

考研数学入学测试卷

本试卷满分 100 分，考试时间 60 分钟

姓名_____

得分_____

一、判断题：判断下列命题或计算式的正误，将判断结果写在每小题后的空格中，正确的填“√”，错误的填“×”，每小题 2 分，共 30 分。

1、 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内是有界函数。_____;

2、设 $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ，则函数 $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ e^{\frac{1}{2}}, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续。_____;

3、函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量。_____;

4、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin 2x^2}{\tan \frac{2x}{3} \cdot \ln(1+3x)}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ e^{\frac{1}{x^2}} + 1, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处为可去间断点。_____;

5、若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定连续。_____;

6、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3}, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处左导数存在，右导数不存在。_____;

7、 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 的导函数为 $f'(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ _____;

8、 $d((2x)^{\sin x}) = (2x)^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln 2x + \frac{\sin x}{x} \right] dx$ 。 _____;

9、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{\arcsin x^2} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \xrightarrow{\text{等替}} \frac{1}{2}$ 。 _____;

10、 $[\ln(1-2x)]^{(n)} = 2^n (n-1)! (1-2x)^{-n}$ 。 _____;

11、不定积分的计算结果是一个函数而定积分的计算结果是一个数字。 _____;

12、对积分式 $\int f(\sqrt{x}) dx$, 令 $t = \sqrt{x}$ 可得 $\int f(\sqrt{x}) dx = \int f(t) dt$ 。 _____;

13、 $\int \csc 2x dx = \ln |\csc 2x - \cot 2x| + C$ 。 _____;

14、 $\left(\int_{\sin x}^{x^2} \sin t^2 dt \right)' = \sin x^4 - \sin(\sin x)^2$ 。 _____;

15、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在。 _____。

二、填空题：请将正确答案写在题后的空格中，每小题 4 分，共 48 分。

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{(\arctan x)^2} =$ _____;

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos \sqrt{x}}}{3^x - 1} =$ _____;

3、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ _____;

4、 $\left(\frac{x}{1 + \sin x} \right)' =$ _____;

5、 $\left(x^{\frac{1}{2x}} \right)' =$ _____;

6、设函数 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t - 2t \cos 2t \end{cases}$ 所确定的, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____;

7、设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定的, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____;

8、函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调递增区间为_____;

9、设函数 $f(x) = \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt$, 则 $f'(x) =$ _____;

10、 $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$ _____;

11、设 $f(x) = e^x + x^3 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____;

12、 $\int \arcsin x dx =$ _____。

三、解答题: 请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分, 每小题 11 分, 共 22 分.

1、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，试求 $f'(x)$ 并检验 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续。

2、计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$ 。