目 录

第 一 天

【第 1 题】【1995-2-5 分】 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$.

【第 2 题】【1994-2-3 分】 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

则 $a=$__________.

【答案】 -2.

【第 3 题】【2011-2-4 分】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$__________.

【答案】 $\sqrt{2}$.

【第 4 题】【2009-23-4 分】函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 （　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）无穷多个.

【答案】（C）.

【第 5 题】【1997-2-3 分】设 $x \to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为 （　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【答案】（C）.

第 二 天

【第 1 题】【2013-23-10 分】当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x \bullet \cos 2x \bullet \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

【答案】$n=2, a=7$.

【第 2 题】【2017-2-4 分】设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（ ）

（A）当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

（B）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

（C）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + {x_n}^2) = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

（D）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sin x_n) = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

【答案】（D）.

【第 3 题】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n})$.

【答案】0.

【第 4 题】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}([x]+e^{-\frac{1}{x^2}})([x]+\frac{\sin x}{x})$（$[x]$ 为不超过 x 的最大整数）.

【答案】0.

【第 5 题】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

【答案】1.

第 三 天

【第 1 题】【1997-2-3 分】已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，

则 $a=$__________.

【答案】$e^{-\frac{1}{2}}$.

【第 2 题】【2000-2-3 分】设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a，b 满足 （　）

（A）$a<0,b<0$. （B）$a>0,b>0$. （C）$a\leq 0,b>0$. （D）$a\geq 0,b<0$.

【答案】（D）.

【第 3 题】【2005-2-4 分】设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 （　）

（A）$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

（B）$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

（D）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

【答案】（D）.

【第 4 题】【2007-2-4 分】函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$ （　　）

（A）0.　　（B）1.　　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$.　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$.

【答案】（A）.

【第 5 题】讨论函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}$ 的连续性，并指出间断点的类型.

【答案】$x=0$ 为可去间断点，$x=1$ 为跳跃间断点，$x=2k(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷间断点，其余点处连续.

第 四 天

【第 1 题】【1989-2-3 分】设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$_________.

【答案】$n!$.

【第 2 题】【1991-2-3 分】设 $y=\ln(1+3^{-x})$，则 $\mathrm{d}y=$_________.

【答案】$-\dfrac{\ln 3}{3^x+1}\mathrm{d}x$.

【第 3 题】【1987-2-7 分】设 $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【答案】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{5(1-\cos t)^2}$.

【第 4 题】【1990-2-5 分】 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$.

【答案】 $\mathrm{d}y=\dfrac{\ln(x-y)+2}{3+\ln(x-y)}\mathrm{d}x$.

【第 5 题】【1995-2-5 分】 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^{y}$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【答案】 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

第 五 天

【第 1 题】【1987-2-3 分】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于 （ ）

（A）$f'(a)$.　（B）$2f'(a)$.　（C）0.　（D）$f'(2a)$.

【答案】（B）.

【第 2 题】【1995-2-5 分】 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0, \end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【答案】 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

【第 3 题】【2007-123-4 分】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列的命题错误的是（ ）

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

【答案】（D）.

【第 4 题】【2013-2-4 分】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=$ （　）

（A）2.　　（B）1.　　（C）-1.　　（D）-2.

【答案】（A）.

【第 5 题】设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$f'(a)=b$，$f(a)=1$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(a+\frac{1}{n})\right]^n=$________.

【答案】e^b.

第 六 天

【第 1 题】【1989-3-3 分】曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程

是__________.

【答案】$y=x+1$.

【第 2 题】【2003-3-4 分】已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表

示为 $b^2=$__________.

【答案】$4a^6$.

【第 3 题】【2005-3-4 分】设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列的命题中正确的是　（　）

（A）$f(0)$ 是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值.　（B）$f(0)$ 是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

（C）$f(0)$ 是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值.　（D）$f(0)$ 是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.

【答案】（B）.

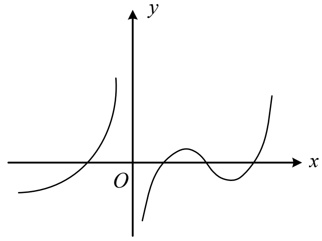
【第 4 题】【2007-3-10 分】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

【答案】曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的.

【第 5 题】【2011-3-10 分】证明方程 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

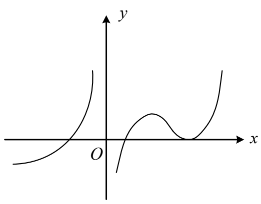
第 七 天

【**第 1 题**】设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图像

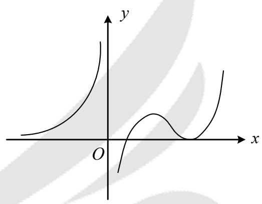


如右图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图像如 （　）

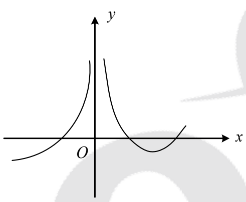
（A）



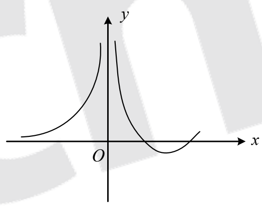
（B）



（C）



（D）



【**答案**】（D）.

【**第 2 题**】设 $f(x)$ 满足 $y''+y'-\mathrm{e}^{\sin x}=0$，且 $f'(x_0)=0$.则 $f(x)$ 在 （　）

（A）x_0 某邻域内单调增加.

（B）x_0 某邻域内单调减少.

（C）x_0 处取得极小值.

（D）x_0 处取得极大值.

【**答案**】（C）.

【第 3 题】设 p，q 是大于1的常数，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.证明对于任意的 $x>0$，有

$$\frac{1}{p}x^{p}+\frac{1}{q}\geq x.$$

【第 4 题】求函数 $f(x)=|x^{2}-x-2|$ 的极值。

【答案】函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 0，在 $x=2$ 处取得极小值 0，在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极大值$\frac{9}{4}$.

【第 5 题】设 $a>b$，证明：$\sin a-\sin b>a-b$