## 2020 考研-数学-基础阶段 第二次测试卷解析

本试卷满分 100 分, 考试时间 30 分钟

姓名\_\_\_\_\_\_ 得分\_\_\_\_

一、解答题:请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、(本题满分 20 分) 计算 
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(3^x + \ln 3x^2)(3^x + x^9)}{4 \cdot 3^{2x} + \log_2 x}$$
。

【答案】 $\frac{1}{4}$ 。

【解析】 
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(3^x + \ln 3x^2)(3^x + x^9)}{4 \cdot 3^{2x} + \log_3 x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x \cdot 3^x}{4 \cdot 3^{2x}} = \frac{1}{4}$$
。

2、(本题满分 20 分) 计算 
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x}$$
。

【答案】 $\frac{1}{2}$ 。

【解析】 
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{(x\sqrt{1+\sin^2 x} - x)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$$

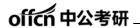
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{2x(\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} .$$

3、(本题满分 20 分) 计算  $\lim_{x\to 0} x^{x^x-1}$ 。

【答案】1。

【解析】 
$$\lim_{x\to 0} x^{x^x-1} = e^{\lim_{x\to 0} (x^x-1)\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} (e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2} = e^0 = 1$$
。

4、(本题满分 20 分) 计算 
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - \sqrt{1 + x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$$
。



【答案】 $-\frac{1}{12}$ 。

【解析】 
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{\left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) - (1 + x^2) + o(x^2)\right]x^2} = -\frac{1}{12}.$$

5、(本题满分 20 分) 求函数  $f(x) = \frac{x+1}{x} \ln(1+x) \arctan \frac{1}{x-1}$  间断点的类型。

【答案】函数 f(x) 的可去间断点为 x=0 , 跳跃间断点为 x=1

【解析】由题易知,函数 f(x) 的间断点为 x=0, x=1,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} \ln(1+x) \arctan \frac{1}{x-1} = -\frac{\pi}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{if } x = 0 \text{ } \exists \text{ }$$

断点: 
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x} \ln(1+x) \arctan \frac{1}{x-1} = 2 \ln 2 \lim_{x\to 1^+} \arctan \frac{1}{x-1} = \pi \ln 2$$