Семинар 1

Основы теории множеств

Определение 1.1. Пусть заданы множества X и Y. Их *декартовым произведением* называется совокупность всевозможных упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$.

Определение 1.2. *Бинарным отношением* на множестве E называется подмножество $\rho \in E \times E$, т.е. ρ – некоторый набор пар из $E \times E$.

Определение 1.3. Бинарное отношение R на множестве E называется *отношением эквивалентности*, если выполняются свойства:

1. рефлексивность: $(a, a) \in R \ \forall a \in E$.
2. симметричность: $((a, b) \in R) \to ((b, a) \in R)$.
3. транзитивность: $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \to ((a, c) \in R)$.

и *отношением порядка*, если в п.2) вместо симметричности выполняется антисимметричность: $((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to (a = b)$.

Упражнение. Показать, что отношение R на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, заданное как $R := \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$ является отношением эквивалентности.

Замечание. Говорят, что $a \equiv b \pmod{m}$, если они имеют одинаковый остаток при делении на m, либо, что то же самое, если $\exists k \in \mathbb{Z} : (a - b) = km$, т.е. их разность делится на m без остатка.

Подсказка. Нужно проверить выполнимость свойств из определения.

Другие примеры отношения эквивалентности – подобие фигур и параллельность.

Линейные пространства

Определение 1.4. *Линейным пространством* V над полем F (пока что будем рассматривать дйствительные числа $\mathbb{R}$) называется четвёрка $(V, F, +, \cdot)$, где:

- V – множество векторов.
- F – множество скаляров.
- определена операция сложения векторов $+ : V \times V \to V$.
- определена операция вектора на скаляр $\cdot : F \times V \to V$.

Заданные операции должны удовлетворять аксиомам линейного пространства!

Примеры линейных пространств:

- V_1, V_2, V_3 – множества векторов на праямой, плоскости и в пространстве.
- $M_{n\times k}(F)$ – матрицы размера $n \times k$, элементы которых принадлежат F.
- $F[x]$ – многочлены от переменной x с коэффициентами из F.

Упражнение. используя аксиомы линейного пространства, доказать:

a) $0 \cdot \overline{v} = \overline{0}\ \forall \overline{v} \in V$.

b) $\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}\ \forall \alpha \in F$.

c) $-1 \cdot \overline{v} = -\overline{v}\ \forall \overline{v} \in V$.

Определение 1.5. Система векторов $(\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n)$ называется *линейно независимой*, если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v}_i = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Определение 1.6. Линейная комбинация $\alpha_1\overline{v}_1 + ... + \alpha_n\overline{v}_n$ называется *нетривиальной*, если $\exists i : \alpha_i \neq 0$.

Определение 1.7. Система векторов $(\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n)$ называется *линейно зависимой*, если существует её нетривиальная линейная комбинация, равная $\overline{0}$.

Упражнение. Доказать, что если система ЛЗ, то и любая её надсистема также ЛЗ; если система ЛНЗ, то и любая её подсистема ЛНЗ.

Утверждение. В ЛЗ системе векторов $(\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n)$ существует вектор, который выражается через все остальные, но не обязательно все!

Определение 1.8. Пусть задано линейное пространство V над полем F. *Линейной оболочкой* векторов $\overline{v}_1, ..., \overline{v}_k$ называется множество всевозможных линейных комбинаций:

$$< \overline{v}_1, ..., \overline{v}_k >= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{v}_i \mid \alpha_1, ..., \alpha_k \in F \right\}$$

Определение 1.9. *Базисом* в линейном пространстве V называется такая линейно независимая система $(\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n)$, где $\overline{v}_i \in V$, что $< \overline{v}_1, ..., \overline{v}_k > = V$. Таким образом, через базис можно выразить любой элемент линейного пространства при помощи некоторой линейной комбинации.