

群論

Lexington Whalen

January 2023

1 集合と写像

特に斬新なことは書かれていませんでした。集合論をある程度知っている方にとってはこれはおそらく読み飛ばしても大丈夫だと思います。

2 群の概念

2.1 群の定義

例題 1 : 群 G において、 $aa = a$ ならば、 $a = e$ (単位元) である。また、 $ab = e$ ならば、 $b = a^{-1}$, $a = b^{-1}$ である。

証明 : $aa = a$ ならば、両辺に a^{-1} を右からかけると $aa \times a^{-1} = a \times a^{-1}$ となり $a = e$ となります。また、 $ab = e$ ならば、両辺に a^{-1} を左からかけると $a^{-1} \times ab = a^{-1} \times e$ となり $eb = a^{-1}$ となります。もっと整えると求めている $b = a^{-1}$ となります。 ■

2.4 部分群

群 G の部分集合 H が次の2つの条件を満たすとき、これを G の部分群という :

$$i) a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$ii) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

例題 1 : 群 G の部分群である H が G の部分群であるため必要十分な条件は

$$iii) a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$