The 2019 Aisa Nanchang First Round Online Programming Contest

Magic Master

模拟题:单独用一个数组模拟指针,实现未翻开的牌跳过后面所有翻开的牌,直接指向下一张未翻开的牌。然后按规则模拟即可。

Fire-Fighting Hero

图论题-单源最短路径:添加一个顶点,连接各个救火团队所在的救火点,路径长度均设为 0,设该顶点为源,即变成了单源最短路径问题。使用两次Dijkstra算法可求出两个最短路径的最大值。比较时将救火团队的乘以T进行比较可避免分数操作。

Pangu Separates Heaven and Earth

签到题

Hello 2019

题解:建立一颗长度为n的线段树,每颗线段树维护矩阵乘法,复杂度25nlogn

Interesting Series

展开F得

$$F_n = (1 - a^n)/(1 - a)$$

,对于这一类经典问题有生成函数

$$(x+a^{s_1})*(x+a^{s_2})*(x+a^{s_3})*....*(x+a^{s_n})$$

 $,x^{n-k}$ 的系数就是所求,分治FFT即可,复杂度

$$n * log^2(n)$$

The Nth Item

题目大意: 给定一个序列

F(n) = 3 * F(n-1) + 2 * F(n-2)(n >= 2), F(0) = 0, F(1) = 1.Q次询问每次询问第N项对998244353取模的值。

题解: Q很大,只允许我们在线O(1)回答,于是可以推出该序列的通项公式为 $F(n) = \frac{\sqrt{17}}{17} * \left(\left(\frac{(3+\sqrt{17})}{2} \right)^n - \left(\frac{(3-\sqrt{17})}{2} \right)^n \right)$,再求出17在模998244353下的二次剩余,每次就可以两个快速幂求出答案,得到了一个log(n)的回答方法。

但是这样还是不够,我们可以预处理出式子中两个数字的0次幂,1次幂,到 $\sqrt{10^9}$ 次幂, $0*\sqrt{10^9}$ 次幂, $1*\sqrt{10^9}$ 次幂…到 $\sqrt{10^9}*\sqrt{10^9}$ 次幂。这样就可以回答时免去快速幂的一个 \log ,做到O(1)在线回答。

Megumi With String

题意:

给定长为l的串S,定义一个字符串str的value为G(p)当且仅当str是S中的某一个子串,其中p为子串长度,G(x)是一个k次多项式。否则我们认为它的value为0。对于一个长度为n的串T,它可能由任意一个n个小写字符构成,而它的power定义为它的所有子串的value和。现在有m个操作,每次操作我们要在S末尾加入一个小写字符c,问每次操作后随机串T的期望power为多少。

解题思路:

先来考虑没有修改的情况。本题中n很大,难以直接dp。但是经过观察可以发现,对于确定的长度p, S的每一个长度为p的本质不同的子串的权值是相等的。同时,这些子串在完全随机的字符串中出现的期望次数也是相等的。因此,对于每个 $p \in [1,l]$,我们可以直接算出长度为p的一个子串的期望贡献。这个贡献被产生的次数等于S中长度为p的本质不同的子串个数,可以用后缀自动机进行求解。对S建出SAM后,每个节点会对长度在其len与其父节点的

len之间的一段产生+1的贡献。由于贡献一定是连续的一段,可以对每个长度的期望贡献求前缀和后维护。

由于后缀自动机是在线算法,所以支持修改很容易,只需每次计算被改变的节点的贡献即可,单次修改是常数复杂度。在字符集大小为常数的情况下,总时间复杂度为O((l+m)k)

Yukino with Subinterval

题意:

给一个数组a,支持单点修改,询问区间中值域在一定范围内的最长连续段的个数。

解题思路:

我们直接暴力去数连续段显然不太方便,因此我们考虑将整个连续段压缩成一个点。

我们考虑将每一个连续端都只统计最左边的数,那么我们可以定义一个新的数组b,其中, $b_i=a_i$ 当且仅当 $a_i\neq a_{i-1}$,否则 $b_i=0$.

之后这个问题就被转化成求数组b在区间[l+1,r], 值域在[x,y]的个数。

而这个问题是一个经典的主席树的问题,对于每个查询,我们只需要遍历一下我们建出来的主席树即可。鉴于本题需要支持单点修改,因此可以考虑用树状数组维护一下主席树。或者也可以采用常数比较小的cdg分治。

最后注意,因为我们判断的是数组b在区间[l+1,r]的状态,因此最后我们还必须要特判一下最左端的数 b_l 的大小。整体的时间复杂度为: $\mathcal{O}(nlogn^2)$

Enju With Euler function

题意:

给你由100个数组成的数列,问你这些数是否是欧拉函数中的其中连续的一段。

题解:

暴力的做法是用欧拉筛,筛出范围内的欧拉函数,而在每一位进行一次check。判断数列是否为当前段。这样时间复杂度是 $\mathcal{O}(T*1.6*10^8*100)$.明显不行。

首先,欧拉函数对于第i位的三元组 $\{\varphi(i), \varphi(i+1), \varphi(i+2)\}$ 是唯一的,(其实出题人发现二元组好像也是,不过不敢肯定,不过三元组基本是可以肯定是的)。

这样判断的时候通过已给数列前三个在欧拉函数中确定位置,如有,对于每个数字check一下即可,否则亦无解。

不过,这样仍然要打出完整的欧拉筛,是还未足够的。

接下来需要运用一个性质,

$$f(n) = egin{cases} arphi(n*p) = arphi(n)*p, & ext{if n mod p=0} \ \\ arphi(n*p) = arphi(n)*(p-1), & ext{else} \end{cases}$$

将k个2分别代入原式并推导可发现如下式子:

$$f(n) = egin{cases} arphi(n*2^k) = arphi(n)*2^k, & ext{if n is even} \ arphi(n) = arphi(n*2^k) = arphi(n)*2^{k-1}, & ext{if n is odd} \end{cases}$$

假设有一个32的倍数j,对于三元组 $\{j,j+32,j+64\}$ 除以32一定为偶奇偶或奇偶奇,而除以16一定都为偶数,别对两种情况通过上述定理进行预处理,则可以得到可能的 $\{a[\frac{i}{32}],a[\frac{i}{32}+1],a[\frac{i}{32}+2]\}$ 。

正确题解:那么我们可以进行dfs,对于已给数列a,枚举 $i \in [1,32]$,取出 $\{a[i],a[i+32],a[i+64]\}$,其中必定存在有一组三个位数均为32的倍数。预处理出所有可能的 $\{a[\frac{i}{32}],a[\frac{i}{32}+1],a[\frac{i}{32}+2]\}$ 。那么欧拉筛就只需筛出 $\frac{1.6*10^8}{32}=5*10^6$ 的数量。然后查找出现的三元组,对于每种可能的三元组的位置×32回归原位做一遍check,则可以得到答案,而且理论可能的三元组需要check的很少。

时间复杂度 $\mathcal{O}(T*(5*10^6+32log(1.6*10^8)))$ 。可过。

由于数据离线,其实如果用压位特殊处理一下,复杂度可以降到 $\mathcal{O}(5*10^6+32Tlog(1.6*10^8))$