Семинар 2

Линейные отображения

Определение 2.1. Пусть U, V – линейные пространства. *Линейным отображением* называется такое отображение $\varphi : U \to V$, что оно удовлетворяет свойствам линейности:

- $\forall u_1, u_2 \in U : \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$
- $\forall u \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$

Определение 2.2. Пусть V – линейное пространство. Отображение $f : V \to \mathbb{R}$ называется *линейной функцией*, если выполнены свойства линейности:

- $\forall v_1, v_2 \in V : f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$
- $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Замечание. По сути функция есть отображение в некоторое множество скаляров.
Нужно понимать различие между векторами и скалярами. Пусть, например, есть некоторый вектор **5**, заданный на прямой, и число 5. Тогда мы не можем складывать их друг с другом, так как это разные объекты. Но мы можем умножить 5 на **5**, поскольку в линейном пространстве определено умножение вектора на число!
Упражнение 2.1. На плоскости задано отображение:

$$\tilde{x}_1 = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi$$
$$\tilde{x}_2 = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi$$

Проверить, что оно линейно, и найти его матрицу.
Решение:

Поскольку φ – это некоторый фиксированный угол, мы можем обозначить для краткости записи $a = \cos\varphi$ и $b = \sin\varphi$. Тогда отображение примет вид:

$$\tilde{x}_1 = ax_1 - bx_2$$
$$\tilde{x}_2 = bx_1 + ax_2$$

Теперь, чтобы доказать линейность, нужно проверить свойства линейного отображения. Возьмём два произвольных вектора $y = (y_1, y_2)^T$ и $z = (z_1, z_2)^T$ из нашего двумерного пространства (плоскости). В декартовой системе координат сложение векторов происходит покомпонентно, т.е. $y+z=(y_1+z_1, y_2+z_2)$. Посмотрим, куда переходит вектор $y+z$ при отображении:

$$\widetilde{(y+z)}_1 = a(y_1+z_1) - b(y_2+z_2) = (ay_1 - by_2) + (az_1 - bz_2) = \tilde{y}_1 + \tilde{z}_1$$
$$\widetilde{(y+z)}_2 = b(y_1+z_1) + a(y_2+z_2) = (by_1 + ay_2) + (bz_1 + az_2) = \tilde{y}_2 + \tilde{z}_2$$

Таким образом, мы проверили первое свойство. Второе свойство проверяется также просто :) матрица данного отображения:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Упражнение 2.2. На плоскости заданы три вектора $x=(1,3)^T$, $y=(1,4)^T$ и $z=(3,2)^T$. Проверить линейную зависимость системы $\{x,y,z\}$.

Решение:

Система векторов является линейно зависимой, если существует её нетривиальная линейная комбинация, равная нулю. Т.е. нужно показать, что $\exists a,b,c : abc \neq 0$ и $ax+by+cz=0$. Зная это, можно перейти к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \end{cases}$$

Подставим в систему известные нам значения x, y и z:

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ 3a + 4b + 2c = 0 \end{cases}$$

Теперь можно записать *матрицу системы* (т.е. матрицу, состоящую из коэффициентов данной системы):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

На самом деле на вопрос о линейной зависимости можно ответить уже сейчас. Действительно, если в матрице *однородной системы линейных уравнений* (т.е. такой, что все свободные члены в ней равны нулю) число строк строго меньше числа столбов, то существует хотя бы одно нетривиальное решение этой системы.

Чтобы найти коэффициенты, приведём матрицу к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Отсюда $-b+7c=0 \Rightarrow b=7c$ и $a+b+3c=0 \Rightarrow a=-b-3c \Rightarrow a=-7c-3c=-10c$.

И любая тройка коэффициентов $(-10c, 7c, c)$ является решением системы.

Упражнение 2.3. Пусть V – двумерное линейное пространство (плоскость), а $f : V \to V$ – линейное преобразование с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти базис и размерность подпространства $f(V) = \{f(v) | v \in V\}$ (эта запись означает, что мы рассматриваем множество векторов, полученное отображением всех векторов v из V).

Решение:

Рассмотрим, куда перейдёт произвольный вектор $v \in V$ при отображении f:

$$f(v) = M \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 3v_2 \\ -2v_1 + 6v_2 \end{pmatrix} = \left[p = v_1 - 3v_2\right] = \begin{pmatrix} p \\ -2p \end{pmatrix}$$

В силу того что мы взяли произвольный вектор из V, любой вектор из $f(V)$ имеет вид $(p, -2p)^T$, где $p \in \mathbb{R}$. В качестве базисного вектора можно взять $(1, -2)^T$. Таким образом, система $\{(1, -2)^T\}$ – это базис $f(V)$ и размерность этого подпространства равняется единице. Заметьте! что хотя размерность $f(V)$ равна единице, векторы в этом подпространстве обладают двумя компонентами :) потому что размерность означает то количество векторов, которое необходимо, чтобы выразить любой другой вектор из заданного пространства.

Ядро и образ линейного отображения

Определение 2.4. Пусть $\varphi \in L(U, V)$ – линейное отображение из U в V. Тогда

- $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{x \in U |\ \varphi(x) = 0\}$ – *ядро* отображения, т.е. всё, что переходит в ноль из U.
- $\mathrm{Im}\ \varphi = \{y \in V |\ \exists x \in U : \varphi(x) = y\}$ – *образ* отображения, т.е. все значения в V, куда в целом можем попасть.

Упражнение 2.4. Все квадратные матрицы порядка 2 умножаются справа на матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Этим определено отображение $\varphi : M^{2\times 2} \to M^{2\times 3}$ пространства матриц порядка 2 в пространство матриц размера 2×3. Найти матрицу этого отображения в стандартном базисе, а также базисы в $\mathrm{Ker}\ \varphi$ и $\mathrm{Im}\ \varphi$.

<u>Решение</u>:

Возьмём произвольный $X \in M^{2\times 2}$ и посмотрим на его образ:

$$\varphi(X) = X \cdot C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+4b & 3a+6b \\ c+2d & 2c+4d & 3c+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 2p & 3p \\ q & 2q & 3q \end{pmatrix}$$

Здесь мы приняли $p = a + 2b$ и $q = c + 2d$.

Чтобы $X \in \mathrm{Ker}\ \varphi$, нужно, чтобы $\varphi(X) = 0$, т.е.:

$$X \cdot C = \begin{pmatrix} p & 2p & 3p \\ q & 2q & 3q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -2d \end{cases}$$

Таким образом, в ядре нашего отображения лежат все квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix}$$

и только они. Нетрудно понять, что система:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

является базисом, а размерность ядра $\dim \mathrm{Ker}\ \varphi = 2$. Далее посмотрим на образ отображения. Как уже было показано выше $\forall X \ \varphi(X)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} p & 2p & 3p \\ q & 2q & 3q \end{pmatrix}$$

В качестве базиса можно взять систему

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Размерность образа $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$.