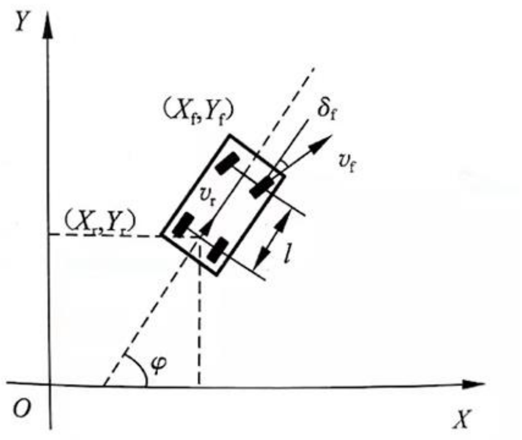
模型预测控制

1　运动学模型

1.1 四轮汽车运动学模型

1.1.1　四轮汽车状态空间



汽车状态 states: $\{x \quad y \quad \varphi\}$

控制 control：$\{v_r \quad \delta_f\}$　　后轮速度，前轮转角

由汽车模型和动力学约束：

$$\begin{cases} v_f \cos\delta_f = v_r \\ v_f \sin\delta_f = v_y \\ v_y = v_r \tan\delta_f \end{cases}$$

得到状态空间为：

- $\begin{cases} \dot{x} = v_r \cos\varphi \\ \dot{y} = v_r \sin\varphi \\ \dot{\varphi} = \dfrac{v_r \tan\delta_f}{l} \end{cases}$　是**非线性**的，为了进行模型预测控制，需要将其划为线性。

1.1.2 四轮汽车动力学模型线性化

状态 $\zeta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix}$ ， 控制 $u = \begin{bmatrix} v_r \\ \delta_f \end{bmatrix}$ 后轮驱动

因为状态空间是非线性的不能用矩阵表达，所以写成 $\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$ 的形式，**为了得到形如：** $\dot{x} = Ax + Bu$ **的矩阵表达形式**，需要线性化。

把函数 $\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$ **在目标点** ζ_r **处进行一阶泰勒展开得到：**

$$\dot{\zeta} \approx f(\zeta_r, u_r) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta - \zeta_r) + \frac{\partial f}{\partial u}(u - u_r)$$

无法把 $\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$ **转化为** $\dot{x} = Ax + Bu$ **形式，但是令** $\dot{\tilde{\zeta}} = \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_r$ **得到**

- $$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}} &= \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta - \zeta_r) + \frac{\partial f}{\partial u}(u - u_r) \\ &= A \bullet \tilde{\zeta} + B \bullet \tilde{u} \end{aligned}$$

其中 A,B 为雅克比矩阵， $\tilde{\zeta} = \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \varphi - \varphi_r \end{bmatrix}, \tilde{u} = \begin{bmatrix} v_r \\ \delta_f \end{bmatrix}$ (假设目标点的控制为 0)

$$A = \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_r \sin\varphi_r \\ 0 & 0 & v_r \cos\varphi_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_r & 0 \\ \sin\varphi_r & 0 \\ \dfrac{\tan\zeta_f}{l} & \dfrac{v_r}{l\cos^2\zeta_f} \end{bmatrix}$$

1.1.3 四轮汽车动力学模型离散化

离散化得到： $\dot{\tilde{\zeta}}(k) = \dfrac{\tilde{\zeta}(k+1) - \tilde{\zeta}(k)}{T} = A \bullet \tilde{\zeta}(k) + B \bullet \tilde{u}(k)$

- 移项得到： $\begin{aligned} \tilde{\zeta}(k+1) &= (1 + AT)\tilde{\zeta}(k) + TB\tilde{u}(k) \\ &= \tilde{A}\tilde{\zeta}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \end{aligned}$ ， 目的：**通过改变控制量 u(k),使**

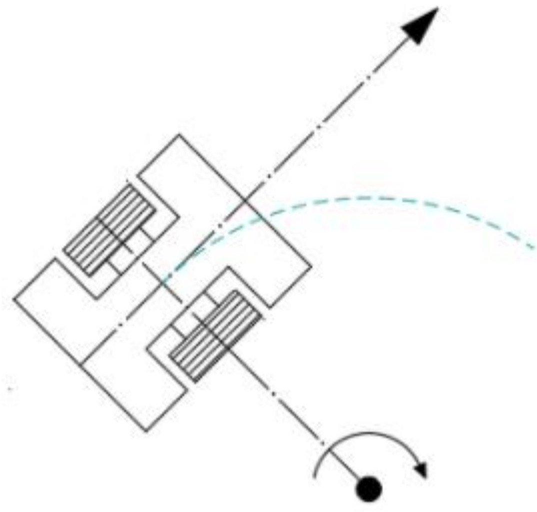
  $\tilde{\zeta}(k+1)$ **最小**。

其中 $\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -Tv_r\sin\varphi_r\\ 0 & 1 & Tv_r\cos\varphi_r\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}T\cos\varphi_r & 0\\ T\sin\varphi_r & 0\\ T\dfrac{\tan\zeta_f}{l} & T\dfrac{v_r}{l\cos^2\zeta_f}\end{bmatrix}$$

1.2 差速小车运动学模型

1.2.1 差速小车状态空间



小车状态 states: $\{x \quad y \quad \varphi\}$

控制 control：$\{v \quad w\}$

得到其状态空间为

- $\begin{cases}\dot{x}=v\cos\varphi\\ \dot{y}=v\sin\varphi\\ \dot{\varphi}=w\end{cases}$ 是非线性的。

1.2.2 差速小车动力学模型线性化

状态 $\zeta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix}$ ， 控制 $u = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$，同四轮汽车，两轮差速小车的状态空间为

$\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$。**同四轮阿克曼转向的汽车，把函数** $\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$ **在目标点** ζ_r **处进行一阶泰勒展开得到：**

$$\dot{\zeta} \approx f(\zeta_r, u_r) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta - \zeta_r) + \frac{\partial f}{\partial u}(u - u_r)$$

无法把 $\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$ **转化为** $\dot{x} = Ax + Bu$ **形式，但是令** $\dot{\tilde{\zeta}} = \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_r$ **得到**

- $$\begin{aligned}\dot{\tilde{\zeta}} &= \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta - \zeta_r) + \frac{\partial f}{\partial u}(u - u_r) \\ &= A \bullet \tilde{\zeta} + B \bullet \tilde{u}\end{aligned}$$

其中 A,B 为雅克比矩阵， $\tilde{\zeta} = \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \varphi - \varphi_r \end{bmatrix}, \tilde{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$(假设目标点的控制为 0)

$$A = \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_r \sin\varphi_r \\ 0 & 0 & v_r \cos\varphi_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_r & 0 \\ \sin\varphi_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.3 差速小车动力学模型离散化

使用一阶差分的法对其动力学模型进行离散化得到

离散化得到： $\dot{\tilde{\zeta}}(k) = \frac{\tilde{\zeta}(k+1) - \tilde{\zeta}(k)}{T} = A \bullet \tilde{\zeta}(k) + B \bullet \tilde{u}(k)$

- 移项得到： $\begin{aligned}\tilde{\zeta}(k+1) &= (1 + AT)\tilde{\zeta}(k) + TB\tilde{u}(k) \\ &= \tilde{A}\tilde{\zeta}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k)\end{aligned}$， 目的：**通过改变控制量 u(k),使**

  $\tilde{\zeta}(k+1)$ **最小**。

其中 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Tv_r \sin\varphi_r \\ 0 & 1 & Tv_r \cos\varphi_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} T\cos\varphi_r & 0 \\ T\sin\varphi_r & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

1.3 总结

状态空间 → $\dot{\zeta} = f(\zeta, u)$

↓

线性化 → $\dot{\tilde{\zeta}} = A \bullet \tilde{\zeta} + B \bullet \tilde{u}$

↓

离散化 → $\tilde{\zeta}(k+1) = \tilde{A}\tilde{\zeta}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k)$

2　状态预测

由上可知四轮汽车的运动学模型为：

$\tilde{\zeta}(k+1)=\tilde{A}\tilde{\zeta}(k)+\tilde{B}\tilde{u}(k)$

当前时刻为 k, MPC 的目的是使移动机器人跟踪一条给定的路径，为此，应当计算出移动机器人预测位姿与路径的偏差，取控制时域 $N_c = 4$ ，预测时域 $N_p = 4$（ $N_c <= N_p$ ），得到 k+1,k+2,k+3,k+4 时刻的偏差分别为：

- $$\begin{cases} \tilde{\zeta}(k+1)=\tilde{A}\tilde{\zeta}(k)+\tilde{B}\tilde{u}(k) \\ \tilde{\zeta}(k+2)=\tilde{A}^2\tilde{\zeta}(k)+\tilde{A}\tilde{B}\tilde{u}(k)+\tilde{B}\tilde{u}(k+1) \\ \tilde{\zeta}(k+3)=\tilde{A}^3\tilde{\zeta}(k)+\tilde{A}^2\tilde{B}\tilde{u}(k)+\tilde{A}\tilde{B}\tilde{u}(k+1)+\tilde{B}\tilde{u}(k+2) \\ \tilde{\zeta}(k+4)=\tilde{A}^4\tilde{\zeta}(k)+\tilde{A}^3\tilde{B}\tilde{u}(k)+\tilde{A}^2\tilde{B}\tilde{u}(k+1)+\tilde{A}\tilde{B}\tilde{u}(k+2)+\tilde{B}\tilde{u}(k+3) \end{cases}$$

写成矩阵形式

$Y = \Psi\zeta(k) + \Theta U(k)$

3　二次优化

为了达到一个良好的控制效果，需要定义一个指标描述控制的效果，即一个目标

函数。直观上，移动机器人运行轨迹越贴近参考路径越好，这与偏差 Y 相关，而且机器人运行越平稳越好，即速度变化量小，这与输出量 U 相关。可以简要定义目标函数 J，并且为了使其代价不同，加入另个系数矩阵 Q,R。

$$J = Y^T QY + URU^T$$

带入 Y，删除无关项得到

- $\min_{U} J = U^T (R + \Theta^T Q\Theta)U + 2\Psi\zeta Q\Theta U$

可以使用二次规划器对上述方程进行求解，如 OSQP 或 matlab 的 quadprog 函数，并将解的第一项 u_0 做为控制输出。