考研数学入学测试题解析

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________　　　　　　　　　　得分__________

一、判断题：判断下列命题或计算式的正误，将判断结果写在每小题后的空格中，正确的填“√”，错误的填“×”，每小题 5 分，共 50 分.

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　____√____；

【解析】：两个重要极限之一，极限部分的基本公式。

【错误原因】：重要极限的公式遗忘或者记忆错误。

2、当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 等价于 $\dfrac{x}{2}$。　　　　　　　　　　　　　　　　　____×____；

【解析】：当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 等价于 $\dfrac{x^2}{2}$ 而非 $\dfrac{x}{2}$。

【错误原因】：常见等价无穷小替换的公式遗忘或者记忆错误。

3、如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则称 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的高阶无穷小　　　____√____；

【解析】：本题考查高阶无穷小的概念，如果 $x\to \square$ 时，$u(x),v(x)$ 均为无穷小，且

$\lim\limits_{x\to \square}\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$，则称 $x\to \square$ 时，$u(x)$ 是 $v(x)$ 的高阶无穷小。

【错误原因】：基本概念不熟悉或者不理解。

4、函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的定义是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ____√____；

【解析】：本题考查连续性的定义：函数在一点连续的定义是函数在该点的极限存在且等于这一点的函数值。

【错误原因】：基本概念不熟悉或者不理解。

5、$(\tan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ ____×____；

【解析】：本题考查基本求导公式，$(\tan x)'=\sec^2 x$

【错误原因】：基本公式不熟悉，与公式 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 混淆。

6、$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$ ____√____；

【解析】：本题考查基本求导公式 $(\sec x)'=\sec x\tan x$ 与微分的计算公式 $df(x)=f'(x)dx$。

【错误原因】：对 $\sec x$ 的求导公式不熟悉或是不知道微分的计算公式。

7、如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 ____√____；

【解析】：本题考查函数可导和可微的关系：函数在一点可导是函数在该点可微的充分必要条件，这两个命题完全是等价的。

【错误原因】：不熟悉函数可导与可微的概念，不了解它们之间的关系。

8、$\int \arctan x dx=\dfrac{1}{1+x^2}+C$ ____×____；

【解析】：本题基本积分公式：$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$。

【错误原因】：不熟悉基本积分公式，原公式$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$记忆不清。

9、$\left(\int_0^{x^2} \sin t^2 dt\right)' = \sin x^4$　　　　　　　　　　　　　　$\underline{\quad\times\quad}$；

【解析】：本题考查变上限积分求导定理及复合函数求导法则：$\left(\int_0^{x^2} \sin t^2 dt\right)' = \sin x^4 \cdot \left(x^2\right)' = 2x\sin x^4$。

【错误原因】：忘记变限积分求导的基本公式或者记忆错误（忘记对上限求导），导致误判。

10、如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则有$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$　　　　　　　　$\underline{\quad\surd\quad}$。

【解析】：本题考查牛顿-莱布尼兹公式。

【错误原因】：不熟悉基本定理。

※试题分析：本题主要考查考试对基本概念和公式的记忆情况及熟练程度，如果本题得分率比较高，则说明考生概念基本清楚，基本公式和定理记忆情况良好；反之，则说明概念混乱，基本公式和定理不清楚，错记、混记比较多。

二、填空题：请将正确答案写在题后的空格中，每小题 7 分，共 35 分.

1、$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{\arctan x \cdot \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)} =$ __________；

【解析】：本题考查等价无穷小替换公式$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\arctan x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}=2$。

【错误原因】：第一种情况：学生不知道利用等价无穷小替换来化简或者计算极限；第二种情况：常见等替公式没记住或者记错。

2、$\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$__________；

【解析】：$\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2}}=e^2$。

【错误原因】：第一种情况：幂指函数（1^∞型）极限式不会求解； 第二种情况：只计算了指数部分的极限，最后结果忘记加上底数e。

3、$\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)'=$__________；

【解析】：

$$\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-(\cos x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{(-\sin x)(1+\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-1}{1+\sin x}。$$

【错误原因】：第一种情况：除法的求导公式，可能把分子的顺序记反了；第二种情况：基本函数的求导公式记错或者计算错误。

4、设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\cos(x+y)+x\ln y=2$ 所确定的，则 $\frac{dy}{dx}=$__________；

【解析】：对方程两边同时求导可得，$-\sin(x+y)(1+y^{'})+\ln y+\frac{xy^{'}}{y}=0$

解得 $y^{'}=\frac{(\sin(x+y)-\ln y)y}{x-\sin(x+y)y}$。

【错误原因】：第一种情况：学生不会隐函数方程求导方法；第二种情况：求导过程中没有将 y 看作是 x 的函数，求导过程出错。

5、$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{\sqrt{x}}\,dx=$__________；

【解析】：

$$
\begin{aligned}
&\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{\sqrt{x}}\,dx \\
&=\int(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}-2})dx=\int(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{7}{4}})dx \\
&=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}+1}-\frac{1}{1-\frac{7}{4}}x^{-\frac{7}{4}+1}+C(C\in R) \\
&=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}}+C
\end{aligned}
$$

【错误原因】：第一种情况：学生忽略掉常数 C，第二种情况：出现计算上出现错误。

※试题分析：本题主要考查学生对高等数学基本计算公式和计算方法的熟悉和掌握程度，本题如果得分比较高，说明学生计算能力比较好，对基本公式和方法比较熟练；反之，则说明计算能力比较欠缺，基本公式和方法遗忘率比较高。

三、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分，每小题 15 分，

共 15 分.

1、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，试求 $f'(x)$ 并检验 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续。

【解析】当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)'=\left(x^2\right)'\cos\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)'$

$$=2x\cos\frac{1}{x}-x^2\sin\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$

由导数的定义可知：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$。

故 $f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$。

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right]$ 不存在（其中 $\lim\limits_{x\to 0}2x\cos\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在）。则由连续性的定义可知：$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

※试题分析：本题主要考查学生对基本概念的熟悉程度、辨别能力以及考生对基本运算和公式的掌握情况，所考查到的知识点比较综合：包括求导公式和求导法则，导数的定义，极限的运算法则及公式，函数连续的概念。可能出现的错误有：

1）导数的概念不清晰，错把 $x=0$ 处的导数也通过求导法则来进行计算，或是不能正确的写出函数在一点的导数的定义；

2）极限的公式不熟悉，写出导数的定义式之后，无法正确看到并使用“无穷小量×有界量=无穷小量”的公式，或是在计算 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 时，无法准确判断出该极限不存在；

3）连续的概念不清晰，无法将函数连续性的定义正确地套用在 $f'(x)$ 上，或是对连续性和可导性的关系不清楚，错将“可导函数必连续”的结论套用在此处。

※测试结果分析：本试卷主要考查学生对高等数学中最基本的概念、公式定理以及基本运算的熟悉以及记忆情况，测试考生是否具备最基本的学科基础。根据学生的得分情况，可以做出以下划分：

得分	分析
70~100	考生对高等数学的基本概念、公式及定理比较熟悉，知识遗忘率较低，具备基本的计算能力，有能力运用基本的数学工具解决学科中中低难度的的综合性问题，具有相对扎实的学科基础，但考研对考生基本功的要求要远高于大学期间对应科目，所以学习的时候还是要注意端正态度、稳定心态，先彻底夯实学科基础，切忌眼高手低，好高骛远。
50-69	考生对高等数学的基本概念、公式及定理有一定的了解，对基本计算方法有但也有一定的遗忘率，存在一些基本概念不清晰、理解有偏差，或是基本公式和定理错记、混记的现象，有一定的计算能力，但熟练度和准确度还比较低，学习的时候还是要从零开始，重视对基本概念、公式和定理的理解和记忆，配合适量的练习，加深对知识的理解，提高运算熟练度。
20-49	考生对高等数学的基本概念、公式和定理有一定的印象，但遗忘率较高，基本概念不清晰、基本公式和定理错记、混记的现象比较明显，基本运算能力比较差，计算的错误率比较高，学习的时候必须抛弃过去对知识片面甚至错误的认识，踏踏实实跟着老师从零开始，将打好基础作为第一要务，尤其重视对基本概念、公式和定理的理解和记忆，配合适量的练习，加深对知识的理解，提高运算熟练度。。
0-19	考生对高等数学的基本概念、公式及定理很不了解，学科的知识遗忘率很高，

	基本不具备运算能力，学科基础基本为零，学习的时候应该完全从零开始，尤其注重对基本概念、公式及定理的学习，一步一步稳扎稳打，踏踏实实打好基础，但也无需过于担忧或心急，我们基础阶段的课程定位就是零基础，只要能从第一节课开始严格执行基础阶段的学习计划，按照老师课上和课下的要求，就一定能顺利实现基础阶段的学习目标。