TÓM TẮT HÌNH HỌC 11

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

❑ CHƯƠNG I : PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

A. PHÉP BIẾN HÌNH

▪ Phép biến hình (trong mặt phẳng) là một quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

▪ Nếu điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F thì ta viết : M' = F(M) hoặc F(M) = M'.

▪ Để chứng minh hình H' là ảnh của hình H qua phép biến hình F ta có thể chứng minh :

Với điểm M tùy ý, $M \in H \Leftrightarrow M' = F(M) \in H'$

▪ Phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành chính nó được gọi là *phép đồng nhất.*

B. PHÉP DỜI HÌNH

▪ Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

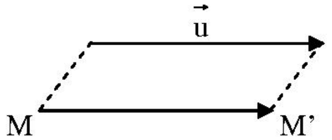
▪ Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến một đường thẳng thành đường thẳng, biến một tia thành một tia, biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến một tam giác thành tam giác bằng nó, biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến một góc thành góc bằng nó.

▪ Nếu thực hiện liên tiếp hai phép dời hình thì được một phép dời hình.

§2. PHÉP TỊNH TIẾN

1) ĐỊNH NGHĨA

Cho vectơ $\vec{u}$, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$, ký hiệu là $T_{\vec{u}}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành một điểm M' xác định, sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.



$$\boxed{T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$$

2) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M(x ; y), $\vec{u} = (a\,;\,b)$. Gọi M'(x' ; y') = $T_{\vec{v}}(M)$. Khi đó : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

3) TÍNH CHẤT

Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì M'N' = MN.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1) ĐỊNH NGHĨA

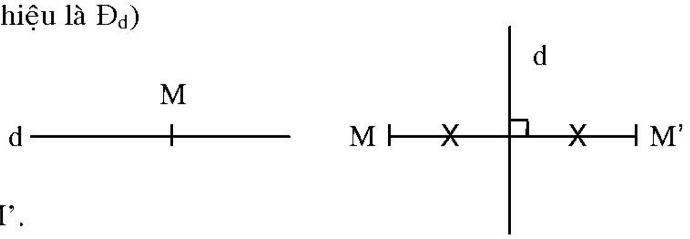
Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d (ký hiệu là $Đ_d$)

• ***Nhận xét :*** Cho phép đối xứng trục $Đ_d$.

a) Nếu $Đ_d(M) = M'$ thì $Đ_d(M') = M$.

b) Nếu $M \in d$ thì $Đ_d(M) = M$.

c) Nếu $Đ_d(M) = M'$ với $M \neq M'$ thì trục đối xứng d là đường trung trực của đoạn MM'.



2) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với mỗi điểm M(x ; y), gọi M' = $Đ_d$ (M) = (x' ; y').

Nếu chọn d là trục Ox, thì : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$, còn nếu chọn d là trục Oy, thì : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

3) TÍNH CHẤT

Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình H nếu có phép đối xứng trục $Đ_d$ biến H thành chính nó, tức là $Đ_d$(H) = H.

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1) ĐỊNH NGHĨA

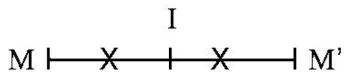
Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối tâm (ký hiệu là $Đ_I$). Điểm I được gọi là tâm của phép đối xứng đó(tâm đối xứng).

• ***Nhận xét :***

a) Nếu $Đ_I$(M) = M' thì $Đ_I$(M') = M.

b) Nếu M ≡ I thì M' ≡ I.

c) Nếu M ≠ I thì I là trung điểm của đoạn MM'.



2) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm I(x_0 ; y_0). Khi đó biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm I biến điểm M(x ; y) thành điểm M'(x' ; y') là : $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$

§5. PHÉP QUAY

1) ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM' = OM và góc lượng giác (OM ; OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α. Điểm O được gọi là tâm quay, α được gọi là góc quay. Phép quay tâm O góc α ký hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

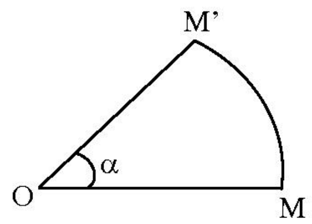
2) BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

a) Ảnh M' của M(x_0 ; y_0) qua phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ là : M' : $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{cases}$

▪ Nếu góc quay 90° thì M'(–y ; x) và nếu góc quay –90° thì M'(y ; –x).

b) Ảnh M' của M(x_0 ; y_0) qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ (với I(a ; b)) là :

M' : $\begin{cases} x' = (x_0 - a)\cos\alpha - (y_0 - b)\sin\alpha + a \\ y' = (y_0 - b)\cos\alpha + (x_0 - a)\sin\alpha + b \end{cases}$



c) Phép quay tâm O góc quay α = (2k + 1)π với k nguyên, chính là phép đối xứng tâm O.

d) Phép quay tâm O góc quay α = 2kπ với k nguyên chính là phép đồng nhất.

§6. PHÉP VỊ TỰ

1) ĐỊNH NGHĨA

Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, k ≠ 0. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k.

2) TÍNH CHẤT

▪ Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì :

$\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và M'N' = | k |.MN

▪ Phép vị tự tỉ số k biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với | k |, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là | k |, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính | k |R.

▪ Ảnh M' của $M(x_0 ; y_0)$ qua phép vị tự $V_{(I\,;\,k)}$ với I(a ; b) là : $M'\left(kx_0 + (1-k)a \,;\, ky_0 + (1-k)b\right)$

§7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

1) ĐỊNH NGHĨA

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm M, N bất kỳ và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có M'N' = k.MN

• ***Nhận xét*** **:**

▪ Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số k.

▪ Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số | k |.

▪ Nếu thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì được một phép đồng dạng.

2) TÍNH CHẤT

Phép đồng dạng tỉ số k biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến một đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính k.R

❑ CHƯƠNG II : ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. MỞ ĐẦU VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1) Mặt phẳng

_ Mặt hồ nước yên lặng, một tấm gương phẳng, mặt bảng, ... như là một phần của mặt phẳng.

_ Để biểu diễn cho một phần của mặt phẳng người ta thường vẽ một hình bình hành.

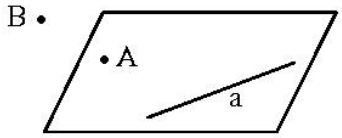
_ Để ký hiệu mặt phẳng người ta dùng 1 chữ cái đặt trong dấu ngoặc ( ) : mặt phẳng (P) hoặc mp(P) hoặc mp(ABC) hoặc có thể đơn giản là (P).

2) Tương quan cơ bản giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng

Điểm A

Đường thẳng a

Mặt phẳng (P)



Ký hiệu :

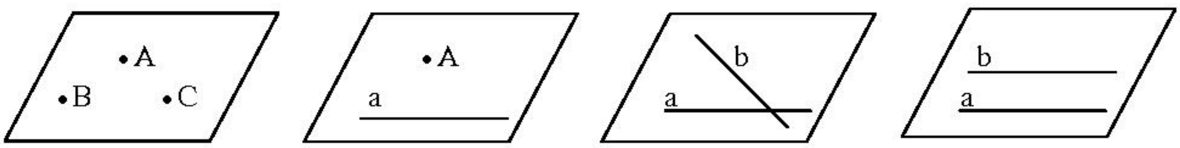
$A \in (P)$ và $B \notin (P)$

$a \subset (P)$

3) Cách xác định mặt phẳng

Một mặt phẳng được xác định khi biết một trong các yếu tố sau :

1) Ba điểm không thẳng hàng.
2) Một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm ấy.
3) Hai đường thẳng cắt nhau.
4) Hai đường thẳng song song.



II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1) Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

a) Tính chất 1 : Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

b) Tính chất 2 : Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

c) Tính chất 3 : Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

d) Tính chất 4 : Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

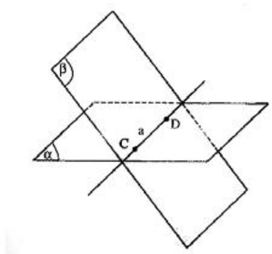
e) Tính chất 5 : Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

2) Một số định lý của hình học không gian

a) Định lý 1 : (Giao tuyến của hai mặt phẳng)

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

b) Định lý 2 : Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

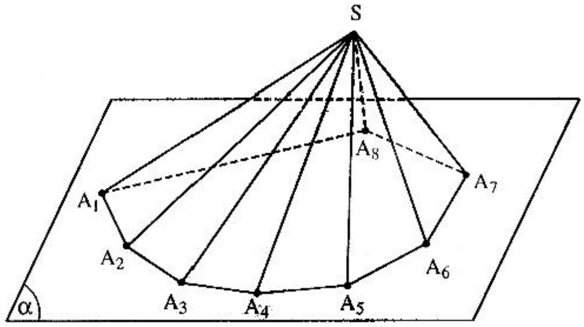


$mp(\alpha) \cap mp(\beta) = a$

III. HÌNH CHÓP

1) Định nghĩa

Cho hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$ thì cần hiểu rằng đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nằm trong mặt phẳng (P) và điểm S không thuộc mặt phẳng (P).



▪ Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.

▪ Đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ gọi là đáy của hình chóp.

▪ Các tam giác SA_1A_2 , SA_2A_3 , ... , SA_nA_1 gọi là các mặt bên của hình chóp.

• ***Chú ý*** :

_ Hình chóp có bốn mặt đều là những tam giác gọi là hình tứ diện. Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau gọi là tứ diện đều.

_ Thiết diện của một hình chóp cắt bởi một mặt phẳng, tùy thuộc vào vị trí của mặt cắt, nhìn chung là một đa giác.

IV. MỘT VÀI DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

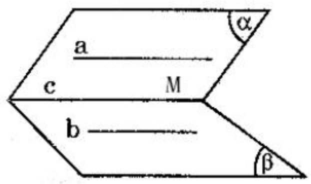
1) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng : Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ta chỉ cần tìm hai điểm chung của chúng và vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

• ***Cách khác*** :

Giao tuyến theo phương :

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) có một điểm chung M và lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng c đi qua M và song song với a và b.

❑ **ĐỊNH LÝ BỔ SUNG**

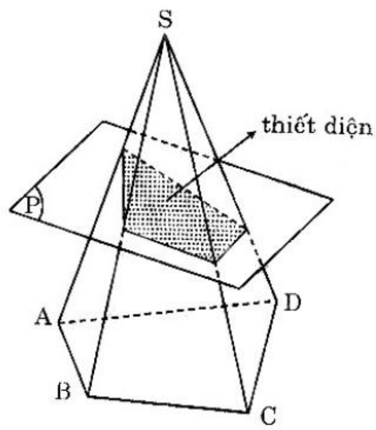


$$\left.\begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ a // b \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mt // a // b$$

2) Tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng :

_ Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của đường thẳng d với một đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (α).

_ Nếu đường thẳng d' chưa có sẵn trên hình vẽ thì ta tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và cắt mặt phẳng (α) rồi xác định giao tuyến d' của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β). Khi đó giao điểm I của d' và d là giao điểm của d và mặt phẳng (α).



3) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng : Muốn tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng, ta tìm các đoạn giao tuyến của mặt phẳng với các mặt bên và đáy của hình chóp. Đa giác giới hạn bởi các đoạn giao tuyến này chính là thiết diện cần tìm.

4) Chứng minh nhiều điểm thẳng hàng : Muốn chứng minh nhiều điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, rồi kết luận chúng thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

5) Chứng minh 3 đường thẳng đồng qui :

_ Muốn chứng minh 3 đường thẳng đồng qui, ta chứng minh chúng không đồng phẳng và đôi một cắt nhau.

_ Hoặc tìm giao điểm I của hai trong 3 đường thẳng đã cho, sau đó chứng minh đường thẳng còn lại cũng qua I.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có thể xảy ra hai trường hợp :

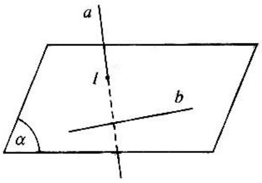
1) a và b không cùng nằm trên một mặt phẳng nào cả. Khi đó ta nói rằng a và b chéo nhau.

2) a và b cùng nằm trên một mặt phẳng nào đó. Khi đó ta nói rằng a và b đồng phẳng. Theo kết quả của hình học phẳng, nếu a và b đồng phẳng thì có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau :

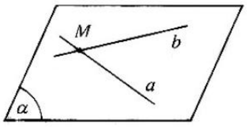
a) a và b cắt nhau : có duy nhất một điểm chung.

b) a và b song song với nhau : cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung.

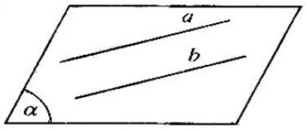
c) a và b trùng nhau : có hai điểm chung phân biệt.



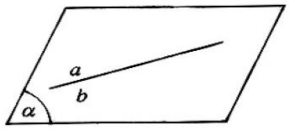
a và b chéo nhau



$a \cap b = M$



a // b



$a \equiv b$

• ***Chú ý :***

▪ Hai đường thẳng gọi là ***đồng phẳng*** nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.

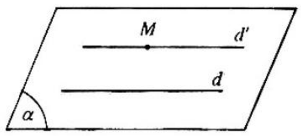
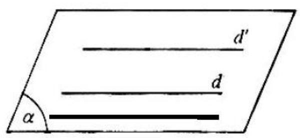
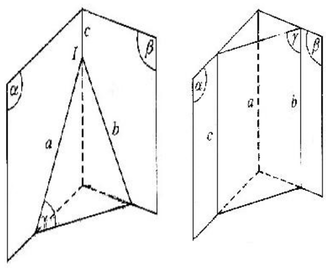
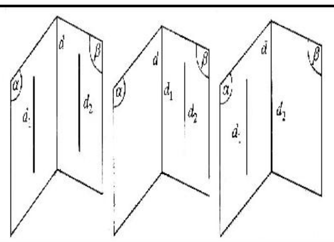
▪ Hai đường thẳng được gọi là ***chéo nhau*** nếu chúng không đồng phẳng.

▪ Hai đường thẳng gọi là ***song song*** nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

• ***Định lý Menélaus :***

Giả sử đường thẳng Δ cắt các cạnh (hoặc phần kéo dài) BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A', B', C' thì ta có : $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

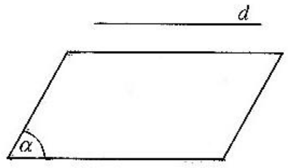
CÁC TÍNH CHẤT VÀ ĐỊNH LÝ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
• ***Tính chất 1*** : Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.		$d'\begin{cases}\text{qua } M,\ M \notin d\\ d' // d\end{cases} \Rightarrow d' \text{ duy nhất}$
• ***Tính chất 2*** : Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.		$\left.\begin{matrix} d // \Delta \\ d' // \Delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow d // d'$
• ***Định lý*** : (về giao tuyến của ba mặt phẳng) Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.		$\left.\begin{matrix}(\alpha)\cap(\gamma)=a\\(\beta)\cap(\gamma)=b\\(\alpha)\cap(\beta)=c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a, b, c \text{ đồng qui}$ Hoặc : $\left.\begin{matrix}(\alpha)\cap(\gamma)=c\\(\beta)\cap(\gamma)=b\\(\alpha)\cap(\beta)=a\end{matrix}\right\}\Rightarrow a // b // c$
• ***Hệ quả*** : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).		$\left.\begin{matrix}(\alpha)\cap(\beta)=d\\ d_1 // d_2\\ d_1\subset(\alpha)\\ d_2\subset(\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow d // d_1 // d_2$

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

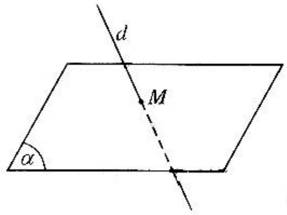
I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có ba vị trí tương đối :

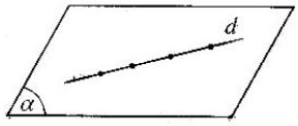
1) Đường thẳng song song với mặt phẳng : Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm nào chung.
2) Đường thẳng cắt mặt phẳng : Đường thẳng và mặt phẳng chỉ có một điểm chung duy nhất.
3) Đường thẳng nằm trong mặt phẳng : Đường thẳng và mặt phẳng có vô số điểm chung.



d // mp(α)



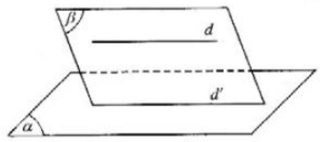
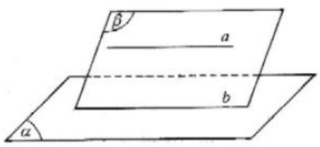
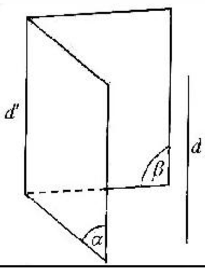
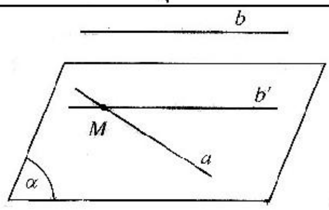
d ∩ mp(α) = M



d ⊂ mp(α)

• ***Định nghĩa*** : Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG

CÁC TÍNH CHẤT VÀ ĐỊNH LÝ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
• ***Định lý 1*** : Nếu một đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với một đường thẳng d' nào đó nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d song song với mặt phẳng (α).		$\left.\begin{array}{l} d \not\subset mp(\alpha) \\ d\,//\,d' \\ d' \subset mp(\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow d\,//\,mp(\alpha)$
• ***Định lý 2*** : Cho đường thẳng a song song với mp(α). Nếu mp(β) đi qua a và cắt mp(α) thì giao tuyến của mặt phẳng (α) và (β) song song với đường thẳng a.		$\left.\begin{array}{l} a\,//\,mp(\alpha) \\ a \subset mp(\beta) \\ mp(\alpha) \cap mp(\beta) = b \end{array}\right\} \Rightarrow b\,//\,a$
• ***Hệ quả*** : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.		$\left.\begin{array}{l} mp(\alpha) \cap mp(\beta) = d' \\ d\,//\,mp(\alpha) \\ d\,//\,mp(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow d'\,//\,d$
• ***Định lý 3*** : Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng đi qua đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.		a chéo b $\Rightarrow \exists$ mp(α) $\left\{\begin{array}{l} \text{duy nhất} \\ \text{qua M} \\ //\,b \end{array}\right.$

• ***Chú ý*** : Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

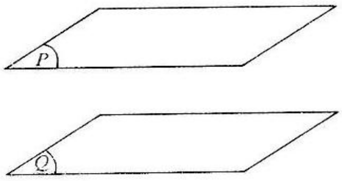
§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG

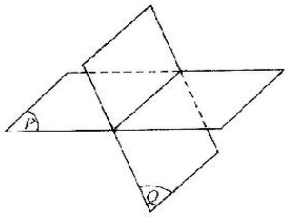
Giữa hai mặt phẳng có ba vị trí tương đối :

1) Hai mặt phẳng song song : Không có điểm chung (không có đường thẳng chung).

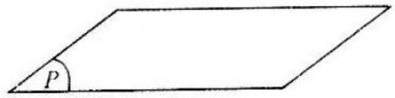
2) Hai mặt phẳng cắt nhau : Có hai điểm chung phân biệt (có một đường thẳng chung).
3) Hai mặt phẳng trùng nhau : Có 3 điểm chung không thẳng hàng (có 2 đường thẳng chung phân biệt).



mp(P) // mp(Q)



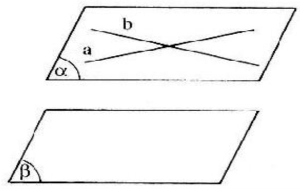
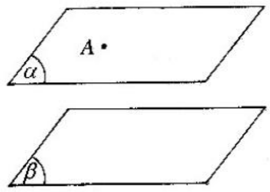
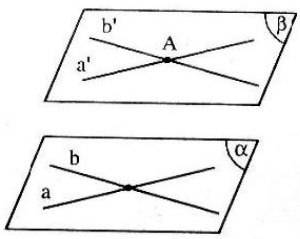
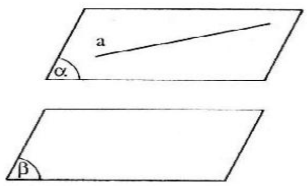
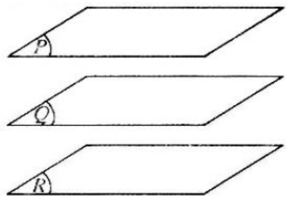
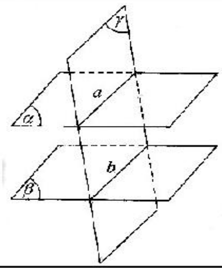
mp(P) cắt mp(Q)

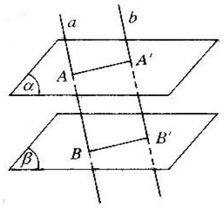
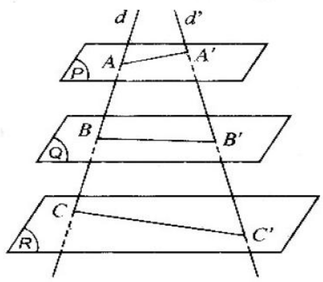


mp(P) ≡ mp(Q)

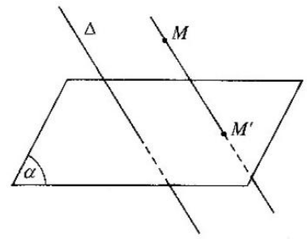
• ***Định nghĩa*** : Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

CÁC TÍNH CHẤT VÀ ĐỊNH LÝ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
• ***Định lý 1*** : Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với một mặt phẳng (β) cho trước thì hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.		$\left.\begin{matrix} a\subset(\alpha);\, b\subset(\alpha) \\ a\cap b\neq\varnothing \\ a//(\beta) \\ b//(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$
• ***Tính chất 1*** : Qua một điểm A bất kỳ cho trước nằm ngoài mặt phẳng (β) cho trước có một và chỉ một mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).		$\left.\begin{matrix} A\notin(\beta) \\ A\in(\alpha)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists\ \text{mp}(\alpha)\left\{\begin{matrix}\text{duy nhất} \\ \text{qua A} \\ //\ \text{mp}(\beta)\end{matrix}\right.$
• ***Hệ quả 1***: Nếu trong một mặt phẳng có hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau của một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.		$\left.\begin{matrix} a\subset(\alpha);\, b\subset(\alpha) \\ a\cap b\neq\varnothing \\ a'\subset(\beta);\, b'\subset(\beta) \\ a'\cap b'\neq\varnothing \\ a//a' \\ b//b'\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$
• ***Hệ quả 2*** : Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (β) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).		$\left.\begin{matrix} a\not\subset(\beta) \\ a\subset(\alpha)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists\ \text{mp}(\alpha)\left\{\begin{matrix}\text{duy nhất} \\ \text{chứa a} \\ //\ \text{mp}(\beta)\end{matrix}\right.$
• ***Hệ quả 3*** : Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.		$\left.\begin{matrix} (P)//(R) \\ (Q)//(R)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(P)//(Q)$
• ***Tính chất 3*** : Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song thì mọi mặt phẳng (γ) đã cắt mp(α) đều phải cắt (β) và các giao tuyến của chúng song song.		$\left.\begin{matrix} \text{mp}(\alpha)//\text{mp}(\beta) \\ \text{mp}(\gamma)\cap\text{mp}(\alpha)=a \\ \text{mp}(\gamma)\cap\text{mp}(\beta)=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$

• ***Hệ quả 4*** : Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.		$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\(\gamma)\cap(\alpha)=AA'\\(\gamma)\cap(\beta)=BB'\end{array}\right\}\Rightarrow AB=A'B'$
• ***Định lý 2*** : (Định lí Ta-Lét trong không gian) ***Định lý thuận :*** Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. ***Định lý đảo :*** Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau d và d' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$. Kh đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.		$\left.\begin{array}{l}d\cap(P)=A\\d\cap(Q)=B\\d\cap(R)=C\\d'\cap(P)=A'\\d'\cap(Q)=B'\\d'\cap(R)=C'\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG



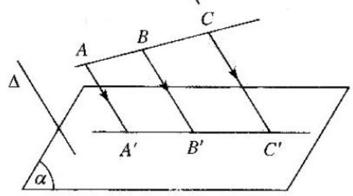
Trong không gian cho mp(α) và đường thẳng Δ cắt mp(α).
Với mỗi điểm M trong không gian ta dựng đường thẳng qua M và cùng phương với đường thẳng Δ, đường thẳng này cắt mp(α) tại M'.
Ta có phép chiếu song song lên mp(α) theo phương của đường thẳng Δ

_ Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu.

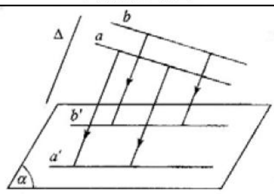
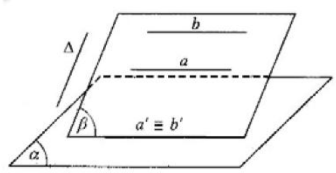
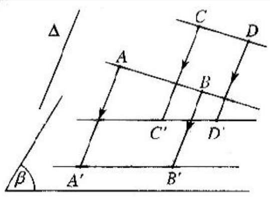
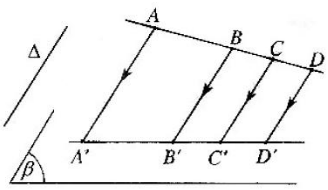
_ Phương của Δ gọi là phương chiếu.

_ M' là hình chiếu của M trên mp(α) theo phương đường thẳng Δ.

• ***Định lý 1*** : Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.



• Hệ quả : Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

CÁC TÍNH CHẤT	HÌNH VẼ	HÌNH VẼ
• ***Tính chất 1*** : Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.		
• ***Tính chất 2*** : Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng	 $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$	 $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$

❑ CHƯƠNG III : VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN – QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẤT KÌ TRONG KHÔNG GIAN

1) Vectơ chỉ phương của đường thẳng : Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.

• ***Nhận xét :***

_ Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

_ Một đường thẳng d trong không gian được hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của nó.

_ Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

2) Góc giữa hai đường thẳng : Góc giữa hai đường thẳng a, b bất kì trong không gian được ký hiệu (a , b) hay (b , a) là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

• ***Nhận xét :***

_ Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a, b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0° \leq \alpha \leq 90°$ và bằng $180° - \alpha$ nếu $90° \leq \alpha \leq 180°$. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.

_ Để tính góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta dựa vào công thức : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

• ***Định nghĩa*** : Hai đường thẳng a và b gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°. Nếu a và b là hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta ký hiệu $a \perp b$. Như vậy : $a \perp b \Leftrightarrow (a , b) = 90° \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

• ***Nhận xét :*** Muốn chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau ta cần tìm các vectơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$ của mỗi đường thẳng đó và chứng minh $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

III. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

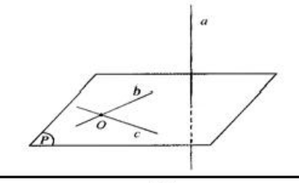
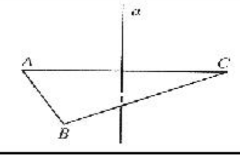
• ***Định lý*** : Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai. ($a // b$ và $c \perp a \Rightarrow c \perp b$)

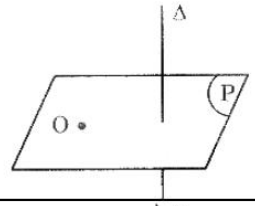
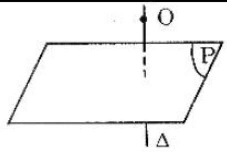
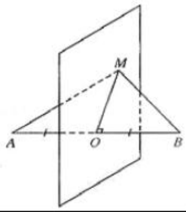
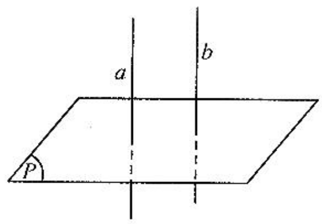
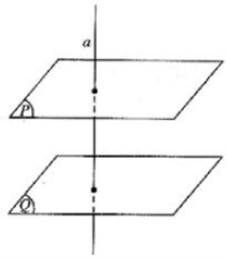
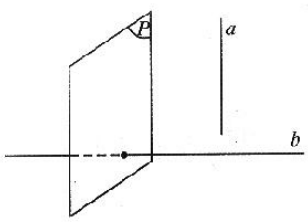
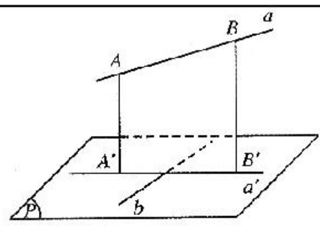
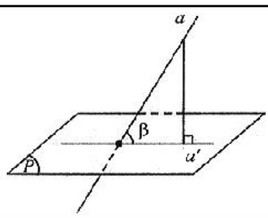
• ***Chú ý :***

1) Hai đường thẳng vuông góc trong không gian thì hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

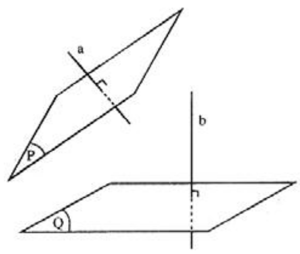
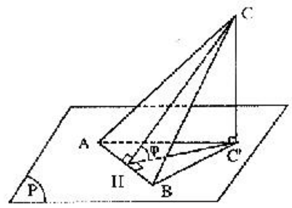
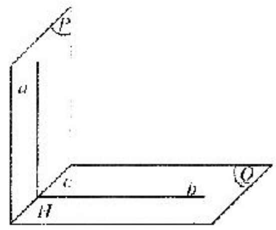
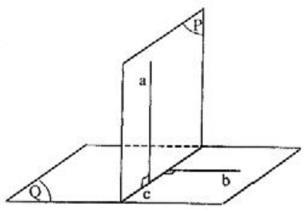
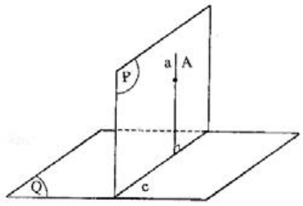
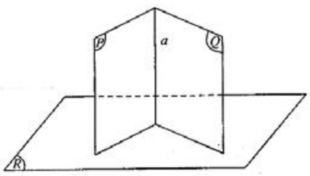
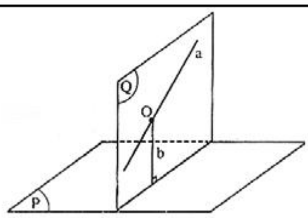
3) Trong mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau, nhưng trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì không phải khi nào cũng song song với nhau.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

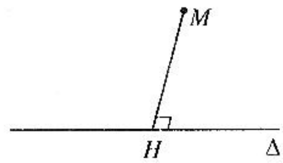
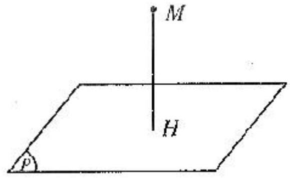
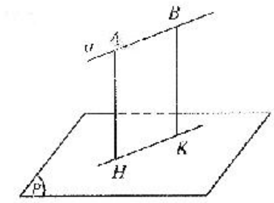
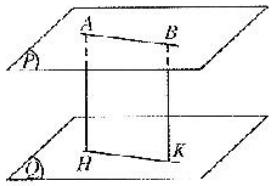
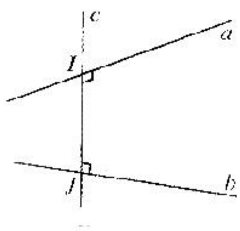
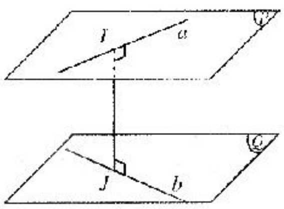
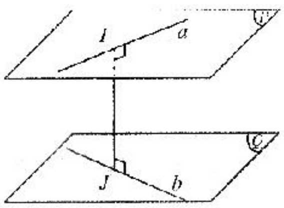
CÁC ĐỊNH LÝ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
• ***Định lý 1*** : Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b, c cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì a vuông góc với mọi đường thẳng d nằm trong mp(P).		$\left.\begin{array}{l} a \perp b, a \perp c \\ b, c \subset (P) \\ b \cap c \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp d, \forall d \subset (P)$
• ***Hệ quả*** : Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì cũng vuông góc với cạnh thứ ba.		$\left.\begin{array}{l} a \perp AB \\ a \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp BC$

• ***Tính chất 1*** : Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.		$\begin{cases} \text{điểm } O, \Delta \text{ cho trước} \\ \exists\, mp(P) \text{ qua } O \text{ và } mp(P)\perp\Delta \end{cases}$
• ***Tính chất 2*** : Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.		$\begin{cases} \text{điểm } O, mp(P) \text{ cho trước} \\ \exists\, \Delta \text{ qua } O \text{ và } \Delta\perp mp(P) \end{cases}$
• ***Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng*** Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng vuông góc với AB tại trung điểm O của đoạn thẳng AB.		$\begin{cases} O \text{ là trung điểm đoạn } AB \\ mp(P)\perp AB \text{ tại } O. \end{cases}$
• ***Tính chất 3*** : a) Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại. b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.		$\left.\begin{matrix} a // b \\ mp(P)\perp a \end{matrix}\right\} \Rightarrow mp(P)\perp b$ $\left.\begin{matrix} a\perp mp(P) \\ b\perp mp(P) \\ a \not\equiv b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // b$
• ***Tính chất 4*** : a) Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại. b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.		$\left.\begin{matrix} mp(P) // mp(Q) \\ a\perp mp(P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp mp(Q)$ $\left.\begin{matrix} mp(P)\perp a \\ mp(Q)\perp a \\ mp(P)\not\equiv mp(Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow mp(P)//mp(Q)$
• ***Tính chất 5*** : a) Cho đường thẳng a và mp(P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mp(P) thì cũng vuông góc với a. b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.		$\left.\begin{matrix} a // mp(P) \\ b\perp mp(P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow b\perp a$ $\left.\begin{matrix} a\not\subset mp(P) \\ a\perp b \\ mp(P)\perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // mp(P)$
• ***Định lý ba đường vuông góc*** Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong mp(P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên mp(P).		$b \subset mp(P)$ và a' là hình chiếu của a trên mp(P)). Nếu : • $b\perp a \Rightarrow b\perp a'$ • $b\perp a' \Rightarrow b\perp a$
• ***Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*** Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P). Góc giữa đường thẳng a và mp(P) là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên mp(P).		• $(a\ ,\ mp(P)) = (a\ ,\ a')$ • $0^\circ \le (a, (P)) \le 90^\circ$ • $\mathbf{(a, (P)) = 0^\circ} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a//(P) \\ a\subset(P) \end{matrix}\right.$ • $(a, (P)) = 90^\circ \Leftrightarrow a\perp(P)$

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

CÁC ĐỊNH NGHĨA - ĐỊNH LÝ – HỆ QUẢ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
• ***Định nghĩa*** : Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.		$\left.\begin{matrix} a\perp mp(P) \\ b\perp mp(Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a, b) = ((P),(Q))$ • **$0^\circ \le (P, Q) \le 90^\circ$** • **$(P, Q) = 0 \Leftrightarrow$** $\left[\begin{matrix} (P)//(Q) \\ (P)\equiv(Q) \end{matrix}\right.$ • $(P, Q) = 90^\circ \Leftrightarrow (P)\perp(Q)$
• ***Định lý 1*** : Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt chiếu.		$S' = S.\cos\varphi$ S là diện tích của ΔABC, S' là diện tích của $\Delta ABC'$ là hình chiếu của ΔABC trên mp(P) và φ là góc giữa mp(P) và mp(ABC)
• ***Định lý 2*** : Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.		$\left.\begin{matrix} a\subset mp(P) \\ a\perp mp(Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow mp(P)\perp mp(Q)$
• ***Định lý 3*** : Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.		$\left.\begin{matrix} mp(P)\perp mp(Q) \\ mp(P)\cap mp(Q) = c \\ a\subset mp(P) \\ a\perp c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp mp(Q)$
• ***Hệ quả 1*** : Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trên mp(P) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với mp(Q) sẽ nằm trong mp(P).		$\left.\begin{matrix} mp(P)\perp mp(Q) \\ A\in mp(P) \\ A\in a \\ a\perp mp(Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\subset mp(P)$
• ***Hệ quả 2*** : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.		$\left.\begin{matrix} mp(P)\cap mp(Q) = a \\ mp(P)\perp mp(R) \\ mp(Q)\perp mp(R) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp mp(R)$
• ***Hệ quả 3*** : Qua một đường thẳng a không vuông góc với mp(P) có một và chỉ một mp(Q) vuông góc với mp(P).		$\left.\begin{matrix} a\subset mp(Q) \\ a\not\perp mp(Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists!\, mp(P)\perp mp(Q)$

§5. KHOẢNG CÁCH

CÁC ĐỊNH NGHĨA - ĐỊNH LÝ – HỆ QUẢ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
• ***Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*** Cho điểm M và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của M lên Δ. Độ dài đoạn thẳng MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a.		• MH là nhỏ nhất so với khoảng cách từ M đến mọi diểm của Δ. • $MH = 0 \Leftrightarrow M \in \Delta$
• ***Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng*** Cho điểm O và mp(P). Gọi H là hình chiếu của O lên mp(P). Độ dài của đoạn thẳng OH được gọi là khoảng cách từ O đến mp(P)		• MH là nhỏ nhất so với khoảng cách từ M đến mọi điểm của mp(P) • $MH = 0 \Leftrightarrow M \in$ mp(P)
• ***Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*** Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P).		Nếu a // mp(P) thì d(A ; (mp(P)) = d(B ; (mp(P))
• ***Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*** Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.		Nếu mp(P) // mp(Q) thì d(mp(P) ; mp(Q)) = = d(A ; (mp(Q)) = d(K ; (mp(P))
• ***Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b*** Đường thẳng c cắt cả a và b đồng thời vuông góc với cả a và b nên đường thẳng c là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.		Nếu $\begin{cases} c\cap a = I \\ c\perp a = I \\ c\cap b = J \\ c\perp b = J \end{cases}$ thì c là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.
• ***Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.*** Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng.		$\left.\begin{matrix} IJ\perp a \\ IJ\perp b \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.
• ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.		a và b chéo nhau $\Rightarrow$ IJ = d(a ; b) = d(a ; mp(Q)) = d(b ; mp(P)) = =d(mp(P) ; mp(Q)) (IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b)