Лекція № 2

Комплексні числа

1. Числове поле. Система комплексних чисел

Протягом курсу елементарної алгебри кілька разів відбувається збагачення запасу чисел. Учень, який приступає до вивчення алгебри, приносить з арифметики знайомство з додатними цілими і дробовими числами. Алгебра починається, власне кажучи, з уведення від′ємних чисел, тобто з оформлення першої серед найважливіших числових систем — системи *цілих чисел,* яка складається з усіх додатних, і усіх від′ємних цілих чисел і нуля, і більш широкої системи *раціональних чисел,* яка складається з усіх цілих чисел і всіх дробових чисел, як додатних, так і від′ємних.

Поняття числа пройшло довгий шлях історичного розвитку. У школі вивчали про те, як від найпростіших, натуральних чисел переходити до більш складних, дійсних чисел. Зараз ми хочемо повернутися до розгляду цього питання. Але при цьому нам доведеться трохи відступити від того порядку, у якому історично розвивалося поняття числа.

Одною з найпростіших числових множин є множина натуральних чисел 1,2,3,4,5,...

У ній завжди можна здійснити дві основні алгебраїчні дії: додавання і множення. Це означає, що, які б не були натуральні числа m і n, сума їх $m+n$, а також добуток $m•n$ є неодмінно натуральними числами. При цьому дотримуються наступних п'яти законів:

1) комутативний закон додавання:

$$m + n = n + m;$$

2) асоціативний закон додавання:

$$(m + n) +k = m + (n + k);$$

3) комутативний закон множення.

$$m•n = n•m;$$

4) асоціативний закон множення:

$$(m•n)•k = m•(n•k);$$

5) дистрибутивний закон множення щодо додавання:

$$(m + n)•k =m•k + n•k.$$

Що стосується віднімання і ділення, то ці дві дії в множині натуральних чисел можна здійснити не завжди. Так, ні одну з різностей 3-5 і 2-2, а також жодну з часток 3:5 і 7:4 не можна виразити ніяким натуральним числом.

Щоб дію віднімання можна було здійснити завжди, множину натуральних чисел потрібно розширити шляхом приєднання до неї всіх від′ємних цілих чисел і нуля. У результаті такого розширення ми приходимо до *множини всіх цілих чисел:*

$. \ . \ . \ , -3, -2, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Числова множина, у якій завжди можна здійснити додавання і множення, для якої виконуються зазначені вище п'ять законів, а також віднімання, називається кільцем. Таким чином, ***множина усіх цілих чисел утворює кільце.***

Розширивши множину усіх натуральних чисел до множини всіх цілих чисел, ми домоглися тим самим, що дія віднімання стала здійсненною завжди. Але ділення як і раніше залишилося, узагалі говорячи, нездійсненним. Щоб усунути цю прогалину, потрібно розширити і множину усіх цілих чисел. Зробити це можна шляхом приєднання до неї всіх звичайних дробів, тобто чисел вигляду $\frac{m}{n}$, де m і n – довільні цілі числа і $n \neq 0$. У результаті такого розширення ми одержуємо *множину усіх раціональних чисел.* У цій числовій множині завжди можна здійснювати дії додавання, множення, віднімання і ділення (крім ділення на нуль), причому перші дві з них підлягають п'ятьом основним законам додавання і множення.

Множина чисел, у якій завжди можна здійснювати дії додавання і множення, а також дії, які підлягають п'яти основним законам, в тому числі також дії віднімання і ділення (крім ділення на нуль), називається полем. ***Множина усіх раціональних чисел є найпростішим числовим полем.***

Доречно відразу ж помітити, що множина всіх ірраціональних чисел поля не утворює. Дійсно, кожна з чотирьох дій (додавання, множення, віднімання і ділення) над ірраціональними числами може привести до числа раціональному. Так, наприклад,

$$\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

і т.д. А от множина усіх дійсних чисел утворить поле. Дії додавання, множення, віднімання і ділення дійсних чисел (крім ділення на нуль) не виводять нас за границі дійсних чисел, причому дії додавання і множення виконуються за вимогою п'ятьох основних законів.

Подальше розширення запасу чисел відбувається тоді, коли в розгляд вводяться ірраціональні числа. Система, яка складається з усіх раціональних і всіх ірраціональних чисел, називається системою *дійсних чисел*

Потреби математики уже давно указували на необхідність розширення поля дійсних чисел. Як ми знаємо, в ньому, окрім додавання, віднімання, множення і ділення, можна виконувати дію піднесення до кореня, яка представляє собою не що інше, ніж багатократне множення. А ось добування коренів, тобто дії, яка зворотна піднесенню до ступеня, можна виконати не завжди. Ми не знаємо, наприклад, який зміст можна придати виразам $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-16}$. Тому в полі дійсних чисел не можна розв’язати навіть такі на перший погляд прості рівняння, як $x^2+1=0$, $x^4+16=0$ і т.д.

Таким чином, ми приходимо до необхідності *розширити поле дійсних чисел шляхом приєднання до нього нових чисел так, щоб розширена множина утворила числове поле, в якому завжди виконувалась би дія добування коренів.*

Подивимося, які ж елементи повинно містити нове, розширене поле.

Насамперед воно повинно містити всі дійсні числа. Далі, у ньому повинно бути розв'язне рівняння $x^2=-1$, оскільки дія, зворотна зведенню в степінь, у цьому полі може бути здійснена. *Число, квадрат якого дорівнює* —1, *прийнято позначати буквою i і називати уявною одиницею.* Отже, по визначенню числа i

$$i^2=-1.$$

Ми вимагаємо, щоб нова множина чисел була полем. Тому поряд з дійсним числом b і уявною одиницею i йому повинно належати і їх добуток ib. Точно так само разом з дійсним числом a і добутком ib новому числовому полю повинно належати і їх сума $a+ib$. Таким чином, нова множина чисел повинна містити всі числа вигляду

$$a+ib,$$

де a і b — довільні дійсні числа, а i — уявна одиниця. Ці числа ми назвемо *комплексними числами.*

Ця система чисел залишається для читача менш звичною, звичайно, чим система дійсних чисел, хоча насправді вона володіє багатьма дуже цікавими властивостями.

Комплексні числа вводяться в зв'язку з наступною задачею.

Відомо, що дійсних чисел недостатньо для того, щоб розв’язати будь-яке квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами. Найпростіше з квадратних рівнянь, що не мають коренів серед дійсних чисел, є

$$x^2+1=0. \tag{1}$$

Тільки це рівняння буде нас зараз цікавити. Задача, що стоїть перед нами, така: *потрібно розширити систему дійсних чисел до такої системи чисел, у якій рівняння* (1) *уже мало би корінь.*

За матеріал, з якого буде будуватися ця нова система чисел, ми візьмемо точки площини. Нагадаємо, що зображення дійсних чисел точками прямої лінії (яке засновано на тому, що ми одержуємо взаємно однозначну відповідність між множиною всіх точок прямої і множиною всіх дійсних чисел, якщо при заданому початку координат і одиниці масштабу всякій точці прямої поставимо у відповідність її абсцису) систематично використовується у всіх розділах математики і є настільки звичним, що зазвичай ми не робимо розмежування між дійсним числом і точкою, що його зображує.

Таким чином, *ми хочемо визначити систему чисел, що зображуються всіма точками площини.* Дотепер нам не приходилося складати або перемножувати точки площини, тому визначення операцій над точками ми маємо право вибирати, піклуючись лише про те, щоб нова система чисел володіла всіма тими властивостями, заради яких вона створюється.

Нехай на площині обрана прямокутна система координат. Умовимося позначати точки площини буквами $\alpha,\beta,\lambda, \ldots$ і записувати точку α с абсцисою a й ординатою b через (a,b), тобто, трохи відступаючи від того, що прийнято в аналітичній геометрії, писати $\alpha=(a,b)$. Якщо задано точки $\alpha=(a,b)$ і $\beta=(c,d)$, то *сумою* цих точок ми будемо називати точку з абсцисою $a+c$ і ординатою $b+d$, тобто

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d); \tag{2}$$

добутком точок $\alpha=(a,b)$ і $\beta=(c,d)$ ми будемо називати точку з абсцисою $ac-bd$ і ординатою $ad+bc$, тобто

$$(a, b)(c, d) = (ac-bd,ad+bc). \tag{3}$$

Цим шляхом ми визначили в множині всіх точок площини дві алгебраїчні операції. Покажемо, що *ці операції володіють всіма основними властивостями, якими володіють операції в системі дійсних чисел або в системі раціональних чисел: вони обидві комутативні й асоціативні, зв'язані законом дистрибутивності і для них існують обернені операції — віднімання і ділення (крім ділення на нуль).*

Комутативність і асоціативність додавання очевидні (точніше, випливають з відповідних властивостей додавання дійсних чисел), тому що при додаванні точок площини ми окремо складаємо їхні абсциси й окремо ординати. Комутативність множення заснована на тому, що у визначення добутку точки α і β входять симетричним чином.

Асоціативність множення доводять наступні рівняння:

$$[(a,b)(c,d)](e,f)=(ac-bd, ad+bc)(e,f)=$$
$$=(ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce),$$
$$(a,b)[(c,d)(e,f)]=(a,b)(ce-df ,cf+de)=$$
$$=(ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf),$$

Закон дистрибутивності випливає з рівнянь

$$[(a,b)+(c,d)](e,f)=(a+c,b+d)(e,f)=$$
$$=(ae+ce-bf-df, af+cf+be+de),$$
$$(a,b)+(c,d)(e,f)=(ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+de)=$$
$$=(ae-bf+ce-df, af+be+cf+de).$$

Розглянемо питання про обернені операції. Якщо задано точки $\alpha=(a,b)$ і $\beta=(c,d)$, то їх різницею буде така точка (x,y), що

$$(c,d)+(x,y)=(a,b).$$

Звідси випливає, через (2)

$$c+x=a, \qquad d+y=b$$

Таким чином, *різницею* точок $\alpha=(a,b)$ і $\beta=(c,d)$ служить точка

$$\alpha-\beta=(a-c,b-d) \tag{4}$$

і ця різниця однозначно визначена. Зокрема, *нулем* буде служити початок координат (0, 0), а точкою, *протилежною* для точки $\alpha=(a, b)$, буде точка

$$-\alpha=(-a,-b). \tag{5}$$

Нехай, далі, задано точки $\alpha=(a,b)$ і $\beta=(c,d)$, причому точка β відмінна від нуля, тобто хоча б одна з координат c, d не є нуль і тому $c^2+d^2\neq 0$. Часткою від ділення α і β повинна бути така точка (x,y), що $(c,d)(x,y)=(a,b)$. Звідси, через (3),

$$cx-dy=a$$
$$dx+cy=b.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, ми одержимо:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Таким чином, при $\beta\neq 0$ частка α/β існує й однозначно визначена:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \qquad (6)$$

Вважаючи тут $\beta=\alpha$, ми одержимо, що *одиницею* при нашому множенні точок служить точка (1,0), яка лежить на осі абсцис на відстані 1 праворуч від початку координат. Вважаючи, далі, у (6), що $\alpha=1=(1,0)$, ми одержимо, що при $\beta\neq 0$ точкою, *оберненою* для β, буде:

$$\beta^{-1}=\left(\frac{c}{c^2+d^2},\frac{-d}{c^2+d^2}\right). \qquad (7)$$

Таким чином, ми побудували систему чисел, яка зображується точками площини, причому операції над цими числами визначаються формулами (2) і (3).Ця система чисел називається *системою комплексних чисел.*

Покажемо, що *система комплексних чисел є розширенням системи дійсних чисел.* Для цієї мети розглянемо точки, що лежать на осі абсцис, тобто точки вигляду $(a,0)$; ставлячи у відповідність точці $(a,0)$ дійсне число a, ми одержуємо, мабуть, взаємно однозначну відповідність між розглянутою множиною точок і множиною всіх дійсних чисел. Застосування до цих точок формул (2) і (3) дає рівняння

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$
$$(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0),$$

тобто, точки $(a,0)$ складаються і перемножуються одна з одною так само, як відповідні дійсні числа. Таким чином, *множина точок, які лежать на осі абсцис, яка розглядається як частина системи комплексних чисел, за своїми алгебраїчними властивостями нічим не відрізняється від системи дійсних чисел, яка звичайним способом зображена точками прямої лінії.* Це дозволяє нам не розрізняти в майбутньому точку $(a,0)$і дійсне число a, тобто завжди думати $(a,0)=a$. Зокрема, нуль (0,0) і одиниця (1,0) системи комплексних чисел виявляються звичайними дійсними числами 0 і 1.

Нам потрібно тепер показати, що *серед комплексних чисел існує корінь рівняння* (1), тобто таке число, квадрат якого дорівнює дійсному числу (-1). Це буде, наприклад, точка (0,1), тобто точка, яка лежить на осі ординат на відстані 1 нагору від початку координат. Дійсно, застосовуючи (3), одержуємо:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Домовимося позначати цю точку буквою i, так що $i^2=-1$.

Покажемо, що *для побудованих комплексних чисел може бути отриманий їх звичайний запис.* Для цього знайдемо спочатку добуток дійсного числа b на точку i:

$$ib = (b, 0)\cdot(0, 1)=(0, b);$$

це буде, отже, точка, що лежить на осі ординат і має ординату b, причому всі точки осі ординат представлені у вигляді таких добутків. Якщо тепер (a, b) — довільна точка, то через рівність

$$(a, b)=(a, 0) + (0, b)$$

одержуємо:

$$(a, b) = a+ib,$$

тобто ми дійсно приходимо до алгебраїчної форми запису комплексних чисел; добуток і суму у виразі $a+ib$ варто розуміти, зазвичай, у змісті операцій, визначених у побудованій нами системі комплексних чисел.

2. Алгебраїчні дії над комплексними числами

Як уже згадувалось раніше, ми будемо називати комплексне число i *уявною одиницею,* а числа вигляду ib —*чисто уявними числами,* хоча існування цих чисел не викликає в нас сумнівів і ми можемо вказати ті точки площини— точки осі ординат,— якими ці числа зображуються. У записі комплексного числа α у вигляді $\alpha=a+ib$ число a називається *дійсною частиною* числа α, а ib — його *уявною частиною.* Площина, точки якої ототожнені з комплексними числами у спосіб, викладений вище, буде називатися *комплексною площиною.* Вісь абсцис цієї площини називається *дійсною віссю,* тому що її точки зображують дійсні числа; відповідно вісь ординат комплексної площини називається *уявною віссю.*

Додавання, множення, віднімання і ділення комплексних чисел, записаних у вигляді $a+ib$, провадяться наступним чином в такий спосіб, як випливає з формул (2), (3), (4) і (6):

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d);$$
$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d);$$
$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc);$$
$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Ми можемо сказати, що *при додаванні комплексних чисел складаються окремо їх дійсні частини і окремо їх уявні частини;* аналогічне правило має місце і для віднімання. Останню з цих формул немає необхідності запам'ятовувати; варто лише пам'ятати, що її можна вивести, помноживши чисельник і знаменник заданого дробу на число, яке відрізняється від знаменника лише знаком при уявній частині. Дійсно,

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Приклади.

1) $(2+i5)+(1-i7)=(2+1)+i(5-7)=3-i2;$
2) $(3-i9)-(7+i)=(3-7)+i(-9-1)=-4-i10;$

3) $(1+i2)(3-i)=[1\bullet 3-2\bullet(-1)]+i[1\bullet(-1)+2\bullet 3)]=5+i5$;

4) $\frac{23+i}{3+i}=\frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{70-i20}{10}=7-i2.$

3. Загальне правило для перших чотирьох дій

Формально розв'язання над комплексними числами $a+ib$ виконуються так же , як і над звичайними двочленами, покладаючи $i^2=-1$. При ділені одного комплексного числа на друге „знищують уявність в знаменнику" (аналогічно знищенню ірраціональності в знаменнику); помножують чисельник і знаменник на число, спряжене знаменнику, користуючись рівністю $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$ (дійсне число).

Приклад перетворення:

$$\frac{(3-i4)(-1+i5)^2}{1+i3}+\frac{10+i7}{i5}=\frac{(3-i4)(1-i10-25)}{1+i3}+\frac{i(10+i7)}{i5\cdot i}=$$
$$=\frac{-2(3-i4)(12+-i5)}{1+i3}+\frac{7-i10}{5}=\frac{-2(56-i33)(1-i3)}{(1+i3)(1-i3)}+\frac{7-i10}{5}=$$
$$=\frac{-2(-43-i201)}{10}+\frac{7-i10}{5}=\frac{1}{5}(50+i191)=10+i38,2.$$

Зображення комплексних чисел точками площини приводить до природного бажання мати геометричне тлумачення операцій, визначених для комплексних чисел. Для додавання таке тлумачення може бути отримане без утруднень. Нехай дано числа $\alpha=a+ib$ і $\beta=c+id$.

З'єднуємо відповідні їм точки (a,b) і (c,d) відрізками з початком координат і будуємо на цих відрізках, як на сторонах, паралелограм (рис.1).

Четвертою вершиною цього паралелограма буде, мабуть, точка $a+c$, $b+d$. Таким чином, *додавання комплексних чисел геометрично виконується за правилом паралелограма, тобто за правилом додавання векторів, які виходять з початку координат.*

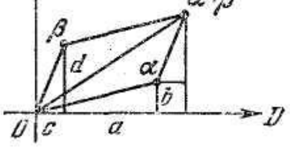

Рис. 1.

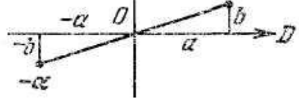

Рис. 2.

Далі, *число, протилежне числу* $\alpha=a+ib$, *буде точкою комплексної площини, симетричної з точкою* α *відносно початку координат* (рис. 2).

Звідси без труднощів може бути отримане геометричне тлумачення віднімання.

Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел стане ясним лише після того, як ми введемо для комплексних чисел новий запис, відмінний від того, який вживався нами дотепер. Запис числа α у вигляді $\alpha=a+ib$ використовує декартові координати точки, які відповідають цьому числу. Положення точки на площині цілком визначається заданням її полярних координат: відстані r від початку координат до точки і кута φ між додатним напрямленням осі абсцис і напрямленням з початку координат на цю точку (рис. 3).

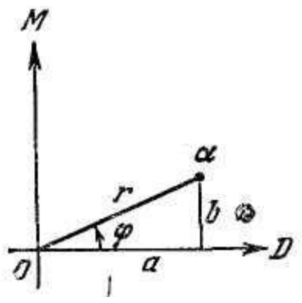

Рис. 3.

Число r є додатним дійсним числом, причому воно дорівнює нулеві лише для точки 0. Для α, яке лежить на дійсній осі, тобто яке є дійсним числом, число r є абсолютною величиною α, тому і для будь-якого комплексного числа α його іноді називають *абсолютною величиною* числа α*;* частіше, утім, число r називають *модулем* числа α. Позначається воно через $|\alpha|$.

Кут φ буде називатися *аргументом* числа α і позначатися argα. Кут α може приймати будь-які дійсні значення, як додатні, так і від'ємні, причому додатні кути повинні відраховуватися проти годинної стрілки, однак, якщо кути відрізняються один від одного на 2π або число, кратне 2π, то відповідні їм точки площини збігаються.

У такий спосіб аргумент комплексного числа α має нескінченно багато значень, які відрізняються одне від одного на цілі кратні числа 2π; з рівності двох комплексних чисел, заданих їх модулями і аргументами, можна лише сказати, що аргументи відрізняються на ціле кратне числа 2π, у той час як модулі рівні. Аргумент не визначений лише для числа 0; це число цілком визначається, однак, рівністю $|0|=0$.

Аргумент комплексного числа є природним узагальненням знаку дійсного числа. Справді, аргумент додатного дійсного числа дорівнює 0, аргумент від'ємного дійсного числа дорівнює π; на дійсній осі з початку координат виходить лише два напрямлення і їх можна розрізняти двома символами + і —, тоді як на комплексній площині напрямлень, що виходять із точки 0, нескінченно багато і розрізняються вони вже кутом, який зіставлений ними з додатним напрямлення дійсної осі.

Між декартовими і полярними координатами точки існує наступний зв'язок, справедливий при будь-якому розташуванні точок на площині:

$$a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi. \qquad (8)$$

Звідси

$$r = +\sqrt{a^2+b^2}\,. \qquad (9)$$

Застосуємо формули (8) до довільного комплексного числа $\alpha=a+ib$:

$$\alpha=a+ib=r\cos\varphi+i(r\sin\varphi)$$

або

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (10)$$

Зворотно, нехай число $\alpha=a+ib$ допускає запис вигляду

$$\alpha=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0),$$

де r_0 і φ_0 – деякі дійсні числа, причому $r_0\geq 0$. Тоді

$$r_0\cos\varphi_0=a,\ r_0\sin\varphi_0=b,$$

звідки

$$r_0 = +\sqrt{a^2+b^2}\,,$$

тобто у вигляді (9), $r_0=|\alpha|$. Звідси, використовуючи (8), одержуємо

$$\cos\varphi_0=\cos\varphi,\ \sin\varphi_0=\sin\varphi, \text{ тобто } \varphi_0=\arg\alpha.$$

Таким чином, *усяке комплексне число* α *однозначним чином записується у вигляді* (10), *де* $r=|\alpha|$, $\varphi=\arg\alpha$ (причому аргумент φ визначено, звичайно, лише з точністю до доданків, кратних 2π). Цей запис числа α називається його *тригонометричною формою* і буде далі досить часто використовуватися. Числа

$$\alpha=3[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)],\ \beta=\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)]$$

і

$$\gamma = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

задані в тригонометричній формі, тут $|\alpha|=3$, $|\beta|=1$, $|\gamma|=\sqrt{3}$; $\arg\alpha=\pi/4$, $\arg\beta=(2/3)\pi$, $\arg\gamma=-\pi/7$.

Нехай комплексні числа α і β задані в тригонометричній формі

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi').$$

Перемножимо ці числа:

$$\alpha\beta=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]\bullet[r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')]=$$
$$=rr'(\cos\varphi\cos\varphi'+i\cos\varphi\sin\varphi'+i\sin\varphi\cos\varphi'-\sin\varphi\sin\varphi'),$$

або

$$\alpha\beta=rr'[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]. \qquad (11)$$

Ми одержали запис добутку $\alpha\beta$ у тригонометричній формі, і тому $|\alpha\beta|=rr'$, або

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta| \qquad (12)$$

тобто *модуль добутку комплексних чисел дорівнює добуткові модулів співмножників.*

Далі, $\arg(\alpha\beta)=\varphi+\varphi'$ або

$$\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta \qquad (13)$$

тобто *аргумент добутку комплексних чисел дорівнює сумі аргументів співмножників.* Ці правила поширюються, мабуть, на будь-яке кінцеве число множників. У застосуванні до випадку дійсних чисел формула (12) дає відому властивість абсолютних величин цих чисел, а (13) перетворюється, як легко перевірити, у правило знаків при множенні дійсних чисел.

Аналогічні правила мають місце і для частки. Дійсно, нехай

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi'),$$

причому $\beta\neq0$, тобто $r'\neq0$.

Тоді

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi)}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'-i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi'+i\sin^2\varphi')}=$$

$$=\frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi'+i\sin\varphi\cos\varphi'-i\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi')$$

або

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]\,. \tag{14}$$

Звідси випливає, що $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{r'}$ або

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}, \tag{15}$$

тобто *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює модулеві діленого, діленому на модуль дільника;*

далі,

$$\arg(\alpha/\beta)=\varphi-\varphi',$$

або

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta, \tag{16}$$

тобто *аргумент частки двох комплексних чисел отримують відніманням аргументу дільника з аргументу діленого.*

Геометричний зміст множення і ділення з'ясовується тепер без утруднень. Дійсно, через формули (12) і (13), ми одержимо точку, що зображує добуток числа α на число

$$\beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi'),$$

якщо вектор, що йде від 0 до α (рис. 4), повернемо проти годинної стрілки на кут $\varphi'=\arg\beta$, а потім розтягнемо цей вектор у $r'=|\beta|$ разів (при $0\leq r'<1$ це буде стиском, а не розтягненням).

Далі, з (14) випливає, що при

$$\alpha=r\cos(\varphi+i\sin\varphi)\neq0$$

буде

$$\alpha^{-1}=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)] \tag{17}$$

тобто

$$|\alpha^{-1}|=|\alpha|^{-1}\ ,\ \arg(\alpha^{-1})=-\arg\alpha.$$

Таким чином, ми одержимо точку α^{-1}, якщо від точки α перейдемо до точки α', що лежить на відстані r^{-1} від нуля на тій же напівпрямій, що виходить з нуля що і точка α (рис. 5), а потім перейдемо до точки, симетричної з α' щодо дійсної осі.

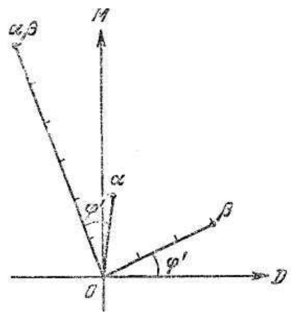

Рис. 4.

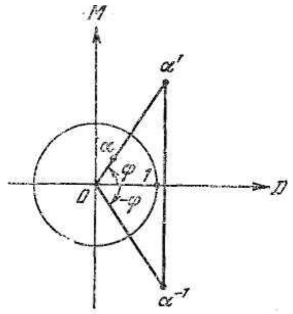

Рис. 5.

(Тоді і тільки тоді $|\alpha'|=|\alpha|$, якщо $|\alpha|=1$, тобто якщо точка α лежить на колі *одиничного круга.* Якщо α лежить усередині одиничного круга, то α' буде поза ним, і навпаки, причому цим шляхом ми одержуємо взаємно однозначну відповідність між усіма точками комплексної площини, що лежать поза одиничним кругом, і всіма точками, що лежать усередині цього круга і відмінними від нуля.)

Суму і різницю комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, не можна виразити формулами, подібними до формул (11) і (14). Для модуля суми мають місце наступні важливі нерівності:

$$|\alpha|-|\beta|\leq|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta| \qquad (18)$$

тобто *модуль суми двох комплексних чисел менше або дорівнює сумі модулів які складаються, але більше або дорівнює різниці цих модулів.* Нерівності (18) випливають з відомої теореми елементарної геометрії про сторони трикутника через те, що $|\alpha+\beta|$ дорівнює, як ми знаємо, діагоналі паралелограма зі сторонами $|\alpha|$ і $|\beta|$. Спеціального розгляду, вимагає випадок, коли точки α, β і 0 лежать на одній прямій; лише в цьому випадку у формулах (18) можуть досягатися рівності. З (18), через $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ і

$$|-\beta|=|\beta| \qquad (19)$$

(ця рівність випливає з геометричного тлумачення числа $-\beta$), випливають також нерівності

$$|\alpha|-|\beta|\leq|\alpha-\beta|\leq|\alpha|+|\beta| \qquad (20)$$

тобто для модуля різниці мають місце такі ж нерівності, як і для модуля суми.

Нерівності (18) можна було б одержати також наступним шляхом. Нехай

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

і нехай тригонометрична форма числа $\alpha+\beta$ є

$$\alpha+\beta=R(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Складаючи окремо дійсні й окремо уявні частини, одержуємо:

$$r\cos\varphi+r'\cos\varphi'=R\cos\psi,$$

$$r\sin\varphi+r'\sin\varphi'=R\sin\psi;$$

помноживши обидві частини першої рівності на $\cos\psi$, обидві частини другої — на $\sin\psi$ і складаючи, одержуємо:

$$r(\cos\varphi\cos\psi+i\sin\varphi\sin\psi)+r'(\cos\varphi'\cos\psi+i\sin\varphi'\sin\psi)=$$
$$=R(\cos^2\psi+i\sin^2\psi).$$

Тобто

$$r\cos(\varphi-\psi)+r'\cos(\varphi'-\psi)=R.$$

Звідси, тому що косинус ніколи не буває більше одиниці, випливає нерівність $r+r'\geq R,$ тобто $|\alpha|+|\beta|\geq|\alpha+\beta|$. З другої сторони,

$$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha+\beta)+(-\beta).$$

Звідси, по доведеному й у силу (19),

$$|\alpha|\leq|\alpha+\beta|+|-\beta|=|\alpha+\beta|+|\beta|,$$

звідки $|\alpha|-|\beta|\leq|\alpha+\beta|$.

Варто помітити, що для комплексних чисел поняття «більше» і «менше» не можуть бути розумно визначені, тому що ці числа, на відміну від дійсних чисел, розташовуються не на прямої лінії, точки якої природним чином упорядковані, а на площині. Тому саме комплексні числа (а не їхні модулі) ніколи не можна з’єднувати знаком нерівності.

4. Показникова форма.

Часто застосовується наступна форма запису комплексного числа α з модулем ρ і аргументом φ

$$\alpha=\rho e^{i\varphi} \qquad \text{(показникова форма)}$$

Так, наприклад, число $1+\sqrt{i3}$ може бути записано так:

алгебраїчна форма $1+\sqrt{i3}=$

тригонометрична форма $=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=$

показникова форма $=2e^{i\pi}/3$,

а також, якщо не обмежуватися головним значенням аргументу:

$$1+\sqrt{i3}=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}.$$

5. Спряжені числа.

Нехай задано комплексне число $\alpha=a+ib$. Число $a-ib$, яке відрізняється від α лише знаком при уявній частині, називається числом, спряженим з α, і позначається $\overline{\alpha}$.

Нагадаємо, що при розгляді ділення комплексних чисел ми прибігали до спряжених чисел, хоча і не вводили цієї назви.

Числом, спряженим з α, буде $\overline{\alpha}$, тобто можна говорити про пару спряжених чисел. Дійсні числа, і тільки вони, спряжені самі собі.

Геометрично спряжені числа є точками, симетричними щодо дійсної осі (рис. 6). Звідси випливають рівності

$$|\overline{\alpha}|=|\alpha|,\ \arg\overline{\alpha}=-\arg\alpha \qquad (21)$$

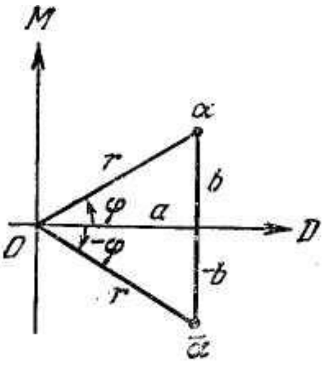

Рис. 6.

Сума і добуток спряжених комплексних чисел є дійсними числами.

Справді,

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\overline{\alpha} &= 2a \\ \alpha\overline{\alpha} &= a^2+b^2=|\alpha|^2 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Остання рівність показує, що число $\alpha\overline{\alpha}$ додатне навіть при $\alpha \neq 0$.

Рівність

$$(a-ib)+(c-id)=(a+c)-i(b+d)$$

показує, що *число ,яке спряжене із сумою двох чисел, дорівнює сумі чисел спряжених зі співмножниками:*

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}. \qquad (23)$$

Аналогічно, з рівності

$$(a-ib)(c-id)=(ac-bd)-i(ad+bc)$$

випливає, що *число, яке спряжене з добутком, дорівнює добуткові чисел, спряжених із співмножниками:*

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}. \qquad (24)$$

Безпосередня перевірка показує також справедливість формул

$$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}. \qquad (25)$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\vec{\alpha}}{\overline{\beta}}. \qquad (26)$$

Доведемо наступне твердження: *якщо число* α *деяким чином виражене через комплексні числа* $\beta_1;\ \beta_2,\ ,..,\ \beta_n$ *за допомогою додавання, множення, віднімання і ділення, то, заміняючи в цьому виразі всі числа* β_k *їх спряженими, ми одержимо число, яке спряжене з* α; зокрема, якщо число α дійсне, то воно не змінюється при заміні всіх комплексних чисел β_k їх спряженими.

Будемо доводити це твердження індукцією по *n,* тому що при $n=2$ воно випливає з формул (23) — (26).

Нехай число α виражено через числа $\beta_1;\beta_2,,..,\beta_n$, не обов'язково різні. У цьому виразі вказано визначений порядок, у якому застосовуються операції додавання, множення, віднімання і ділення. Останнім кроком буде застосування однієї з цих операцій до числа γ_1, вираженому через числа $\beta_1;\beta_2,,..,\beta_k$, де $1\leq k\leq n—1$, і до числа γ_2, вираженому через числа $\beta_{k+1},..,\beta_n$. По індуктивному припущенню заміна чисел $\beta_1;\beta_2,,..,\beta_k$ на спряжені спричиняє заміну числа γ_1 на $\bar{\gamma}_1$ а заміна чисел $\beta_{k+1};\beta_{k+2},\ldots,\beta_n$ на спряжені заміняє γ_2 на $\bar{\gamma}_2$. Однак по одній з формул (23) — (26) перехід від γ_1 і γ_2 до $\bar{\gamma}_1$ і $\bar{\gamma}_2$, перетворює число α в $\bar{\alpha}$.

Узагальнимо усе сказане у вигляді властивостей спряжених чисел:

1) $\overline{(\bar{\alpha})} = \overline{(a-ib)} = \overline{[a+i(-b)]} = a - i(-b) = a + ib = \alpha$,

тобто, числа α і $\bar{\alpha}$ є взаємно спряженими;

2) $\alpha + \bar{\alpha} = 2Re\,\alpha$, $\alpha - \bar{\alpha} = 2\mathrm{Im}\,\alpha$;

3) $\bar{\alpha} = \alpha$ у тому і тільки у тому випадку, якщо α дійсне;

4) $\alpha\bar{\alpha} = (a-ib)(a+ib) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2$;

5) $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$, $\arg\bar{\alpha} = -\arg\alpha$, тобто точки $\bar{\alpha}$ і α симетричні щодо дійсної осі;

6) $\overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$,

так як

$$\overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} = \overline{(a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2)} = \overline{[a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)]} =$$
$$= a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2;$$

7) $\overline{(\alpha_1\alpha_2)} = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2$, що перевіряється аналогічно властивості 6).

Якщо у властивості 7) замість α_1, підставити $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, одержимо

$$\bar{\alpha}_1 = \overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}\bar{\alpha}_2,$$

звідки

8) $\overline{\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \dfrac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}$.

Властивості 6) і 7) автоматично поширюються на будь-яке число доданків або співмножників. Звідси

$$\overline{(\alpha^n)} = (\bar{\alpha})^n, \qquad \overline{(2\alpha^n + i\alpha^m)} = \overline{(2\alpha^n)} + \overline{(i\alpha^m)} = 2(\bar{\alpha})^n - i(\bar{\alpha})^m \text{ і т.д.}$$

Взагалі, щоб перейти від будь-якого раціонального виразу, який містить любу кількість змінних і коефіцієнтів, до спряженого виразу, потрібно кожну змінну і кожен коефіцієнт замінити на спряжену величину. Можна показати, що це правило справедливе не тільки для раціональних виразів, але і для ірраціональних, для сум степеневих рядів і т.д. Звідси випливає, що будь-яка рівність між комплексними виразами описаного вигляду залишається справедливою, якщо в цій рівності усюди *і* замінити на -*i,* так як при цьому ми перейдемо від рівності комплексних чисел до рівності спряжених чисел. Тому *числа і і -і алгебраїчно нерозрізнені;* зокрема, помилковою є поширена думка, що $i = \sqrt{-1}$, $-i = -\sqrt{-1}$, насправді $\sqrt{-1}$ має два значення: ± *і.*

Спряжені числа застосовуються, зокрема, якщо в дробові виду

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

треба відокремити дійсну частину від уявної. Для цього виконують множення чисельника і знаменника на $\bar{\alpha}_2$, після чого знаменник стає дійсним і необхідне відділення легко здійснити. Наприклад,

$$\operatorname{Re}\frac{2+i5}{3-i2}=\operatorname{Re}\frac{(2+i5)(3+i2)}{(3-i2)(3+i2)}=\operatorname{Re}\frac{6+i4+i15-19}{13}=\operatorname{Re}\left(-\frac{4}{19}+i\frac{19}{13}\right)=-\frac{4}{13}.$$

6. Піднесення комплексних чисел до ступеня і добування кореня з комплексних чисел

Додавання, віднімання, ділення і піднесення в цілу степінь – дії однозначні; добування же кореня n-го ступеня дає завжди n різних значень.

Переходимо до питання про піднесення комплексних чисел до ступеня і добування з них кореня. Для піднесення числа $\alpha=a+ib$ у цілий додатний степінь n досить застосувати до виразу $(a+ib)^n$ формулу бінома Ньютона (ця формула справедлива і для комплексних чисел, так як її доведення засновано лише на законі дистрибутивності), а потім скористатися рівностями

$$i^2=-1,\ i^3=-1,\ i^4=1,$$

звідки взагалі

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i.$$

Якщо число α задано в тригонометричній формі, то при цілому додатному n з формули (11) випливає наступна формула, яка називається *загальною формулою Муавра:*

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{27}$$

тобто *при піднесені комплексного числа до ступеня модуль підноситься до цього же ступеня, а аргумент збільшується на показник ступеня.* Формула (27) вірна і для цілих від'ємних показників. Дійсно, так як $\alpha^{-n}=(\alpha^{-1})^n$, достатньо застосувати формулу Муавра до числа α^{-1}, тригонометричну форму якого дає формула (17).

Приклади

1) $i^{37}=i,\ i^{122}=-1;$

2) $(2+i5)^3=2^3+3\bullet 2^3\bullet i5+3\bullet 2^3\bullet i^2 5^2+i^3 5^3=8+i60-150-i125=-142-i65$

3) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=\left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4;$

4) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{-3}=3^{-3}\left[\cos\left(-\frac{3}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{5}\pi\right)\right]=$

$$=\frac{1}{27}\left(\cos\frac{7}{5}\pi+i\sin\frac{7}{5}\pi\right).$$

Частковий випадок формули Муавра, а саме рівність

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$

дозволяє легко одержати формули для синуса і косинуса кратного кута. Дійсно, розкриваючи ліву частину цієї рівності по формулі бінома і прирівнюючи окремо дійсні і уявні частини обох частин рівності, ми одержимо:

$$\cos n\varphi=\cos^{n}\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\bullet \sin^{2}\varphi+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\bullet\sin^{4}\varphi-\ldots,$$

$$\sin n\varphi=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\bullet\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\bullet\sin^{3}\varphi+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\bullet\sin^{5}\varphi-\ldots;$$

тут $\binom{n}{k}$ є звичайне позначення біноміального коефіцієнта:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

При n=2 ми приходимо до відомих формул

$$\cos 2\varphi=\cos^{2}\varphi-\sin^{2}\varphi,$$
$$\sin 2\varphi=2\cos\varphi\sin\varphi,$$

а при n = 3 — до формул

$$\cos 3\varphi=\cos^{3}\varphi-3\cos\varphi\sin^{2}\varphi,$$
$$\sin 3\varphi=3\cos^{2}\varphi\sin\varphi-\sin^{3}\varphi.$$

Добування кореня з комплексних чисел представляє вже набагато більше труднощів. Почнемо з добування квадратного кореня з числа $\alpha=a+ib$. Ми не знаємо поки, чи існує таке комплексне число, квадрат якого дорівнює α. Припустимо, що таке число $u+iv$ існує, тобто, уживаючи звичайну символіку, можна написати

$$\sqrt{a+ib}=u+iv.$$

З рівності $(u+iv)^2=a+ib$ випливає

$$\left.\begin{aligned} u^2-v^2&=a\\ 2uv&=b\end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Підносячи до квадрату обидві частини кожну з рівностей (28), а потім складаючи їх, одержуємо:

$$\left(u^2+v^2\right)^2+4u^2v^2=\left(u^2+v^2\right)^2=a^2+b^2,$$

звідки

$$u^2+v^2=+\sqrt{a^2+b^2}$$

додатний знак узятий тому, що числа u і v дійсні, а тому ліва частина рівності додатна. З цієї рівності і з першої з рівностей (28) одержуємо:

$$\begin{aligned} u^2&=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right),\\ v^2&=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\end{aligned}.$$

Ми приходимо, добуваючи квадратні корені, до двох значень для u, які відрізняються одне від одного знаком, а також до двох значень для v. Усі ці значення будуть дійсними, тому що квадратні корені будуть добуватися при будь-яких a і b з додатних чисел. Отримані значення для u і v не можна комбінувати між собою довільним чином, тому що, через другу з рівностей (28), знак добутку uv повинний збігатися зі знаком b. Це дає дві можливі комбінації значень u і v , тобто два числа вигляду $u+iv$, які можуть служити значеннями квадратного кореня з числа α; ці числа відрізняються одне від одного знаком. Елементарна, хоча і громіздка, перевірка (піднесення отриманих чисел до квадрату, окремо для випадку $b>0$ і для випадку $b<0$) показує, що знайдені нами числа дійсно є значеннями квадратного кореня з числа α. Таким чином, *добування квадратного кореня з комплексного числа завжди можливе і дає два значення, які відрізняються одне від одного знаком.*

Зокрема, тепер робиться можливим добування квадратного кореня u з від'ємного дійсного числа, причому значення цього кореня будуть чисто уявними. Справді, якщо $a<0$ і $b=0$, то

$$\sqrt{a^2+b^2}=-a,$$

так як цей корінь повинен бути додатним ,а тоді

$$u^2=\frac{1}{2}(a-a)=0,$$

тобто $u=0$, звідки $\sqrt{a}=\pm iv$.

Приклад.

Нехай $\alpha=21-i20$.

Тоді $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=29.$

Тому

$$u^2=\frac{1}{2}(21+29)=25,\ v^2=\frac{1}{2}(-21+29)=4,$$

звідки $u=\pm5$, $v=\pm2$.

Знаки u і v повинні бути різними через від'ємності b ,

$$\sqrt{21-i20}=\pm(5-i2).$$

Спроби добування коренів з комплексних чисел, заданих у вигляді $a+ib$ більш високого ступеня, ніж другий, натрапляють на нездоланні труднощі. Так, якби ми захотіли таким же методом, як вище, добути з числа $a+ib$ кубовий корінь, то повинні були б розв'язати деяке допоміжне кубове рівняння. З іншого боку, тригонометрична форма досить добре пристосована для добування коренів будь-якого ступеня і, користуючись нею, ми зараз розв'яжемо це питання.

Нехай потрібно добути корінь n-го степеня з числа

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Припустимо, що це зробити можна і що в результаті виходить число $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, тобто.

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (29)$$

Тоді по формулі Муавра,

$$\rho^n=r,\ \text{тобто}\ \rho=\sqrt[n]{r},$$

де в правій частині стоїть однозначно визначене додатне значення кореня n-го ступеня з додатного дійсного числа r. З іншого боку, аргумент лівої частини рівності (29) є $n\theta$. Не можна стверджувати, однак, що $n\theta$ дорівнює φ, так як ці кути можуть у дійсності відрізнятися на доданок, що є деяким цілим кратним числа 2π. Тому $n\theta=\varphi+2k\pi$, де k – ціле число, звідки

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Зворотно, якщо ми беремо число

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

то при будь-якому цілому k, додатному або від'ємному, n-ий ступінь цього числа дорівнює α. Таким чином,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \qquad (30)$$

Придаючи k різні значення, ми не завжди будемо одержувати різні значення шуканого кореня. Дійсно, при

$$k=0,1,2,...,n-1 \qquad (31)$$

ми одержимо n значень кореня, які усі будуть різними, тому що збільшення k на одиницю спричиняє збільшення аргументу на $2\pi/n$. Нехай тепер k довільне. Якщо $k=nq+r$, $0\le r\le n-1$, то

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi,$$

тобто значення аргументу при нашому k відрізняється від значення аргументу при $k=r$ на число, кратне 2π; ми одержуємо, отже, таке ж значення кореня, як при значенні k, рівному r, тобто який входить в систему (31).

Таким чином, *добування кореня n-го ступеня з комплексного числа* α *завжди можливе і дає n різних значень. Усі значення кореня n-го ступеня розташовані на колі радіуса*

$$\sqrt[n]{|\alpha|}$$

с центром у нулі і поділяють це коло на n рівних частин.

Зокрема, корінь n-го ступеня з дійсного числа a також має n різних значень; дійсних серед цих значень буде два, одне або жодного в залежності від знаку a і парності n.

Приклади.

1) $\beta=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right)$;

$k=0$: $\beta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$k=1$: $\beta_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$;

$k=2$: $\beta_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$;

2) $\beta=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$;

$\beta_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \beta_1=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\beta_0$

3) $\beta=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$;

$$\beta_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3};$$
$$\beta_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2;$$
$$\beta_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Корені з одиниці.

Особливо важливий випадок добування кореня n-го ступеня з числа 1. Цей корінь має n значень, причому, через рівність $1=cos0+isin0$ і формули (30), усі ці значення або, як ми будемо говорити, усі *корені n- го ступеня з одиниці,* даються формулою

$$\sqrt[n]{1} = cos(2k\pi/n)+isin(2k\pi/n);\ k=0,1,\ldots,n-1\ldots \qquad (32)$$

Дійсні значення кореня n-го ступеня з одиниці виходять з формули (32) при значеннях k=0 і $\pi/2$, якщо n парний і при k=0, якщо n непарний. На комплексній площині корені n-го ступеня з одиниці розташовані на колі одиничного круга і поділяють його на n рівних дуг; однією з точок ділення служить число 1. Звідси випливає, що ті з коренів n-го ступеня з одиниці, які не є дійсними, розташовані симетрично відносно дійсної осі, тобто попарно спряжені.

Квадратний корінь з одиниці має два значення: 1 та -1, корінь четвертого ступеня з одиниці — чотири значення: 1, -1, i та $-i$. Для подальшого корисно запам'ятати, значення *кубового кореня з одиниці.* Це будуть, через (32), числа $cos(2k\pi/3)+isin(2k\pi/3)$, де k=0,1,2, тобто, крім самої одиниці, також спряжені між собою числа

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \varepsilon_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Усі значення кореня n-го ступеня з комплексного числа α *можна одержати множенням одного з цих значень на всі корені n-го ступеня з одиниці.* Дійсно, нехай β буде одне зі значень кореня n-го ступеня з числа α, тобто $\beta^n=\alpha$ а ε - довільне значення кореня n-го ступеня з одиниці, тобто $\varepsilon^n=1$. Тоді $(\beta\varepsilon)^n=\beta^n\varepsilon^n=\alpha$, тобто βε також буде одним зі значень для $\sqrt[n]{\alpha}$. Помноживши β на кожний з коренів n-го степеня з одиниці, ми одержуємо n різних значень кореня n-го степеня з числа α, тобто всі значення цього кореня.

Приклади.

1) Одне зі значень кубового кореня з -8 є -2.

Два інших будуть, через (33), числа $-2\varepsilon_1=1—i\sqrt{3}$ та $-2\varepsilon_2=1+i\sqrt{3}$ (див. вище приклад 3)).

2) $\sqrt[4]{81}$ має чотири значення: 3, -3, $i3$, $-i3$.

Добуток двох коренів n-го ступеня з одиниці сам є корінь n-го ступеня з одиниці. Дійсно, якщо $\varepsilon^n=1$ і $\eta^n=1$, то $(\varepsilon\eta)^n=\varepsilon^n\eta^n=1$. Далі, *число, зворотне кореневі n-го ступеня з одиниці, саме є такий же корінь.*

Справді, нехай $\varepsilon^n=1$. Тоді з $\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}=1$ випливає $\varepsilon^n\cdot(\varepsilon^{-1})^n=1$, тобто $(\varepsilon^{-1})^n=1$. Узагалі, *усякий степінь кореня n-го ступеня з одиниці є також корінь n- го ступеня з одиниці.*

Алгебра операторів. Оператори розтягування і повороту є однією з інтерпретацій комплексних чисел, і алгебра операторів зводиться до алгебри комплексних чисел. Оператор ρ_φ відповідає комплексному числу з модулем ρ і аргументом φ:

$$\rho_\varphi=\rho e^{i\varphi}=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Формула Эйлера.

Формула Ейлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{34}$$

Застосовується також формула

$$e^{-iz}=e^{i(-z)}=\cos(-z)+i\sin(-z)=\cos z-i\sin z$$

і випливаючі з неї і (34) формули

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i2}. \tag{35}$$

З формули Эйлера (34) на основі властивості одержуємо вираз для експоненти з будь-яким комплексним показником

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{36}$$

Порівняння з тригонометричною формою показує, що

$$|e^z|=e^x,\ \arg e^z=y+2k\pi. \tag{37}$$

Зокрема видно, що завжди

$$|e^z|>0,\ \text{тобто}\ |e^z|\neq 0.$$

Якщо у формулі (36) замість e^z писати z, то на підставі (37) одержимо

$$z=|z|(\cos\arg z+i\sin\arg z)=|z|e^{i\arg z}=\rho e^{i\varphi}.$$

Така «показникова форма» комплексного числа буває зручна для виконання над ним алгебраїчних дій.

Приклади розв’язання типових задач

1.Приклади складання комплексних чисел

1) $(1+i)+(2+i3)=(1+2)+i(1+3)=3+i4$;

2) $(5 + i6) + (7 - i6) = (5 + 7) +i(6 - 6) = 12 + i0$;

3) $(4 + i9) + (-4 + i) = (4 - 4) + i(9 + 1) = 0 + i10$;

4) $(3 - i7) + (-3 + i7) = (3 - 3) + i(-7 + 7) = 0 + i0$.

2.Приклади віднімання комплексних чисел

1) $(5 + i6) - (3 + i7) = (5 - 3) + i(6 - 7) = 2 - i$;

2) $(2 + i) - (9 + i) = (2 - 9) + i(1 - 1) = -7 + i0$,

3) $(3 + i4) - (3 - i) = (3 - 3) + i(4 + l) = 0 + i5$.

4) $(7 - i) - (7 - i) = (7 - 7) + i(-1 + \backslash) = 0 + i0$.

3.Приклади множення комплексних чисел

1) $(2 + i3)(6 - i5) = 12 - i10 + i18 - i^2 15 = (12+ 15) +i(18 - 10) = 27 + i8$;

2) $(4 + i)(4 - i) = 16 - i4 + i4 - i^2 = (16+l)+i(-4 + 4) = 17 +i0$;

3) $(1 + i)^2 = (1 + i)(1+i) = 1 + i + i + i^2 = (1 - 1) ++ i2 = 0 + i2$.

4.Приклади ділення комплексних чисел

Знайти відношення $\frac{9-i7}{2-i3}$.

Розв'язання. Нехай $\frac{9-i7}{2-i3} = x + iy$.

Тоді $(x+iy)(2-i3)=9-i7$, $2x+i2y-i3x-i^2 3y-9-i7$, $(2x+3y)+i(2y-3x)=9-i7$.

Звідси $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ -3x+2y=-7 \end{cases}$.

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $x=3$, $y=1$. Тому $\frac{9-i7}{2-i3} = 3 + i$.

5. Приклади запису комплексних чисел в тригонометричній формі.

1) Записати в тригонометричній формі комплексне число $1+i$.

Знайдемо модуль r і аргумент φ цього числа,

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{2} .$$

Отже,

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} , \; \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

звідки

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi .$$

Таким чином

$$1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right] .$$

де n — будь-яке ціле число. Зазвичай, з нескінченної множини значень аргументу комплексного числа вибирають те, яке знаходиться в інтервалі між $-\pi$ і π. У даному випадку таким значенням є $\pi/4$. Тому

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]$$

2) Записати в тригонометричній формі комплексне число $\sqrt{3} - i$.

Маємо:

$$r = \sqrt{3+1} = 2; \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Тому з точністю до кута, кратного 2π, $\varphi = -(1/6)\pi$; отже,

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos(-\frac{1}{6})\pi + i\sin(-\frac{1}{6})\pi\right)$$

3). Записати в тригонометричній формі комплексне число i.

Комплексному числу i відповідає вектор $\overrightarrow{OA}$, який закінчується в точці A осі y з ординатою 1 (рис. 7).

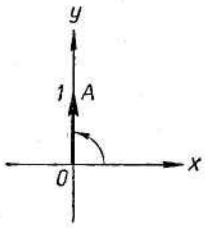

Рис. 7.

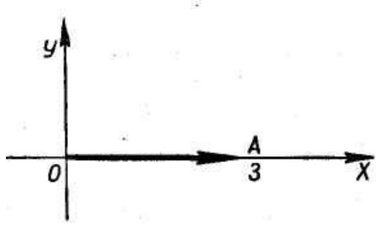

Рис. 8.

Довжина такого вектора дорівнює 1, а кут, який він утворить з віссю абсцис, дорівнює π/2. Тому

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

4) Записати в тригонометричній формі комплексне число 3.
Комплексному числу 3 відповідає вектор $\overrightarrow{OA}$, який закінчується в точці осі x з абсцисою 3 (рис. 89). Довжина такого вектора дорівнює 3, а кут, який він утворить з віссю абсцис, дорівнює 0. Тому

$$3 = 3\ (\cos 0 + i \sin 0).$$

5) Записати в тригонометричній формі комплексне число —5.
Комплексному числу —5 відповідає вектор $\overrightarrow{OA}$, який закінчується в точці осі x з абсцисою —5 (рис. 9). Довжина такого вектора дорівнює 5, а кут, який він утворить з віссю абсцис, дорівнює π. Тому

$$-5 = 5\ (\cos \pi + i \sin \pi).$$

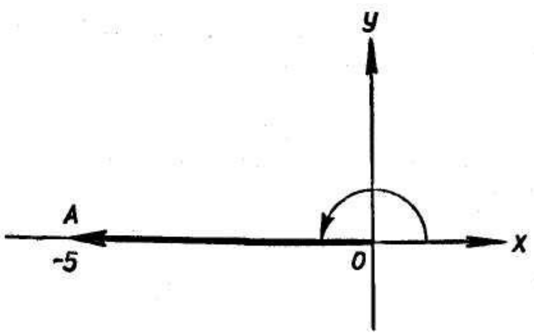

Рис. 9.

6. Множення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі .

1) $2\ (\cos 130° + i \sin 130°) \cdot 3\ (\cos 230° + i \sin 230°) =$
$=6\ (\cos 360° + i \sin 360°) = 6;$

2) $5(\cos 47° + i \sin 47°) \cdot 4\ (\cos 13° + i \sin 13°) = 20\ (\cos 60° + i \sin 60°) =$
$= 20\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + i10\sqrt{3}.$

7. Ділення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі

1) $\frac{2(\cos 150^o + i\sin 150^o)}{3(\cos 105^o + i\sin 105^o)} = \frac{2}{3}(\cos 45^o + i\sin 45^o) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

2) $\frac{\cos 70^o + i\sin 70^o}{\cos 100^o + i\sin 100^o} = \cos(-30^o) + i\sin(-30^o) = \cos 30^o - i\sin 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

8. Знайти всі значення кореня 4-го степеня з числа i.

Представивши i у вигляді $t = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$—, знайдемо,

що модулі всіх коренів рівні $\sqrt[4]{1} = 1$, а аргументи

$$\frac{\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4},$$

або

$$\frac{\pi}{8}; \quad \frac{3}{8}\pi; \quad \frac{9}{8}\pi; \quad \frac{13}{8}\pi.$$

Тому коренями 4-го степеня з числа i є числа:

$$\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8};$$

$$\cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi;$$

$$\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi;$$

$$\cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi.$$

9. Знайти всі значення кубового кореня з одиниці.

Розв'язання. Представимо одиницю в тригонометричній формі:

$$1=\cos 0+i\sin 0.$$

Користуючись формулою

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

отримуємо

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

Покладаючи k рівним 0;1;2, знаходимо три значення кореня:

$$x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1; \qquad x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Маючи на увазі, що

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \ \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \ \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

отримуємо:

$$x_1 = 1; \ x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \ x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

На рис. 10 точки *A,B,C* є геометричними зображеннями отриманих коренів.

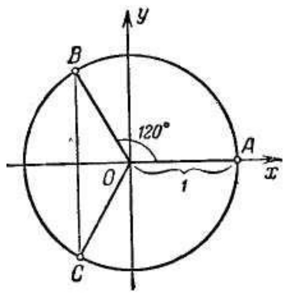

Рис. 10.

10. Розв'язати рівняння

$$x^4=1$$

(Нагадаємо, що рівняння вигляду $x^n=A$ називається двучленим.)

Розв'язання.

$$x=\sqrt[4]{\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}.$$

Покладаючи k рівним 0;1;2;3 отримуємо:

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1;\quad x_2=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i;$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=-1;\ x_4=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=-i.$$

11. Представити числа 1; i; -2; $-i$ в показниковій формі.

Розв'язання.

$$1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=e^{i2k\pi},$$

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi},$$

$$-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Індивідуальні тестові завдання

Додавання комплексних чисел

1. Знайти дійсні числа x і y з рівнянь:

а) $(5x + i3y) + (2y - ix) = 3 - i;$

б) $(2x - i5) + (7y + i2x) = -12 + i3y;$

в) $(x + i3y) + (\frac{3}{2}y + i2x) = 4 + i8.$

Віднімання комплексних чисел

2. Знайти дійсні числа x і y з рівнянь:

а) $(0 + i3x) - (10x + i2y) = -5y + i3;$

б) $(-3y + \frac{1}{2}ix) - (-8x + i5y) = -2 + i12;$

в) $\left(\frac{3}{4}x - i2y\right) - \left(\frac{1}{3}y + i6x\right) = 0 + i21$

3. Множення комплексних чисел

Розв’язати :

1) $(5 + i)(—2 + i3)$. 2) $(5 + i)(15 — i3)$.
3) $(3 + i4)(6 — i5)$. 4) $(7 — i2)(3,5 — i)$.
5) $(0,5 + i0,2)(2 + i3)$. 6) $(7 + i4)^2$.
7) $(—6 + i2)(11 + i5)$. 8) $(\sqrt{2} — i)(\sqrt{3} + i2)$.
9) $(0,5 + i)(1 + i2)$. 10) $(\sqrt{3} + i5)(5 — i\sqrt{3})$.
11) $(3+i5)(4-i)$. 12) $(6+i11)(7+i3)$.

Знайти комплексне число z з рівняння

$$(2 — i3)\cdot z = —1 — i5.$$

4. Ділення комплексних чисел.

Розв’язати**:**

1) $\frac{0+i4}{1+i}$, 2) $\frac{2+i}{2-i}$, 3) $\frac{5+i0}{-4+i3}$, 4) $(3-i)/(4+5i)$.

Довести рівності:

1) $\frac{6-i}{3+i4} = \frac{13+i41}{-25+i25}$, 2) $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+i4}{17-i9}$.

5. Геометричне зображення комплексних чисел.

1)Дані комплексні числа зобразити точками площини:

а)$1+i$; б) $-2+i3$; в)$1-i$; г) $-3-i2$; д)$5+i0$; е)$-6+i0$; ж)$0+i5$; з)$0-i4$;

2) Які комплексні числа зображують на рис. 11 точками *A*,*B*,*C*, *D* і O?

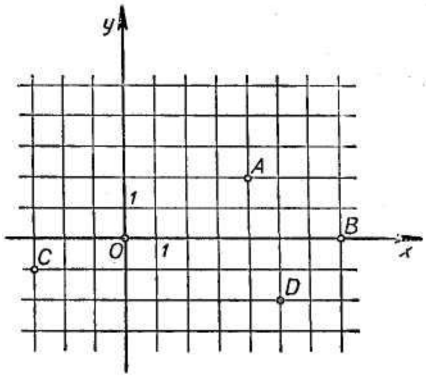

Рис. 11

3) Дати геометричну інтерпретацію формулам:

а) $(1+i2)+(1-i2) = 2+i0$;

б) $(3-i4)+(—1+i2)=2-i2$.

4) Нехай точка *M* служить зображенням на площині комплексного числа $a+ib$. Побудувати на тій же площині точки, які зображували б комплексні числа:

а) $a-ib$; д) $0+ib$;
б) $-a+ib$; е) $-a+i0$;
в) $-a-ib$; ж) $0+ib$.

г) $a+i0$;

5) Нехай точка M служить зображенням на площині комплексного числа a-ib. Де на тій же площині розміщені точки, що зображують числа:

а) $3a + i0$; г) $0+i2b$;

б) $-5a +i0$; д) $4a +i3b$?

в) $0-ib$;

6. Дійсні і чисто уявні числа

1) Знайти дійсні числа з рівнянь:

а)$(x+y)+i(x-y)=2+i4$;

б)$(x+y)+i(x-y)=i4$;

в)$(x+y)+i(x-y)=2$;

г)$(y+2x)+i(2y+4x)=0$;

д))$(x+1{,}5y)+i(2x+3y)=i13$.

2) Знайти чисто уявні числа u і v з рівнянь:

а)$u+iv=-3+i2$; б)$5u+i6v=-24-i5$.

3) Розв'язати

а)$[i(2-i)]^2$; б)$[2i(3-4i)]^2$.

7. Спряжені числа

1) Назвати комплексні числа, які спряженні даним. Зобразити дані і спряженні до них числа точками площини:

а)$1+i$; б)$2-i3$; в) 5; г) $i4$; д) 0; е) $i2$-1.

2) Розв'язати

а) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; б) $\dfrac{42+i2}{3+i5}$; в) $\dfrac{7-i2}{2+i7}$; г) $\dfrac{1}{i}$; д) $\dfrac{2-i5}{4+i}-\dfrac{6-i7}{4-i}$;

е) $\dfrac{2+i}{3-i5}+\dfrac{i}{i-1}$; ж) $\dfrac{a-ib}{b+ia}-i\dfrac{b-ia}{a+ib}$.

8. Степені уявної одиниці.

Розв'язати:

1) $i^6+i^{16}+ i^{26}+ i^{36}+ i^{46}+ i^{56}$.

2) $i^3+i^{13}+ i^{23}+ i^{33}+ i^{43}+ i^{53}$.

3) $i+i^2+i^3+ i^4+\ldots+ i^n$ $(n>4)$.

4) $i\bullet i^2\bullet i^3\bullet i^4\bullet\ldots\bullet i^{100}$.

5) $\dfrac{1}{i^3}$.

6) $\dfrac{1}{i^{11}}-\dfrac{1}{i^{41}}+\dfrac{1}{i^{75}}-\dfrac{1}{i^{1023}}$.

9. Тригонометрична форма комплексних чисел.

1) Данні комплексні числа записати в тригонометричній формі, визначивши їхні модулі і аргументи:

а)$2+i2\sqrt{3}$; б)$\sqrt{3}+i$; в) $6-i6$; г) $i12$-5; д) 25; е) -4;ж)$i3$; з)-$i2$; і)$i3$-4.

2) Указати на площині множину точок, які зображують комплексні числа, модулі r і аргументи φ яких задовольняють умовам:

а) $r= 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; б) $r= 2$; в) $r\leq 3$; г) $r<3$; д)$2< r<3$; ж) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;

з) $0<\varphi<\frac{\pi}{6}$;   і) $0<\varphi=\pi$; к) $1<r<2$; л) $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

3) Данні комплексні числа представити в тригонометричній формі, визначивши їхні модулі й аргументи:

а) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.   б) $\sin\varphi+i\cos\varphi$.

в) $-5(\cos 40° - i\sin 40°)$. г) $2(\cos 20° - i\sin 20°)$.

д) $3(-\cos 15° - i\sin 15°)$.

10. Множення і ділення комплексних чисел, які задані в тригонометричній формі.

1) Виконати указані дії:

а) $5(\cos 40° + i\sin 40°)\cdot 3(\cos 50° + i\sin 50°)$;

б) $2(\cos 20° + i\sin 20°)\cdot 7(\cos 100° + i\sin 100°)$;

в) $4\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{7}{8}\pi+i\sin\frac{7}{8}\pi\right)$;

г) $7\left(\cos\frac{8}{15}\pi+i\sin\frac{8}{15}\pi\right)\cdot 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\cdot 2\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)$

2) Розв'язати :

а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)^{100}$; б) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{50}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}$.

3) Виконати ділення:

а) $\frac{\cos 130^o+i\sin 130^o}{\cos 40^o+i\sin 40^o}$; б) $\frac{\cos 130^o-i\sin 130^o}{\cos 40^o+i\sin 40^o}$;

в) $\frac{-\cos 100^o+i\sin 100^o}{\cos 40^o-i\sin 40^o}$; г) $\frac{2\left(\cos 107^o+i\sin 107^o\right)}{5\left(\cos 47^o+i\sin 47^o\right)}$.

11. Витяг кореня з комплексного числа.

1) Знайти всі значення даних коренів:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{1+i}$; в) $\sqrt[4]{1}$; г) $\sqrt[4]{-1}$; д) $\sqrt{\cos 100^o+i\sin 100^o}$.

2) Розв'язати рівняння:

а) $x^5=a$ (a — дійсне число); б) $x^5=i$.

3) Розв'язати рівняння:

$x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

12. Привести до тригонометричного вигляду вирази:

а) $1+i$. Від. $\sqrt{2}[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$.

б) $1-i$. Від. $\sqrt{2}[\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4)]$.

13.Знайти $\sqrt[3]{i}$. Від. $(i+\sqrt{3})/2$, $-i$, $(i-\sqrt{3})/2$.