Лекція1.

1. Визначники другого і третього порядків

Нехай дана *система двох лінійних рівнянь із двома невідомими*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\}(1)$$

коефіцієнти якої складають квадратну таблицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}(2)$$

Число, яке дорівнює добуткові елементів головної діагоналі мінус добуток елементів другої діагоналі називається *визначником* (або *детермінантом)* матриці (2), причому, як говорять, *визначником другого порядку*. Для позначення визначника уживається наступний символ: прямі риски замість круглих дужок; таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{12}\, a_{21}.(3)$$

Визначник має також інші позначення: $|A|$, $\det A$.

Приклади

1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 7\cdot 1 = 5;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - (-2)\cdot 3 = 11.$

Необхідно ще раз підкреслити, що в той час як матриця є таблиця з чисел, визначник є число, яке цілком певним чином зв'язане з квадратною матрицею. Помітимо, що добутки $a_{11}a_{22}$ і $a_{12}a_{21}$ називаються *членами* визначника другого порядку.

Уведення визначників другого порядку не вносить істотних спрощень у розв'язання систем двох лінійних рівнянь із двома невідомими, розв'язання яких і без цього не представляє ніяких труднощів. Аналогічні методи для випадку *систем трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими* виявляються вже практично корисними.

Нехай дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{aligned}\right\}(4)$$

з матрицею із коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}a_{13} \\ a_{21} & a_{22}a_{23} \\ a_{31} & a_{32}a_{33} \end{pmatrix}(5)$$

Коефіцієнт при x_1 у цій рівності називається *визначником третього порядку, який* відповідає матриці (5). Для його запису вживається така ж символіка, як і у випадку визначників другого порядку; таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad (6)$$

Хоча вираз визначника третього порядку є досить громіздким, закон його складання з елементів матриці (4) виявляється досить простим.

Справді, один із трьох членів визначника, що входять у його вираз (6) зі знаком плюс, буде добутком елементів головної діагоналі, кожний із двох інших - добутком елементів, що лежать на паралелі до цієї діагоналі, з додаванням третього множника з протилежного кута матриці. Члени, що входять у (6) зі знаком мінус, будуються в такий же спосіб, але щодо другої діагоналі. Ми одержуємо спосіб обчислення визначників третього порядку, що приводить досить швидко до результату.

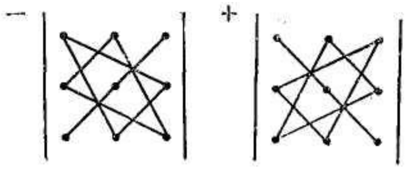

Рис.1.1.

На рис.1.1 праворуч схематично зазначено правило обчислення додатних членів визначника третього порядку, ліворуч — правило обчислення його від'ємних членів.

Приклади

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-2\cdot3\cdot2-1\cdot(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3=30+2-24-12+20-6=10$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0+0\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-2)\cdot(-2)-(-5)\cdot3\cdot1-0\cdot(-2)\cdot0-1\cdot2\cdot(-2)=-20+15+4=-1$

2. Визначники *n*-го порядку

Неможливо, однак, зробити це тим шляхом, яким були уведені визначники другого і третього порядків, тобто розв'язуючи в загальному вигляді системи лінійних рівнянь: у міру зростання n обчислення ставали б усе більш і більш громіздкими, а при довільному n практично здійсненними тільки з використанням комп'ютерів . Ми вибираємо інший шлях: розглядаючи уже відомі нам визначники другого і третього порядків, ми постараємося установити загальний закон, по якому ці визначники виражаються через елементи відповідних матриць, і застосуємо цей закон як визначення для визначника порядку n.

Ми бачимо, що всякий член визначника другого порядку є добуток двох елементів, що стоять як у різних рядках, так і в різних стовпцях, причому всі добутки такого вигляду, які тільки можна скласти з елементів матриці другого порядку (їх всього два), використані як члени визначника. Подібним же чином усякий член визначника третього порядку є добутком трьох елементів, також узятих по одному в кожнім рядку і у кожнім стовпці, причому знову всі такі добутки використовуються як члени визначника.

Нехай тепер дано квадратну матрицю порядку n

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ми приходимо, таким чином, до наступного визначення: *визначником n-го порядку,* який відповідає матриці (7), називається алгебраїчна сума $n!$ членів, складена в такий спосіб: членами служать всі добутки, які можливо утворити, n елементів матриці, узятих по одному в кожнім рядку й у кожнім стовпці, причому член береться зі знаком плюс, якщо його індекси складають парну підстановку, і зі знаком мінус — у протилежному випадку.

Для запису визначника n-го порядку, який відповідає матриці (1.27), ми будемо, як і у випадку визначників другого і третього порядків, уживати символ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Зараз ми установимо деякі найпростіші властивості визначників n-го порядку, які відносяться переважно до одного з наступних двох питань: з одного боку, нас будуть цікавити умови, при яких визначник дорівнює нулю; з іншого боку, ми вкажемо деякі перетворення матриці, які не змінюють її визначника або ж піддають його змінам, які легко враховуються.

Назвемо *транспонуванням* матриці (7) таке перетворення цієї матриці, при якому її рядки становляться стовпцями з тим же самим номером, тобто перехід від матриці (7) до матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

можна сказати, що транспонування є поворот матриці (7) біля головної діагоналі. Відповідно говорять, що визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (10)$$

отримано транспонуванням визначника (8).

Властивість 1. *Визначник не міняється при транспонуванні.*

Властивість 2. *Якщо один з рядків визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулеві.*

Дійсно, нехай всі елементи i-го рядка визначника є нулями. В кожен член визначника повинен увійти множником один елемент із i-го рядка, і тому всі члени визначника дорівнюють нулеві.

Властивість 3. *Якщо один визначник отримано з іншого перестановкою двох рядків, то всі члени першого визначника будуть членами і в другому, але зі зворотними знаками, тобто від перестановки двох рядків визначник лише змінює знак.*

Властивість 4. *Визначник, що містить два однакові рядки, дорівнює нулеві.*

Справді, нехай визначник дорівнює числу d і нехай відповідні елементи його i-го і j-го рядків $(i \neq j)$ рівні між собою. Після перестановки цих двох рядків визначник стане дорівнювати, через властивість 3, числу — d. Так як, однак, переставляються однакові рядки, то визначник насправді не міняється, тобто $d=-d$, звідки $d=0$.

<u>Властивість 5.</u> *Якщо всі елементи деякого рядка визначника помножити на деяке число k, то сам визначник збільшиться на k.*

Нехай на k помножені всі елементи i-го рядка. Кожен член визначника містить рівно один елемент із i-го рядка, тому всякий член здобуває множник k, тобто сам визначник збільшується на k.

Ця властивість допускає і таке формулювання: *загальний множник всіх елементів деякого рядка визначника можна винести за знак визначника.*

<u>Властивість 6.</u> *Визначник, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулеві.*

Справді, нехай елементи j-го рядка визначника відрізняються

від відповідних елементів i-го рядка ($i\neq j$) тим самим множником k. Виносячи цей загальний множник k з j-го рядка за знак визначника, ми одержимо визначник із двома однаковими рядками, який дорівнює нулеві по властивості 4. Властивість 4 (а також властивість 2 при $n>1$) є, мабуть, окремими випадками властивості 6 (при $k=1$ і $k=0$).

<u>Властивість 7.</u> *Якщо всі елементи i-го рядка визначника n-го порядку представлені у вигляді суми двох доданків:* $a_{ij}=b_j+c_j$, $j=1,\ldots,n$, *то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких усі рядки, крім i-го, — такі ж, як і в заданому визначнику, а i-й рядок в одному з доданків складається з елементів* b_j*, в іншому — з елементів* c_j.

Дійсно, усякий член заданого визначника можна представити у виді

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}=a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots\left(b_{\alpha_i}+c_{\alpha_i}\right)\ldots a_{n\alpha_n}=$$

$$=a_{1\alpha_1}a_{1\alpha_1}\ldots b_{\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}+a_{1\alpha_1}a_{1\alpha_1}\ldots c_{\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}$$

Збираючи разом перші доданки цих сум (з тими ж знаками, які мали відповідні члени в заданому визначнику), ми отримаємо, мабуть, визначник n-го порядку, який відрізняється від заданого визначника лише тим, що в i-у рядку замість елементів a_{ij} стоять елементи b_j,. Відповідно другі доданки складають визначник, в i-у рядку якого стоять елементи c_j. Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \ldots & b_n+c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Властивість 7 без труднощів поширюється на випадок, коли всякий елемент i-го рядка є сума не двох, а m доданків, $m\geq 2$.

Будемо говорити, що i-й рядок визначника є *лінійна комбінація* його інших рядків, якщо для всякого рядка з номером j, $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$, можна вказати таке число k_j, що, помноживши j-й рядок на k_j, а потім складаючи всі рядки, крім i-го (причому додавання рядків варто розуміти так, що складаються елементи всіх цих рядків у кожнім стовпці окремо), ми одержимо i-й рядок. Деякі з коефіцієнтів k_j можуть бути рівними нулю, тобто i-й рядок буде насправді лінійною комбінацією не всіх, а лише деяких з рядків, що залишилися. Зокрема, якщо лише один з коефіцієнтів k_j відмінний від нуля, ми одержуємо випадок пропорційності двох рядків. Нарешті, якщо рядок складається цілком з нулів, то він завжди буде лінійному комбінацією інших рядків, - випадок, коли всі k_j дорівнюють нулеві.

<u>Властивість 8.</u> *Якщо один з рядків визначника є лінійна комбінація його інших рядків, то визначник дорівнює нулеві.*

Нехай, наприклад, i-й рядок буде лінійною комбінацією s інших рядків, $1 \le s \le n-1$. Всякий елемент i-го рядка буде тоді сумою s доданків, а тому, застосовуючи властивість 7, ми представимо наш визначник у вигляді суми визначників, у кожнім з яких i-й рядок буде пропорційний одному з інших рядків. По властивості 6 усі ці визначники дорівнюють нулеві; дорівнює нулеві, отже, і заданий визначник. Ця властивість є узагальненням властивості 6, причому, вона дає самий загальний випадок рівності визначника нулеві.

Властивість 9. *Визначник не міняється, якщо до елементів одного з його рядків додаються відповідні елементи іншого рядка, помножені на те саме число.*

Нехай, справді, до i-го рядка визначника d додається j-й рядок, $j \neq i$, помножений на число k, тобто в новому визначнику всякий елемент i-го рядка має вигляд $a_{is} + ka_{is}$, $s = 1, 2, \dots, n$. Тоді, на підставі властивості 7, цей визначник дорівнює сумі двох визначників, з яких перший є d, а другий містить два пропорційні рядки і тому дорівнює нулеві.

Так як число k може бути і від'ємним, то визначник не міняється і при віднімані з одного його рядка іншого рядка, помноженого на деяке число. Узагалі, визначник не міняється, якщо до одного з його рядків додається будь-яка лінійна комбінація інших рядків .

3. Мінори і їхні алгебраїчні доповнення

Вище уже відзначалося, що було б важко обчислювати визначники n-го порядку, застосовуючи безпосередньо їхнє визначення, тобто кожен раз виписуючи всі $n!$ членів, визначаючи їхні знаки і т.д. Існують більш прості методи обчислення визначників, які засновані на тому, що визначник порядку n може бути виражений через визначники більш низьких порядків. З цією метою введемо наступне поняття.

Нехай дано визначник d порядку n. Беремо ціле число k, яке задовольняє умові $1 \le k \le n-1$, і у визначнику d вибираємо довільні k рядків і k стовпців. Елементи, які стоять на перетині цих рядків і стовпців, тобто приналежні до одного з обраних рядків і до одного з обраних стовпців, складають, мабуть, матрицю порядку k. Визначник цієї матриці називається *мінором k-го порядку* визначника d. Можна сказати також, що мінор k-го порядку є визначник, що виходить після викреслювання у визначнику d $n-k$ рядків і $n-k$ стовпців. Зокрема, після викреслювання у визначнику одного рядка й одного стовпця ми одержуємо мінор $(n-1)$-го порядку; з іншого боку, мінорами першого порядку будуть окремі елементи визначника d.

Нехай у визначнику d n-го порядку узято мінор M k-го порядку.

Якщо ми викреслимо ті рядки і стовпці, на перетині яких стоїть цей мінор, то залишиться мінор M' $(n-k)$-го порядку, який називається *додатковим мінором* для мінору M. Якщо ми викреслимо, навпаки, ті рядки і стовпці, у яких розташовані елементи мінору M', то залишиться, мабуть, мінор M. Таким чином, можна говорити про пару взаємно додаткових мінорів визначника. Зокрема, елемент a_{ij} і мінор $(n-1)$-го порядку, який виходить викреслюванням у визначнику i-го рядка і j-го стовпця, будуть складати пари взаємно додаткових мінорів. Якщо мінор k-го порядку M розташований у рядках з номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ і в стовпцях з номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$, то назвемо *алгебраїчним доповненням* мінору M його додатковий мінор M', узятий зі знаком плюс або мінус у залежності від того, парна або непарна сума номерів усіх рядків і стовпців, в яких розташовано мінор M, тобто сума

$$s_M = i_1 + i_2 \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k \qquad (11)$$

Іншими словами, алгебраїчним доповненням для мінору M буде число

$$(-1)^{s_M} M'.$$

Добуток будь-якого мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення у визначнику d є алгебраїчною сумою, доданки якої, які виходять від помноження членів мінору M на узяті зі *знаком* $(-1)^{s_M}$ *члени додаткового мінору* M'*, будуть деякими членами визначника* d*, причому їхні знаки в цій сумі збігаються з тими знаками, з якими вони входять до складу визначника.*

4. Обчислення визначників

Результати попереднього розділу дозволяють звести обчислення визначника n-го порядку на обчислення декількох визначників $(n-1)$-го порядку. Введемо спочатку наступні позначення: якщо a_{ij} — елемент визначника d, то через M_{ij} позначимо додатковий мінор або, коротше, *мінор цього елемента,* тобто мінор $(n-1)$-го порядку, який виходить після викреслювання з визначника i-го рядка і j-го стовпця. Далі, через A_{ij} позначимо алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$$

Як доведено в попередньому розділі, добуток $a_{ij}A_{ij}$ є сумою декількох членів визначника d, які входять у цю суму з тими ж знаками, з якими вони входять до складу визначника d.

Ми довели, таким чином, що має місце наступне *розкладання визначника* d *по* i*-у рядкові:*

$$d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}, \quad (12)$$

тобто *визначник* d *дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка на їхні алгебраїчні доповнення.* Аналогічне розкладання визначника можна одержати і по будь-якому його стовпцю.

Заміняючи в розкладанні (12) алгебраїчні доповнення відповідними мінорами зі знаками плюс або мінус, ми з в е д е м о о б ч и с л е н н я в и з н а ч н и к а n-го п о р я д к у до обчислення д е к і л ь к о х в и з н а ч н и к і в $(n-1)$-го п о р я д к у. Помітимо, що якщо деякі з елементів i-го рядка дорівнюють нулеві, то відповідні їм мінори не потрібно буде, зрозуміло, обчислювати. Через це корисно попередньо так перетворити визначник, використовуючи властивість 9, щоб в одному з рядків або в одному з стовпців досить багато елементів виявилося заміненими нулями. У дійсності *властивість 9 дозволяє в будь-якому рядку або будь-якому стовпці замінити нулями всі елементи, крім одного.* Справді, якщо $a_{1k}\neq 0$, то будь-який елемент i-го рядка a_{ij} $i\neq k$, буде замінений нулем після віднімання k-го стовпця, помноженого на a_{ij}/a_{ik}, з j-го стовпця. Таким чином, обчислення визначника n-го порядку можна звести до обчислення одного визначника $(n-1)$-го порядку.

Приклади.

1. Обчислити визначник четвертого порядку $d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Розкладемо його по третьому рядку, використовуючи наявність в ньому одного нуля:

$$d=(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Обчислюючи отримані визначники третього порядку, одержимо: $d=2\cdot 16-40+48=40$.

2.Обчислити визначник п'ятого порядку $d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Додаючи до другого рядка потроєний п'ятий і віднімаючи з четвертого рядка учетверений п'ятий, одержимо;

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник по третьому стовпцю, що містить лише один елемент, який не дорівнює нулеві (з сумою індексів 5+3, тобто парному), одержимо

$$d = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

Перетворимо знову отриманий визначник, додаючи до першого рядка подвоєний другий і віднімаючи з третього рядка потроєний другий, а з четвертого — подвоєний другий:

$$d = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

а потім розкладемо його по першому стовпцеві, причому помітимо, що єдиному не рівному нулеві елементові цього стовпця відповідає непарна сума індексів, одержимо:

$$d = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

Обчислимо цей визначник третього порядку, попередньо розклавши його по третьому рядку:

$$d = 36 \cdot \begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix} - (-33) \cdot \begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix} + (-24) \cdot \begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix} =$$

$$= 36 \cdot (-72) - (-33) \cdot (-104) + (-24) \cdot (-208) = -1032$$

3. *Якщо всі елементи визначника, які розташовані по одну сторону від головної діагоналі, дорівнюють нулеві, то цей визначник дорівнює добуткові елементів, які стоять на головній діагоналі,*

Для визначника другого порядку це твердження очевидне. Ми тому будемо доводити його по індукції, тобто припустимо, що для визначників *(n*—1)-го порядку воно вже доведено, і розглянемо визначник *n*-го порядку

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \; a_{nn} \end{vmatrix}$$

Розкладаючи його по першому стовпцю, одержимо

$$d = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ 0 & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots \; a_{nn} \end{vmatrix}$$

Але до мінору, що стоїть в правій частині, може бути застосовано припущення індукції, тобто він дорівнює добуткові $a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$,, а тому

$$d = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

Узагальнюючи отримані вище розкладання визначника по рядку або стовпцеві, доведемо наступну теорему, яка говорить про *розкладання визначника по декількох рядках або стовпцях.*

Теорема Лапласа. *Нехай у визначнику d порядку n довільно обрані k рядків (або k стовпців),* $1 \le k \le n - 1$. *Тоді сума добутків усіх мінорів k-го порядку, які знаходяться в обраних рядках, на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює визначникові d.*

Доведення. Нехай у визначнику d обрані рядки з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Ми знаємо, що добуток будь-якого мінору k-го порядку M, розташованого в цих рядках, на його алгебраїчне доповнення складається з деякої кількості членів визначника d, узятих з тими ж знаками, з якими вони входять до складу визначника. Теорема буде, отже, доведена, якщо ми покажемо, що, змушуючи M пробігати всі мінори k-го порядку, які розташовані в обраних рядках, ми одержимо всі члени визначника, причому жоден з них не зустрінеться двічі. Нехай

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \quad (13)$$

- довільний член визначника d. Візьмемо окремо добуток тих елементів з цього члена, які належать до обраних нами рядкам з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$.. Це буде добуток

$$a_{i_1\alpha_{i_1}} a_{i_2\alpha_{i_2}} \ldots a_{i_k\alpha_{i_k}} \; ; \quad (14)$$

k множників цього добутку стоять в k різних стовпцях, а саме, в стовпцях з номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots \; \alpha_{i_k}$. Ці номери стовпців цілком визначаються, отже, завданням члена (13). Якщо ми позначимо через M мінор k-го порядку, який стоїть на перетині стовпців з цими номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ і обраних раніше рядків з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то добуток (14) буде одним із членів мінору M, а добуток всіх елементів із члена (13), які не ввійшли в (14), членом його додаткового мінору. Таким чином, усякий член визначника входить в добуток деякого, притому цілком визначеного, мінору k-го порядку з обраних рядків на його додатковий мінор, причому є добутком цілком визначених членів цих двох мінорів. Для того ж, нарешті, щоб одержати узятий нами член визначника з тим знаком, який він має у визначнику, залишається, як ми знаємо, замінити додатковий мінор алгебраїчним доповненням.

Цим закінчується доведення теореми.

5. Правило Крамера

Викладена вище теорія визначників n-го порядку дозволяє показати, що ці визначники, уведені лише за аналогією з визначниками другого і третього порядків, подібно останнім можуть бути використані для розв’язання систем лінійних рівнянь.

Переходимо до розгляду систем лінійних рівнянь, причому обмежимося поки що випадком систем, у яких число рівнянь дорівнює числу невідомих, тобто систем вигляду

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} (15)$$

Додатково припустимо, що визначник d з коефіцієнтів при невідомих у цій системі, який називають коротко *визначником системи,* відмінний від нуля. При цих припущеннях ми доведемо, що система (1.50) сумісна і навіть визначена.

Як указувалося раніше, розв’язуючи систему трьох рівнянь із трьома невідомими, ми множили кожне з рівнянь на деякий множник, а потім складали ці рівнянні, після чого коефіцієнти при двох невідомих із трьох виявлялися рівними нулю. Зараз ми легко виявляємо, що множники, які нами вживалися, були алгебраїчними доповненнями у визначнику системи до елемента, що є коефіцієнтом при шуканому невідомому в даному рівнянні. Цей же прийом буде тепер використаний для розв’язання системи (15).

Припустимо спочатку, що система (1.50) сумісна і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$— один з її розв’язок. Справедливі, отже, рівності

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + \ldots + a_{3n}\alpha_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{array}\right\} (16)$$

Нехай j буде кожним з чисел 1, 2, ..., n. Помножимо обидві частини першої з рівностей (1.51) на A_{1j},тобто на алгебраїчне доповнення елемента a_{1j} у визначнику системи d; обидві частини другої рівності помножимо на A_{2j} і т.д., нарешті, обидві частини останньої — на A_{nj}. Складаючи потім окремо ліві й окремо праві частини всіх рівностей, ми прийдемо до наступної рівності.

$$\begin{array}{l} (a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})\alpha_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})\alpha_2 + \\ \ldots\ldots\ldots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})\alpha_j + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})\alpha_n = \\ = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj} \end{array}$$

Коефіцієнтом при α_j, у цій рівності служить d, коефіцієнти при всіх інших α будуть, через зроблене вище зауваження, дорівнювати нулеві, а вільний член буде визначником, який виходить з визначника d після заміни в ньому j-го стовпця стовпцем з вільних членів системи (15). Якщо цей останній визначник ми позначимо через d_j, то наша рівність прийме вигляд

$$d\alpha_j = d_j$$

звідки, через те, що $d \neq 0$,

$$\alpha_j = d_j/d,$$

Цим доведено, що якщо система (15) сумісна, то вона має єдиний розв’язок

$$\alpha_1 = d_1/d,\ \ \alpha_2 = d_2/d, \ldots,\ \alpha_n = d_n/d \qquad (16)$$

Покажемо тепер, що система чисел (16) насправді задовольняє системі рівнянь (15), тобто що система (15) сумісна. При цьому ми використовуємо наступну загальновживану символіку.

Усяка сума вигляду $a_1+a_2+...+a_n$ буде скорочено позначатися через $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Якщо ж розглядається сума, доданки якої a_{ij}, позначені двома індексами, причому $i=1,2, ..., n$, $j=1,2, ..., m$, то можна спочатку взяти суми елементів з фіксованим першим індексом, тобто суми

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

де $i=1, 2, ..., n$, а потім скласти всі ці суми. Ми одержимо тоді для суми всіх елементів a_{ij} запис

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Можна було б, однак, спочатку складати доданки a_{ij}, з фіксованим другим індексом, а потім уже складати отримані суми. Тому

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

тобто *у подвійній сумі можна змінювати порядок підсумовувань.*

Підставимо тепер в i-те рівняння системи (15) значення невідомих (16). Так як ліву частину i-го рівняння можна записати у вигляді $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ і так як $d_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$, то ми одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet \frac{d_f}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right)$$

Щодо цих перетворень відмітимо, що число $1/d$ виявилося загальним множником у всіх доданках і тому ми його винесли за знак суми; крім того, після зміни порядку підсумовувань множник b_k винесено за знак внутрішньої суми, так як від індексу внутрішнього підсумовування j він не залежить. Ми знаємо що вираз

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + ... + a_{in}A_{kn}$$

буде дорівнювати d при $k=i$ і дорівнює 0 при всіх інших k. Таким чином, у нашій зовнішній сумі по k залишиться лише один доданок, а саме $b_i d$, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet \frac{d_f}{d} = \frac{1}{d} \bullet b_i d = b_i$$

Цим доведено, що система чисел (16) дійсно служить розв’язком для системи рівнянь (15).

Ми одержали наступний важливий результат:

Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник якої відмінний від нуля, має розв’язання, і притому тільки одне. Це розв’язання виходить по формулах (16), тобто за *правилом Крамера;* формулювання цього правила таке ж, як і у випадку системи двох рівнянь .

Нехай дана *система двох лінійних рівнянь із двома невідомими*

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned} \right\} (1)$$

Правило для розв’язування системи другого порядкую

Чисельник виразу для x_1, є визначником матриці, що виходить з матриці (1) заміною її першого стовпця стовпцем з вільних членів системи (1), чисельник виразу для x_2 є визначник матриці, що виходить з матриці (1) такою же заміною її другого стовпця. Формули (16) тепер можна записати в наступному вигляді :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}} \text{ (17)}$$

Словами це правило розв’язання системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими (яке називається *правилом* Крамера) формулюється так:

Якщо визначник (3) *з коефіцієнтом системи рівнянь* (1) *відмінний від нуля, то ми одержимо розв’язання системи* (1), *беручи в якості значення для невідомих дроби, загальним знаменником яких служить визначник* (3), *а чисельником для невідомого* x_i *(*i=1,2*) є визначник, який отримується заміною у визначнику* (3) *i-го стовпця* (*тобто стовпця коефіцієнтів при шуканому невідомому) стовпцем з вільних членів.*

Приклад. Розв’язати систему $\left.\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{matrix}\right\}$.

Визначник з коефіцієнтів є $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$, він відмінний від нуля, і тому до системи може бути застосовано правило Крамера. Чисельниками для невідомих будуть визначники $d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19$, $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$=-11.

Таким чином, розв’язанням нашої системи служить наступна система чисел:

$x_1=d_1/d$=19/7, $x_2=d_2/d$=11/7.

Нехай дана система

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{matrix}\right\} \text{(4)}$$

з матрицею із коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}a_{13} \\ a_{21} & a_{22}a_{23} \\ a_{31} & a_{32}a_{33} \end{pmatrix} \text{(5)}$$

Коефіцієнт при x_1 у цій рівності називається *визначником третього порядку, який* відповідає матриці (5). Для його запису вживається така ж символіка, як і у випадку визначників другого порядку; таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad (6)$$

d_1 є визначником матриці, що виходить з матриці (5) заміною її першого стовпця стовпцем з вільних членів системи (4). Якщо ми позначимо визначник (6) буквою d, а визначник, що виходить заміною його j-го стовпця (j=1, 2, 3) стовпцем з вільних членів системи (4), символом d_j, то рівність (16) буде мати вигляд $dx_l=d_l$, звідки при $d\neq 0$ випливає

$$x_1=d_1/d \quad (18).$$

Одержимо для x_2 наступний вираз (знову при $d\neq 0$):

$$x_2=d_2/d \quad (19).$$

Вираз для x_3 :

$$x_3=d_3/d. \qquad (20).$$

Підставляючи вираз (18)—(20) у рівняння (4) (передбачається, зрозуміло, що визначники d і всі d_j записані в розгорнутому вигляді), ми одержали б після громіздких, але цілком доступних обчислень, що всі ці рівняння задовольняються, тобто що числа (18)—(20) складають розв'язання системи (4). Таким чином, *якщо визначник з коефіцієнтів системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими відмінний від нуля, то розв'язання цієї системи може бути знайдене за правилом Крамера, яке формулюється так само, як і у випадку системи двох рівнянь.*

Приклад. Розв'язати систему $\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2 \quad +x_3&=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1 \\ x_1+3x_2-2x_3&=4 \end{aligned}\right\}.$

Визначник з коефіцієнтів системи відмінний від нуля: $d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28$,

тому до системи можливо застосувати правило Крамера.

Чисельниками для невідомих будуть визначники

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13 \qquad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=17$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=24,$$

тобто розв'язанням системи служить система чисел

$$x_1=13/28,\ x_2=47/28,\ x_3=21/28=3/4.$$

П р и к л а д . Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-5x_3+x_4&=8 \\ x_1-3x_2 \qquad -6x_4&=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4&=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4&=0 \end{aligned}$$

Визначник цієї системи відмінний від нуля

$$d=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=27$$

тому до системи може бути застосовано правило Крамера. Значення невідомих будуть мати чисельниками визначники

$$d_1=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81\text{ , } d_2=\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & -9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108$$

$$d_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27\text{ , } d_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27$$

Таким чином, $x_1=3$, $x_2=-4$, $x_3=-1$, $x_4=1$ буде розв’язком нашої системи, притому єдиним.

Значення правила Крамера полягає головним чином у тому, що в тих випадках, коли це правило може бути застосоване, воно дає явний вираз для розв’язання системи через коефіцієнти цієї системи. Практичне використання правила Крамера зв'язано, однак, з досить громіздкими обчисленнями: у випадку системи n лінійних рівнянь з n невідомими приходиться обчислювати $n+1$ визначник n-го порядку. Метод послідовного виключення невідомих, викладений раніше, є в цьому відношенні набагато більш зручним, так як обчислення, яких цей метод вимагає, власне кажучи рівносильні тим, які приходиться виконувати при обчисленні одного визначника n-го порядку.

6. Приклади розв'язання типових задач

Обчисліть визначники:

1. $a)\begin{vmatrix}0 & -2\\ 8 & 7\end{vmatrix}$; $б)\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}$.

Розв’язання

$a)\begin{vmatrix}0 & -2\\ 8 & 7\end{vmatrix}=0\cdot 7-8\cdot(-2)=16$

$б)\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)$.

2. $\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

Розв 'язання. Перший спосіб. За правилом трикутників маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=3\cdot(-1)\cdot 3+2\cdot 1\cdot 1+(-4)\cdot 3\cdot 1-(1\cdot(-1)\cdot(-4)+2\cdot 3\cdot 3+3\cdot 1\cdot 1)=$$
$$=-9+2-12-(4+18+3)=-19-25=-44$$

Другий спосіб. Використовуючи властивості визначника, дістаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -13 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} = 1\cdot(-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -13 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 8-52=-44$$

Третій спосіб. Розкладемо визначник за першим рядком: $\Delta=$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot(-4)\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4) - 2\cdot 8 - 4\cdot 4 = -44$$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Розв 'язання. У визначнику є кілька нульових елементів, проте зручно, коли нульові елементи містяться в одному рядку чи стовпцеві. Зробимо, наприклад, нульовими всі елементи першого рядка, крім першого елемента. Для цього додамо до третього стовпчика перший, після чого помножимо елементи першого стовпчика на —2 і додамо їх до відповідних елементів четвертого стовпчика. Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2 \\ 1 & 2 & -2+1 & 0-2 \\ -1 & 3 & 0-1 & 2+2 \\ 2 & 1 & -1+2 & 3-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{11} = 1\cdot(-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Зробимо два нулі у другому стовпчику. Для цього до першого і другого рядків по-черзі додаємо третій рядок. Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Розкладемо визначник за елементами другого стовпця:

$$\Delta = a_{32}A_{32} = 1\cdot(-1)^{3+21}M_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(15+12) = -27$$

4. Розв'яжіть рівняння $\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0\cdot$

Розв 'язання. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = (-2-k)\begin{vmatrix} 4-k & 6 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -(2+k)((4-k)(3-k)-12) - 2(6-2k-6) = -(2+k)(k^2-7k) + 4k =$$

$$= -(k^3+2k^2-14k) + 4k = -k^3+5k^2+18k$$

Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню

$$-k^3+5k^2+18k = 0.$$

Далі маємо

$$-k(k^2-5k\ \ -18=0;\quad k=0\ \text{або}\ k^2-5k\ \ -18=0\quad \text{звідки}\quad k=\frac{5\pm\sqrt{97}}{2}.$$

Індивідуальні тестові завдання

1.Обчисліть визначники використовуючи:

а) метод зведення до трикутного вигляду;

б) метод розкладу визначника за елементами деякого рядка або стовпчика ;

в) правило трикутників.

1.1.1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$ .1.1.2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$ 1.1.3. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$ 1.1.4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ 1.1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ 1.1.6. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix}$

1.1.7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ 1.1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 1.9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ 1.1.10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 1.1.11. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ 1.1.12. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

1.1.13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 1.1.14. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ 1.1.15. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ 1.1.16. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 11..17. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 1.1.18. $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

1.1.19. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 1.1.20. $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 11..21. $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 1.1.22. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 11..23. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ 1.1.24. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

2.Обчисліть визначники четвертого порядку:

1.2.1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -14 & 21 \end{vmatrix}$. 1.2.2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -12 & 19 \end{vmatrix}$.

1.2.3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & -10 & 17 \end{vmatrix}$. 1.2.4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & -8 & 15 \end{vmatrix}$.

1.2.5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & -6 & 13 \end{vmatrix}$. 1.2.6. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 16 & 10 \\ 2 & -2 & -4 & 11 \end{vmatrix}$.

1.2.7. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 19 & 11 \\ 3 & -8 & -2 & 9 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. 1.2.8. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 22 & 12 \\ 2 & -4 & -10 & 7 \end{vmatrix}$.

1.2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 7 & 50 & 1 & -16 \\ 3 & 25 & 11 & -6 \\ 2 & -10 & 11 & 1 \end{vmatrix}$. 1.2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & -2 \\ 8 & 65 & 1 & -18 \\ 3 & 27 & 11 & -4 \\ -2 & -12 & 12 & 1 \end{vmatrix}$.

1.2.19. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 5 \\ -1 & 10 & 2 & -27 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$. 1.2.20. $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 & -2 \\ 9 & 82 & 1 & -20 \\ 3 & 29 & 11 & -2 \\ -2 & -14 & 13 & 1 \end{vmatrix}$.

1.2.21. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}$. 1.2.22. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 0 & -13 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$.

1.2.23. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 1 & -20 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$. 1.2.24. $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 & -2 \\ 9 & 91 & 1 & -20 \\ 3 & 31 & 11 & 0 \\ 1 & 15 & 25 & 1 \end{vmatrix}$

1.2.25 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 7 \\ -1 & 12 & 3 & -34 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. 1.2.26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 3 & 9 \\ -1 & 14 & 4 & -41 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

1.2.27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 11 \\ -1 & 16 & 5 & -48 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}$. 1.2.28. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 3 & 13 \\ -1 & 18 & 6 & -55 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

1.2.29. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 15 \\ -1 & 20 & 7 & -62 \\ 2 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}$. 1.2.30. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 3 & 17 \\ -1 & 22 & 8 & -69 \\ 2 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix}$.

1.3. Обчисліть визначники, використовуючи:
а) метод зведення до трикутного вигляду;
б) метод розкладу визначника за елементами деякого рядка або стовпчика.

1.3.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 1.3.2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 1.3.3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

1.3.4. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. 1.3.5. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 1.3.6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

1.3.7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. 1.3.8. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.3.9. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

1.3.10. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. 1.3.11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 1.3.12. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

1.3.13. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 1.3.14. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 1.3.15. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.