A）平行于π　　（B）在π上　　（C）垂直于π　　（D）与π斜交

6．直线$L_1:\begin{cases}x+2y-z=7\\-2x+y+z=7\end{cases}$与$L_2:\begin{cases}3x+6y-3z=8\\2x-y-z=0\end{cases}$之间的关系是（　　）

（A）L_1平行于L_2　　（B）L_1与L_2相交但不垂直

（C）L_1 与 L_2 相交且垂直　　　　　　　　（D）L_1 与 L_2 是异面直线

7．求直线 $L_1: x=\dfrac{y+2}{-4}=z$ 和 $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角.

8．求过直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且垂直于平面 $\prod: 3x+2y-z-5=0$ 的平面方程.

9．点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离为________.

10．设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　　　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

11．两直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与 $L_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=2+2t\end{cases}$ 的关系是（　　）

（A）互相垂直　　　　（B）斜交　　　　（C）互相平行　　　　（D）异面直线

12．已知两条直线的方程是 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$；$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是________.

13．设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，且平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 的值.

14．求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $M_0\left(-3,2,5\right)$ 的直线方程.

15．点 $M(1,2,3)$ 到直线 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的距离.

16．曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

题型三、曲线与曲面

17．求下列旋转曲面方程.

（1）曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴， y 轴.

（2）曲线 $\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴， z 轴.

（3） $A(0,-1,1),B(1,1,0)$ 两点所在的直线分别绕 x 轴， y 轴， z 轴.

18．求下列柱面方程.

（1）准线方程 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ ，母线方向向量为 $\{1,1,1\}$ ；

（2）准线方程 $\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ，母线平行于直线 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

19．求函数 $\begin{cases} 2x^2+y+2z^2=4 \\ x^2+2y-z^2=0 \end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影方程.

20．曲线 $\tau:\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影曲线方程是（　　）

（A） $x^2+20y^2-24x-116=0$　　（B） $4y^2+4z^2-12z-7=0$

（C） $\begin{cases} x^2+20y^2-24x-116=0 \\ z=0 \end{cases}$　　（D） $\begin{cases} 4y^2+4z^2-12z-7=0 \\ x=0 \end{cases}$

21．求直线 $\dfrac{x}{3}=y=\dfrac{z}{2}$ 在平面 $2x+y+z=0$ 上的投影柱面方程.

22．由曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量为________.

Ⅱ参考答案

题型一、向量的运算关系

1.【答案】(D).

【解析】因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，通过移项可以得到$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，再根据向量的运算法则，有$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，那么可以得知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$是垂直的.

2.【答案】(B).

【解析】因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以有$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=0$，即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0$，根据向量的运算$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，又因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为单位向量，那么有$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，即$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$，则由

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$有$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-3$，那么$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{3}{2}$，所以选择(B).

3.【答案】27.

【解析】根据向量运算的几何意义求解：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一个和$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均垂直的向量，它的长度为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\dfrac{\pi}{6}=9$，而$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=27\cos\theta$，其中$\theta$是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角，由于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$都是与向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$垂直的，可知$\theta=0$或$\pi$，故$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=27$或$-27$，故可知$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=27$.

4.【答案】4.

【解析】利用向量运算律有

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$$
$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$$
$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$$
$$=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.$$

题型二、空间直线与平面

5.【答案】（C）.

【解析】平面 π 为 $4x-2y+z=2$，可得平面 π 的法向量为 $\mathbf{n}_1=\{4,-2,1\}$，又由直线 L 为 $\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，可得直线 L 的方向向量为

$$\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=-28\mathbf{i}+14\mathbf{j}-7\mathbf{k},$$

即 $\mathbf{n}_2=\{-28,14,-7\}$，$\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 成比例，故 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 共线，可知直线 L 与平面 π 垂直，故选（C）.

6.【答案】（A）.

【解析】由直线 L_1：$\begin{cases}x+2y-z=7\\-2x+y+z=7\end{cases}$，可得直线 L_1 的方向向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\-2&1&1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$

即 $\boldsymbol{n}_1=\{3,1,5\}$.直线 L_2：$\begin{cases}3x+6y-3z=8\\2x-y-z=0\end{cases}$，可得直线 L_2 的方向向量为

$$\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&6&-3\\2&-1&-1\end{vmatrix}=-9\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k},$$

即 $\boldsymbol{n}_2=\{-9,-3,-15\}$，因 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 成比例，可知 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 是共线的，则直线 L_1 与直线 L_2 是平行的.故选（A）.

7.【答案】$\dfrac{\pi}{4}$.

【解析】由题可知直线 L_1 的方向向量为 $\mathbf{l}_1=\{1,-4,1\}$，直线 L_2 的方向向量为 $\mathbf{l}_2=\{2,-2,-1\}$，那么夹角的余弦为 $\cos\langle\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\rangle=\dfrac{\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{l}_2}{|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2|}=\dfrac{2+8-1}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

可知 L_1 和 L_2 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

8.【答案】$x-8y-13z=-9$.

【解析】直线 L 的方向向量为 $s=\{2,-3,2\}$，平面 $\prod$ 的法向量为 $n_1=\{3,2,-1\}$，

则所求平面的法向量为 $n=s\times n_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-i+8j+13k$，

则所求平面方程为 $-(x-1)+8(y+2)+13(z-2)=0$

即 $x-8y-13z=-9$.

9.【答案】$\sqrt{2}$.

【解析】根据点到平面的距离公式 $d=\dfrac{|3\cdot 2+4\cdot 1+5\cdot 0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}$.

10.【答案】（C）.

【解析】直线 L_1 的方向向量为 $\mathbf{l}_1=\{1,-2,1\}$，由直线 $L_2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的方程可以得到 L_2 的方向向量为 $\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}=\{-1,-1,2\}$，$L_1$ 与 L_2 的夹角的余弦为

$\cos\langle\mathbf{l}_1,\mathbf{n}_2\rangle=\dfrac{\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{l}_1||\mathbf{n}_2|}=\dfrac{-1+2+2}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{1}{2}$，$L_1$ 与 L_2 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

11.【答案】(B).

【解析】方法一：两条直线 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\alpha_1=\{2,3,4\}$，$\alpha_2=\{1,1,2\}$ 不成比比例，所以两条直线不平行. 且易求得两直线有交点 $(0,-3,0)$，故为斜交.

方法二：由于 $\begin{vmatrix}1&1&2\\2&3&4\\1&1&2\end{vmatrix}=0$，故直线 L_1 与 L_2 共面，又已知两直线不平行，故两直线斜交.

12.【答案】$x-3y+z+2=0$.

【解析】直线 L_1 的方向向量为 $\mathbf{l}_1=\{1,0,-1\}$，直线 L_2 的方向向量为 $\mathbf{l}_2=\{2,1,1\}$，那么所求平面的法向量为 $\mathbf{n}=\mathbf{l}_1\times\mathbf{l}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$，又因为所求的平面过直线 L_1，可知它过点 $(1,2,3)$，根据点法式可以得到平面方程 $(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$，即 $x-3y+z+2=0$.

13.【答案】$a=-5,b=-2$.

【解析】曲面在点 $(1,-2,5)$ 处的法向量为 $n=\{2x,2y,-1\}\Big|_{(1,-2,5)}=(2,-4,-1)$

切平面的方程为 $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，

即 $2x-4y-z-5=0$，

L 的方程可化为 $\begin{cases}y=-x-b\\z=(1-a)x-ab-3\end{cases}$，

代入平面 π 方程得 $(5+a)x+4b+ab-2=0$，

得 $a=-5,b=-2$.

14.【答案】$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

【解析】设两平面的交线的方向向量为α，计算可得$\alpha=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=\{-4,-3,-1\}$，

则所求直线方程的方向向量可记为$\{4,3,1\}$，则直线方程的标准式方程为

$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

15.【答案】$\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$.

【解析】因为直线L的方程为$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$，可以得到直线上有一点$(0,4,3)$，该点和点$M(1,2,3)$连线得到一个向量$\mathbf{l}=\{1,-2,0\}$，直线$L$的方向向量为$\mathbf{n}=\{1,-3,-2\}$，则点$M$到直线$L$的距离为

$$\boldsymbol{d}=\frac{|\mathbf{l}\times\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{\left|4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+(-1)\boldsymbol{k}\right|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

16.【答案】$2x+2y-z-3=0$.

【解析】因为$2x+2y-z=0$，所以法向量为$\{2,2,-1\}$.因为$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$，所以法向量为$\{x,2y,-1\}$，则有$\dfrac{x}{2}=\dfrac{2y}{2}=\dfrac{-1}{-1}$，可以得到$x=2,y=1$，代入曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$，可得$z=3$，所以有$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$，整理可得$2x+2y-z-3=0$.

题型三、曲线与曲面

17.【答案】(1)绕 x 轴 $x^2+2y^2+2z^2=1$， y 轴 $x^2+2y^2+z^2=1$；

(2)绕 x 轴 $x^4=y^2+z^2$， z 轴 $z=x^2+y^2$；

(3)绕 x 轴 $y^2+z^2=(2x-1)^2+(x-1)^2$， y 轴 $x^2+z^2=\dfrac{y^2+1}{2}$，

z 轴 $x^2+y^2=(1-z)^2+(1-2z)^2$.

【解析】(1) $\begin{cases}x^2+2y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转，找到不变的量是 x，以及到 x 轴的距离，那么有 $\begin{cases}x=x_0\\ y^2+z^2={y_0}^2+{z_0}^2\end{cases}$. 又点 (x_0,y_0,z_0) 在曲线 $\begin{cases}x^2+2y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 上，故有 $\begin{cases}{x_0}^2+2{y_0}^2=1\\ z_0=0\end{cases}$，

带入得 $y^2+z^2={y_0}^2+{z_0}^2={y_0}^2=\dfrac{1-{x_0}^2}{2}=\dfrac{1-x^2}{2}$ 即 $x^2+2y^2+2z^2=1$.

同理，绕 y 轴旋转方程为 $x^2+y^2+2z^2=1$.

(2) $\begin{cases}z=x^2\\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴转，找到不变的量是 x，以及到 x 轴的距离，那么有 $\begin{cases}x=x_0\\ y^2+z^2={y_0}^2+{z_0}^2\end{cases}$. 又点 (x_0,y_0,z_0) 在曲线 $\begin{cases}z=x^2\\ y=0\end{cases}$ 上，故有 $\begin{cases}z_0={x_0}^2\\ y_0=0\end{cases}$，带入得

$y^2+z^2={y_0}^2+{z_0}^2={z_0}^2={x_0}^4=x^4$ 即 $x^4=y^2+z^2$.

同理，绕 z 轴旋转方程为 $z=x^2+y^2$.

(3)由题可写出直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\\ z=1-t\end{cases}$，绕 x 轴旋转时，不变量是 x 和到 x 轴的距离，可知

$\begin{cases} x = x_0 \\ y^2 + z^2 = y_0^2 + z_0^2 \end{cases}$，其中 (x_0, y_0, z_0) 满足 $\begin{cases} x_0 = t \\ y_0 = -1 + 2t \\ z_0 = 1 - t \end{cases}$，将其代入 $\begin{cases} x = x_0 \\ y^2 + z^2 = y_0^2 + z_0^2 \end{cases}$ 中，消去 t，可得旋转曲面方程为 $y^2 + z^2 = (1-x)^2 + (2x-1)^2$.同理可得直线 AB 绕 y 轴旋转的曲面方程为 $x^2 + z^2 = \frac{y^2+1}{2}$，绕 z 轴旋转的曲面方程为 $x^2 + y^2 = (1-z)^2 + (1-2z)^2$.

18.【答案】（1）$\left(\frac{2x-y-z+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y-x-z+1}{3}\right)^2 = 1$；

（2）$(y+z)^2 + 2(x+z)^2 + 3(x+y+2z)^2 = 1$.

【解析】（1）设曲线上的点为 (x, y, z) 沿着母线方向移动后的点为 (X, Y, Z)，那么有 $\begin{cases} X = x + t \\ Y = y + t \\ Z = z + t \end{cases}$，也即 $\begin{cases} x = X - t \cdots\cdots(1) \\ y = Y - t \cdots\cdots(2) \\ z = Z - t \cdots\cdots(3) \end{cases}$，将它们代入准线方程 $x + y + z = 1$ 中得 $t = \frac{X+Y+Z-1}{3}$，再将其代入等式 $(1)(2)$ 可得 $\begin{cases} x = \frac{2X-Y-Z+1}{3} \ldots\ldots(4) \\ y = \frac{2Y-X-Z+1}{3} \ldots\ldots(5) \end{cases}$，再将等式 $(4)(5)$ 代入准线方程 $x^2 + y^2 = 1$ 可以得到柱面方程为 $\left(\frac{2X-Y-Z+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2Y-X-Z+1}{3}\right)^2 = 1$，即

$$\left(\frac{2x-y-z+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y-x-z+1}{3}\right)^2 = 1.$$

（2）设曲线上的点为 (x, y, z) 沿着母线方向移动后的点为 (X, Y, Z)，那么有 $\begin{cases} X = x - t \\ Y = y - t \\ Z = z + t \end{cases}$，

也即$\begin{cases} x = X + t \cdots\cdots(1) \\ y = Y + t \cdots\cdots(2) \\ z = Z - t \cdots\cdots(3) \end{cases}$，将它们代入准线方程$x + y + z = 0$中得$t = -X - Y - Z$，再

将其代入等式(1)(2)(3)可得$\begin{cases} x = -Y - Z \cdots\cdots(4) \\ y = -X - Z \cdots\cdots(5) \\ z = 2Z + X + Y \cdots\cdots(6) \end{cases}$，再将等式(4)(5)(6)代入准线方程$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$可以得到柱面方程为$(Y+Z)^2 + 2(X+Z)^2 + 3(X+Y+2Z)^2 = 1$，即

$(y+z)^2 + 2(x+z)^2 + 3(x+y+2z)^2 = 1$.

19.【答案】$xoy:\begin{cases} 4x^2 + 5y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$；$xoz:\begin{cases} 3x^2 + 5z^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases}$；$yoz:\begin{cases} -3y + 4z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.

【解析】在xoy平面上的投影：将方程$\begin{cases} 2x^2 + y + 2z^2 = 4 \\ x^2 + 2y - z^2 = 0 \end{cases}$消去变量$z$，那么有

$\begin{cases} 4x^2 + 5y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

在xoz平面上的投影：将方程$\begin{cases} 2x^2 + y + 2z^2 = 4 \\ x^2 + 2y - z^2 = 0 \end{cases}$消去变量$y$，那么有$\begin{cases} 3x^2 + 5z^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases}$.

在yoz平面上的投影：将方程$\begin{cases} 2x^2 + y + 2z^2 = 4 \\ x^2 + 2y - z^2 = 0 \end{cases}$消去变量$x$，那么有$\begin{cases} -3y + 4z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.

20.【答案】（C）.

【解析】要求曲线在xoy平面上的投影曲线，即将方程$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{5} = 1 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$消去变量$z$，

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{5} = 1 \cdots\cdots(1) \\ x - 2z + 3 = 0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$把方程(2)整理可以到$z = \dfrac{1}{2}(x+3)$，代入方程(1)可以得到

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{\frac{1}{4}(x+3)^2}{5}=1$，整理可得 $x^2+20y^2-24x-116=0$，故在 xoy 投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2+20y^2-24x-116=0 \\ z=0 \end{cases}$.

21.【答案】$x-y-z=0$.

【解析】投影柱面的求法与普通柱面的求法是一样的，这里只需注意母线方向向量即为投影平面的法向量. 设准线上一点坐标为 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$，其满足准线方程 $\dfrac{x_0}{3}=y_0=\dfrac{z_0}{2}$. 设柱面母线上一点为 $\left(x,y,z\right)$，则有 $\dfrac{x-x_0}{2}=\dfrac{y-y_0}{1}=\dfrac{z-z_0}{1}=t$，解得 $\begin{cases} x_0=x-2t \\ y_0=y-t \\ z_0=z-t \end{cases}$，将其代入到准线方程中，有 $\dfrac{x-2t}{3}=y-t=\dfrac{z-t}{2}$，从中消去参数 t，可得投影柱面方程为 $x-y-z=0$.

22.【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

【解析】先写出旋转面 S 的方程：$3(x^2+z^2)+2y^2=12$，令 $F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12$，则可知 S 在任意一点 (x,y,z) 的法向量为 $\mathbf{n}=\pm\left\{\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\}=\pm\{6x,4y,6z\}$，所以在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的法向量为 $\mathbf{n}=\pm\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}=\pm2\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}$，因题要求指向外侧，故应取正号,单位法向量为 $\mathbf{n}_0=\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{2\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}}{\sqrt{0+(4\sqrt{3})^2+(6\sqrt{2})^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{30}}\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

模块十二 三重积分（*数学一）

Ⅰ经典习题

1．计算$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中$\Omega$由平面$x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$和$z=0$围成.

2．计算$I=\iiint\limits_{\Omega} xzdxdydz$，其中$\Omega$由抛物柱面$y=x^2$与平面$z=y$，$y=1$和$z=0$所围成的区域.

3．求$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$，其中$\Omega$：$x^2+y^2+x^2\le R^2$.

4．计算$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$，区域$\Omega$是由$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围成的区域.

5．计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(2+x+y+z)^{-3}dxdydz$，其中$\Omega$是由平面$x+y+z=2$，$x=0$，$y=0$和$z=0$围成.

6．计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2$，$z=8$所围成的空间区域.

7．设空间区域Ω_1：$x^2+y^2+z^2\le 2z$，Ω_2：$x^2+y^2+z^2\le 2z,x\ge 0,y\ge 0$，则下列错误的是（　　）

（A）$\iiint\limits_{\Omega_2} xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega_2} ydxdydz$　　（B）$\iiint\limits_{\Omega_2} xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega_2} zdxdydz$

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1} zdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2} zdxdydz$　　（D）$\iiint\limits_{\Omega_1} xzdxdydz=0$

8．求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在区域$x^2+y^2+z^2\le 2z$上的平均值.

9．已知$f(x)$为可微函数，

（1）计算$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$；

（2）计算 $F'(t)$.

II 参考答案

1.【答案】$\dfrac{1}{24}$.

【解析】使用“先二后一”积分方法进行计算，

$$\iiint_{\Omega} xdxdydz = \int_0^1 xdx \iint_{y+z\le 1-x} dydz = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{24}.$$

2.【答案】0 .

【解析】使用对称性，被积函数关于 x 为奇函数，被积区域关于 yoz 平面对称，故积分为0 .

3.【答案】$\dfrac{4}{5}\pi R^5$.

【解析】注意到积分区域分别关于 xoy, yoz, xoz 面对称，所以首先利用对称性可知，

$\iiint_{\Omega}\left(xy + xz + yz\right)dxdydz = 0$ ，从而可知

$$I = \iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz + 2\iiint_{\Omega}(xy + yz + zx)dxdydz$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{4}{5}\pi R^5.$$

4. 【答案】$\dfrac{4}{5}\pi abc$.

【解析】方法一：将积分拆分为三个积分，即

$I = \iiint_{\Omega}\dfrac{x^2}{a^2}dxdydz + \iiint_{\Omega}\dfrac{y^2}{b^2}dxdydz + \iiint_{\Omega}\dfrac{z^2}{c^2}dxdydz$ ，分别对每个积分利用先二后一法计算，其中

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}dxdydz=\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}dz\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}}dxdy=\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\pi\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)dz$$

$$=\pi ab\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{15}\pi abc,$$

同理可得 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}\frac{y^2}{b^2}dxdydz=\frac{4}{15}\pi abc$，故 $I=3\cdot\frac{4}{15}\pi abc=\frac{4}{5}\pi abc$.

方法二：使用球面坐标，令 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$，则 $dxdydz=abcr^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}r^2abcr^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{4}{5}\pi abc.$$

5.【答案】$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$.

【解析】积分区域可表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le z\le 2-x-y,0\le y\le 2-x,0\le x\le 2\}$，于是有

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(2+x+y+z)^3}dxdydz=\int_0^2dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y}\frac{1}{(2+x+y+z)^3}dz$$

$$=\int_0^2dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y}\frac{1}{(2+x+y+z)^3}d(2+x+y+z)$$

$$=\int_0^2dx\int_0^{2-x}\left[-\frac{1}{32}+\frac{1}{2}\frac{1}{(2+x+y)^2}\right]dy=\int_0^2\left[-\frac{1}{32}(2-x)-\frac{1}{2}\frac{1}{2+x+y}\Bigg|_0^{2-x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

6.【答案】336π.

【解析】z 轴为旋转轴，因而旋转曲面方程为 $x^2+y^2=2z$，$2\le z\le 8$，可用先二后一

法计算. $I=\int_2^8 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3dr=336\pi$.

7.【答案】（B）.

【解析】被积区域Ω_2关于$y=x$平面对称，但是不关于$y=z$，$z=x$平面对称，根据轮换对称性可知（A）选项$\iiint\limits_{\Omega_2}xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega_2}ydxdydz$正确，而（B）$\iiint\limits_{\Omega_2}xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega_2}zdxdydz$错误，又被积区域$\Omega_1$关于$yoz$，$xoz$平面对称，根据奇偶性可知（C）（D）正确，因此选（B）.

8.【答案】$\frac{8}{5}$.

【解析】易知区域$x^2+y^2+z^2\le 2z$为$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，故其体积为$V=\frac{4}{3}\pi$，利用球面坐标变换$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，那么

$$f=\frac{1}{V}\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dv=\frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi dr$$

$$=\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{5}.$$

9.【答案】（1）$4\pi\int_0^t f(r^2)r^2dr$；（2）$4\pi t^2 f(t^2)$.

【解析】（1）积分区域为以原点为球心，半径为t的球，可以用球坐标进行积分，则

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr$$

$=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2dr$；（2）$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$.

模块一　行列式

Ⅰ经典习题

题型一、低阶行列式的计算

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3a_{11} & 3a_{21} & 3a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11}+a_{12} & a_{21}+a_{22} & a_{31}+a_{32} \end{bmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}|=n$，则 $|\boldsymbol{B}|=$（　）

（A）n　　（B）$-27n$　　（C）$3n$　　（D）$-3n$

2. $\begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ -1 & 2-b & c & 0 \\ 0 & -2 & 3-c & d \\ 0 & 0 & -3 & 4-d \end{vmatrix}=$（　）

（A）22　　（B）23　　（C）24　　（D）25

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________。

4. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$，则第 4 行元素代数余子式之和的值为________。

5. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$ ________。

6. 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2x_1+4 & 2x_1^2-3x_1 & 4x_1^3-6x_1^2 \\ 1 & 2x_2+4 & 2x_2^2-3x_2 & 4x_2^3-6x_2^2 \\ 1 & 2x_3+4 & 2x_3^2-3x_3 & 4x_3^3-6x_3^2 \\ 1 & 2x_4+4 & 2x_4^2-3x_4 & 4x_4^3-6x_4^2 \end{vmatrix}$。

题型二、高阶行列式的计算

7. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ a_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}(a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$。

8. 计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$。

9. 计算行列式$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 2a_1 & 2a_2-b_2 & \cdots & 2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na_1 & na_2 & \cdots & na_n-b_n \end{vmatrix}(b_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$。

10. 计算下列行列式

（1）$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$；（2）$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & n+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & n+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$。

11．计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}$。

12．计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&&&&\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&&&\\&1&\alpha+\beta&\alpha\beta&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&\alpha+\beta&\alpha\beta\\&&&&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}$。

13．计算 $D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&x&\cdots&x&x\\1&x&0&\cdots&x&x\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&x&x&\cdots&0&x\\1&x&x&\cdots&x&0\end{vmatrix}$，其中 $n>2$，$x\neq0$。

14．计算 $D_n=\begin{vmatrix}a_1+x&a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&a_2+x&a_2&\cdots&a_2\\a_3&a_3&a_3+x&\cdots&a_3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&a_n&a_n&\cdots&a_n+x\end{vmatrix}$。

Ⅱ参考答案

题型一、低阶行列式的计算

1.【答案】(D)。

【解析】利用行列式性质：

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{21} & 3a_{31}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\\ a_{11}+a_{12} & a_{21}+a_{22} & a_{31}+a_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{21} & 3a_{31}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{21} & 3a_{31}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\\ a_{11} & a_{21} & a_{31}\end{vmatrix}$$

由于上式中最后一个行列式第一行和第三行成比例，行列式为0，从而

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}3a_{11} & 3a_{21} & 3a_{31}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-3|\boldsymbol{A}|=-3n\text{。}$$

2.【答案】(C)。

【解析】利用行列式的性质，

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}1 & b & 0 & 0\\ -1 & 2-b & c & 0\\ 0 & -2 & 3-c & d\\ 0 & 0 & -3 & 4-d\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}1 & b & 0 & 0\\ 0 & 2 & c & 0\\ 0 & 0 & 3 & d\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=24\text{。}$$

其中（1）：将行列式第一行加到第二行上，再将行列式的第二行加到第三行上，再将行列式的第三行加到第四行上。

3.【答案】48。

【解析】利用行列式的性质，将后三行全部加到第一行，提出公因子6，再将第一行的-1倍分别加到后三行，即

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=6\cdot(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}2^3=48\text{。}$$

4.【答案】0。

【解析】对于代数余子式之和的题目，利用展开定理

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\2&1&1&4\\1&2&2&5\\1&1&1&1\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\0&3&3&6\\0&3&3&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0,$$

其中（1）：将行列式第一行的-2倍加到第二行上，将行列式的第一行的-1倍加到第三行上。

5.【答案】12。

【解析】$\begin{vmatrix}2&5&10&17\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&2&3&4\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&2&3&4\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$

$$=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=12。$$

其中（1）：将行列式第二行的-1倍加到第一行上。

6.【答案】$16\prod\limits_{1\le i<j\le 4}(x_j-x_i)$。

【解析】：

$$\begin{vmatrix}1&2x_1+4&2x_1^2-3x_1&4x_1^3-6x_1^2\\1&2x_2+4&2x_2^2-3x_2&4x_2^3-6x_2^2\\1&2x_3+4&2x_3^2-3x_3&4x_3^3-6x_3^2\\1&2x_4+4&2x_4^2-3x_4&4x_4^3-6x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2x_1&2x_1^2&4x_1^3\\1&2x_2&2x_2^2&4x_2^3\\1&2x_3&2x_3^2&4x_3^3\\1&2x_4&2x_4^2&4x_4^3\end{vmatrix}=16\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&x_1^3\\1&x_2&x_2^2&x_2^3\\1&x_3&x_3^2&x_3^3\\1&x_4&x_4^2&x_4^3\end{vmatrix}$$

$$=16\prod_{1\le i<j\le 4}(x_j-x_i)$$

题型二、高阶行列式的计算

7.【答案】$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod\limits_{i=2}^{n}a_i$。

【解析】

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots & 1 \\ a_n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & a_1-\dfrac{1}{a_2}-\cdots-\dfrac{1}{a_n} \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n}a_i 。$$

其中（1）：第一列的$-\dfrac{1}{a_n}$倍加到第n列，第二列的$-\dfrac{1}{a_{n-1}}$倍加到第n列，……，第$n-1$列的$-\dfrac{1}{a_2}$倍加到第n列。

8.【答案】$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(n+1)^{n-1}$。

【解析】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ -n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 1\cdot(-n-1)^{(n-1)}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(n+1)^{n-1}。$$

其中（1）：将第二行至第n行均加到第一行，然后将第一行的-1提取；（2）将第一行的-1倍依次加到第二行至第n行。

9.【答案】$\left(a_1-b_1+b_1\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{ia_i}{b_i}\right)(-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}b_i$。

【解析】$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 2a_1 & 2a_2-b_2 & \cdots & 2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na_1 & na_2 & \cdots & na_n-b_n \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 2b_1 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3b_1 & 0 & -b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nb_1 & 0 & 0 & \cdots & -b_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix} a_1-b_1+b_1\sum_{i=2}^{n}\frac{ia_i}{b_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_n \end{vmatrix}=\left(a_1-b_1+b_1\sum_{i=2}^{n}\frac{ia_i}{b_i}\right)(-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}b_i。$$

其中，（1）：第一行的$-i$倍依次加到第i行，其中$i=2,3,\cdots n$；（2）：第二列的$\frac{2b_1}{b_2}$倍加到第一列．第三列的$\frac{3b_1}{b_3}$倍加到第一列，……第n列的$\frac{nb_1}{b_n}$倍加到第一列。

10.【答案】（1）$(n-1)!$；（2）$(n-1)!$。

【解析】

（1）

$$D_n\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=(n-1)!$$

其中，（1）：将第一行的-1倍分别加到其余各行；

（2）

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & n+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & n+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(n-1)!$$

。

其中，（1）第一行的-1倍依次加到其余各行上；

11.【答案】6。

【解析】将行列式按照第一行展开：

$$D_5=2D_4+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=2D_4-D_3,$$

从而 $D_5-D_4=D_4-D_3=D_3-D_2=D_2-D_1=3-2=1$，

$D_5=D_4+1=D_3+1+1=D_2+1+1+1=D_1+1+1+1+1=6$。

12.【答案】$\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$。

【解析】利用递推公式，将 D_n 按照第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&&&&\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&&&\\&1&\alpha+\beta&\alpha\beta&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&\alpha+\beta&\alpha\beta\\&&&&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

即 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$，则数列 $\{D_n-\alpha D_{n-1}\}$ 是以首项为 $D_2-\alpha D_1=\beta^2$，

公比为 β 的等比数列，故 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2\beta^{n-2}=\beta^n$，所以

$D_n=\alpha D_{n-1}+\beta^n=\alpha(\alpha D_{n-2}+\beta^{n-1})+\beta^n=\cdots=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$。

13.【答案】$(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$。

【解析】

$$D_n\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&-x&0&\cdots&0&0\\1&0&-x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-x&0\\1&0&0&\cdots&0&-x\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix}\frac{n-1}{x}&1&1&\cdots&1&1\\0&-x&0&\cdots&0&0\\0&0&-x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-x&0\\0&0&0&\cdots&0&-x\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}。$$

其中，(1)：将第一行的 $-x$ 倍依次加到其余各行；(2)：第二列至第 n 列的 $\frac{1}{x}$（$x\neq0$）

倍加到第一列。

14.【答案】$(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)x^{n-1}$。

【解析】方法一：

$$D_n\overset{(1)}{=}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_2+x & a_2 & \cdots & a_2\\ a_3 & a_3 & a_3+x & \cdots & a_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n+x\end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)x^{n-1}。$$

其中，(1)：将第二至n行都加到第一行上，第一行提出公因子$x+\sum_{i=1}^{n}a_i$；(2)：将第一行的$-a_i$倍分别加到第$i(i=2,\cdots,n)$行。

方法二：

$$D_n\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}a_1+x & -x & -x & \cdots & -x & -x\\ a_2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & 0\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix}x+\sum_{i=1}^{n}a_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & 0\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)x^{n-1}。$$

其中，(1)：将第一列的-1倍依次加到第二至n列；(2)：将第二至n行都加到第一行上。

模块二 矩阵

丨经典习题

题型一、矩阵的定义及常见的运算法则

1．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为同阶单位矩阵判断下列命题的正误。

（1）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；

（2）$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$；

（3）$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{A}^3+3\lambda\boldsymbol{A}^2+3\lambda^2\boldsymbol{A}+\lambda^3\boldsymbol{E}$ (λ 为常数)；

（4）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换，则 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B})$ 与 $(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B})$ 也可交换。

2．已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵，证明：
（1）$\boldsymbol{A}^2$ 为对称矩阵；（2）$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为反对称矩阵。

题型二、矩阵方幂的计算

3．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k\,(k\geq 3)$。

4．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda&1&3\\0&\lambda&2\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n\,(n\geq 3)$。

5．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

6．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&2&0&0\\0&2&2&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&4\\0&0&0&2&8\end{bmatrix}$，求 $A^n(n\geq 3)$。

7．已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,3,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，则 $\boldsymbol{A}^n=$

________。

题型三、分块矩阵的运算

8．计算 $\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\1&2&2&3\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\-2&3&-1&3\\1&-2&1&-2\end{bmatrix}$。

9．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$，求 $\left|\boldsymbol{A}^8\right|$ 及 $\boldsymbol{A}^4$。

题型四、方阵的行列式

10．假设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\5&0&-2\end{bmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})$ 的行列式。

11．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均为四维列向量，且 $\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\right|=m$，

$\left|\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=n$，则 $\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\right|=$（　　）

（A）$m+n$　　（B）$m-n$　　（C）$-(m+n)$　　（D）$n-m$

12．设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 是3阶矩阵，则 $\left|\boldsymbol{A}\right|=$（　　）

（A）$\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1\right|$　　（B）$\left|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\right|$

（C）$\left|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right|$　　（D）$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right|$

13．设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 是 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，若 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_2]$，则 $|\boldsymbol{B}|=$________。

14. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]$，$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\right]$，若 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$（　　）

（A）0　　（B）2　　（C）$1+(-1)^{n+1}$　　（D）$1+(-1)^n$

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=$________。

16．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$________。

Ⅱ参考答案

题型一、矩阵的定义及常见的运算法则

1.【答案】（1）错误。（2）错误。（3）正确。（4）正确。

【解析】（1）错误。$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$

当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 上式成立；

（2）错误。$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{ABAB}$ 只有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，

$\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$ 上式成立；

（3）正确。因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}$ 可交换，故 $(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^3$ 可以二项展开，由二项展开定理可知

$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{A}^3+3\lambda\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{E}+3\lambda^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}^2+\lambda^3\boldsymbol{E}^3=\boldsymbol{A}^3+3\lambda\boldsymbol{A}^2+3\lambda^2\boldsymbol{A}+\lambda^3\boldsymbol{E}$ 正确。

（4）正确。当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，

则 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+k\boldsymbol{BA}+t\boldsymbol{AB}+kt\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2+(k+t)\boldsymbol{AB}+kt\boldsymbol{B}^2$

$(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+t\boldsymbol{BA}+k\boldsymbol{AB}+kt\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2+(k+t)\boldsymbol{AB}+kt\boldsymbol{B}^2$。

故 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B})$，即 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B})$ 与 $(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B})$ 也可交换。

2.【证明】

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^T=-\boldsymbol{B}$。

（1）$(\boldsymbol{A}^2)^T=(\boldsymbol{AA})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}^T=(-\boldsymbol{A})(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2$，所以 $\boldsymbol{A}^2$ 为对称矩阵；

（2）$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^T=(\boldsymbol{AB})^T-(\boldsymbol{BA})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})$，所以 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵。

题型二、矩阵方幂的计算

3.【答案】$\begin{bmatrix} 1 & 2k & 3k^2+k \\ 0 & 1 & 3k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

【解析】对于形如$\begin{bmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$的矩阵求$n$次幂时，可用二项式展开定理。

记$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{O}\text{，则 }\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}(k\geq 3)\text{，}$$

所以当$k\geq 3$时，

$$\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\right)^k=C_k^0\boldsymbol{E}^k\boldsymbol{B}^0+C_k^1\boldsymbol{E}^{k-1}\boldsymbol{B}^1+C_k^2\boldsymbol{E}^{k-2}\boldsymbol{B}^2$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\frac{k(k-1)}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2k & 3k^2+k \\ 0 & 1 & 3k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{。}$$

4.【答案】$\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 3n\lambda^{n-1}+n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & 2n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$。

【解析】利用二项式展开定理。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\text{，其中 }\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}(k\geq 3)$$

则$\boldsymbol{A}^n=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=C_n^n(\lambda\boldsymbol{E})^n\boldsymbol{B}^0+C_n^{n-1}(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}^1+C_n^{n-2}(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2$

$$A^n=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}^n+n\lambda^{n-1}\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&3n\lambda^{n-1}+n(n-1)\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&2n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}。$$

5.【答案】$17^{n-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}$。

【解析】$\boldsymbol{A}$各行各列元素成比例，可以写成列向量与行向量的乘积

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^n=\left[\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\right]^n=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right]^{n-1}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$

$$=17^{n-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}。$$

6.**【答案】**$\begin{bmatrix}2^n&n2^n&n(n+1)2^{n-1}&0&0\\0&2^n&n2^n&0&0\\0&0&2^n&0&0\\0&0&0&9^{n-1}&4\cdot9^{n-1}\\0&0&0&2\cdot9^{n-1}&8\cdot9^{n-1}\end{bmatrix}$。

【解析】对$\boldsymbol{A}$分块为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$，其中$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&2&2\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&4\\2&8\end{bmatrix}$，则根据对角矩阵的性质可得$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}$。

另设$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0&2&2\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，进而可求得$\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{J}^k=\boldsymbol{O}(k\ge3)$，

于是 $\boldsymbol{B}^n=(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J})^n=2^n\boldsymbol{E}+C_n^1 2^{n-1}\boldsymbol{J}+C_n^2 2^{n-2}\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix}2^n & n2^n & n(n+1)2^{n-1}\\ 0 & 2^n & n2^n\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}$。

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是各行各列成比例，则可以将其拆成一个列向量和一个行向量的乘积，即 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix},\boldsymbol{C}^n=9^{n-1}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^{n-1} & 4\cdot 9^{n-1}\\ 2\cdot 9^{n-1} & 8\cdot 9^{n-1}\end{bmatrix}$。

所以 $A^n=\begin{bmatrix}2^n & n2^n & n(n+1)2^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & 2^n & n2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9^{n-1} & 4\cdot 9^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot 9^{n-1} & 8\cdot 9^{n-1}\end{bmatrix}$。

7.【答案】$3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ 3 & 1 & \frac{1}{2}\\ 6 & 2 & 1\end{bmatrix}$。

【解析】矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个列向量与一个行向量的乘积，且 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$，所以

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\beta}^T=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ 3 & 1 & \frac{1}{2}\\ 6 & 2 & 1\end{bmatrix}。$$

题型三、分块矩阵的运算

8.【答案】$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

【解析】本题考查分块矩阵的乘法，

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\1&2&2&3\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\-2&3&-1&3\\1&-2&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{C}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}$$

经计算，$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$因此，

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\1&2&2&3\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\-2&3&-1&3\\1&-2&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

9.【答案】$\left|\boldsymbol{A}^8\right|=10^{16}$，$\boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix}625&0&0&0\\0&625&0&0\\0&0&16&0\\0&0&64&16\end{bmatrix}$。

【解析】令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$，则$\left|\boldsymbol{A}^8\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^8=(\left|\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{C}\right|)^8=\left|\boldsymbol{B}\right|^8\left|\boldsymbol{C}\right|^8$，

又$\left|\boldsymbol{B}\right|=\begin{vmatrix}3&4\\4&-3\end{vmatrix}=-25$，$\left|\boldsymbol{C}\right|=\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}=4$，因此$\left|\boldsymbol{A}^8\right|=(-25)^8\times4^8=10^{16}$；

$\boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^4&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^4\end{bmatrix}$，经计算，$\boldsymbol{B}^4=\begin{bmatrix}625&0\\0&625\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}^4=\begin{bmatrix}16&0\\64&16\end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix}625&0&0&0\\0&625&0&0\\0&0&16&0\\0&0&64&16\end{bmatrix}。$$

题型四、方阵的行列式

10.【答案】-400。

【解析】$\left|(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})\right|=\left|(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right|=\left|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}\right|^2\left|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}\right|$

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix}-4&0&0\\0&-5&0\\5&0&-5\end{vmatrix}=-400。$$

11.【答案】(B)。

【解析】$\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\right|=\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right|+\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right|$

$\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right|=(-1)^2\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\right|=m$，$\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right|=(-1)^3\left|\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=-n$

故$\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\right|=m-n$。

12.【答案】(C)。

【解析】

方法一：选项(A)

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1\right|=\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=0$$，不为$\left|\boldsymbol{A}\right|$，故(A)不正确；

选项(B)$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\right|=\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\left|\boldsymbol{A}\right|$$不为$\left|\boldsymbol{A}\right|$，故(B)不正确；

选项(C) $|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|=\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|$；

选项(D) $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|=\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-|\boldsymbol{A}|$，不为 $|\boldsymbol{A}|$，故（D）不正确。

方法二：选项（A）

$$|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,-(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)|=0$$

选项（B）$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|$

$=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$

选项（C）$|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$

选项（D）$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2|=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$

13.【答案】20 。

【解析】方法一：利用行列式的性质

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_1,-2\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_2|=10|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=20$$

方法二：利用矩阵运算

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&5\\2&-2&0\end{bmatrix},$$

$$|\boldsymbol{B}|=\left|[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&5\\2&-2&0\end{bmatrix}\right|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\begin{vmatrix}1&0&0\\-3&1&5\\2&-2&0\end{vmatrix}=2\times10=20。$$

14.【答案】(A)。

【解析】方法一：由矩阵的加法运算性质，

$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,...,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|$。依次将第二列至第 n 列的1倍加到第一列得到：

$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|=0$。

方法二：利用矩阵运算

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|=\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}1&-1&&\dots&0\\0&1&-1&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\dots&-1\\-1&0&0&\dots&1\end{bmatrix}\right|$$

$$=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n|\cdot\begin{vmatrix}1&-1&&\dots&0\\0&1&-1&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\dots&-1\\-1&0&0&\dots&1\end{vmatrix}=0\text{。}$$

其中
$$\begin{vmatrix}1&-1&&\dots&0\\0&1&-1&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\dots&-1\\-1&0&0&\dots&1\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}1\cdot\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-1\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix}-1&&\cdots&0\\1&-1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}$$

$=1-1=0$。

（1）：按照第一列展开。

15.【答案】$\dfrac{1}{36}$。

【解析】由 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可知：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$，也即

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=|-\boldsymbol{E}|$。由于 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2&0&2&0\\0&3&0&0\\-1&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=36$，故 $|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=\dfrac{1}{36}$。

16.【答案】0。

【解析】$|A+E|=|A+AA^{\mathrm{T}}|=|A||E+A^{\mathrm{T}}|=|A||E+A|$。由于 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E$，则可以得到$|AA^{\mathrm{T}}|=|A|^2=1$，又因为$|A|<0$，可知$|A|=-1$，故$|A+E|=-|A+E|$，故$|A+E|=0$。

模块三 逆矩阵与初等矩阵

Ⅰ经典习题

题型一、逆矩阵的计算

1．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$，使得$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$。

2．已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^{-1}$。

3．已知4阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-2&0&-8\\-1&3&5&2\\1&-3&5&-2\\3&1&-5&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&2&-2&0\\0&1&1&0\\-1&0&1&1\end{bmatrix}$，计算$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{A}^{-1}$。

4. 已知n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，且矩阵$\boldsymbol{B}$为可逆矩阵，满足$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$，证明矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$可逆并求其逆。

5. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为3阶矩阵，$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵，已知$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&-2\\0&5&0\\0&0&7\end{bmatrix}$，则$(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________。

6．设$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$可逆，其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$皆为方阵，求证：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$可逆，并求$\boldsymbol{B}^{-1}$。

7．已知n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2=$________.

题型二、伴随矩阵

8．设$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则下列矩阵中不为正交矩阵的是（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　（B）$\boldsymbol{A}^2$　　（C）$\boldsymbol{A}^*$　　（D）$2\boldsymbol{A}$

9．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则下列等式中，必定成立的是（　　）

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$　　（B）$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

（C）$|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$　　（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$

10．已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 -3，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，如果 $k\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^*+\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\boldsymbol{A}^{-1}$，求 k。

11．已知 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}^*$。

12．设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&2&0\\5&6&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $(A^*)^{-1}$。

13．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{bmatrix}$，求 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}^*$。

14．已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵。

15．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$。

题型三、矩阵方程

16．设3阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$。

17．$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ 且 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$ 其中是3阶 $\boldsymbol{E}$ 单位矩阵，求 $\boldsymbol{B}$。

18. 设 $(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是3阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 是3阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵，

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{C}$。

19．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{X}$。

20．设4阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&-2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$。

题型四、初等变换与初等矩阵

21．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}+2a_{31}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}+2a_{21}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}+2a_{11}&a_{13}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则必有（　　）

（A）$P_1AP_2=B$　（B）$P_2AP_1=B$　（C）$P_1BP_2=A$　（D）$P_2BP_1=A$

22. 设 A 为3阶矩阵，将 A 的第2行加到第1行得 B，再将 B 的第1列的 -1 倍加到第2列得 C，记 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则（　）

（A）$C=P^{-1}AP$　（B）$C=PAP^{-1}$　（C）$C=P^{\mathrm{T}}AP$　（D）$C=PAP^{\mathrm{T}}$

23. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为3阶矩阵，$|A|=1$，$B=(\alpha_3,\alpha_2+\alpha_1,\alpha_1)$，试计算 B^*A。

Ⅱ参考答案

题型一、逆矩阵的计算

1.【答案】$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$。

【解析】由 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，可知$|\boldsymbol{A}|=1$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\boldsymbol{A}^*$。二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 即为“主对调，副变号”，即 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$。

2.【答案】$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$。

【解析】求阶数大于 2 的数值型矩阵的逆矩阵可用$[\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{E}]\to[\boldsymbol{E} \,\vdots\, \boldsymbol{A}^{-1}]$，注意这里只能进行初等行变换，

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right]\text{所以 }\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}。$$

3.【答案】$\boldsymbol{AB}=10\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & -1 & 1 & 3\\ -2 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 5 & 5 & -5\\ -8 & 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$。

【解析】利用矩阵乘法可得，

$$AB=\begin{bmatrix}4&-2&0&-8\\-1&3&5&2\\1&-3&5&-2\\3&1&-5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&2&-2&0\\0&1&1&0\\-1&0&1&1\end{bmatrix}=10E,$$

即 $A(\frac{1}{10}B)=E$，因此 $A^{-1}=\frac{1}{10}B=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&2&-2&0\\0&1&1&0\\-1&0&1&1\end{bmatrix}$。

4.【答案】$A^{-1}=(A+2B)\left(-B^2\right)^{-1}$；$(A+2B)^{-1}=\left(-B^2\right)^{-1}A$。

【解析】由 $A^2+2AB+B^2=O$ 可得 $A(A+2B)=-B^2$，两边同时取行列式可得

$|A||A+2B|=\left|-B^2\right|$。因为 B 为可逆矩阵，所以 $|B|\neq 0$，则有 $|A|\neq 0,|A+2B|\neq 0$，故矩阵 A 与 $A+2B$ 可逆。

由 $A(A+2B)=-B^2$，两边同时右乘 $\left(-B^2\right)^{-1}$，可得 $A(A+2B)\left(-B^2\right)^{-1}=E$，则有

$A^{-1}=(A+2B)\left(-B^2\right)^{-1}$。

两边同时左乘 $\left(-B^2\right)^{-1}$，可得 $\left(-B^2\right)^{-1}A(A+2B)=E$，则有 $(A+2B)^{-1}=\left(-B^2\right)^{-1}A$。

5.【答案】$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$。

【解析】对 $AB=2A+B$ 移项并提公因式，可得 $(A-E)(B-2E)=2E$。进一步有

$\left(\dfrac{A-E}{2}\right)(B-2E)=E$，故 $(B-2E)^{-1}=\dfrac{A-E}{2}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$。

6. 【答案】$B^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&O\\-D^{-1}CA^{-1}&D^{-1}\end{bmatrix}$。

【解析】因为 B 可逆，根据分块对角矩阵性质可得 $|B|=|A||D|\neq 0$，则 $|A|\neq 0,|D|\neq 0$，

则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 可逆。

设 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}$，由于

$\boldsymbol{BX}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AX}_1 & \boldsymbol{AX}_2\\ \boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{DX}_3 & \boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{DX}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2\end{bmatrix}$，利用矩阵乘法

定义可得 $\begin{cases}\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{DX}_3=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{DX}_4=\boldsymbol{E}_2\end{cases}$，进而可得 $\begin{cases}\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}\\ \boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{D}^{-1}\end{cases}$，则

$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{bmatrix}$。

7. 【答案】$3\boldsymbol{E}$

【解析】因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均可逆，且可以得到

$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，从而有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}$，故

$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2=3\boldsymbol{E}$。

题型二、伴随矩阵

8.【答案】(D)。

【解析】$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，可知 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$（正交矩阵定义）。

选项（A），$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，可知 $\boldsymbol{A}^T$ 为正交矩阵。

选项（B），$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{A}^2)^T=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{AA})^T=\boldsymbol{AAA}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AA}^T)\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^2$ 为正交矩阵。

选项（C），因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{A}|^2=1$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则根据伴随矩阵的性质可得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$。又由 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$。故

$A^*(A^*)^T=|A|A^{-1}(|A|A^{-1})^T=|A|^2A^{-1}(A^{-1})^T$

$=|A|^2A^T(A^T)^T=|A|^2A^TA=A^TA=E$

可知 A^* 也为正交矩阵。

选项（D），$2A(2A)^T=4AA^T=4E$，可知 $2A$ 不为正交矩阵。

9.【答案】（B）。

【解析】（A）选项，$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$，只有 $AB=BA$，即 A,B 可交换时，才有 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，故选项（A）不正确；

（B）选项，因为 $AB(B^{-1}A^{-1})=E$，所以 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 正确；

（C）选项，$|kA|=k^n|A|$，故选项（C）不正确；

（D）选项，令 $A=B=E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，则 $A^*=B^*=E$，，$(A+B)^*=|A+B|\left(A+B\right)^{-1}=|2E|\left(2E\right)^{-1}=4E$，$(A+B)^*\neq A^*+B^*$ 故选项（D）不正确。

10.【答案】$-\dfrac{9}{28}$。

【解析】因 $|A|=-3$，故根据方阵行列式公式可知 $\left|\dfrac{1}{3}A^T\right|=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3|A^T|=\dfrac{1}{27}|A|=-\dfrac{1}{9}$，

$A^*=|A|A^{-1}=-3A^{-1}$，则 kA 的逆矩阵 $A^*+\left|\dfrac{1}{3}A^{\mathrm{T}}\right|A^{-1}=-3A^{-1}-\dfrac{1}{9}A^{-1}=-\dfrac{28}{9}A^{-1}$。

由逆矩阵的性质可得，$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$，故 $k=-\dfrac{9}{28}$。

11.【答案】$\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&-3&3\\-6&6&-6\end{bmatrix}$。

【解析】因为 $|D|\neq0$，所以矩阵 A,B,C,D 均可逆。在等式 $ABC=D$ 两边同时左乘 A^{-1}，

右乘 $\boldsymbol{C}^{-1}$，可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}$，根据逆矩阵的性质可得，

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

。

由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1}$ 可得，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{C}|^{-1}=1^{-1}\cdot6\cdot(-1)^{-1}=-6$，再根据伴随矩阵的性质可得

$$\boldsymbol{B}^{*}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=-6\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&-3&3\\-6&6&-6\end{bmatrix}。$$

12.【答案】$\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{5}{6}&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$。

【解析】因为矩阵 $|\boldsymbol{A}|=6$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆。根据伴随矩阵的性质可得 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，

则 $$(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&2&0\\5&6&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{5}{6}&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}。$$

13.【答案】$\begin{bmatrix} 4A & O \\ O & 2B \end{bmatrix}$。

【解析】根据题意，二阶矩阵$|A|=1\neq 0$，$|B|=2\neq 0$，故A与B均可逆。则有

$A^*=|A|A^{-1}$，$|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}\neq 0$，同理可知$|B^*|=|B|^{n-1}\neq 0$，故

A^*,B^*均可逆。由$\begin{vmatrix} A^* & O \\ O & B^* \end{vmatrix}=|A^*|\cdot|B^*|\neq 0$可知$\begin{bmatrix} A^* & O \\ O & B^* \end{bmatrix}$也可逆。故根据可逆矩阵伴

随矩阵性质以及$|A|=1,|B|=2$可得，

$$\begin{bmatrix} A^* & O \\ O & B^* \end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix} A^* & O \\ O & B^* \end{vmatrix}\begin{bmatrix} A^* & O \\ O & B^* \end{bmatrix}^{-1}=|A^*||B^*|\begin{bmatrix} (A^*)^{-1} & O \\ O & (B^*)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=|A|^{2-1}|B|^{3-1}\begin{bmatrix} (|A|A^{-1})^{-1} & O \\ O & (|B|B^{-1})^{-1} \end{bmatrix}=|A|^{2-1}|B|^{3-1}\begin{bmatrix} |A|^{-1}A & O \\ O & |B|^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$=1\cdot 2^2\cdot\begin{bmatrix} 1^{-1}A & O \\ O & 2^{-1}B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4A & O \\ O & 2B \end{bmatrix}。$$

14.【答案】$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$。

【解析】由$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$可知，只需计算出$|A|$和$A$即可。

计算可得$|A|=\dfrac{1}{|A^{-1}|}=2$。

$$\left(A^{-1} \vdots E\right)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 & 0\end{array}\right] \rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right]$$

即可得$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$。故$\left(A^{*}\right)^{-1}=\frac{1}{2} A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$。

15.【证明】因为 A 为 n 阶可逆矩阵，则根据可逆矩阵的伴随矩阵性质可得 $A^{*}=|A| A^{-1}$，则 $(A^{*})^{T}=(|A| A^{-1})^{T}=|A|(A^{-1})^{T}=|A|(A^{T})^{-1}=\left|A^{T}\right|(A^{T})^{-1}=(A^{T})^{*}$。

题型三、矩阵方程

16.【答案】$B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

【解析】由于矩阵 A 可逆，所以在等式 $A^{-1} B A=6 A+B A$ 两边同时右乘 A^{-1}，可得

$A^{-1} B=6 E+B$，化简可得 $(A^{-1}-E) B=6 E$。又因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$，所以

$A^{-1}-E=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，显然 $A^{-1}-E$ 也可逆。在等式 $(A^{-1}-E)B=6E$ 两边同时左乘

$(A^{-1}-E)^{-1}$，可得 $B=6(A^{-1}-E)^{-1}=6\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

17.【答案】$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$。

【解析】$AB+E=A^2+B$，可得 $(A-E)B=A^2-E$，因为 $|A-E|\neq 0$，故矩阵 $A-E$ 可逆，则两边同时左乘 $\left(A-E\right)^{-1}$，可得 $B=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$。

18.【答案】$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{9}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$。

【解析】矩阵方程的两端同时左乘矩阵 A，有 $\left(A+2B\right)C^{\mathrm{T}}=E$，有 $C^{\mathrm{T}}=\left(A+2B\right)^{-1}$，

$C=\left(A^{\mathrm{T}}+2B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$。而 $A^{\mathrm{T}}+2B^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\1&0&3\end{bmatrix}$，求其逆矩阵可用初等行变换法，即

$$[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&0&0&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\1&0&3&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&-\frac{1}{9}&0&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

，

故 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{9}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$。

19.【答案】$\boldsymbol{X}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$。

【解析】$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，方程的两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，可得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，即 $(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$。

因为 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$ 为方阵，所以根据逆矩阵的定义可知 $\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}$。由于 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}$，所以

$$[|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&\frac{1}{2}&0&0\\1&1&-1&0&\frac{1}{2}&0\\-1&1&1&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{array}\right],$$

故 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

20.【答案】$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$。

【解析】由于方程中有 $\boldsymbol{A}^*$，故可以考虑利用伴随矩阵的性质 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行化简：方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 可得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{A}$，而 $|\boldsymbol{A}|=-2$，所以 $-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{A}$。又因为 $|\boldsymbol{A}|=-2\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，再在该等式两边同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得 $-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，也即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$。因为矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 均为方阵，则根据逆矩阵定理可得 $\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$，通过初等行变换可得

$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & -4\end{bmatrix}$。

题型四、初等变换与初等矩阵

21.【答案】(B)。

【解析】初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 表示将 $\boldsymbol{E}$ 的第一列的 2 倍加到第二列（或者将 $\boldsymbol{E}$ 的第二行的 2 倍加到第一行），初等矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 表示交换 $\boldsymbol{E}$ 的第一行与第三行（或者交换 $\boldsymbol{E}$ 的第一列与第三列）。将 $\boldsymbol{A}$ 交换第一行与第三行，然后再将第一列的 2 倍加到第二列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$。左乘

初等矩阵相当于对原矩阵作相应的初等行变换，右乘初等矩阵相当于对原矩阵作相应的初等列变换，因此 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$，故选项（B）正确。

22.【答案】（B）。

【解析】矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第二行加到第一行所得，由于左乘初等矩阵相当于对原矩阵作相应的初等行变换，右乘初等矩阵相当于对原矩阵作相应的初等列变换，故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$。令矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则将 $\boldsymbol{E}$ 的第一列的 -1 倍加到第二列即得矩阵 $\boldsymbol{Q}$，

则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BQ}$，从而有 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAQ}$。由于 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$，

故选项（B）正确。

23.【答案】$\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$。

【解析】由题意易知，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一列与第三列交换，再将第三列加到第二列可得 $\boldsymbol{B}$，则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{E}_{32}(1)$。由于 $|\boldsymbol{A}|=1$，由行列式的性质可知 $|\boldsymbol{B}|=-1$，因此矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，则根据逆矩阵伴随矩阵性质可得

$$\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=-\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{E}_{32}(1)\right]^{-1}=-\boldsymbol{E}_{32}(-1)\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{A}^{-1},$$

故 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}_{32}(-1)\boldsymbol{E}_{13}=-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$。

模块四 线性方程组

经典习题

1．判断下列线性方程组解的情况。

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=3 \\ x_1+2x_2+2x_3=2 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=7 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \\ 3x_1+x_2-x_3=3 \end{cases}$；

2．判断下列齐次线性方程组是否有非零解。

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+4x_3=0 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=0 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_4=0 \end{cases}$。

3、已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+4x_3=a \\ x_1+4x_2+bx_3=15 \end{cases}$有无穷多解，求$a,b$。

4．讨论线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2-x_3=0 \\ ax_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$是否有非零解。

5．已知$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=1 \\ 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=5 \\ ax_2+2x_3-x_4=6 \end{cases}$无解，求$a$的值。

Ⅱ参考答案

1．【答案】（1）有唯一解；（2）无穷多解；（3）无解。

【解析】对非齐次线性方程组的增广矩阵使用高斯消元法得：

（1）$[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&2\\2&3&4&3\\1&2&2&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&2\\0&1&2&-1\\0&1&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&-1&1\end{array}\right]$，

该方程组没有出现矛盾方程$0=d(d\neq0)$，方程组有解；且方程组有三个有效方程，未知数个数为三个，所以该线性方程组有唯一解；

（2）$[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&3&4\\2&1&1&3\\3&2&4&7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&3&4\\0&-1&-5&-5\\0&-1&-5&-5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&3&4\\0&-1&-5&-5\\0&0&0&0\end{array}\right]$，

可知该方程组没有出现矛盾方程$0=d(d\neq0)$，则方程组有解；且方程组有两个有效方程，未知数个数有三个，有效方程数小于未知数个数，所以该线性方程组有无穷多解；

（3）$[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&3&4\\2&1&1&3\\3&1&-1&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&3&4\\0&-1&-5&-5\\0&-2&-10&-9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&3&4\\0&-1&-5&-5\\0&0&0&1\end{array}\right]$，

可知该方程组出现了矛盾方程$0=d(d\neq0)$，所以该线性方程组无解。

2．【答案】（1）仅有零解；（2）有非零解；（3）有非零解。

【解析】对于齐次线性方程组的系数矩阵使用高斯消元法得：

（1）$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&4\\2&4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$，可知该方程组有三个有效方程，未知数个数也为三个，有效方程数等于未知数个数，所以该方程组仅有零解；

（2）$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&-1&3\\3&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-5\\0&1&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$，可知该方程组有两个有效

方程，未知数个数为三个，有效方程数小于未知数个数，所以该方程组有非零解；

（3）可知方程组最多有三个有效方程，未知数个数为四个，有效方程数小于未知数个数，所以该方程组有非零解。

3. 【答案】$a=7$，$b=10$。

【解析】非齐次线性方程组有无穷多解，则方程组不会出现矛盾方程 $0=d\,(d\neq 0)$，且方程组中有效方程数小于未知数个数，对其增广矩阵做初等行变换得：

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&2&4&a\\1&4&b&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&1&3&a-3\\0&0&b-10&-3a+21\end{bmatrix}$$，所以可得

$$\begin{cases}b-10=0\\-3a+21=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=7\\b=10\end{cases}。$$

4. 【答案】

当 $a=0$ 时，方程组有非零解；

当 $a\neq 0$ 时，方程组仅有零解。

【解析】齐次线性方程组仅有零解 $\Leftrightarrow$ 方程组中有效方程数等于未知数个数；

齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 方程组中有效方程数小于未知数个数；

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-2&-1\\a&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&-1&-2\\0&0&-3a\end{bmatrix},$$

当 $a=0$ 时，该齐次线性方程组有效方程数小于未知数个数，方程组有非零解；

当 $a\neq 0$ 时，该齐次线性方程组有效方程数等于未知数个数，方程组仅有零解。

5. 【答案】$a=-1$。

【解析】非齐次线性方程组无解，则方程组中会出现矛盾方程 $0=d\,(d\neq 0)$，对增广矩阵做初等行变换得：

$$[A \mid b]=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & a & 2 & -1 & 6\end{array}\right] \rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 & -1 & 6\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2+2a & -1-a & 6+a\end{array}\right],$$

此时方程组无解，则$\begin{cases}2+2a=0 \\ -1-a=0 \\ 6+a \neq 0\end{cases}$，可得$a=-1$。

模块五 向量

经典习题

1、 向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$， $\beta=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$，

向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，$a$，$b$应满足的关系式.

2．判断向量$\boldsymbol{\beta}$能否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$线性表出.如果能，则写出它的一种表达式.

（1）$\boldsymbol{\beta}=(2,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$；

（3）$\boldsymbol{\beta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-2,-2,-2)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

3．讨论向量组$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(2,1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(2,1,a,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(3,2,1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(4,3,2,1)$的线性相关性，且$a\neq 1$.

4．判断$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+9)^{\mathrm{T}}$的线性相关性.

5．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-2,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,t,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(4,-1,-5,10)^{\mathrm{T}}$.

（1）问当t为何值时，向量$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

（2）问当t为何值时，向量$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

6．已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+\lambda,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+\lambda,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1+\lambda)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(0,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$，问$\lambda$取何值时

（1）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示方法唯一；

（2））β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示方法不唯一；

（3）β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

7．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为三维非零列向量，则下列命题正确的是（　　）

（A）如果 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4$ 线性相关

（B）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关

（C）如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一定线性相关

（D）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意三个向量均线性相关

Ⅱ参考答案

1．【答案】a为任意常数，$b=2$。

【解析】对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$作初等行变换得：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right),$$

因此a为任意常数，$b=2$。

2．【答案】（1）$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$；（2）$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$；（3）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$表出.

【解析】向量$\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出$\Leftrightarrow$方程组$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有没有解.

（1）将矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})$进行初等行变换得：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由上可知，该方程组没有出现矛盾方程$0=d(d\neq 0)$，所以方程组有解，而方程组有三个有效方程，未知数个数为四个，有效方程数小于未知数个数，所以该线性方程组有无穷多解，

则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$表出，且表示不唯一，可观察上式得到一个表达式$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$；

（2）将矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$进行初等行变换得：

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&3&1\\1&1&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&3&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&4\\0&0&1&-1\end{pmatrix},$$

由上可知该方程组没有出现矛盾方程$0=d(d\neq 0)$，所以方程组有解，而方程组有三个有效方程，未知数个数为三个，有效方程数等于未知数个数，所以该线性方程组有唯一解，

则$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表出，且表示唯一，得到表达式$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$；

（3）将矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}]$进行初等行变换得：

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&2&1\\1&0&-2&0&2\\2&0&-2&0&3\\2&0&-2&0&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&2&1\\1&0&-2&0&2\\2&0&-2&0&3\\0&0&0&0&1\end{array}\right]$$，可知该方程组出现矛盾方程

$0=d(d\neq 0)$，方程组无解，所以$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$表出.

3．【答案】当$a\neq\dfrac{1}{2}$时线性无关；当$a=\dfrac{1}{2}$时线性相关..

【解析】向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关性$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

有否非零解$\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|$是否为零，

而$|\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}2&2&3&4\\1&1&2&3\\1&a&1&2\\1&a&a&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&1&2\\1&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&a-1&-1\end{vmatrix}=(1-a)(1-2a)$，

由此可知当$a\neq\dfrac{1}{2}$时线性无关；当$a=\dfrac{1}{2}$时线性相关.

4．【答案】当$a=-1$或$a=-2$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关；当$a\neq-1$且$a\neq-2$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

【解析】$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&a+2&4\\3&5&4&a+9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&1&a&2\\0&2&1&a+6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&a+1&0\\0&0&3&a+2\end{bmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&3&a+2\\0&0&0&-\dfrac{(a+1)(a+2)}{3}\end{pmatrix},$$

当 $a=-1$ 或 $a=-2$ 时，齐次线性方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；当 $a\neq-1$ 且 $a\neq-2$ 时，齐次线性方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

5．【答案】（1）当 $t\neq-3$ 时，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（2）当 $t=-3$ 时，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

【解析】

（1）$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\-1&-2&t&-5\\2&6&4&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\0&0&t+3&-1\\0&2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\0&0&t+3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

当 $t\neq-3$ 时，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（2）当 $t=-3$ 时，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

6.【答案】（1）当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示；

（2）当 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且不唯一；

（3）当 $\lambda=-3$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

【解析】（1）向量$\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出$\Leftrightarrow$方程组

$(\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有没有解.；将$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$进行初等行变换得：

$$\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\end{pmatrix}$$

当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq-3$时，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示；

（2）当$\lambda=0$时，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且不唯一；

（3）当$\lambda=-3$时，$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

7.**【答案】**（C）.

【解析】

（A） 令$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$线性无关，所以（A）选项错误；

（B）令$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1$即可，所以（B）选项错误；

（C）四个三维向量必相关，如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，

由于$\boldsymbol{\alpha}_4$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$一定线性相关，所以（C）选项正确.

（D）四个三维向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$线性相关，但其中

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以（D）选项错误；

模块六 矩阵的秩与向量组的秩

丨经典习题

题型一、矩阵的秩

1．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为（$n>2$）n 阶矩阵，判断下列说法的正误.

（1）若 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{A}$ 中任意 2 阶子式均不为零；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 中任意 2 阶子式均不为零，则 $r(\boldsymbol{A})\geq 2$；

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素均不为零，则 $r(\boldsymbol{A})\geq 1$；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 中各行元素成比例，则 $r(\boldsymbol{A})\leq 1$；

（5）若 $r(\boldsymbol{A})\leq 2$，则 $\boldsymbol{A}$ 中存在 3 阶零子式；

（6）若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\right|>0$；

（7）若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则 $\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{B}\right|$；

（8）若 $\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{B}\right|$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

（9）若 $r(\boldsymbol{A})>r(\boldsymbol{B})$，则 $\left|\boldsymbol{B}\right|=0$.

2、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & a\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$a$ 为常数，$\boldsymbol{B}$ 为 4×3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

题型二、向量的秩及常用公式

3．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,7,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-2,4,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,5,-5)^{\mathrm{T}}$，则该

向量组的一个极大线性无关组是__________.

4．已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,2,6,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-3,1,1)$ 则

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=$ __________.

5．已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$，且$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，则$p=$__________.

6．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$线性相关，求$a$.

7．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)^{\mathrm{T}}$线性无关，则$a$，$b$，$c$必满足关系式__________.

8．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，三维列向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$，已知$\boldsymbol{A\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}$线性相关，则$a=$__________.

9．已知$\boldsymbol{A}$是2阶非零矩阵，且$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})=$__________.

10．设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&5\\2&a&7\\1&3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&2&-1\\-3&0&5\end{bmatrix}$，且$r(\boldsymbol{AB})=2$，则$a=$__________.

11．设$\boldsymbol{A}$是4×3矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}t&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A})=1$，则$t=$__________.

12．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\2&3&a&4\\3&5&1&9\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，$a=$__________.

13．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A})=$________.

Ⅱ参考答案

题型一、矩阵的秩

1.【答案】(1)错;(2)对;(3)对;(4)对;(5)对;(6)对;(7)错;(8)错;(9)对.

【解析】

(1)错误.由题意$r(\boldsymbol{A})=2 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$中存在二阶非零子式且$\boldsymbol{A}$中所有大于二阶的子式都为$0$,$\boldsymbol{A}$中"存在"二阶非零子式即可,题中说"任意"太绝对;

(2)对.由矩阵秩的定义,存在二阶非零子式,则$r(\boldsymbol{A})\geq 2$;

(3)对.只要存在一个非零元素,即$\boldsymbol{A}$中存在一个一阶非零子式,则$r(\boldsymbol{A})\geq 1$;

(4)对.$\boldsymbol{A}$中各行元素成比例,若$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,则$r(\boldsymbol{A})=1$,若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,则$r(\boldsymbol{A})=0$,综上,$r(\boldsymbol{A})\leq 1$;

(5)对.$r(\boldsymbol{A})\leq 2$表明矩阵$\boldsymbol{A}$的任意3阶子式均为0;

(6)对.$r(\boldsymbol{A})=n$,则$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|^2>0$;

(7)错误.如$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}$,此时$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,但是$|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=3$,此时$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$;

(8)错误.如$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,此时$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,但是$r(\boldsymbol{A})=1$,$r(\boldsymbol{B})=2$,$r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{B})$;

(9)对.由题意,$r(\boldsymbol{B})<r(\boldsymbol{A})\leq n$,则$|\boldsymbol{B}|=0$.

2.【答案】1.

【解析】由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le 3$，

由 $\boldsymbol{A}$ 有二阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\ne 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})\ge 2$，因此 $r(\boldsymbol{B})\le 1$.又 $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵，

从而 $r(\boldsymbol{B})\ge 1$，故 $r(\boldsymbol{B})=1$.

题型二、向量的秩及常用公式

3.【答案】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$

【解析】对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 进行初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 7 & 4 & 5\\ 3 & -2 & 6 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，由此可知：

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

4.【答案】2.

【解析】

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 4\\ 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & 6 & 1\\ -1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 0 & 10\\ 0 & 5 & 0 & 10\\ 0 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由上可知秩为2.

5.【答案】$p=2$.

【解析】对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 进行初等行变换，得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p-2\end{pmatrix}$$，因此 $p=2$.

6.【答案】$a=6$.

【解析】

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$，所以 $a=6$..

7.【答案】$abc\neq 0$.

【解析】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，有 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$，则

$$\begin{vmatrix}a&b&0\\0&c&a\\c&0&b\end{vmatrix}=2abc\neq 0$$，所以只需满足 $abc\neq 0$

8.【答案】$a=-1$.

【解析】

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}$$，由 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，

解得 $a=-1$

9.【答案】1.

【解析】因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，知 $r(\boldsymbol{A})\geq 1$.由 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{0}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $r(\boldsymbol{A})=1$

10.【答案】5.

【解析】对行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 按第二列展开，易见 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆，于是 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})=2$.

则 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $|\boldsymbol{A}|=3(5-a)=0$，解得 $a=5$.

11.【答案】2.

【解析】

由 $r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}))=1$，且 $r(\boldsymbol{A})=2$，知 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\neq 3$，则

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2t-4=0$$，解得$t=2$.

12.【答案】1或3.

【解析】由$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，得$r(\boldsymbol{A})=4-1=3$.

对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{pmatrix},$$

故$a=1$或3.

13.【答案】n.

【解析】由$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，得$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$，从而$\boldsymbol{A}$可逆且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，于是

$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，因此$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，故

$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=n$.

模块七 线性方程组解的判定

经典习题

1．已知方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则$a$应满足的条件是________.

2．若线性方程组$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$有无穷多解，则$a$应满足的条件是________.

3．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，则$a$应满足的条件是________.

4．已知非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$有无穷多解，则$a$，$b$应满足的条件是________.

5．设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&-1\end{bmatrix}$，且$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，则$t=$________.

6．λ为何值时，线性方程组$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$有唯一解，无解，有无穷多组解.

7．设齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$的系数矩阵为$\boldsymbol{A}$，若存在3阶矩阵$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，

使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则（）

（A）$\lambda=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$

（B）$\lambda=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

（C）$\lambda=1$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$

（D）$\lambda=1$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

8. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知数个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则（　　）

（A）$r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

（B）$r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

（C）$m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

（D）$r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

II 参考答案

1.【答案】$a=-1$.

【解析】

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{pmatrix},$$

则 $a=-1$.

2.【答案】$a=-2$.

【解析】由克拉默法则知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因此当

$|\boldsymbol{A}|=0$ 时，有无穷多解或无解，

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2)=0,$$

当 $a=1$ 时，方程组无解；当 $a=-2$ 时，方程组有无穷多解.故由题意可得，$a=-2$。则 $a=-2$.

3.【答案】$a=-1$.

【解析】由克拉默法则可得：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^4=0，则 a=\pm1,$$

当 $a=1$ 时， $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$，方程组无解，

当 $a=-1$ 时 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，方程组有无穷多解，故 $a=-1$.

4.【答案】$a=1$ 且 $b=-1$.

【解析】由于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充要条件为 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<4$，

因此对增广矩阵进行初等行变换，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix},$$

故. $a=1$ 且 $b=-1$.

5.【答案】$t=-\dfrac{37}{5}$.

【解析】因为 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件为 $r(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$，

又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\4&t-8&11\\3&-7&5\end{vmatrix}=5t+37，故 t=-\frac{37}{5}.$$

6.【答案】当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，此方程组有唯一解.;

当 $\lambda=10$ 时，方程组无解；

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解.

【解析】对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\0&1-\lambda&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&4&-2\\2&9-\lambda&-4\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，此方程组有唯一解.

当 $\lambda=10$ 时，对此方程组的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$ 进行初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}2&-5&-4&2\\0&-18&-18&9\\0&-9&-9&-9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}2&-5&-4&2\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=3>2=r(\boldsymbol{A})$，方程组无解.

当$\lambda=1$时，对此方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$进行初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=1<3$，方程组有无穷多解.

7.【答案】（C）.

【解析】由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，可知齐次方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$有非零解，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1-\lambda&0\\0&\lambda-1&1-\lambda\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2=0\text{，则}\lambda=1.$$

又$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则$|\boldsymbol{B}|=0$（若$|\boldsymbol{B}|\neq0$，则$\boldsymbol{B}$可逆，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$两边右乘$\boldsymbol{B}^{-1}$，得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，矛盾）.应选（C）.

8.【答案】（A）.

【解析】$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$r(\boldsymbol{A})=r$.

选项（A）：$r=m$，则$m=r(\boldsymbol{A})\leq r(\boldsymbol{A},\ b)\leq m$，

则$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\ b)=m$，故方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解，则选项（A）正确；

选项（B）：$r=n$，此时并不能保证$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\ b)$，例$(\boldsymbol{A},b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$，此时$r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\ b)$，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解；则选项（B）不正确；

选项（C）：$m=n$，只能说明矩阵$\boldsymbol{A}$为方阵，有克拉默法则，当$|\boldsymbol{A}|=0$时，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解或无解，则选项（C）不正确；

选项（D）：$r<n$时，例$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$，此时方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解，则选项（D）不正确.

模块八 线性方程组解的结构

丨经典习题

题型一、齐次线性方程组的通解

1．求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$的基础解系。

2．求下列方程组的通解。

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+2x_3+7x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 5x_1-10x_2+4x_3+25x_4=0 \end{cases}$$

3．设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & a+3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$是三阶非零矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解是__________。

4．已知$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为三阶非零方阵，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$为齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=0$的三个解向量，且$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$有解。

（1）求a,b的值；（2）求$\boldsymbol{Bx}=0$的通解。

5．设$\boldsymbol{A}$是秩为$n-1$的n阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的两个不同的解向量，则下列解为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$通解的是（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　（B）$k\boldsymbol{\alpha}_1$　（C）$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　（D）$k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

6．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是四维非零列向量组，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，

已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $[1,0,2,0]^T$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$

（C）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$

7. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系还可以是（　　）

（A）$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$

（B）$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$

（C）$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$

（D）$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零方阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有两个线性无关的解向量，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解

（B）$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解

（C）$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 没有非零公共解

（D）$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 恰好有一个非零公共解

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置，若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 为方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系，

则 $r(\boldsymbol{A})=$（　　）

（A）t　　（B）$n-t$　　（C）$m-t$　　（D）$n-m$

10. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为_________。

题型二、非齐次线性方程组的通解

11．（1）$\begin{cases}6x_1-2x_2+x_4=3\\x_1-x_2+x_4=1\\2x_1+x_3+3x_4=2\end{cases}$；

（2）$\begin{cases}3x_1-5x_2+8x_4=5\\4x_1-6x_2+9x_4=3\\-x_1+2x_3-3x_4=4\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4\\x_1+x_3-x_4=-3\\3x_1+x_2+x_3=1\\7x_1+7x_3-3x_4=3\end{cases}$。

12．若$\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{X}=$________。

13．已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解，

$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,4\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{4}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2),\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}_2$中，仍是线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$特解的共有（　　）

（A）4 个　　（B）3个　　（C）2 个　　（D）1个

14．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，下列向量中

$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$是导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量有（　　）个

（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

15．设$[1,1,1]^T,[2,2,3]^T$均为线性方程组$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=1\\x_1+b_1x_2+x_3=b_2\\x_1+c_1x_2-x_3=c_2\end{cases}$的解向量，则该线性方程组的通解为________。

16．已知4×5矩阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$均为 4 维列向量，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，又设

$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解。

题型三、含参数的线性方程组

17．对于线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$，

讨论λ取何值时，方程组无解，有唯一解和无穷多组解。在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

18．已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ ax_1+bx_2+cx_3=0\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0\end{cases}$，

（1）a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解；

（2）a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多解，并用基础解系表示全部解。

19. 设线性方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\ 3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3\\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2\end{cases}$，问 k_1 与 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时，求其通解。

20．已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2\end{cases}$，

（1）a,b 为何值时，方程组有解？

（2）方程组有解时，求出方程组的导出组的一个基础解系；

（3）方程组有解时，求出方程组的全部解。

21．已知齐次线性方程组$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0\\a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0\\a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0\end{cases}$

其中$\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$。试讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$和b满足何种关系时，

（1）方程组仅有零解；

（2）方程组有非零解。在有非零解时，求此方程组的一个基础解系。

题型四、同解与公共解

22．设方程组（Ⅰ）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系为

$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,0,2]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0,1,1]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,1,1,2]^T$。

设方程组（Ⅱ）$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的基础解系为

$\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,-1,-1,1]^T,\boldsymbol{\beta}_2=[1,-1,1,-1,2]^T,\boldsymbol{\beta}_3=[1,-1,-1,1,1]^T$。

（1）求线性方程组（Ⅲ）$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}\end{cases}$的基础解系及通解；（2）求矩阵$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{B}^T)$的秩。

23．已知齐次线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$的所有解都是方程

$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=0$的解。试证明：线性方程组

$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{m1}x_m=b_1\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{m2}x_m=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{mn}x_m=b_n\end{cases}$有解。

Ⅱ参考答案

题型一、齐次线性方程组的通解

1.【答案】$\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0,0,0]^T$，$\boldsymbol{\xi}_2=[-1,0,-1,0,1]^T$。

【解析】对齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵进行初等行变换得，

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$，由于 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以基础解系中线性无关向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})=5-3=2$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 等价的线性方程组为

$\begin{cases}x_1=-x_2-x_5\\x_3=-x_5\\x_4=0\end{cases}$，令 $x_2=1,x_5=0$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0,0,0]^T$，令 $x_2=0,x_5=1$ 得

$\boldsymbol{\xi}_2=[-1,0,-1,0,1]^T$，故该齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0,0,0]^T$，

$\boldsymbol{\xi}_2=[-1,0,-1,0,1]^T$。

2.【答案】$\boldsymbol{x}=k_1[2,1,0,0]^T+k_2\left[-11,0,\dfrac{15}{2},1\right]^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数。

【解析】
（1）对齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵进行初等行变换得，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-4&2&7\\3&-6&4&3\\5&-10&4&25\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-4&2&7\\1&-2&2&-4\\5&-10&4&25\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&2&-4\\0&0&-2&15\\0&0&-6&45\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0&11\\0&0&2&-15\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以基础解系中线性无关向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$，

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 等价的线性方程组为 $\begin{cases}x_1=2x_2-11x_4\\2x_3=15x_4\end{cases}$，

令 $x_2=1,x_4=0$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=[2,1,0,0]^T$，令 $x_2=0,x_4=1$ 得 $\boldsymbol{\xi}_2=\left[-11,0,\dfrac{15}{2},1\right]^T$。

所以其通解为 $\boldsymbol{x}=k_1[2,1,0,0]^T+k_2\left[-11,0,\dfrac{15}{2},1\right]^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数。

3.【答案】$k[-1,1,0]^T$，k 为任意常数。

【解析】由于 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n=3$ 且 $\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})\ge 1$，

得知 $r(\boldsymbol{A})<3$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\\ 2 & a+1 & a+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 1-a & 1-a^2\\ 0 & a-1 & 3-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 2-a-a^2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

可见 $r(\boldsymbol{A})<3\Rightarrow a=1$。

当 $a=1$ 时，

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

求得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系为 $[-1,1,0]^T$，因此通解为 $k[-1,1,0]^T$，k 为任意常数。

4.【答案】（1）$a=15,b=5$；（2）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$，$k_1,k_2$ 为任意常数。

【解析】（1）由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，设矩阵 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$，则有

$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})\le 3$，而 $\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})\ge 1$，那么 $r(\boldsymbol{C})\le 2$，由

$r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\le 2$ 知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性相关，于是 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$，

由此解得 $a=3b$。由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$ 有解知，$r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{A})$，

$$\left[A \mid \beta_3\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0\end{array}\right] \rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b\end{array}\right] \rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5-b}{3}\end{array}\right]$$

可见有$b=5$，故$a=15,b=5$。

（2）已知$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为三阶非零方阵，所以$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})\geq 1$，于是齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=0$的基础解系中线性无关的向量个数为$3-r(\boldsymbol{B})\leq 2$，而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$为$\boldsymbol{Bx}=0$的两个线性无关的解，则$\boldsymbol{Bx}=0$的基础解系中至少有两个线性无关的解，即$3-r(\boldsymbol{B})\geq 2$，故$3-r(\boldsymbol{B})=2$，可见$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$即可作为$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的基础解系，故通解为$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$

k_1,k_2为任意常数。

5.**【答案】**（D）。

【解析】由$r(\boldsymbol{A})=n-1<n$知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，所以通解中必有任意常数，故（A）不正确；

已知条件只是说$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是两个不同的解，那么$\boldsymbol{\alpha}_1$可以是零解，因而$k\boldsymbol{\alpha}_1$可能不是通解。如果$\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是两个不同的解，但$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，即两个不同的解不能保证$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$。因此要排除（B）.（C）；

由$n-r(\boldsymbol{A})=1$知$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系只有一个非零向量，由于$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，又$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=0$的解，故（D）正确.

6.**【答案】**（C）。

【解析】根据线性方程组解的结构，由于齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中只有一个解向量，因此$n-r(\boldsymbol{A})=1$，由$r(\boldsymbol{A})=n-1=3$可得$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，则$n-r(\boldsymbol{A}^*)=3$，故方程组$\boldsymbol{A}^*x=\boldsymbol{0}$的基础解系包含三个线性无关的解向量，

又 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，所以向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^*x=\boldsymbol{0}$ 的解。又因为 $[1,0,2,0]^T$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，带入得 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以选项（A）中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，方程组的基础解系中解向量必线性无关，故（A）不正确。选项（B），由于（B）中的向量组都能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，可知（B）不正确。

选项（C），由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，又向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为3，所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，即它是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，可知（C）正确。

选项（D），（D）中向量组含有四个向量，不是基础解系，可知（D）也不正确。

7.【答案】（D）。

【解析】已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，要证明另一组向量也是基础解系需要满足三个条件：

1） 所有向量均为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；
2） 基础解系中所有的解向量都要求线性无关；
3） 基础解系中线性无关解向量的个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$。

选项（A），由于 $(\eta_1-\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3-\eta_4,\eta_4+\eta_1)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\-1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$

而 $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\-1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=0$，所以（A）中 4 个向量是线性相关的，不满足基础解系中所有的解向量线性无关的要求，因此选项（A）不正确。

选项（B），由于 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，显然，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含线性无关的向量个数为 4 个，选项（B）中仅有 3 个向量，个数不符合要求，因此选项（B）不正确。

选项（C），由于$(\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_4,\eta_4+\eta_1)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，

而$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$，所以（C）中4个向量是线性相关的，不满足基础解系中所有的解向量线性无关的要求，因此选项（C）不正确。

选项（D），由于$(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，

因为$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$ 且$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$是线性无关的，因此

$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$线性无关，又因$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$均是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，且解向量个数为4，所以（D）是基础解系。

8.【答案】(B)。

【解析】由于齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有两个线性无关的解向量，所以$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中线性无关向量个数为$n-r(\boldsymbol{A})\geq 2$，从而有$r(\boldsymbol{A})\leq n-2$，故$r(\boldsymbol{A}^*)=0\Rightarrow \boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，所以任意$n$维向量均是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，故正确选项是（B）。

9.【答案】(C)。

【解析】由题意得$\boldsymbol{A}^T$是$n\times m$矩阵，且方程组$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中有$t$个线性无关的解向量，故$m-r(\boldsymbol{A}^T)=t$，又$r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A})$，所以$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=m-t$。

10.【答案】$k[1,1,\cdots,1]^T$，k为任意常数。

【解析】由题意得 $A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，又 $r(A)=n-1$ 所以，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有一个线性无关的解，

所以 $[1,1,\cdots,1]^T$ 就是基础解系，则通解为 $k[1,1,\cdots,1]^T$，k 为任意常数。

题型二、非齐次线性方程组的通解

11.【答案】（1）$\boldsymbol{x}=k\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4},-\frac{7}{2},1\right]^T+\left[\frac{1}{4},-\frac{3}{4},\frac{3}{2},0\right]^T$，$k$ 为任意常数。

（2）$\boldsymbol{x}=k\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{4},1\right]^T+\left[-\frac{15}{2},-\frac{11}{2},-\frac{7}{4},0\right]^T$，$k$ 为任意常数。

（3）$\boldsymbol{x}=k[-1,2,1,0]^T+[3,-8,0,6]^T$，$k$ 为任意常数。

【解析】（1）对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵进行初等行变换得，

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c}6&-2&0&1&3\\1&-1&0&1&1\\2&0&1&3&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&4&0&-5&-3\\0&2&1&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{5}{4}&-\frac{3}{4}\\0&0&1&\frac{7}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right],$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价的线性方程组为 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{4}\\x_2=\frac{5}{4}x_4-\frac{3}{4}\\x_3=-\frac{7}{2}x_4+\frac{3}{2}\end{cases}$。由于非齐次线性方程组的通解是由齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解和非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解组成。先求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解，由于 $r(\boldsymbol{A})=3$，基础解系中线性无关向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，

令 $x_4=1$，得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4},-\frac{7}{2},1\right]^T$，因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通

解为$k\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4},-\dfrac{7}{2},1\right]^T$，$k$为任意常数；再求非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的特解，令$x_4=0$，

求得其特解为$\left[\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2},0\right]^T$；故非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为

$\boldsymbol{x}=k\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4},-\dfrac{7}{2},1\right]^T+\left[\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2},0\right]^T$，$k$为任意常数。

（2）对非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的增广矩阵进行初等行变换得，

$$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c}3&-5&0&8&5\\4&-6&0&9&3\\-1&0&2&-3&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}-1&0&2&-3&4\\0&-5&6&-1&17\\0&-6&8&-3&19\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-\dfrac{3}{2}&-\dfrac{15}{2}\\0&1&0&-\dfrac{5}{2}&-\dfrac{11}{2}\\0&0&1&-\dfrac{9}{4}&-\dfrac{7}{4}\end{array}\right]$$

，

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$等价的线性方程组为$\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}x_4-\dfrac{15}{2}\\x_2=\dfrac{5}{2}x_4-\dfrac{11}{2}\\x_3=\dfrac{9}{4}x_4-\dfrac{7}{4}\end{cases}$，由于非齐次线性方程组的通解是由齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解和非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的特解组成。

先求齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解，由于$r(\boldsymbol{A})=3$，基础解系中线性无关向量个数为

$n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，令$x_4=1$，得齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系为$\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4},1\right]^T$，

因此齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为$k\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4},1\right]^T$，$k$为任意常数；

再求非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的特解，令$x_4=0$，求得其特解为$\left[-\dfrac{15}{2},-\dfrac{11}{2},-\dfrac{7}{4},0\right]^T$；

故非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{4},1\right]^T+\left[-\frac{15}{2},-\frac{11}{2},-\frac{7}{4},0\right]^T$，$k$ 为任意常数。

（3）对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵进行初等行变换得，

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&1&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&2&12\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价的线性方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3+3\\x_2=2x_3-8\\x_4=6\end{cases}$，

由于非齐次线性方程组的通解是由齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解和非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解组成。先求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解，由于 $r(\boldsymbol{A})=3$，基础解系中线性无关向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，令 $x_3=1$，得齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $[-1,2,1,0]^T$，因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k[-1,2,1,0]^T$，k 为任意常数；

再求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解，令 $x_3=0$，求得其特解为 $[3,-8,0,6]^T$；

故非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k[-1,2,1,0]^T+[3,-8,0,6]^T$，$k$ 为任意常数。

12.**【答案】** $\begin{bmatrix}2-t&3-u\\t&u\end{bmatrix}$，$t,u$ 是任意常数。

【解析】 由于矩阵 $\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$ 不可逆，故可设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}$，于是

$\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix}$，它可以看成两个线性方程组 $\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ 及

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$，解这两个线性方程组可得$\begin{cases} x_1 = 2-t \\ x_2 = t \\ y_1 = 3-u \\ y_2 = u \end{cases}$，$t,u$ 是任意常数。所以

$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2-t & 3-u \\ t & u \end{bmatrix}$，$t,u$ 是任意常数。

13.【答案】（C）。

【解析】由于 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{b}$，将题中向量带入 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 逐一验证，

$\boldsymbol{A}(4\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2) = 4\boldsymbol{A\alpha}_1 - 3\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}(\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}_2) = \frac{1}{4}\boldsymbol{A\alpha}_1 + \frac{3}{4}\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{b}$，

可知，$4\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2, \frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}_2$ 均是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解。而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{A\alpha}_1 - 2\boldsymbol{A\alpha}_2 = -\boldsymbol{b}$，

$\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{4}(2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)\right] = \frac{1}{2}\boldsymbol{A\alpha}_1 + \frac{1}{4}\boldsymbol{A\alpha}_2 = \frac{3}{4}\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2), \frac{1}{4}(2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$ 不是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，

故应选（C）。

14.【答案】（A）。

【解析】由于 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{b}$，将题中向量带入 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 逐一验证，可知

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{A\alpha}_1 - \boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{A\alpha}_1 - 2\boldsymbol{A\alpha}_2 + \boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，

$\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3)\right] = \frac{1}{4}(\boldsymbol{A\alpha}_1 - \boldsymbol{A\alpha}_3) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$，

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 - 4\boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{A\alpha}_1 + 3\boldsymbol{A\alpha}_2 - 4\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，可知，这四个向量都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，故选（A）。

15.【答案】$k[1,1,2]+[1,1,1]$ 或者 $k[1,1,2]+[2,2,3], k \in \boldsymbol{R}$。

【解析】设该线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$。原方程组有两个不同的解，可知系数矩阵不满秩，也即 $r(\boldsymbol{A}) < 3$。通过观察不难发现，$\boldsymbol{A}$ 中存在非零的 2 阶子式，可知 $r(\boldsymbol{A}) \geq 2$，故 $r(\boldsymbol{A}) = 2$。因此导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 1 个解向量，由线性方程组解的性质

可知$[2,2,3]^T-[1,1,1]^T=[1,1,2]^T$是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解，也就是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系。故原方程组的通解为$k\left[1,1,2\right]+\left[1,1,1\right]$或者$k\left[1,1,2\right]+\left[2,2,3\right],k\in\boldsymbol{R}$。

16.【答案】$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中

$\boldsymbol{\eta}=[2,1,-1,1,1]^T,\boldsymbol{\xi}_1=[1,0,-1,-1,0]^T,\boldsymbol{\xi}_2=[1,1,0,1,-1]^T$， k_1,k_2为任意常数。

【解析】由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$，可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为$\boldsymbol{A}$的极大线性无关组，即$r(\boldsymbol{A})=3$。又由于$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$，从而线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有特解$\boldsymbol{\eta}=[2,1,-1,1,1]^T$。由$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$，可求出导出方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的两个线性无关的解$\boldsymbol{\xi}_1=[1,0,-1,-1,0]^T,\boldsymbol{\xi}_2=[1,1,0,1,-1]^T$。由于$r(\boldsymbol{A})=3$，则五元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系由两个线性无关的解构成，故$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$为$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1,k_2$为任意常数。

题型三、含参数的线性方程组

17.【答案】当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，方程组有唯一解；

当$\lambda=1$时，方程组有无穷多解，通解为$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数；当$\lambda=-2$时，方程组无解。

【解析】对原方程组的增广矩阵作初等行变换得，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&\lambda-3\\1&\lambda&1&-2\\1&1&\lambda&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&-2\\1&\lambda&1&-2\\\lambda&1&1&\lambda-3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&3(\lambda-1)\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 3(\lambda-1)\end{array}\right]。$$

（1）方程组有唯一解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3\Rightarrow\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$；

（2）当$\lambda=1$时，$\boldsymbol{B}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=1<3$方程组有无穷多解，

且$x_1=-x_2-x_3-2$。则方程组的通解$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数；

（3）当$\lambda=-2$时，$r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解。

18.【答案】（1）a,b,c两两不相等时，方程组仅有零解；

（2）当a,b,c至少有两个相等时，方程组有非零解。且

①当$a=b\neq c$时，方程组的通解$\boldsymbol{x}=k[-1,1,0]^T$，$k$为任意常数；

②当$a\neq b=c$时，方程组的通解$\boldsymbol{x}=k[0,-1,1]^T$，$k$为任意常数；

③当$a=c\neq b$时，方程组的通解$\boldsymbol{x}=k[-1,0,1]^T$，$k$为任意常数；

④当$a=b=c$时，方程组的通解$\boldsymbol{x}=k_1[-1,1,0]^T+k_2[-1,0,1]^T$，$k_1,k_2$为任意常数。

【解析】系数矩阵的行列式$|\boldsymbol{A}|=(b-a)(c-b)(c-a)$。

（1）当$|\boldsymbol{A}|\neq0$，即a,b,c两两不相等时，方程组仅有零解；

（2）当a,b,c至少有两个相等时，方程组有非零解。且

①当$a=b\neq c$时，$r(A)=2$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&a&c\\a^2&a^2&c^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

则方程组的通解 $\boldsymbol{x}=k[0,-1,1]^T$， k 为任意常数；

②当 $a\neq b=c$ 时，方程组的通解 $\boldsymbol{x}=k[0,-1,1]^T$， k 为任意常数；

③当 $a=c\neq b$ 时，方程组的通解 $\boldsymbol{x}=k[-1,0,1]^T$， k 为任意常数；

④当 $a=b=c$ 时， $r(\boldsymbol{A})=1$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&a&a\\a^2&a^2&a^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

则方程组的通解 $\boldsymbol{x}=k_1[-1,1,0]^T+k_2[-1,0,1]^T$， k_1,k_2 为任意常数。

19.【答案】当 $k_1\neq 2$ 时，方程组有唯一解；

当 $k_1=2$， $k_2\neq 1$ 时，方程组无解；

当 $k_1=2$， $k_2=1$ 时，方程组有无穷多解且通解(一般解)为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\3\\0\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$， k 为任意常数。

【解析】对原方程组的增广矩阵作初等行变换得，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-k_1&15&3\\1&-5&-10&12&k_2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-k_1-6&6&0\\0&-6&-12&9&k_2-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&-k_1+2&2&4\\0&0&0&3&k_2+5\end{array}\right]$$

（1）当$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=4$时，原方程组有唯一解，此时$-k_1+2\neq 0 \Leftrightarrow k_1\neq 2$

（2）当$k_1=2$时，$B\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&k_2-1\end{array}\right]$，则

①当$k_2\neq 1$时，$r(\boldsymbol{A})=3\neq r(\boldsymbol{B})=4$，原方程组无解；

②当$k_2=1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3<4$，原方程组有无穷多解，且

$$\boldsymbol{B}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

则通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\3\\0\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$，$k$为任意常数。

综上：当$k_1\neq 2$时，方程组有唯一解；当$k_1=2$且$k_2\neq 1$时，方程组无解；当$k_1=2$且$k_2=1$时，方程组有无穷多解，且通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\3\\0\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$，$k$为任意常数。

20.**【答案】**（1）当$a=1,b=3$时，方程有解；

（2）基础解系$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$，$k_1,k_2,k_3$为任意常数，其中

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}。$$

【解析】对原方程组的增广矩阵作初等行变换得，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&3a\\0&1&2&2&6&b\\0&-1&-2&-2&-6&2-5a\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{array}\right]$$

（1）方程组有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\Rightarrow\begin{cases}b-3a=0\\2-2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$；

（2）当 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ 时，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$，

方程组的导出组的解 $\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$，分别令 $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，得方程组

的导出组的一个基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$。

（3）令$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，得方程组的一个特解$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。则方程组的通解

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中$k_1, k_2, k_3$为任意常数。

21.【答案】（1）当$b \neq 0$且$b + \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$时，方程组仅有零解；

（2）当$b = 0$时，设$a_1 \neq 0$，则原方程组的一个基础解系为

$\boldsymbol{\alpha}_1 = [-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \cdots, 0]^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = [-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, \cdots, 0]^T, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} = [-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \cdots, 0, 1]^T$；

当$b = -\sum_{i=1}^{n} a_i$时，原方程组的一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha} = [1, 1, \cdots, 1]^T$。

【解析】方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = b^{n-1}(b + \sum_{i=1}^{n} a_i)。$$

（1）当$b \neq 0$时且$b + \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$时，$|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Rightarrow r(\boldsymbol{A}) = n$，方程组仅有零解。

（2）当$b = 0$时，原方程组的同解方程组为$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$。

由$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$可知，$a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$不全为零。不妨设$a_1 \neq 0$，得原方程组的一个基础

解系为$\boldsymbol{\alpha}_1 = [-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \cdots, 0]^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = [-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, \cdots, 0]^T, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} = [-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \cdots, 0, 1]^T$。

当$b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$时，有$b\neq 0$，原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-\sum_{i=1}^{n}a_i & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\sum_{i=1}^{n}a_i \end{bmatrix}$$

（将第1行的-1倍加到其余各行，再从第2行到第n行同乘以$-\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$倍）

$$\to\begin{bmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

（将第i行的$-a_i$倍加到第1行（$i=2,...,n$），再将第1行移到最后一行）

$$\to\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由此得原方程组的同解方程组为$x_2=x_1$，$x_3=x_1$，$\cdots$，$x_n=x_1$。

原方程组的一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}=[1,1,\cdots,1]^T$。

题型四、同解与公共解

22.【答案】（1）基础解系为$[0,-2,0,2,0]^T$，通解为$\boldsymbol{x}=[0,-k,0,k,0]^T$，其中$k$为任意常数；（2）矩阵$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{B}^T)$的秩为4。

【解析】（1）要求线性方程组（III）$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}\end{cases}$的基础解系，即求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的公共解。且已知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的基础解系为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$，只需要将两个方程组的通解联立即可，因此有$\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{3}y_i\boldsymbol{\beta}_i$；

从而$\sum_{i=1}^{3}\left(x_i\boldsymbol{\alpha}_i-y_i\boldsymbol{\beta}_i\right)=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1x_1-\boldsymbol{\beta}_1y_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2-\boldsymbol{\beta}_2y_2+\boldsymbol{\alpha}_3x_3-\boldsymbol{\beta}_3y_3=\boldsymbol{0}$，方程组可以变形为，$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\boldsymbol{\alpha}_3x_3-\boldsymbol{\beta}_1y_1-\boldsymbol{\beta}_2y_2-\boldsymbol{\beta}_3y_3=\boldsymbol{0}$，其系数矩阵为

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\beta}_3)$，对系数矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\beta}_3)$做初等行变换化为阶梯型矩阵。

$$\begin{bmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&0&-1&1&1\\1&0&1&1&-1&1\\0&1&1&1&1&-1\\2&1&2&-1&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\0&0&-1&0&2&2\\0&-1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&-1&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&-1&0&2&2\\0&0&1&3&1&1\\0&0&1&2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&-1&0&2&2\\0&0&0&3&3&3\\0&0&0&2&3&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&-1&0&2&2\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&2\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&-2\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

因而得到方程组的基础解系$[-2,0,2,-1,0,1]^T$，代入得到方程组（III）的基础解系为

$\boldsymbol{\xi}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3=[0,-2,0,2,0]^T$，或者$\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3=[0,-2,0,2,0]^T$。求得（III）的

通解为$\boldsymbol{x}=[0,-k,0,k,0]^T$，其中$k$为任意常数。

（2）由第一个问可得$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}\end{cases}$的基础解系中有一个向量，可以知$n-r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=1$，从而

推出$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=4$，可得$r(\boldsymbol{C})=r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^T\right]=4$。

23.【证明】由已知齐次线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$（1）的所有解都是

方程$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=0$（2）的解可知：

方程组（1）与方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\\ b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=0\end{cases}$（3）有相同的解。

故（1）的系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$与（3）的系数矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\\ b_1&b_2&\cdots&b_n\end{bmatrix}$$

的秩相同。即$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$。

又方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\dots+a_{m1}x_m=b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{m2}x_m=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\dots+a_{mn}x_m=b_n \end{cases}$的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$，又

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T),r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B}^T)$，由$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$所以$r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{B}^T)$，

即方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\dots+a_{m1}x_m=b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{m2}x_m=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\dots+a_{mn}x_m=b_n \end{cases}$的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，

故线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\dots+a_{m1}x_m=b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{m2}x_m=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\dots+a_{mn}x_m=b_n \end{cases}$有解。

模块一 随机事件与概率

I经典习题

题型一、事件的关系与运算

1.从某车间挑选一名员工，用 A 表示“该员工工龄在5年以上”，用 B 表示“该员工为男性”，用 C 表示“该员工爱逛商场”.

（1）叙述事件 $AB\overline{C}$ 的实际意义；

（2）分析在什么情况下有 $B=\overline{C}$ 成立.

2.在电炉上安装了4个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_1 \le T_2 \le T_3 \le T_4$ 为4个控温器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于（　　）

（A）$\{T_1 \ge t_0\}$　　（B）$\{T_2 \ge t_0\}$

（C）$\{T_3 \ge t_0\}$　　（D）$\{T_4 \ge t_0\}$

3. A,B,C 为随机事件，A 发生必导致 B 与 C 至少有一个发生，则有（　　）

（A）$A \subset BC$　　（B）$A \subset (B+C)$　　（C）$A \subset \overline{BC}$　　（D）$A \supset \overline{BC}$

4.任意两个事件 A,B，与 $\left(A \cup B\right) \subset B$ 不等价的是（　　）

（A）$A \subset B$　　（B）$\overline{B} \subset \overline{A}$

（C）$A\overline{B}=\varnothing$　　（D）$\overline{A}B=\varnothing$

题型二、简单概型

5.将 C,C,E,E,I,N,S 七个字母随机地排成一行，则恰好排成 $SCIENCE$ 的概率为________.

6.设袋中有红.白.黑球各一个，从中有放回地取球，每次取1个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为4的概率为________.

7.考虑一元二次方程 $x^2+2Bx+C=0$，其中 B .C 分别是将一枚骰子连掷两次先后出现的点数，该方程无实根的概率为________.

8.若在区间 $(0,1)$ 上随机地取两个数 u,v，关于 x 的一元二次方程 $x^2+vx+u=0$ 有实根的概率为________.

9.甲.乙两人约定在6时到7时之间在某处会面，并约定甲等候一刻钟，乙等候半个小时，过时即可离去，两人能会面的概率为________.

10.从6双不同的手套中任取4只，求：

（1）恰有一双配对的概率；

（2）至少有两只可配成一双的概率.

11.假设工厂的每一台机床在运行过程中出现故障的概率为 $1-p$，而且各机床是否出现故障相互独立，如果有至少50%的机床正常工作，工厂就可以正常的生产，试求对多大的 p 而言，有4机床的工厂比有2机床的工厂可靠性更高.

题型三、概率的基本性质

12.设 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，则 A,B,C 都不发生的概率为________.

13.已知事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$，记 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

14.已知随机事件 A,B 满足条件 $AB=\overline{A}\overline{B}$，且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(\overline{B})=$________.

15.设 A,B 是任意两个概率不为零的互不相容事件，则下列结论中肯定正确的是（　　）

（A）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　（B）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　（D）$P(A-B)=P(A)$

题型四、条件概率和独立性

16.设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$ ________.

17.设随机事件 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，则 $P(AC|A\cup B)=$ ________.

18.设 A,B 为两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$，则（　　）

（A）$P(\overline{B}|\overline{A})=1$　　（B）$P(A|\overline{B})=1$

（C）$P(A\cup B)=1$　　（D）$P(B|A)=1$

19.进行 n 次伯努利试验，每次成功的概率为 p，在前两次试验一次成功一次失败的情况下，求成功 $k(k>2)$ 次的概率.

20.投掷两枚骰子，在第一枚骰子出现的点数能被 3 整除的条件下，求两枚骰子出现的点数之和大于 8 的概率.

21.设 A,B,C 三随机事件两两独立，且 $P(A),P(B),P(C)\in(0,1)$，则必有（　　）

（A）C 与 $A-B$ 独立　　（B）C 与 $A-B$ 不独立

（C）$A\cup C$ 与 $B\cup\overline{C}$ 独立　　（D）$A\cup C$ 与 $B\cup\overline{C}$ 不独立

22.假设随机事件 A 与 B 独立，$P(A)=P(B)$，A,B 恰好有一个发生的概率为 $\frac{1}{2}$，$P(A)=$ ________.

23.假设随机事件 A,B 相互独立，$P\left(A\right)=0.7$，且 $P\left(A-B\right)=0.3$，$P\left(B\right)=$_________.

24.设 A,B 为两个随机事件，$P(A)=0.5$，$P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，$P(A\cup B)=0.8$，求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

II参考答案

题型一、事件的关系与运算

1.（1）【解析】$\overline{C}$ 表示“该员工不爱逛商场”. 则 $AB\overline{C}$ 表示“工龄在5年以上的不爱逛商场的男性员工”.

（2）【解析】考查两个事件相等，即 $B=\overline{C} \Leftrightarrow B\subset\overline{C}$ 且 $\overline{C}\subset B$.其中 $B\subset\overline{C}$ 表示“该车间所有的男性员工都不爱逛商场”，$\overline{C}\subset B$ 表示“所有不爱逛商场的都是男性员工”，“且”表示两个事件同时发生，即在“只有男性员工不爱逛商场”的情况下，有 $B=\overline{C}$ 成立.

2.【答案】（C）.

【解析】当 $T_3\geq t_0$ 时，有 $t_0\leq T_3\leq T_4$，此时有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉断电，故选（C）.

3.【答案】（B）.

【解析】B,C 至少有一个发生即 $B+C$，又 A 发生必导致 B,C 至少有一个发生，则 $A\subset\left(B+C\right)$，故选（B）.

4.【答案】（D）.

【解析】$A\bigcup B\subset B$ 即 $A+B=B$，则 $A\subset B$，进而有 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$，知 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$ 可得 $A\overline{A}\,\overline{B}=A\overline{B}=\varnothing$，故选 D.

题型二、简单概型

5.【答案】$\dfrac{1}{1260}$.

【解析】这七个字母排成一行一共有 $7!$ 种排法，因字母 C 与 E 均有两个，故排成 $SCIENCE$ 共有 2×2 种排法，故概率为 $\dfrac{4}{7!}=\dfrac{1}{1260}$.

6.【答案】 $\frac{2}{9}$.

【解析】四次取球有3^4种取法，而取四次球恰好取到三种颜色的取法有$C_3^1C_2^1C_3^1$种，故概率为$\frac{C_3^1C_2^1C_3^1}{3^4}=\frac{2}{9}$.

7.【答案】 $\frac{7}{36}$.

【解析】根据题意有，B,C的所有可能取值均为$1,2,3,4,5,6$，故样本空间的结果数为$6^2=36$.若方程$x^2+2Bx+C=0$无实根，则要求$B^2-C<0$，该事件中所有可能的取值情况有：$B=1$时$C=2,3,4,5,6$；$B=2$时$C=5,6$，共计7种结果，故根据古典概型可得，方程无实根的概率为$\frac{7}{36}$.

8.【答案】 $\frac{1}{12}$.

【解析】由题意知u,v是从$(0,1)$内任取的两个数，故(u,v)的所有取值构成第一象限内边长为1的正方形，即样本空间.设事件A表示“方程$x^2+vx+u=0$有实根”，即A对应区域为$D=\{(u,v)\,|\,4u\le v^2\}$，其面积为$\frac{1}{12}$，则$P(A)=\frac{1}{12}$.

9.【答案】 $\frac{19}{32}$.

【解析】以x和y分别表示甲.乙两人到达约定地点的时间，6时到7时之间是一个小时，即60分钟，则两人能够会面满足的条件是$0<y-x<30$或$0<x-y<15$.故

$$P=1-\frac{\frac{1}{2}\times 45^2+\frac{1}{2}\times 30^2}{60^2}=\frac{19}{32}.$$

10.【答案】（1）$\frac{16}{33}$；（2）$\frac{17}{33}$.

【解析】（1）从6双手套中任取4只，共有C_{12}^4种取法；恰有一双配对则首先从6双中

选取一双，共C_6^1种取法，剩余的两只不能成双，故先从剩余的5双中选取两双，共C_5^2种取法，再从取出的两双中分别选一只，共$C_2^1C_2^1$种取法，故概率为$\dfrac{C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}=\dfrac{16}{33}$.

（2）至少有两只可配成一双包括恰有一双配对和两双配对，

故概率为$\dfrac{C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1+C_6^2}{C_{12}^4}=\dfrac{17}{33}$.

11.【答案】$p>\dfrac{2}{3}$.

【解析】记A为“4机床工厂能正常生产”，B为“2机床工厂能正常生产”由于各机床相互独立且出现故障概率相同，故根据伯努利概型，

$$P(A)=C_4^2p^2(1-p)^2+C_4^3p^3(1-p)^1+C_4^4p^4(1-p)^0$$

$$=6p^2(1-p)^2+4p^3(1-p)+p^4$$

$$P(B)=C_2^1p(1-p)+C_2^2p^2(1-p)^0=2p(1-p)+p^2,$$

由$P(A)>P(B)$可得$p>\dfrac{2}{3}$.

题型三、概率的基本性质

12.【答案】$\dfrac{3}{8}$.

【解析】

$$P(\overline{ABC})=1-P(A+B+C)=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$

由$ABC\subset AB$，有$0\le P(ABC)\le P(AB)=0$，故$P(\overline{ABC})=1-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{16}\right)=\dfrac{3}{8}$.

13.【答案】$P(B)=1-p$

【解析】由$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，

有 $P(A)+P(B)=1$，故 $P(B)=1-p$.

14.【答案】$\frac{1}{3}$.

【解析】由 $AB=\overline{A}\overline{B}$，

有 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，

即得 $1-P(A)-P(B)=0$，则 $P(\overline{B})=1-P(B)=P(A)=\frac{1}{3}$.

15.【答案】（D）.

【解析】由 A,B 互不相容可得 $AB=\varnothing$，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$，故选 D.

题型四、条件概率和独立性

16.【答案】$\frac{3}{4}$.

【解析】因为 $AC=\varnothing$，所以 $A\subset\overline{C}$，故 $P(AB\overline{C})=P(AB)=\frac{1}{2}$，

又 $P(\overline{C})=1-P(C)=\frac{2}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{3}{4}$

17.【答案】$\frac{1}{3}$.

【解析】$P(AC|A\cup B)=\frac{P[AC(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC\cup ABC)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$

$\frac{P(A)P(C)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{1}{3}$.

18.【答案】（A）.

【解析】由$1=P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，有$P(AB)=P(B)$，

于是，$P(\overline{B}|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\dfrac{1-P(A+B)}{1-P(A)}=\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{1-P(A)}{1-P(A)}=1$，

故选 A.

19.【答案】$C_{n-2}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}$.

【解析】利用缩减样本空间法，已知前两次试验一次成功一次失败的情况下，即剩下的$n-2$次试验有$k-1$次成功，故概率为$C_{n-2}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}$.

20.【答案】$\dfrac{5}{12}$.

【解析】利用缩减样本空间法进行求解，用x,y表示两次投掷出现的点数，则在第一枚骰子出现的点数能被3整除的条件下总体为x可以取$3,6$，y可取$1,2,3,4,5,6$，所以总样本空间样本点为12个，而两枚骰子出现的点数之和大于8的点为$\{(3,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共包含5个样本点，故概率为$\dfrac{5}{12}$.

21.【答案】（D）.

【解析】由$P(C(A-B))=P(AC)-P(ABC)=P(A)P(C)-P(ABC)$，

$P(C)P(A-B)=P(C)[P(A)-P(AB)]=P(A)P(C)-P(C)P(AB)$. A,B,C两两独立不一定相互独立，故无法判断C与$A-B$是否独立；

假设$A\cup C$与$B\cup\overline{C}$独立，则$\overline{A\cup C}=\overline{A}\overline{C}$与$\overline{B\cup\overline{C}}=\overline{B}C$独立，而$P[(\overline{A}\overline{C})(\overline{B}C)]=0$，

$P(\overline{A}\overline{C})P(\overline{B}C)=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})P(C)\neq 0$，故矛盾，所以$A\cup C$与$B\cup\overline{C}$不独立，故选 D.

22.【答案】$P(A)=\dfrac{1}{2}$.

【解析】A与B独立，则$P(AB)=P(A)P(B)$，又由题意可知：

$\frac{1}{2}=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)(1-P(B))+P(B)(1-P(A))=2P(A)-2P^2(A)$，

解得 $P(A)=\frac{1}{2}$.

23、【答案】$P(B)=\frac{4}{7}$.

【解析】由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=0.3$，

可得 $0.7P(B)=0.4$， $P(B)=\frac{4}{7}$.

24.【答案】0.7.

【解析】由已知 $P(B|A)=1-P(\overline{B}|\overline{A})=P(B|\overline{A})$，故有 $\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

得 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A 与 B 独立，

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B\overline{A})=0.8$，有 $P(B\overline{A})=0.3$，

因为 A 与 B 独立，则 $P(B)=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=0.6$，

故 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)P(B)=0.7$

模块二　五大公式

I经典习题

1.设 $P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，若 A,B 互不相容，则 $P(B)=$________.

2.设 $P(B)=0.3$，$P(A+B)=0.6$，则 $P(A\overline{B})=$________.

3.已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=\dfrac{1}{8}$，$P(AC)=P(BC)=0$，则事件 A,B,C 至少发生一个的概率为________.

4.已知随机事件 A 的概率 $P\left(A\right)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P\left(B\right)=0.6$，及条件概率 $P\left(B\middle|A\right)=0.8$，则 $P(A+B)=$________..

5.对以往数据分析表明，当机器调整的良好时，产品的合格率为 0.98；而当机器发生某种故障时，其合格率为 0.55.每天早上机器开动时，调整良好的概率为 0.95.试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率.

6.据报导，在美国总的来说患肺癌的概率为 0.001，在人群中有 0.2 是吸烟者，他们患肺癌的概率为 0.004，求不吸烟者患肺癌的概率.

7.要验收一批（100 件）乐器，验收方案如下：自该批乐器中随机地取 3 件测试（测试结果独立），若至少一件未通过测试，则拒收.设音色不纯的乐器被查出的概率为 0.95，而音色纯的乐器被误判的概率为 0.01.已知该批乐器有 4 件音色不纯，试求通过验收的概率.

8.甲袋中有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球 4 个黑球，今从甲袋中任取 2 球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，则

（1）求该球是白球的概率；

（2）已知该球是黑球，求从甲袋中取出的至少有一个黑球的概率.

9.根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：若以 A 表示事件“试验反应为阳性”，以 C 表示事件“被诊断者患有癌症”，则有 $P\left(A\middle|C\right)=0.95$，$P\left(\overline{A}\middle|\overline{C}\right)=0.95$，

$P(C)=0.005$.试求 $P(C|A)$.

II参考答案

1.【答案】0.3.

【解析】由题意得

$0.7 = P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(B) = 0.4+P(B)$，则 $P(B)=0.3$

2.【答案】0.3.

【解析】由题意得 $P(A\overline{B}) = P(A)-P(AB) = P(A)-\left[P(A)+P(B)-P(A+B)\right] = 0.3$.

3.【答案】$\frac{5}{8}$.

【解析】事件 A,B,C 至少一个发生可表示为 $A+B+C$，

则 $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) = \frac{5}{8}$.

4.【答案】0.7.

【解析】由 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{0.5} = 0.8$，得 $P(AB)=0.4$

则 $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = 0.7$.

5.【答案】0.97.

【解析】本题属于"由果溯因"的题目，考查贝叶斯公式.设 B 为事件"产品合格"， A 为事件"机器调整良好"所求概率表示为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})} = 0.97.$$

6.【答案】0.00025.

【解析】设 A 为事件"吸烟"， B 为事件"患肺癌"，

由全概率公式 $P(B) = P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$，

由题意有 $0.001 = 0.004\times 0.2+0.8P(B|\overline{A})$，解得 $P(B|\overline{A}) = 0.00025$.

7.【答案】0.8629.

【解析】设 A 表示"这批乐器通过验收"， B_i 表示"样品中恰有 i 件音色不纯"，其中

$i=0,1,2,3$.

通过验收的概率，由全概率公式：

$$P(A)=P(B_0)(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\cdot 0.99^3+\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}\cdot 0.99^2\times 0.05+\frac{C_{96}^1C_4^2}{C_{100}^3}\cdot 0.99\times 0.05^2+\frac{C_4^3}{C_{100}^3}\cdot 0.05^3=0.8629\text{.}$$

8.**【答案】**（1）$\dfrac{13}{25}$；（2）$\dfrac{3}{4}$.

【解析】（1）本题属于“由因溯果”的题目，考查全概率公式，记“摸到的球为白球”为事件 A，事件 A 概率的计算可分为以下三种情况：一是甲袋中取到的是两个白球，乙袋中取到的为白球；二是甲袋中取到的是一个白球一个黑球，乙袋中取到的为白球；三是甲袋中取到的为两个黑球，乙袋中取到的为白球，利用全概率公式，

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_6^1}{C_{10}^1}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_5^1}{C_{10}^1}+\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^1}{C_{10}^1}=\frac{13}{25}.$$

（2）本题考查贝叶斯公式的使用，由（1）中结论可知，从乙袋中取得黑球的概率为 $P(\overline{A})=1-\dfrac{13}{25}=\dfrac{12}{25}$.记事件 B 表示“从甲袋中至少取到一个黑球”，

则 $P(\overline{A}B)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\dfrac{C_5^1}{C_{10}^1}+\dfrac{C_2^2}{C_5^2}\times\dfrac{C_6^1}{C_{10}^1}=\dfrac{9}{25}$，

故所求概率为 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{3}{4}$.

9.**【答案】**0.087.

【解析】由贝叶斯公式， $P(C|A)=\dfrac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}=0.087$.

模块三　随机变量及其分布

I经典习题

题型一、对充要条件的考查

1.设随机变量X_1，X_2的分布函数为$F_1(x)$，$F_2(x)$，则为使$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取（　　）

（A）$a=\frac{3}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$　　（B）$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{2}{3}$

（C）$a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$　　（D）$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$

2.设随机变量X_1，X_2的密度函数为$f_1(x)$，$f_2(x)$，则下列函数可以作为概率密度的是（　　）

（A）$f_1(x)-f_2(x)$　　（B）$f_1(x)+f_2(x)$

（C）$f_1(x)\cdot f_2(x)$　　（D）$\frac{1}{3}f_1(x)+\frac{2}{3}f_2(x)$

3.设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$，已知$F(0)=0$，则下列函数可以作为分布函数的是（　　）

（A）$G(x)=\begin{cases}1-F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$　　（B）$G(x)=\begin{cases}1+F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$

（C）$G(x)=\begin{cases}F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$　　（D）$G(x)=\begin{cases}F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right), & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$

4.已知$F_1(x)$和$F_2(x)$均为随机变量的分布函数，$f_1(x)$和$f_2(x)$均为随机变量的概率密度，且常数$a>0$，$b>0$，$c>0$则下列结论中错误的是（　　）

（A）$aF_1(x)+bF_2(x)$ 也是分布函数的充分必要条件是 $a+b=1$

（B）$cF_1(x)F_2(x)$ 也是分布函数的充分必要条件是 $c=1$

（C）$af_1(x)+bf_2(x)$ 也是概率密度函数的充分必要条件是 $a+b=1$

（D）$cf_1(x)f_2(x)$ 也是概率密度函数的充分必要条件是 $c=1$

5.设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为均匀分布 $U(0,2)$ 的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), \ x\le 0 \\ bf_2(x), \ x>0 \end{cases}(a>b>0)$ 为某随机变量的概率密度，则 a,b 应满足（　　）

（A）$2a+3b=4$　　（B）$3a+2b=4$

（C）$a+b=1$　　（D）$a+2b=2$

6.设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$，概率密度是 $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(1,\sigma^2)$ 的概率密度，$f_2(x)$ 是均匀分布 $U(1,6)$ 的概率密度，已知 $F(1)=\frac{1}{4}$，则（　　）

（A）$a=1,b=0$　　（B）$a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{4}$

（C）$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$　　（D）$a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$

题型二、对特殊性质的考查

7.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \frac{1}{8}, & x=-1, \\ ax+b, & -1<x<1, \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$，已知 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，则（　　）

（A）$a=\dfrac{5}{16}$，$b=\dfrac{7}{16}$　　（B）$a=\dfrac{7}{16}$，$b=\dfrac{9}{16}$

（C）$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$　　（D）$a=\dfrac{3}{8}$，$b=\dfrac{3}{8}$

8.设 X 为随机变量，则存在实数 a，使得概率 $P\{X=a\}\neq 0$ 的充要条件是（　　）

（A）X 为离散型随机变量　　（B）X 为连续型随机变量

（C）X 的分布函数在 $x=a$ 处间断　　（D）X 的概率密度是连续函数

9.设函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{5}x^2, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，则 $F(x)$（　　）

（A）不是任何随机变量的分布函数　　（B）是某随机变量的分布函数

（C）是离散型随机变量的分布函数　　（D）是连续型随机变量的分布函数

10.设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\max\{X,2\}$ 的分布函数（　　）

（A）是连续函数　　（B）至少有两个间断点

（C）是阶梯函数　　（D）恰好有一个间断点

11.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{2}, & 0\le x<1\\ \dfrac{2}{3}, & 1\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$，则 $P\{0.5\le x<1\}=$________.

12.设连续型随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，求：（1）常数 A；（2）X 的密度函数 $f(x)$；（3）$P\left\{-1<X<\dfrac{1}{2}\right\}$.

13.设连续型随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ ae^{x}-b, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$，

求：（1）a 和 b；（2）概率密度 $f(x)$.

14.设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$ 则 $P\left\{X\ge 1\right\}=$________.

15.设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & -2\le x\le -1 \\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 2\le x\le 3 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，

则使得 $P\{X>k\}=P\{X<k\}$ 的常数 k 的取值范围为________.

题型三、分布函数的计算

16.已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6}, & 0\le x<3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x<4, \\ 0, & 其它. \end{cases}$，求 X 的分布函数.

17.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$；

（1）求常数 A；

（2）求 X 的分布函数.

II参考答案

题型一、对充要条件的考查

1.【答案】（A）.

【解析】对于随机变量的分布函数，应有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[aF_1(x)-bF_2(x)\right]=a-b=1$.

2.【答案】（D）.

【解析】随机变量的概率密度的充要条件为（1） $f(x)\geq 0$；（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.

由条件（1）排除（A）选项，

对于（B），$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)dx=2$，不满足条件（2），故（B）错误；

由条件（2）排除（C）选项；

对于（D），$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{3}f_1(x)+\frac{2}{3}f_2(x)\right]dx=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)dx=1$，正确.

3.【答案】（C）.

【解析】随机变量的分布函数的充要条件为（1） $F(x)$ 单调不减；

（2） $0\leq F(x)\leq 1,\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1,\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$；（3） $F(x)$ 右连续.

对于四个选项，分别验证是否满足上述条件，若任一条件不满足，则该函数不为随机变量的分布函数.

对于（A），当 $x>1$ 时，由于 $F(x)$ 关于 x 单调不减，则 $1-F\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于 x 单调不减；

当 $x\leq 1$ 时，$G(x)=0$ 为常数.又因为 $1-F\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0$,

故当 $x\in R$ 时，$G(x)$ 关于 x 单调不减，满足条件（1）；

由于 $0\le G(x)\le 1$，$G(+\infty)=1-F(0)=1$，$G(-\infty)=0$，满足条件（2）；

由于 $\lim\limits_{x\to 1^+}G(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[1-F\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=1-F(1)$，因 $F(1)$ 的值不确定，故不能确定 $G(x)$ 是否右连续，不满足条件（3）.故（A）错误；

对于（B），当 $x>1$ 时，$F(x)$ 关于 x 单调不减；则 $F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 关于 x 单调不增，故 $G(x)$ 关于 x 单调不增，不满足条件（1），故（B）错误；

对于（C），当 $x>1$ 时，$G(x)=F(x)-F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 单调不减；当 $x\le 1$ 时，$G(x)=0$ 为常数，

且 $F(x)-F\left(\dfrac{1}{x}\right)\ge 0$，故 $G(x)$ 单调不减，满足条件（1）；

显然，$0\le G(x)\le 1$，$G(-\infty)=0, G(+\infty)=F(+\infty)-F(0)=1$ 满足条件（2）；

由于 $F(x)$ 为连续型随机变量 X 的分布函数，

则 $\lim\limits_{x\to 1^+}G(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[F(x)-F\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)-\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)-F(1)=0=G(1)$，

故 $G(x)$ 满足条件（3）.

对于（D），其单调性不一定单调不减，不满足条件（1），故（D）错误；

故选（C）.

4.**【答案】**（D）.

【解析】利用分布函数及概率密度的性质，均可验证选项（A）（B）（C）均正确，

对于选项（D），在 $c=1$ 时也不能确定是否满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}cf_1(x)f_2(x)=1$.例如 $f_1(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\0,\quad 其他\end{cases}$，$f_2(x)=\begin{cases}1, 1<x<2\\0,\quad 其他\end{cases}$，在 $c=1$ 时 $\int_{-\infty}^{+\infty}cf_1(x)f_2(x)=0\neq 1$，故选（D）.

5.【答案】(D).

【解析】$f(x)$ 为概率密度，故有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，即 $\int_{-\infty}^{0} af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty} bf_2(x)dx=1$，

故有 $\frac{1}{2}a+b\int_0^2 f_2(x)dx=1 \Rightarrow \frac{1}{2}a+b=1 \Rightarrow a+2b=2$，故选（D）.

6.【答案】(C).

【解析】由题意得：$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \\ F(1)=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx=\frac{1}{4} \end{cases}$，

即 $\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}[af_1(x)+bf_2(x)]dx=1 \\ \int_{-\infty}^{1}[af_1(x)+bf_2(x)]dx=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ \frac{a}{2}=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

（其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(1,\sigma^2)$ 的概率密度，则 $\int_{-\infty}^{1} f_1(x)dx=\frac{1}{2}$，

$f_2(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}, & 1<x<6, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 是均匀分布 $U(1,6)$ 的概率密度，故 $\int_{-\infty}^{1} f_2(x)=0$），故选（C）.

题型二、对特殊性质的考查

7.【答案】(A).

【解析】由 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，可知 $F(1)-F(1-0)=1-(a+b)=\frac{1}{4}$，

又由分布函数右连续，有 $F(-1)=F(-1+0)$，即 $-a+b=\frac{1}{8}$，故选（A）.

8.【答案】(C).

【解析】X 的分布函数 $F(x)$ 是连续函数 $\Leftrightarrow$ 对任意实数 a 有 $P\{X=a\}=0$.也就是说，

若存在实数 a 有 $P\{X=a\}\neq 0$，即 $F(a)\neq F(a-0)$，则 $F(x)$ 在 $x=a$ 处间断.故选（C）.

9.【答案】(B).

【解析】连续型随机变量的分布函数必为连续函数，离散型随机变量的分布函数是阶梯

函数，故选项（C）与（D）错误.对于选项（B），$F(x)$满足如下条件：（1）$F(x)$单调不减；（2）$0\le F(x)\le 1, \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1, \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$；（3）$F(x)$右连续，故$F(x)$是某随机变量的分布函数.故选（B）.

10.【答案】（D）.

【解析】由题意知，$X\sim E(\lambda)$，故X在任一点处的概率为0，即$P\{X=a\}=0,$

又$Y=\max\{X,2\}=\begin{cases}X, X>2\\ 2, X\le 2\end{cases}$，显然当$y<2$时，$P\{Y=y\}=P\{X=y\}=0$，

而$P\{Y=2\}=P\{X\le 2\}=\int_0^2\lambda e^{-\lambda x}dx>0$；当$y>2$时，$P\{Y=y\}=0$

故只有$P\{Y=2\}\ne 0$，因此分布函数在$Y=2$处间断，选（D）.

11.【答案】$\frac{1}{4}$.

【解析】本题考查利用分布函数求概率，公式为$P\{a\le X<b\}=F(b-0)-F(a-0)$，

则有$P\{0.5\le x<1\}=F(1-0)-F(0.5-0)$，$F(1-0)=\frac{1}{2}$，

而$F\left(0.5-0\right)=F\left(0.5\right)=\frac{0.5}{2}$，故$P\{0.5\le x<1\}=F(1-0)-F(0.5-0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

12.【答案】（1）$A=1$；（2）$f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$；（3）$\frac{1}{4}$.

【解析】（1）由题意知，X为连续型随机变量，故其分布函数$F(x)$在$x=1$处连续，故$\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=F(1)$，即$A=1$；

（2）对分布函数求导即可得概率密度函数，故$f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$.

（3）已知分布函数计算概率：$P\left\{-1<x<\dfrac{1}{2}\right\}=F\left(\dfrac{1}{2}-0\right)-F(-1)=\dfrac{1}{4}$.

13.【答案】（1）$a=\dfrac{1}{e^2-1},b=\dfrac{1}{e^2-1}$；（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^2-1}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$.

【解析】（1）由题意知，X 为连续型随机变量，故分布函数 $F(x)$ 在任意一点处连续，

当 $x=0$ 时，$F(0-0)=F(0)$，即 $0=a-b$；

当 $x=2$ 时，$F(2-0)=F(2)$，即 $1=ae^2-b$，解得 $a=b=\dfrac{1}{e^2-1}$.

（2）对分布函数求导即可得概率密度函数，

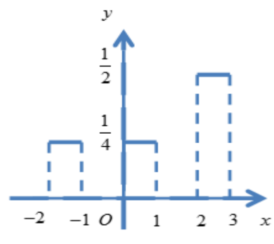
故所求概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^2-1}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$.

14.【答案】e^{-1}.

【解析】已知随机变量 X 的概率密度，求 X 落入某个区间段内的概率，可根据公式 $P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)dx$ 求得.故本题中 $P\{X\geq 1\}=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-1}$.

15.【答案】$[1,2]$.

【解析】由题意知，$P\{2<X<3\}=\dfrac{1}{2}$,也即在 $[2,3]$ 区间段上由其概率密度函数（如右图所示）围成的矩形面积恰好为 $\dfrac{1}{2}$，易知，若使得 $P\{X>k\}=P\{X<k\}=\dfrac{1}{2}$，则 k 需满足 $1\leq k\leq 2$.



题型三、分布函数的计算

16.【答案】$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3, \\ -\dfrac{x^2}{4}+2x-3, & 3\le x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$.

【解析】直接利用分布函数的定义，

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$；

当 $0\le x<3$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{x}\frac{t}{6}dt=\frac{1}{12}x^2$；

当 $3\le x<4$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{3}\frac{t}{6}dt+\int_{3}^{x}(2-\frac{t}{2})dt=-\frac{x^2}{4}+2x-3$；

当 $x\ge 4$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=1$.

故所求得分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3, \\ -\dfrac{x^2}{4}+2x-3, & 3\le x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$.

17.【答案】(1) $A=\frac{1}{2}$；(2) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{x}, x\le 0, \\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, x>0. \end{cases}$.

【解析】(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得，$\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x}dx=2A=1$，故 $A=\frac{1}{2}$.

(2) 由分布函数的定义有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt$,

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$；

当 $x \geq 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x}$，

故 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, x\leq 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, x>0.\end{cases}$

模块四　常见分布

I经典习题

题型一、对基本公式的考查

1.在区间$[0,6]$上任取一点记为X，求$P\left\{X^2-5X+6\geq 0\right\}$.

2.设随机变量$X\sim B(2,\ p)$，$Y\sim B(3,\ p)$，若$P\left\{X\geq 1\right\}=\dfrac{5}{9}$，

则$P\{Y\geq 1\}=$________.

3.某地区一个月内发生交通事故的次数X服从参数为λ的泊松分布，根据统计资料可知，一个月内发生8次交通事故的概率是发生10次交通事故的概率的2.5倍，求参数λ.

4.电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为4的泊松分布，试求

（1）每分钟恰好有2次呼唤的概率；

（2）每分钟的呼唤次数大于2的概率.

5.假设随机变量$X\sim N(0,\ \sigma^2)$，当σ取何值时，X落入区间$(1,3)$的概率最大？

6.设顾客在某银行窗口等待服务的时间为$X\sim E\left(\dfrac{1}{5}\right)$，若等待时间超过10分钟，他就离开.假设他一个月内要来银行5次，以Y表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数，求Y的分布律及概率$P\left\{Y\geq 1\right\}$.

题型二、对特殊性质的考查

7.一张考卷上有五道选择题，每道题列出四个可能答案，其中有一个答案是正确的，求某学生仅靠猜测能答对至少四道题的概率是多少？

8.设随机变量X在区间$[0,6]$上服从均匀分布，现对X进行三次独立观测，求至少有两

次观测值大于2的概率.

9.某随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，对$X$进行独立重复观测，直到第二个大于$3$的观测值出现时停止，记$Y$为观测次数，求$Y$的分布律.

根据如下附表数据计算以下各题.

[附表]

x	0.00	0.80	1.00	1.28	2.30	2.50	3.00
$\Phi(x)$	0.500	0.788	0.841	0.900	0.989	0.994	0.999

表中$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数.

10.某科统考成绩近似服从正态分布$N(70,10^2)$，在参加统考的人中，及格（60分及以上）者100人.试求不及格的人数.

11.设$X\sim N(108,3^2)$，

（1）试计算$P\{101.1<X<117.6\}$；（2）确定a使得$P\{X<a\}=0.90$.

12.设电源电压X服从正态分布$N(220,25^2)$，已知当$X\le 200$伏时，元件损坏的概率为0.1；当$200<X\le 240$伏时，元件损坏的概率为0.001；当$240<X<+\infty$时，元件损坏的概率为0.2。现用10个这样的元件组成电器，求：

（1）在元件都串联的情况下电器损坏的概率；

（2）在元件都并联的情况下电器损坏的概率.

13.设随机变量$X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，

且$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$则必有（　　）

（A）$\sigma_1<\sigma_2$　　　　（B）$\sigma_1>\sigma_2$

（C）$\mu_1<\mu_2$　　　　（D）$\mu_1>\mu_2$

14.设X_1，X_2，X_3是随机变量，$X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，

$p_i = P\{-2 \le X_i \le 2\}(i=1,2,3)$，则（　　）

（A）$p_1 > p_2 > p_3$　（B）$p_2 > p_1 > p_3$　（C）$p_3 > p_1 > p_2$　（D）$p_1 > p_3 > p_2$

15.设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则对任意实数 x 有（　　）

（A）$F(x)+F(-x)=1$　　（B）$F(1+x)+F(1-x)=1$

（C）$F(x+1)+F(x-1)=1$　　（D）$F(1-x)+F(x-1)=1$

16.设随机变量 $X \sim N(0,1)$，对给定 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，

若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 $x=$（　　）

（A）$u_{\frac{\alpha}{2}}$　（B）$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　（C）$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　（D）$u_{1-\alpha}$

17.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，X 的概率密度为 $f(x)$，若 X 与 $-X$ 有相同的分布函数，则（　　）

（A）$F(x)=F(-x)$　　（B）$F(x)=-F(-x)$

（C）$f(x)=f(-x)$　　（D）$f(x)=-f(-x)$

II参考答案

题型一、对基本公式的考查

1.【答案】$\dfrac{5}{6}$.

【解析】由一维均匀分布计算概率即算有效的区间长度比，

有 $P\left\{X^2-5X+6\geq 0\right\}=P\left\{0\leq X\leq 2\right\}+P\left\{3\leq X\leq 6\right\}=\dfrac{5}{6}$.

2.【答案】$\dfrac{19}{27}$.

【解析】由于 $P\{X=0\}=1-P\{X\geq 1\}=1-\dfrac{5}{9}$，

故由 $P\{X=0\}=C_2^0p^0(1-p)^2=(1-p)^2=\dfrac{4}{9}$，得 $p=\dfrac{1}{3}$，

从而：$P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0p^0(1-p)^3=1-(1-p)^3=1-(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{19}{27}$.

3.【答案】6.

【解析】由题意知，$P\left\{X=8\right\}=2.5P\left\{X=10\right\}$， 即 $\dfrac{\lambda^8}{8!}e^{-\lambda}=2.5\dfrac{\lambda^{10}}{10!}e^{-\lambda}$，解得 $\lambda=6$.

4.【答案】（1）$8e^{-4}$；（2）$1-13e^{-4}$；

【解析】（1）由题意 $P\{X=k\}=\dfrac{4^k}{k!}e^{-4},k=0,1,2,\cdots$.

故恰好有两次呼唤的概率为 $P\{X=2\}=\dfrac{4^2}{2!}e^{-4}=8e^{-4}$.

（2）呼唤次数大于 2 次的概率为：

$$P\{X>2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}$$
$$=1-\frac{4^0}{0!}e^{-4}-\frac{4^1}{1!}e^{-4}-\frac{4^2}{2!}e^{-4}=1-13e^{-4}$$

5.【答案】$\frac{2}{\sqrt{ln3}}$

【解析】因 $X\sim N(0,\ \sigma^2)$，

则：$P\{1<X<3\}=P\{\frac{1}{\sigma}<\frac{X}{\sigma}<\frac{3}{\sigma}\}=\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)=g(\sigma)$，

$$g'(\sigma)=\left(-\frac{3}{\sigma^2}\right)\Phi'\left(\frac{3}{\sigma}\right)+\frac{1}{\sigma^2}\Phi'\left(\frac{1}{\sigma}\right)=-\frac{3}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-9/2\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\sigma^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}e^{-1/2\sigma^2}\left[1-3e^{-8/2\sigma^2}\right]$$

令 $g'(\sigma)=0$，得 $\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{ln3}}$；

又因当 $\sigma<\sigma_0$ 时 $g'(\sigma)>0$；当 $\sigma>\sigma_0$ 时 $g'(\sigma)<0$.

故当 $\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{ln3}}$ 时 X 落入区间 $(1,3)$ 的概率最大.

6.【答案】（1）$P\left\{Y=k\right\}=C_5^k\left(e^{-2}\right)^k\left(1-e^{-2}\right)^{5-k}$，$k=0,1,2,3,4,5$；

（2）$P\left\{Y\geq 1\right\}=1-\left(1-e^{-2}\right)^5$.

【解析】（1）由题意可知 $Y\sim B(5,\ p)$，

其中 $p=P\left\{X>10\right\}=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=-e^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty}=e^{-2}$

于是 Y 的分布律为：$P\left\{Y=k\right\}=C_5^k\left(e^{-2}\right)^k\left(1-e^{-2}\right)^{5-k}$，$k=0,1,2,3,4,5$.

（2）由分布律有：$P\left\{Y\geq 1\right\}=1-P\left\{Y=0\right\}=1-\left(1-e^{-2}\right)^5$.

题型二、对特殊性质的考查

7.【答案】$\frac{1}{64}$；

【解析】该学生仅靠猜测答对每道题的概率 $p=\frac{1}{4}$，这是 $n=5,p=\frac{1}{4}$ 的独立重复试验，

以 X 表示该学生仅靠猜测答对的题目数，则 $X\sim B(5,\frac{1}{4})$，

且所求概率为：$P\{X\geq 4\}=C_5^4(\frac{1}{4})^4\frac{3}{4}+C_5^5(\frac{1}{4})^5=\frac{1}{64}$.

8.【答案】$\frac{20}{27}$.

【解析】由于 $X\sim U\left[0,6\right]$，即 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & 0<x<6\\ 0, & 其他\end{cases}$，

所以有 $P\{X>2\}=\int_2^6\frac{1}{6}dx=\frac{2}{3}$.令 Y 表示三次观测中观察值大于 2 的次数，

则 $Y\sim B(3,\frac{2}{3})$，故所求概率 $P\{Y\geq 2\}=C_3^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}+C_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{20}{27}$.

9.【答案】$P\{Y=n\}=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$

【解析】记 p 为观测值大于 3 的概率，则有 $p=P\left\{X>3\right\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$.

假设第 n 次时第二个大于 3 的观测值出现，即前 $n-1$ 次中有一次出现了大于 3 的观测值，剩余 $n-2$ 次观测值 ≤ 3，而在第 n 次时的观测值大于 3 .

故 Y 的分布律为：$P\{Y=n\}=C_{n-1}^1p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$.

10.【答案】19.

【解析】设 X 表示考生的成绩,参加统考的人数为 n.由 $X \sim N(70,10^2)$ 可得通过率为

$$\frac{100}{n} = P\{X \geq 60\} = 1-\Phi\left(\frac{60-70}{10}\right) = 1-\Phi(-1) = 0.841,$$

解得 $n \approx 119$，即不及格人数为19.

11.【答案】（1）$\Phi(3.2)-\Phi(-2.3)$；（2）$a = 111.84$.

【解析】（1）已知分布函数求概率：

$$P\{101.1 < X < 117.6\} = \Phi\left(\frac{117.6-108}{3}\right)-\Phi\left(\frac{101.1-108}{3}\right) = \Phi(3.2)-\Phi(-2.3);$$

（2）据题意有 $0.9 = P\{X < a\} = \Phi\left(\frac{a-108}{3}\right)$，查表有 $\frac{a-108}{3} = 1.28$，即 $a = 111.84$.

12.【答案】（1）$1-0.936^{10}$；（2）0.064^{10}.

【解析】电源电压 X 的三个状态构成元件损坏的完备事件组，其概率为

$$P\{X \leq 200\} = P\left\{\frac{X-220}{25} \leq \frac{200-220}{25}\right\}$$
$$= P\left\{\frac{X-220}{25} \leq -0.8\right\} = \Phi(-0.8) = 1-\Phi(0.8) = 0.212$$

$$P\{200 < X \leq 240\} = P\left\{\frac{200-220}{25} < \frac{X-220}{25} \leq \frac{240-220}{25}\right\}$$
$$= P\left\{-0.8 < \frac{X-220}{25} \leq 0.8\right\} = \Phi(0.8)-\Phi(-0.8) = 2\cdot\Phi(0.8)-1 = 0.576$$

$$P\{X > 240\} = P\left\{\frac{X-220}{25} > \frac{240-220}{25}\right\} = P\left\{\frac{X-220}{25} > 0.8\right\} = 1-\Phi(0.8) = 0.212 \quad ;$$

故一个元件损坏的概率为 $p = 0.1\times0.212+0.001\times0.576+0.2\times0.212 \approx 0.064$.

设元件损坏数为 ξ，则 $\xi \sim B(10, p)$，又设 A, B 分别表示在串联和并联两种情况下电器

损坏，因此：$P(A)=P\left\{\xi\ge 1\right\}=1-P\left\{\xi=0\right\}=1-(1-0.064)^{10}=1-0.936^{10}$，

$P(B)=P\left\{\xi=10\right\}=C_{10}^{10}(0.064)^{10}=0.064^{10}$

13.【答案】（A）.

【解析】由题意知，

$P\{|X-\mu_1|<1\}=P\left\{\dfrac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\dfrac{1}{\sigma_1}\right\}$，$P\{|Y-\mu_2|<1\}=P\left\{\dfrac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2}<\dfrac{1}{\sigma_2}\right\}$，

由 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，可知 $P\left\{\dfrac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\dfrac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\dfrac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2}<\dfrac{1}{\sigma_2}\right\}$，

即 $\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$，所以有 $\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$，即 $\sigma_1<\sigma_2$，故选（A）.

14.【答案】（A）.

【解析】由题意知，$p_1=P\{-2\le X_1\le 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$，

$p_2=P\{-2\le X_2\le 2\}=P\{\dfrac{-2-0}{2}\le\dfrac{X_2-0}{2}\le\dfrac{2-0}{2}\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$，

$p_3=P\{-2\le X_3\le 2\}=P\{\dfrac{-2-5}{3}\le\dfrac{X_2-5}{3}\le\dfrac{2-5}{3}\}=\Phi(-1)-\Phi(-\dfrac{7}{3})=\Phi(\dfrac{7}{3})-\Phi(1)$，

比较知 $p_1>p_2$，由 $p_2-p_3=3\Phi(1)-1-\Phi(\dfrac{7}{3})>0$，则 $p_1>p_2>p_3$，故选（A）.

15.【答案】（B）.

【解析】由于 $X\sim N(1,\sigma^2)$，则其概率密度的图形关于 $x=1$ 对称，不妨设 $x>0$，

则 $F(1+x)$ 表示概率密度曲线. x 轴和直线 $\xi=1+x$ 所围成的左侧面积，

同理可知，$F(1-x)$ 表示概率密度曲线. x 轴和直线 $\xi=1-x$ 所围成的左侧面积，

根据概率密度的对称性和归一性，两部分面积相加恒为 1，即 $F(1+x)+F(1-x)=1$，

故选（B）.

16.【答案】（C）.

【解析】 因为$P\{|X|<x\}=\alpha$，故根据标准正态分布图像的对称性，

有$P\{0<X<x\}=\dfrac{\alpha}{2}$，故$P\{0<X<x\}+P\{X\geq x\}=P\{0<X<+\infty\}=\dfrac{1}{2}$，

因此$P\{X>x\}=P\{X\geq x\}=\dfrac{1}{2}-P\{0<X<x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$，

将此与$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$比较得$x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$，故选（C）.

17.【答案】（C）.

【解析】由题设知$F(x)=P\{X\leq x\}=P\{-X\leq x\}$，

而$F(-x)=P\{X\leq -x\}=P\{-X\geq x\}=1-P\{-X<x\}=1-F(x)$，

求导得$F'(-x)\cdot(-1)=-F'(x)$，即$F'(-x)=F'(x)$，所以$f(-x)=f(x)$，故选（C）.

模块五 多维随机变量

I经典习题

题型一、离散型随机变量及其分布律

1.将一枚均匀硬币连续扔三次，以 X 表示三次试验中出现正面的次数，Y 表示出现正面的次数与出现反面的次数的差的绝对值，试求 (X,Y) 的分布律.

2.设袋中有1个红球，2个黑球与3个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一球.以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球和白球的个数.求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律.

3.设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，

随机变量 $X=\begin{cases}-1, & U\le -1\\ 1, & U>-1\end{cases}$，$Y=\begin{cases}-1, & U\le 1\\ 1, & U>1\end{cases}$，求 X,Y 的联合分布律.

4.某箱有100件产品，其中一、二和三等品分别为80,10,10件，现从中随机抽取一件，

随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\ (i=1,2,3)$，计算 (X_1, X_2) 的分布律.

题型二、连续型随机变量及其概率密度

5.设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k(x+y), & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则常数 $k=$________.

6.设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x^2<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则常数 $k=$________.

7.设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-2(x+y)}, & x>0，y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

（1）求常数C；（2）求$P\{X+Y\le 1\}$.

8.已知随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-y},0<x<y\\0, \quad\text{其他}\end{cases}$，试求常数$A$，

并计算概率$P\left\{X+Y\ge 1\right\},P\left\{\frac{X}{Y}\le\frac{1}{2}\right\}$.

9.设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}C-3^{-x}-3^{-y}+3^{-(x+y)},x\ge 0,y\ge 0\\0, \quad\text{其他}\end{cases},$$

（1）求常数C；（2）求(X,Y)的联合概率密度$f(x,y)$.

题型三、联合分布函数的计算

10.设二维随机变量(X,Y)具有概率密度$f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-(3x+4y)}, & x>0，y>0\\0, & \text{其他}\end{cases}$，

（1）求常数C；（2）分布函数$F(x,y)$；（3）求概率$P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}$.

11.已知二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\0, & \text{其他}\end{cases}$，

（1）求(X,Y)的联合分布函数；（2）求$P\left\{X+Y\le 1\right\}$.

题型四、二维均匀分布

12.设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\big|0<x<1,|y|<x\}$上服从均匀分布，

则概率$P\left\{X+Y\le 1\right\}=$________.

13.已知(X,Y)在以点$(0,0),(1,-1),(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布，

计算概率 $P\left\{X>0,Y>0\right\}$， $P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y>0\right\}$.

II参考答案

题型一、离散型随机变量及其分布律

1.【答案】(X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

【解析】求解分布律的关键在于找出随机变量的所有可能取值及其对应的概率.根据题意，随机变量 X,Y 的所有可能取值分别为 $0,1,2,3$ ，$1,3$ ，取值方式为等可能，其概率计算满足古典概型，则 $P\{X=0，\ Y=3\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$；$P\{X=1，\ Y=1\}=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$；

$P\{X=2，\ Y=1\}=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$；$P\{X=3，\ Y=3\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

则 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

2.【答案】(X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

【解析】本题关键在于找出随机变量的所有可能取值及其对应的概率.据题意，随机变量 X,Y 的所有可能取值均为 $0,1,2$，$P\{X=0，Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

$P\{X=0，Y=1\}=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$；$P\{X=0，Y=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

$P\{X=1，Y=0\}=C_2^1\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$；$P\{X=1，Y=1\}=C_2^1\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

$P\{X=1，Y=2\}=0$；$P\{X=2，Y=0\}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$；

$P\{X=2，Y=1\}=P\{X=2，Y=2\}=0$，则 (X,Y) 的分布律为：

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

3.【答案】(X,Y) 的分布律为：

$Y \backslash X$	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

【解析】本题重点在于确定(X,Y)的取值及每个取值的概率. 由题可得：X,Y的取值都是$-1,1$，而$U \sim U[-2,2]$，则概率分别为：$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U \le -1,U>1\}=0$；

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U \le -1,U \le 1\}=P\{U \le -1\}=\frac{1}{4}$；

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U \le 1\}=P\{-1<U \le 1\}=\frac{1}{2}$；

$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\frac{1}{4}$.

则(X,Y)的分布律为：

$Y \backslash X$	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

4.**【答案】**$(X_1，X_2)$的分布律为

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{1}{10}$	0

【解析】求联合分布律的关键是确定随机变量的取值和对应的概率，

X_1，X_2 的取值均为 0 和 1.则 $P\{X_1=0，X_2=0\}=\frac{1}{10}$；$P\{X_1=0，X_2=1\}=\frac{1}{10}$；

$P\{X_1=1，X_2=0\}=\frac{4}{5}$；$P\{X_1=1，X_2=1\}=0$

因此，$(X_1，X_2)$ 的分布律为

X_2 \ X_1	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{1}{10}$	0

题型二、连续型随机变量及其概率密度

5.【答案】$k=2$.

【解析】由概率密度的归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x k(x+y)dy=\frac{k}{2}=1$，

解得 $k=2$.

6.【答案】$k=6$.

【解析】由概率密度的归一性 $k\int_0^1dx\int_{x^2}^x dy=k\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{k}{6}=1$，解得 $k=6$.

7.【答案】（1）$C=4$；（2）$P\{X+Y\le 1\}=1-3e^{-2}$.

【解析】（1）由概率密度的归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ce^{-2(x+y)}dxdy=1$，

解得 $C=4$

（2）已知连续型随机变量概率密度，求概率有 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，

即 $P\{X+Y\le 1\}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}4e^{-2(x+y)}dy=1-3e^{-2}$.

8.【答案】(1) $A=1$;(2) $P\left\{X+Y\ge 1\right\}=2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$;(3) $P\left\{\frac{X}{Y}\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$.

【解析】(1) 由于 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}Ae^{-y}dy=A$.所以 $A=1$.

(2) 已知概率密度,求概率有

$$P\left\{X+Y\ge 1\right\}=1-P\left\{X+Y<1\right\}=1-\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)dxdy,$$

$$=1-\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1-\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{-x}-e^{x-1})dx=2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$$

(3) 已知概率密度,求概率有 $P\left\{\frac{X}{Y}\le\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le\frac{1}{2}}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_{2x}^{+\infty}e^{-y}dy=\frac{1}{2}$

9.【答案】(1) $C=1$;(2) $f(x,y)=\begin{cases}3^{-(x+y)}\left(\ln 3\right)^2, x\ge 0, y\ge 0\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$;

【解析】(1) 由分布函数性质知 $F(+\infty,+\infty)=1$,

又由题意可得,$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F\left(x,y\right)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(C-3^{-x}-3^{-y}+3^{-(x+y)})=C=1$,所以 $C=1$.

(2) 由连续型随机变量密度函数的定义有 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

当 $x>0$, $y>0$ 时,$\frac{\partial F}{\partial x}=3^{-x}\ln 3-3^{-(x+y)}\ln 3$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(3^{-x}\ln 3-3^{-(x+y)}\ln 3)}{\partial y}=3^{-(x+y)}(\ln 3)^2$$

所以联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}3^{-(x+y)}\left(\ln 3\right)^2, x>0, y>0\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$.

题型三、联合分布函数的计算

10.【答案】（1） $C=12$ （2） $F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right), & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

（3） $P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$

【解析】（1）由概率密度的归一性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}Ce^{-(3x+4y)}dxdy=12C=1$$

解得 $C=12$

（2）根据题中所给的密度函数可以对 x,y 进行如下分类讨论：

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时， $F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}0dudv=0$；

当 $x>0$， $y>0$ 时，

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,\ v)dudv=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}12e^{-(3u+4v)}dudv=\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

故 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right), & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（3） $P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}=P\{X\le 1,\ Y\le 2\}=F(1,2)=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$.

11.【答案】（1） $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ 1-\mathrm{e}^{-y}-y\mathrm{e}^{-y}, & 0<y<x\\ 1-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-y}, & 0\le x\le y\end{cases}$，

（2） $P\{X+Y\le 1\}=1-2e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}$.

【解析】（1）当 $x<0$ 或 $y<0$ 时， $F(x,\ y)=P\left\{X\le x,Y\le y\right\}=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}0dudv=0$；

当 $0<y<x$ 时， $F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\int_{0}^{y}dv\int_{0}^{v}e^{-v}du=1-e^{-y}-ye^{-y}$；

当 $0\le x\le y$ 时，

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\int_{0}^{x}du\int_{u}^{y}e^{-v}dv=\int_{0}^{x}(e^{-u}-e^{-y})du=1-e^{-x}-xe^{-y}；$$

因此，(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ 1-e^{-y}-ye^{-y}, & 0<y<x\\ 1-e^{-x}-xe^{-y}, & 0\le x\le y\end{cases}$.

（2）连续型随机变量已知概率密度求概率有$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，

即$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1-2e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}$

题型四、二维均匀分布

12.【答案】$\frac{3}{4}$.

【解析】若二维随机变量服从均匀分布，计算概率就是相应区域的面积比，这是本题要强调的计算技巧和公式. 故$P\left\{X+Y\le 1\right\}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}=\frac{3}{4}$.

13.【答案】（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{3}{4}$

【解析】本题考查条件概率的计算.由题可知二维随机变量服从均匀分布，计算概率就是相应区域的面积比.

（1）$P\left\{X>0,Y>0\right\}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}=\frac{1}{2}$，

（2）$P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y>0\right\}=\dfrac{P\left\{X>\frac{1}{2},Y>0\right\}}{P\left\{Y>0\right\}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}=\frac{3}{4}$.

模块六　边缘分布与条件分布

I经典习题

题型一、离散型

1.等可能地在$1,2,\cdots,9$中取一个整数值记作N，设$D=D(N)$是能整除N的正整数的个数，$F=F(N)$是能整除N的素数的个数（注意1不是素数）.试写出D与F的联合分布律，并求边缘分布律.

2.设随机变量X在$1,2,3,4$四个数字中等可能地取值，随机变量Y在$1,\cdots,X$中等可能的取值.

（1）求二维随机变量(X,Y)的概率分布以及关于X,Y的边缘分布；

（2）求在$Y=2$时X的条件分布.

3.袋中有2个红球，3个黑球与4个白球.现有放回地从袋中取两次，每次取一个球，以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红球.黑球与白球的个数.

（1）求$P\{X=1|Z=1\}$；（2）求二维随机变量(X,Y)的概率分布.

4.设二维离散型随机变量只取$(0,0)$，$(-1,1)$，$(-1,2)$，$(1,0)$四个值，其相应概率分别为$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{5}{12}$.试求：

（1）(X,Y)关于X与Y的边缘概率分布律；

（2）在$Y=1$条件下X的条件概率分布律；在$X=-1$条件下Y的条件概率分布律.

5.箱子里有3个球，两个白球，一个黑球，有放回的取球，取到两次黑球为止，设以X表示第一次取到黑球所取球的次数，以Y表示总共的取球次数，试求：

（1）X和Y的联合分布律；

（2）在 $X=m$ 的条件下 $Y=n$ 的条件概率以及在 $Y=n$ 的条件下 $X=m$ 的条件概率.

6.设随机变量 X_1,X_2 同分布，$X_1\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，试求：

（1）X_1,X_2 的联合分布律；（2）$P\{X_1=X_2\}$.

题型二、连续型

7.设随机变量 (X,Y) 的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求：

（1）常数 k；（2）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度；

（3）条件概率密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$. $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

8.设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}c, & 0<x^2<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求：

（1）常数 c；（2）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度；（3）$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right\}$.

9.设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0,x+y=2$ 与 $x=0$ 所围成的区域.试求：

（1）边缘概率密度 $f_X(x)$；（2）条件密度函数 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$；（3）$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le 1\right\}$.

10.设平面区域 D 由曲线 $x^2+y^2\le 1$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，求 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度及在 $x=\frac{1}{2}$ 处的值.

11.设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},(x,y)\in R^2$ ，求：

（1）常数 A；

（2）边缘概率密度 $f_X(x)$. $f_Y(y)$；

（3）条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$. $f_{Y|X}(y|x)$.

12.设随机变量 X 表示在区间 $(0,1)$ 上随机的取值，当观察到 $X=x(0<x<1)$ 时，随机变量 Y 表示在区间 $(0,x)$ 上随机的取值，求：

（1）随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；（2）Y 的概率密度 $f_Y(y)$；（3）$P\{X+Y>1\}$.

13.试验证：以下给出的两个不同的联合概率密度函数，它们有相同的边缘概率密度.

$$f_1(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$f_2(x,y)=\begin{cases} (0,5+x)(0.5+y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

II参考答案

题型一、离散型

1.【答案】D 和 F 的联合分布律为

$F \backslash D$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0
1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	0	0	0	$\frac{1}{9}$

D 的边缘分布律为

D	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

F 的边缘分布律为

F	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{9}$

【解析】求联合分布律关键是确定随机变量所有可能取值和相应的概率.

先将试验的样本空间及 D,F 取值的情况列出如下：

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1

由此可知，D 的所有可能取值为$1,2,3,4$；F 所有可能取的值为$0,1,2$.随机变量(D,F)的分布律如下表所示：

$F \backslash D$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0
1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	0	0	0	$\frac{1}{9}$

求D的边缘分布即求D的分布律，易知D的可能取值为$1,2,3,4$，其对应概率分别为

$P\{D=1\}=\frac{1}{9}+0+0=\frac{1}{9}$；$P\{D=2\}=0+\frac{4}{9}+0=\frac{4}{9}$；$P\{D=3\}=0+\frac{2}{9}+0=\frac{2}{9}$；

$P\{D=4\}=0+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$.因此$D$的边缘分布律为

D	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

随机变量F的可能取值为$0,1,2$，其对应的概率分别为$P\{F=0\}=\frac{1}{9}+0+0+0=\frac{1}{9}$；

$P\{F=0\}=0+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$；$P\{F=2\}=0+0+0+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$.因此$F$的边缘分布律为

F	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{9}$

2.【答案】(1) (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

(X,Y) 关于 X，Y 的边缘分布律分别为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$

(2) 在 $Y=2$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$X=k \mid Y=2$	2	3	4
$P\{X=k \mid Y=2\}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$

【解析】（1）由题知，随机变量$X.Y$的所有可能取值均为$1,2,3$和4，且$Y\le X$，

因此$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1,Y=4\}=P\{X=2,Y=3\}$

$=P\{X=2,Y=4\}=P\{X=3,Y=4\}=0$；

又根据乘法公式可得，$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$；

$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}P\{Y=1|X=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；

$P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；

$P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3\}P\{Y=1|X=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$；

$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$；

$P\{X=3,Y=3\}=P\{X=3\}P\{Y=3|X=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$；

$P\{X=4,Y=1\}=P\{X=4\}P\{Y=1|X=4\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$；

$P\{X=4,Y=2\}=P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$；

$P\{X=4,Y=3\}=P\{X=4\}P\{Y=3|X=4\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$；

$P\{X=4,Y=4\}=P\{X=4\}P\{Y=4|X=4\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.

所以(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

(X,Y) 关于 X，Y 的边缘分布律分别为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$

（2）当 $Y=2$ 时，X 的所有可能取值为 $2,3,4$，根据条件概率的计算公式可知，

$$P\{X=2|Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{48}}=\frac{6}{13}$$

$$P\{X=3|Y=2\}=\frac{P\{X=3,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{13}{48}}=\frac{4}{13};$$

$$P\left\{X=4\middle|Y=2\right\}=\frac{P\{X=4,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{13}{48}}=\frac{3}{13}.$$

所以在$Y=2$条件下，X 的条件分布律为

$X=k\mid Y=2$	2	3	4
$P\{X=k\mid Y=2\}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$

3.【答案】(1) $P\{X=1\mid Z=1\}=\frac{2}{5}$；

(2) (X,Y) 的概率分布为

$Y\backslash X$	0	1	2
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$
1	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

【解析】(1) 此题考查条件概率的计算.

根据条件概率公式得$P\{X=1\mid Z=1\}=\frac{P\{X=1,Z=1\}}{P\{Z=1\}}$；

其中事件$\{X=1,Z=1\}$表示两次取得一个红球.一个白球，

其概率$P\{X=1,Z=1\}=\frac{2\times4\times2}{9\times9}=\frac{16}{81}$；

事件$\{Z=1\}$表示一次取得白球，剩下一次取红球或黑球，

其概率$P\{Z=1\}=\dfrac{4\times5\times2}{9\times9}=\dfrac{40}{81}$；

因此，条件概率$P\{X=1|Z=1\}=\dfrac{P\{X=1,Z=1\}}{P\{Z=1\}}=\dfrac{2}{5}$；

（2）因为题目中取球方式为"有放回"，所以随机变量X .Y的可能取值均为$0, 1, 2$.总

的取球个数是2个，所以X,Y之和不会超过2，超过2的概率应为0，

所以$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2,Y=2\}=0$，

事件$\{X=0,Y=0\}$表示"两次取到的均为白球"，其概率$P\{X=0,Y=0\}=\dfrac{4\times4}{9\times9}=\dfrac{16}{81}$；

事件$\{X=1,Y=0\}$表示"两次取到一个红球，一个白球"，其概率

$P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{2\times4\times2}{9\times9}=\dfrac{16}{81}$；

事件$\{X=2,Y=0\}$表示"两次取到的均为红球"，其概率$P\{X=2,Y=0\}=\dfrac{2\times2}{9\times9}=\dfrac{4}{81}$；

事件$\{X=0,Y=1\}$表示"两次取到一个黑球，一个白球"，其概率

$P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{3\times4\times2}{9\times9}=\dfrac{8}{27}$；

事件$\{X=1,Y=1\}$表示"两次取到一个红球，一个黑球"，其概率

$P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{3\times2\times2}{9\times9}=\dfrac{4}{27}$；

事件$\{X=0,Y=2\}$表示"两次取到的均为黑球"，其概率$P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{3\times3}{9\times9}=\dfrac{1}{9}$.

因此(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$
1	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

4.【答案】（1）X和Y的边缘概率分布分别为

X	0	-1	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

（2）在$Y=1$的条件下，X的条件分布律为$P\{X=-1|Y=1\}=1$.

在$X=-1$的条件下，Y的条件分布律为

$Y=k\|X=-1$	1	2
$P\{Y=k\|X=-1\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

【解析】（1）由题中所给条件直接可得(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	0	-1	1
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{12}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	0	$\frac{1}{12}$	0

求X的边缘分布即求X的分布，易知X的可能取值为0，-1和1，

其对应的概率$P\{X=0\}=\frac{1}{6}+0+0=\frac{1}{6}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+0=\frac{5}{12}$，

$P\{X=1\}=\frac{5}{12}+0+0=\frac{5}{12}$.

因此X的边缘分布律为

X	0	-1	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$

随机变量Y的可能取值为$0,1,2$，其对应的概率

$P\{Y=0\}=\frac{1}{6}+0+\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$，$P\{Y=1\}=\frac{1}{3}$，$P\{Y=2\}=\frac{1}{12}$.因此$Y$的边缘分布律为

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

（2）由 (X,Y) 分布律知，当 $Y=1$ 时，X 只能取 -1，所以 $P\{X=-1|Y=1\}=1$.

当 $X=-1$ 时，Y 可能的取值为 $1,2$，由条件概率公式得其概率为

$$P\{Y=1|X=-1\}=\frac{P\{Y=1,X=-1\}}{P\{X=-1\}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{5};$$

$$P\{Y=2|X=-1\}=\frac{P\{Y=2,X=-1\}}{P\{X=-1\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{5}.$$

因此，在 $X=1$ 的条件下，Y 的条件分布律为

$Y=k\|X=-1$	1	2
$P\{Y=k\|X=-1\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

5.【答案】（1）(X,Y) 的分布律：

$$P\{X=m,Y=n\}=\frac{2^{n-2}}{3^n},\quad n=2,3,4,\cdots,m=1,2,\cdots,n-1;$$

（2）在 $X=m$ 的条件下 $Y=n$ 的概率为：

$$P\{Y=n|X=m\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right),\quad m=1,2,3,\cdots,n=m+1,m+2,\cdots;$$

在 $Y=n$ 的条件下 $X=m$ 的概率为：

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{1}{n-1},\quad n=2,3,\cdots,m=1,2,\cdots,n-1.$$

【解析】（1）求 (X,Y) 的分布律，首先确定 X 和 Y 可能的取值.结合题目给出的实际背景，“$X=m,Y=n$”中 n 可能的取值为 $2,3,\cdots$，m 可能的取值为 $1,2,3,\cdots,n-1$，且需满足 $m<n$.

按题意，事件$\{X=m,Y=n\}$表示第m次取球时第一次取到黑球，第n次取球时第二次取到黑球.分析可知，共取球次数n次，其中前$m-1$次均未取到黑球，第m次取到黑球，第$m+1$至第$n-1$次均未取到黑球，最后第n次取到黑球.

因此，$P\{X=m,Y=n\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{2^{n-2}}{3^n}$.

所以(X,Y)的分布律为$P\{X=m,Y=n\}=\frac{2^{n-2}}{3^n}$，$n=2,3,4,\cdots,m=1,2,\cdots,n-1$.

（2）求条件分布律，需先求边缘分布律，分析题意背景可知，随机变量$X\sim G\left(\frac{1}{3}\right)$，

故$P\{X=m\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{3},m=1,2,3\cdots$；事件$\{Y=n\}$表示前$n-1$次中取到一次黑球，第$n$次取到黑球，

则其概率为$P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2},n=2,3\cdots$.

则由条件概率公式可得，在$X=m$的条件下$Y=n$的概率为：

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right),\quad m=1,2,3,\cdots,n=m+1,m+2,\cdots;$$

在$Y=n$的条件下$X=m$的概率为：

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}=\frac{1}{n-1},\quad n=2,3,\cdots,m=1,2,\cdots,n-1.$$

6.**【答案】**（1）(X_1,X_2)的联合分布律为：

X_2 \ X_1	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

（2）$P\{X_1 = X_2\} = 0$.

【解析】（1）已知(X_1, X_2)关于X_1，X_2的边缘分布律相同， 由题目给出的条件$P\{X_1X_2 = 0\} = 1$，可得$P\{X_1X_2 \neq 0\} = 0$，结合边缘分布律和联合分布律的关系可得(X_1, X_2)的分布律如下：

X_2 \ X_1	-1	0	1	P_{X_1}
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
P_{X_2}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

（2）$P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=X_2=-1\}+P\{X_1=X_2=0\}+P\{X_1=X_2=1\}=0$.

题型二、连续型

7.【答案】（1）$k=1$；

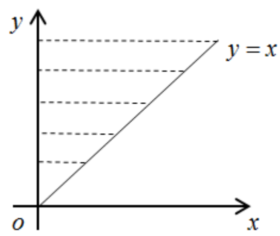
（2）$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$f_Y(x)=\begin{cases}ye^{-y}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$；

（3）当 $x>0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{x-y}, & x<y,\\ 0, & 其他\end{cases}$；

当 $y>0$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他\end{cases}$；

【解析】（1）由概率密度性质知 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=1$，

其中联合概率密度不为零的区域



$D=\{(x,y)|0<x<y\}$ 如右图所示，故

$\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}ke^{-y}dy=k$，所以 $k=1$.

（2）已知边缘概率密度公式为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$，

其中积分区域如上图所示，计算过程中注意积分变量范围的讨论.

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$；

当 $x\le 0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$.所以 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y}$；

当 $y \le 0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=0$.所以 Y 的边缘概率密度 $f_Y(x)=\begin{cases} ye^{-y}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

（3）已知条件概率密度公式为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}，(f_X(x)>0)，f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}，(f_Y(y)>0).$$

在 $X=x\,(x>0)$ 的条件下，

Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{f(x,y)}{e^{-x}}=\begin{cases} e^{x-y}, & x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

在 $Y=y\ (y>0)$ 的条件下，

X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{ye^{-y}}=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

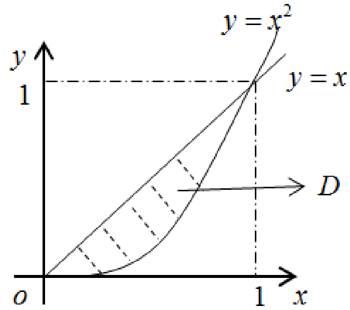
8.【答案】（1）$c=6$；

（2）$f_X(x)=\begin{cases} 6(x-x^2), & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$；

（3）$P\left\{Y\le\dfrac{1}{2}\middle|X\le\dfrac{1}{2}\right\}=1$.

【解析】（1）由概率密度的充要条件 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=1$

D 对应的区域如右图所示，可得 $c=6$.



（2）由边缘概率密度计算公式，

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$，

可得，当 $0<x<1$ 时，

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{x^2}^{x} 6dy=6(x-x^2)$；

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$.

所以 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y)$；

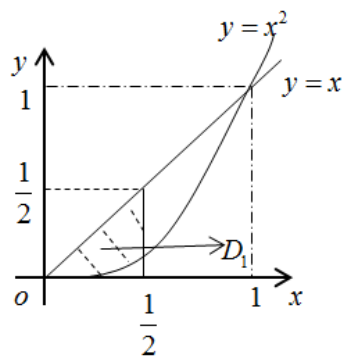
当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$.

所以 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

（3）由条件概率公式 $P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{P\left\{Y\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}}$，

其中 $\left\{Y\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}$ 与 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$ 对应的区域

如右图中的 D_1.故 $P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right\}=1$.

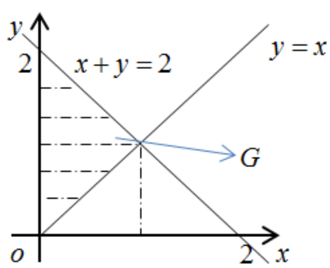


9.【答案】（1）$f_X(x)=\begin{cases}2-2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$；

（2）当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{y}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他\end{cases}$，

当 $1\le y<2$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{2-y}=\begin{cases}\frac{1}{2-y}, & 0<x<2-y,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（3）$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le 1\right\}=\frac{1}{8}$



【解析】（1）由题知区域 G 如图所示，

由于 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，$S(G)=1$，

故 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, x<y<2-x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

由边缘概率密度公式，

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{x}^{2-x} 1dy=2-2x$；

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$.

因此 X 边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2-2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（2）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$，需先求 Y 的边缘概率密度.

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_0^y f(x,y)dx=\int_0^y dx=y$，

当 $1\le y<2$ 时，$f_Y(y)=\int_0^{2-y} f(x,y)dx=\int_0^{2-y} dx=2-y$，

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 2$ 时，$f_Y(y)=0$，

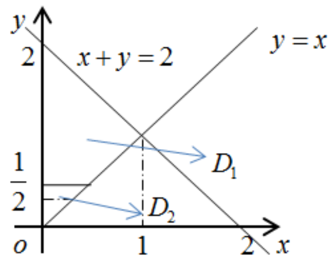
故 Y 边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}y, & 0<y<1,\\ 2-y, & 1\le y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $Y=y(0<y<2)$ 时，X 的条件概率密度为

当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{y}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

当 $1\le y<2$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{2-y}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-y}, & 0<x<2-y,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（3）由条件概率公式 $P\left\{Y\le\dfrac{1}{2}\middle|X\le 1\right\}=\dfrac{P\left\{Y\le\dfrac{1}{2}, X\le 1\right\}}{P\{X\le 1\}}$,



其中$\left\{Y\le\frac{1}{2},X\le 1\right\}$所对应的区域如右图中的$D_2$，

$\{X\le 1\}$对应区域为D_1.由均匀分布概率之比等于

面积之比，故$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le 1\right\}=\frac{1}{8}$.

10.【答案】$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1\le x\le 1,\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_X(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

【解析】由于(X,Y)服从区域D上的均匀分布，又$S(D)=\pi$，

则$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

由边缘概率密度公式得，

当$-1\le x\le 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$，

当$x<-1或x>1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$，

则$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$从而$x=\frac{1}{2}$时，$f_X(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

11.【答案】（1）$A=\frac{1}{\pi}$；（2）$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$；

（3）$f_{X|Y}(x|y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2}$，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}$.

【解析】由$x,y\in R$，故在计算边缘分布以及条件分布时，不涉及到积分变量范围的讨论，这类题目的难点在于积分的计算.

（1）根据概率密度的归一性，

$$1=\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=\iint_{R^2} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy=A\pi$$ ，故 $A=\dfrac{1}{\pi}$；

（2）由边缘概率密度公式得 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy$，

这类积分的计算一般可通过变形利用泊松积分公式 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ 进行求解.

故将指数部分关于积分变量 y 配方得，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-(x-y)^2}dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$

同理可得，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\frac{1}{2}y^2}dx=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{-\frac{1}{2}y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}d\sqrt{2}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

（3）由条件概率密度公式可得 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2}$，

同理，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}$.

12.**【答案】**（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；（2）$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

（3）$1-\ln 2$.

【解析】已知条件概率密度与边缘概率密度可求联合概率密度，再利用联合概率密度求

事件发生的概率.

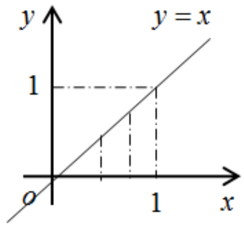
因为X在区间$(0,1)$内服从均匀分布，所以其概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$.

“当观察到$X=x(0<x<1)$时，随机变量Y表示在区间$(0,x)$内随机的取值”，

即当$X=x(0<x<1)$时

Y 服从区间$(0,x)$内的均匀分布，

故当$X=x(0<x<1)$时



Y的条件概率密度为$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（1）当$0<x<1$时，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$,

当$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f(x,y)=0$.

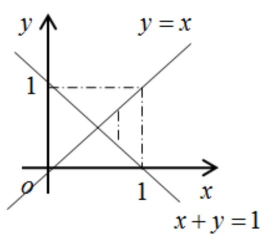
故(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（2）再由边缘概率密度公式，

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y$；当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$.

所以的Y边缘概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（3）已知概率密度求概率，即计算积分：



$$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dy=1-\ln 2.$$

13.【证明】由边缘概率密度公式，$f_1(x,y)$ 的边缘概率密度分别为：

Y_1边缘概率密度：

当$0<y<1$时，$f_{Y_1}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)dx=\int_0^1(x+y)dx=0.5+y$，

当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_{Y_1}(x,y)=0$，

所以Y_1的边缘概率密度为$f_{Y_1}(y)=\begin{cases}0.5+y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

X_1边缘概率密度 ：

当$0<X<1$时，$f_{X_1}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=0.5+x$，

当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_{X_1}(x,y)=0$，

所以X_1的边缘概率密度为$f_{X_1}(y)=\begin{cases}0.5+x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

$f_2(x,y)$的边缘概率密度分别为，

Y_2边缘概率密度：

当$0<y<1$时，$f_{Y_2}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x,y)dx=\int_0^1(0.5+x)(0.5+y)dx=0.5+y$，

当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_{Y_2}(x,y)=0$，

所以Y_2的边缘概率密度为$f_{Y_2}(y)=\begin{cases}0.5+y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$.

X_2边缘概率密度 ：

当 $0 < x < 1$ 时，$f_{X_2}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x,y)dy = \int_0^1 (0.5+x)(0.5+y)dy = 0.5+x$，

当 $y \le 0$ 或 $y \ge 1$ 时，$f_{X_2}(x,y) = 0$，

所以 X_2 的边缘概率密度为 $f_{X_2}(y) = \begin{cases} 0.5+x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

综上，它们有相同的边缘概率密度.

模块七　独立性

I经典习题

题型一、独立性的判断

1.判断 X 与 Y 是否相互独立，(X,Y) 分布律如下表.

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{2}$	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2.设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\}$ 上服从均匀分布，

令 $U=\begin{cases}1, X+Y\ge 0,\\0, X+Y<0,\end{cases}$ $V=\begin{cases}1, X-Y\ge 0,\\0, X-Y<0,\end{cases}$

（1）讨论 X,Y 是否相互独立；（2）讨论 U,V 是否相互独立.

3.设 (X,Y) 在由直线 $x=1$，$x=e^2$，$y=0$ 以及曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 所围成的区域上服从均匀分布，求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$，并判断 X,Y 是否独立.

4.设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：$f(x,,y)=\begin{cases}4xy,0<x<1,0<y<1,\\ 0, \qquad 其他,\end{cases}$，

试判断X,Y是否独立.

5.设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-x}), & x\ge 0,0\le y<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0,y\ge 1\end{cases}$，

（1）求X与Y的边缘分布函数；（2）问X与Y是否相互独立.

题型二、独立性的运用

6.设随机变量X的分布律为$P\{X=0\}=a$，$P\{X=1\}=1-a$，随机变量Y的分布律为

$P\{Y=0\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，如果X,Y相互独立，则$a=$（　　）

（A）0　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）1　　（D）$[0,1]$上的任意实数

7.设X与Y相互独立，X是连续型随机变量，且分别服从参数为1和参数为4的指数分布，则$P\{X<Y\}=$（　　）

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{2}{5}$　　（D）$\frac{4}{5}$

8.设随机变量X和Y相互独立，且$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=p>0$，

$P\{X=0\}=P\{Y=0\}=1-p>0$，令$Z=\begin{cases}1,X+Y为偶数,\\ 0,X+Y为奇数,\end{cases}$要使$X$与$Z$独立，

则p的值为（　　）

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{2}{3}$

9.假设随机变量X_1,X_2相互独立，其分布函数分别为

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}\quad F_2(x),$$

求 $P\{X_1+X_2\le x\}$.

II参考答案

题型一、独立性的判断

1.【答案】不独立.

【解析】两个随机变量独立的本质为"联合=边缘×边缘".故要判断独立性，需先求边缘分布如下，

$Y \backslash X$	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{3}{16}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

该题中(X,Y)为离散型随机变量，已知分布律，判断独立性需检验对任意的i, j，

等式$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$是否成立.

经验证联合分布律中$p_{11}=\frac{1}{2}$，但$p_{1\cdot}p_{\cdot 1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{2}$，故$X$与$Y$不独立.

2.【答案】(1) 随机变量X,Y不独立；(2) 随机变量U,V独立

【解析】（1）由题意知，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},(x,y)\in D,\\0,\quad 其他,\end{cases}$ 故得

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{|x|-1}^{1-|x|}\dfrac{1}{2}dy=1-|x|,|x|\le 1,\\0,\quad 其他\end{cases}$ 同理，$f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|,|y|\le 1,\\0,\quad 其他,\end{cases}$ 因为

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故随机变量 X,Y 不独立；

（2）$P\{U=1\}=P\{X+Y\ge 0\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{U=0\}=P\{X+Y<0\}=\dfrac{1}{2}$，

$P\{V=1\}=P\{X-Y\ge 0\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{V=0\}=P\{X-Y<0\}=\dfrac{1}{2}$，

$P\{U=1,V=1\}=P\{X+Y\ge 0,X-Y\ge 0\}=\dfrac{1}{4}$，由此可以得到 (U,V) 的分布律为：

U / V	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

从分布律中，易知 $P\{U=i,V=j\}=P\{U=i\}P\{V=j\},(i=0,1,\ j=0,1)$，故随机变量 U,V 独立.

3.【答案】$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x},1<x<e^2,\\ 0, \quad 其他;\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2(e^2-1),0<y<e^{-2},\\ \dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{2},e^{-2}<y<1,\\ 0, \quad 其他;\end{cases}$ 不独立.

【解析】易知，区域面积为 $S_D=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}dx=2$，

因此 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},(x,y)\in D,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$

故 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{2}dy,1<x<e^2\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x},1<x<e^2,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_1^{e^2}\dfrac{1}{2}dx,0<y<e^{-2}\\ \int_1^{\frac{1}{y}}\dfrac{1}{2}dx,e^{-2}\le y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(e^2-1),0<y<e^{-2},\\ \dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{2}, \quad e^{-2}\le y<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量 X,Y 不独立.

4.【答案】独立.

【解析】 由边缘概率密度的计算公式可得

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x,0<x<1,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}2y,0<y<1,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$

所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，因此，随机变量 X,Y 相互独立.

5.【答案】（1） $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x},x\ge 0,\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$， $F_Y(y)=\begin{cases}0, \quad y<0,\\ \dfrac{1}{2},0\le y<1,\\ 1, \quad y\ge 1;\end{cases}$；（2）独立.

【解析】（1）边缘分布函数 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}, x\ge 0,\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1;\end{cases}$$

（2）因为 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，故随机变量 X,Y 相互独立.

题型二、独立性的运用

6.【答案】（D）.

【解析】如果 X,Y 相互独立，则 X,Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}(1-a)$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}(1-a)$	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	a	$1-a$	1

因为 $P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{2}$，

即对于区间 $[0,1]$ 上的任何数 a，上述结果均成立，故选（D）.

7.【答案】（A）

【解析】由题意得 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0\end{cases} \text{和 } f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0,\end{cases}$$

由 X 和 Y 相互独立，可得 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-x-4y},x>0,y>0,\\ 0, \qquad 其他,\end{cases}$

因此，$P\{X<Y\}=\int_0^{+\infty}4e^{-4y}dy\int_0^y e^{-x}dx=\frac{1}{5}$，选（A）.

8.**【答案】**（C）.

【解析】根据独立性易求得，$P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=p^2$

$$\begin{aligned}P\{Z=1\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}\\&=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=0\}P\{Y=0\}=p^2+(1-p)^2\end{aligned},$$

要使得 X,Z 相互独立，需要满足 $P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1\}P\{Z=1\}$，

解得 $p=\frac{1}{2}$ 或 $p=1$，根据选项可知，选（C）.

9.**【答案】** $\frac{1}{4}F_2(x)+\frac{3}{4}F_2(x-1)$.

【解析】由题意易知，随机变量 X 为离散型随机变量，

分布律为 $P\{X=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=1\}=\frac{3}{4}$，结合全概率和独立性可得到，

$$P\{X_1+X_2\le x\}=P\{X_1+X_2\le x\mid X_1=0\}P\{X_1=0\}+P\{X_1+X_2\le x\mid X_1=1\}P\{X_1=1\}$$

$$=\frac{1}{4}P\{X_2\le x\}+\frac{3}{4}P\{X_2\le x-1\}=\frac{1}{4}F_2(x)+\frac{3}{4}F_2(x-1).$$