Семинар 6

6.1. Ранг матрицы

Определение 6.1. Пусть V – линейное пространство, $X \subset V$. *Рангом* системы X называется наибольший размер линейно независимой подсистемы в X (обозн. rk X).

Утверждение 6.1. rk $X = dim < X >$.

Определение 6.2. Пусть $A \in M_{n\times m}$.

- *Строчным рангом* матрицы A называется ранг $\text{rk}_r A$ системы её строк.
- *Столбцовым рангом* матрицы A называется ранг $\text{rk}_c A$ системы её столбцов.

Теорема 6.1. (о ранге матрицы). Для любой матрицы $A \in M_{n\times m}$ верно $\text{rk}_r A = \text{rk}_c A$.

Итак, можно говорить о *ранге матрицы*, rk A, без уточнения, строчный он или столбцовый. Вспомним одно из эквивалентных условий вырожденности матрицы – строки или столбцы её линейно зависимы. Это значит, что для $A \in M_{n\times n}$ верно:

Утверждение 6.2. A невырождена $\leftrightarrow$ rk $A = n$.

Теорема 6.2. Размерность пространства решений системы $Ax = 0$ равна $n - r$, где n – число неизвестных в системе, r – ранг основной матричной системы.

Следствие. В случае, когда $A \in M_{n\times n}$ и A невырождена, решением $Ax = 0$ является только нулевой вектор (размерность пространства решений равна нулю).

6.2. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения

Вернёмся к характеристическому уравнению:

$$\chi_\varphi(\lambda) := \det(A - \lambda E) = 0$$

где $A \in M_{n\times n}$ – матрица оператора φ. После разложения характеристического многочлена на множители получаем:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} = 0$$

Тогда $\lambda = \lambda_i$ – собственные значения, а k_i – их *алгебраическая кратность*. Далее ищем собственные векторы из уравнения $Ax = \lambda_i x$.

Пусть мы нашли r ЛНЗ собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i. Они порождают собственное подпространство $L_{\lambda_i} :=< x_{\lambda_{i_1}}, ..., x_{\lambda_{i_r}} >$. Но как понять, что для λ_i больше нет собственных векторов, линейно независимых с предыдущими? Очевидно (вообще говоря не очень и это нужно доказывать), что размерность L_{λ_i} не может превосходить алгебраическую кратность λ_i, но они и не обязаны совпадать. На самом деле $\dim L_{\lambda_i} = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_i E)$, поскольку L_{λ_i} есть не что иное, как пространство решений системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Число $\dim L_{\lambda_i}$ называется *геометрической кратностью* λ_i.

6.3. Присоединённые векторы

В качестве основы параграфа использовались эти прекрасные конспекты.

Для начала рассмотрим линейный оператор с матрицей:

$$J_{k\times k}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен $\chi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k$ имеет корень λ_0 кратности k. Теперь найдём размерность собственного подпространства, отвечающего нашему собственному значению. Для этого подставим λ_0 в $J - \lambda E$ и получим матрицу с единицами над главной диагональю. Нетрудно понять, что ранг такой матрицы равен $k-1$ и, следовательно, размерность собственного подпространства равна $k-(k-1) = 1$. Это значит, что мы не сможем найти базис из k ЛНЗ собственных векторов, чтобы привести $J_k(\lambda_0)$ к диагональному виду.

Определение 6.3. Матрица $J_k(\lambda_0)$ называется *жордановой клеткой порядка* k, соответствующей собственному значению λ_0.

Определение 6.4. Ненулевой вектор x называется *присоединённым*, отвечающим собственному значению λ, если для некоторого $m \geq 1$ выполняется:

$$(A - \lambda E)^{m-1}x \neq 0, \quad (A - \lambda E)^m x = 0.$$

Число m называется *высотой* присоединённого вектора x.

Далее я настоятельно прошу обратиться к конспектам по ссылке, потому что лучше, чем там, я вряд ли смогу сделать.