高等数学目录

线性代数目录

概率论与数理统计目录

模块一　函数

一、函数的概念

若 D 为一个非空实数集合，设有一个对应法则 f，使得对每一个 $x\in D$ 都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个**函数**，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$, $x\in D$.其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，集合 D 称为函数的**定义域**，也可以记作 $D(f)$.对于 $x_0\in D$ 所对应的 y 的值，记作 y_0 或 $y=f(x_0)$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的**函数值**.全体函数值组成的集合 $\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记 $f(D)$.

【注】①两个函数相等当且仅当它们的定义域与对应法则均相等.

②在没有特别指定的情况下，函数的定义域取自然定义域，即使函数运算有意义的自变量的取值范围.易知，人为指定的定义域必为自然定义域的子集.常见的函数的自然定义域如下：

$y=\sqrt{x}$，$x\ge 0$；　　$y=\dfrac{1}{x}$，$x\ne 0$；

$y=\ln x$，$x>0$；　　$y=e^x$，$x\in R$；

$y=\sin x$，$x\in R$；　　$y=\cos x$，$x\in R$；

$y=\tan x$，$x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$；　　$y=\cot x$，$x\ne k\pi(k\in Z)$.

二、函数的运算

1．四则运算

2．复合函数

设 $y=f(u),u\in D_1$ 与 $u=g(x),x\in D_2$ 为两个函数，如果 $g(x)$ 的值域 $g(D_2)$ 包含于 $f(u)$ 的定义域 D_1，则可以定义 $y=f(g(x)),x\in D_2$ 为函数 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的**复合函数**，记作 $y=f(g(x))$.

【例 1】已知 $f(x)=e^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【答案】$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\leq 0$.

【例 2】设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$，试求 $f(f(x))$ 与 $f(f(f(x)))$.

【答案】$f(f(x))=\begin{cases}4x, & x<0\\ x^4, & x\geq 0\end{cases}$，$f(f(f(x)))=\begin{cases}8x, & x<0\\ x^8, & x\geq 0\end{cases}$.

【例 3】【2001-2-4 分】$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}=$（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）$\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　（D）$\begin{cases}0, & |x|\leq 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

【答案】（B）.

3．反函数

（1）反函数的定义

设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的一个函数，其值域为 $f(D)$. 如果对于每一个 $y\in f(D)$，都有唯一确定的 x 使得 $f(x)=y$，我们就将该对应法则记作 f^{-1}，这个定义在 $f(D)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 就称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数.

（2）存在反函数的充要条件

函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充要条件是 y 与 x 一一对应.

（3）反函数的性质

①函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

②设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 (a,b)，值域为 (α,β)，$y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（或减少），则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内存在反函数；$x=f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 内单调增加（或减少）.

三、基本性质

1．单调性

（1）定义

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果在某区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$ 都满足

$f(x_1)>f(x_2)$（或 $f(x_1)<f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**（**或单调减少**），相应地称 I 是 $f(x)$ 的一个**单调增加区间**（或**单调减少区间**）. 如果对区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$ 都有 $f(x_1)\geq f(x_2)$（或 $f(x_1)\leq f(x_2)$），我们就称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调不减**（或**单调不增**）.

（2）性质

①如果 $f_1(x),f_2(x)$ 都是增函数（或减函数），则 $f_1(x)+f_2(x)$ 也是增函数（或减函数）.

②设 $f(x)$ 是增函数，如果常数 $C>0$，则 $Cf(x)$ 是增函数；如果常数 $C<0$，则 $Cf(x)$ 是减函数.

③如果函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 增减性相同，则 $y=f(g(x))$ 为增函数；如果函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 增减性相反，则 $y=f(g(x))$ 为减函数.

2．周期性

（1）**定义**

对于函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在正数 T，使得对函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 内的任意一点 x 都有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是一个**周期函数**，而 T 是 $f(x)$ 的一个周期.易知如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期，那么对任意的非零整数 n， nT 都是 $f(x)$ 的周期.在 $f(x)$ 的所有周期中，我们把其中最小的正数称为**最小正周期**.

【注】常见周期函数及其最小正周期：

$$y=\sin x,T=2\pi;\quad y=\cos x,T=2\pi;$$
$$y=\tan x,T=\pi;\quad y=\cot x,T=\pi.$$

（2）性质

①如果 $f(x)$ 以 T 为最小正周期，则对任意的非零常数 C，$Cf(x)$ 仍然以 T 为最小正周期，$f(Cx)$ 以 $\frac{T}{|C|}$ 为最小正周期.

②如果 $f_1(x), f_2(x)$ 都以 T 为周期，则 $k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)$ 仍然以 T 为周期（$k_1,k_2\in R$）.注意这时最小正周期有可能缩小，如 $f_1(x)=\cos 2x+\sin x, f_2(x)=\sin x$ 都以 2π 为最小正周期，但 $f_1(x)-f_2(x)=\cos 2x$ 以 π 为最小正周期.

3．奇偶性

（1）定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.如果对其定义域 D 内的任意一点 x，都有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 是一个**偶函数**（或**奇函数**）.

（2）常见的奇偶函数

常见的奇函数：$y=x^k$（k 为奇数），$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

常见的偶函数：$y=x^k$（k 为偶数），$y=\cos x, y=|x|$.

（3）性质

①偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称；

②如果 $f_1(x), f_2(x)$ 都是奇函数（或偶函数），则对任意的常数 $k_1,k_2\in R$，$k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)$ 仍然是奇函数（或偶函数）；

③如果 $f_1(x),f_2(x)$ 奇偶性相同，则 $f_1(x)f_2(x)$ 为偶函数；如果 $f_1(x),f_2(x)$ 奇偶性相反，则 $f_1(x)f_2(x)$ 为奇函数；

④设 $f(x)$ 为任一定义在对称区间上的函数，$f(|x|)$，$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 与 $f(x)f(-x)$ 都是偶函数；$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数；

⑤任意定义在对称区间上的函数 $f(x)$ 都可以写成一个偶函数与一个奇函数的和，

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

4．有界性

（1）定义

设 $y=f(x),x\in D$ 是一个函数.如果存在一个实数 M，使得对定义域 D 内任意的一点 x，都有 $f(x)\le M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内**有上界**，并称 M 是函数 $f(x)$ 在 D 内的一个**上界**；如果存在一个实数 m，使得对定义域 D 内任意的一点 x，都有 $f(x)\ge m$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内**有下界**，并称 m 是函数 $f(x)$ 在 D 内的一个**下界**.

如果函数 $f(x)$ 在 D 内既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 D 内**有界**.

（2）常见的有界函数

$f(x)=\sin x$，$|f(x)|\le 1$；

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}，\ |f(x)|\le 1；$$

$f(x)=\arcsin x, x\in[-1,1]$，$|f(x)|\le\dfrac{\pi}{2}$.

【例 4】判断下列函数在其定义域内的有界性.

（1）$\dfrac{x}{1+x^2}$；　（2）$\sin\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)$；　（3）$x\sin x$.

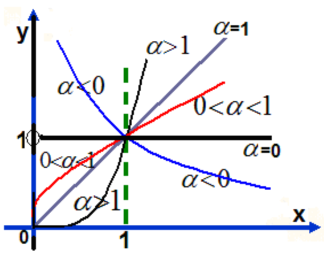
【答案】（1）有界；（2）有界；（3）无界.

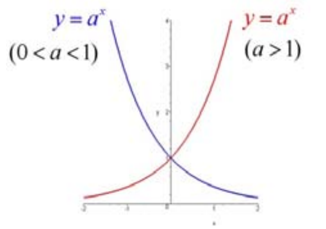
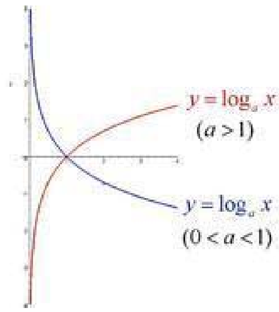
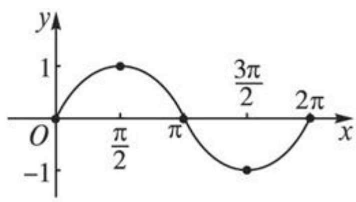
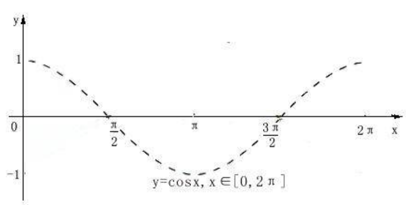
四、函数分类

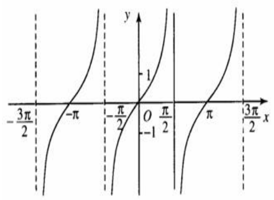
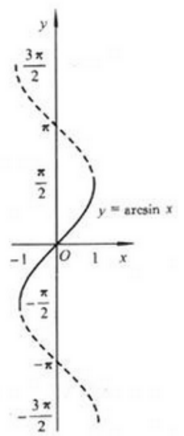
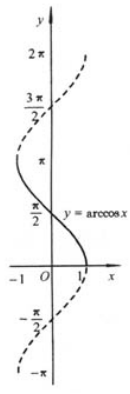
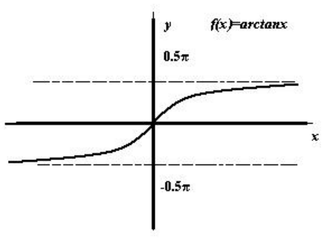
1．基本初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数与反三角函数称为**基本初等函数**.

以下为几个常见的基本初等函数的图像及性质：

名称及表达式	定义域	图形（举例）	特性
幂函数 $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\neq 0)$	随 α 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有意义		经过点 $(1,1)$； 在第一象限内当 $a>0$ 时，为增函数； 当 $a<0$ 时，为减函数

<table>
<tr>
<td colspan="2">指数函数
$y=a^x$
$(a>0,a\neq 1)$</td>
<td>$(-\infty,+\infty)$</td>
<td></td>
<td>图象在 x 轴上方，
过点 $(0,1)$.
当 $0<a<1$ 时，为减函数；
当 $a>1$ 时，为增函数</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">对数函数
$y=\log_a x$
$(a>0,a\neq 1)$</td>
<td>$(0,+\infty)$</td>
<td></td>
<td>图像在 y 轴的右侧；
过点 $(1,0)$ ；
当 $0<a<1$ 时，为减函数；
当 $a>1$ 时为增函数</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">三角函数</td>
<td>正弦函数
$y=\sin x$</td>
<td>$(-\infty,+\infty)$</td>
<td></td>
<td>以 2π 为周期；
奇函数，图形关于原点对称；
在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $-1\leq\sin x\leq 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>余弦函数
$y=\cos x$</td>
<td>$(-\infty,+\infty)$</td>
<td></td>
<td>以 2π 为周期；
偶函数，图形关于 y 轴对称；
在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $-1\leq\cos x\leq 1$</td>
</tr>
</table>

	正切函数 $y=\tan x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期； 奇函数； 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数； 值域为 R
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加； 奇函数； 值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少； 值域：$[0,\pi]$
	反正切函数 $y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加； 奇函数； 值域：$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

2．初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

3．分段函数

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\in I_1 \\ h(x), & x\in I_2 \end{cases};$$

（1）**符号函数：** $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$；

（2）**绝对值函数：** $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0 \\ -f(x), & f(x)<0 \end{cases}$；

（3）**取整函数：** $[f(x)]$：不超过 $f(x)$ 的最大整数值；

（4）**最大值函数：** $\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge g(x) \\ g(x), & f(x)<g(x) \end{cases}$；

（5）**最小值函数：** $\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases} g(x), & f(x)\ge g(x) \\ f(x), & f(x)<g(x) \end{cases}$.

4．隐函数

由形如 $F(x,y)=0$ 的方程确定的函数关系 $y=y(x)$，一般没有明显的函数表达式.

5．参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}，\ t\in[\alpha,\beta].$$

6．极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n(x-1)+1}.$$

7．积分上限函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

五、常用公式

1．幂函数公式

$x^a\cdot x^b=x^{a+b}$，$(x^a)^k=x^{ak}$.

2．对数公式

$\ln a+\ln b=\ln(ab)$，$k\ln a=\ln a^k$，其中 $a>0,b>0$.

3．三角公式

$\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$，

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$，$\sin(\pi-x)=\sin x$，$\cos(\pi-x)=-\cos x$，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$， $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$， $\sin 2x=2\sin x\cos x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$，

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$，

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$， $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

4．导数公式

$(c)'=0$，$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，

$(\cot x)'=-\csc^2 x$， $(\sec x)'=\sec x\tan x$， $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$， $(e^x)'=e^x$，

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0,a\neq 1)$， $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$， $(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

模块二　极限的计算

一、概念

1．函数极限

（1）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists$ $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的**极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一左邻域内有定义，如果存在常数 A，对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists$ $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的**左极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x_0^-)=A$，或 $f(x_0-0)=A$.

类似地，可以定义**右极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，或 $f(x_0^+)=A$，或 $f(x_0+0)=A$.

左极限和右极限统称为单侧极限.

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-X)\bigcup(X,+\infty)$ 上有定义（X 为某正数），如果存在常数 A，对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists M>0$，当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的**极限**为 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

类似地，可以定义当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，以及当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

（3）左右极限与极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在且相等.

【例 1】下列命题中正确的是（　　）

（A）$\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$　　（B）$\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-x} = 0$

（C）$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}} = 1$　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1$

【答案】(D).

【例 2】“对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$，总存在$M>0$，当$|x|>M$时，恒有$|f(x)-A|<2\varepsilon$”是$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的（　　）

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分非必要条件

【答案】（C）.

【例 3】讨论函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x<0 \end{cases}$在$x\to 0$和$x\to\infty$时的极限.

【答案】$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

【例 4】判断下列极限是否存在：

（1）$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0} \arctan\frac{1}{x}$.

【答案】（1）不存在；（2）不存在.

【小结】题目中需要考虑左右极限的情况：

（1）分段函数且分段点左右两侧解析式不同；

（2）极限中含有 $e^{\infty},\arctan\infty$.

2．数列极限

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在常数 a，对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

【注】极限描述的是在自变量的某一变化过程中，函数值的变化情况.对于极限的定义，考生不需要太深入的理解，只需要了解极限的实际意义，分清楚七种极限过程 $n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 即可.

3．无穷小量和无穷大量

（1）无穷小量

如果在某极限过程 $x\to\square$ 中（$x\to\square$ 可表示上述七种极限过程中的任何一种，下同），函数 $f(x)$ 的极限为 0，也即 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to\square$ 时的**无穷小量**.

【注】①$0$ 一定是无穷小量，但无穷小量不一定是 0；

②无穷小量是一个动态变化的过程，与极限过程有关.

（2）无穷大量

如果在某极限过程 $x \to \square$ 中，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，也即 $\lim\limits_{x\to\square} f\left(x\right)=\infty$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to \square$ 时的**无穷大量**.

【注】①无穷大量实际上是极限不存在的情况，但极限不存在的量不一定都是无穷大量；②与无穷小量类似，无穷大量也是一个动态变化的过程，而不是一个实际存在的数.

（3）无穷小量和无穷大量的关系

①如果 $x \to \square$ 时，$f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在同一极限过程中为无穷小量；

②如果 $x \to \square$ 时，$f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在同一极限过程中为无穷大量.

（4）无穷小量的比较

设在某极限过程 $x \to \square$ 中，函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都为无穷小量，并且都不为 0.

①如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当 $x \to \square$ 时，$\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小量**，或 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的**低阶无穷小量**，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

②如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称当 $x \to \square$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为**同阶无穷小量**；

特别地，若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称当 $x \to \square$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为**等价无穷小量**，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

（5）k 阶无穷小量

设在某极限过程 $x \to \square$ 中，函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都为无穷小量，并且都不为 0.如果

$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^k}=C\neq 0$，则称当 $x\to\square$时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量.

【注】在同一极限过程下，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量也就是说 $\alpha(x)$ 与 $\beta^k(x)$（$k>0$）是同阶无穷小量.

【例 5】【2013-3-4 分】当 $x\to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是（　　）

（A）$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$.　　（B）$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

（C）$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.　　（D）$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

【答案】（D）.

二、极限的基本性质

1. 函数极限的基本性质

（1）唯一性：如果函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其极限唯一；

（2）有界性：如果函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则存在 $\delta>0$，使得函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\left(x_0-\delta,x_0\right)\cup\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 内有界；

（3）保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$，则 $\exists$ $\delta>0$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)>0$；

推论：如果 $\exists\delta>0$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)\geq 0$，并且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geq 0$.

【注】①函数极限中的有界性只是得到了该函数在极限点"附近"，也即某去心邻域内有界，故又称为局部有界性.

②由于函数极限与函数在极限点处的取值是没有关系的，所以在函数极限的性质中，我们的条件或得到的结论一律都是在极限点的某去心邻域内成立的.

2.数列极限的基本性质

（1）唯一性：如果数列$\{x_n\}$的极限存在，则其极限唯一；

（2）有界性：如果数列$\{x_n\}$的极限存在，则数列$\{x_n\}$有界；

（3）保号性：如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$，则存在正整数$N>0$，使得当$n>N$时，有$x_n>0$；

推论：如果存在正整数$N>0$，使得当$n>N$时，$x_n\geq 0$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geq 0$.

三、函数极限的计算

1．四则运算

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$，则有：

$\lim\limits_{x\to\square}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$，$\lim\limits_{x\to\square}f(x)g(x)=AB$，$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

【注】①数列极限的四则运算法则与函数极限的四则运算法则完全类似.

②四则运算只适用于有限次计算的情形，对无限次运算不一定适用.

③四则运算不能直接用于$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$四种未定式.

④结合无穷大量与无穷小量的性质，以及二者之间的关系，极限的四则运算法则可以有如下推广：

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$，$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$，$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$，

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$，$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$，$(+\infty)+C=+\infty$，

$0\cdot C=0$，$\dfrac{C}{\infty}=0$，$\dfrac{C_1}{0}=\infty$，$C_1\cdot\infty=\infty(C_1\neq 0)$，$a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & a>1,\\ 0, & 0<a<1.\end{cases}$

【**例 6**】求下列各函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+ax+b}{2x^2+cx+d}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+2019!x+10^{2019}}{3x^2+2019^{2019}}$.

【**答案**】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$\dfrac{2}{3}$.

【**小结**】本题的方法俗称：“抓大头”，当求$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限时，分子分母中只保留最高次即可.

【**例 7**】求下列各函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+100}-3x}{\sqrt{x^2+100}+x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)\sqrt{4x^2+\cos x-1}}{\sqrt{x^4+x}}$.

【**答案**】（1）-1；（2）-2.

【**小结**】在“抓大头”中，当$x\to-\infty$时，要注意$\sqrt{x^2}=-x$.

【**例 8**】求下列各函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$；

（2）【**2001-1-3 分**】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

【**答案**】（1）3；（2）$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

【**小结**】对于$\dfrac{0}{0}$型未定式的基本解题思路是通过约掉零因式将其化为定式，常用方法为因式分解或者有理化.

【例 9】求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

【答案】$\frac{1}{2}$.

2．等价无穷小替换

（1）定理：设当 $x\to\square$ 时， $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则有：

$$\lim_{x\to\square}f(x)\alpha(x)=\lim_{x\to\square}f(x)\beta(x)，\lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{\beta(x)}.$$

【注】①等价无穷小替换在极限计算过程中一般起辅助与简化的作用，它和洛必达法则连用可以简化计算.

②只有整个式子的乘除因子才能用等价无穷小替换，有加减时不能替换.

（2）常见的等价无穷小替换公式：当 $x\to 0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$$

$(1+x)^a-1\sim ax$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

【例 10】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{\arcsin^2 x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x^2+1}-1}{\cos x-1}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x^2}{x}\sin\frac{1}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x\arctan(-3x)}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\tan(1-x)}$.

【答案】（1）1；（2）$\dfrac{1}{3}$；（3）$-\dfrac{2}{n}$；（4）2；（5）$\dfrac{1}{3}$；（6）-1.

【小结】等价无穷小替换的广义化：当$\square\to 0$时，

$\square\sim\sin\square\sim\arcsin\square\sim\tan\square\sim\arctan\square\sim\ln(1+\square)\sim e^{\square}-1$，

$(1+\square)^a-1\sim a\square,\ 1-\cos\square\sim\dfrac{1}{2}\square^2$.

【例 11】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x^2}-e}{\sqrt[3]{1-x^4}-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\ln\cos x}$；

【答案】（1）$-\dfrac{1}{\pi}$；（2）$\dfrac{3}{2}e$；（3）$\dfrac{1}{3}$.

【小结】等价无穷小替换的变形：

①凑“1”的两种主要方法：加 1 减 1；提公因式.

需要凑“1”的公式有：$x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,\ (1+x)^a-1\sim ax,\ 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；

②凑“0”（考得少）.

【例 12】计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\arcsin^3 x}$.

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

3．洛必达法则

设 $f(x)$，$g(x)$ 满足：

（1）$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\infty$；

（2）$f(x)$，$g(x)$ 在 $\square$ 的附近均可导且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞，

则有 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

【注】在使用洛必达法则时一定要注意检验条件，三个条件缺一不可，否则很容易得到错误的结果.在现阶段，主要是检验第一个条件.

（1）$\dfrac{0}{0}$ 型未定式

【例 13】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{1-\sqrt{1-2x^3}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\arctan x}{(\cos\sqrt{2x}-1)^3}$.

【答案】（1）$\dfrac{1}{6}$；（2）$-\dfrac{1}{3}$.

【小结】使用洛必达法则时要注意两点：

①一定要检验条件（确保分子分母都趋近于零或无穷）；

②一定要先化简，化简的第一种方法是等价无穷小替换.

【例 14】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-e^{x}+1+\arcsin x\ln(1+x)}{\ln\cos x}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\arcsin^{3}x(\sin x+1)}$.

【答案】（1）-1；（2）$-\dfrac{1}{6}$.

【小结】

①若 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\square}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to\square}f(x)+\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\lim\limits_{x\to\square}f(x)+A$，

若 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=A\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to\square}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}g(x)=A\lim\limits_{x\to\square}f(x)$；

②使用洛必达法则前化简的第二种方法是通过四则运算将函数分解.

【例 15】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\arcsin^{3}x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{\arctan x}}{(1-\cos x)\arctan 2x}$.

【答案】（1）$\frac{1}{4}$；（2）$\frac{1}{3}$.

（2）$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

【例 16】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2019}}{e^{x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x}+x^{2018}-\ln(x^{10}-10x+2019)}{4^{x}+ax^{2019}+b(\ln x)^{100}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{\frac{2}{x^{2}}}+x^{-100}+\ln|x|}{9^{\frac{1+x^{2}}{x^{2}}}+\frac{1}{x^{2000}}-\ln(x^{10}+x^{5}+1)}$；

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4^{x}-2x^{3}+x^{2}+1}{e^{x}+3x^{3}}$.

【答案】（1）0；（2）0；（3）$\frac{1}{9}$；（4）$-\frac{2}{3}$.

【小结】①“抓大头”方法的核心是抓主要部分，先抓类型（指 >> 幂 >> 对），再抓高次；

②指数函数是否大头，关键在于看指数函数是否趋于无穷；

③对$\frac{\infty}{\infty}$型的极限要做到能够口算.

（3）$0\cdot\infty$型与$\infty-\infty$型未定式

【例 17】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0^{+}}\sin x\ln x$；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right)$；（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}})$.

【答案】（1）0；（2）-1；（3）$\frac{1}{2}$；（4）$-\frac{1}{2}$.

【小结】①对于$0\cdot\infty$型未定式，一般借助无穷小量与无穷大量的关系，先将其转化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型.

②对于$\infty-\infty$型未定式，一般计算方法为：有分母时，一般利用通分转化为$\frac{0}{0}$型；无分母时，一般利用倒代换$t=\frac{1}{x}$构造分母，然后再进行通分；若出现根式，则可通过有理化转化为$\frac{\infty}{\infty}$型.

（4）幂指函数的极限

【例 18】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

【答案】（1）1；（2）2.

【小结】如果$\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}$为$0^0$型或$\infty^0$型，则使用对数恒等式

$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$进行变形，从而只要能计算出极限$\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln u(x)$就可以了.

【例 19】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x^2}{2}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

（3）【2019-2-4 分】$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

【答案】（1）e；（2）e；（3）$4e^2$；（4）$e^{\frac{1}{6}}$.

【小结】如果$\lim\limits_{x\to \square}u(x)^{v(x)}$为$1^\infty$型，也即$\lim\limits_{x\to \square}u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to \square}v(x)=\infty$，则可以使用公式$\lim\limits_{x\to \square}u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to \square}[u(x)-1]v(x)}$来进行计算.

【例 20】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}-e}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-x}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

【答案】（1）$-e$；（2）$\sqrt{e}$.

【小结】如果极限式的某一部分为幂指函数，而不是整个极限式为幂指函数，无论该幂指函数是什么类型的极限，一律通过对数恒等式进行变形.

4．泰勒公式

泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有直至 n 阶导数，则当 $x\to x_0$ 时有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

在 $x_0=0$ 处的泰勒公式又称为麦克劳林公式.

常见函数的麦克劳林公式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2),\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2),\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\qquad \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\qquad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

应用一：等价无穷小替换公式的推广

【例 21】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\tan^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\arcsin x-\arctan x}$.

【答案】（1）$-\dfrac{1}{6}$；（2）$e^{\frac{1}{3}}$；（3）$-\dfrac{2}{3}$；（4）1.

【小结】运用泰勒公式计算极限的基本步骤：展开、整理、替换（当多个无穷小相加时，抓住其中起主导作用那一项）.

【例 22】计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-x\sin x}{x^2-\tan^2 x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(\sin x)-\arcsin(\tan x)}{x-\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right)$.

【答案】(1) $\dfrac{1}{2}$；(2) -6；(3) $\dfrac{1}{2}$.

【小结】麦克劳林公式的广义化：当$\square\to 0$时，

$e^{\square}=1+\square+\dfrac{\square^2}{2!}+o(\square^2)$，

$\ln(1+\square)=\square-\dfrac{\square^2}{2}+o(\square^2)$，

$(1+\square)^a=1+a\square+\dfrac{a(a-1)}{2!}\square^2+o(\square^2)$，

$\cos\square=1-\dfrac{\square^2}{2!}+\dfrac{\square^4}{4!}+o(\square^4)$，

$\sin\square=\square-\dfrac{\square^3}{3!}+o(\square^3)$，

$\arcsin\square=\square+\dfrac{\square^3}{6}+o(\square^3)$，

$\tan\square=\square+\dfrac{\square^3}{3}+o(\square^3)$，

$\arctan\square=\square-\dfrac{\square^3}{3}+o(\square^3)$.

应用二：极限式中参数的讨论

【例 23】已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x+ax+bx^2+cx^3}{x-\tan x}=1$，求$a$，$b$，$c$.

【答案】$a=-1$，$b=-1$，$c=-\dfrac{5}{6}$.

模块三　连续

一、连续性

1．连续的概念

（1）函数在一点处连续：

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域内有定义，并且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **右连续**.

类似地，我们还可以定义**左连续**.

【注】函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是它在该点左连续并且右连续.

（2）区间连续：

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ **在开区间** (a,b) **内连续**.

如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，并且 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续，则称函数 $f(x)$ **在闭区间** $[a,b]$ **上连续**.

类似地，我们可以得到函数在区间 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 内连续的定义.

【例 1】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2ax}{\ln(1+x)}, & x\neq 0,\\ a+1, & x=0,\end{cases}$ 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，求 a.

【答案】 $a=1$.

2．连续的性质

（1）四则运算的连续性：

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均在某区间 I 上连续，则函数 $k_1f(x)+k_2g(x)$ $(k_1,k_2\in R)$ 、 $f(x)g(x)$ 、 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 都在 I 上连续.

（2）复合函数的连续性：

设 $y=f(u),\ u\in D$ ， $u=g(x),x\in I$ 均在其定义域上连续，且有 $g(I)\subseteq D$ ，则 $y=f(g(x))$ 是 I 上的连续函数.

（3）反函数的连续性：

设 $y=f(x)$ 是 I 上的连续函数，$y=f^{-1}(x),x\in f(I)$ 是它的反函数，则 $y=f^{-1}(x)$ 是 $f(I)$ 上的连续函数.

（4）初等函数的连续性：

定理：一切初等函数都在其定义区间内连续.

【注】正是由于初等函数在其定义区间内都是连续的，我们在计算初等函数 $f(x)$ 在其定义区间内某点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，才能直接将 $x=x_0$ 代入：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

【例 2】若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+x+b}{e^{\frac{1}{x}}+3x+2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在其定义域内连续，则 $a=$__________， $b=$__________.

【答案】$a=1$，$b=2$.

二、间断点

1．间断点的定义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，并且函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**.

【例 3】试用定义域判断 $x=0$ 是下列哪个函数的间断点（　　）

（A）$f(x)=\sqrt{x-1}$

（B）$f(x)=\ln x$

（C）$f(x)=\sin\sqrt{-x}$

（D）$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^2, & x<0\end{cases}$

【答案】（D）.

2．间断点的分类

设点x_0为函数$f(x)$的间断点，若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$均存在，则称点$x_0$为函数$f(x)$的**第一类间断点**；若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$至少有一个不存在，则称点$x_0$为函数$f(x)$的**第二类间断点**.

在第一类间断点中，如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的**可去间断点**；如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的**跳跃间断点**.

在第二类间断点中，如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$至少有一个为$\infty$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的**无穷间断点**；如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$均不为$\infty$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的**振荡间断点**.

【注】由间断点的分类标准可知，要判断函数间断点的类型，关键是计算出左右极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

【例4】讨论函数$f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ e^x+1, & x\le 0\end{cases}$在$x=0$处间断点的类型.

【答案】跳跃间断点.

【例 5】函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+2x)^2}{1-\cos\pi x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \sin\dfrac{1}{x-1}, & x>0.\end{cases}$$

求出所有的间断点并指出其类型.

【答案】函数 $f(x)$ 的可去间断点为 $x=-2$；跳跃间断点为 $x=0$；振荡间断点为 $x=1$；无穷间断点为 $x=-k\ (k=4,6,\cdots)$.

【小结】如果题目中没有指明间断点，则需要先找出可能的间断点（“可疑点”），再逐一判断其类型.这类问题中，如何找全所有的“可疑点”就成为了关键.一般来说，函数可能的间断点包括两部分：一是不在定义域内的点，一般是使得函数的运算无意义的点，如使得分式的分母为零、对数函数的真数为零的点；二是分段函数的分段点.找齐了所有这两种类型的点，再逐一判断，就可以得到所有的间断点及其类型.

【例 6】函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】（B）

【例 7】求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的表达式，并指出函数 $f(x)$ 的间断点及其类型.

【答案】$f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$，$f(x)$ 的可去间断点是 $x=0$；$f(x)$ 的无穷间断点是 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

模块四　可导与可微

一、导数的定义

1．函数在一点的导数

（1）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx 时，相应地，得到因变量 y 的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ **在点** x_0 **处可导**，该极限称为函数 $f(x)$ **在点** x_0 **处的导数**，记作 $f'(x_0), y'(x_0)$ 或 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.导数的定义式还可以写成 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

【注】①导数的几何意义：$f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 处切线的斜率；②导数的本质是极限，检验一个函数在一点是否可导或需要计算其导数时，最本质的方法就是计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某左邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ **在点** x_0 **处的左导数存在**，该极限称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 **处的左导数**，记作 $f_-'(x_0)$.

类似地，可以定义函数 $f(x)$ **在点** x_0 **处的右导数** $f_+'(x_0)$.

【注】函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数存在的充要条件是该点的左右导数存在且相等.

2．导函数

（1）开区间内可导：如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.

（2）闭区间上可导：如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且在 $x=a$ 处存在右导数，在 $x=b$ 处存在左导数，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

3．高阶导数

如果可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍然可导，则将它的导数称为原函数 $f(x)$ 的**二阶导数**，记作 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$.

类似地，可以递归地定义函数 $f(x)$ 的 n **阶导数** $f^{(n)}(x)$.

【例 1】利用定义计算下列函数的导数.

（1） $f(x)=C$；（2） $f(x)=e^x$；

（3） $f(x)=\ln x$；（4） $f(x)=x^a$；

（5） $f(x)=\sin x$；（6） $f(x)=\cos x$.

【例 2】求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$，讨论 $f'(1)$ 是否存在？

（1） $f(x)=|x-1|$；

（2） $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x<1, \\ x, & x\geq 1. \end{cases}$

【答案】（1） $f'_-(1)=-1$， $f'_+(1)=1$， $f'(1)$ 不存在.

（2） $f'_-(1)=f'_+(1)=1$， $f'(1)=1$.

【例 3】设 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leq 0, \\ e^x-1, & x>0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）左导数存在、右导数不存在　　（B）左导数不存在、右导数存在

（C）左右导数均不存在　　（D）左右导数均存在

【答案】（A）.

4．可导与连续

定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么 $f(x)$ 在点 x_0 处必然连续.

【注】可导蕴含连续.

【例 4】设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\geq 0, \\ x+b, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试求 a,b.

【答案】$a=1,b=1$.

二、微分

1．定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，如果因变量 y 的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),\Delta x\to 0;$$

其中 A 为只与 x_0 有关而与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 表示 Δx 的高阶无穷小量，则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 **处的线性主要部分**，也称为**微分**，记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x)\big|_{x=x_0}$，即 $dy\,|_{x=x_0}=df(x)\,|_{x=x_0}=A\Delta x$.

2．可导与可微

定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导是等价的，也就是说：可微必可导，可导必可微.进一步地，我们还可以得到 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分 $dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.

【例5】【2002-3】设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$（　）

（A）-1　　（B）0.1　　（C）1　　（D）0.5

【答案】（D）.

【例 6】设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　）

（A）$0<dy<\Delta y$　　（B）$0<\Delta y<dy$

（C）$\Delta y<dy<0$　　（D）$dy<\Delta y<0$

【答案】（B）.

模块五 导数的计算

一、求导公式

$(x^a)'=ax^{a-1}$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，$(e^x)'=e^x$，$(a^x)'=a^x\ln a$，

$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，

$(\cot x)'=-\csc^2 x$，$(\sec x)'=\sec x\tan x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

二、求导法则

1．导数的四则运算法则

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导，则

$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$，

$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

【例 1】计算下列函数的导数

（1）$f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$；（2）$(x-1)e^x$；

（3）$\dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x-\dfrac{1}{3}\right)$；（4）$\dfrac{e^x}{1+x}$.

【答案】（1）$2e^x\sin x$；（2）xe^x；（3）$x^2\ln x$；（4）$\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$.

2．复合函数求导法则

定理：设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，如果 $g(x)$ 在 x 处可导，且 $f(u)$ 在对应的 $u=g(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x 处可导，且有：

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

【注】复合函数求导的链式法则可以推广到多个函数复合的情形.

【例 2】计算下列函数的导数.

（1）$f(x)=\ln(\sec x+\tan x)$；　　（2）$y=e^{2\sin^2 x^2}$；

（3）$f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$；　　（4）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

【答案】（1） $f'(x)=\sec x$；（2） $f'(x)=4x\sin 2x^2\cdot e^{2\sin^2 x^2}$；（3） $f'(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$；

（4） $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3．反函数求导法则

定理：设函数 $f(x)$ 可导且 $f'(x)\neq 0$，并令其反函数为 $x=f^{-1}(y)$，则

$$(f^{-1}(y))'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

【例 3】计算下列函数的导数.

（1） $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$；

（2） $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$；

（3） $y=\arctan\dfrac{1}{x^2}$；

（4） $y=\dfrac{1}{ab}\arctan\left(\dfrac{b}{a}\tan x\right)$.

【答案】（1）$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}$；（2）$\dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；（3）$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{1+x^4}$；

（4）$\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

三、常考题型

1．幂指函数的导数

【例 4】计算下列函数的导数.

（1）$f(x)=x^{2x}$；

（2）$f(x)=x^{a^x}+x^{x^a}+\left(x^x\right)^x$.

【答案】（1）$\dfrac{dy}{dx}=x^{2x}(2\ln x+2)$；

（2）$\dfrac{dy}{dx}=x^{a^x}\left(a^x\ln a\ln x+\dfrac{a^x}{x}\right)+x^{x^a+a-1}\left(1+a\ln x\right)+\left(x^x\right)^x(x+2x\ln x)$.

2．隐函数的导数

设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数，要计算 y'，则可以对方程 $F(x,y)=0$ 两边同时求导，再解方程即得到 y'.在对方程两边同时求导时，需要注意求导法则的使用，其中的 y 要看成 x 的函数 $f(x)$，运用复合函数求导法则进行求导.

【例 5】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$_________.

【答案】1.

【例 6】【2012-2-4 分】已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定，

则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$_________.

【答案】1.

3．参数方程的导数

（1）参数方程的一阶导数

设 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

【例 7】设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta, \\ y=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 所确定，试计算 $\dfrac{dy}{dx}$.

【答案】$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{-\sin\theta+\cos\theta}$.

（2）参数方程的二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}.$$

【例 8】设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 所确定，试计算 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【答案】$\dfrac{1}{3}\sec^4 t\csc t$.

4．抽象函数的导数

【例 9】设 $y=x^2f(\ln x)$，其中 f 可微，则 $dy=$__________.

【答案】$[2xf(\ln x)+xf'(\ln x)]dx$.

【例 10】设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=\ln(1+g(x))$，$h'(1)=1$，$g'(1)=1$，则 $g(1)$ 等于__________.

【答案】0.

【例 11】设 $y=f(x)$ 三阶可导，且 $f'(x)\neq 0$，试推导 $y=f(x)$ 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的二阶及三阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 与 $\frac{d^3x}{dy^3}$ 的计算公式.

【答案】$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$，$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

【小结】①当函数的自变量与求导的变量不一致时，一般考虑利用复合函数求导法则；②从中"插入"中间变量的微分以计算导数：$\frac{df(t)}{dx}=\frac{df(t)}{dt}\frac{dt}{dx}=f'(t)\frac{dt}{dx}$.

【例 12】将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{d^3x}{dy^3}+\left(\frac{dx}{dy}\right)^4(y+x)=0$ 化为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程.

【答案】$y'''+y+x=0$.

【例 13】试作变换$u=\tan y, x=e^t$，将方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x^2\tan y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-\sin y\cos y=0$$ 化为u关于t的方程.

【答案】$\frac{d^2u}{dt^2}-u=0$.

5．高阶导数的计算

（1）常用函数高阶导数公式

① $y=e^x$ $\quad y^{(n)}=e^x$

② $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ $\quad y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

③ $y=\sin x$ $\quad y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

④ $y=\cos x$ $\quad y^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

⑤ $y=x^a$ $\quad y^{(n)}=a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n}$

⑥ $y=\frac{1}{x}$ $\quad y^{(n)}=(-1)^n n!x^{-1-n}$

⑦ $y=\ln x$ $\quad y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

【注】①上述公式需要记忆；

②上述公式可以与一次函数$ax+b$复合，其高阶导数公式可将$ax+b$视为整体替换原公式中x的位置，且最后乘a^n.

【例 14】计算下列函数的 n 阶导数.

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$；

（2）$f(x)=\sin x\cdot\cos 2x$.

【答案】（1）$\dfrac{(-1)^n}{2}n!\left[(x-1)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}\right]$；

（2）$\dfrac{1}{2}\left[3^n\sin\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$.

【例 15】函数 $y=\ln\dfrac{1+x}{1-2x}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$__________.

【答案】$(n-1)![(-1)^{n-1}+2^n]$.

（2）莱布尼茨公式

设$u(x),v(x)$均有 n 阶导数，则有：$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$.

【例 16】设 $f(x)=x^2e^x$，求 $f^{(n)}(x)$ $(n\geq 2)$.

【答案】$(x^2+2nx+n(n-1))e^x$.

【例 17】设 $f(x)=x^2\ln(3x+1)$，求 $f^{(n)}(0)$ $(n\geq 3)$.

【答案】$\dfrac{(-1)^{n-3}3^{n-2}n!}{n-2}$.

模块六　不定积分

一、基本概念

1．原函数

设函数 $F(x)$ 在区间 I 上可导，对区间 I 上的每一点都有 $F'(x)=f(x)$，则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

【注】①提到原函数一般要指明区间，不加特别说明的情况下一般就默认为 $f(x)$ 的定义域.②如果 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数，那么它的原函数一定不唯一.

2．不定积分

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数组成的集合，称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)dx$.

【注】①若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么 $\int f(x)dx=F(x)+C,C\in R$.

②求导数与求不定积分互为逆运算.

③不定积分运算时出现任意常数时，一般的运算为 $C\pm C=C,C^2=C$.

二、基本性质

设 $f(x),g(x)$ 均存在原函数，则

（1）$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

（2）$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx(k\in R,k\neq 0)$

（3）$(\int f(x)dx)'=f(x)$ 或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$

（4）$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$

【注】①当 $k=0$ 时，$\int kf(x)dx=\int 0dx=C$，而 $k\int f(x)dx=0(F(x)+C)=0$，两边是不相等的，所以要注意第二个公式中的 $k\neq 0$.②不定积分满足线性性质.

三、基本方法

1．基本积分公式

（1）$\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C(a\neq -1)$， $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$；

（2）$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C(a>0\text{且}a\neq 1)$, $\int e^x dx=e^x+C$；

（3）$\int \cos xdx=\sin x+C$, $\int \sin xdx=-\cos x+C$；

（4）$\int \sec^2 xdx=\tan x+C$, $\int \csc^2 xdx=-\cot x+C$；

（5）$\int \sec x\tan xdx=\sec x+C$, $\int \csc x\cot xdx=-\csc x+C$；

（6）$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$；

（7）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$.

【例 1】计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$； （2）$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{3^x}dx$；

（3）$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$； （4）$\int \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}dx$；

（5）$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$；

（6）$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$；

（7）$\int \tan^2 x dx$；

（8）$\int \cos^2 \frac{x}{2}dx$；

（9）$\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$.

【答案】（1）$-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$；

（2）$\frac{2}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{1}{5\ln\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)^x+C$；

（3）$e^x-2\sqrt{x}+C$；

（4）$\arcsin x+\ln|x|+C$；

（5）$x-\arctan x+C$；

（6）$\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan x+C$；

（7）$\tan x-x+C$；

（8）$\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}+C$；

（9）$\sin x+\cos x+C$.

2．换元积分法

（1）第一类换元法

设 $f(u)$ 有一个原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \underline{\underline{令u=\varphi(x)}} \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C.$$

【例 2】计算下列不定积分.

（1）$\int \cos(x+1)dx$；（2）$\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$.

【答案】（1）$\sin(x+1)+C$；（2）$-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+C$.

【例 3】求 $\int \frac{1}{1+2x^2}dx$.

【答案】$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+C$.

【小结】$\int \frac{1}{a^2x^2+b^2}dx = \frac{1}{ab}\arctan\frac{ax}{b}+C$.

【例 4】求 $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$.

【答案】$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

【小结】$\int \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}dx=\frac{1}{a}\arcsin\frac{ax}{b}+C$.

【例 5】计算下列不定积分.

（1）$\int 2x\sin x^2 dx$；

（2）$\int x(1+x^2)^{50} dx$；

（3）$\int \frac{x}{1+x^2}dx$；

（4）$\int \sqrt{\frac{1+\arcsin x}{1-x^2}}dx$；

（5）$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$；

（6）$\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$；

（7）$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$；（8）$\int e^{e^x + x} dx$；

（9）$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$；（10）$\int \frac{\cos 2x}{2 + \sin x \cos x} dx$.

【答案】（1）$-\cos x^2 + C$；（2）$\frac{1}{102}(1+x^2)^{51} + C$；

（3）$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$；（4）$\frac{2}{3}(1+\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C$；

（5）$\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$；（6）$-\frac{1}{\ln x} + C$；

（7）$-e^{\frac{1}{x}} + C$；（8）$e^{e^x} + C$；

（9）$-\ln|\sin x + \cos x| + C$；（10）$\ln(2 + \sin x \cos x) + C$.

（2）第二类换元法

设 $x = \psi(t)$ 是单调，可导的函数，并且 $\psi'(t) \neq 0$，设 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 具有原函数 $G(t)$，则

$$\int f(x)dx \underline{\underline{x=\psi(t)}} \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = G(t) = G[\psi^{-1}(x)] + C.$$

【注】①$x = \psi(t)$ 必须存在反函数；②注意最后结果回代为用 x 表示.

【例 6】计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$；　　（2）$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}dx$.

【答案】（1）$2\arctan\sqrt{x}+C$；（2）$2\sqrt{1-x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+C$.

【小结】被积函数含有形如$\sqrt{ax+b}$的项时，做变量代换$\sqrt{ax+b}=t$.

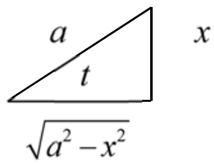
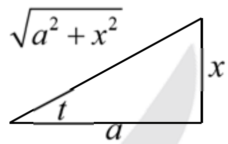
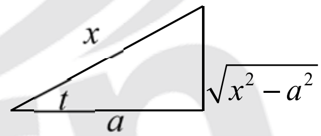
【例 7】计算下列不定积分.

（1）$\int \sqrt{1-x^2}dx$；　　（2）$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$；

（3）$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.

【答案】（1）$\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$；（2）$\arccos\frac{1}{x}+C$；（3）$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

【小结】三角代换常见使用方式：

根式的形式	所作替换	三角形示意图(求反函数用)
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	

3．分部积分法

分部积分公式：$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$，或简写为$\int udv=uv-\int vdu$.

【例 8】计算下列不定积分.

（1）$\int(x+1)e^x dx$；

（2）$\int x\cos xdx$；

（3）$\int x^2e^x dx$.

【答案】（1） xe^x+C；（2） $x\sin x+\cos x+C$；（3） $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

【例 9】计算下列不定积分.

（1） $\int x\ln xdx$；　　（2） $\int x\arctan xdx$；

（3） $\int \ln xdx$；　　（4） $\int \arcsin xdx$.

【答案】（1） $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$；（2） $\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$；

（3） $x\ln x-x+C$；（4） $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

【例 10】计算 $\int e^x\cos xdx$.

【答案】$\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$.

四、常考题型

1．有理函数积分

【例 11】计算下列积分.

（1）$\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$；

（2）$\int\frac{6}{x^3-5x^2+6x}dx$；

（3）$\int\frac{2x-1}{x^2+4x+4}dx$；

（4）$\int\frac{3x+1}{(x^2-1)(x+1)}dx$；

（5）$\int\frac{2x+3}{x^2-2x+2}dx$；

（6）$\int\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}dx$.

【答案】（1）$\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+C$；（2）$-3\ln|x-2|+2\ln|x-3|+\ln|x|+C$；

（3）$2\ln|x+2|+\dfrac{5}{x+2}+C$；（4）$\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{x+1}+C$；

（5）$\ln(x^2-2x+2)+5\arctan(x-1)+C$；

（6）$\ln|2x+1|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

【小结】（1）有理函数积分计算的积分思想是拆分，重点讲解的是拆分的方法以及参数的求解.

（2）拆分方法大致分三种：

（i）分母形如$(x+a)f(x)$，则对应拆出一项：$\dfrac{A}{x+a}$；

（ii）分母形如$(x+a)^2f(x)$，则对应拆出两项：$\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{(x+a)^2}$；

（iii）分母形如$(x^2+ax+b)f(x)$（其中x^2+ax+b为无实根的二次多项式），则对应拆出一项$\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}$.

【例 12】计算下列积分.

（1）$\int\dfrac{x^7}{x^4+1}dx$；（2）$\int\dfrac{1}{x^4(1+x^2)}dx$；

【答案】（1）$\frac{1}{4}(x^4-\ln(x^4+1))+C$；（2）$-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C$.

2．可化为有理函数的积分

（1）三角有理式

【例 13】计算下列不定积分.

（1）$\int \sin^2 x\cos xdx$；

（2）$\int \cos^4 xdx$；

（3）$\int \sin^2 x\cos^2 xdx$；

（4）$\int \tan xdx$；

（5）$\int \sec xdx$；

（6）$\int \frac{1}{\sin 2x+2\sin x}dx$.

【答案】（1）$\frac{1}{3}\sin^3 x+C$；（2）$\frac{1}{32}(\sin 4x+8\sin 2x+12x)+C$；

（3）$\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$；（4）$-\ln|\cos x|+C$；

（5）$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$ 或 $\ln|\sec x+\tan x|+C$；（6）$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\frac{1}{4}\frac{1}{\cos x+1}+C$.

【小结】（1）形如 $\int\sin^n x\cos^m xdx$ 的积分，其中 m,n 为非负整数：

①若 m 与 n 中至少有一个奇数，则将奇次幂因子拆出一个一次幂因子并与 dx 凑微分（$\sin xdx=-d\cos x$，$\cos xdx=d\sin x$），所剩偶次幂因子利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 转化为同一种三角函数.

②若 m 与 n 皆为偶数，则用倍角公式进行降幂化简被积函数后再积分，其中倍角公式为：

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$，$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

（2）公式：$\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C,\int\cot xdx=\ln|\sin x|+C$，

$\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C,\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

【例 14】计算下列积分.

（1）$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；（2）$\int\frac{dx}{5-3\cos x}$.

【答案】（1）$\frac{1}{\sqrt5}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt5}\right)+C$；（2）$\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+C$.

【小结】对于三角有理式，也可以利用万能公式，

令 $x=2\arctan t$，则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$.

（2）指数有理式的积分

【例 15】计算下列积分.

（1）$\int\frac{1}{1+e^x}dx$；（2）$\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx$.

【答案】（1）$x-\ln(1+e^x)+C$；（2）$x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+C$.

【小结】仅含有指数函数e^x的不定积分，直接令$t=e^x$，可将其化成有理式函数的不定积分.

（3）根式的积分

【例 16】计算下列积分.

（1）$\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$；（2）$\int\frac{1}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$；

（3）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$；（4）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$；

（5）$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$；　　（6）$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$.

【答案】（1）$\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$；　（2）$2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}-48\ln(\sqrt[6]{x}+2)+C$；

（3）$\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$；　（4）$\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$；

（5）$\frac{2(x-2)}{3\sqrt{2+x-x^2}}+C$；　（6）$-\frac{1}{3a^2}\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+C$.

【小结】①方法：如果根号下为一次函数$\sqrt{ax+b}$，则直接令整个根式为t；

如果根号下为二次函数，则利用三角代换：$\sqrt{a^2-x^2}$，令$x=a\sin t$；$\sqrt{a^2+x^2}$，令$x=a\tan t$；$\sqrt{x^2-a^2}$，令$x=a\sec t$；

如果根号下为普通的二次函数（含一次项），则先对其配方，再作对应的三角代换.

②公式：$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

3．分部积分法的使用

【例 17】计算下列不定积分.

（1）$\int x^3e^{x^2}dx$；（2）$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$；

（3）$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ln\sin x dx$；（4）$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

【答案】（1）$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C$；（2）$-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$；

（3）$-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C$；

（4）$x\tan x+\ln|\cos x|+C$．

【例 18】计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$；（2）$\int \frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}dx$.

【答案】（1）$-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$；

（2）$-\frac{1}{2}e^{-2x}\arcsin e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

【小结】分部积分中$u(x)$的选取优先级，遵循“反、对＞幂＞指、三”的原则.

【例 19】计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$；（2）$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$；

（3）$\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$；（4）$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

【答案】（1）$\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$；

（2）$(2x-4)\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$；

（3）$\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\tan x+C$；

（4）$\frac{x\arctan x+1}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

【小结】使用不定积分的关键是要先将积分式 $\int u(x)v'(x)dx$ 中的 $v'(x)dx$ 部分凑成 $dv(x)$，这里相当于要计算 $v'(x)$ 的不定积分. 这个积分的计算一定要比较简单，如果过于复杂，就应该考虑其它方法.

【例 20】计算下列不定积分.

（1）$\int \arctan\sqrt{x+1}dx$；　　（2）$\int\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx$；

（3）$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)dx$；　　（4）$\int \arctan\sqrt{\frac{x-1}{x}}dx$.

【答案】（1）$(x+2)\arctan\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}+C$；

（2）$(x-2)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+4\ln\left|\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right|+C$；

（3）$(x-1)\ln\left(1+\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)-\frac{1}{2}\ln x-\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x}}+C$；

（4）$\left(x-\frac{1}{2}\right)\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right|+C$.

【小结】（1）变量代换法可以结合分部积分法进行使用，对积分式$\int f(x)dx$，如果做变量代换$x=\varphi(t)$，可以得到$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)$，若在下一步需要使用分部积分时，对微分式 $d\varphi(t)$，可以不将其计算出来，而是直接进行分部积分：$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\varphi(t)f(\varphi(t))-\int\varphi(t)df(\varphi(t))$.

（2）如果积分式中含有分式$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$，一般直接令整个根式为t，从中解出x，再代回原积分求解. 这种情况下，一般要结合分部积分法.

【例 21】计算下列不定积分.

（1）$\int \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx$；

（2）$\int \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}dx$；

（3）$\int e^{x^2}(2x\sin x+\cos x)dx$；

（4）$\int e^{2x}(\cot x-1)^2dx$.

【答案】（1）$\dfrac{e^x}{x}+C$；（2）$-\dfrac{\cos x}{x}+C$；（3）$e^{x^2}\sin x+C$；（4）$-e^{2x}\cot x+C$.

模块七 定积分

一、定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$$

这样 $[a,b]$ 就被分为了 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$，用 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 表示各区间的长度，再在每个区间上取一点 $\xi_i, x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$，作如下和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在且与 $[a,b]$ 的划分及 ξ_i 的选取无关，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，该极限称之为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$.即：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间，a,b 分别称为积分下限和积分上限.

【注】①几何意义：$\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示为由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形面积的代数和.

②定积分定义的思想方法称之为“微元法”，它是我们用定积分计算几何及物理量的积分思路，其步骤可以总结为：分割、近似、求和、取极限.

③定积分的本质是极限.

二、定积分的性质

1．规定

（1）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(t)dt$

（2）$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$，特例：$\int_a^a f(x)dx=0$，$\int_b^b f(x)dx=0$.

2．线性性质

（1）$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$，

（2）$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$，$k$ 为常数.

3．常数定积分

$\int_a^b 1dx=b-a$.

4．区间可加性

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(u)du+\int_c^b f(t)dt$.

【注】不一定 $a<c<b$，只要 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在就可以使用定积分的区间可加性.

5．比较定理

如果在区间 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\geq g(x)$，则有 $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$；

推论：

（**1**）如果在区间 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\geq 0$，则有 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$；

（2）$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$；

（3）估值定理：

设 M 和 m 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，则有：

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)；$$

（4）积分中值定理：

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

【例 1】设 $I_1 = \int_0^1 \sin x^2 dx$，$I_2 = \int_0^1 \sin\sqrt{x}dx$，$I_3 = \int_0^1 \sin xdx$，则 I_1, I_2, I_3 的大小关系是（　　）

（A）$I_1 < I_2 < I_3$　　（B）$I_1 < I_3 < I_2$

（C）$I_2 < I_1 < I_3$　　（D）$I_3 < I_2 < I_1$

【答案】（B）

三、微积分基本定理

1．定理内容

（1）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则称 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$（$a \le x \le b$）为变上限积分（积分上限函数）.

（2）变上限积分的导数：

定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则变上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$，$a \le x \le b$.

（3）牛顿—莱布尼兹公式

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

2．变限积分的求导公式

（1）$[\int_a^x f(t)dt]' = f(x)$，$a \le x \le b$；

（2）$[\int_x^b f(t)dt]' = -f(x)$，$a \le x \le b$；

（3）$[\int_a^{u(x)} f(t)dt]' = f(u(x))u'(x)$；

（4）$[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt]' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$.

【例 2】计算下列各函数的导数.

（1）$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin tdt}{1+t^2}$；　　（2）$f(x) = \int_{e^{2x}}^{e^x} \sqrt{t}cost^2dt$.

【答案】（1）$f'(x) = \frac{2x\sin x^2}{1+x^4}$；（2）$f'(x) = e^{\frac{3}{2}x}\cos e^{2x} - 2e^{3x}\cos e^{4x}$.

3．定积分的计算

（1）换元法：

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

①$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

②$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，其值域 $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$，

则有：$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

【注】①变量代换后的上下限与原来的积分上下限是对应关系；

②定积分本质是一个数，做变量代换后不必回代.

（2）分部积分法：

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \cdot$$

【例 3】计算下列积分.

（1）$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$；

（2）$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2x-x^2}dx$；

（3）$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

【答案】（1）$\frac{\pi^2}{32}$；（2）$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$；（3）2.

四、常考题型

1．定积分比较大小

【例 4】设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\csc xdx$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cot xdx$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_1<I_3<I_2$

（C）$I_2<I_1<I_3$　　（D）$I_3<I_2<I_1$

【答案】（B）

【小结】比较定积分大小就是比较被积函数大小（积分区间相同的情况下）.这里往往要结合不等式证明的相关知识.

【例 5】使不等式$\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt > \int_1^x \frac{1}{t}dt$成立的$x$的范围是（　　）

（A）$(0,1)$　　（B）$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　（C）$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　（D）$(\pi,+\infty)$

【答案】（A）.

【例 6】试判断$\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$的正负.

【答案】正.

【小结】①对比较定理的另一种考查方式是判断定积分的符号，这类问题和比较定积分大小没有本质上的区别，直接根据被积函数的正负进行判断即可.

②这里对考生要求较高的一种考查方法是被积函数在积分区间上有正有负，此时，无法直接通过比较定理判断出定积分的符号.一般的思路有两种：其一是按照被积函数的正负对定积分的积分区间进行分割，然后通过变量代换，将正负两部分积分的积分区间统一，最后再判断正负；其二是结合图形，画出被积函数的大致图形，根据x轴上方和下方面积的大小进行判断.

2．变限积分求导

【例 7】$\begin{cases} x=\cos t^2, \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du, \end{cases}$设$t>0$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

【答案】$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{2t\sin t^2}$.

【例 8】设函数 $f(x)=\int_1^x x\ln(1+t^2)dt$，则 $f'(x)=$______________.

【答案】$\int_1^x \ln(1+t^2)dt+x\ln(1+x^2)$.

【小结】积分号下有 x 的基本处理方式：由于在积分过程中，x 可以看作常数，故一般可以想办法将 x 从积分号下提出.必要的时候，可以先对积分式进行分解，再提出 x.

【例 9】设 $f(x)$ 是 R 上的连续函数，求 $[\int_a^{x^2}(x^2-t)f(t)dt]'$.

【答案】$2x\int_a^{x^2}f(t)dt$.

【例 10】$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2dt=$________.

【答案】$\sin x^2$.

【小结】对于形如 $\int_a^x f[u(x,t)]dt$ 的变上限积分，要计算它的导数，一般先作变量代换

$u=u(x,t)$.

【例 11】 设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}$，令 $f(x)=\int_0^x g(x-t)t^2dt$，求 $f''(1)$.

【答案】 1.

【例 12】 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$（　　）

（A）$xf(x^2)$　　（B）$-xf(x^2)$

（C）$2xf(x^2)$　　（D）$-2xf(x^2)$

【答案】（A）.

【小结】 对于形如 $\int_0^x t^{n-1}f(t^n)dt$ 的变上限积分，要计算它的导数，一般先利用凑微分的方法将其化为 $\frac{1}{n}\int_0^x f(t^n)dt^n$.

【例 13】 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt}{x^{2n}}$.

【答案】$\dfrac{1}{2n}$.

【例 14】设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$.已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值.

【答案】$\dfrac{3}{4}$.

3．分段函数的定积分

【例 15】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0,\\ -2\arctan x, x<0,\end{cases}$ 求 $\int_{-1}^1 f(x)dx$

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$.

【小结】如果被积函数是分段函数，需要根据被积函数的不同拆分区间分别进行计算，

如：$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in[a,c],\\ f_2(x), & x\in(c,b],\end{cases}$ 则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_2(x)dx$.

【例 16】计算下列积分.

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\{\cos x,\sin x\}dx$；

（2）$\int_{\frac{1}{e}}^{e} x\left|\ln x\right|dx$.

【答案】（1）$2-\sqrt{2}$；（2）$-\dfrac{3}{4e^2}+\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{2}$.

【小结】如果被积函数是隐式分段函数，如绝对值函数，最大值(max)或最小值(min)函数，计算时首先考虑把被积函数化为显式的分段函数，如 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in[a,c], \\ f_2(x), & x\in(c,b], \end{cases}$ 再分别进行计算.

【例 17】设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, x\in R$.

【答案】$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{2}x^2, & 0\le x<1, \\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-1, & 1\le x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$

【小结】直接对分段函数 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in[a,c], \\ f_2(x), & x\in(c,b] \end{cases}$ 求不定积分，需按 $f(x)$ 的定义区间对 x 分情况讨论，且利用函数 $\int_a^x f(t)dt$ 的连续性确定参数.

4．对称区间上的定积分

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上可积，则有

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数}. \end{cases}$$

【例 18】设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\sin^5 x}{1+x^4}dx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x+\cos^5 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x\cos x-\cos^5 x)dx$，试比较它们的大小.

.【答案】 $P<M<N$

【小结】如果积分区间是关于原点对称，计算时首先考虑利用函数的奇偶性进行化简.

【例 19】计算下列积分.

（1） $\int_{-1}^{1}(x+|x|)e^{-|x|}dx$；　　（2） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}+x\sin x\right)dx$.

【答案】（1） $2(1-2e^{-1})$；　（2） 2.

【例 20】计算下列积分.

（1） $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^{x^3}}dx$ ；　　（2） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\ln(1+e^{\sin x})dx$；

（3） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\tan x}\sin^2 x}{e^{\tan x}+e^{-\tan x}}dx$.

【答案】（1）1；（2）1；（3）$\frac{\pi}{4}$.

【小结】如果积分区间关于原点对称，而被积函数不具有奇偶性并且常规方法难以求解，则可以利用对称区间的特点，做变量代换：$x=-u$，然后再将代换后的积分与原积分相加，很多情况下，这一变换往往可以简化计算.

5．抽象函数的定积分

（1）被积函数中含抽象函数的导数

【例 21】已知$\frac{\ln(1+x)}{x}$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_1^3 xf'(x)dx=$__________.

【答案】$\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{4}$.

【小结】如果积分式中含有抽象函数的导数$f'(x)$，则可以将$f'(x)dx$写成$df(x)$，再分部积分.

【例 22】已知函数$f(x)$满足$\int_0^x f(t)dt=e^{x^2}-1$，则$\int_0^1 xf'(2x)dx=$（　　）

（A）$\frac{7}{4}e^4+\frac{1}{4}$　（B）$\frac{7}{4}e^4-\frac{1}{4}$　（C）$\frac{5}{3}e^4+\frac{1}{3}$　（D）$\frac{5}{3}e^4-\frac{1}{4}$

【答案】（A）.

【例 23】设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，证明：$\int_0^{\pi}[f''(x)+f(x)]\sin x dx=f(\pi)+f(0)$

（2）被积函数中含变限积分

【例 24】设 $f(x)=\int_1^x \frac{e^t-1}{t}dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

【答案】$2-e$.

【小结】如果积分式中含有变上限积分，也可以考虑将该变上限积分当做公式 $\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu$ 中的 u（变上限积分易求导），再进行分部积分.

【例 25】设函数 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{1+\tan^2 t^2}dt$，求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

【答案】$-\frac{\pi}{4}$.

【例 26】【2019-2- 4 分】已知函数 $f(x)=x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$_______.

【答案】$\frac{1}{4}(\cos 1-1)$.

【例 27】设 $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t-2}dt$，求 $\int_1^2 f(x)dx$.

【答案】$e-e^2$.

【小结】为了便于计算，如果变上限积分在积分区间的一端为零，则可以将 dx 写成 $d(x-c)$，其中 c 是积分区间的另一端.

【例 28】设 $f(x)=\int_0^x \arctan(t-1)^2 dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

【答案】$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

模块八　多元函数微分学

一、二重极限及连续

1．二重极限

（1）二元函数

设D是平面上的一个点集，如果对于任意一点$(x,y)\in D$，变量z按照一定的运算法则总有确定的值与之对应，则称z为关于变量x,y的二元函数，记作$z=f(x,y)$.

（2）二重极限的定义

设$z=f(x,y)$是D上的一个函数，$(x_0,y_0)\in D$，如果存在实数A，使得$\forall\varepsilon>0$，总$\exists\delta>0$，当$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，有$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$,则称当$(x,y)$趋近于$(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$的二重极限为$A$.记作$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$或$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$.

【例 1】讨论下列二重极限是否存在，如果存在，求出极限.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}\ (a\neq 0)$；　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{|x|+|y|}$；　　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$.

【答案】（1）$e^{\frac{1}{a}}$；（2）0；（3）0；（4）0.

【小结】计算二重极限一般会用到一元函数极限的一些方法，如等价无穷小替换、夹逼准则等，其中对夹逼准则用到的往往是它的推论：“无穷小量×有界量＝无穷小量”.如果二重极限分子的次数大于分母，则可以考虑将其凑成“无穷小量×有界量”的形式，进而说明它的极限为零.

【例 2】讨论下列二重极限是否存在，如果存在，求出极限.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

【答案】（1）不存在；（2）不存在.

【小结】二重极限的计算难度较大，多考查证明极限不存在.由于二元函数的极限要求自变量以任何方式趋近于给定的点时都有相同的极限，因此，如果能找到两条不同的路径的极限不一样，就可以说明二重极限不存在.

2．连续

定义：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，并且

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

或 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.如果 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

二、偏导数

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 的某一邻域内有定义，把 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应的函数有增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**关于 x 的偏导数存在**，并定义此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**对变量 x 的偏导数**，记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$f'_x(x_0,y_0)$.

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**对变量 y 的偏导数**

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$，记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$f'_y(x_0,y_0)$.

【例 3】设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则（　　）

（A）$f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在　　（B）$f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

（C）$f'_x(0,0)$、$f'_y(0,0)$ 都不存在　　（D）$f'_x(0,0)$、$f'_y(0,0)$ 都存在

【答案】（B）.

【小结】对偏导数的讨论和计算，最基本的原则是对一个变量求导时，将另一个变量视为常数，因此偏导数的存在性实际上就是固定了一个变量之后所得的一元函数的可导性. 具体来说，就是指极限式 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 或 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在.

三、全微分

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})，\quad \Delta x\to 0,\Delta y\to 0$$

其中 A 、 B 仅依赖于而 (x_0,y_0) 与 Δx 、 Δy 无关，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) **可微**，其中 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的**全微分**，记作 $dz|_{(x_0,y_0)}$，即 $dz|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y$.

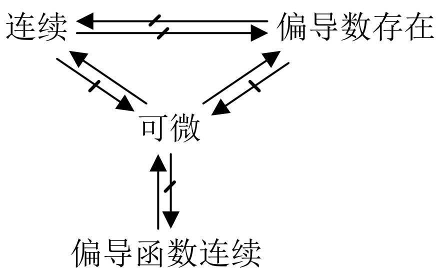
四、相互关系

定理：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，那么 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处必然连续，并且两个偏导数均存在，同时还有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})，\quad \Delta x\to 0,\Delta y\to 0.$$

定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x,y) 处连续，则函数在该点可微.

【注】连续、偏导存在、可微与偏导连续这四个性质的关系可以用下图来形象地表示：



【例 4】二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充要条件是（ ）

（A）$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

（B）$f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在

（C）当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y$ 是无穷小量

（D）当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是无穷小量

【答案】（D）.

【例 5】连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ________.

【答案】$2dx-dy$.

【小结】如果题目中给出了极限式，要求计算函数在某一点的微分，则一般的思路是将极限式凑成微分的定义.凑定义的关键在于从所给式中凑出 Δz、Δx 和 Δy.

【例 6】讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的连续性、可导性与可微性.

（1）$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

（2）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

【答案】（1）连续，可偏导，可微；　　（2）连续，可偏导，不可微.

【小结】判断函数在某一点 (x_0,y_0) 是否可微的步骤：

（1）计算函数在该点的两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 和 $f_y'(x_0,y_0)$；

（2）计算出 Δz；

（3）计算极限 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，如果该极限不存在或不等于 0，则不可微；如果该极限等于 0，则可微.

模块九 偏导数的计算

一、基本公式

1．基本原则

设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 关于 x 的偏导数均存在，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}[af(x,y)+bg(x,y)]=a\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+b\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}，\ a,b\in R，$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)g(x,y)]=g(x,y)\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}，$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{g(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{g^2(x,y)}，\ g(x,y)\neq 0.$$

同理可得，设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 关于 y 的偏导数均存在，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}[af(x,y)+bg(x,y)]=a\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+b\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}，\ a,b\in R，$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)g(x,y)]=g(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}，$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{g(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}}{g^2(x,y)}，\ g(x,y)\neq 0.$$

【例 1】求下列函数的一阶偏导数与全微分.

（1）$z=f(x,y)=e^{xy}+\ln(x+y^2)$；　　（2）$z=f(x,y)=\arctan(x+y)\ln x$.

【答案】（1）$\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}+\dfrac{1}{x+y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}+\dfrac{2y}{x+y^2}$，

$$dz=\left(ye^{xy}+\frac{1}{x+y^2}\right)dx+\left(xe^{xy}+\frac{2y}{x+y^2}\right)dy；$$

（2）$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\ln x}{1+(x+y)^2}+\dfrac{\arctan(x+y)}{x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\ln x}{1+(x+y)^2}$，

$$dz=\left(\frac{\ln x}{1+(x+y)^2}+\frac{\arctan(x+y)}{x}\right)dx+\left(\frac{\ln x}{1+(x+y)^2}\right)dy.$$

【小结】求偏导数的基本法则：固定其余变量，只对一个变量求导.在此法则下，基本计算公式与一元函数类似.

【例 2】$u=(x-2y)^{y-2x}$,则$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=$__________.

【答案】-2.

【小结】求一点的偏导数值时，可选择按照偏导数的定义进行计算，也可先代入其它变量的值，再进行计算.

【例 3】设$z=\dfrac{\sin(x^2+y^2)\arctan(1+y)}{e^{\arctan y}+\sin y\cdot\ln(1+x^2+y^2)}$，求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$.

【答案】0.

【例 4】求下列函数在指定点的全微分.

（1）设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$ ________；

（2）设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$ ________.

【答案】（1）$dz\big|_{(1,2)}=4dx-2dy$；（2）$dz\big|_{(1,0)}=2edx+(e+2)dy$.

2．高阶偏导数

1）定义

如果 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的偏导数仍然存在，则称它们的偏导数为 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**.二阶偏导数总共有四种，分别记作：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

或 $f''_{xx}(x,y)$，$f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$，$f''_{yy}(x,y)$.

高阶偏导数的计算与一阶偏导数的计算没有本质区别，多次求导即可.

【例 5】设 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，计算 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

【答案】$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y^2\dfrac{\cos(xy)[1+(xy)^2]-2xy\sin(xy)}{[1+(xy)^2]^2}$；

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=x^2\frac{\cos(xy)[1+(xy)^2]-2xy\sin(xy)}{[1+(xy)^2]^2}.$$

2）高阶导数与求导次序无关

定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内这两个二阶混合偏导数相等，即 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【注】由于我们需要求偏导的函数绝大部分都是满足定理所需的连续性的，因此我们在求导时一般默认高阶混合偏导数与求导次序无关.

【例 6】设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，试求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

【答案】$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{xe^{-x}}{y^3}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{x-1}{y^2}e^{-x}\cos\dfrac{x}{y}$.

二、复合函数求导

根据复合函数中间变量的不同形式我们有如下求导公式：

（1）如果 $z=f(u,v)=f(\varphi(t),\phi(t))$，则 $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dt}$；

（2）如果 $z=f(u,v)=f(\varphi(x,y),\phi(x,y))$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y};$$

（3）如果 $z=f(u,v)=f(\varphi(x,y),\phi(y))$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

【例 7】设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v,y=u-v$，试证：$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

【例 8】求下列偏导数.

（1）$z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，其中 f 具有二阶连续偏导数.

（2）设 $z=f(xe^y,x,y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【答案】（1）$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+e^{xy}y^2f_2'+4x^2f_{11}''+4xye^{xy}f_{12}''+y^2e^{2xy}f_{22}''$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f_1'+e^{xy}x^2f_2'+4y^2f_{11}''-4xye^{xy}f_{12}''+x^2e^{2xy}f_{22}''\text{；}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''+(xy+1)e^{xy}f_2'.$$

（2）$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^yf_1'+e^y(xe^yf_{11}''+f_{13}'')+xe^yf_{21}''+f_{23}''$.

【小结】设 $z=f(u,v)$，其中 $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，则在计算高阶偏导数时，要注意对 $\frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial x}$ 仍然要使用复合函数求导法则：

$$\frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial x}=\frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_{uu}''(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}''(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

【例 9】$z=f(x,u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【答案】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'u_1'+f_3'v_1'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+f_{22}''(u_1')^2+f_{33}''(v')^2+2f_{12}''u_1'+2f_{13}''v_1'+2f_{23}''v_1'u_1'+f_2'u_{11}''+f_3'v_{11}''.$$

【例 10】设 $u=f(x,y,z)$，又 $y=\varphi(x,t)$，$t=\psi(x,z)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

【答案】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\varphi_1'+f_2'\varphi_2'\psi_1'$.

【例 11】已知二元函数 $f(x,y)$ 满足 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，作变换 $\begin{cases}x=uv,\\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$ 且

$f(x,y)=g(u,v)$，求 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2$.

【答案】$4u^2+4v^2$.

【例 12】设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，若有 $z(x,2x)=x$，

$z_1'(x,2x)=x^2$，求 $z_{11}''(x,2x)$.

【答案】$z''_{11}(x,2x)=-\dfrac{4x}{3}$.

三、隐函数求导

定理： $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有一阶连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，若 $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=y(x)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'},$$

其中 F_x',F_y' 是二元函数 $F(x,y)$ 对 x,y 的偏导数.

定理： 设 $F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内有连续的一阶偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，若 $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'},$$

其中 F_x',F_y',F_z' 是三元函数 $F(x,y,z)$ 对 x,y,z 的偏导数.

【例 13】设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

【答案】1.

【小结】隐函数求导常用方法之一，方程两边同时对 x 或者 y 求偏导，其中 z 看成 x,y 的函数.

【例 14】设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【答案】$\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$.

【小结】隐函数求导常用方法之二，尤其涉及抽象且复合形式比较复杂的，可采取 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$ 公式进行计算.

【例 15】设 $u=ze^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 可导且 $\varphi'\neq -1$，求 du.

【答案】

$$\left[\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}e^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)+\frac{z}{y}e^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)+2xze^{\frac{x}{y}}\cos(x^2+y^2)\right]dx+$$
$$\left[\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}e^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)-\frac{xz}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\sin(x^2+y^2)+2yze^{\frac{x}{y}}\cos(x^2+y^2)\right]dy.$$

【例 16】【2005-1-4 分】（数学一、数学二）设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程（　　）

（A）只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

（B）可以确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z),z=z(x,y)$

（C）可以确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z),z=z(x,y)$

（D）可以确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z),x=x(z,y)$

【答案】（D）.

模块十　二重积分

一、二重积分的概念与常用性质

1．二重积分的概念

定义：设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数.将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2,\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积.在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.如果当各小闭区域的直径中的最大值 d 趋于零时，这和的极限总存在，且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

【注】（二重积分的几何意义）二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像是三维空间中的一个曲面，当 $f(x,y)\geq 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表示以 D 为底，以该曲面为曲顶的曲顶柱体的体积.

2．常用性质

（1）线性性质：

设 α，β 为任意实数，则有

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy = \alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy .$$

（2）$\iint\limits_D 1dxdy=\sigma$，其中 σ 为区域 D 的面积.

（3）关于区域的可加性：

如果 $D=D_1\bigcup D_2$，除公共边界外，D_1 与 D_2 不重叠，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

（4）比较定理：

如果在 D 上恒有 $f(x,y)\le g(x,y)$ 成立，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy\le\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy.$$

推论 1： 设 M、m 分别是函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值与最小值，σ 是 D 的面积，则有 $m\sigma\le\iint\limits_{D} f\left(x,\ y\right)dxdy\le M\sigma$.

推论 2（二重积分中值定理）： 设函数 $f(x,\ y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是区域 D 的面积，则在区域 D 上至少存在一点 $\left(\xi,\ \eta\right)$，使得 $\iint\limits_{D} f\left(x,\ y\right)dxdy=f\left(\xi,\ \eta\right)\cdot\sigma$.

【例 1】 设区域 D 由曲线 $y=\sin x$，$x=-\dfrac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，计算 $\iint\limits_{D} 1dxdy$.

【答案】 π.

【小结】 当二重积分被积函数为常数时，可以直接求被积区域的面积.

【例 2】 设 $I_1=\iint\limits_{D}\tan\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D}\tan\left(x^2+y^2\right)d\sigma$，

$I_3=\iint\limits_{D}\tan\left(x^2+y^2\right)^2 d\sigma$，其中 $D=\left\{(x,\ y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，则（　　）

（A）$I_3>I_2>I_1$　　（B）$I_1>I_2>I_3$

（C）$I_2>I_1>I_3$　　（D）$I_3>I_1>I_2$

【答案】（B）

二、利用直角坐标计算二重积分

1．定限方法

【例 3】计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=1$ 所围成的平面区域.

【答案】 1.

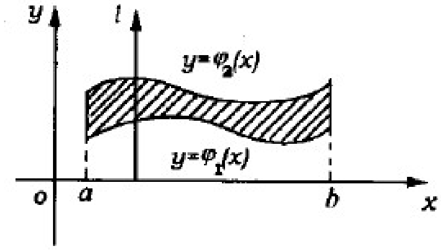
【例 4】计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由直线 $y=0$，$y=x$，$x=1$ 所围成的平面区域.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【小结】定限方法（以先对 y 积分的情况为例）：

1）画一条与 y 轴平行的直线，观察这条直线与积分区域边界的两交点（如图），下交点为下限，上交点为上限，即 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy$.

2)使得直线与积分区域有交点的 x 的范围便是积分变量 x 的上下限，即 $\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy$.



2．积分次序的选择

【例 5】求$\iint\limits_{D}\frac{y^2}{x^2}dxdy$，其中$D$是由$y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$y=2$围成的平面区域.

【答案】$\frac{9}{4}$.

【小结】定限时第一个原则是尽量避免分类讨论.

【例 6】计算$\iint\limits_{D}xydxdy$，其中D是由曲线$y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$及y轴为边界的无界区域.

【答案】$\frac{1}{3}$.

【例 7】计算二重积分$I=\iint\limits_{D}\frac{y^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}dxdy$，其中$D$是第一象限中以曲线$y=\sqrt{x}$与$x$轴为边界的无界区域.

【答案】$\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

【小结】定限时第二个原则是使第一步积分简单，易于计算.

【例 8】计算二重积分 $\iint\limits_{D} e^{-y^2}dxdy$，其中积分区域 D 是以点 $(0,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的三角形.

【答案】$\dfrac{1-e^{-1}}{2}$.

【小结】如果被积函数为 $e^{x^2},\dfrac{\sin x}{x}$ 等原函数无法用初等函数表示的函数，则直接对另一个变量积分.

3．交换积分次序

【例 9】交换下列积分次序.

（1）$\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}f(x,\ y)dy$；

（2）$\int_{0}^{2}dx\int_{0}^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)dy+\int_{2}^{2\sqrt{2}}dx\int_{0}^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)dy$.

【答案】（1）$\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,\ y)dx+\int_{1}^{4}dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,\ y)dx$；

（2）$\int_{0}^{2}dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,\ y)dx$.

【小结】交换积分次序的一般步骤：先通过积分上下限还原出积分区域，再按照要求的积分次序定限即可.

模块十一　空间解析几何（*数学一）

一、空间直角坐标系与向量

1．空间直角坐标系

（1）以空间中某一点O为原点作三条相互垂直的坐标轴，三条坐标轴都以O作为原点，将它们分别称作x轴、y轴、z轴，三个坐标轴的方向要符合右手法则，这样就建立了空间直角坐标系$Oxyz$，点O称之为坐标原点.

（2）在空间直角坐标系内，一般用三元方程$F(x,y,z)=0$（或$z=f(x,y)$）表示曲面，而空间曲线则被看作两个曲面的交线，其标准方程为$\begin{cases}S_1(x,y,z)=0\\S_2(x,y,z)=0\end{cases}$.

2．向量

（1）既有大小又有方向的量称为向量，通常用$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}$表示.若向量$\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OM}$（其中$O$为坐标原点），则点$M$的坐标$(x,y,z)$就称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的坐标，且有$\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$（其中$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$分别为沿$x$轴、$y$轴、$z$轴正向的单位向量），通常记作$\{x,y,z\}$.

（2）向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**模**，记作$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；模为$1$的向量称为**单位向量**，模为$0$的向量称为**零向量**.

（3）向量$\boldsymbol{\alpha}$与三个坐标向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$的夹角α，β，γ称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**方向角**，方向角的余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**方向余弦**.如果$\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则有$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3．向量的运算

设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\gamma}=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$，则

加法：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}$；

数乘：$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k},\lambda\in R$；

数量积（点积、内积）：$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$；

向量积（叉积、外积）：$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$，$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$；

混合积：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$.

【注】数量积是数，向量积是向量，向量积求的是与两个向量都垂直的向量，这一运算在后面计算平面及直线方程时经常用到，考生需要注意.

4．运算法则

（1）加法与数乘

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$，$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$.

（2）数量积

$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}$，$\lambda\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\lambda(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$.

（3）向量积

$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$，$\lambda\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\lambda(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$.

（4）混合积

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})$（轮转对称性）；

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$（两两互换变号）；

$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，$(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

5．向量之间的关系

设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\gamma}=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$；

两个向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$；

两个向量平行的充要条件：$\boldsymbol{\alpha}\,/\!/\,\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$；

两个向量共线的充要条件：存在不全为0的实数λ，μ使得$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}=0$；

三个向量共面的充要条件：存在不全为0的实数λ，μ，υ使得$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}+\upsilon\boldsymbol{\gamma}=0$（也等价于$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0$）；

两个向量的夹角$(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$可由$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$来确定.

【例 1】设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，计算$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$.

【答案】24.

【例 2】设向量$\boldsymbol{x}$与向量$\boldsymbol{a}=\{2,1,-2\}$共线，且$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}=18$，求向量$\boldsymbol{x}$.

【答案】$\{4,2,-4\}$.

【例 3】求与向量 $\boldsymbol{a}=\{1,2,3\}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\{1,-3,-2\}$ 都垂直的单位向量.

【答案】$\pm\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

【例 4】设 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-4\boldsymbol{\beta}$ 与 $4\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 垂直，计算 $(\boldsymbol{\alpha},\hat{\ }\boldsymbol{\beta})$.

【答案】$\arccos\frac{8}{17}$.

二、直线与平面

1．平面

（1）平面的法向量：与平面垂直的向量称为平面的法向量.

（2）平面方程的四种形式：

点法式方程：已知平面上一点 (x_0,y_0,z_0) 及其法向量 $\{A,B,C\}$，则平面方程为

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

一般式方程： $Ax+By+Cz+D=0$.

三点式方程：设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 是平面上不共线的

三个点，则过这三个点的平面方程为$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$.

截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

【注】①平面方程的所有形式中，点法式是最核心的，只要确定了平面的法向量以及平面上一点，就可以确定平面方程.

②其它形式的方程中，一般式和截距式可以由点法式直接整理而成，而三点式则不需要记忆，只需要通过三点的坐标求出平面的法向量（法向量和平面中任意的向量垂直，因此也就与这三点任意两点连线的向量垂直）即可由点法式得出平面方程.

2．直线

（1）直线的方向向量：与直线平行的向量称为直线的方向向量.

（2）直线方程的四种形式：

一般式方程：已知空间有两个相交平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则它们可以确定一条直线，其方程为：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$.

标准式方程：已知直线上一点(x_0,y_0,z_0)及其方向向量$\{l,m,n\}$，则直线的标准式方程是$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$.

两点式方程：设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$是直线上两点，则过这两点的直线方程为$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

参数式方程：已知直线上一点(x_0,y_0,z_0)及其方向向量$\{l,m,n\}$，则直线的参数式

方为$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$，其中$t$为任意参数.

【注】①直线方程的所有形式中，标准式是最核心的，只要确定了直线的方向向量和直线上一个点，就可以得到直线方程.

②两点式和参数方程都可以由标准式直接得到.

③如何将一般式方程化为标准式方程是这一部分的一个重点：核心还是要先找到直线的方向向量，它与两个平面的法向量都是垂直的，将两个平面的法向量做向量积即可得到，接下来再确定直线上任意一个点即可得到直线的标准式方程.

三、直线与平面的位置关系

1．两个平面的位置关系

设有两个平面

π_1： $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$，

π_2： $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

则有：π_1，π_2平行$\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$；$\pi_1$，$\pi_2$垂直$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2．两条直线的位置关系

设有两条直线L_1：$\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$与$L_2$：$\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$.

则有L_1，L_2平行$\Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$，$L_1$，$L_2$垂直$\Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$，

L_1，L_2的夹角θ可由$\cos\theta = \dfrac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$来确定.

3．直线与平面的位置关系

设有直线L：$\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$和平面$\pi$：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，则有

L与π平行$\Leftrightarrow l_1A_1+m_1B_1+n_1C_1=0$，$L$与$\pi$垂直$\Leftrightarrow \dfrac{l_1}{A_1}=\dfrac{m_1}{B_1}=\dfrac{n_1}{C_1}$，

L在π上$\Leftrightarrow l_1A_1+m_1B_1+n_1C_1=0$且$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=0$.

【注】直线与直线、平面与平面、直线与平面，它们之间的位置关系都可以转化为它们的向量（平面的法向量、直线的方向向量）之间的关系来理解.

4．点到直线的距离

点$M(x_0,y_0,z_0)$到直线$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$的距离为

$$d=\frac{\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ l & m & n\end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

5．点到平面的距离

点$M(x_0,y_0,z_0)$到平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$的距离为

$$d=\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

【例 5】求经过点$P(-1,-4,3)$并与两条直线$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\ x+3y+5=0\end{cases}$与$L_2:\begin{cases}x=2+4t\\ y=-1-t\\ z=-3+2t\end{cases}$都垂直的直线$L$的方程.

【答案】$\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{y+4}{46}=\dfrac{z-3}{-1}$.

【小结】求直线方程的关键在于求直线的方向向量，求直线的方向向量的关键是找与其垂直的向量.

【例 6】求过点 $(-1,2,3)$，垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

【答案】$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

【例 7】求与两条直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 和 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ 都平行且过原点的平面方程.

【答案】$x-y+z=0$.

【小结】求平面方程的关键在于求平面的法向量.

【例 8】求通过直线 $\begin{cases} x-2y-z+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-2y-z=0$ 垂直的平面方程.

【答案】$x+y-z-1=0$.

四、曲面

1．旋转曲面

（1）概念

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

（2）常见的旋转曲面求法

①设 L 是平面 xOz 上一条曲线，其方程为 $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$，将 L 绕 z 轴旋转得到的旋转曲面方程是 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

②由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 绕 z 轴旋转得到的旋转曲面方程为

$x^2+y^2=(x(\varphi(z)))^2+(y(\varphi(z)))^2$.其中，设 $z=z(t)$ 存在单值的反函数 $t=\varphi(z)$，$z\in Z$，Z 为 $z(t)$ 的值域.

【注】求旋转曲面方程关键是把握住变化中的不变量，以绕 z 轴为例，此时的不变量有两个：一是坐标 z 不变；二是曲线上的点到 z 轴的距离不变，也即 x^2+y^2 不变.

【例 9】求下列旋转曲面方程.

（1）$\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$，分别绕 x 轴和 y 轴；

（2）$\begin{cases} z=\sqrt{y} \\ x=0 \end{cases}$，分别绕 z 轴和 y 轴；

（3）直线 $L:\begin{cases} x=3-t \\ y=t-1 \\ z=1+2t \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程；

（4）A,B 两点的直角坐标分别为 $(1,0,0)$，$(0,1,1)$，求线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程.

【答案】（1）绕 x 轴：$x^2+4y^2+4z^2=1$，绕 y 轴：$x^2+4y^2+z^2=1$；

（2）绕 z 轴：$z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$，绕 y 轴：$y=x^2+z^2$；

（3）$x^2+z^2=(2-y)^2+(2y+3)^2$；

（4）$(z-1)^2+z^2=x^2+y^2(0\le z\le 1)$.

2．柱面

设Γ是一条空间曲线，L是一条直线，直线L沿Γ移动所得到的曲面叫柱面.其中Γ称为柱面的准线，L称为柱面的母线.

（1）若准线方程是$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，如果母线平行于$z$轴，则柱面方程为$f(x,y)=0$，如果母线方向为$\{l,m,n\}$，则柱面方程为$f\left(x-\dfrac{l}{n}z, y-\dfrac{m}{n}z\right)=0$.

（2）若准线方程是$x=f(t)$，$y=g(t)$，$z=h(t)$，如果母线方向为$\{l,m,n\}$，则柱面方程是$x=f\left(t\right)+lu,\ y=g\left(t\right)+mu,\ z=h\left(t\right)+nu$.

（3）若准线方程是$\begin{cases} f\left(x,y,z\right)=0 \\ g\left(x,y,z\right)=0 \end{cases}$，如果母线方向为$\{l,m,n\}$，则先在准线上任取一点$(x,y,z)$，则过点$(x,y,z)$的母线方程为$\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}$，其中$(X,Y,Z)$为母线上任意一点的活动坐标，消去方程组$\begin{cases} f\left(x,y,z\right)=0 \\ g\left(x,y,z\right)=0 \\ \dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n} \end{cases}$中的$x$，$y$，$z$就可以得到所需的柱面方程.

【例 10】设准线方程为$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=1 \end{cases}$，母线的方向向量为$\{-1,0,1\}$，求这个柱面方程.

【答案】$2(x-y+z+1)^2+8y^2+(x+y+z-1)^2=4$.

【小结】求柱面方程关键是把握不变的量，任意一点移动的向量均为母线的方向向量，即 $\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}$，再将 (x,y,z) 代入准线方程.

【例 11】设准线方程为 $L_1:\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=0\end{cases}$，母线平行于直线 $x=y=z$，求这个柱面方程.

【答案】$2y-2z-1=0$.

3．投影

（1）定义

经过空间曲线 Γ 的每一点都有平面 π 的一条垂线，所有的这些垂线构成一个柱面，称为 Γ 到平面 π 的**投影柱面**.投影柱面与平面 π 的交线称之为 Γ 到平面 π 的**投影曲线**.

（2）投影曲线的求法

求出通过空间曲线 Γ 且垂直于平面 π 的投影柱面方程 $\varphi(x,y,z)=0$，则投影曲线为

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \pi\text{ 的方程}\end{cases}.$$

空间曲线 $\begin{cases}F_1\left(x,y,z\right)=0\\F_2\left(x,y,z\right)=0\end{cases}$ 在坐标平面 xOy 上投影曲线的求法：

a. 从方程组$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$中消去$z$，得到一个母线平行于$z$轴的柱面$\varphi(x,y)=0$；

b. 将$\varphi(x,y)=0$与$z=0$联立，得到投影曲线的方程为$\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

类似地，可以求在坐标面yOz、zOx上的投影曲线.

【例 12】设曲线方程为$\begin{cases} 2x^2+4y+z^2=4z \\ x^2-8y+3z^2=12z \end{cases}$，求它在三个坐标面上的投影.

【答案】xOy面上的投影曲线为$\begin{cases} x^2+4y=0 \\ z=0 \end{cases}$；

xOz面上的投影曲线为$\begin{cases} x^2+z^2=4z \\ y=0 \end{cases}$；

yOz面上的投影曲线为$\begin{cases} z^2-4y=4z \\ x=0 \end{cases}$.

【例 13】求直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+2z-1=0$上的投影$l_0$的方程，并求$l_0$绕$y$轴旋转一周所成的曲面的方程.

【答案】l_0 的方程为$\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$；

旋转曲面的方程为$x^2+z^2=(2y)^2+\left(\frac{1}{2}(1-y)\right)^2$.

4．曲线的切线和曲面的切平面

（1）空间曲线的切线与法平面

设空间曲线Γ 的参数方程为：$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)(\alpha \le t \le \beta)$，假定这三个函数都在区间$[\alpha,\beta]$上可导.设$M(x_0,y_0,z_0)$是曲线上对应于$t=t_0$的一点，则曲线$\Gamma$ 在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线的方向向量与法平面的法向量为：$\{\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)\}$，

切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$；

法平面方程为：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

（2）空间曲面的切平面与法线

设空间曲面的方程为：$F(x,y,z)=0$，其中$M(x_0,y_0,z_0)$是曲面上一点，曲面在该点的切平面的法向量和法线的方向向量为：

$\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$；

切平面方程为：

$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$；

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$.

【例 14】求曲线$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$在点$\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$的切线及法平面方程.

【答案】切线方程：$\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$；

法平面方程：$x+y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi}{2}-4=0$.

【小结】①空间曲线$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)(\alpha \le t \le \beta)$切线的计算重点在于计算切线的方向向量$\{\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)\}$；

②空间曲线$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)(\alpha \le t \le \beta)$法平面的计算重点在于计算法平面的法向量$\{\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)\}$.

【例 15】求曲面$x^2+2y^2+3z^2=12$的平行于平面$x+4y+3z=0$的切平面方程.

【答案】$x+4y+3z\pm12=0$.

【小结】空间曲面 $F(x,y,z)=0$ 的切平面的计算重点在于计算切平面的法向量 $\left\{F'_x,F'_y,F'_z\right\}$.

模块十二　三重积分（*数学一）

一、基本概念

设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数.将 Ω 任意分成 n 个小闭区域 Δv_1，Δv_2，$\cdots$，Δv_n，其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积.在每个 Δv_i 上任取一点 $\left(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i\right)$，作乘积 $f\left(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i\right)\Delta v_i$（$i=1,2,...,n$），并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$.用 d_i 表示 Δv_i 的直径，当 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$ 趋于零时，如果和的极限总存在，且与闭区域 Ω 的分法及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，即：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i,$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数，dv 叫做体积元素，Ω 叫做积分区域.

【注】三重积分表示密度为 $f(x,y,z)$ 的空间几何体 Ω 的质量.三重积分的定义完全是二重积分定义的推广，本质上是一样的，故三重积分的性质与二重积分的性质类似.

二、基本性质

二重积分的所有性质都可以平行地移到三重积分中来，这里不再一一赘述.

三、计算方法

1．利用直角坐标系

利用直角坐标计算有两种情况："先一后二"和"先二后一".

"先一后二"法（以先对变量 z 积分为例）：

沿着 z 轴方向自下而上画一条直线，找到该直线与积分区域的上下两个交点，设这两个交点在 z 方向的坐标分别为 $z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$，则它们分别为积分变量 z 的上下限；然后再找出积分区域在 xOy 平面上的投影 D_{xy}，则该三重积分可表示为 $\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.其中，计算二重积分时可选用直角坐标也可以选用极坐标；如选用极坐标，则该积分坐标又称为柱面坐标.

"先二后一"法（以最后对变量 z 积分为例）：

作一个垂直于 z 轴的平面，找到该平面与积分区域截面在 xOy 平面上的投影 D_z，则计算二重积分时的积分区域即为 D_z；再确定 z 的上下限 a，b 即可.此时三重积分可表示 $\int_a^b dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$.

【例 1】计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le 2z, z\le 2\right\}$.

【答案】 $\dfrac{16}{3}\pi$.

【小结】（1）当被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 的形式，且积分区域是由旋转曲面围成时，一般采取"先二后一"法进行计算；

（2）使用"先二后一"法的关键是确定第一步二重积分的积分区域，方法是作一个与 z 轴垂直的平面，找出该平面在积分区域上的截面.

【例 2】计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)^2dxdydz$，其中$\Omega$是由$z=x^2+y^2$，$z=1$，$z=2$围成.

【答案】$\frac{5}{4}\pi$.

【例 3】计算$I=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，中$\Omega$是由平面$x+y+z=1$与三坐标平面所围成.

【答案】$\frac{1}{24}$.

【小结】当被积函数为$f(z)$，且当积分区域截面容易计算面积时，也可以考虑使用“先二后一”进行计算.

【例 4】已知点A和点B的直角坐标分别为$(1,0,0)$，$(0,1,1)$，线段AB绕z轴旋转一周所成的旋转曲面为S，求由S及两平面$z=0$，$z=1$所围成立体的体积.

【答案】$\frac{2}{3}\pi$.

【例 5】设 $f(u)$ 连续，Ω_t 为空间 $\Omega_t=\{(x,y,z)\big|0\le z\le h,x^2+y^2\le t^2\}$，令

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$，求 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

【答案】$\pi\left(\frac{1}{3}h^3+f(0)h\right)$.

2．利用球面坐标系

球面坐标简介：球面坐标通过三个变量来确定三维空间中的点.其中 r 为点到原点的距离，确定了该距离后，该点就被限制在了一个以原点为球心、r 为半径的球面上；$\theta(0\le\theta\le2\pi)$ 和 $\varphi(0\le\varphi\le\pi)$ 是两个角度：将 xOy 平面 $x>0$ 部分的半平面逆时针旋转，当旋转到经过该点时，所转过的角度即为 θ，可见，θ 的作用类似于地球仪上的经度；将该点与原点连接，该连线与 z 轴正半轴的夹角即为 φ，可见 φ 的作用类似于纬度（只不过这个纬度是以北纬 90 度作为 0 度的）.

它与直角坐标系的转换公式为

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}，dxdydz=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

三重积分球面坐标转换公式：

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

【注】球面坐标适用范围：积分区域为球或与球相关（球体的一部分，锥体等）的区域；

被积函数为 $f\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 或与 $f\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 相关（$f\left(x^2+y^2\right)$、$f(z)$ 等）的情况.

【例 6】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=1$，$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成.

【答案】$\dfrac{\pi}{20}$.

【小结】球面坐标定限的一般方法：

1）画一条从原点出发的射线，使其穿过积分区域，找出积分区域和该射线相交的部分（结合图像）.在相交的这一段上，找出 r 的最大值和最小值，即为 r 的积分上下限.

2）φ 的积分上下限，就是使得该射线在积分区域与 z 轴正方向的最大角和最小角；θ 的积分上下限，就是该射线在 xoy 平面的投影与 x 轴正方向的最大角和最小角.

【例 7】$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$ 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 所围成的闭区域.

【答案】$\dfrac{4\pi a^4}{3}$.

【例 8】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(2y+\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=4a^2$ 和 $x^2+y^2-z^2=0$ 围成.

【答案】$\dfrac{15\pi(\pi-2)a^4}{8}$.

【小结】在使用球面坐标时，锥面的作用一般是限制 φ 的取值范围.

3．利用对称性

三重积分与二重积分有相同的对称性，对称性包括奇偶性和轮换对称性两大类：

（1）奇偶性：若积分区域关于坐标平面 xOy 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\begin{cases} 0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z), \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,-z)=f(x,y,z), \end{cases}$$

其中 Ω_1 为积分区域 Ω 位于坐标平面 xOy 上方区域；

若积分区域关于坐标平面 yOz 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\begin{cases} 0, & f(-x,y,z)=-f(x,y,z), \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(-x,y,z)=f(x,y,z), \end{cases}$$

其中 Ω_1 为积分区域 Ω 位于坐标平面 yOz 前方区域.

若积分区域关于坐标平面 zOx 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\begin{cases} 0, & f(x,-y,z)=-f(x,y,z), \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,-y,z)=f(x,y,z), \end{cases}$$

其中Ω_1为积分区域Ω位于坐标平面zOx右方区域.

（2）轮换对称性：若积分区域关于平面 $y=x$ 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dv\text{；}$$

若积分区域关于平面$y=z$对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(x,z,y)dv\text{；}$$

若积分区域关于平面$x=z$对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z,y,x)dv.$$

【例 9】求$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$， 其中$\Omega: z\geq\sqrt{x^2+y^2}, z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}$.

【答案】$\dfrac{\pi}{8}$.

【小结】当积分区域关于某一个坐标平面对称时，要优先考虑借助函数的奇偶性化简积分.

【例 10】求$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)dxdydz$，其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 2z$.

【答案】$\frac{32}{15}\pi$.

【例 11】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$，其中 Ω 为由平面 $x+y+z=1$ 及三坐标面所围之区域.

【答案】$\frac{1}{8}$.

【小结】(1) 如果被积区域关于平面 $y=x$ 或者 $y=z$ 或 $z=x$ 对称，要优先考虑使用轮换性化简.

(2) 判断被积区域是否关于 $y=x$ 或者 $y=z$ 或 $z=x$ 对称只要观察表示被积区域的方程或者不等式是否具有轮换对称性.

【例 12】求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z+1)^2dxdydz$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$.

【答案】$\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^3$.

模块一　行列式

一、基本概念

1．排列与逆序

（1）n 级排列

由$1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n **级排列**.

（2）逆序

在一个排列中，如果一个较大数排在一个较小数前面，则称这两个数构成一个**逆序**；一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 排列$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数记作

$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

2．行列式

n 阶行列式的定义：阵中所有取自**不同行不同列**的 n 个元素乘积的**代数和**.它的数学表达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} .$$

【注】①行列式的本质是一个运算法则，其计算结果是一个数.从 n 阶行列式中的 n^2 个数中取出 n 个元素，这 n 个元素必须是取自不同行不同列的，将这 n 个元素按照行指标从1到 n 的自然顺序排列起来，根据此时列指标的排列顺序是奇排列还是偶排列决定加上负号还是正号，最后，将所有这样的 n 个元素乘积加起来，所得到的计算结果就是行列式的值.

②利用行列式的定义可推导出如下低阶行列式的计算公式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc；$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 .$$

【例 1】试用定义推导下三角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的计算公式.

【答案】 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

【小结】①如下几种形式的上、下三角行列式的公式需要各位考生记忆

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}；$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} .$$

②利用基本性质将行列式化为上、下三角行列式是计算数值型行列式的一种重要的方法.

二、基本性质

性质一：行列互换，行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】该性质表明行列式中行与列具有同等的地位. 因此，凡是有关行的性质，对列也同样成立.

性质二：互换行列式的两行（列），行列式变号.

推论1：如果行列式有两行（列）相同，则此行列式为零.

性质三：行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

推论2：如果行列式的某一行（列）所有元素全为零，则此行列式为零.

推论3：如果行列式有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

性质四：设行列式某一行（列）的所有元素都可以写成两个元素的和，则该行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式的这一行（列）分别对应两组加数，其余行（列）与原行列式相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论4：将行列式的某一行（列）各元素的 k 倍加到另一行（列）对应的元素上，行列式不变.

【例 2】计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & 8a_1-2b_1 & 2a_1+8b_1 \\ a_2+b_2 & 8a_2-2b_2 & 2a_2+8b_2 \\ a_3+b_3 & 8a_3-2b_3 & 2a_3+8b_3 \end{vmatrix}$.

【答案】0.

【例 3】计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

【答案】1.

三、展开定理

1. 余子式与代数余子式

将n阶行列式中元素a_{ij}所在的第i行与第j列划掉之后得到的$n-1$阶行列式，称之为元素a_{ij}的**余子式**，记作M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

余子式M_{ij}加上符号$(-1)^{i+j}$则成为**代数余子式**，记作$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

【注】余子式也是行列式，阶数比原来的行列式要低一阶.

2．展开定理

行列式的值等于其任何一行（列）所有元素与其代数余子式乘积之和，即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\ ,(i,j=1,2,\cdots,n).$$

【注】行列式某元素的余子式和代数余子式与元素的值无关，只与该元素的位置有关.

推论：行列式的一行（列）所有元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \ (j \neq k).$$

【例 4】计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

【答案】（1）$1-a^4$；（2）-72.

【小结】①对行列式来说，阶数越低越有利于计算，这在低阶行列式的计算中尤为明显（降低一阶会导致计算难度成倍降低），所以低阶行列式的计算中最基本的思想是通过展开定理进行降阶.

②为了充分简化计算，一般要求所展开的行或列仅有一到两个非零元，所以运用展开定理的关键在于展开之前的准备工作，要先借助行列式的性质“化零”.

【例 5】设$|A|=\begin{vmatrix}2&1&2&2\\-3&2&1&4\\1&1&2&2\\1&2&1&1\end{vmatrix}$.（1）试求$|A|$；（2）$\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}+2\boldsymbol{A}_{23}+2\boldsymbol{A}_{24}$；（3）求$-M_{41}+M_{42}-M_{43}+M_{44}$.

【答案】（1）-9；（2）0；（3）-3.

四、数值型行列式的常考题型

1．低阶行列式的计算

【例 6】计算行列式$\begin{vmatrix}2&3&2&1\\3&4&0&2\\6&5&3&3\\3&2&5&-1\end{vmatrix}$.

【答案】37.

【例 7】计算行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix}$.

【答案】（1）2；（2）288.

【小结】①范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i).$$

②范德蒙行列式包括“横式”（每行元素成等比数列）和“竖式”（每列元素成等比数列）两种形式，如果行列式中各行或各列整体或大部分是成等比数列的，就可以考虑用范德蒙行列式进行计算.一般情况下，题目中所给的行列式往往需要考生先对行列式进行简单的变形才能进行计算，变形的基本方向如下：先将每行（“横式”）或每列（“竖式”）化为等比数列，再在每行或每列提出公因子，将第一个元素化为1，随后即可直接运用范德蒙行列式进行计算.

【例 8】计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$

【答案】-12.

2．高阶行列式的计算

【例 9】计算行列式$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

【答案】$(n-1)!$.

【小结】本题的计算方法可以推广，考生用类似的方法不难计算形如

$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$的行列式.我们把这种类型的行列式形象地称为**“爪形”**行列式，它们的计算方法都是把对角线以上或以下的元素全化为0，成为上三角或下三角行列式，也即所谓的**“三角化”**.

模块二　矩阵

一、矩阵及其运算

1．矩阵

（1）矩阵

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排列成的 m 行 n 列数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元. 以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的矩阵可简记 $(a_{ij})_{m\times n}$； $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

（2）实矩阵

元素是实数的矩阵称为实矩阵，讲义中若无特殊说明，皆指实矩阵.

（3）方阵

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，记作 $\boldsymbol{A}_n$.

（4）同型矩阵

两矩阵的行数相等、列数也相等，则称它们是**同型矩阵**. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

【注】要注意区分矩阵与行列式.

首先，从概念上讲，行列式是一个数，而矩阵是一个数表，二者从本质上是不一样的；其次，从形式上讲，行列式中行数和列数必须相同（必须是正方形的），而矩阵的行数和列数可以是任意的.

2．常见矩阵

在 n 阶矩阵中，从左上角到右下角的直线叫做**主对角线**，即行号和列号相等的元素.

（1）**零矩阵**：所有元素均为0的矩阵称之为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}$.

（2）**对角矩阵**：主对角线以外的元素均为0的 n 阶矩阵称之为**对角矩阵**.

（3）**数量矩阵**：主对角线上的元素均相等的对角矩阵称之为**数量矩阵**.

（4）**单位矩阵**：主对角线上元素均为1，其余元素均为0的 n 阶矩阵称之为单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}$.

（5）上（下）**三角矩阵**：主对角线以下的元素全为0的矩阵称之为**上三角矩阵**；主对角线以上的元素全为0的矩阵称之为**下三角矩阵**.

（6）**对称矩阵**：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 等于 $\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 等于 $-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵. 显然，反对称矩阵的对角线元素全为零.

（7）**正交矩阵**：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

3．矩阵的运算

（1）加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，定义矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

【注】相加的两个矩阵必须是同型的.

（2）数乘

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，k 为任意常数，则定义

$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，称之为矩阵的数乘.

（3）矩阵乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times k}$（注意 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等），定义矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times k}$，

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，则定义 $\boldsymbol{A}^n=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{n个\boldsymbol{A}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂.

【注】①不是任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都能相乘的，必须有 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，矩阵乘法 $\boldsymbol{AB}$ 才能进行.

②矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘的结果仍然是矩阵，其第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列的元素对应相乘再相加的结果.

（4）转置

转置就是将矩阵原先的行换为对应的列.

【例 1】设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&4&8\\1&2&4\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

【答案】9.

【例 2】设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}n&n-1&\cdots&1\\n&n-1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n-1&\cdots&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$.

【答案】$\dfrac{n(n+1)}{2}$.

【小结】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维列向量（$n\times1$ 矩阵），则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 为常数，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 为矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 主对角线元素的和（矩阵 A 的主对角线元素的和称为迹，表示为 $tr(\boldsymbol{A})$）.

二、运算法则

1．加法与数乘

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，

$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$，$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B},(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

2．转置

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

3．乘法

（1）成立的运算法则

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$，

$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^{m+n}$，$(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}$.

（2）不成立的运算法则

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}\neq>\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\neq>\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

【例 3】设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，并且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为对称正交矩阵.

【例 4】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&8&12\\6&12&18\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【答案】$28^{n-1}\boldsymbol{A}$.

【小结】本题用到了矩阵乘法的结合律，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 各行各列元素均成比例时，$\boldsymbol{A}^n=[tr(A)]^{n-1}\boldsymbol{A}$.考生可以记住该结论，同时还要掌握其推理过程.

【例 5】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&3&2\\2&8&6&4\\1&4&3&2\\3&12&9&6\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【答案】$18^{n-1}\boldsymbol{A}$.

【例 6】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$.

【答案】$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

【小结】若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{bmatrix}$，同理可以得到 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ac&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

【例 7】设 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$（$n \geq 3$）.

【答案】$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n \cdot 2^{n-1} & 2^n & 0 \\ (n^2+5n)2^{n-2} & n \cdot 2^n & 2^n \end{bmatrix}$.

【小结】

①本题计算 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^n$ 时用到了二项式定理，这是因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 是可交换的.

在矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时，二项式展开定理为：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B}^{n-k}$.

②本题的方法适用于所有形如 $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 \\ c & b & \lambda \end{bmatrix}$（或 $\begin{bmatrix} \lambda & a & c \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$）的矩阵，计算步骤：首先将该矩阵分解为 $\lambda \boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{bmatrix}$，再利用二项式定理计算该矩阵的 n 次幂，由于 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{bmatrix}^3 = \boldsymbol{O}$，故利用二项式定理展开之后最多只需计算前三项即可.

三、分块矩阵

用水平和垂直的直线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成很多小块，每一块称之为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 称为以这些子矩阵为元素的**分块矩阵**.

1. 第一种常见的分块方式是将矩阵分为4块，即如下形式的矩阵：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

对分块矩阵也有相应的加法、数乘、乘法、转置四种运算

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}, k\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k\boldsymbol{A} & k\boldsymbol{B} \\ k\boldsymbol{C} & k\boldsymbol{D} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

【注】一般来说，当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中至少有一块为零矩阵时，对矩阵进行分块可以起到简化计算的作用.例如：设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 均为同阶方阵，则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{D} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^n \end{bmatrix}.$$

2. 另一种常见的分块方式，是将矩阵按列或按行分块.

也即将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 或 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 分别代表矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和行向量组.

这种情况下的加法、数乘和转置运算和前面类似，我们着重讲一下乘法：

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 $n\times m$ 矩阵，则

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_n),$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

【例 8】设 $A=\begin{bmatrix}1&3&0&0&0\\2&6&0&0&0\\0&0&2&2&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}$，求 A^n（$n\geq 3$）.

【答案】$A^n=\begin{bmatrix}B^n&O\\O&C^n\end{bmatrix}$，其中 $B^n=\begin{bmatrix}7^{n-1}&3\times 7^{n-1}\\2\times 7^{n-1}&6\times 7^{n-1}\end{bmatrix}$，

$$C^n=\begin{bmatrix}2^n&n2^n&3n(n-1)2^{n-2}\\0&2^n&3n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{bmatrix}.$$

四、方阵的行列式

1．设 A,B 为 n 阶方阵，且 k 为一常数，则有

$$|A|=|A^{\mathrm{T}}|，|kA|=k^n|A|,|AB|=|A||B|.$$

2．设 A,B 分别为 m 阶，n 阶方阵，则有

$$\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|，\begin{vmatrix}C&B\\A&O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O&B\\A&C\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|.$$

此公式又称为**拉普拉斯展开定理**.

【例 9】求$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & b_3 & 0 & a_3 \\ b_4 & 0 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$.

【答案】$(b_1b_4-a_1a_4)(a_2a_3-b_2b_3)$.

【小结】①拉普拉斯展开式在行列式计算中的作用与行列式的展开定理类似，都是将行列式降阶，进而降低计算难度，它降阶的速度往往比展开定理更快.

②一般来说，当行列式中有较多的零时，就可以考虑利用行列式的性质将零集中起来，组成分块矩阵再进行计算.

【例 10】4 阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$均为 4 维列向量，且已知行列式$|\boldsymbol{A}|=4,|\boldsymbol{B}|=1$，计算行列式$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|$.

【答案】162.

【小结】如果矩阵是按列分块的，计算其行列式的第一个基本思路就是利用行列式的性质对矩阵做列变换，将行列式化简.

【例 11】设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\gamma})$，$|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，计算行列式$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

【答案】$\frac{b}{2}-a$.

【例 12】3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3),|\boldsymbol{A}|=3$，计算行列式 $|\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_1,-2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_1|$.

【答案】18.

【例 13】3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$|\boldsymbol{A}|=a$，计算行列式

$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+9\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3|$.

【答案】$6a$.

【小结】若题目中出现了 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$，要马上想到运用

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$，将 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 进行分解变形为两个矩阵的乘积.这样变形的本质是分块矩阵乘法 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 的反向应用.

【例 14】设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$，且满足

$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$，求矩阵 $|\boldsymbol{A}|$ 的行列式.

【答案】2.

【例 15】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，求 $|\boldsymbol{B}|$.

【答案】4.

【小结】若题目中给出矩阵方程的形式，化简为矩阵相乘（$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$）的形式然后两边同时取行列式.

【例 16】设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶正交矩阵（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$），满足 $|\boldsymbol{A}|<0$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=4$，试计算 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$.

【答案】-4.

【小结】求和式的行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 时需转化为矩阵相乘求行列式的形式，这种情况下一般会用到 $\boldsymbol{E}$ 的变形.

模块三　逆矩阵与初等矩阵

一、基本概念

对于一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵**，并称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

【注】要注意逆矩阵中要求矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵，同时要求 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$. 因此仅从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 不能断定 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

二、基本性质

性质一：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 唯一.

证明：

性质二：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 均可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

性质三：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

推广：$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^n)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^n$.

性质四：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $k\neq0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

性质五：若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1$.

性质六：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 均可逆且 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

三、矩阵可逆的充要条件

1．伴随矩阵

设 A_{ij} 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 元素 a_{ij} 的代数余子式，定义

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

【注】伴随矩阵是对方阵定义的，其中**代数余子式**的排列顺序里行和列是相反的，即 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 行的元素是 $\boldsymbol{A}$ 第 i 列元素对应的代数余子式.

【例1】计算下列矩阵的伴随矩阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

【答案】（1）$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$；（2）$\boldsymbol{B}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

2．伴随矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为它的伴随矩阵，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

【证明】

【小结】这是伴随矩阵最重要的性质，该公式不但是解决与伴随矩阵相关问题的关键，更重要的还在于它可以推出矩阵可逆的充要条件.

3．矩阵可逆的充要条件

定理：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

【证明】

推论：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，那么当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 时，有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

【证明】

【注】该定理的意义在于将计算或者验证逆矩阵的工作减少了一半，只需说明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 即可，但在使用该定理时一定要注意 $\boldsymbol{A}$ 必须为方阵.

四、常考题型

1．可逆的充要条件

【例 2】证明:奇数阶反对称矩阵不可逆.

【小结】矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

2．求逆矩阵

【例 3】计算下列矩阵的逆矩阵

（1）$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}$；　　（2）$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$.

【答案】（1）$\begin{bmatrix}-5&3\\2&-1\end{bmatrix}$　（2）$\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&4&-1\\2&3&-1\end{bmatrix}$.

【小结】对于**数值型**的矩阵，求其逆矩阵常用的方法是利用伴随矩阵和初等行变换.

①利用伴随矩阵：公式 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$ 通常用于计算二阶矩阵的逆矩阵；

②利用初等行变换：设 A 为三阶或三阶以上的可逆矩阵，我们可以通过初等行变换来计算其逆矩阵. 对分块矩阵 $(A\quad E)$ 做初等行变换，将矩阵 A 化为 E，此时的 E 就化为了 A^{-1}，也即 $(A\quad E)\xrightarrow{行}(E\quad A^{-1})$，需要注意的是只能做行变换.

【例 4】已知 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&2&7\\1&2&0&0\\2&3&0&0\end{bmatrix}$，求 A^{-1}.

【答案】$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

【例 5】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求$\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)^{-1}$.

【答案】$-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})$.

【例 6】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

【答案】$\frac{1}{9}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2$.

【例 7】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$，求 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

【答案】$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$.

【例 8】设 $A,B,A+B,A+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B)^{-1}=$__________.

（A）$A^{-1}+B$　（B）$A+B^{-1}$　（C）$A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1}$　（D）$(A+B^{-1})^{-1}$

【答案】（C）

【小结】对于**抽象型矩阵**，求其逆矩阵一般的方法是利用矩阵可逆的定义及性质.

①利用定义：设 A 为 n 阶方阵，如果能得到 $AB=E$ 或 $BA=E$，则有 $A^{-1}=B$.这是计算抽象矩阵逆矩阵最常用的方法，一般来说，当题目中给出了相关矩阵的等式时，就可以通过相关运算法则进行变形，从而凑出等式 $AB=E$ 或 $BA=E$.

②利用相关性质：一般来说，我们在利用定义计算逆矩阵时，还会结合逆矩阵的相关性质，考生要熟练掌握相关的公式，灵活运用. 需要注意的是，我们没有总结的公式考生不能随便使用，例如 $A+B$，$A-B$ 等矩阵的逆矩阵是没有直接的计算公式的.

3．利用可逆性求解矩阵方程

【例9】设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+4E=A^2+2X$，试求矩阵 X.

【答案】$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

【例 10】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【答案】 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【小结】一般来说，矩阵方程最终可能化为如下三种情况之一：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$.若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则其求解方法分别为：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CA}^{-1}$，$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.先计算出相应的逆矩阵，再做矩阵的乘法即可.

4．伴随矩阵

【例 11】（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$__________；

（2）设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{B}^{-1})^*=$__________.

【答案】（1）$\boldsymbol{A}$；（2）$\dfrac{1}{6}\boldsymbol{B}$.

【小结】已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

【例 12】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为（ ）

（A）$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

【答案】（B）.

【例 13】知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有代数余子式之和 $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{4}A_{ij}$.

【答案】0.

【小结】求代数余子式之和时，可转化为求 $\boldsymbol{A}^*$ 来求解.

【例 14】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：$\left|\boldsymbol{A}^*\right|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

【小结】①与伴随矩阵相关的考题是本章考试的难点之一，一般来说，我们在处理伴随矩阵的时候有两个思路：如果已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则用公式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆未知，则使用伴随矩阵的定义或公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

② $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是矩阵常见的三种运算，现将其相关公式总结如下

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\left\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right\|=\|\boldsymbol{A}\|$	$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|=\|\boldsymbol{A}\|^{-1}$	$(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
$\boldsymbol{A}^*$	$\left\|\boldsymbol{A}^*\right\|=\|\boldsymbol{A}\|^{n-1}$	$(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$	$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*=\|\boldsymbol{A}\|^{n-2}\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

【例 15】已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，证明：$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

5．矩阵可交换的讨论

【例 16】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则下列等式中不成立的是（　　）

（A）$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+(\boldsymbol{A}^{-1})^2$

（B）$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2$

（C）$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{*})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}+(\boldsymbol{A}^{*})^2$

（D）$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^2$

【答案】（B）.

【小结】与 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵的类型是比较有限的，主要包括三部分：一是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 自身；二是单位矩阵以及单位矩阵的倍数（数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$）；三是逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$.

【例 17】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}$，则有（　　）

（A）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$　　（B）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$　　（C）$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$　　（D）$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{E}$

【答案】（D）.

五、初等矩阵

1．定义

对矩阵可以做如下三种**初等行（列）变换**：

（1）交换矩阵的两行（列）；

（2）将一个非零数k乘到矩阵的某一行（列）；

（3）将矩阵的某一行（列）的k倍加到另一行（列）上.

对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵称之为**初等矩阵**. 由于初等变换有三种，初等矩阵也就有三种：

交换单位矩阵的第i行和第j行得到的初等矩阵记作$\boldsymbol{E}_{ij}$，该矩阵也可以看做交换单位矩阵的第i列和第j列得到的. 如$\boldsymbol{E}_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

将一个非零数k乘到单位矩阵的第i行得到的初等矩阵记作$\boldsymbol{E}_i(k)$，该矩阵也可以看做将单位矩阵第i列乘以非零数k得到的. 如$\boldsymbol{E}_2(-5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

将单位矩阵的第j行的k倍加到第i行上得到的初等矩阵记作$\boldsymbol{E}_{ij}(k)$，该矩阵也可以看做将单位矩阵的第i列的k倍加到第j列上得到的. 如$\boldsymbol{E}_{32}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$.

【注】①初等矩阵都只能是对单位矩阵做**一次**初等变换之后得到的.

②对每个初等矩阵，都要从行和列的两个角度来理解它，这在上面的定义中已经说明了.

2．重要定理

定理1：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个初等矩阵，等于对 $\boldsymbol{A}$ 作相应的初等行变换；对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个初等矩阵，等于对 $\boldsymbol{A}$ 作相应的初等列变换.

【注】本定理是初等矩阵的核心考点，可以把它简记作“左行右列”的法则.

推论：所有初等矩阵都是可逆的，并且它们的逆矩阵均为同类的初等矩阵. 具体来说，有

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}，\left(\boldsymbol{E}_i(k)\right)^{-1}=\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right)，(\boldsymbol{E}_{ij}(k))^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}(-k).$$

定理2：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是它能表示成有限个初等矩阵的乘积，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\ldots\boldsymbol{P}_m$，

其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_m$ 均为初等矩阵.

推论：左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等于做若干次初等行变换，右乘可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等于做若干次初等列变换.

【例 18】 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行加到第一行得到 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第一列的 -1 倍加到第二列得到 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则（　　）

（A）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　（B）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$

（C）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　（D）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{T}$

【答案】B.

【例 19】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，且 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为（　　）

（A）$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

【答案】（A）.

【例 20】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行得到 $\boldsymbol{B}$，又设 $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则有（　　）

（A）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一列与第二列得 $\boldsymbol{B}^*$　（B）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 第一行与第二行得 $\boldsymbol{B}^*$

（C）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一列与第二列得 $-\boldsymbol{B}^*$　（D）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 第一行与第二行得 $-\boldsymbol{B}^*$

【答案】（C）.

3．矩阵等价

设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

定理：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价当且仅当存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

推论：任何 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是它与同阶的单位矩阵等价.

模块四　线性方程组

一、基本概念

1．线性方程组

方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$称为$m$个方程，$n$个未知量的**线性方程组**.

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$为未知数，$b_1,b_2,\cdots,b_m$为常数项.

如果常数项$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，则称该方程组为**齐次线性方程组**.相应地，如果$b_1,b_2,\cdots,b_m$不全为零，则称该方程组为**非齐次线性方程组**，将任一非齐次线性方程组的常数项改为零所得到的齐次线性方程组称为原方程组的**导出组**.

【注】①对于线性方程组我们有三个基本的问题：是否有解（解的存在性）；有解时，解是否唯一（解的唯一性）；解不唯一的时侯，怎么表示所有的解（解的结构）.线性方程组的内容都是围绕这三个问题展开的，在本模块先讨论前两个问题，线性方程组解的结构将在后续模块进行讨论.

②齐次线性方程组的特殊性在于它肯定是有解的：直接令$x_1=x_2=...=x_n=0$即可.换句话说，齐次线性方程组一定是有零解的.因此，对齐次方程组，解的存在性是不用讨论的，需要讨论的只有解的唯一性和通解的表示.其中，解的唯一性的问题又称为是否有非零解的问题（解唯一对应无非零解，解不唯一对应有非零解）.

2．线性方程组的矩阵表示

由线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$的系数构成的$m\times n$矩阵

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$称为该线性方程组的**系数矩阵**.由线性方程组的系数矩阵和

常数项构成的$m\times(n+1)$矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$称为该线性方程组的

增广矩阵.

如果令$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，利用矩阵的乘法，我们可以将原线性方程组简写为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

【注】非齐次线性方程组由其增广矩阵唯一确定，而齐次线性方程组则是由其系数矩阵唯一确定的.

二、高斯消元法

1．线性方程组的初等变换

我们对线性方程组可以作如下的三种变换：

（1）将一个非零常数k乘到一个方程的两端；

（2）将一个方程的若干倍加到另一个方程上；

（3）交换两个方程的位置.

我们将线性方程组的这三种变换称之为线性方程组的**初等变换**.对方程组做初等变换得

到的新的线性方程组与原来的线性方程组是同解的.易知，对线性方程组做初等变换等价于对增广矩阵做相应的初等行变换.

【注】由于齐次线性方程组的常数项恒为零，我们在对其做初等变换时只需对它的系数矩阵做相应的初等行变换.

2．高斯消元法

我们对线性方程组作初等变换的目的是为了将其化为与之同解的如下形式的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}'x_1+a_{12}'x_2+a_{13}'x_3+\dots+a_{1n}'x_n=b_1' \\ \qquad a_{22}'x_2+a_{23}'x_3+\dots+a_{2n}'x_n=b_2' \\ \qquad\qquad a_{33}'x_3+\dots+a_{3n}'x_n=b_3' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}'x_k+\dots+a_{mn}'x_n=b_k' \end{cases}$$

在该方程组中，每一个方程都至少比上一个方程少一个未知量，这种方程组称为**阶梯形方程组**.在阶梯形方程组中，每一行的第一个未知量称为**主元**，其余的未知量称为**自由变量**.阶梯形方程组的解是比较容易求得的.将线性方程组通过初等变换化为同解的阶梯形方程组的过程就称之为**高斯消元法**.

易知，利用高斯消元法求解线性方程组就等价于利用初等行变换将线性方程组的增广矩阵化为阶梯形矩阵.

【注】①高斯消元法示例：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+4x_3=7 \\ x_1+3x_2+9x_3=13 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ \quad x_2+3x_3=4 \\ \quad 2x_2+8x_3=10 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ \quad x_2+3x_3=4 \\ \qquad x_3=1 \end{cases}.$$

从最后一个线性方程组中不难求出原线性方程组的解为$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=1 \end{cases}$.

②高斯消元法的矩阵形式

对上述的线性方程组，其求解过程等价于对其增广矩阵作如下的变换：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&2&4&7\\1&3&9&13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&1&3&4\\0&2&8&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&1&3&4\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

再将最后的增广矩阵还原为线性方程组同样可以求出原方程组的解.不难看出该求解过程更为简洁.

【例 1】讨论下列线性方程组的解存在性

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=2\\2x_1+2x_2+x_3=3\\3x_1+4x_2+3x_3=4\end{cases}$；

（2）$\begin{cases}x_1+3x_3=1\\2x_1+x_2+7x_3=4\\-x_1+2x_2-x_3=3\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=-4\\x_2-x_3=2\\x_1-x_2+2x_3=-5\end{cases}$.

【答案】（1）有唯一解；（2）无穷多解；（3）无解.

三、解的判定定理

1．非齐次线性方程组

定理：用高斯消元法将 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 化为阶梯形线性方程组后，如果不出现矛盾方程 $0=d(d\neq 0)$，则该线性方程组有解；如果出现矛盾方程 $0=d(d\neq 0)$，则该线性方程组无解.

在线性方程组有解的前提下，如果阶梯形方程组中非零方程（有效方程）的个数等于未知量个数，则其解唯一；如果非零方程（有效方程）的个数小于未知量个数，则其解有无穷多个.

2．齐次线性方程组

定理：用高斯消元法将齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 化为阶梯形线性方程组后，如果阶梯形方程组中非零方程（有效方程）的个数等于未知量个数，则仅有零解；如果非零方程（有效方程）的个数小于未知量个数，则有非零解.

推论：如果齐次线性方程组的方程个数小于未知量个数，则必有非零解.

【例 2】已知线性方程组 $\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1\\ ax_2-3x_3=3\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$ 有无穷多解，求 a.

【答案】$a=-3$.

【例 3】讨论齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+ax_4=0 \\ 3x_1+ax_3+6x_4=0 \\ 4x_1-x_2+9x_3+13x_4=0 \end{cases}$是否有非零解.

【答案】当$a\neq -1$且$a\neq 6$时，方程组仅有零解；当$a=-1$或$a=6$时，方程组有非零解.

模块五 向量

一、基本概念

1．向量的概念与运算

（1）向量的概念

由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的 n 元有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称之为 n 维**行向量**，这 n 个数称为向量的 n 个**分量**.如果该数组是纵向排列的：$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，则称其为 n 维**列向量**.

由多个同型向量（维数相同且都为行向量或列向量）组成的集合称之为**向量组**.

【注】两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 相等当且仅当它们同型且各分量相等.

（2）向量的运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则可以定义如下运算：

转置： $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，通常也习惯把列向量写成 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

向量加法： $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$.

向量数乘： $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}$.

【注】向量也可以看作矩阵，向量的运算也可以看作矩阵相应的运算，矩阵运算中的运算法则在向量里仍然适用.

2．线性表示

（1）线性组合

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是$m$个$n$维向量，$k_1,k_2,\cdots,k_m$是$m$个数，则称$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的一个**线性组合**.

（2）线性表示

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是$m$个$n$维向量，$\boldsymbol{\beta}$是一个$n$维向量，如果$\boldsymbol{\beta}$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的一个线性组合，则称向量$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性表示**.

该定义也可以等价地描述为：存在数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$.

【注】①零向量可以由任何同型向量组线性表示；

②$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,m)$一定可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示；

③任何n维向量都可以由n维基本单位向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性表示.

（3）与线性方程组的关系

定理：向量$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示$\Leftrightarrow$线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$有解.

（4）向量组的线性表示

设有向量组（$\boldsymbol{I}$）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组（$\boldsymbol{II}$）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，如果向量组（$\boldsymbol{I}$）中的每一个向量都能由向量组（$\boldsymbol{II}$）线性表示，则称向量组（$\boldsymbol{I}$）能由向量组（$\boldsymbol{II}$）**线性表示**.如果向量组（$\boldsymbol{I}$）与向量组（$\boldsymbol{II}$）能够相互线性表示，则称向量组（$\boldsymbol{I}$）与向量组（$\boldsymbol{II}$）**等价**，记作向量组（$\boldsymbol{I}$）$\cong$向量组（$\boldsymbol{II}$）.

【例 1】判断向量$\boldsymbol{\beta}$是否能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,0,1)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,-1,2)^{\mathrm{T}}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,-3,9)^{\mathrm{T}}$.

【答案】（1）$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

（2）$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；

（3）$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

【小结】对于具体的向量组，要判断$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，一般结合线性方程组：$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示$\Leftrightarrow$线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有解，并且$\boldsymbol{\beta}$由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示的方式与线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的解是一一对应的.

3．线性相关

（1）线性相关与线性无关

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是$m$个$n$维向量，如果存在**不全为零**的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得：

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性相关**，否则称该向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性无关**.

线性无关也可以等价的描述为：当且仅当$k_1,k_2,\cdots,k_m$全为零时，才能使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$成立.

（2）与线性方程组的关系

定理：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}$有非零解.

【例 2】已知n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关，若存在常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则必有（　　）

（A）$k_1,k_2,\cdots,k_m$全为零

（B）$k_1,k_2,\cdots,k_m$全不为零

（C）$k_1,k_2,\cdots,k_m$恰有$m-1$个为零

（D）$k_1,k_2,\cdots,k_m$要么全为零，要么全不为零

【答案】（D）.

【例 3】判断下列向量组的线性相关性.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(5,4,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-2,-5)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$.

【答案】（1）线性无关；

（2）当$t\neq 5$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；当$t=5$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

【小结】对于具体的向量组，要判断线性相关性，一般结合线性方程组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解.

二、常用公式定理

1、向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关当且仅当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可以由其余$m-1$个向量线性表示.

【证明】

2、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

【证明】

3、若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$也线性相关.

【证明】

【注】本定理也可以概括为“部分相关$\Rightarrow$整体相关”或等价地“整体无关$\Rightarrow$部分无关”.

4、若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的延伸组$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\beta}_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\beta}_2\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_m\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$也线性无关.

5、阶梯形向量组线性无关.

6、若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可以由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，且$s>t$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.

推论：若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可以由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则有$s\le t$.

7、$n+1$个n维向量必然线性相关.

【注】上述定理是判断抽象的向量组线性相关性和线性表示的主要依据，需要考生掌握.

【例 4】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$，$\boldsymbol{AB}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)$，则（　　）

（A）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r\geq s$

（B）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r\leq s$

（C）若向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 线性无关，则 $r\geq s$

（D）若向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 线性无关，则 $r\leq s$

【答案】（C）.

【例 5】 设有 4 个向量组

（1）$(\alpha,b,c)^{\mathrm{T}},(b,c,d)^{\mathrm{T}},(d,e,f)^{\mathrm{T}},(f,g,h)^{\mathrm{T}}$

（2）$(\alpha,1,b,0,0),(c,0,d,2,0),(e,0,f,0,3)$

（3）$(\alpha,1,2,3,)^{\mathrm{T}},(b,1,2,3)^{\mathrm{T}},(c,1,2,3)^{\mathrm{T}},(d,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

（4）$(1,0,3,1),(-1,3,0,-2),(2,1,7,2),(4,2,14,5)$

则下列结论正确的是（　　）

（A）线性相关的向量组为（1）（4），线性无关的向量组为（2）（3）

（B）线性相关的向量组为（3）（4），线性无关的向量组为（1）（2）

（C）线性相关的向量组为（1）（2）（4），线性无关的向量组为（3）

（D）线性相关的向量组为（1）（3）（4），线性无关的向量组为（2）

【答案】（D）.

【小结】 灵活利用线性相关和线性表示的性质可以提高解题效率.

模块六 矩阵的秩和向量组的秩

一、矩阵的秩

1．子式

矩阵$\boldsymbol{A}$中的任意k行k列所形成的k阶行列式称为矩阵$\boldsymbol{A}$的一个k阶子式.

注：子式的阶数不超过矩阵行数和列数的最小值.

2．矩阵的秩

设在矩阵$\boldsymbol{A}$中有一个不等于0的k阶子式$\boldsymbol{D}$，且所有$k+1$阶子式（如果存在的话）全等于0，那么$\boldsymbol{D}$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的最高阶非零子式，数k称为**矩阵$\boldsymbol{A}$的秩**，记作$r(\boldsymbol{A})$.

【注】矩阵$\boldsymbol{A}$的秩即为矩阵$\boldsymbol{A}$最高阶非零子式的阶数.

3．性质

（1）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=0$；

（2）$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\geq 1$；

（3）$r(\boldsymbol{A})=1\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$且$\boldsymbol{A}$中各行各列对应元素成比例；

（4）$r(\boldsymbol{A})=k\Leftrightarrow$①$\boldsymbol{A}$中至少存在一个$k$阶非零子式；②$\boldsymbol{A}$中若存在$k+1$阶子式，则任意$k+1$阶子式均为零；

（5）设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，则$r(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$；$r(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$.

【例 1】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=$________.

【答案】1.

【例 2】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$，且秩 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $a=$________.

【答案】$1-n$.

二、向量组的秩

1．极大线性无关组

（1）定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为一个向量组，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 为其中的 t 个向量，若满足：

①$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 线性无关；

②向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意 $r+1$ 个向量（如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关，

则称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组.

【注】①极大线性无关组就是原向量组中最多的、线性无关的子向量组.

②极大线性无关组不唯一.

③向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是它的极大线性无关组为其本身.

（2）计算向量组的极大线性无关组的步骤

①将向量组作为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$（如果是行向量，则取转置后再计算）;

②对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，化为阶梯形矩阵，阶梯形矩阵中非零行的个数即为向量组的秩；

③在阶梯形矩阵中标出每个非零行的主元（每行第一个非零元），主元所在列即对应原向量组的一个极大线性无关组.

【注】①向量组的极大线性无关组可能不止一个，用该方法可以找到其中的一个；

②注意只能做行变换；

③设 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}7\\0\\14\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}5\\1\\6\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\1\end{pmatrix}$，以

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$ 为列构成一矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$，然后对其作初等行变换（且只能做初等行变换）：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&-21&-7&-14&-7\\0&0&-4&-4&0\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&3&1&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$ 的一个极大线性无关组.

【例 3】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,a),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)$ 线性相关，求 a 及该向量组的一个极大线性无关组.

【答案】$a=14$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为该向量组的一个极大线性无关组.

2．极大线性无关组的常用性质

（1）定理：向量组和它的任一极大线性无关组等价.

【证明】

推论 1：向量组的任意两个极大线性无关组等价.

推论 2：等价的向量组的极大线性无关组等价.

（2）定理：向量组任意两个极大线性无关组所含的向量的个数相同.

【证明】

3．向量组的秩

向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$的极大线性无关组中所含向量个数称为该**向量组的秩**，记作

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

【注】①要计算一个向量组的秩，只需求出其极大线性无关组即可.例如：对向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，它的极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

②若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩为$r$，则存在$r$个向量线性无关，若存在$r+1$个向量，则任意的$r+1$个向量线性相关；

③全由零向量构成的向量组没有极大线性无关组，我们规定它的秩为0.

【例 4】设4维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2+a,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3+a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,3,4+a)^{\mathrm{T}}$，问$a$为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关？$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关时，求其一个极大线性无关组.

【答案】当 $a=0$ 或者 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；当 $a=0$ 时，α_1 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组；当 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组.

4．与秩相关的定理

（**1**）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$.

（**2**）如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则

$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

【证明】

推论：两个等价的向量组秩相等.

(3)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 能线性表示向量 β 的充要条件是

$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$.

【证明】

三、矩阵的秩与向量组的秩

分别将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成按列分块和按行分块的形式：$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$.其中

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和行向量组.

从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中可以读出 3 个秩，它们是：

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数；

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$（行向量组）的极大线性无关组中所含向量的个数；

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$（列向量组）的极大线性无关组中所含向量的个数.

关于这 3 个秩，我们有如下的定理：

定理：矩阵的行秩等于列秩且等于矩阵的秩.

【注】①由于矩阵中三个秩是相同的，所以在实际运用中往往对它们不加区分，统称为矩阵的秩.

②该定理对解决与秩相关的问题拓宽了思路：矩阵的秩可以化为向量组的秩来计算，向量组的秩也可以化为矩阵的秩来计算.如在计算矩阵的秩时，可以利用初等行变换把矩阵化为阶梯形矩阵，最后非零行的个数就是矩阵的秩.

推论：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维列向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是以它们为列向量的矩阵的行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$.

换句话说，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维列向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件是以它们为列向量的矩阵的行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$.

【例 5】设 $A=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}$，则 $r(A)=$ ________.

【答案】3 .

【小结】计算矩阵秩的一般方法：通过初等行变换将矩阵化为阶梯形矩阵，其中非零行的个数就等于矩阵的秩.注意该过程中用到了矩阵的秩等于列向量组的秩.

【例 6】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,a)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a+2,-2)^T$ 线性相关，则 a ________.

【答案】3 或 -1.

【例 7】设 A 为 $n(n>2)$ 阶矩阵，$r(A)=2$，试判断下列说法的正误：

（1）A 中任意两个列向量线性无关；
（2）A 中任意不成比例的两列必可以线性表示其余各列；
（3）A 中任意 2 阶子式均不为零；
（4）A 中存在 3 阶零子式；
（5）A 中存在可以线性表示其余各行的两个行向量.

【答案】**F T F T T** .

四、与秩相关的公式

1．常用公式

由于矩阵的秩与向量组的秩紧密的联系，为了便于考生理解和记忆，对部分公式同时写出它的矩阵形式与向量形式.

（**1**）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(k\boldsymbol{A}),k\neq 0$.

（**2**）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(\boldsymbol{A})\leq \min\{m,n\}$；

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 均为 m 维向量，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\leq \min\{m,n\}$.

（**3**）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示，则

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\leq r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$；

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times k$ 矩阵，则 $r(\boldsymbol{AB})\leq \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

推论 1：乘以可逆矩阵不改变秩；

推论 2：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

推论 3：等价的向量组秩相同，反之不成立；

推论 4：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

（4）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times k$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq n$；

推论：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n \\ 1\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$.

（**5**）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

2．基本题型

(1) $r(\boldsymbol{AB})$ 的讨论

【例 8】已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&1&0&\cdots&0\\3&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$，则秩 $r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})=$________.

【答案】2.

【小结】乘以可逆矩阵不改变秩是考试中很常用的公式，考生务必熟练掌握.

【例 9】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&-3\\-1&-2&5\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&a&-2\\0&5&a\\0&0&-1\end{bmatrix}$，求 $r\left(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}\right)$.

【答案】2.

【例 10】设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，

若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$，

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关的充分必要条件是 $\left|\boldsymbol{C}\right|\neq 0$.

【小结】当题目中需要讨论两个矩阵乘积的秩 $r(\boldsymbol{AB})$ 时，首先考虑矩阵中有没有可逆矩阵，如果有，则运用乘以可逆矩阵不改变矩阵秩的性质；如果没有，则使用公式 $r(\boldsymbol{AB})\leq\min\left\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\right\}$，根据需要，这个公式我们使用的形式一般是 $r(\boldsymbol{AB})\leq r(\boldsymbol{A})$

或$r(\boldsymbol{AB}) \le r(\boldsymbol{B})$.

（2） $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的处理

【例 11】设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为 4 阶非零矩阵，并且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，若$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=r$，则$r$的取值范围是（　　）

（A）$r<2$　　　　（B）$2 \le r \le 4$

（C）$4<r<8$　　　　（D）$r \ge 8$

【答案】（B）.

【小结】当题目中出现$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$时，考虑用到$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \le n$，其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m\times n$和$n\times k$矩阵.

【例 12】设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$为$4\times 2$非零矩阵，且满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则（　　）

（A）当$a=1$时，$\boldsymbol{B}$的秩必为2　　　　（B）当$a=1$时，$\boldsymbol{B}$的秩必为1

（C）当$a\ne 1$时，$\boldsymbol{B}$的秩必为1　　　　（D）当$a\ne 1$时，$\boldsymbol{B}$的秩必为2

【答案】（C）.

【例 13】设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{E}$，证明：$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=n$.

（3） $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})$ 的处理

【例 14】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均是三维列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置

（1）证 $r(\boldsymbol{A})\le 2$；

（2）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{A})<2$.

（4） $\boldsymbol{A}^*$ 的秩

【例 15】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\2&3&a&4\\3&5&1&9\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，则 $a=$ ________.

【答案】1 或 3.

【小结】当涉及求秩的问题，题目中出现 $\boldsymbol{A}^*$ 时，考虑用到 $r(\boldsymbol{A}^*)$ 与 $r(\boldsymbol{A})$ 的关系.

【例 16】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $(n\ge 2)$，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*]=$ ________.

【答案】$r[(\boldsymbol{A}^*)^*]=\begin{cases}1 & n=2\\0 & n>2\end{cases}$.

模块七 线性方程组解的判定

一、线性方程组解的存在性

定理 1：设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出；

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})$；

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

二、线性方程解的唯一性

定理 2：当线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解不唯一（有无穷多解）

$\Leftrightarrow$ 线性方程组的导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n$；

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

【注】注意该定理成立的前提条件是线性方程组有解；一般来说，仅告知 $r(\boldsymbol{A})<n$ 是不能得到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的，也有可能无解.

推论：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

三、克拉默法则

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，并且唯一解为

$x_i=\dfrac{D_i}{D}$，其中 $D=|\boldsymbol{A}|$，D_i 等于将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\boldsymbol{i}$ 列换成 $\boldsymbol{b}$ 之后所得矩阵的行列式.

【注】该推论不需要以方程组有解为前提. 也即：只要 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 就一定有解，并且解是唯一的.若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷解或无解.

推论： $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【例 1】a，b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1-x_2+ax_3+5x_4=b \\ 2x_1+4x_2-4x_3+x_4=1 \\ 2x_1-4x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？

【答案】当 $a\neq 1$ 且 $a\neq 7$ 时，有唯一解；当 $a=1$ 且 $b=2$ 时，或 $a=7$ 且 $b=8$ 时，有无穷多解；当 $a=1$ 且 $b\neq 2$ 时，或 $a=7$ 且 $b\neq 8$ 时，无解.

【例 2】已知线性方程组 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ 无解， 则 $\lambda=$________.

【答案】-2 .

【小结】当系数矩阵为方阵且不易于作初等行变换时，可以借助行列式进行讨论：当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，线性方程组有唯一解；当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，从方程中解出未知参数代入方程组再讨论是有无穷多解，还是无解.

【例 3】设 a，b，c，d 为互不相同的实数，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}$ 的解是________.

【答案】$(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

【例 4】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&2\\2&a+1&3a+1\\1&1&2\end{pmatrix}$，若存在3阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求 a.

【答案】1.

【小结】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别均为 $m\times n$ 和 $n\times k$ 矩阵，处理条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时的两个基本思路：

①将 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都看成齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；②运用公式 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$.

【例 5】已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + ax_2 + \cdots + ax_n = 0 \\ ax_1 + \lambda x_2 + \cdots + ax_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax_1 + ax_2 + \cdots + \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda \neq 0$ 且 $a \neq 0$.试讨论 λ 和 a 满足何种关系时，方程组仅有零解.

【答案】当 $\lambda \neq a$ 且 $\lambda \neq (1-n)a$ 时，方程组仅有零解.

【例 6】设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×5 阶矩阵， $\boldsymbol{B}$ 为 4×2 阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=4$，对于任意列向量 $\boldsymbol{\beta}$，下列命题中错误的是（　　）

（A） $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

（B） $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解

（C） $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解

（D） $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解

【答案】（C）.

【例 7】设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，对于任意列向量 $\boldsymbol{\beta}$，下列选项错误的是（　　）

（A）方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x=\mathbf{0}$ 仅有零解　　（B）方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x=\mathbf{0}$ 必有非零解

（C）方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 必有无穷多解　　（D）方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x=\boldsymbol{\beta}$ 必有唯一解

【答案】（D）.

【例 8】设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量，试判断下列说法的正误.

（1）如果 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（2）如果 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有无穷多解；

（3）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$；

（4）如果 $r(\boldsymbol{A})=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

（5）如果 $\boldsymbol{A}$ 中存在 m 阶非零子式，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}y=\mathbf{0}$ 仅有零解；

（6）如果 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，则 $\boldsymbol{A}^{T}y=\boldsymbol{\beta}$ 有解（$\boldsymbol{\beta}$ 为任意 n 维列向量）.

【答案】**F；T；F；T；T；T.**

【小结】①解的唯一性的充要条件必须在已知非齐次线性方程组有解的前提下才成立，否则不成立.具体来说，如果没有非齐次方程组有解的条件，已知齐次线性方程组有非零解或仅有零解，无法得出非齐次线性方程组有无穷多解或有唯一解，因为此时非齐次线性方程组有可能无解.

②系数矩阵行满秩的时候，线性方程组一定有解.

【本章小结】1. 判断线性方程组是否有解

线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件有很多等价的表现形式，但其中最本质也最常用的是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.也即系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，具体来说，可以分为如下两种情况：

（**1**）对于数值型的线性方程组，同时计算出 $r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 即可，最常用的方法是通过初等行变换将增广矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 化为阶梯形矩阵（实质上就是高斯消元法），非零行的个数即为矩阵的秩.

（**2**）对于抽象型的线性方程组，则需要借助秩的相关公式及定理展开讨论.

2.判断线性方程组的解是否唯一（或齐次线性方程组是否有非零解）

对于非齐次线性方程组，在讨论本问题之前，要先确保其有解.在 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的前提下，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解等价于其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，它又等价于 $r(\boldsymbol{A})=n$（也即系数矩阵列满秩），具体来说，可以分为如下三种情况：

（**1**）对于数值型的线性方程组，利用矩阵的初等行变换计算出 $r(\boldsymbol{A})$ 即可.

（**2**）对于抽象型的线性方程组，可以结合矩阵及向量组的秩的相关公式及定理进行讨论.

（**3**）特殊地，当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时，可以借助克拉默法则：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解（$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解）$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$.也就是说，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解或无解时，都有 $|\boldsymbol{A}|=0$.

模块八 线性方程组解的结构

一、齐次线性方程组解的结构

1．解的性质

定理：如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的两个解，则对任意的常数$k_1,k_2$，$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

【注】①该定理也可以概括为$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$的任意线性组合仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解；

②该定理还可以推广到多个向量的情况：设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$的任意线性组合仍为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

2．基础解系

（1）基本概念

设齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解.向量组$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$称为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，如果它们满足如下三个条件：

①$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$都是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解；

②$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$线性无关；

③$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任意解都可以由$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$线性表示.

如果$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解可以表示为

$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s(k_1,k_2,\cdots,k_s\in R)$.

【注】基础解系是求齐次和非齐次线性方程组通解的关键，是解的结构部分最重要的概念，为了让考生对该概念有正确而全面的认识，我们从如下两方面来予以说明：

①齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组线性无关的解，它们可以线性表示 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意解.也就是说，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解，那么向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s,\boldsymbol{\alpha}$ 是线性相关的.通过上述分析不难发现，**基础解系本质上是齐次线性方程组解集的一个极大线性无关组.**

②由于基础解系就是极大线性无关组，那么极大线性无关组的性质对基础解系同样成立，如：齐次线性方程组的任意两个基础解系是等价的，齐次线性方程组的任意两个基础解系所含的向量个数相等.

（2）核心定理

定理：设齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$（$m$ 个方程，n 个未知量）系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系存在，并且任一个基础解系中含有 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个解向量.

【注】①结合对基础解系定义的说明，该定理实质上是说齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解集的秩为 $n-r(\boldsymbol{A})$；

②由极大线性无关组的性质还可以得到：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【例 1】已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 仍为该齐次线性方程组的一个基础解系.

（3）计算方法

①设$r(A)=r<n$，则对系数矩阵A实施初等行变换化为阶梯型矩阵.找出主元（每行第一个非零元），再进一步通过初等行变换将方程组化为“行最简形”（使得主元所在列成为一个单位矩阵）.我们给出了主元为前r个变量的情形，如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1(r+1)} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{2(r+1)} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{r(r+1)} & \cdots & \bar{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

②则对应的齐次线性方程组可化为如下形式：

$$\begin{cases} x_1+\bar{a}_{1(r+1)}x_{r+1}+\cdots+\bar{a}_{1n}x_n=0 \\ x_2+\bar{a}_{2(r+1)}x_{r+1}+\cdots+\bar{a}_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r+\bar{a}_{r(r+1)}x_{r+1}+\cdots+\bar{a}_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

③在上述方程中，分别令“自由变量”（主元以外的变量）其中一个为1，其余为0，如下：

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以得到$n-r$个线性无关的解向量：

$$\vec{\boldsymbol{\eta}}_1=\begin{bmatrix}-a_{1(r+1)}\\-a_{2(r+1)}\\\vdots\\-a_{r(r+1)}\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\vec{\boldsymbol{\eta}}_2=\begin{bmatrix}-a_{1(r+2)}\\-a_{2(r+2)}\\\vdots\\-a_{r(r+2)}\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\vec{\boldsymbol{\eta}}_{n-r}=\begin{bmatrix}-a_{(n-r)(r+1)}\\-a_{(n-r)(r+1)}\\\vdots\\-a_{(n-r)(r+1)}\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

它们就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

【例 2】求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\3x_1+4x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$的一个基础解系.

【答案】方程组的一个基础解系为$\begin{bmatrix}5\\-4\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\3\\0\\1\end{bmatrix}$.

【例 3】求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=0\\-x_1+x_2-3x_3+4x_4=0\\-x_2-2x_3+3x_4=0\end{cases}$的通解.

【答案】 齐次方程的通解为$k_1\begin{bmatrix}-5\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}7\\3\\0\\1\end{bmatrix},k_1,k_2\in R$.

二、非齐次线性方程组解的结构

1．解的性质

定理：（1）如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个解，则$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

（2）如果$\boldsymbol{\eta}_1$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\eta}_2$为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解.

2．通解

定理：设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,...,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，$\boldsymbol{\eta}_0$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$任意一个解，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解可以表示为

$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_0\ (k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}\in R)$.

【注】①非齐次线性方程组的通解为其导出组的通解加上它任意一个特解；

②由定理可知求非齐次线性方程组通解的关键也是求其对应齐次线性方程的基础解系.

【例 4】已知 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是相应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是（　　）

（A）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　（B）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

（C）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　（D）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

【答案】（B）.

【例 5】求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2+7x_3=2 \\ -x_1+2x_2+x_3=-1 \end{cases}$ 的通解.

【答案】非齐次方程的通解为$k\begin{bmatrix}-5\\-3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},k\in R$.

三、常考题型

1．齐次线性方程组的通解

【例 6】设$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{bmatrix}$，且齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有两个线性无关的解，求其一个基础解系.

【答案】基础解系为 $[1,-1,1,0]^T$，$[0,-1,0,1]^T$.

【小结】①若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$均为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则有$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\le n-r(\boldsymbol{A})$；

②如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$同时还是线性无关的，我们有$k\le n-r(\boldsymbol{A})$，也就是说，若已知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$存在$k$个线性无关的解，我们就可以得到$k\le n-r(\boldsymbol{A})$.

【例 7】设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 2 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 1 \\ 1 & a_{32} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$，且向量 $[1,1,1,1]^T,[1,2,3,4]^T$ 均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，试求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

【答案】通解为 $k_1[1,1,1,1]^T+k_2[1,2,3,4]^T$.

【例 8】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times k$ 矩阵，如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$.

【小结】由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可以得到 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

【例 9】已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，并设 $|\boldsymbol{A}|=0$，$A_{11}\neq 0$，(1)求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，（2）求 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【答案】（1） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $[A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}]^T$；

（2） $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

【小结】结合基础解系的定义及重要性质，我们可以将抽象的线性方程组的基础解系的计算过程总结为如下两个步骤：

①确定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$；

②找出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个解向量；

③说明这 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个解向量是线性无关的.

2．非齐次线性方程组的通解

【例 10】线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1+3x_2+5x_3-4x_4+3x_5=-1 \end{cases}$ 的通解.

【答案】通解为：

$[5,-2,0,0,0]^T+k_1[3,-2,0,0,1]^T+k_2[-5,3,0,1,0]^T+k_3[4,-3,1,0,0]^T$.

【例 11】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的三个解向量，且秩$r(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,4]^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,2,3]^T$，$c$表示任意常数，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解$\boldsymbol{x}=$（　　）

（A）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

【答案】（C）.

【例 12】已知方阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为4维列向量，其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

【答案】通解为：$[1,1,1,1]^T+k[1,-2,1,0]^T$.

模块一　随机事件与概率

一、随机事件

随机试验：可重复进行，结果不唯一，试验之前不能确定结果的试验称为**随机试验**，记作 E.

样本空间：一个随机试验 E 所有可能的结果所组成的集合称为 E 的**样本空间**，记作 Ω.样本空间里的元素称为**样本点**.

随机事件：样本空间的任一子集称为 E 的**随机事件**.在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现，我们称该随机事件**发生**.

【注】常见的特殊随机事件有：

基本事件：由单个样本点组成的单点集.

必然事件：由样本空间所有样本点组成的集合.

不可能事件：不含任何样本点的集合.

二、随机事件的关系和运算

1．运算

（1）和事件

事件 $\{x | x\in A 或 x\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$，或者 $A+B$.易知：当且仅当事件 A 与 B 中至少有一个发生时，$A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

（2）积事件

事件 $\{x | x\in A 且 x\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$，或者 AB.易知：当且仅当事件 A 与 B 同时发生时，$A\cap B$ 发生.

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

（3）差事件

事件 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$，或 $A\overline{B}$，$A-AB$. 易知：当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时，$A-B$ 发生.

2．关系

包含：若事件 A 所包含的样本点都属于事件 B，则称事件 A 包含于事件 B，或事件 B 包含事件 A，记为 $A \subset B$. $A \subset B$ 表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

相等：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$.

互不相容：若事件 A, B 满足 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容，或互斥. 易知：事件 A 与事件 B 互不相容当且仅当它们不能同时发生.

对立：若事件 A, B 满足 $A \cap B = \varnothing$，且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与事件 B 为对立事件，或称事件 A 与事件 B 互为逆事件，记作 $B = \overline{A}$. 易知：在每次随机试验中，事件 A 与其逆事件 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生.

【注】对立一定互不相容，但互不相容不一定对立.

完备事件组：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_i \cap A_j = \varnothing$，$i \neq j$，$i, j = 1, 2, \cdots n$，且 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为整个样本空间 Ω 中的一个完备事件组.

3．运算法则

交换律：$A+B=B+A, AB=BA$.

结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C, A(BC)=(AB)C$.

分配律：$(A+B)C=AC+BC, (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

吸收律：若 $A \subset B$，则有 $A \cap B = A, A \cup B = B$.特别地，$A \cap A = A \cup A = A$.

德摩根律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A$.

【例 1】 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

（1）A 发生，B,C 都不发生；

（2）A,B,C 至少有一个发生；

（3）A,B,C 不同时发生；

（4）A,B,C 至少两个发生；

（5）A,B,C 恰好两个发生；

（6）A,B,C 不多于一个发生.

【答案】（1）$A\overline{B}\overline{C}$；（2）$A+B+C$；（3）$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

（4）$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$ 或 $AC+AB+BC$；（5）$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

（6）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.

【例 2】判断下列命题是否成立

（1）$A-(B-C)=(A-B)\bigcup C$；

（2）若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

（3）$(A\bigcup B)-B=A$；

（4）$(A-B)\bigcup B=A$；

（5）$A\bigcup\overline{A}B=A\bigcup B$.

【答案】（1）不成立；（2）成立；（3）不成立；（4）不成立；（5）成立.

三、简单概型

1．古典概型

如果随机试验E的样本空间Ω中只有有限个样本点，并且由各个样本点所构成的基本事件发生的可能性相同，则称这样的试验为古典概型.对于该试验中的任意事件A，其概率为

$$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega},$$

其中N_A为事件A中所包含的样本点的个数，N_Ω为样本空间Ω中所包含的样本点的个数.

【例 3】考虑一元二次方程$x^2+Bx+C=0$，其中B,C分别是将一枚骰子连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率p和有重根的概率q.

【答案】$p=\frac{19}{36},q=\frac{1}{18}$.

【例 4】一个盒中有4颗红球5颗白球，从中取3球，分三种方式（先后放回、先后不放回、任取）求下列各事件的概率：

（1）取出2颗红球、1颗白球；

（2）第3颗球为白球.

【答案】（1）先后放回：$\dfrac{80}{243}$；先后不放回：$\dfrac{5}{14}$；任取：$\dfrac{5}{14}$；

（2）先后放回：$\dfrac{5}{9}$；先后不放回：$\dfrac{5}{9}$.

【例 5】袋中有质地相同的a个黑球，b个白球.现依次从袋中取球，每次取一个，取后不放回，试求第$k(1\le k\le a+b)$次取得白球的概率.

【答案】$\dfrac{b}{a+b}$.

【小结】理解和使用抽签原理：先后不放回地抽签，抽到指定签子的概率与抽取的次序无关.灵活地使用抽签原理可以极大地简化这类题目的分析和运算过程.

2．几何概型

如果随机试验E的样本空间Ω构成几何空间中的一个有界区域（这个区域可以是一维、二维甚至是n维的），且由各个样本点所构成的基本事件发生的可能性相同，则称这样的试验为几何概型.对于该试验中的任意事件A，其概率为

$$P(A)=\frac{M_A}{M_\Omega},$$

其中M_A为事件A的度量，M_Ω为样本空间Ω的度量.

【注】这里的“度量”根据样本空间的维数而定，一般一维中的度量指的是长度，二维中的度量指的是面积，三维中的度量指的是体积.考试中常考的是二维的题型.

【例 6】在平面区域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 内随机地取一点，求该点到原点的距离不超过 $\dfrac{1}{2}$ 的概率________.

【答案】$\dfrac{1}{4}$.

【小结】以二维情况为例，几何概型计算概率的基本步骤可以总结为：

①建立直角坐标系；

②用几何区域表示出样本空间及所求随机事件；

③求解面积，代公式计算概率.

3．伯努利概型

如果随机试验 E 只有两种结果 A，$\overline{A}$，则称该试验为伯努利试验（或伯努利概型），其中 $P(A)=p(0<p<1)$.将试验 E 独立重复地进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验. n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$.

【注】这里的“重复”是指在每次试验中 $P(A)=p(0<p<1)$ 保持不变；“独立”是指各次试验的结果互不影响.

【例7】一射手对同一目标独立的进行 4 次射击，若至少命中一次的概率为 $\dfrac{80}{81}$，试求：

（1） 该射手的命中率；

（2） 求该射手至多命中一次的概率.

【答案】（1）$\dfrac{2}{3}$；（2）$\dfrac{1}{9}$.

【例8】某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率均为 p，则此人第 5 次射击恰好第 3 次命中目标的概率为（　　）

（A）$6p(1-p)^3$　　（B）$10p(1-p)^3$　　（C）$6p^3(1-p)^2$　　（D）$10p^2(1-p)^3$

【答案】（C）.

【小结】伯努利概型的基本公式 $C_m^n p^n(1-p)^{m-n}$ 计算的是 m 次试验中某事件恰好发生 n 次的概率.需要注意的是，使用该公式必须满足对该事件发生的 n 次的位置和次序没有任何要求.

四、概率的公理化定义

1．定义

概率是所有事件构成的集合到实数集的一个映射 P，它必须满足下列条件：

（1）非负性：对任意事件 A，都有 $P(A)\ge 0$；

（2）规范性：对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即 $A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\ne j,$

$i,j=1,2,\cdots$，有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

2．基本性质

（1）$P(\varnothing)=0$；

（2）有限可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的事件，则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

（3）逆事件的概率：对于任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

（4）单调性：若事件 $A\subset B$，则 $P(A)\le P(B)$.

【例 9】三台机器相互独立运转，设第一、第二、第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9，0.8，0.7，则这三台机器中至少有一台发生故障的概率为__________.

【答案】0.496.

【例 10】若 A,B 为任意两个随机事件，则（　　）

（A）$P(AB)\le P(A)P(B)$　　（B）$P(AB)\ge P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　（D）$P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】（C）.

【小结】当事件具有包含关系时，比较概率的大小关系，可考虑使用单调性.

【例 11】随机事件 A,B 满足 $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{2},P(A\cup B)=1$，则有（　　）

（A）$A\cup B=\Omega$　　（B）$AB=\varnothing$

（C）$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$　　（D）$P(A-B)=0$

【答案】（C）.

【小结】对于必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$，有 $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$，反之不成立，即概率为 1 的事件不一定是必然事件 Ω，概率为 0 的事件也不一定是不可能事件 $\varnothing$.

五、条件概率与独立性

1．条件概率

（1）定义

设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，则称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在随机事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

（2）性质

不难验证，条件概率 $P(\cdot\mid A)$ 符合概率定义中的三个条件，即

①**非负性**：对于任意事件 B，有 $P(B\mid A)\geq 0$；

②**规范性**：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega\mid A)=1$；

③可列可加性：若 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有 $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\middle|A\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k|A)$.

【注】条件概率也是一种概率，所以概率的性质同样适用于条件概率，其中最为常用的性质为逆事件的概率：对于任意事件 B，有 $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$.

【例 12】设 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$，试求：$P(B|A\cup\overline{B})$.

【答案】0.25.

【小结】对于抽象的事件 A,B，在 $P(B)>0$ 的前提下，要计算条件概率 $P(A|B)$，一般可直接使用条件概率的定义式 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 进行计算.

【例 13】设袋中装有 6 个白球和 4 个黑球，依次不放回的取出 3 个球，则已知第三次取出黑球，求前两次取出不同颜色球的概率.

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【小结】对于有实际背景的问题，计算条件概率 $P(A|B)$ 时一般利用**缩减样本空间**的方法，这个方法的本质是把已经发生的事件 B 的结果考虑进来，重新构造出一个新的样本空间（一般情况下该新样本空间比原来的样本空间要简单），然后在该新样本空间中直接计算 $P(A)$ 即可.

【例 14】将 4 封信随机地装入到 3 个邮筒中去，已知前两封信在不同的邮筒中，求恰好有 3 封信在一个邮筒中的概率.

【答案】$\frac{2}{9}$.

2．独立性

（1）基本概念

设 A,B 是两个事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 相互独立，简称 A,B 独立.

【注】从两个方面理解独立性的概念：

①从数学概念上讲，独立就是 $P(AB)=P(A)P(B)$，也就是说，我们判断两个事件是否独立的唯一依据就是验证该等式是否成立.

②从实际意义上讲，两个事件是否发生相互之间没有关联，互不影响.

【例 15】证明：概率为 0 的事件与任何事件都独立.

【例 16】证明：若事件 A 与 B 独立，则 $\overline{A}$ 与 B， A 与 $\overline{B}$， $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均独立.

【小结】①在四对事件 A 与 B， $\overline{A}$ 与 B， A 与 $\overline{B}$， $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中只要有一对相互独立，则另外三对事件也相互独立.

②借助本题的结论，可以得到概率为1的事件与任何事件都独立.

【例 17】设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则（　　）

（A） A 和 B 互不相容　　（B） A 和 B 互相对立

（C） A 和 B 互不独立　　（D） A 和 B 相互独立

【答案】（D）.

【小结】由 $P(\overline{A}|\overline{B})=P(\overline{A}|B)$ 可知，事件 B 是否发生都不会影响事件 $\overline{A}$ 的发生，故可理解为事件 A 和 B 相互独立.

【例 18】设随机事件 A,B 相互独立，且 $P(B)=0.6,P(A-B)=0.2$，$P(B-A)=$（　　）

（A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0.4

【答案】（C）.

2）多个事件的独立

设 A,B,C 是三个事件，若满足等式 $\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$，则称事件 A,B,C 相互独立.

【注】若事件 A,B,C 相互独立，则它们一定两两独立.

同样可以定义三个以上事件的相互独立：

设有 n 个事件 $A_1,A_2,...,A_n$，对任意的 $1\le i<j<k<...\le n$，如果以下等式均成立：

$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \qquad\cdots \\ P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n) \end{cases}$，则称此 n 个事件 $A_1,A_2,...,A_n$ 相互独立.

【例 19】将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{\text{掷第一次出现正面}\}$，$A_2=\{\text{掷第二次出现正面}\}$，$A_3=\{\text{正反面各出现一次}\}$，$A_4=\{\text{正面出现两次}\}$，则事件（　　）

（A）A_1,A_2,A_3 相互独立　　（B）A_2,A_3,A_4 相互独立

（C）A_1,A_2,A_3 两两独立　　（D）A_2,A_3,A_4 两两独立

【答案】（C）.

【小结】若验证三个事件 A,B,C 的相互独立性，需同时满足两两独立和“整体独立”（即 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$）两个条件.显然，相互独立则一定两两独立，反之不成立.

模块二 五大公式

一、加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

二、减法公式

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$$

三、乘法公式

当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$.

【注】该公式也可以推广到多个事件积事件的情况.

一般，设 $A_1,A_2,...A_n$ 为 n 个事件，$n\geq 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$.

【例 1】 A,B,C 两两独立， $ABC=\varnothing,P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16},P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$，

则 $P(A)=$________.

【答案】 $\dfrac{1}{4}$.

【小结】三个事件和的概率公式是最基本的也是常考的考点，大家需牢记此公式，并结合题中所给条件，确定公式中每个概率的值.

【例 2】设 A,B,C 是三个随机事件，且 AB 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$________.

【答案】$\frac{3}{4}$.

【例 3】设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为$\frac{1}{2}$，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为$\frac{7}{10}$，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为$\frac{9}{10}$. 试求透镜落下三次而未打破的概率.

【答案】$\frac{3}{200}$.

四、全概率公式

设 E 为随机试验，Ω 是它的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 中的一个完备事件组，且 $P(A_k)>0,k=1,2,\cdots,n$，B 是 Ω 中的任意随机事件，则有：

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(B|A_k)P(A_k).$$

【例 4】已知甲、乙两箱中有同种产品，其中甲箱中有 2 件正品和 3 件次品，乙箱中仅有 3 件正品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱中，求从乙箱中任取一件产品为次品的概率.

【答案】0.3.

【小结】使用全概率公式的基本信号是分类讨论，关键步骤是找到题目中相应的完备事件组.全概率公式表现为“由因至果”的过程.

五、贝叶斯公式

设 E 为随机试验，Ω 是它的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 中的一个完备事件组，且 $P(A_k)>0, k=1,2,\cdots,n$，B 是 Ω 中的任意随机事件，$P(B)>0$，则有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)},\ i=1,2,\cdots,n。$$

【注】贝叶斯公式本质上就是一个条件概率，$P(A_i|B)=\dfrac{P(A_iB)}{P(B)}$.

其中，$P(A_iB)=P(A_i)P(B|A_i)$ 可利用乘法公式展开计算，$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(B|A_k)P(A_k)$ 可利用全概率公式进行计算.

【例 5】某地 7 月下暴雨的概率为0.4，当下暴雨时，有水灾的概率为0.2；当不下暴雨时，有水灾的概率为0.05，求

（1）该地 7 月份有水灾的概率；

（2）该地 7 月份已发生水灾，下暴雨的概率.

【答案】（1）0.11；（2）$\dfrac{8}{11}$.

【小结】①若已知事件B发生，要求导致该事件发生的某个原因A_i的概率，即求条件概率$P(A_i|B)$，需要用贝叶斯公式进行求解.贝叶斯公式表现为“由果溯因”的过程.

②贝叶斯公式可以看做是全概率公式的直接推论，两者往往结合起来进行考查.

【例 6】两台车床加工同样的零件，第一台每加工100件，出现次品数3件，第二台每加工100件，出现次品数2件，现从第一台加工的零件中取出50件，从第二台加工的零件中取出25件，将这些零件放在一起，试计算：

（1）任取一件是合格品的概率；

（2）已知取出的零件是次品，它是第二台车床加工的概率.

【答案】（1）0.973；（2）0.25.

【小结】使用全概率公式的难点在于如何对样本空间进行划分，也即如何设出公式中的完备事件组，一般来说，基本的原则是既要便于讨论，也要便于计算每一种条件下事件的概率.

模块三　随机变量及其分布

一、随机变量

为了全面地研究随机试验的结果，揭示随机现象的统计规律性，我们将随机试验的结果与实数对应起来，将随机试验的结果数量化，引入随机变量的概念.

定义：设随机试验的样本空间为$\Omega=\{e\}$. $X=X(e)$是定义在样本空间Ω上的实值单值函数，则称$X=X(e)$为随机变量.

【注】对应于任一随机事件$A\subset\Omega$，我们都可以定义一个随机变量，$X(e)=\begin{cases}1,e\in A\\0,e\notin A\end{cases}$，这是最简单的随机变量.

二、随机变量的分布

1．离散型随机变量及其分布

（1）定义

如果某一随机变量所有可能的取值为有限个或可列无限个，我们就称该随机变量为**离散型随机变量**.

（2）分布律

对于离散型随机变量，我们只需要知道它所有可能的取值以及取每一个可能取值的概率，就掌握了有关该随机变量的全部信息.设随机变量X所有可能的取值为$x_k(k=1,2,\cdots)$，X取各个可能取值的概率为p_k，即$P\{X=x_k\}=p_k,(k=1,2,\cdots)$，

则有如下性质：

① $p_k\geq 0,(k=1,2,\cdots)$；

② $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$.

上述两条性质也是一个数列可以作为某离散型随机变量的分布律的充要条件.

我们称 $P\{X=x_k\}=p_k,(k=1,2,\cdots)$ 为随机变量 X 的分布律.

我们也常把分布律写成如下的表格形式：

X	x_1	x_2	……	x_n	……
P	p_1	p_2	……	p_n	……

【例 1】设随机变量的可能取值为 $0,1,2$，取这些值的概率分别为 a^2，a，a^2，求 a.

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【例 2】甲、乙两人从装有 3 个红球与 2 个白球的口袋中轮流摸取一球，甲先取，乙后取，每次取后不放回，直到两人中有一人取到红球时停止，试求取球次数的分布律.

【答案】记取球次数为 X，其分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

2．分布函数

（1）定义： 设 X 为某一随机变量，令 $F(x)=P\{X\le x\},x\in R$，称此函数为随机变量 X 的分布函数.

【注】 ①从定义形式来看，分布函数就是一个定义在实数域 R 上的普通函数；

②如果将 X 看成是数轴上随机点的坐标，那么分布函数在 x 处的函数值 $F(x)$ 就表示 X 落在区间 $(-\infty,x]$ 上的概率.

【例 3】 若 X 的分布律为：

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

【答案】 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{7}{15}, & 0\le x<1\\ \frac{14}{15}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$.

【小结】 设 X 为离散型随机变量，若已知其分布律求分布函数，则根据分布函数的定义在对应的区间段内依次将对应各个取值的概率逐步累加即可.

（2）性质：分布函数满足下列性质：

①$F(x)$单调不减；

②$0 \le F(x) \le 1, \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1, \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$；

③$F(x)$右连续.

这三条性质也是一个函数可以作为某随机变量分布函数的充要条件.

【注】①任何随机变量都有其对应的分布函数，也即分布函数与随机变量之间有一一对应的关系.

②为保证分布函数的右连续性，当其为分段函数时，分段点处的等号一律放在x取大于号的一侧.

【例 4】以下函数可以作为某随机变量的分布函数的是（　　）

（A）$F(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$　　（B）$F(x)=\dfrac{2}{\pi}\arctan x$

（C）$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$　　（D）$F(x)=\arctan x+\dfrac{2}{\pi}$

【答案】（C）.

【例 5】设 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都为随机变量的分布函数，则下列各个函数中仍可以作为随机变量的分布函数的是（　　）

（A）$\frac{3}{5}F(x)+\frac{2}{5}G(x)$　　（B）$\frac{2}{3}F(x)-\frac{2}{3}G(x)$

（C）$-\frac{1}{2}F(x)-\frac{3}{2}G(x)$　　（D）$\frac{1}{2}F(x)+\frac{3}{2}G(x)$

【答案】（A）.

（3）计算概率： 设 X 的分布函数为 $F(x)$，则对于任意的实数 $a, b\ (a<b)$，有

①$P\{X \le b\}=F(b), P\{X<b\}=F(b-0)$；

②$P\{X=b\}=F(b)-F(b-0)$；

③$P\{a<X \le b\}=F(b)-F(a)$，$P\{a \le X<b\}=F(b-0)-F(a-0)$，

$P\{a<X<b\}=F(b-0)-F(a)$，$P\{a \le X \le b\}=F(b)-F(a-0)$.

【例 6】设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{8}, & x=-1,\\ ax+b, & -1<x<1,\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$，且 $P\{X=1\}=\dfrac{1}{8}$，则（　）

（A）$a=\dfrac{3}{8}$，$b=\dfrac{1}{2}$　　（B）$a=\dfrac{7}{16}$，$b=\dfrac{9}{16}$

（C）$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$　　（D）$a=\dfrac{3}{8}$，$b=\dfrac{3}{8}$

【答案】（A）.

【例 7】设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{\pi}{6},\\ A\sin x, & \dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

求 A 及 $P\left\{\dfrac{\pi}{6}\leq X\leq\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

【答案】$A=1,P\left\{\frac{\pi}{6}\le X\le\frac{\pi}{3}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3．连续型随机变量及其分布

（1）定义

如果对于随机变量的分布函数$F(x)$，存在非负函数$f(x)$，使得对于任意实数x有$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，则称$X$为连续型随机变量，其中函数$f(x)$称为$X$的概率密度函数，简称概率密度或密度函数.

【例 8】设X为连续型随机变量，则X的分布函数（　　）

（A）是非阶梯间断函数.　　（B）为可导函数.

（C）连续但不一定可导的函数.　　（D）阶梯型函数.

【答案】（C）.

（2）基本性质

设$f(x)$为某连续型随机变量的概率密度，则有

① $f(x)\ge 0$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.

这两条性质也是一个函数可以作为某连续型随机变量概率密度的充要条件.

【例 9】设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}ax+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求$a$.

【答案】$-\frac{1}{2}$.

【例 10】设连续型随机变量X_1，X_2的分布函数分别为$F_1(x)$，$F_2(x)$，概率密度分别为$f_1(x)$，$f_2(x)$，其中$f_1(x)$，$f_2(x)$是连续函数，则（　　）

（A）$f_1(x)+f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度

（B）$F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

（C）$F_1(x)F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

（D）$f_1(x)f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度

【答案】（C）.

【小结】考试对连续型随机变量分布主要有两种考查方式：一是计算分布中的参数，对这类问题，运用充要条件中的归一性，即$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.二是判断某函数是否可以作为概率密度函数，对这类问题，需要逐一检验充要条件中的每一条性质，任何一条不满足则不可以作为随机变量的概率密度.

（3）特殊性质

设**连续型**随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$，则

① $F(x)$ 是连续函数；

②若 $f(x)$ 在点 x 连续，则 $F'(x)=f(x)$；

③对任意的实数 c， $P\{X=c\}=0$；

④对任意实数 $x_1,x_2(x_1\le x_2)$， $P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$.

【注】对于连续型随机变量，如下四种形式的概率不考虑端点处的区别，其结果均相等，即 $P\{x_1<X\le x_2\}=P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1\le X\le x_2\}$.

【例 11】设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}a+be^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，试求：（1） a 和 b；（2）概率密度 $f(x)$.

【答案】（1） $a=1,\ b=-1$；（2） $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【例 12】设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则 $P\left\{X\le\dfrac{1}{2}\right\}=$________.

【答案】$\frac{1}{4}$.

模块四　常见分布

一、常见的离散型随机变量

1．$0-1$分布

随机变量X所有可能的取值只有0与1，且取1的概率为$p(0<p<1)$，取0的概率为$1-p$，则称该随机变量服从$0-1$分布.$0-1$分布的分布律为：

X	1	0
P	p	$1-p$

2．二项分布

做n重伯努利试验，设在每次试验中事件A发生的概率$P(A)=p(0<p<1)$，则事件A在n重伯努利试验中出现k次的概率为：

$$P=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n.$$

若随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$，其中$p$满足$0<p<1$，则称随机变量$X$服从参数为$(n,p)$的二项分布，并记$X\sim B(n,p)$.

【注】若$X\sim B(n,p)$，则X描述的是n重伯努利试验中A发生的次数，其中$P(A)=p$.

3．几何分布

做伯努利试验，设在每次试验中事件A发生的概率$P(A)=p\ (0<p<1)$，则事件A首次出现时所做的试验次数为k的概率为：

$$P=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,\cdots$$

若随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,\cdots$，其中参数 p 满足 $0<p<1$，则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，并记 $X\sim G(p)$.

【注】①若 $X\sim G(p)$，那么 X 描述的是伯努利试验中，事件 A 首次发生时进行的试验次数，且 $P(A)=p$；

②考试中对二项分布和几何分布的要求主要是理解它们的实际意义，能够结合问题的实际背景来判断某随机变量是否服从这两个分布.

4．泊松分布

若随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$，其中参数 $\lambda>0$，则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，并记 $X\sim P(\lambda)$.

【例 1】

（1）设 $X\sim B(3,p)$，$Y\sim B(2,p)$，$P\{X\geq 1\}=\dfrac{19}{27}$，则 $P\{Y\geq 1\}=$________；

（2）设 $X\sim P(\lambda)$，$4P\{X=2\}=P\{X=1\}$，则 $P\{X=2\}=$________.

【答案】（1）$\frac{5}{9}$；（2）$\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}}$.

【例 2】大楼的楼道里有 5 盏灯并联，在任意时刻，每盏灯亮着的概率为 0.6 .试计算，在同一时刻：

（1）有两盏灯亮着的概率；

（2）至少有三盏灯亮着的概率；

（3）至多有两盏灯亮着的概率.

【答案】（1）$C_5^2(0.6)^2(0.4)^3$；（2）$C_5^3(0.6)^3(0.4)^2+C_5^4(0.6)^4(0.4)^1+C_5^5(0.6)^5$；

（3）$C_5^0(0.6)^0(0.4)^5+C_5^1(0.6)^1(0.4)^4+C_5^2(0.6)^2(0.4)^3$.

【例 3】设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，现对 X 进行 3 次独立观察，求 X 的观测值至少有两次小于 $\frac{\pi}{3}$ 的概率.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【例 4】有n把钥匙，只有一把是正确的，现逐一检验，直到找出正确的钥匙为止，求先后放回和先后不放回两种情况下试验次数X的分布律.

【答案】先后放回：$P\{X=k\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n},k=1,2,\cdots$；

先后不放回：

X	1	2	3	…	$n-2$	$n-1$
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$

二、常见的连续型随机变量

1．均匀分布

若随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & 其他\end{cases}$，则称$X$服从区间$(a,b)$上的均匀分布，记为$X\sim U(a,b)$.其分布函数为：$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b \\ 1, & x\ge b\end{cases}$.

【注】一维均匀分布中，随机变量落在某一区间内的概率等于相应的区间长度比.

2．指数分布

若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中参数 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$，其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$.

3．正态分布

（1）定义

若随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in R$，其中参数 $\mu\in R,\sigma>0$，则称 X 服从正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

特别地，将 $N(0,1)$ 称为标准正态分布，其概率密度和分布函数分别记作 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

（2）常用性质

①若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.该公式揭示了求解正态分布问题的一个重要思路：**标准化**.

②正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 具有**对称性**，也即其概率密度是关于直线 $x=\mu$ 对称的.特别地，标准正态分布的概率密度是偶函数；该性质也可以概括成等式：$\Phi(-x)+\Phi(x)=1$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数.

【例 5】设随机变量 ξ 在区间 $(0,7)$ 上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率为________.

【答案】$\frac{5}{7}$.

【例 6】设随机变量 Y 服从参数为 λ 的指数分布, a 为常数且大于零，则 $P\{Y \le a+1 | Y > a\} =$________.

【答案】$1-e^{-\lambda}$.

【例 7】设 X 的概率密度为 $f(x) = ae^{-x^2+4x}$，求 a.

【答案】$\frac{1}{e^4\sqrt{\pi}}$.

【小结】对于 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c}dx(a>0)$ 的计算，可以从如下两个角度入手：

①凑出某正态分布的概率密度函数，借助其性质进行求解；

②借助泊松积分公式：$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

【例 8】 设随机变量 $X \sim N(10, 0.02^2)$，已知 $\Phi(2.5) = 0.9938$，则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为________.

【答案】 0.9876.

【小结】 计算正态分布的概率时，一般需要对随机变量进行标准化，借助标准正态分布查表计算.

【例 9】 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma_1{}^2), Y \sim N(\mu, \sigma_2{}^2)$，且 $P\{|X-\mu| < a\} > P\{|Y-\mu| < a\}$，$a$ 为大于零的常数，则必有（　　）

（A）$\sigma_1 < \sigma_2$　　（B）$\sigma_1 > \sigma_2$　　（C）$\sigma_1 = \sigma_2$　　（D）σ_1, σ_2 的大小与 a 有关

【答案】（A）.

【小结】 当题目中出现了多个正态分布或某正态分布的参数发生改变时，一般需要先将其标准化再进行比较或讨论.

【例 10】 设随机变量 X,Y 分别服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$ 和 $N(2,\sigma^2)$，试比较 $p_1 = P\{X < -2\}$ 和 $p_2 = P\{Y > 4\}$ 的大小.

【答案】 $p_1 < p_2$.

【小结】 除了标准化以外，使用对称性也是解决正态分布问题的基本思路之一.使用的方法一般是结合概率密度的图像直接进行讨论或计算.

【例 11】 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为偶函数，其分布函数为 $F(x)$，则对于任意的实数 c，有（　）

（A）$F(-c) = 1 - \int_0^c f(x)dx$　　（B）$F(-c) = \frac{1}{2} - \int_0^c f(x)dx$

（C）$F(-c) = F(c)$　　（D）$F(-c) = 2F(c) - 1$

【答案】（B）.

【小结】 对称性的使用并不仅限于正态分布，只要随机变量的概率密度是关于某一条直线对称的，就可以考虑使用对称性.

模块五　多维随机变量

一、基本概念

1．多维随机变量及其分布函数

（1）多维随机变量的定义

设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{e\}$，$X_1=X_1(e)$，$X_2=X_2(e)$，…，$X_n=X_n(e)$ 是定义在 Ω 上的 n 个随机变量，则由它们组成的向量值函数 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 Ω 上的 n 维随机变量.

（2）二维随机变量的分布函数

设 (X,Y) 是二维随机变量，对于任意实数 x,y，二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

（3）二维随机变量的分布函数的性质

分布函数 $F(x,y)$ 具有以下的基本性质：

① $F(x,y)$ 分别关于 x 和 y 单调不减；

② $0\le F(x,y)\le 1$，

且 $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；

③ $F(x,y)$ 分别关于 x 和 y 右连续.

【例 1】设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$$，试求常数A,B,C.

【答案】$A=\frac{1}{\pi^2},B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{2}$.

2．二维离散型随机变量

（1）定义

如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对，则称(X,Y)是离散型的二维随机变量.或者可以说，对于二维随机变量(X,Y)来说，如果X,Y都是离散型的，则称(X,Y)为离散型的二维随机变量.

（2）联合分布律

设随机变量X,Y所有可能的取值分别为x_i和y_j，$(i,j=1,2,\cdots)$，(X,Y)取各个可能值的概率为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，$(i,j=1,2,\cdots)$，我们将它称为二维随机变量(X,Y)的分布律，或称为随机变量X和Y的联合分布律.

一般情况下，我们用如下的表格来表示二维随机变量的分布律：

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{m1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{m2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_n	p_{1n}	p_{2n}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

（3）性质

二维随机变量的分布律有如下性质：

①非负性：$p_{ij} \geq 0$；**②归一性：**$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

【例 2】设(X,Y)的概率分布如下表所示

$Y \backslash X$	0	1
0	a	0.4
1	0.1	b

且事件$\{X=0\}$和$\{X+Y=1\}$相互独立，求a，b.

【答案】$a=0.1, b=0.4$.

【例 3】袋中有1个红球，2 个白球，3 个黑球，现有放回地从袋中取两次，每次取一个球，X，Y 分别表示两次取球的红球、白球的个数，求二维随机变量(X,Y)的分布律.

【答案】

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

【小结】计算二维离散型随机变量的分布律的方法和一维类似，仍然是先确定X,Y所有可能的取值，再逐一计算每一组取值所对应的概率.

3．二维连续型随机变量

（1）定义

$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使得对于任意 x， y 有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$，则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度，或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

（2）概率密度的性质

设 $f(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度，则有

① $f(x,y)\geq 0$；

② $\iint\limits_{R^2}f(x,y)dxdy=1$；

③若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$；

④设 G 是 xoy 平面上的某一区域，则 (X,Y) 的取值落在 G 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy.$$

【**例 4**】设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}ce^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求：

（1）常数 c；（2） $P\{0<X\leq 1,0<Y\leq 2\}$.

【答案】（1）6；（2）$(e^{-2}-1)(e^{-6}-1)$.

【例 5】设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，则 $P\{X+Y\le 1\}=$________.

【答案】$1+e^{-1}-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

【小结】①计算二维连续型随机变量概率密度中的参数一般思路是利用其归一性.
②对于连续型的一维、二维随机变量，已知概率密度计算概率均通过积分实现.区别是一维情况下计算的是随机变量落在某一区间内的概率，计算的是定积分；二维情况下计算的是随机变量落在平面某一区域内的概率，计算的是二重积分.

【例 6】设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度 $f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(x+2y)}, x>0, y>0 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$.求：

（1）(X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$；（2）概率 $P\{Y\le X\}$.

【答案】（1）$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-2y}),\ x>0, y>0 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$；（2）$\dfrac{2}{3}$.

【小结】和一维随机变量类似，求二维随机变量分布函数的基本方法也是通过定义，转化为计算概率 $P\{X\le x, Y\le y\}$，这里的难点在于讨论区域 $\{(X,Y)\big| X\le x, Y\le y\}$ 和概

率密度不为零的“有效区域”的交集.

【例 7】已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1, 0<y<1\\0, \quad 其他\end{cases}$，求 X 和 Y 的联合分布函数.

【答案】$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0\\ xy, & 0\le x<1, 0\le y<1\\ x, & 0\le x<1, y\ge 1\\ y, & 0\le y<1, x\ge 1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$.

二、常见分布

1．二维均匀分布

若二维随机变量 (X,Y) 的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 $S(D)$ 表示区域 D 的面积，则称 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布.

【注】二维均匀分布中，随机变量落在某一区域 D_1 内的概率等于 $\dfrac{S(D_1 \cap D)}{S(D)}$.

【例 8】设二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，其中

$D=\{(x,y)\,|\,-1<y<x, 0<x<1\}$，求 $P_1=P\left\{X<\dfrac{1}{2}\middle|Y<0\right\}$，$P_2=P\left\{X<\dfrac{1}{2}\middle|Y>0\right\}$.

【答案】$P_1=\dfrac{1}{2}$，$P_2=\dfrac{1}{4}$.

2．二维正态分布

（1）定义

若二维随机变量 (X,Y) 的密度函数形如：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中参数 $\mu_1\in R,\mu_2\in R,\sigma_1>0,\sigma_2>0,\ X,Y$ 的相关系数 $\rho\in(-1,1)$，则称二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，并记 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$.

（2）性质

若二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则随机变量 X,Y 满足如下基本性质：

①$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$，$Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$；

②X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$，也即 X 与 Y 不相关；

③对任意不全为零的实数 a,b，$Z=aX+bY$ 仍然服从正态分布.

模块六 边缘分布与条件分布

一、边缘分布

1．边缘分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能的取值为(x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots.$$

则称

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},i=1,2,\cdots，\ P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j},j=1,2,\cdots,$$

分别为(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律.

【注】①(X,Y)的边缘分布律本质上就是一维随机变量X或Y的分布律；

②根据(X,Y)的边缘分布律的定义，可将其求解步骤归纳为：

求出X和Y的联合分布律；

对联合分布律的各行或各列做加法即可得到相应的边缘分布律.

【例 1】设X和Y分别表示从1，2，3三个数字中任取两个数，记$\xi=\max\{X,Y\}$，求(X,ξ)的分布律以及边缘分布律.

【答案】

$\xi \backslash X$	1	2	3	$p_{\cdot j}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

2．边缘分布函数

（1）定义

二维随机变量(X,Y)作为一个整体，具有分布函数$F(x,y)$，而X和Y都是一维随机变量，各自也有分布函数，将它们分别记为$F_X(x),F_Y(y)$，依次称为二维随机变量(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布函数.

（2）计算公式

边缘分布函数可由(X,Y)的分布函数$F(x,y)$所确定，即

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y\le +\infty\}=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y),$$

同理，$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$.

【例 2】一个电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命（单位：千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x\geq 0,y\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求二维随机变量 (X,Y) 的边缘分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.

【答案】$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

3．边缘概率密度

对于二维连续型随机变量 (X,Y)，设它的概率密度为 $f(x,y)$，则关于 X 的边缘分布函数为 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)dy\right]du$.由此可知 X 是一个连续型随机变量，且其概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$.同理可知，Y 也是一个连续型随机变量，其概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$，分别称 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度.

【例 3】设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>x>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求：(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$.

【答案】$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, \text{ 其他} \end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, y>0 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$.

【小结】计算二维连续型随机变量的边缘概率密度的过程相当于计算二重积分的第一步，一般来说，这里的积分本身计算难度不大，难点往往在于确定自变量的范围和积分上下限.

二、条件分布

1．条件分布律

设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}，\quad i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$的条件下随机变量X的条件分布律.

同样，对于固定的i，若$P\{X=x_i\}>0$，则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{P_{ij}}{P_{i\cdot}}，\quad j=1,2,\cdots$$

为在$X=x_i$的条件下随机变量Y的条件分布律.

【注】条件分布律的求解步骤为：①求出(X,Y)的联合分布律p_{ij}；②求出(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律$p_{i\cdot}>0,p_{\cdot j}>0$；③条件分布律计算口诀：条件等于联合除以边缘.由此可见，求解边缘和条件分布律的关键步骤是联合分布律的计算.

【例 4】随机地掷三次硬币，随机事件A表示前两次中恰好一次正面，B表示三次中恰好一次正面，令$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\ 0, & 若A不发生\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\ 0, & 若B不发生\end{cases}$.

（1）求(X,Y)的概率分布；（2）求当$Y=1$时，X的条件分布律.

【答案】（1）

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

（2）当$Y=1$时，X的条件分布律：

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

2．条件概率密度

设二维随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)$，(X,Y)关于Y的边缘概率密度$f_Y(y)$，若对于固定的y，$f_Y(y)>0$，则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为$Y=y$的条件下X的条件概率密度，记为$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

类似地，可以定义$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$为$X=x$的条件下$Y$的条件概率密度.

【注】条件概率密度计算口诀：条件等于联合除以边缘，前提要求$f_X(x)>0, f_Y(y)>0$.

【例 5】设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & x>0,y>x \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求：(X,Y)的条件概率密度.

【答案】当$y>0$时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$；

当$x>0$时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} e^{x-y}, & y>x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

【小结】关于条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$，计算时要注意在$f_X(x)>0$的前提下进行求解.