目录

模块一 函数

一、函数的概念

若 D 为一个非空实数集合，设有一个对应法则 f，使得对每一个 $x \in D$ 都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个**函数**，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$, $x \in D$。其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，集合 D 称为函数的**定义域**，也可以记作 $D(f)$。对于 $x_0 \in D$ 所对应的 y 的值，记作 y_0 或 $y = f(x_0)$，称为当 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的**函数值**。全体函数值组成的集合 $\{y | y = f(x), x \in D\}$，称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**，记 $f(D)$。

注：1）两个函数相等当且仅当它们的定义域与对应法则均相等。

2）在没有特别指定的情况下，函数的定义域取自然定义域，即使函数运算有意义的自变量的取值范围。易知，人为指定的定义域必为自然定义域的子集。常见的函数的自然定义域如下：

$$
\begin{array}{ll}
y=\sqrt{x}, x \geq 0; & y=\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\
y=\ln x, x>0; & y=e^{x}, x \in R \\
y=\sin x, x \in R; & y=\cos x, x \in R \\
y=\tan x, x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi; & y=\cot x, x \neq k\pi (k \in Z)
\end{array}
$$

二、函数的运算

1、四则运算

2、复合函数

设 $y = f(u), u \in D_1$ 与 $u = g(x), x \in D_2$ 为两个函数，如果 $g(x)$ 的值域 $g(D_2)$ 包含

于 $f(u)$ 的定义域 D_1，则可以定义 $y=f(g(x)),x\in D_2$ 为函数 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的**复合函数**，记作 $y=f(g(x))$ 或 $f\circ g$。

【例 1】：已知 $f(x)=e^{x^2},f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

【答案】：$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},x\leq 0$。

【例 2】：设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$，试求 $f(f(x))$ 与 $f(f(f(x)))$。

【答案】：$f(f(x))=\begin{cases}4x, & x<0\\ x^4, & x\geq 0\end{cases}$，$f(f(f(x)))=\begin{cases}8x, & x<0\\ x^8, & x\geq 0\end{cases}$。

【例 3】【2001-2】：$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}=$（ ）

（A）0 （B）1 （C）$\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ （D）$\begin{cases}0, & |x|\leq 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

【答案】：（B）。

3、反函数

（1）反函数的定义

设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的一个函数，其值域为 $f(D)$。如果对于每一个 $y\in f(D)$，都有唯一确定的 x 使得 $f(x)=y$，我们就将该对应法则记作 f^{-1}，这个定义在 $f(D)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 就称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数。

（2）存在反函数的充要条件

函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充要条件是，对于定义域 D 中任意两个不同的自变量 x_1,x_2，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$。

（3）反函数的性质

①函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

②设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 (a,b)，值域为 (α,β)， $y=f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增（或递减），则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上存在反函数； $x=f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 上单调递增（或递减）。

三、基本性质

1、单调性

（1）定义

对于函数 $y=f(x)$ ，$x\in D$ ，如果在某区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$ 都满足 $f(x_1)>f(x_2)$（或 $f(x_1)<f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调递增**（**或单调递减**），相应地称 I 是 $f(x)$ 的一个**单调增区间**（或**单调减区间**）。如果对区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$ 都有 $f(x_1)\ge f(x_2)$（或 $f(x_1)\le f(x_2)$），我们就称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调不减**（或**单调不增**）。

（2）性质

①如果 $f_1(x),f_2(x)$ 都是增函数（或减函数），则 $f_1(x)+f_2(x)$ 也是增函数（或减函数）。

②设 $f(x)$ 是增函数，如果常数 $C>0$，则 $Cf(x)$ 是增函数；如果常数 $C<0$，则 $Cf(x)$ 是减函数。

③如果函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 增减性相同，则 $y=f(g(x))$ 为增函数；如果函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=f(x)$ 增减性相反，则 $y=f(g(x))$ 为减函数。

2、周期性

（1）定义

对于函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在正数 T，使得对函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 内的任意一点 x 都有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是一个**周期函数**，而 T 是 $f(x)$ 的一个周期。易知如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期，那么对任意的非零整数 n，nT 都是 $f(x)$ 的周期。在 $f(x)$ 的所有周期中，我们把其中最小的正数称为**最小正周期**。

注：常见周期函数及其最小正周期：

$$y=\sin x,T=2\pi;\quad y=\cos x,T=2\pi;$$
$$y=\tan x,T=\pi;\quad y=\cot x,T=\pi。$$

（2）性质

①如果 $f(x)$ 以 T 为最小正周期，则对任意的非零常数 C，$Cf(x)$ 仍然以 T 为最小正周期，$f(Cx)$ 以 $\dfrac{T}{|C|}$ 为最小正周期。

②如果 $f_1(x), f_2(x)$ 都以 T 为周期，则 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$ 仍然以 T 为周期（$k_1,k_2\in R$）。注意这时最小正周期有可能缩小，如 $f_1(x)=\cos 2x+\sin x, f_2(x)=\sin x$ 都以 2π 为最小正周期，但 $f_1(x)-f_2(x)=\cos 2x$ 以 π 为最小正周期。

3、奇偶性

（1）定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。如果对其定义域 D 内的任意一点 x，都有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），就称 $f(x)$ 是一个**偶函数**（或**奇函数**）。

（2）常见的奇偶函数

常见的奇函数：$y=x^k$（k 为奇数），$y=\sin x, y=\tan x, y=\cot x, y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

常见的偶函数：$y=x^k$（k 为偶数），$y=\cos x, y=|x|$。

（3）性质

①偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称；

②如果 $f_1(x), f_2(x)$ 都是奇函数（或偶函数），则对任意的常数 $k_1,k_2\in R$，$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$ 仍然是奇函数（或偶函数）；

③如果 $f_1(x),f_2(x)$ 奇偶性相同，则 $f_1(x)f_2(x)$ 为偶函数；如果 $f_1(x),f_2(x)$ 奇偶性相反，则 $f_1(x)f_2(x)$ 为奇函数；

④设 $f(x)$ 为任一定义在对称区间上的函数，$f(|x|)$，$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 与 $f(x)f(-x)$ 都是偶函数；$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数；

⑤任意定义在对称区间上的函数 $f(x)$ 都可以写成一个偶函数与一个奇函数的和，$f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$。

4、有界性

（1）定义

设 $y=f(x),x\in D$ 是一个函数，如果存在一个实数 M，使得对定义域 D 内任意的一点 x，都有 $f(x)\le M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内**有上界**，并称 M 是函数 $f(x)$ 在 D 内的一个**上界**；如果存在一个实数 m，使得对定义域 D 内任意的一点 x，都有 $f(x)\ge m$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内**有下界**，并称 m 是函数 $f(x)$ 在 D 内的一个**下界**。

如果函数 $f(x)$ 在 D 内既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 D 内**有界**。

（2）常见的有界函数

$f(x)=\sin x$，$|f(x)|\le 1$；

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}，\quad |f(x)|\le 1；$$

$$f(x)=\arcsin x, x\in[-1,1]，\ |f(x)|\le\frac{\pi}{2}。$$

【例 4】：讨论下列函数在其定义域内的有界性。

（1）$\dfrac{x}{1+x^2}$；　　（2）$\sin\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)$；　　（3）$x\sin x$。

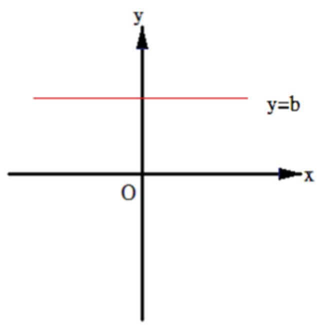
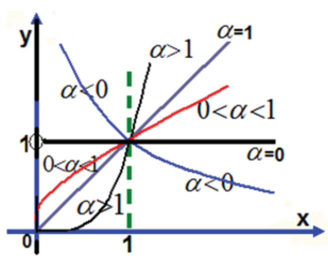
【答案】：（1）有界；（2）有界；（3）无界。

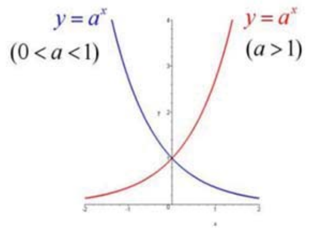
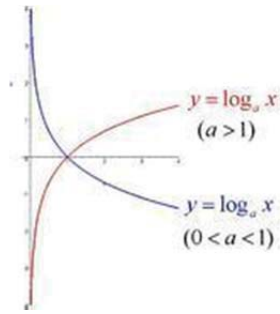
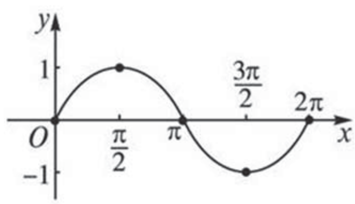
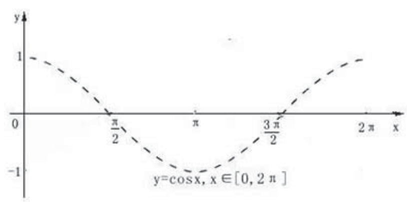
四、函数分类

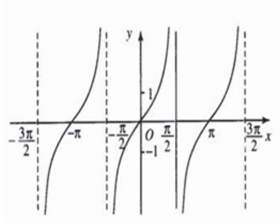
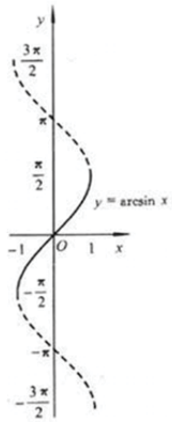
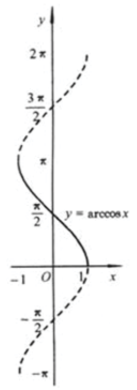
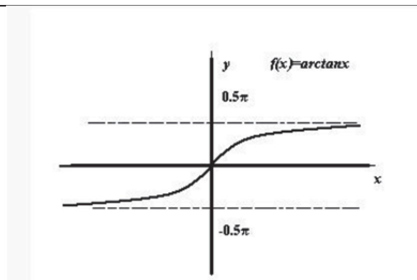
1、基本初等函数

常函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数与反三角函数称为**基本初等函数**。

以下为几个常见的基本初等函数的图像及性质：

名称及表达式	定义域	图形（举例）	特性
常函数 $y=b$	$(-\infty,+\infty)$		图像为平行于 x 轴的一条直线
幂函数 $y=x^\alpha$ $(\alpha\neq 0)$	随 α 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有意义		经过点 $(1,1)$； 在第一象限内 当 $a>0$ 时，为增函数； 当 $a<0$ 时，为减函数

<table>
<tr><td colspan="2">指数函数
$y=a^x$
$(a>0,a\neq1)$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>图象在 x 轴上方；过 $(0,1)$ 点；当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数</td></tr>
<tr><td colspan="2">对数函数
$y=\log_a x$
$(a>0,a\neq1)$</td><td>$(0,+\infty)$</td><td></td><td>图像在 y 轴的右侧；过 $(1,0)$ 点；当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三角函数</td><td>正弦函数
$y=\sin x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>以 2π 为周期；奇函数，图形关于原点对称；在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $-1\leq\sin x\leq1$</td></tr>
<tr><td>余弦函数
$y=\cos x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>以 2π 为周期；偶函数，图形关于 y 轴对称；在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $-1\leq\cos x\leq1$</td></tr>
</table>

	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期； 奇函数； 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数； 值域为 R
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调递增； 奇函数； 值域： $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调递减； 值域：$[0,\pi]$
	反正切函数 $y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调递增； 奇函数； 值域： $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

注：考生需要了解各基本初等函数的解析式、定义域以及大致的图像。

2、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算以及复合后得到的函数统称为**初等函数**。

3、分段函数

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\in I_1 \\ h(x), & x\in I_2 \end{cases};$$

（1）**符号函数：** $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$；

（2）**绝对值函数：** $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0 \\ -f(x), & f(x)<0 \end{cases}$；

（3）**取整函数：** $[f(x)]$：不超过 $f(x)$ 的最大整数值；

（4）**最大值函数：** $\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge g(x) \\ g(x), & f(x)<g(x) \end{cases}$；

（5）**最小值函数：** $\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases} g(x), & f(x)\ge g(x) \\ f(x), & f(x)<g(x) \end{cases}$。

4、隐函数

由形如 $F(x,y)=0$ 的方程确定的函数关系 $y=y(x)$，一般没有明显的函数表达式。

5、参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}，\ t \in [\alpha, \beta]。$$

6、极限函数

比如 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{nx}{n(x-1)+1}$。

7、积分上限函数

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$。

五、常用公式

1、幂函数公式

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$，$(x^a)^k = x^{ak}$。

2、对数公式

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$，$k \ln a = \ln a^k$，其中 $a > 0, b > 0$。

3、三角公式

$\sin(-x) = -\sin x$，$\cos(-x) = \cos x$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$，

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$，$\sin(\pi - x) = \sin x$，$\cos(\pi - x) = -\cos x$，

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$，

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$， $\sin 2x=2\sin x\cos x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$，

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$，

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$， $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

4、导数公式

$(c)'=0$，$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，

$(\cot x)'=-\csc^2 x$， $(\sec x)'=\sec x\tan x$， $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$， $(e^x)'=e^x$，

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0,a\neq 1)$， $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$， $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$。

模块二　极限

一、概念

1、函数极限

（1）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，如果存在实数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点处的**极限值**为 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某左邻域内有定义，如果存在实数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$ 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点处的**左极限**为 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$。或 $f(x_0^-)$，或 $f(x_0-0)$。

类似地，可以定义**右极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，或 $f(x_0^+)$，或 $f(x_0+0)$。

左极限和右极限统称为单侧极限。

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 上有定义（X 为某正数），如果存在实数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的**极限值**为 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

类似地，可以分别定义 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$。

（3）左右极限与极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等。

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在且相等。

【例 1】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x<0\end{cases}$ 在 $x\to 0$ 和 $x\to\infty$ 时的极限。

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$。

2、数列极限

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在实数 a，使得 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

注：极限描述的是在自变量的某一变化过程中，函数值的变化情况。对于极限的定义，考生不需要太深入的理解，只需要了解极限的实际意义，分清楚七种极限过程即可：$n\to\infty, x\to x_0, x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$。

3、无穷小量和无穷大量

（1）无穷小量

如果在某极限过程 $x\to\square$ 中（$x\to\square$ 可表示上述七种极限过程中的任何一种，下同），函数 $f(x)$ 的极限值为 0，也即 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to\square$ 时的**无穷小量**。

（2）无穷大量

如果在某极限过程 $x\to\square$ 中，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，也即 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$，则称函数 $f(x)$ 为该极限过程中的**无穷大量**。

注：无穷大量的重要性质：

1）无穷大量实际上是极限不存在的情况，但极限不存在的量并不一定都是无穷大量；

2）与无穷小量类似，无穷大量也是一个动态变化的过程，而不是一个实际存在的数。

（3）无穷小量和无穷大量的关系

①如果$x\to\square$时，$f(x)$为无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$在同一极限过程中为无穷小量；

②如果$x\to\square$时，$f(x)$为无穷小量，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$在同一极限过程中为无穷大量。

（4）无穷小量的比较

设在某极限过程$x\to\square$中，函数$\alpha(x),\beta(x)$都为无穷小量，并且都不为0。

① 如果$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当$x\to\square$时，$\alpha(x)$为$\beta(x)$的**高阶无穷小量**，或$\beta(x)$为$\alpha(x)$的**低阶无穷小量**，记作$\alpha(x)=o(\beta(x))$；

② 如果$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称当$x\to\square$时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为**同阶无穷小量**；

特殊的，若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称当$x\to\square$时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价无穷小量，记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$。

（5）k阶无穷小量

设在某极限过程$x\to\square$中，函数$\alpha(x),\beta(x)$都为无穷小量，并且都不为0。如果$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^k}=C\neq 0$，则称当$x\to\square$时，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$**阶无穷小量**。

注：在同一极限过程下，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的k阶无穷小量也就是说$\alpha(x)$与$\beta^k(x)$（$k>0$）

是同阶无穷小量。

二、极限的基本性质

1、数列极限的基本性质

（1）唯一性：假设数列$\{x_n\}$的极限存在，则其极限值唯一；

（2）有界性：假设数列$\{x_n\}$的极限存在，则数列$\{x_n\}$有界；

（3）保号性：假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$，则存在正整数$N>0$，使得当$n>N$时，有$x_n>0$；

推论：假设存在正整数$N>0$，使得当$n>N$时，$x_n\ge 0$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge 0$。

2、函数极限的基本性质

（1）唯一性：假设函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则其极限值唯一；

（2）有界性：假设函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在$\delta>0$，使得函数$f(x)$在$x_0$的去心邻域$\left(x_0-\delta,x_0\right)\cup\left(x_0,x_0+\delta\right)$内有界；

（3）保号性：假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$，则$\exists\ \delta>0$，使得当$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时，有$f(x)>0$；

推论：假设$\exists\delta>0$，使得当$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时，有$f(x)\ge 0$，并且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ge 0$。

注：（1）函数极限中的有界性只是得到了该函数在极限点“附近”，也即某去心邻域内有界，故又称为局部有界性。

（2）由于函数极限与函数在极限点处的取值是没有关系的，所以在函数极限的性质中，我们的条件或得到的结论一律都是在极限点的某去心邻域内成立的。

三、函数极限的计算

1、四则运算

以函数极限的四则运算法则为例。

设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A, \lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$，则有：

$$\lim_{x\to\square}[f(x)+g(x)]=A+B,\quad \lim_{x\to\square} f(x)g(x)=AB,\quad \lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)\text{。}$$

注：1）数列极限的四则运算法则与函数极限的四则运算法则完全类似。

2）四则运算只适用于有限次计算的情形，对无限次运算不一定适用。

3）无穷小的常见性质：

①有限个无穷小量之和或乘积仍为无穷小量；

②无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量。

4）结合无穷小量和无穷大量的关系和性质，极限的四则运算法则可以有如下推广：

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,(+\infty)-(-\infty)=+\infty,(-\infty)-(+\infty)=-\infty,$$

$$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty,(+\infty)+C=+\infty,$$

$$0\cdot C=0,\frac{C}{0}=\infty,\frac{C}{\infty}=0,C\cdot\infty=\infty(C\neq 0),a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ 0, & 0<a<1\end{cases}\text{。}$$

【例 2】：求下列各函数的极限。

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{x^3+b_1x^2+b_2x+b_3}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+10000!x+10^8x}{2x^2+10^{200}}$。

【答案】：（1）1；（2）$\frac{1}{2}$。

【小结】：本题的方法俗称："抓大头"，当求$\frac{\infty}{\infty}$型极限，分子分母中只保留最高次即可。

【例 3】：求下列各函数的极限。

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^4+1)^3(2x^2+x+3)^4}{(x+1)^{20}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt[3]{27x^3-x-1}}$。

【答案】：（1）16；（2）1。

【例 4】：求下列各函数的极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\sin x\cdot\tan x}{x^2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}$。

【答案】：（1）2；（2）$\dfrac{1}{4}$。

【小结】：（1）假设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，则有

$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to\square} f(x)+\lim\limits_{x\to\square} g(x)=A+\lim\limits_{x\to\square} g(x)$。

（2）假设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A\neq 0$，则有

$\lim\limits_{x\to\square} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to\square} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square} g(x)=A\cdot\lim\limits_{x\to\square} g(x)$。

【例 5】：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\cos x-e^{x^2}}{x^2(2\cos x+\arcsin x)}$。

【答案】：$-\dfrac{1}{4}$。

【例 6】：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$不存在，则正确的是（　　）

（A）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不一定存在　　（B）$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不一定存在

（C）$\lim\limits_{x\to x_0}[f^2(x)-g^2(x)]$ 一定不存在　　（D）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 一定不存在

【答案】：（D）。

【小结】：（1）收敛＋收敛=收敛，收敛＋发散=发散，发散＋发散=？

（2）收敛×收敛=收敛，收敛×发散=$\begin{cases}\text{发散}, & \text{收敛}\neq 0\\ ?, & \text{收敛}=0\end{cases}$，发散×发散=？

2、等价无穷小替换

定理：设在 $x\to\square$ 时，$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则有：

$$\lim_{x\to\square}f(x)\alpha(x)=\lim_{x\to\square}f(x)\beta(x),\lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{\beta(x)}$$ 。

注：（1）等价无穷小替换在极限计算过程中一般起辅助与简化的作用，它和洛必达法则连用可以简化计算。

（2）只有整个式子的乘除因子才能用等价无穷小替换，有加减时不能替换。

（3）常见的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$$

$$(1+x)^a-1\sim ax,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

【例 7】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{1-\cos x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\arctan\dfrac{x}{2}}{\ln(1+2x^3)}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-e^{x^2}}{\arcsin x^2}$。

【答案】：（1）9；（2）$\dfrac{2}{3}$；（3）$\dfrac{1}{4}$；（4）2；（5）$-\dfrac{5}{4}$。

【小结】：等价无穷小替换的广义化：当$\square\to 0$时，

$$\square \sim \sin\square \sim \arcsin\square \sim \tan\square \sim \arctan\square \sim \ln(1+\square) \sim e^{\square}-1$$

$$(1+\square)^a-1\sim a\square,\ 1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2$$

【例 8】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos 2x}-e}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{\cos x}-1}{\ln\cos x}$。

【答案】：（1）$-\dfrac{1}{\pi}$；（2）$6e$；（3）$\dfrac{1}{n}$。

【小结】：等价无穷小替换之变形：

（1）凑“1”：加 1 减 1，提公因式，

可能需要凑“1”的公式有：$x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,\ (1+x)^a - 1 \sim ax,\ 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$。

（2）凑“0”（考得少）。

【例 9】：计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$。

【答案】：$\dfrac{1}{2}$。

3、洛必达法则

设 $f(x), g(x)$ 满足：

（1）$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$；

（2）$f(x), g(x)$ 在 a 的某去心邻域内可导且 $g'(x) \neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞，

则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

设 $f(x),g(x)$满足：

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$；

（2）存在一个正数 X，当 $|x|>X$ 时有 $f(x),g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞,

则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

注：（1）洛必达法则本身是导数部分的知识点，正常的教学顺序是在讲完导数之后才会涉及，鉴于洛必达法则在计算极限时的重要作用，我们把它总结在极限部分；

（2）在使用洛必达法则时一定要注意检验条件，三个条件缺一不可，否则很容易得到错误的结果；

（3）与等价无穷小量结合使用通常可以简化计算；

（4）多次应用时，注意在用完之后将式子整理化简。

（1）$\dfrac{0}{0}$型未定式

【例 10】：计算下列极限。

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{1-\sqrt{1-x^2}}$；

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{(\sqrt{\cos x}+1)\ln\cos x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{\arcsin x^3}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\arctan x}}{[x-\ln(1+x)](\arctan x+\cos x)}$。

【答案】：（1）1；（2）$-\dfrac{1}{2}$；　（3）$\dfrac{1}{6}$；　（4）0。

（2）$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

【例 11】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+x^{2018}-\ln(x^{10}-10x+2019)}{5^x+ax^{2019}+b(\ln x)^{100}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\frac{2}{x^2}}+x^{-100}+\ln|x|}{4^{\frac{1+x^2}{x^2}}+\dfrac{1}{x^{2000}}-\ln(x^{10}+x^5+1)}$；

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-2x^3+x^2+1}{4^x+3x^3}$。

【答案】：（1）0；（2）0；（3）$\dfrac{1}{4}$；（4）$-\dfrac{2}{3}$。

【小结】：（1）“抓大头”的方法的核心即为抓主要部分先抓类型（指 >> 幂 >> 对），再抓高次。

（2）指数函数是否大头，关键在于看指数函数是否趋于无穷；

（3）对 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限要做到能够口算。

（3）$0\cdot\infty$型与$\infty-\infty$型未定式

【例 12】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[kx-x^2\ln\left(1+\dfrac{k}{x}\right)\right]$（$k\neq0$）；（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}})$。

【答案】：（1）0；（2）$\dfrac{1}{2}$；（3）$\dfrac{k^2}{2}$；（4）0。

【小结】：使用洛必达法则时要注意两点：

（1）一定要检验条件（确保分子分母都趋近于零或无穷）；

（2）一定要先化简（等价无穷小替换以及四则运算的函数分解）。

（4）幂指函数的极限

【例 13】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to0^+}x^x$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$。

【答案】：（1） 1；（2） e。

【小结】：如果 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}$ 为 0^0 型或 ∞^0 型，则使用对数恒等式 $u(x)^{v(x)}=\exp[v(x)\ln u(x)]$ 进行变形，从而只要能计算出极限 $\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln u(x)$ 就可以了。

【例 14】：计算下列极限。

（1） $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{\tan x}}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x+a)(x+b)}\right)^x$；　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$。

【答案】：（1）e^4；（2）e^2；（3）e^{-a-b}；（4）$e^{-\frac{1}{3}}$；（5）$e^{\frac{1}{6}}$。

【小结】：假设 $\lim\limits_{x\to\square} u(x)^{v(x)}$ 为 1^∞ 型，也即 $\lim\limits_{x\to\square} u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\square} v(x)=\infty$，则可以使用公式 $\lim\limits_{x\to\square} u(x)^{v(x)}=\exp\{\lim\limits_{x\to\square}[u(x)-1]v(x)\}$ 来进行计算。

【例 15】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$；

【答案】：（1）$-\dfrac{1}{2}e$；（2）$\sqrt{e}$。

【小结】：如果极限式的某一部分而不是整个极限式为幂指函数，无论该幂指函数是什么类型的极限，一律通过对数恒等式进行变形。

【例 16】：已知当 $x\to 0$ 时，有 $x-\sin ax \sim x^2\ln(1-bx)$，求 a、b。

【答案】：$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$。

4．泰勒公式

（1）带皮亚诺余项的泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有直至 n 阶导数，则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

（2）带拉格朗日余项的泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在含 x_0 的区间 (a,b) 具有 $n+1$ 阶导数，在 $[a,b]$ 内有 n 阶连续导数，则 $\forall x\in[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\&+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间，也可以写成 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$， $\theta\in(0,1)$。

（3）麦克劳林公式：在 $x_0=0$ 处的泰勒公式又称为麦克劳林公式。

应用一：等价无穷小替换公式的推广

【例 17】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{\tan 2x-x^2}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\arcsin x}{x^3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x-2\arcsin x}{\sin x-\arctan x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-\sin^2 x}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\sin(\sin x)\sin x}{x^4}$。

【答案】：（1）$e^{\frac{1}{2}}$；（2）$\dfrac{1}{6}$；（3）$\dfrac{1}{3}$；（4）14；（5）$\dfrac{1}{4}$；（6）$\dfrac{1}{6}$。

【小结】：（1）常见函数的麦克劳林公式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\qquad \arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\qquad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

（2）运用泰勒公式计算极限的基本步骤：展开、整理、替换（当多个无穷小相加时，抓住其中起主导作用那一项）。

应用二：极限式的讨论或抽象函数极限的计算

【例 18】：已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)-ax^2+bx^3}{x-\tan x}=0$，求$a$、$b$。

【答案】：$a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$。

【例 19】：已知当 $x\to 0$ 时，有 $x-\sin ax\sim x^2\ln(1-bx)$，求 a、b。

【答案】：$a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$。

【例 20】：已知 $f(0)=0$，$f'(0)=f''(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^x+1}{x^2}$。

【答案】：0。

【小结】：前面进行过讨论，对已知极限值要计算极限式中参数的问题，运用洛必达法则进行讨论是比较困难的，而运用泰勒公式则比较方便、快捷。

对抽象函数进行泰勒展开的关键是展开到第几项。一般来说，基本原则有两个：

（1）根据函数本身是几阶可导的（函数 n 阶可导，则皮亚诺余项的泰勒公式就可以展开到第 n 阶）；

（2）保持上下同阶，分子和分母如果有一边能确定阶数，则另一边直接展开到相应的阶数即可。

5、单侧极限

题目中需要考虑单侧极限的情况：

（1）分段函数且分段点左右两侧解析式不同时需使用单侧极限；

（2）极限中含有 e^{∞}, $\arctan\infty$ 时需使用单侧极限。

【例 21】：设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{\sin x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \dfrac{\ln(1+\tan x)}{2(\sqrt{1+x}-1)}, & x>0 \end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限。

【答案】：1。

【例 22】：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

【答案】：1。

【例 23】：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\arctan x$。

【答案】：$-\dfrac{\pi}{2}$。

四、数列极限的计算

1、直接计算

【例 24】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-n^3\sin\dfrac{1}{n}\right)$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{n}\right)^{(-1)^n}$。

【答案】：（1）$\dfrac{1}{6}$；（2）$e^{\frac{1}{3}}$；（3）1。

2、夹逼准则

数列形式：若存在正整数 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n\le y_n\le z_n$ 成立，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$。

函数形式：若存在正数 δ，对于任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 都有 $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

注：夹逼准则的使用关键在于适度放缩，也就是保证放缩后两侧的极限值相同。

【例 25】：计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$。

【答案】：0。

【小结】：无穷小量×有界量＝无穷小量。

【例 26】：计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)$。

【答案】：0。

【例 27】：计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}$，$a>b>0$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+|x|^{3n})^{\frac{1}{n}}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x^{2n}+|x|^{-n})^{\frac{1}{n}}$。

【答案】：（1）$\dfrac{1}{b}$；（2）$\max\{1,|x|^3\}$；（3）$\max\left\{1,x^2,\dfrac{1}{|x|}\right\}$。

【小结】：设 $a_1,a_2,\cdots,a_m\geq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。

【例 28】：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$。

【答案】：1。

3、单调有界收敛准则

单调有界收敛准则： 若数列 $\{a_n\}$ 单调递增（单调递减）有上界（下界），则数列 $\{a_n\}$ 收敛，即单调有界数列必有极限。

【例 29】：设 $x_1=2,\ 2x_{n+1}=\sqrt{3+x_n^2},(n=1,2,\cdots)$，试证数列 x_n 的极限存在并求此极限。

【答案】：1。

【小结】：（1）根据递推公式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 求数列极限的基本思路：首先证明数列 $\{a_n\}$ 单调有界，从而得到该数列极限存在；然后等式两边同时取极限，得到方程，解出极限值。

（2）证明数列单调有界的主要方法：

①先求出极限值，从极限值与数列前几项的大小关系确定证明数列单调递增还是单调递减、有上界还是有下界，以及上界或下界各是多少；

②证明时，先证有界性，再证单调性；

③为了更好地运用递推公式，证明过程中一般会用到数学归纳法。

模块三 连续

一、连续性

1、基本概念

（1）函数在一点处连续：

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**。

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域内有定义，并且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**。

类似地，我们还可以定义**左连续**。

注：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是它在该点左连续并且右连续。

（2）区间连续：

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ **在开区间** (a,b) **内连续**。

如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，并且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ **在闭区间** $[a,b]$ **上连续**。

类似地，我们可以得到函数在区间 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 内连续的定义。

【例 1】：设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2a\tan x}-1}{\arcsin x}, & x\neq 0\\ a+1, & x=0\end{cases}$，已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，求 a。

【答案】：$a=1$。

【例 2】：设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^x}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x<0\\ ae^{2x}, & x\geq 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$__________。

【答案】：$a=-2$。

2、基本性质

（1）四则运算的连续性：

设 $f(x)$、$g(x)$ 均在某区间 I 上连续，则函数 $k_1f(x)+k_2g(x)\ (k_1,k_2\in R)$、$f(x)g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$都在上连续。

（2）复合函数的连续性：

设 $y=f(u),u\in D$，$u=g(x),x\in I$ 均在其定义域上连续，且有 $g(I)\subseteq D$，则 $y=f(g(x))$是 I 上的连续函数。

（3）反函数的连续性：

设 $y=f(x)$是 I 上的连续函数，$y=f^{-1}(x),x\in f(I)$是它的反函数，则 $y=f^{-1}(x)$ 是 $f(I)$上的连续函数。

（4）初等函数的连续性：

定理：一切初等函数都在其定义域内连续。

注：正是由于初等函数在其定义域内都是连续的，我们在计算初等函数 $f(x)$ 在其定义域内某点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，才能直接将 $x=x_0$ 代入：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

【例 3】：设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在其定义域内连续，求 a 与 b 应满足的条件。

【答案】：$a=b$。

【例 4】：若 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{b+e^{\frac{1}{x}}}{2-e^{\frac{1}{x}}}, & x\ne 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在其定义域内连续，则 $a=$______，$b=$______。

【答案】：$a=-1$，$b=-2$。

【例 5】：$f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin \pi x}-\dfrac{1}{\pi-\pi x}, x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$，使 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续。

【答案】：$f(1)=\dfrac{1}{\pi}$。

二、间断点

1、间断点的定义

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，并且函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**。

【例 6】：试用定义域判断点 $x=0$ 是下列哪个函数的间断点（　　）

（A）$f(x)=\sqrt{x-1}$　　（B）$f(x)=\ln x$

（C）$f(x)=\sin\sqrt{-x}$　　（D）$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0\\ 1, & x=0\\ x^2, & x<0\end{cases}$

【答案】：（D）。

2、间断点的分类

假设点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 均存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**。

在第一类间断点中，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**。

在第二类间断点中，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少有一个为 ∞，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**无穷间断点**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 均不为 ∞，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**振荡间断点**。

注：由定义可知，要判断函数间断点的类型，关键是计算出左右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$。

【例 7】：讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-\sin x}{x(1-\cos x)}, & x>0 \\ be^x, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断点的类型。

【答案】：$a\ne 1$ 时，无穷间断点；$a=1$ 且 $b\ne \dfrac{1}{3}$ 时，跳跃间断点；$a=1$ 且 $b=\dfrac{1}{3}$ 时，连续。

【例 8】【2010-2】：函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为________。

【答案】：1个。

【例 9】：求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点并指出其类型。

【答案】：$x=-1$，可去间断点；$x=0$，跳跃间断点；$x=1$，振荡间断点；$x=-k$ $(k=2,3,\cdots)$，无穷间断点。

【小结】：如果题目中没有指明间断点，则需要先找出可能的间断点（“可疑点”），再逐一判断其类型。这类问题中，如何找全所有的“可疑点”就成为了关键。一般来说，函数可能的间断点包括两部分：一是不在定义域内的点，一般是使得函数的运算无意义的点，如使得分母为零、对数函数的真数为零的点；二是分段函数的分段点。找齐了所有这两种类型的点，再逐一判断，就可以得到所有的间断点及其类型。

【例 10】：求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的表达式，并指出函数 $f(x)$ 的间断点及其类型。

【答案】：$f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；$x=k\pi(k\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点。

三、闭区间上连续函数的性质

假设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则有如下性质：

1、最值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取得最大值，最小值。也即存在 $\xi,\eta\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=m\le f(x)\le M=f(\eta)$ 对任意的 $x\in[a,b]$ 都成立。

推论：（有界性定理）：在闭区间 $[a,b]$ 上有界。

2、介值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取得其最大值和最小值之间的一切值，也即对任意满足 $m\le A\le M$（m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值）的实数 A，均存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=A$。

3、零点定理

如果 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

【例 11】：设 $a,b>0$，证明方程 $x-a\sin x=b$ 在 $(0,a+b]$ 内至少有一个正根。

模块四　可导与可微

一、导数的定义

1、函数在一点的导数

（**1**）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，相应地，得到因变量 y 的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 **处可导**，该极限值称为函数 $f(x)$ 在 x_0 **处的导数**，记作 $f'(x_0), y'(x_0)$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$。导数的定义式还可以写成 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

注：1）导数的几何意义：$f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 处切线的斜率；2）导数的本质是极限，检验一个函数在一点是否可导或需要计算其导数时，最本质的方法就是计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

（**2**）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某左邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处的左导数存在**，该极限值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 **处的左导数**，记作 $f'_-(x_0)$。

类似地，可以定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 **处的右导数** $f'_+(x_0)$。

注：函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数存在的充要条件是该点的左右导数存在且相等。

2、导函数

（1）开区间内可导：如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导。

（2）闭区间上可导：如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且在 $x=a$ 处存在右导数，在 $x=b$ 处存在左导数，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导。

3、高阶导数

如果可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍然可导，则将它的导数称为原函数 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$。

类似地，可以递归地定义函数 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$。

【例 1】：利用定义计算下列函数的导数。

（1） $f(x)=C$；

（2） $f(x)=e^x$；

（3） $f(x)=\ln x$；

（4） $f(x)=x^a$；

（5） $f(x)=\sin x$；

（6） $f(x)=\cos x$。

【例 2】：求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_{-}(0)$ 及 $f'_{+}(0)$，讨论 $f'(0)$ 是否存在？

（1） $f(x)=|x|$；

（2） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ \cos x, & x\geq 0\end{cases}$；

【答案】：（1） $f_{-}'(0)=-1, f_{+}'(0)=1$， $f'(0)$ 不存在。

（2） $f'_{-}(0)=f'_{+}(0)=0$， $f'(0)=0$。

【例 3】：设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & x\leq 1\\ \dfrac{x^3}{3}, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　）

（A）左导数存在、右导数不存在

（B）左导数不存在、右导数存在

（C）左右导数均不存在

（D）左右导数均存在

【答案】:（A）。

4、可导与连续

定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导，那么 $f(x)$ 在点 x_0 处必然连续。

注：可导蕴含连续。

【例 4】：设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax), & x\ge 0\\ x+b, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，试求 a,b。

【答案】：$a=1,b=0$。

【例 5】：设 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<2\\ \dfrac{1}{3}(2+2a+b), & x=2\\ \dfrac{x^2}{4}, & x>2\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处的连续性与可导性。

【答案】：$2a+b\neq 1$时，$f(x)$在$x=2$处不连续；$2a+b=1$且$a\neq 1$时，$f(x)$在$x=2$处连续但不可导；$a=1,b=-1$时，$f(x)$在$x=2$处可导。

【例 6】：设$f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，试讨论$f'(x)$在点$x=0$处的连续性。

【答案】：$f'(x)$在点$x=0$处连续。

二、微分

1、定义

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，当自变量x在x_0处有增量Δx时，如果因变量y的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),\Delta x\to 0;$$

其中A为只与x_0有关而与Δx无关的常数，$o(\Delta x)$表示Δx的高阶无穷小量，则称$f(x)$**在x_0处可微**，并称$A\Delta x$为$f(x)$在x_0**处的线性主要部分**，也称为**微分**，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x)\big|_{x=x_0}$，即$dy=df(x)=A\Delta x$。

2、可导与可微

定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导是等价的，也就是说：可微必可导，可导必可微。进一步地，我们还可以得到 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分 $dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$ 。

【例7】【2002-3】：设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$（　　）

（A）-1　　（B）0.1　　（C）1　　（D）0.5

【答案】：（D）。

【例 8】设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）

（A）$0<dy<\Delta y$　　（B）$0<\Delta y<dy$

（C）$\Delta y<dy<0$　　（D）$dy<\Delta y<0$

【答案】：（A）。

模块五 导数的计算

一、基本求导公式

$$(x^a)'=ax^{a-1}\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}\quad (e^x)'=e^x\quad (\sin x)'=\cos x\quad (\cos x)'=-\sin x$$

二、求导法则

1、导数的四则运算法则

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导，则

$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$，

$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}。$$

【例 1】：推导下列函数的导数公式：$\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$。

【答案】：

$(\tan x)'=\sec^2 x,(\cot x)'=-\csc^2 x,(\sec x)'=\sec x\tan x,(\csc x)'=-\csc x\cot x$。

2、复合函数求导法则

定理：设 $y=f(u),u=g(x)$，如果 $g(x)$ 在 x 处可导，且 $f(u)$ 在对应的 $u=g(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x 处可导，且有：

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}。$$

注：复合函数求导的链式法则可以推广到多个函数复合的情形。

【例 2】：推导 a^x 的导数公式。

【答案】：$(a^x)'=a^x\ln a$。

【例 3】：计算下列函数的导数。

（1）$f(x)=\cos(x^2e^{x^3+1})$；

（2）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

（3）$f(x)=\sec x^2\cdot\tan(e^x\ln x)$；

（4）$y=\ln\sin x-\csc 2^x\cdot\ln\cot 2x$。

【答案】：（1） $f'(x)=-xe^{x^3+1}(2+3x^3)\sin(x^2e^{x^3+1})$；（2） $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

（3） $f'(x)=2x\sec x^2\cdot\tan x^2\cdot\tan(e^x\ln x)+e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\sec x^2\cdot\sec^2(e^x\ln x)$；

（4） $\frac{dy}{dx}=\cot x+\ln 2\cdot 2^x\csc 2^x\cdot\cot 2^x\cdot\ln\cot 2x+2\csc 2^x\cdot\csc^2 2x\cdot\tan 2x$。

3、反函数求导法则

定理：设函数可导且 $f'(x)\neq 0$，并令其反函数为 $x=f^{-1}(y)$，

$$(f^{-1}(y))'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}。$$

【例 4】：推导下列函数的导数公式： $\arctan x,\arcsin x,\arccos x$。

【答案】： $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

【例 5】：计算下列函数的导数。

（1） $y=\arcsin(e^x\sin x)$；（2） $y=\arctan\frac{1+x}{1-x}$；

（3） $y=\arccos(e^x\sin x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

【答案】：（1） $y=\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1-e^{2x}\sin^2 x}}$； （2） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（3） $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1-e^{2x}\sin^2 x}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\dfrac{\arccos(e^x\sin x)}{\sqrt{1+x^2}}$。

三、常考题型

1、幂指函数的导数

【例 6】：计算下列函数的导数。

（1） $f(x)=\sqrt[x]{x},(x>0)$；

（2） $f(x)=x^{x^x},(x>0)$。

【答案】：（1） $\dfrac{dy}{dx}=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$； （2） $\dfrac{dy}{dx}=x^{x^x}(x^{x-1}+x^x(\ln^2 x+\ln x))$。

【例 7】：设 $f(x)=x^{\arcsin x}+e^{\cos 2x^2}+\sin^2\frac{1}{x}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

【答案】：$x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)-4xe^{\cos 2x^2}\sin 2x^2-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$。

2、隐函数的导数

假设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数，要计算 y'，则可以对方程 $F(x,y)=0$ 两边同时求导，再解方程即得到 y'。在对方程两边同时求导时，需要注意求导法则的使用，其中的 y 要看成 x 的函数 $f(x)$，运用复合函数求导法则进行求导。

【例 8】：设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\sin(xy)=0$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}=$____________。

【答案】：$-\frac{y\cos(xy)+e^{x+y}}{e^{x+y}+x\cos(xy)}$。

【例 9】：函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x^2+y^2)+e^x-2xy^2=0$ 所确定，

则 $\frac{dy}{dx}=$____________。

【答案】：$\dfrac{e^x-2y^2-2x\sin(x^2+y^2)}{2y\sin(x^2+y^2)+4xy}$。

【例 10】【**2000-2**】：设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定，则 $dy\big|_{x=0}=$ ________。

【答案】：$(\ln 2-1)dx$。

【例 11】：设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________。

【答案】：$2e^2$。

【例 12】：已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ ________。

【答案】：-2。

3、参数方程的导数（*数学一、数学二）

（1）参数方程的一阶导数

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \Big/ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$。

【例 13】：设函数 $y = y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 所确定，试计算 $\dfrac{dy}{dx}$。

【答案】：$\dfrac{\sin t + \cos t}{-\sin t + \cos t}$。

【例 14】：设$\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{4t} - 1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f'(0) \neq 0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$__________。

【答案】：4。

（2）参数方程的二阶导数

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}。$$

【例 15】：求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$。

（1）$\begin{cases} x = 2\cos^4 t \\ y = 2\sin^4 t \end{cases} \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$；

（2）$\begin{cases} x=\ln\sqrt[3]{1-t^2} \\ y=\arcsin t \end{cases} \quad (t>0)$。

【答案】：（1）$\dfrac{dy}{dx}=-\tan^2 t, \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{4\cos^6 t}$；

（2）$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3\sqrt{1-t^2}}{2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{9\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$。

【例 16】：设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=\arcsin t \end{cases} \quad (t>0)$ 所确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ __________。

【答案】：$\dfrac{t^3+2t^2-1}{t^3(1-t)\sqrt{1-t^2}}$。

【例 17】：设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arcsin t \\ 3y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

【答案】：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-e^t}{3-2ty}\sqrt{1-t^2}$ 。

4、抽象函数的导数

【例 18】：设 $y=a^x f(\ln x),(a>0且a\neq 1)$，其中 f 可微，则 $dy=$___________。

【答案】：$\left[\dfrac{1}{x}a^x f'(\ln x)+\ln a\cdot a^x f(\ln x)\right]dx$ 。

【例 19】：设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=\arctan(1+g(x))$，$h'(1)=1,g'(1)=1$，则 $g(1)$ 等于___________。

【答案】：-1。

【例 20】：设 $y=f(x)$ 三阶可导，且 $f'(x)\neq 0$，试推导 $y=f(x)$ 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的二阶及三阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ 与 $\dfrac{d^3x}{dy^3}$ 的计算公式。

【答案】：$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$，$\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$。

【小结】：1）当函数的自变量与求导的变量不一致时，一般考虑利用复合函数求导法则；

2）从中“插入”中间变量的微分以计算导数：$\dfrac{df(t)}{dx}=\dfrac{df(t)}{dt}\dfrac{dt}{dx}=f'(t)\dfrac{dt}{dx}$。

【例 21】：将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 化为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程。

【答案】：$y''-y-\sin x=0$。

5、高阶导数的计算

（1）常用函数高阶导数公式

① $y=e^x$ $\qquad y^{(n)}=e^x$

② $y=a^x(a>0,a\neq1)$ $\qquad y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

③ $y=\sin x$ $\qquad y^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$

④ $y=\cos x$ $\qquad y^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$

⑤ $y=x^a$ $\qquad y^{(n)}=a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n}$

⑥ $y=\dfrac{1}{x}$　　　$y^{(n)}=(-1)^n n!x^{-1-n}$

⑦ $y=\ln x$　　　$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

注：1）上述公式需要记忆；

2）上述公式可以与一次函数 $ax+b$ 复合，其高阶导数公式可将 $ax+b$ 视为整体替换原公式中 x 的位置，且最后乘 a^n。

【例 22】：计算下列函数的 n 阶导数。

（1） $f(x)=\cos x\cdot\cos 2x$；

（2） $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$。

【答案】：（1） $\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+3^n\cos\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$；

（2） $(-1)^n 5n!(x-1)^{-n-1}$。

【例 23】：函数 $y=\ln(1-3x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$__________。

【答案】：$-3^n(n-1)!$。

（2）莱布尼茨公式

设$u(x),v(x)$均有 n 阶导数，则有：$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$。

【例 24】：设 $f(x)=xe^x$，求 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$。

【答案】：n。

【例 25】：设 $f(x)=x^2\ln x$，求 $f^{(n)}(1)\ (n\geq 2)$。

【答案】：$2(-1)^{n-1}(n-3)!$。

模块六 不定积分

一、基本概念

1、原函数

设函数 $F(x)$ 在区间 I 上可导，对区间 I 上的每一点都有 $F'(x)=f(x)$，则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

注：1）提到原函数一般要指明区间，不加特别说明的情况下一般就默认为 $f(x)$ 的定义域。

2）如果 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数，那么它的原函数一定不唯一。

2、不定积分

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数组成的集合，称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)dx$ 。

注：1）若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么 $\int f(x)dx =F(x)+C,C\in R$ 。

2）求导数与求不定积分互为逆运算。

3）不定积分运算时出现任意常数时，一般的运算为 $C\pm C=C,C^2=C$ 。

二、基本性质

设 $f(x),g(x)$ 均存在原函数，则

（1） $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

（2） $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,(k\in R,k\neq 0)$

（3） $(\int f(x)dx)'=f(x)$ 或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$

（4）$\int F'(x)dx = F(x)+C$ 或 $\int dF(x) = F(x)+C$

注：1）要注意第二个公式中的 $k \neq 0$，因为当 $k=0$ 时，$\int kf(x)dx = \int 0dx = C$，而 $k\int f(x)dx = 0(F(x)+C)=0$，两边是不相等的。

2）不定积分满足线性性质。

三、基本方法

1、基本积分公式

（1）$\int x^a dx = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1}+C,(a\neq -1)$，$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|+C$；

（2）$\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C(a>0且a\neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$；

（3）$\int \cos xdx = \sin x + C,$ $\int \sin xdx = -\cos x + C$；

（4）$\int \sec^2 xdx = \tan x + C,$ $\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$；

（5）$\int \sec x\tan xdx = \sec x + C,$ $\int \csc x\cot xdx = -\csc x + C$；

（6）$\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$；

（7）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$。

【例 1】：计算下列不定积分。

（1）$\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x}}$；　　（2）$\int \dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{3^x}dx$；

（3）$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$；

（4）$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$；

（5）$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$；

（6）$\int \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}dx$；

（7）$\int \tan^2 x dx$；

（8）$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$；

（9）$\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$。

【答案】：（1） $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$；（2） $\frac{2}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{1}{5\ln\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)^x+C$；

（3） $e^x-2\sqrt{x}+C$；（4） $x-\arctan x+C$；

（5） $\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan x+C$；（6） $\arcsin x+\ln|x|+C$；

（7） $\tan x-x+C$；（8） $\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}+C$；

（9） $\sin x+\cos x+C$。

2、换元积分法

（1）第一类换元法

设 $f(u)$ 有一个原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \xlongequal{令u=\varphi(x)} \int f(u)du=F(u)+C=F(\varphi(x))+C。$$

【例 2】：计算下列不定积分。

（1） $\int\cos(x+1)dx$；（2） $\int\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$。

【答案】：（1） $\sin(x+1)+C$；（2） $-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+C$。

【例 3】：求 $\int\frac{1}{1+2x^2}dx$。

【答案】：$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+C$。

【小结】：$\int\frac{1}{a^2x^2+b^2}dx=\frac{1}{ab}\arctan\frac{ax}{b}+C$。

【例 4】：求$\int\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$。

【答案】：$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$。

【小结】：$\int\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}dx=\frac{1}{a}\arcsin\frac{ax}{b}+C$。

【例 5】：计算下列不定积分。

（1）$\int 2x\sin x^2dx$；

（2）$\int x(1+x^2)^{50}dx$；

（3）$\int\frac{x}{1+x^2}dx$；

（4）$\int\sqrt{\frac{1+\arcsin x}{1-x^2}}dx$；

（5）$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$；

（6）$\int\frac{1}{x\ln^2 x}dx$；

（7）$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$；　　（8）$\int e^{e^x + x} dx$；

（9）$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$；　　（10）$\int \frac{\cos 2x}{2 + \sin x \cos x} dx$。

【答案】：（1）$-\cos x^2 + C$；　　（2）$\frac{1}{102}(1+x^2)^{51} + C$；

（3）$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$；　　（4）$\frac{2}{3}(1+\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C$；

（5）$\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$；　　（6）$-\frac{1}{\ln x} + C$；

（7）$-e^{\frac{1}{x}} + C$；　　（8）$e^{e^x} + C$；

（9）$-\ln|\sin x + \cos x| + C$；　　（10）$\ln(2 + \sin x \cos x) + C$。

（2）第二类换元法

设 $x = \psi(t)$ 是单调，可导的函数，并且 $\psi'(t) \neq 0$，设 $f(\psi(t))\psi'(t)$

具有原函数 $G(t)$，则

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\psi(t)} \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = G(t) = G[\psi^{-1}(x)] + C。$$

注：1）$x=\psi(t)$ 必须存在反函数；2）注意最后结果回代为用 x 表示。

【例 6】：计算下列不定积分。

（1）$\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$；　　（2）$\int\frac{\sqrt{1-x}}{x}dx$。

【答案】：（1）$2\arctan\sqrt{x}+C$；（2）$2\sqrt{1-x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+C$。

【小结】：被积函数含有形如 $\sqrt{ax+b}$ 的项时，做变量代换 $\sqrt{ax+b}=t$。

【例 7】：计算下列不定积分。

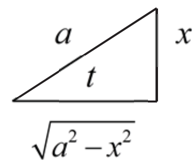
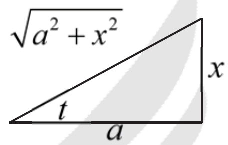
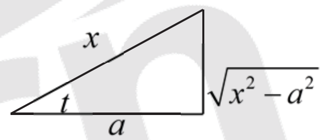
（1）$\int\sqrt{1-x^2}dx$；　　（2）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$；

（3）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$。

【答案】：（1）$\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$；（2）$\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$；

（3）$\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$。

【小结】：①三角代换常见使用方式：

根式的形式	所作替换	三角形示意图(求反函数用)
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	

②公式：$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$。

3、分部积分法

分部积分公式：$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$，或简写为$\int udv=uv-\int vdu$。

【例 8】：计算下列不定积分。

（1）$\int(x+1)e^x dx$；　　（2）$\int x\cos x dx$；

（3）$\int x^2e^x dx$ 。

【答案】：（1） xe^x+C；（2） $x\sin x+\cos x+C$；（3） $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$。

【例 9】：计算下列不定积分。

（1）$\int x\ln x dx$；（2）$\int x\arctan x dx$；

（3）$\int \ln x dx$；（4）$\int \arcsin x dx$；

【答案】：（1）$\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$；（2）$\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$；

（3）$x\ln x-x+C$；（4）$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$。

【例 10】：计算 $\int e^x \cos x dx$ 。

【答案】：$\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$ 。

四、常考题型

1、有理函数积分

【例 11】：计算下列积分。

（1）$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$；

（2）$\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2}dx$；

（3）$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$；

（4）$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}dx$；

（5）$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}dx$；（6）$\int \frac{3x-2}{x(x-1)^2}dx$；

（7）$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+2}dx$；（8）$\int \frac{2x-3}{(x^2+1)(x+1)}dx$。

【答案】：（1）$\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$；（2）$2\ln|x-2|+\ln|x-1|+C$；

（3）$3\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$；（4）$\frac{1}{2}\ln|x|-2\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x-2|+C$；

（5）$2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$；（6）$-2\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$；

（7）$2\ln|x^2+2x+2|-5\arctan(x+1)+C$；

（8）$-\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan x+C$。

【小结】：1）有理函数积分计算的积分思想是拆分，重点讲解的是拆分的方法以及参数的求解。

2）拆分方法大致分三种：

（i）分母形如$(x+a)f(x)$，则对应拆出一项：$\frac{A}{x+a}$；

（ii）分母形如$(x+a)^2 f(x)$，则对应拆出两项：$\frac{A}{x+a}+\frac{B}{(x+a)^2}$；

（iii）分母形如$(x^2+ax+b)f(x)$（其中x^2+ax+b为无实根的二次多项式），则对应拆出一项$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$。

【例 12】：计算下列积分。

（1）$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$；

（2）$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$；

（3）$\int \frac{dx}{x^3+1}$；

（4）$\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$；

（5）$\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$；

（6）$\int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx$。

【答案】：（1）$\dfrac{x^4}{4}+\ln\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2}+C$；

（2）$\ln|x|-\dfrac{1}{10}\ln(1+x^{10})+\dfrac{1}{10}\dfrac{1}{1+x^{10}}+C$；

（3）$\dfrac{1}{3}\ln|x+1|-\dfrac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$；

（4）$\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}\arctan x+C$；

（5）$\dfrac{5}{4}\ln|x-1|-\dfrac{1}{4}\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{3}{2}\arctan x+C$；

（6）$-\ln|x|+\dfrac{2}{3}\ln|x-1|+\dfrac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$。

2、可化为有理函数的积分

（1）三角有理式

【例 13】：计算下列不定积分。

（1）$\int\sin^2 x\cos xdx$；　　（2）$\int\tan xdx$；

（3）$\int\sin^3 xdx$；　　（4）$\int\cos^2 xdx$；

（5） $\int \sin^2 x\cos^2 xdx$；（6） $\int \sec xdx$；

（7） $\int \frac{1}{\sin 2x+2\sin x}dx$；（8） $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$。

【答案】：（1） $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$；（2） $-\ln|\cos x|+C$；

（3） $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$；（4） $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$；

（5） $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$；（6） $\ln|\sec x+\tan x|+C$；

（7） $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\frac{1}{4}\frac{1}{\cos x+1}+C$；

（8） $\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+C$。

【小结】：1）形如 $\int \sin^n x\cos^m xdx$ 的积分，其中 m, n 为非负整数：

①若 m 与 n 中至少有一个奇数，则将奇次幂因子拆出一个一次幂因子并与 dx 凑微分（ $\sin xdx=-d\cos x$， $\cos xdx=d\sin x$ ），所剩偶次幂因子利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 转化为同一种三角函数。

②若 m 与 n 皆为偶数，则用倍角公式进行降幂化简被积函数后再积分，其中倍角公式为：

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}，\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}，\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x。$$

2）公式： $\int \tan xdx=-\ln|\cos x|+C, \int \cot xdx=\ln|\sin x|+C$，

$$\int \sec xdx=\ln|\tan x+\sec x|+C, \int \csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C。$$

【例 14】：计算下列积分。

（1）$\int \frac{1}{1+\sin x}dx$；（2）$\int \frac{\sin^2 xdx}{1+\sin^2 x}$；

【答案】：（1）$-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$（或 $\tan x-\sec x+C$）；

（2）$\arctan t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}t+C(t=\tan x)$。

【小结】：对于三角有理式，除了可以利用三角函数的公式化简或凑微分之外，一般的思路是利用万能公式，令 $x=2\arctan t$，则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$。

（2）指数有理式的积分

【例 15】：计算下列积分。

（1）$\int \frac{1}{1+e^x}dx$；（2）$\int \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}$；

（3）$\int \frac{1}{4^x+2^{x+1}+1}dx$；（4）$\int \frac{1}{e^{\frac{x}{6}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{2}}+1}dx$。

【答案】：（1） $\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C$；（2） $-\frac{1}{e^x}-\arctan e^x+C$；

（3） $\frac{1}{\ln 2}\left(\ln\frac{2^x}{2^x+1}+\frac{1}{2^x+1}\right)+C$；

（4） $x-3\ln(e^{\frac{x}{6}}+1)-\frac{3}{2}\ln(e^{\frac{x}{3}}+1)-3\arctan e^{\frac{x}{6}}+C$。

【小结】：仅含有指数函数 a^x 的不定积分，直接令 $t=a^x$，可将其化成有理式函数的不定积分。

（3）根式的积分

【例 16】计算下列积分。

（1） $\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$；　　（2） $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$；

（3） $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$；　　（4） $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$；

（5）$\int \frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$；　　（6）$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}dx$。

【答案】：（1）$\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$；　　（2）$2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$；

（3）$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3+C$；　　（4）$-\frac{1}{3a^2}\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+C$；

（5）$\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$；　　（6）$\arccos\frac{1}{x+1}+C$。

【小结】：1）如果根号下为一次函数 $\sqrt{ax+b}$ ，则直接令整个根式为 t；

2）如果根号下为二次函数，则利用三角代换：$\sqrt{a^2-x^2}$ ，令 $x=a\sin t$；$\sqrt{a^2+x^2}$ ，令 $x=a\tan t$；$\sqrt{x^2-a^2}$ ，令 $x=a\sec t$；

3）如果根号下为普通的二次函数（含一次项），则先对其配方，再作对应的三角代换。

3、分部积分法的使用

【例 17】：计算下列不定积分。

（1）$\int \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$；　　（2）$\int \frac{\arctan x}{x^3}dx$；

（3）$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ln\sin x dx$；　　（4）$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$。

【答案】：（1）$-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}+C$；（2）$-\frac{1}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\arctan x+C$；

（3）$-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C$；

（4）$2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-4\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$。

【例 18】：计算下列不定积分。

（1）$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$；　　（2）$\int (2x+4)\cos^2 x dx$；

（3）$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$；　　（4）$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$。

【答案】：（1）$\dfrac{\ln x}{1-x}+\ln\left|\dfrac{1-x}{x}\right|+C$；

（2）$\dfrac{x^2}{2}+2x+\sin 2x+\dfrac{x\sin 2x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C$；

（3）$-\dfrac{\arctan x}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$；

（4）$-e^{-x}\arcsin e^x+\ln\left|1-\sqrt{1-e^{2x}}\right|-x+C$。

【小结】：分部积分中$u(x)$的选取优先级，遵循“反、对＞幂＞指、三”的原则。

【例 19】：计算下列不定积分。

（1）$\int\arctan\sqrt{x-1}dx$；　　（2）$\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\right)dx$。

【答案】：（1）$x\arctan\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}+C$；

（2）$\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\ln\left|1+\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right|+\dfrac{1}{4}\ln\left|1-\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right|+\dfrac{\sqrt{x+1}}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}+C$。

【小结】：1）变量代换法可以结合分部积分法进行使用，对积分式$\int f(x)dx$，如果做变量代换$x=\varphi(t)$，可以得到$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)$，若在下一步需要使用分部积分时，对微分式$d\varphi(t)$，可以不将其计算出来，而是直接进行分部积分：$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\varphi(t)f(\varphi(t))-\int\varphi(t)df(\varphi(t))$。

2）如果积分式中含有分式$\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，一般直接令整个根式为$t$，从中解出$x$，再代回原积分求解。这种情况下，一般要结合分部积分法。

模块七　定积分

一、定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

这样 $[a,b]$ 就被分为了 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$，用 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 表示各区间的长度，再在每个区间上取一点 $\xi_i, x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$，作如下和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在且与 $[a,b]$ 的划分及 ξ_i 的选取无关，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，该极限称之为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$。即：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间，a,b 分别称为积分下限和积分上限。

注：1）几何意义：$\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示为由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形面积的代数和。

2）定积分定义的思想方法称之为“微元法”，它是我们用定积分计算几何及物理量的积分思路，其步骤可以总结为：分割、近似、求和、取极限。

3）定积分的本质是极限。

【例 1】：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$。

【答案】：$\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{\ln 2}{2}$。

【小结】：利用定积分求极限的基本公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$。

【例 2】【2017-123】：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$。

【答案】：$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\dfrac{1}{4}$。

【例 3】【2004-2】：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$ 等于（　　）

（A）$\int_1^2 \ln^2 x dx$　　（B）$2\int_1^2 \ln x dx$

（C）$2\int_1^2 \ln(1+x)dx$　　（D）$\int_1^2 \ln^2(1+x)dx$

【答案】：（B）。

【例 4】：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$。

【答案】：$\dfrac{1}{2}$。

【小结】：在计算 n 个分母互不相同的分式之和的极限时，如果最大的分母和最小的分母相除所得分式的极限等于 1，则使用夹逼定理计算；如果最大的分母和最小的分母相除所得分式的极限不等于 1，则凑成定积分的定义计算。

【例 5】：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}$。

【答案】：$\dfrac{\pi}{6}$。

二、定积分的性质

1、规定

（1）$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$，

（2）$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$，特例：$\int_a^a f(x)dx = 0$ ，$\int_b^b f(x)dx = 0$。

2、线性性质

（1）$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$，

（2）$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$， k 为常数。

3、常数定积分

$\int_a^b 1dx = b-a$。

4、区间可加性

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(u)du + \int_c^b f(t)dt$。

注：不一定 $a<c<b$，只要 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在就可以使用定积分的区间可加性。

5、比较定理

如果在区间 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\ge g(x)$，则有 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$；

推论：

（1）如果在区间 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\ge 0$，则有 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$；

（2）$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$；

（3）估值定理：

设M和m是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值，则有：

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)；$$

（4）积分中值定理：

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)。$$

【例 6】：设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin xdx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot xdx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos xdx$，则$I,J,K$的大小关系是（　　）

（A）$I<J<K$　　（B）$I<K<J$

（C）$J<I<K$　　（D）$K<J<I$

【答案】：（B）。

【例 7】：使不等式$\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt > \int_1^x \frac{1}{t}dt$成立的$x$的范围是（　　）

（A）$(0,1)$　　（B）$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　（C）$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　（D）$(\pi,+\infty)$

【答案】：（A）。

【小结】：比较定积分大小就是比较被积函数大小（积分区间相同的情况下）。这里往往要结合不等式证明的相关知识。

【例 8】：试判断$\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$的正负。

【答案】：正。

【小结】：1）对比较定理的另一种考查方式是判断定积分的符号，这类问题和比较定积分大小没有本质上的区别，直接根据被积函数的正负进行判断即可。

2）这里对考生要求较高的一种考查方法是被积函数在积分区间上有正有负，此时，无法直接通过比较定理判断出定积分的符号。一般的思路有两种：其一是按照被积函数的正负对定积分的积分区间进行分割，然后通过变量代换，将正负两部分积分的积分区间统一，最后再判断正负；其二是结合图形，画出被积函数的大致图形，根据x轴上方和下方面积的大小进行判断。

三、微积分基本定理

1、定理内容

（1）设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，令$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, a\le x\le b$称为**变上限积分（积分上限函数）**。

（2）变上限积分的导数：

定理：如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则变上限积分$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导，且$\Phi'(x)=(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$，$a\le x\le b$。

（3）牛顿—莱布尼兹公式

设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)。$$

2、变限积分的求导公式

（1）$(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$，$a \le x \le b$；

（2）$(\int_x^b f(t)dt)' = -f(x)$，$a \le x \le b$；

（3）$[\int_a^{u(x)} f(t)dt]' = f(u(x))u'(x)$；

（4）$[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt]' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$。

【例 9】：计算下列各函数的导数。

（1）$f(x) = \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；　　（2）$f(x) = \int_{x^2}^{x} \sin e^t dt$。

【答案】：（1）$\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$；（2）$\sin e^x - 2x\sin e^{x^2}$。

【例 10】：设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】：（B）。

【例 11】：设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x\sin^2 t dt$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ ____________。

【答案】：-1。

3、定积分的计算

（1）换元法：

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

①$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

②$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，其值域 $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$，

则有：$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$。

注： 1）变量代换后的上下限与原来的积分上下限是对应关系；

2）定积分本质是一个数，做变量代换后不必回代。

（2）分部积分法：

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx。$$

【例 12】：计算下列积分。

（1）$\int_2^3\frac{1}{x\ln x}dx$；

（2）$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$；

（3）$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$；

（4）$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$；

（5）$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}}dx$；　　（6）$\int_0^1 x^2 \arctan x dx$。

【答案】：（1）$\ln(\ln 3)-\ln(\ln 2)$；　　（2）-4π；

（3）$\frac{\pi}{4}$；　　（4）$\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$；

（5）$1-\frac{1}{2}\ln(1+e^2)+\frac{1}{2}\ln 2$；　（6）$\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ln 2$。

四、反常积分

1、无穷限反常积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，如果极限 $\lim\limits_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$ 存在，则称无穷限反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$，否则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

类似的，极限 $\lim\limits_{M\to-\infty}\int_M^a f(x)dx$ 存在，则称无穷限反常积分

$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim\limits_{M\to-\infty}\int_M^a f(x)dx$ 收敛。

无穷限反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall k,\int_k^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^k f(x)dx$ 都收敛。

【例 13】：计算下列反常积分。

（1）$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$；　　（2）$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$。

【答案】：（1）1；（2）$\dfrac{\pi}{4}$。

2、无界函数反常积分

（1）**瑕点**：如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的任一邻域内都无界，则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点。

（2）设 $x=a$ 为 $f(x)$ 唯一的瑕点，若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ 存在，则称无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，即 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$。

设 $x=b$ 为 $f(x)$ 唯一的瑕点，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$ 存在，则称该无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，即 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$。

设 $x=c(a<c<b)$ 为 $f(x)$ 的瑕点，无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

$\Leftrightarrow\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛。

【例 14】：计算下列反常积分。

（1）$\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$；　　（2）$\int_1^e\dfrac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx$。

【答案】：（1）$-\dfrac{\pi}{3}$；（2）$\dfrac{\pi}{2}$。

五、常考题型

1、变限积分求导

【例 15】：$(\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt)'$。

【答案】：$\int_{x^2}^{0}\cos t^2 dt - 2x^2\cos x^4$。

【例 16】：假设 $f(x)$ 是 R 上的连续函数，求 $(\int_a^x (x-t)f(t)dt)'$。

【答案】：$\int_a^x f(t)dt$。

【小结】：积分号下有 x 的基本处理方式：由于在积分过程中，x 可以看作常数，故一般可以想办法将 x 从积分号下提出。必要的时候，可以先对积分式进行分解，再提出 x。

【例 17】：$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt =$________。

【答案】：$\sin x^2$。

【小结】：对于形如$\int_a^x f[u(x,t)]dt$的变上限积分，要计算它的导数，一般先作变量代换$u=u(x,t)$。

【例 18】：设函数$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$。已知$f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)dx$的值。

【答案】：$\frac{3}{4}$。

【例 19】：设$f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$（　　）

（A）$xf(x^2)$　　（B）$-xf(x^2)$

（C）$2xf(x^2)$　　（D）$-2xf(x^2)$

【答案】：（A）。

【例 20】：设$f(x)$可导，$f'(0)=1$，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求$\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性。

【答案】：$\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$；$\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

2、分段函数的定积分

【例 21】：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}, & x>1\\ \arcsin x, & -1\leq x\leq 1\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2}f(x)dx$。

【答案】：$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$。

【例 22】：计算下列积分。

（1）$\int_{-2}^{3}\min\{1,x^2\}dx$；（2）$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$；

【答案】：（1）$\frac{11}{3}$；（2）$2-\frac{2}{e}$。

【例 23】：设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2} \\ -1, & x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=$__________。

【答案】：$-\frac{1}{2}$。

3、对称区间上的定积分

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上可积，则有

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}。$$

【例 24】：设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，试比较它们的大小。

【答案】： $P<M<N$ 。

【例 25】：计算下列积分。

（1） $\int_{-2}^{2}(x+1)\sqrt{4|x|-x^2}dx$；

（2） $\int_{-1}^{1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$；

（3） $\int_{-1}^{1}\left[\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]dx$ 。

【答案】:（1）2π；（2）$6-\dfrac{3}{2}\pi$；（3）2。

【小结】:如果积分区间是关于原点对称，计算时首先考虑利用函数的奇偶性进行化简。

【例 26】:计算下列积分。

（1）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$；（2）$\int_{-1}^{1}x\ln(1+e^x)dx$；

（3）$\int_{-1}^{1}\dfrac{\ln(2-\sin x)|x|e^{x^2}}{\ln(2-\sin x)+\ln(2+\sin x)}dx$。

【答案】:（1）$\dfrac{\pi}{4}$；（2）$\dfrac{1}{3}$；（3）$\dfrac{e-1}{2}$。

【小结】:如果积分区间关于原点对称，而被积函数不具有奇偶性并且常规方法难于求解，则可以利用对称区间的特点，做变量代换：$x=-u$，然后再将代换后的积分与原积分式相加，很多情况下，这一变换往往可以简化计算。

【例 27】:设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）。

（1）证明 $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$；

（2）利用（1）的结论，计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$。

【答案】：（2） $\frac{\pi}{2}$。

5、抽象函数的定积分

（1）抽象函数的导数

【例 28】：设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx$。

【答案】： $\frac{4}{\pi}-1$。

【小结】：如果积分式中含有抽象函数的导数 $f'(x)$，则可以将 $f'(x)dx$ 写成 $df(x)$，再分部积分。

【例 29】：设 $f(x)$ 有连续的二阶导数 $f(0)=f(\pi)=1$， $\int_0^{\pi}\sin xf(x)dx=2$，

求 $\int_0^{\pi}\sin xf''(x)dx$。

【答案】：0。

【例 30】：设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx \text{。}$$

（2）变限积分

【例 31】：设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$。

【答案】：$\dfrac{e^{-1}-1}{2}$。

【小结】：如果积分式中含有变上限积分，也可以考虑将该变上限积分当做公式 $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ 中的 u（变上限积分易求导），再进行分部积分。

【例 32】：设 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

【答案】：1。

【例 33】：设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^{\pi} f(x)dx$。

【答案】：2。

【小结】：为了便于计算，如果变上限积分在积分区间的一端为零，则可以将 dx 写成 $d(x-c)$，其中 c 是积分区间的另一端。

【例 34】：设 $f(x)=\int_0^x \arctan(t-1)^2 dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$。

【答案】：$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$。

6、递推公式

【例 35】计算 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$。

【答案】$n!$。

【例 36】计算下列定积分（n 为正整数）

（1）$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx, J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$；

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x+\sin^4 x)\cos^2 xdx$。

【答案】（1）$I_n=J_n=\begin{cases}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$；

（2）$\dfrac{\pi}{16}$。

模块八 多元函数微分学

一、二重极限及连续

1、二重极限

（1）二元函数

设 D 是平面上的一个点集，如果对于任意一点 $(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的运算法则总有确定的值与之对应，则称 z 为关于变量 x,y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$。

（2）二重极限的定义

设 $z=f(x,y)$ 是 D 上的一个函数，$(x_0,y_0)\in D$，假设存在实数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$，则称当 (x,y) 趋近于 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 的二重极限为 A。记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$。

【例 1】：讨论下列二重极限是否存在，如果存在，求出极限值。

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}\ (a\neq0)$；　　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$。

【答案】：（1）2；（2）3；（3）$e^{\frac{1}{a}}$；（4）0；（5）不存在。

【小结】1）二重极限的计算难度较大，多考查证明极限不存在。由于二元函数的极限要求自变量以任何方式趋近于给定的点时都有相同的极限，因此，如果能找到两条不同的路径的极限不一样，就可以说明二重极限不存在。

2)计算二重极限一般会用到一元函数极限的一些结论，如等价无穷小替换、夹逼定理等，其中对夹逼定理用到的往往是它的推论："无穷小量×有界量＝无穷小量"。如果二重极限分子的次数大于分母，则可以考虑将其凑成"无穷小量×有界量"的形式，进而说明它的极限为零。

2、连续

定义：假设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，并且

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0) **处连续**。如果 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ **在区域** D **上连续**。

二、偏导数

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 的某一邻域内有定义，把 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应的函数有增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x **的偏导数存在**，并定义此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**对变量 x 的偏导数**，记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$f'_x(x_0,y_0)$。

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**对变量 y 的偏导数**

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$f'_y(x_0,y_0)$。

【例 2】：设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则（　　）

（A）$f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在　　（B）$f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

（C）$f'_x(0,0)$、$f'_y(0,0)$ 都不存在　　（D）$f'_x(0,0)$、$f'_y(0,0)$ 都存在

【答案】：（B）。

【小结】：对偏导数的讨论和计算，最基本的原则是对一个变量求导时，将另一个变量视为常数，因此偏导数的存在性实际上就是固定了一个变量之后所得的一元函数的可导性。具体来说，就是指极限式 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 或 $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在。

【例 3】：讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性和偏导数的存在性。

【答案】：连续；偏导数存在。

三、全微分

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\text{，}\quad \Delta x\to 0,\Delta y\to 0$$

其中 A 、B 仅依赖于 (x,y) 而与 Δx 、Δy 无关，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) **可微**，其中 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**，记作 dz ，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ 。

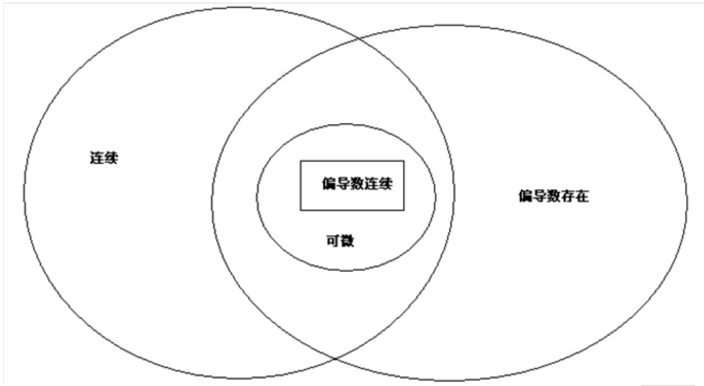
四、相互关系

定理：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，那么 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处必然连续，并且两个偏导数均存在，同时还有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\text{，}\quad \Delta x\to 0,\Delta y\to 0\text{。}$$

定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x,y) 点连续，则函数在该点可微。

注：连续、偏导存在、可微与偏导连续这四个性质的关系可以用下图来形象地表示：



【例 4】：二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充要条件是（　　）

（A） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

（B） $f_x'(x,y)$ 、 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在

（C）当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时， $\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y$ 是无穷小量

（D）当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时， $\frac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是无穷小量

【答案】:(D)。

【小结】:判断函数在某一点(x_0,y_0)是否可微的方法:首先计算函数在该点的两个偏导数$f_x'(x_0,y_0)$和$f_y'(x_0,y_0)$,如果二者有一个不存在,则不可微;如果两个偏导数都存在,则表示出Δz,再计算极限$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,如果该极限不存在或不等于$0$,则不可微,如果该极限等于$0$,则可微。

【例 5】:连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则$dz\big|_{(0,1)}=$________。

【答案】:$dz\big|_{(0,1)}=2dx-dy$。

【小结】:如果题目中给出了极限式,要求计算函数在某一点的微分,则一般的思路是将极限式凑成微分的定义。凑定义的关键在于从所给式中凑出Δz、Δx和Δy。

模块九 偏导数的计算

一、基本公式

1、基本原则

设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 的偏导数均存在，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}[af(x,y)+bg(x,y)]=a\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+b\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}，\quad a,b\in R，$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)g(x,y)]=g(x,y)\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}，$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{g(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{g^2(x,y)}，\quad g(x,y)\neq 0。$$

【例 1】：求下列函数的一阶偏导数。

（1）$f(x,y)=e^{xy}+\ln(x+y^2)$；　　（2）$f(x,y)=\arctan(x+y)\ln x$。

【答案】：（1）$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}+\frac{1}{x+y^2}$，$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}+\frac{2y}{x+y^2}$；

（2）$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\ln x}{1+(x+y)^2}+\frac{\arctan(x+y)}{x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\ln x}{1+(x+y)^2}$。

【例 2】：$u=(x-2y)^{y-2x}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=$__________。

【答案】：-2。

【例 3】：设 $z=\dfrac{\sin(x^2+y^2)\arctan(1+y)}{\cos x^2\cdot e^{\arctan y}+\sin y\cdot\ln(1+x^2+y^2)}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$。

【答案】：0。

【小结】：求偏导数的基本法则：固定其余变量，只对一个变量求导。在此法则下，基本计算公式与一元函数类似。

【例 4】：求下列函数在指定点的全微分。

（1）设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$__________；

（2）设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$__________。

【答案】：（1）$dz\big|_{(1,2)}=4dx-2dy$；（2）$dz\big|_{(1,0)}=2edx+(e+2)dy$。

2、高阶偏导数

（1）定义

如果 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的偏导数仍然存在，则称它们的偏导数为 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**。二阶偏导数总共有四种，分别记作：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

或 $f''_{xx}(x,y)$， $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$， $f''_{yy}(x,y)$ 。

高阶偏导数的计算与一阶偏导数的计算没有本质区别，多次求导即可。

【例 5】：设 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$__________。

【答案】：$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$ 。

（2）高阶导数与求导次序无关

定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内这两个二阶混合偏导数相等，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

注：由于我们需要求偏导的函数绝大部分都是满足定理所需的连续性的，因此我们在求导时一般默认高阶混合偏导数与求导次序无关。

【例 6】：设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，试求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 。

【答案】：$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=\frac{x e^{-x}}{y^3} \sin \frac{x}{y}+\frac{x-1}{y^2} e^{-x} \cos \frac{x}{y}$。

【例 7】：设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

【答案】：$dz=(2x+y)e^{-\arctan \frac{y}{x}}dx+(2y-x)e^{-\arctan \frac{y}{x}}dy$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{y^2-x^2-xy}{x^2+y^2}e^{-\arctan \frac{y}{x}}$。

二、复合函数求导

根据复合函数中间变量的不同形式我们有如下求导公式：

（1）如果 $z=f(u,v)=f(\varphi(t),\phi(t))$，则 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$；

（2）如果 $z=f(u,v)=f(\varphi(x,y),\phi(x,y))$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y};$$

（3）如果 $z=f(u,v)=f(\varphi(x,y),\phi(y))$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dy}。$$

【例 8】：设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，而 $x=u+v,y=u-v$，试证：$\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$。

【例 9】求下列偏导数。

（1）$z=f(e^x\sin y,e^x\cos y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，其中 f 具有二阶连续偏导数；

（2）设 $z=f(xe^y,x,y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

【答案】：（1）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x(f_1'\sin y+f_2'\cos y)+e^{2x}(f_{11}''\sin^2 y+f_{12}''\sin 2y+f_{22}''\cos^2 y)$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x(f_1'\sin y+f_2'\cos y)+e^{2x}(f_{11}''\cos^2 y-f_{12}''\sin 2y+f_{22}''\sin^2 y)；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x(f_1'\cos y-f_2'\sin y)+e^{2x}(f_{11}''\sin y\cos y+f_{12}''\cos 2y-f_{22}''\sin y\cos y)$$

（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y f_1'+e^y(xe^y f_{11}''+f_{13}'')+xe^y f_{21}''+f_{23}''$。

【小结】：假设 $z=f(u,v)$，其中$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$，则在计算高阶偏导数时，要注意对

$\dfrac{\partial f_u'(u,v)}{\partial x}$仍然要使用复合函数求导法则：

$$\frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial x}=\frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_{uu}''(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}''(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}。$$

【例 10】：$z=f(x,u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

【答案】: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'u_1'+f_3'v_1'$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+f_{22}''(u_1')^2+f_{33}''(v')^2+2f_{12}''u_1'+2f_{13}''v_1'+2f_{23}''v_1'u_1'+f_2'u_{11}''+f_3'v_{11}''。$$

【例 11】: 设 $u=f(x,y,z)$,又 $y=\varphi(x,t)$, $t=\psi(x,z)$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$。

【答案】: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\varphi_1'+f_2'\varphi_2'\psi_1'$。

【例 12】: 设 $f(u,v)$ 具有连续二阶偏导数,且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又

$g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$,求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

【答案】: $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$。

【例 13】: 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,求满足条件的常数 a。

【答案】：$a=3$。

三、隐函数求导

定理： $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有一阶连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，若 $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=y(x)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'},$$

其中 F_x',F_y' 是二元函数 $F(x,y)$ 对 x,y 的偏导数。

定理： 设 $F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内有连续的一阶偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，若 $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'},$$

其中 F_x',F_y',F_z' 是三元函数 $F(x,y,z)$ 对 x,y,z 的偏导数。

【例 14】：设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$__________。

【答案】：2。

【例 15】：设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A） x　　（B） z　　（C） $-x$　　（D） $-z$

【答案】：（B）。

【例 16】：设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}dt$ 所确定，求 $\dfrac{du}{dx}$。

【答案】：$\dfrac{du}{dx}=f_1'-f_2'\dfrac{y}{x}+f_3'\dfrac{\sin(x-z)-e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}$。

【例 17】：设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^{x}-ye^{y}=ze^{z}$ 所确定，求 du。

【答案】：$du=\left(f_1'+f_3'\dfrac{1+x}{1+z}e^{x-z}\right)dx+\left(f_2'-f_3'\dfrac{1+y}{1+z}e^{y-z}\right)dy$ 。

模块十　二重积分

一、二重积分的概念与常见的性质

1、二重积分的概念

定义：设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,...,\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积。在每个闭区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，并计算和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。如果各小闭区域的最大直径 d 趋于零时，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 的极限存在，且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称该极限值为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i 。$$

（二重积分的几何意义）二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像是三维空间中的一个曲面，当 $f(x,y)\geq 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表示以 D 为底，以该曲面为曲顶的曲顶柱体的体积。

2、常见的性质

（1）线性性质：

设 α,β 为任意实数，则有

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy = \alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy 。$$

（2）$\iint\limits_D 1dxdy = A$，其中 A 为区域 D 的面积。

（3）关于区域的可加性：

如果闭区域 D 可以被分为有限个互不相交的有界闭区域的并集，则在 D 上的二重积分

等于各部分的二重积分之和。

设 D 可分为 D_1 与 D_2，则有 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$。

（4）比较定理：

如果在 D 上恒有 $f(x,y) \le g(x,y)$ 成立，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy \text{。}$$

推论 1：设 M,m 分别是函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值与最小值，δ 是区域 D 的面积，则有 $m\delta \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M\delta$。

推论 2（二重积分中值定理）：设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，δ 是区域 D 的面积，则在区域 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\delta$。

【例 1】：设 $I_1 = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中 $D = \{(x,y)\big|x^2+y^2 \le 1\}$，则（　　）

（A）$I_3 > I_2 > I_1$　　（B）$I_1 > I_2 > I_3$

（C）$I_2 > I_1 > I_3$　　（D）$I_3 > I_1 > I_2$

【答案】：（A）。

二、利用直角坐标计算二重积分

1、定限方法

【例 2】：计算$\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$，其中$D$是由直线$x=0,y=0,x=1,y=1$所围成的平面区域。

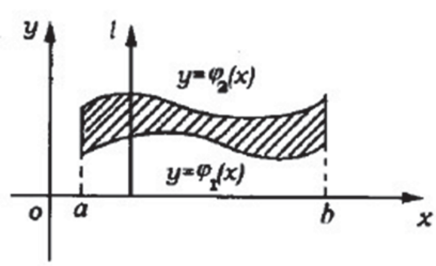
【答案】：1。

【例 3】：计算$\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$，其中$D$是由直线 $y=0,y=x,x=1$所围成的平面区域。

【答案】：$\frac{1}{2}$。

【小结】：定限方法（以先对 y 积分的情况为例）：

1）画一条与 y 轴平行的直线，观察这条直线与积分区域边界的两交点（如图），下交点为下限，上交点为上限，即$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$。



2）使得直线与积分区域有交点的x的范围便是积分变量x的上下限，即$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dx$。

【例 4】: 计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由直线 $y=0,x=0,x+y=1$ 围成的平面区域。

【答案】: $\dfrac{1}{3}$。

【例 5】: 计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由 $y=x,y=x^2$ 所围成的平面区域。

【答案】: $\dfrac{3}{20}$。

【例 6】: 计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由 x 轴，$y=x$, $x+y=2$ 围成的平面区域。

【答案】: $\dfrac{4}{3}$。

2、积分次序的选择

（1）便于定限（避免分类讨论）

【例 7】：求 $\iint\limits_{D}\frac{x}{y}dxdy$，其中 D 是由 $y=x, y=\frac{1}{x}, y=2$ 围成的平面区域。

【答案】：$\frac{9}{16}$。

【例 8】：计算 $\iint\limits_{D}ydxdy$，其中 D 是由 $y=0, y=2, x=-2, x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。

【答案】：$4-\frac{\pi}{2}$。

（2）让第一步积分简单

【例 9】：计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{y^2-xy}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x, y=1, x=0$ 所围成的平面区域。

【答案】：$\frac{2}{9}$。

【例 10】：计算 $\iint\limits_D \sin\frac{\pi x}{2y}dxdy$，其中 D 是由 $y=x, y=\sqrt{x}$ 围成的平面区域。

【答案】：$\frac{4\pi-8}{\pi^3}$。

【例 11】：计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中积分区域 D 是以点 $(0,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的三角形。

【答案】：$\frac{1-e^{-1}}{2}$。

【小结】：如果被积函数为 $\frac{\sin x}{x}, e^{x^2}$ 等无法积分的函数，则直接对另一个变量积分。

3、交换积分次序

【例 12】：交换下列积分次序。

（1）$\int_0^{\pi}dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x}f(x,y)dy$；

（2）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$。

【答案】：（1）$\int_{-1}^0 dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$；

（2）$\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$。

【小结】：交换积分次序的一般步骤：先通过积分上下限还原出积分区域，再按照要求的积分次序定限即可。

【例 13】：计算下列积分。

（1）$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 e^{y^2}dy$；

（2）$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}dy$。

【答案】：（1） $\frac{1}{2}(e^4-1)$；　　　（2） $\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}$。

【例 14】：$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$。

【答案】：$2-\frac{\pi}{2}$。

【小结】：极坐标和直角坐标之间的转换也是这类问题的常考考点。

三、利用极坐标计算二重积分

1、转化公式

直角坐标与极坐标相互之间的转化公式为：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}，其中\ \rho d\rho d\theta = dxdy\ 。$$

极坐标下二重积分计算公式：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$。

注：极坐标适用范围：积分区域为圆或与圆相关（扇形，环形等）的区域；被积函数可写成 $f(x^2+y^2)$ 或被积函数中多次出现 x^2+y^2。

【例 15】：计算 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$。

【答案】：$\dfrac{2\pi}{3}$。

2、定限的方法

【例 16】：计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|1\le x^2+y^2\le 4，x\ge 0\}$。

【答案】：$\dfrac{7\pi}{3}$。

【例 17】：计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le x\}$。

【答案】：$\dfrac{4}{9}$。

【小结】：二重积分定限的方法有两个：

法一：

1）从原点出发画一条射线，观察这条射线与积分区域相交的部分，其中与原点距离最近的点所在的极坐标方程即为ρ的下限$\rho_1\left(\theta\right)$，与原点距离最远的点所在的极坐标方程即为$\rho$的上限$\rho_2\left(\theta\right)$，方程即为$\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$。确定$\rho$的上下限时，有时需要将直角坐标改写成极坐标。

2）使得射线与积分区域相交点的角度范围便是积分变量θ的上下限，即$\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$。

法二：

要确定ρ的上下限，直接将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$带入积分区域D的表达式即可。

确定θ的上下限，同法一。

【例 18】：计算$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le y,y\le x\}$。

【答案】：$\frac{2}{9}-\frac{5\sqrt{2}}{36}$。

【例 19】：计算$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|0\le x\le x^2+y^2\le 1\}$。

【答案】：$\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}$。

【例 20】：计算二重积分$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy$，积分区域

$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\pi\}$。

【答案】：$\dfrac{\pi(1+e^{\pi})}{2}$。

【例 21】：计算二重积分$\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)dxdy$，其中积分区域

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le x\}$。

【答案】：$\dfrac{4}{9}$。

【例 22】：计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}xyd\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<2x,y\ge 0\}$。

【答案】：$\dfrac{9}{16}$。

【例 23】：计算二重积分$\iint\limits_{D}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$，其中$D$是由

$y=-x,y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 围成的平面区域。

【答案】：$\dfrac{\pi^2}{16}a^2-\dfrac{1}{2}a^2$。

四、极坐标系转换为直角坐标系

【例 24】：将下列积分化为直角坐标下的累次积分。

（1）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r^2)rdr$。

【答案】：（1）$\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；　　（2）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x^2+y^2)dy$。

【小结】：由于习惯的是将直角坐标转化为极坐标，所以这里考试的一个重点考查方式就是反向考查：将极坐标还原回直角坐标。基本公式：

$r=\sqrt{x^2+y^2},x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，注意不要忘了 $drd\theta=\dfrac{1}{r}dxdy$。

【例 25】：计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$，其中

$D=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\}$。

【答案】：$\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$。

【例 26】：计算 $\iint\limits_D(\sin\theta+\cos\theta)r^2drd\theta$，其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$。

【答案】：$\frac{1}{2}$。

五、对称性

1、奇偶性

（1）如果积分区域关于 x 轴对称，且被积函数是关于变量 y 的奇函数，则积分值为零；如果积分区域关于 x 轴对称，且被积函数是关于变量 y 的偶函数，则积分值等于第一二象限积分的两倍。

（2）如果积分区域关于 y 轴对称，且被积函数是关于变量 x 的奇函数，则积分值为零；如果积分区域关于 y 轴对称，且被积函数是关于变量 x 的偶函数，则积分值等于第一四象限积分的两倍。

（3）特别地，如果积分区域关于两个坐标轴都对称，被积函数关于两个变量都是偶函数，则积分值等于第一象限内的积分的四倍。

【例27】：设区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,x\ge 0\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$。

【答案】：$\dfrac{\pi\ln 2}{2}$。

【例 28】：计算$\iint\limits_D x^2(1-y^2\tan y)dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le x\}$。

【答案】：$\dfrac{5\pi}{64}$。

【例 29】：计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)^3dxdy$，其中 D 是由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成的平面区域。

【答案】：$\dfrac{14}{15}$。

【例 30】：设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$，计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 2\}$。

【答案】：$\dfrac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$。

【小结】：当积分区域关于某一个坐标轴对称时，优先考虑通过奇偶性简化积分式。

2、轮换对称性

（1）如果积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则可以考虑使用轮换对称性：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy$。为了化简积分式，一般来说，使用完轮换对称性的下一步往往是 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D [f(x,y)+f(y,x)]dxdy$。

（2）如果被积函数 $f(x,y)$ 具有轮换对称性，即 $f(x,y)=f(y,x)$，则可以考虑使用轮换对称性的另一种形式：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(y,x)dxdy$（其中 D_1 和 D 关于直线 $y=x$ 对称）。同样，为了简化计算，使用完轮换对称性的下一步往往是：

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D\cup D_1} f(x,y)dxdy。$$

【例 31】：设 $f(x)>0$ 且连续，试计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$。

【答案】：$\dfrac{(a+b)\pi}{2}$。

【例 32】：设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 1,0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$，试计算 $\iint\limits_D \dfrac{1+y^4}{2+x^4+y^4}dxdy$。

【答案】：$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$。

【例 33】：设 $\int_0^a f(x)dx=A$，证明：$\int_0^a dx\int_0^x f(x)f(y)dy=\dfrac{A^2}{2}$。

模块十一　空间解析几何（*数学一）

一、空间直角坐标系与向量

1、空间直角坐标系

（1）以空间中某一点O为原点作三条相互垂直的坐标轴，三条坐标轴都以O作为原点，将它们分别称作x轴、y轴、z轴，三个坐标轴的方向要符合右手法则，这样就建立了空间直角坐标系$Oxyz$，点O称之为坐标原点。

（2）在空间直角坐标系内，一般用三元方程$F(x,y,z)=0$（或$z=f(x,y)$）表示曲面，而空间曲线则被看作两个曲面的交线，其标准方程为$\begin{cases}S_1(x,y,z)=0\\S_2(x,y,z)=0\end{cases}$。

2、向量

（1）既有大小又有方向的量称为向量，通常用$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}$表示。若向量$\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OM}$（其中$O$为坐标原点），则点$M$的坐标$(x,y,z)$就称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的坐标，且有$\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$（其中$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$分别为沿$x$轴、$y$轴、$z$轴正向的单位向量），通常记作$\{x,y,z\}$。

（2）向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**模**，记作$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；模为1的向量称为**单位向量**，模为0的向量称为**零向量**。

（3）向量$\boldsymbol{\alpha}$与三个坐标向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$的夹角α，β，γ称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**方向角**，方向角的余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**方向余弦**。如果$\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则有$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

3、向量的运算

设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则

加法：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}$；

数乘：$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k},\lambda\in R$；

数量积（点积、内积）：$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$；

向量积（叉积、外积）：$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$；

混合积：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$。

注：向量积求的是一个和两个向量都垂直的向量，这一运算在后面计算平面及直线方程时经常用到，考生需要注意。

4、运算法则

$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha}=0$；

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$。

5、向量之间的关系

设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\beta}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\gamma}=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$；

两个向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$；

两个向量平行的充要条件：$\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=0\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$；

两个向量共线的充要条件：存在不全为0的实数λ，μ使得$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}=0$；

三个向量共面的充要条件：存在不全为0的实数λ，μ，υ使得$\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}+\upsilon\boldsymbol{\gamma}=0$（也等价于$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0$）；

两个向量的夹角$(\boldsymbol{\alpha}\hat{,}\boldsymbol{\beta})$：$\cos(\boldsymbol{\alpha}\hat{,}\boldsymbol{\beta})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$。

【例 1】：设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，计算$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$。

【答案】：24。

【例 2】：设向量$\boldsymbol{x}$与向量$\boldsymbol{a}=\{2,1,-2\}$共线，且$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}=18$，求向量$\boldsymbol{x}$。

【答案】：$\{4,2,-4\}$。

【例 3】：求与向量$\boldsymbol{a}=\{1,2,3\}$和$\boldsymbol{\beta}=\{1,-3,-2\}$都垂直的单位向量。

【答案】：$\pm\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$。

【例 4】：设$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-4\boldsymbol{\beta}$与$4\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$垂直，计算$(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$。

【答案】：$\arccos\dfrac{8}{17}$。

二、直线与平面

1、平面

（1）平面的法向量： 所在直线与平面垂直的向量称为平面的法向量。

（2）平面方程的四种形式：

点法式方程： 已知平面上一点(x_0,y_0,z_0)及其法向量$\{A,B,C\}$，则平面方程为

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

一般式方程： $Ax+By+Cz+D=0$。

三点式方程： 设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$是平面上不共线的三个点，则过这三个点的平面方程为$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$。

截距式方程： $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$。

注： 平面方程的所有形式中，点法式是最核心的，由该方程可以得到，只要确定了平面的法向量以及平面上一点，就可以确定平面方程。其它形式的方程中，一般式和截距式可以由点法式直接整理而成，而三点式则不需要记忆，只需要通过三点的坐标求出平面

的法向量（法向量和平面中任意的向量垂直，因此也就与这三点任意两点连线的向量垂直）即可由点法式得出平面方程。

2、直线

（1）直线的方向向量：与直线平行的向量称为直线的方向向量。

（2）直线方程的四种形式：

一般式方程：已知空间有两个相交平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则它们可以确定一条直线，其方程为：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$。

标准式方程：已知直线上一点(x_0,y_0,z_0)及其方向向量$\{l,m,n\}$，则直线的标准式方程是$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$。

两点式方程：设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$是直线上两点，则过这两点的直线方程为$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$。

参数式方程：已知直线上一点(x_0,y_0,z_0)及其方向向量$\{l,m,n\}$，则直线的参数式方为$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$，其中$t$为任意参数。

注：直线方程的所有形式中，标准式是最核心的，由该方程可以得到，只要确定了直线的方向向量和直线上一个点，就可以得到直线方程。其它形式的方程中，两点式和参数方程都可以由标准式直接得到。如何将一般式方程化为标准式方程是这一部分的一个重点：核心还是要先找到直线的方向向量，它与两个平面的法向量都是垂直的，将两个平面的法向量做向量积即可得到，接下来再确定直线上任意一个点即可得到直线的标准式方程。

3、曲线的切线和曲面的切平面

（1）空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为：$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)(\alpha\le t\le\beta)$，假定这三个函数都在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可导。设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线上对应于 $t=t_0$ 的一点，则曲线 Γ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线的方向向量与法平面的法向量为：$(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$，

切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$；

法平面方程为：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$。

（2）空间曲面的切平面与法线

设空间曲面的方程为：$F(x,y,z)=0$，其中 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面上一点，曲面在该点的切平面的法向量和法线的方向向量为：

$\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$；

切平面方程为：

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0；$$

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$。

【例 5】：求曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\\ z=4\sin\dfrac{t}{2}\end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 的切线及法平面方程。

【答案】：切线方程：$\dfrac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$；

法平面方程：$x+y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi}{2}-4=0$。

【例 6】：求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 的平行于平面 $x+4y+3z=0$ 的切平面方程。

【答案】：$x+4y+3z\pm 12=0$。

三、直线与平面的位置关系

1、两个平面的位置关系

设有两个平面

π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，

π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$。

则有：π_1，π_2 平行 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；$\pi_1$，$\pi_2$ 垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

2、两条直线的位置关系

设有两条直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ 与 L_2：$\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$。

则有 L_1，L_2 平行 $\Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$，$L_1$，$L_2$ 垂直 $\Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$，

L_1，L_2 的夹角 $\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{{l_1}^2+{m_1}^2+{n_1}^2}\sqrt{{l_2}^2+{m_2}^2+{n_2}^2}}$。

3、直线与平面的位置关系

设有直线 L：$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ 和平面 π：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，则有

L 与 π 平行 $\Leftrightarrow l_1A_1+m_1B_1+n_1C_1=0$，$L$ 与 π 垂直 $\Leftrightarrow \frac{l_1}{A_1}=\frac{m_1}{B_1}=\frac{n_1}{C_1}$，

L 在 π 上 $\Leftrightarrow l_1A_1+m_1B_1+n_1C_1=0$ 且 $A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=0$。

注：直线与直线、平面与平面、直线与平面，它们之间的位置关系都要转化它们的向量（平面的法向量、直线的方向向量）之间的关系来理解。

4、点到直线的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\l&m&n\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}。$$

5、点到平面的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=0$ 的距离为

$$d=\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}。$$

【例 7】： 求经过点 $P(-1,-4,3)$ 并与两条直线 $L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y+5=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}$ 都垂直的直线 L 的方程。

【答案】： $\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{y+4}{46}=\dfrac{z-3}{-1}$。

【例 8】：求与两条直线 $\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$ 和 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ 都平行且过原点的平面方程。

【答案】： $x-y+z=0$。

【例 9】：求通过直线 $\begin{cases}x-2y-z+3=0\\x+y-z-1=0\end{cases}$ 且与平面 $x-2y-z=0$ 垂直的平面方程。

【答案】：$x+y-z-1=0$。

【例 10】：求过点 $(-1,2,3)$，垂直于直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$，且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程。

【答案】：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$。

四、曲面

1、旋转曲面

（1）概念

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴。

（2）常见的旋转曲面求法

①设 L 是平面 xOz 上一条曲线，其方程为 $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$，将 L 绕 z 轴旋转得到的旋转曲面方程是 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$。

②由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 绕 z 轴旋转得到的旋转曲面方程为

$x^2+y^2=(x(\varphi(z)))^2+(y(\varphi(z)))^2$。其中，设 $z=z(t)$ 存在单值的反函数 $t=\varphi(z)$，$z\in Z$， Z 为 $z(t)$ 的值域。

注：求旋转曲面方程关键是把握住变化中的不变量，以绕 z 为例，此时的不变量有两个：一是坐标 z 不变；二是到 z 轴的距离不变，也即 x^2+y^2 不变。

【例 11】：求下列旋转曲面方程。

（1）$\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$，分别绕 x 轴和 y 轴；

（2）$\begin{cases} z=\sqrt{y} \\ x=0 \end{cases}$，分别绕 z 轴和 y 轴；

（3）直线 $L:\begin{cases} x=3-t \\ y=t-1 \\ z=1+2t \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程；

（4） A,B 两点的直角坐标分别为 $(1,0,0)$，$(0,1,1)$，求线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程。

【答案】：（1）绕 x 轴：$x^2+4y^2+4z^2=1$，绕 y 轴：$x^2+4y^2+z^2=1$；

（2）绕 z 轴：$z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$，绕 y 轴：$y=x^2+z^2$；

（3）$x^2+z^2=(2-y)^2+(2y+3)^2$；

（4）$(z-1)^2+z^2=x^2+y^2(0\le z\le 1)$。

2、柱面

设 Γ 是一条空间曲线，L 是一条直线，直线 L 沿 Γ 移动所得到的曲面叫柱面。其中 Γ 称为柱面的准线，L 称为柱面的母线。

（1）若准线方程是 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，如果母线平行于 z 轴，则柱面方程为 $f(x,y)=0$，如果母线方向为 $\{l,m,n\}$，则柱面方程为 $f\left(x-\frac{l}{n}z, y-\frac{m}{n}z\right)=0$。

（2）若准线方程是 $x=f(t)$，$y=g(t)$，$z=h(t)$，如果母线方向为 $\{l,m,n\}$，则柱面方程是 $x=f\left(t\right)+lu,\ y=g\left(t\right)+mu,\ z=h\left(t\right)+nu$。

（3）若准线方程是$\begin{cases} f\left(x,y,z\right)=0 \\ g\left(x,y,z\right)=0 \end{cases}$，如果母线方向为$\{l,m,n\}$，则先在准线上任取一点$(x,y,z)$，则过点$(x,y,z)$的母线方程为$\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}$，其中$(X,Y,Z)$为母线上任意一点的活动坐标，消去方程组$\begin{cases} f\left(x,y,z\right)=0 \\ g\left(x,y,z\right)=0 \\ \dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n} \end{cases}$中的$x$，$y$，$z$就可以得到所需的柱面方程。

【例 12】：设准线方程为$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=1 \end{cases}$，母线的方向向量为$\{-1,0,1\}$，求这个柱面方程。

【答案】：$2(x-y+z+1)^2+8y^2+(x+y+z-1)^2=4$。

【例 13】：设准线方程为$L_1:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$，母线平行于直线$x=y=z$，求这个柱面方程。

【答案】：$2y-2z-1=0$。

3、投影

（1）定义

经过空间曲线 Γ 的每一点都有平面 π 的一条垂线，所有的这些垂线构成一个柱面，称为 Γ 到平面 π 的投影柱面。投影柱面与平面 π 的交线称之为 Γ 到平面 π 的投影曲线。

（2）投影曲线的求法

求出通过空间曲线 Γ 且垂直于平面 π 的投影柱面方程 $\varphi(x,y,z)=0$，则投影曲线为 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \pi\text{的方程}\end{cases}$。

空间曲线 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 在坐标平面 xOy 上投影曲线的求法：

a. 从方程组 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 中消去 z，得到一个母线平行于 z 轴的柱面 $\varphi(x,y)=0$；

b. 将 $\varphi(x,y)=0$ 与 $z=0$ 联立，得到投影曲线的方程为 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$。

类似地可以求在坐标面 yOz、zOx 上的投影曲线。

注：投影曲面实际上就是一种特殊的柱面。

【例 14】：设曲线方程为 $\begin{cases}2x^2+4y+z^2=4z\\ x^2-8y+3z^2=12z\end{cases}$，求它在三个坐标面上的投影。

【答案】：xOy 面上的投影曲线为$\begin{cases} x^2+4y=0 \\ z=0 \end{cases}$；

xOz 面上的投影曲线为$\begin{cases} x^2+z^2=4z \\ y=0 \end{cases}$；

yOz 面上的投影曲线为$\begin{cases} z^2-4y=4z \\ x=0 \end{cases}$。

【例 15】：求直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+2z-1=0$上的投影$l_0$的方程，并求$l_0$绕 y 轴旋转一周所成的曲面的方程。

【答案】：l_0 的方程为$\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$；

旋转曲面的方程为$x^2+z^2=(2y)^2+\left(\dfrac{1}{2}(1-y)\right)^2$。

模块十二　三重积分（*数学一）

一、基本概念

设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数。将 Ω 任意分成 n 个小闭区域 Δv_1，Δv_2，…，Δv_n，其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积。在每个 Δv_i 上任取一点 $\left(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i\right)$，作乘积 $f\left(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i\right)\Delta v_i$（$i=1,2,...,n$），并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$。用 d_i 表示 Δv_i 的直径，当 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$ 趋于零时，如果和的极限总存在，且与闭区域 Ω 的分法及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，那么称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，即：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i,$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数，dv 叫做体积元素，Ω 叫做积分区域。

注：三重积分表示密度为 $f(x,y,z)$ 的空间几何体 Ω 的质量。三重积分的定义完全是二重积分定义的推广，本质上是一样的，故三重积分的性质与二重积分的性质类似。

二、基本性质

二重积分的所有性质都可以平行地移到三重积分中来，这里不再一一赘述。

三、计算方法

1、利用直角坐标系

利用直角坐标计算有两种情况："先一后二"和"先二后一"。

"先一后二"法（以先对变量 z 积分为例）：

沿着 z 轴方向自下而上画一条直线，找到该直线与积分区域的上下两个交点，设这两个交点在 z 方向的坐标分别为 $z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$，则它们分别为积分变量 z 的上下限；然后再找出积分区域在 xOy 平面上的投影 D_{xy}，则该三重积分可表示为 $\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$。其中，计算二重积分时可选用直角坐标也可以选用极坐标；如选用极坐标，则该积分坐标又称为柱面坐标。

"先二后一"法（以最后对变量 z 积分为例）：

作一个垂直于 z 轴的平面，找到该平面与积分区域截面在 xOy 平面上的投影 D_z，则计算二重积分时的积分区域即为 D_z；再确定 z 的上下限 a，b 即可。此时三重积分可表示 $\int_a^b dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$。

【例 1】：计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2\le 2z, z\le 2\right\}$。

【答案】：$\dfrac{16}{3}\pi$。

【例 2】：计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)^2dxdydz$，其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2$，$z=1$，$z=2$ 围成。

【答案】：$\dfrac{5}{4}\pi$。

【例 3】：计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三坐标平面所围成。

【答案】：$\dfrac{1}{24}$。

【例 4】：已知 A 点和 B 点的直角坐标分别为 $(1,0,0)$，$(0,1,1)$，线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S，求由 S 及两平面 $z=0$，$z=1$ 所围成立体的体积。

【答案】：$\dfrac{2}{3}\pi$。

【例 5】：设 $f(u)$ 连续，Ω_t 为空间 $\Omega_t=\{(x,y,z)\big|0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\}$，令

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$$，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$。

【答案】：$\pi\left(\frac{1}{3}h^3+f(0)h\right)$。

【小结】：一般来说，当积分区域是由旋转曲面围成或是被积函数为 $f(z)$ 或 $f(x^2+y^2)$ 可以考虑使用“先二后一”进行计算。

使用“先二后一”法的关键是确定第一步二重积分的积分区域，方法是作一个与 z 轴垂直的平面，找出该平面在积分区域上的截面。

2、利用球面坐标系

球面坐标简介：球面坐标通过三个变量来确定三维空间中的点。其中 ρ 为点到原点的距离，确定了该距离后，该点就被限制在了一个以原点为圆心的球面上；$\theta(0\le\theta\le 2\pi)$ 和 $\varphi(0\le\varphi\le\pi)$ 是两个角度：将 xOy 平面 $x>0$ 部分的半平面逆时针旋转，当旋转到经过该点时，所转过的角度即为 θ，可见，θ 的作用类似于地球仪上的经度；将该点与原点连接，该连线与 z 轴正半轴的夹角即为 φ，可见 φ 的作用类似于纬度（只不过这个纬度是以北纬 90 度作为 0 度的）。它与直角坐标系的转换公式为

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}，dxdydz=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta。$$

三重积分球面坐标转换公式：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta。$$

【例 6】：计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=1$，$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成。

【答案】：$\dfrac{\pi}{20}$。

【例 7】：$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$ 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 所围成的闭区域。

【答案】：$\dfrac{4\pi a^4}{3}$。

【小结】：球面坐标定限的一般方法：

1）画一条从原点出发的射线，使其穿过积分区域，找出积分区域和该射线相交的部分（结合图像）。在相交的这一段上，找出 ρ 的最大值和最小值，即为 ρ 的积分上下限。

2）φ 和 θ 的积分上下限，就是使得该射线与积分区域相交的取值范围；考试对三重积分的计算要求并不高，了解简单的计算方法即可。

【例 8】：计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(2y+\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=4a^2$ 和 $x^2+y^2-z^2=0$ 围成。

【答案】：$\dfrac{15\pi(\pi-2)a^4}{8}$。

【小结】：在使用球面坐标时，锥面的作用一般是限制φ的取值范围。

3、利用对称性

三重积分与二重积分有相同的对称性，对称性包括奇偶性和轮换对称性两大类：

（1）奇偶性：假设积分区域关于坐标平面xOy对称，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\begin{cases} 0, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数} \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数} \end{cases}。$$

其中Ω_1为积分区域Ω位于坐标平面xOy上方区域。

（2）轮换对称性：假设积分区域关于平面$y=x$对称，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega} f(y,x,z)dv。$$

【例 9】：求$I=\iiint_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)dxdydz$，其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$。

【答案】：$\dfrac{32}{15}\pi$。

【小结】：与二重积分的计算类似，当积分区域关于某一个坐标平面对称时，要优先考虑借助函数的奇偶性化简积分。