Лекція № 3
Елементи векторної алгебри
Вектори
3.1. Основні поняття

Вектор – це направлений відрізок, тобто відрізок, який має певну довжину і певний напрямок. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначають $\overrightarrow{AB}$. Часто вектор позначають однією буквою $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ називають ***протилежним*** до вектора $\overline{AB}$. Вектор протилежний до вектора $\bar{a}$ позначають $-\bar{a}$.

Довжиною або ***модулем вектора*** $\overline{AB}$ називається довжина відрізка, на якому побудований вектор, і позначається $|\overline{AB}|$ або $|\bar{a}|$.

Вектор, довжина якого рівна нулю, називається ***нульовим*** і позначається $\bar{0}$. Нульовий вектор напрямку не має.

Вектор, довжина якого рівна одиниці, називається ***одиничним*** і позначається $\bar{e}$. Одиничний вектор, напрямок якого співпадає з напрямком вектора $\bar{a}$, називається ***ортом*** вектора $\bar{a}$ і позначається $\bar{a}_0$.

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначають $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Колінеарні вектори можуть бути направлені однаково або протилежно. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

За ***кут між векторами*** $\bar{a}$ і $\bar{b}$ приймають кут, величина якого не перевищує π і позначають $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$ (рис. 3.1):

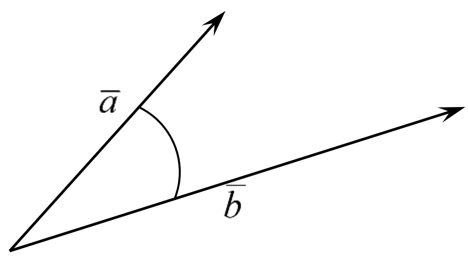

Рис. 3.1

Два вектори називаються ***ортогональними***, якщо кут між ними рівний $\pi/2$.

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково направлені і їх довжини рівні. Позначають $\bar{a} = \bar{b}$.

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора розміщувати в будь-якій точці простору.

Всі рівні вектори називаються ***вільним вектором.***

Три вектори в просторі називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Якщо серед трьох векторів хоча б один нульовий або два колінеарні, то такі вектори компланарні.

3.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами називають додавання і множення векторів на число.

Нехай $\overline{a} = \overline{AB}$ і $\overline{b} = \overline{BC}$ – два довільні вектори (рис. 3.2). Тоді вектор $\overline{c} = \overline{AC}$ називається ***сумою векторів*** $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та позначається $\overline{a} + \overline{b}$. Це правило додавання векторів називають ***правилом трикутника***.

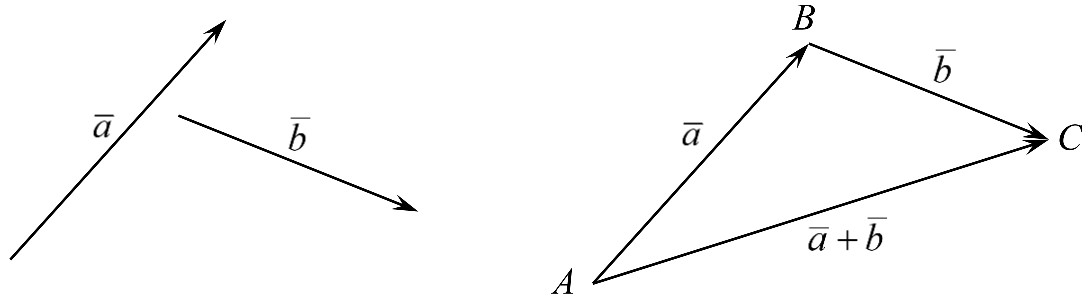

Рис. 3.2

Суму двох векторів можна знайти і за ***правилом паралелограма*** (рис. 3.3).

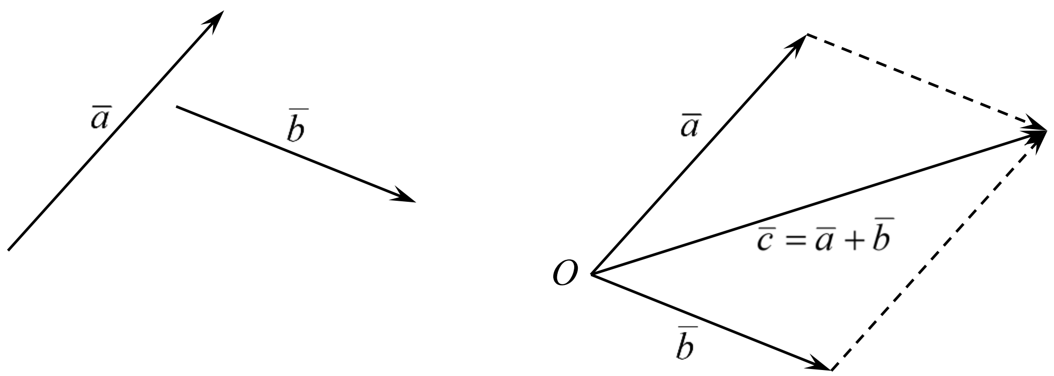

Рис. 3.3

Під сумою $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ трьох векторів розуміють вектор, отриманий послідовним додаванням даних векторів: $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.

Аналогічно визначається сума *n* векторів.

Різницею $\overline{a} - \overline{b}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор, рівний сумі векторів $\overline{a}$ і $-\overline{b}$: $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$.

Відмітимо, що в паралелограмі, побудованому на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, одна направлена діагональ є їх сумою, а інша – різницею (рис. 3.4).

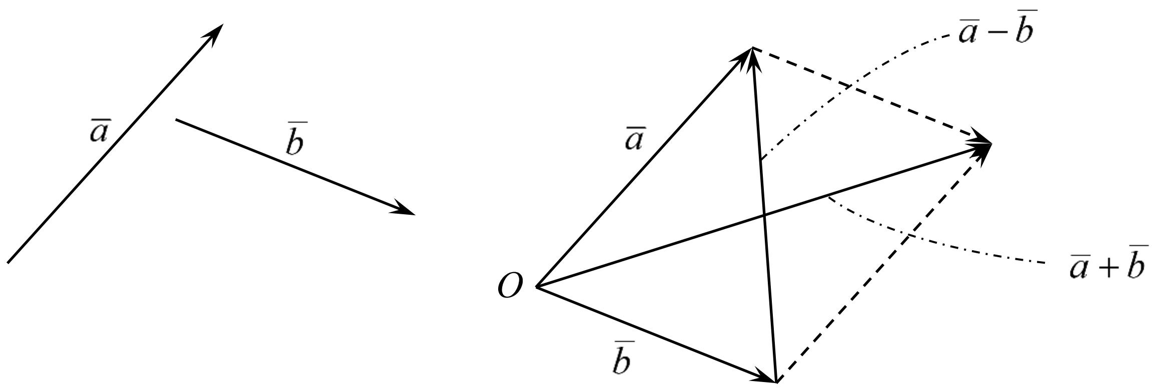

Рис. 3.4

Добутком вектора $\overline{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\overline{a}$ або $\overline{a}\lambda$, довжина якого рівна $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, має напрямок вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$ і протилежно направлений, якщо $\lambda < 0$.

З означення добутку вектора на число випливають ***властивості*** цього ***добутку:***

1) якщо $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, то $\overline{a} \parallel \overline{b}$ і навпаки, якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$ $(\overline{a} \neq \overline{0})$, то при деякому λ вірна рівність $\overline{b} = \lambda\overline{a}$;

2) $\overline{a} = |\overline{a}|\cdot\overline{a}_0$, тобто кожний вектор рівний добутку його модуля на орт.

Властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;
3. $\lambda_1(\lambda_2\overline{a}) = \lambda_1\lambda_2\overline{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{a}$;
5. $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$.

Ці властивості дозволяють проводити перетворення в лінійних операціях над векторами так, як це робиться в алгебрі: доданки міняти місцями, вводити дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні множники.

3.3. Розклад вектора за базисом

Нехай дано вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$.

Вектор

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{a}_n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числа, називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – ***коефіцієнтами*** цієї комбінації.

Якщо вектор $\overline{a}$ представлений у вигляді лінійної комбінації векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, тобто $\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{a}_n$, то кажуть, що ***вектор*** $\overline{a}$ ***розкладений за векторами*** $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$.

Базисом на площині назвемо два ненульових, неколінеарних вектори

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ цієї площини, взятих в певному порядку.

Нехай на площині заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Доведемо, що будь-який вектор $\bar{a}$ цієї площини можна єдиним чином розкласти за базисними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Розглянемо можливі випадки:

1) Вектор $\bar{a}$ колінеарний одному з базисних векторів, наприклад, $\bar{e}_1$. Тоді за властивостями добутку вектора на число існує таке число α_1, що $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1$ або $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + 0\bar{e}_0$ і такий розклад єдиний.

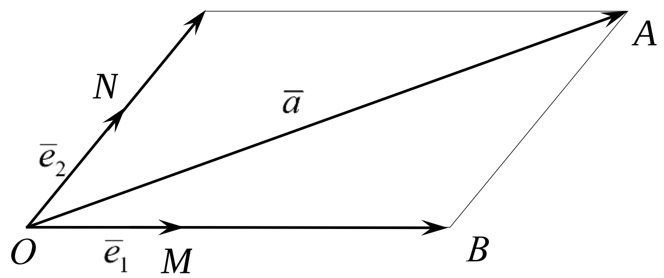

Рис. 3.5

2) Вектор $\bar{a}$ не колінеарний ні одному з базисних векторів. Зобразимо три вектори $\bar{e}_1 = \overline{OM}$, $\bar{e}_2 = \overline{ON}$, $\bar{a} = \overline{OA}$ (рис. 3.5). Очевидно, що $\bar{a} = \overline{OA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BA}$, де $\overline{OB}$ і $\overline{BA}$ колінеарні відповідно векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, а отже існують такі числа α_1 і α_2, що $\overline{OB} = \alpha_1 \bar{e}_1$, $\overline{BA} = \alpha_2 \overline{e_2}$ і

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 . \tag{3.1}$$

Коефіцієнти α_1 і α_2 розкладу (3.1) називаються ***координатами вектора*** $\bar{a}$ ***в базисі*** $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і записують $\bar{a}\,(\alpha_1, \alpha_2)$.

Таким чином, кожному вектору на площині в заданому базисі відповідає єдина пара чисел, взятих в певному порядку, і навпаки, кожній парі чисел, взятих в певному порядку, відповідає в заданому базисі єдиний вектор на площині.

Базисом в просторі назвемо три некомпланарних вектори, взятих в певному порядку.

Нехай в просторі заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Доведемо, що будь-який вектор $\bar{a}$ можна єдиним чином розкласти за базисними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Розглянемо можливі випадки:

1) Вектор $\bar{a}$ і два базисних вектори, наприклад, $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ компланарні. Як показано вище, $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$ або $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + 0\bar{e}_3$.

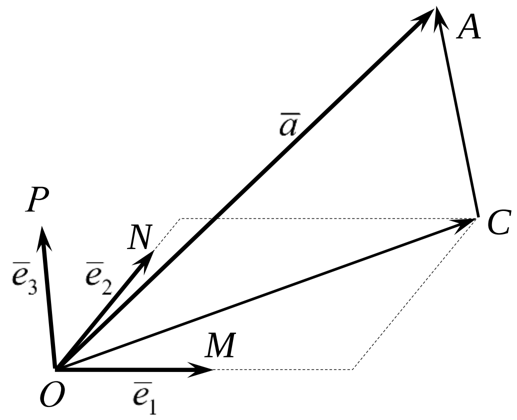

Рис. 3.6

2) Вектор $\overline{a}$ не компланарний з жодними двома з базисних векторів. Зобразимо вектори $\overline{e}_1 = \overline{OM}$, $\overline{e}_2 = \overline{ON}$, $\overline{e}_3 = \overline{OP}$, $\overline{a} = \overline{OA}$ (рис. 3.6). Очевидно, що $\overline{a} = \overline{OA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}$, де $\overline{CA}$ колінеарний $\overline{e}_3$, а $\overline{OC}$ компланарний з векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2$. Тоді існують такі числа α_1, α_2, α_3, що вектор $\overline{CA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{CA} = \alpha_3\overline{e}_3$, а $\overline{OC} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2$. Отже

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3. \qquad (3.2)$$

Коефіцієнти α_1, α_2, α_3 розкладу (3.2) називаються ***координатами вектора*** $\overline{a}$ ***в базисі*** $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ і записують $\overline{a}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Таким чином, кожному вектору простору в заданому базисі відповідає єдина трійка чисел, взятих в певному порядку, і навпаки, кожній трійці чисел, взятих в певному порядку, відповідає в заданому базисі єдиний вектор.

Відмітимо, що всі координати нульового вектора рівні нулю. Якщо вектор $\overline{a} \neq 0$, то $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0$.

Базис називається ***ортонормованим,*** якщо базисні вектори одиничні і попарно ортогональні.

3.4. Лінійні операції над векторами в координатній формі

Нехай заданий базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ і вектори $\overline{a}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overline{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ або, що те ж саме, $\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3$, $\overline{b} = \beta_1\overline{e}_1 + \beta_2\overline{e}_2 + \beta_3\overline{e}_3$.

Сума векторів. Запишемо суму векторів

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3) + (\beta_1\overline{e}_1 + \beta_2\overline{e}_2 + \beta_3\overline{e}_3)$$

або, згідно властивостям лінійних операцій над векторами,

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\overline{e}_3. \qquad (3.3)$$

Таким чином, при додаванні векторів їх відповідні координати додаються.

Добуток вектора на число. Помножимо вектор $\overline{a}$ на число λ:

$$\lambda\overline{a} = \lambda(\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3)$$

або

$$\lambda\bar{a}=(\lambda\alpha_1)\bar{e}_1+(\lambda\alpha_2)\bar{e}_2+(\lambda\alpha_3)\bar{e}_3. \qquad (3.4)$$

Тобто при множенні вектора на число координати вектора множаться на це число.

Приклад 1. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дано вектори $\bar{a}=6\bar{e}_1-2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{b}=-\bar{e}_1+4\bar{e}_2+3\bar{e}_3$. Знайти вектор $\bar{c}=5\bar{a}+2\bar{b}$.

Розв'язок. Згідно формулам (3.3), (3.4)

$$\bar{c}=5\bar{a}+2\bar{b}=5\cdot(6\bar{e}_1-2\bar{e}_2+\bar{e}_3)+2\cdot(-\bar{e}_1+4\bar{e}_2+3\bar{e}_3)=$$
$$=(30-2)\bar{e}_1+(-10+8)\bar{e}_2+(5+6)\bar{e}_3=28\bar{e}_1-2\bar{e}_2+11\bar{e}_3.$$

Відповідь: $\bar{c}(28,\ -2,\ 11)$. ◀

Рівність векторів. З означення вектора як направленого відрізка, який можна переміщати в просторі паралельно самому собі, випливає, що ***два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ рівні*** тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\beta_1,\\ \alpha_2&=\beta_2,\\ \alpha_3&=\beta_3.\end{aligned}\right\}$$

Колінеарність векторів. Вияснимо умови колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих своїми координатами.

Так як $\bar{a}\parallel\bar{b}$, то за властивостями добутку вектора на число можна записати $\bar{b}=\lambda\bar{a}$, де λ – деяке число, тобто

$$\bar{b}=\beta_1\bar{e}_1+\beta_2\bar{e}_2+\beta_3\bar{e}_3=\lambda\bar{a}=(\lambda\alpha_1)\bar{e}_1+(\lambda\alpha_2)\bar{e}_2+(\lambda\alpha_3)\bar{e}_3.$$

Звідси $\beta_1=\lambda\alpha_1$, $\beta_2=\lambda\alpha_2$, $\beta_3=\lambda\alpha_3$, тобто $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=\lambda$, $\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}=\lambda$, $\dfrac{\beta_3}{\alpha_3}=\lambda$ або

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\frac{\beta_3}{\alpha_3}=\lambda. \qquad (3.5)$$

Таким чином, *координати колінеарних векторів пропорційні*. Справедливе і обернене твердження: *вектори, що мають пропорційні координати, колінеарні*.

Зауваження. Співвідношення (3.5) умовно записуватимемо і у випадку, коли серед чисел β_1, β_2, β_3 є рівні нулю.

Нехай на площині заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і вектори $\bar{a}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\bar{b}(\beta_1,\beta_2)$. В цьому випадку мають місце формули, аналогічні формулам (3.3) – (3.5).

Приклад 2. Перевірити, чи колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, задані в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

а) $\bar{a}(2,\ -3,\ 1)$, $\bar{b}(-4,\ 6,\ -2)$; б) $\bar{a}(4,\ 0,\ 5)$, $\bar{b}(-4,\ 0,\ -5)$.

Розв'язок. Згідно формули (3.5):

а) $\dfrac{-4}{2}=\dfrac{6}{-3}=\dfrac{-2}{1}=-2$, а отже $\bar{a}\parallel\bar{b}$.

б) $\dfrac{4}{-4}=\dfrac{0}{0}=\dfrac{5}{-5}$.

Так як друга координата в обох векторів рівна нулю, то їх можна розглядати як вектори, задані на площині в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_3$, а отже $\frac{4}{-4} = \frac{5}{-5} = -1$ і $\bar{a} \parallel \bar{b}$. ◀

Приклад 3. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ дано вектори $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$. Показати, що вектори $\bar{a}, \bar{b}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\bar{c} = 6\bar{e}_1 + 19\bar{e}_2$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}$.

Розв'язок. Якщо два вектори утворюють базис, то вони неколінеарні. Згідно формули (3.5):

$$\frac{2}{1} \neq -\frac{1}{5},$$

а отже вектори $\bar{a}, \bar{b}$ неколінеарні і утворюють базис.

В новому базисі $\bar{a}, \bar{b}$ вектор $\bar{c}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{c} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b},$$

де коефіцієнти α_1, α_2 – невідомі і є координатами вектора $\bar{c}$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}$.

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора $\bar{c}$ в координатній формі:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 19 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 19 &= -\alpha_1 + 5\alpha_2. \end{aligned}\right\}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = 10 + 1 = 11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 - 19 \cdot 1 = 30 - 19 = 11;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 19 \end{vmatrix} = 2 \cdot 19 - (-1) \cdot 6 = 38 + 6 = 44.$$

Отримаємо $\alpha_1 = \frac{11}{11} = 1$; $\alpha_2 = \frac{44}{11} = 4$.

Відповідь: $\bar{c}(1,\ 4)$. ◀

Приклад 4. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дано вектори $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{b} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{c} = \bar{e}_2 - \bar{e}_3$. Показати, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\bar{d} = \bar{e}_1 + 8\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Розв'язок. Якщо три вектори утворюють базис, то жоден з них не є лінійною комбінацією двох інших. Тоді визначник, складений з координат цих векторів, відмінний від нуля, так як лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх координатами. Обчислимо цей визначник:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot(-1)\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$$1 + 2 - 1 = 2 \neq 0 .$$

Отже, вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис.

В новому базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ вектор $\bar{d}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\bar{d} = \alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{b} + \alpha_3\bar{c} ,$$

де коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – невідомі і є координатами вектора $\bar{d}$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора $\bar{d}$ в координатній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3, \\ 8 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ -5 &= 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3. \end{aligned} \right\}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} .$$

Очевидно, що визначник $\Delta = \det$ як визначник транспонованої матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 .$$

Обчислимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot(-5) + 8\cdot 1\cdot 0 - (-5)\cdot(-1)\cdot 0 - 8\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= 1 - 10 + 16 - 1 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 8\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot(-5)\cdot 0 - 0\cdot 8\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot(-1) - (-5)\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= -8 + 1 + 5 = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-5) + 2\cdot 8\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-5) - 1\cdot 8\cdot 1 =$$

$$= 5 + 1 + 10 - 8 = 8.$$

Отримаємо $\alpha_1 = \frac{6}{2} = 3$; $\alpha_2 = \frac{-2}{2} = -1$; $\alpha_3 = \frac{8}{2} = 4.$

Відповідь: $\bar{d}(3, -1, 4)$. ◀

3.5. Декартова прямокутна система координат

Нехай в просторі дано точку O і ортонормований базис, який позначатимемо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Сукупність точки O і ортонормованого базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ називається ***декартовою прямокутною системою координат в просторі.*** Точку O називають *початком координат*. Вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{i}$, називається віссю Ox або *віссю абсцис*; вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{j}$ – віссю Oy або *віссю ординат*; вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{k}$ – віссю Oz або *віссю аплікат.* Осі Ox, Oy, Oz називають *осями координат*. Площини, що проходять через дві осі координат, називають *координатними площинами*.

Декартову прямокутну систему координат позначають $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ або $Oxyz$.

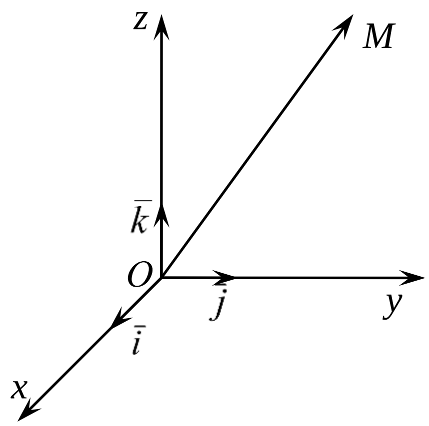

Рис. 3.7

Радіус-вектором точки M назвемо вектор $\overline{OM}$ (рис. 3.7). Нехай $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, де (x, y, z) – координати вектора $\overline{OM}$ в базисі $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$, тобто його проекції на відповідні координатні осі, їх називають ***координатами точки M*** в системі $(O, \bar{i},\ \bar{j}, \bar{k})$ і записують $M(x, y, z)$. Координата x називається абсцисою, y – ординатою, z – аплікатою.

Таким чином, кожній точці M в заданій декартовій прямокутній системі координат в просторі відповідає єдина впорядкована трійка чисел, і навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел в заданій декартовій прямокутній системі координат в просторі відповідає єдина точка.

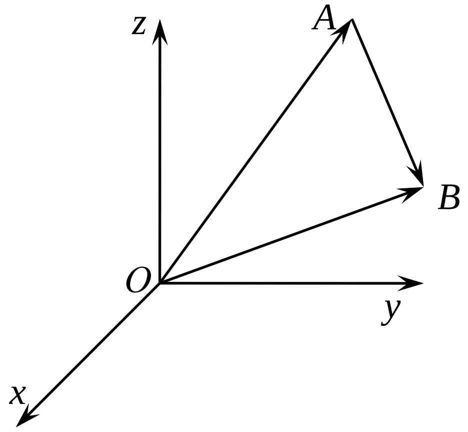

Рис. 3.8

Знайдемо координати вектора $\overline{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Маємо (рис. 3.8):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) - (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Отже, ***координати вектора*** $\overline{AB}$ рівні різницям відповідних координат його кінця і початку.

Три некомпланарних вектори $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$, взятих у вказаному порядку, утворюють *праву орієнтацію* або ***праву трійку***, якщо з кінця $\overline{AD}$ поворот від $\overline{AB}$ до $\overline{AC}$ по найкоротшому шляху видно проти ходу

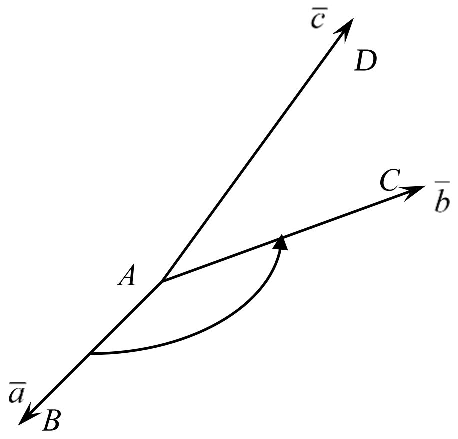

Рис. 3.9

стрілки годинника (рис. 3.9). В протилежному випадку трійка векторів утворює ***ліву трійку***.

Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву (ліву) трійку, то, помінявши місцями довільні два вектори, отримаємо ліву (праву) трійку.

Система координат називається ***правою***, якщо її базисні вектори утворюють праву трійку і лівою, якщо – ліву.

Аналогічно визначається декартова прямокутна система координат на площині.

3.6. Поділ відрізка в даному відношенні

Розділити відрізок AB у відношенні $\lambda \ (\lambda \neq -1)$ означає на прямій, що проходить через точки A і B, знайти таку точку C, що $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$. Якщо $\lambda > 0$, то точка C лежить на відрізку AB, якщо $\lambda < 0$, то точка C лежить за межами відрізка AB.

Нехай в системі координат $Oxyz$ дано точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо на прямій AB координати точки $C(x, y, z)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ.

Розглянемо вектори $\overline{AC}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{CB}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. Так як $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$, то $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$; $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$; $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$. З цих рівностей отримаємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.6)$$

Зокрема, при $\lambda = 1$ маємо ***координати середини відрізка***:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (3.7)$$

Аналогічно, якщо на площині дано точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то координати точки $C(x, y)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ, визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

а координати середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Приклад 5. Точка $C(2,\ 0,\ 4)$ ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{1}{4}$. Знайти координати точки *B*, якщо $A(3, -1, 5)$.

Розв'язок. Позначимо невідомі координати $B(x_B, y_B, z_B)$. Згідно формулам (3.6)

$$2 = \frac{3 + \frac{1}{4}x_B}{1 + \frac{1}{4}}; \quad 0 = \frac{-1 + \frac{1}{4}y_B}{1 + \frac{1}{4}}; \quad 4 = \frac{5 + \frac{1}{4}z_B}{1 + \frac{1}{4}},$$

звідки $x_B = -2$; $y_B = 4$; $z_B = 0$.

Відповідь: $B(-2,\ 4,\ 0)$. ◀

Приклад 6. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(3, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-2, 3)$, $D(2, -1)$ є паралелограмом.

Розв'язок. За ознакою паралелограма його діагоналі точкою перетину діляться пополам. Знайдемо координати середин відрізків AC і BD і якщо вони співпадуть, то чотирикутник – паралелограм.

Позначимо середину відрізка AC через O_1 а середину відрізка BD – через O_2. Тоді

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}; \quad y_{O_1} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2};$$
$$x_{O_2} = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}; \quad y_{O_2} = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Очевидно, що точка O_1 співпадає з точкою O_2, отже чотирикутник є паралелограмом. ◀

Добутки векторів

3.7. Скалярний добуток векторів

Означення скалярного добутку.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо хоча б один із двох даних векторів нульовий, то їх скалярний добуток за означенням вважається рівним нулю.

Позначається $\bar{a}\cdot\bar{b}$ або $\bar{a}\bar{b}$, або $(\bar{a},\bar{b})$. Таким чином, за означенням,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{3.8}$$

де $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.

Так як $|\bar{b}|\cdot\cos\varphi=np_{\bar{a}}\bar{b}$ є проекцією вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$, а $|\bar{a}|\cdot\cos\varphi=np_{\bar{b}}\bar{a}$ – проекцією вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$, то формулі (6.1) можна надати іншого вигляду:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}, \tag{3.9}$$

тобто скалярний добуток рівний добутку довжини одного з них на проекцію іншого на перший вектор.

Властивості скалярного добутку.

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$.

Справедливість цієї властивості випливає з означення.

2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

Доведення. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\lambda\bar{a}=\lambda|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

Доведення.

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot(np_{\bar{a}}\bar{b}+np_{\bar{a}}\bar{c})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}+|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

4. Скалярний квадрат вектора рівний квадрату його довжини:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2.$$

Доведення. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0^o=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot 1=|\bar{a}|^2$.

Зокрема, $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$.

Якщо добути корінь із скалярного квадрата вектора, то отримаємо не початковий вектор, а його модуль $|\bar{a}|$, тобто $\sqrt{\bar{a}^2}=|\bar{a}|$.

5. Якщо ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні, то їх скалярний добуток рівний нулю і навпаки, якщо скалярний добуток двох ненульових векторів рівний нулю, то ці вектори ортогональні.

Доведення. Так як $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\pi/2$, то $\cos\varphi=\cos\pi/2=0$, а отже і $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Якщо $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ і $|\bar{a}|\neq 0$, $|\bar{b}|\neq 0$, то $\cos\varphi=0$ і $\varphi=\pi/2$.

Зокрема, $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0$.

Приклад 7. Знайти $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо $\bar{a}=3\bar{m}+2\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$, $|\bar{m}|=4$, $|\bar{n}|=6$,

$$\varphi=(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\pi/4.$$

Розв'язок. $\bar{a}\cdot\bar{b}=(3\bar{m}+2\bar{n})\cdot(\bar{m}-\bar{n})=3\bar{m}^2-3\bar{m}\bar{n}+2\bar{n}\bar{m}-2\bar{n}^2=3\bar{m}^2-\bar{m}\bar{n}-2\bar{n}^2=$

$$=3\cdot4^2-4\cdot6\cdot\cos\pi/4-2\cdot6^2=3\cdot16-4\cdot6\cdot\sqrt{2}/2-2\cdot36=48-12\sqrt{2}-72=$$

$$-24-12\sqrt{2}.$$ ◀

Приклад 8. Знайти довжину вектора $\bar{c}=4\bar{a}-\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=7$,

$$\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\pi/3.$$

Розв'язок. $|\bar{c}|=\sqrt{\bar{c}^2}=\sqrt{(4\bar{a}-\bar{b})^2}=\sqrt{(4\bar{a}-\bar{b})\cdot(4\bar{a}-\bar{b})}=\sqrt{16\bar{a}^2-2\cdot4\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2}=$

$$=\sqrt{16\cdot3^2-8\cdot3\cdot7\cdot\cos\pi/3+7^2}=\sqrt{16\cdot9-8\cdot3\cdot7\cdot1/2+49}=\sqrt{144-84+49}=\sqrt{109}.$$

◀

Скалярний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\bar{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a}=\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k}$, $\bar{b}=\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k}$.

Знайдемо скалярний добуток цих векторів, перемноживши їх як многочлени згідно властивостям 1 – 3:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k})\cdot(\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k})=\alpha_1\beta_1(\bar{i}\bar{i})+\alpha_1\beta_2(\bar{i}\bar{j})+\alpha_1\beta_3(\bar{i}\bar{k})+$$
$$+\alpha_2\beta_1(\bar{j}\bar{i})+\alpha_2\beta_2(\bar{j}\bar{j})+\alpha_2\beta_3(\bar{j}\bar{k})+\alpha_3\beta_1(\bar{k}\bar{i})+\alpha_3\beta_2(\bar{k}\bar{j})+\alpha_3\beta_3(\bar{k}\bar{k}).$$

Згідно властивостям 4, 5, отримаємо:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3. \tag{3.10}$$

Таким чином, скалярний добуток векторів рівний сумі добутків їх однойменних координат.

За формулою (3.10) маємо

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^3, \tag{3.11}$$

звідки

$$|\bar{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}. \tag{3.12}$$

Приклад 9. Знайти довжину вектора $\bar{a}=6\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$.

Розв'язок. $|\bar{a}|=\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7.$ ◀

Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Відстань між двома точками M_1 і M_2 рівна

$$|M_1M_2|=|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{3.13}$$

Так як $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, то ***кут між ненульовими векторами*** $\bar{a}$ і $\bar{b}$ визначається за формулами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|},$$

тобто

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}} \ . \quad (3.14)$$

З останньої формули випливає ***умова перпендикулярності ненульових векторів*** $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \quad (3.15)$$

Нехай кути, які утворює вектор $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ з осями координат Ox, Oy , Oz, відповідно рівні α, β, γ. Тоді проекції вектора $\bar{a}$ на осі координат рівні

$$\alpha_1 = |\bar{a}|\cdot\cos\alpha,\ \ \alpha_2 = |\bar{a}|\cdot\cos\beta,\ \ \alpha_3 = |\bar{a}|\cdot\cos\gamma. \quad (3.16)$$

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{\alpha_1}{|\bar{a}|},\ \ \cos\beta = \frac{\alpha_2}{|\bar{a}|},\ \ \cos\gamma = \frac{\alpha_3}{|\bar{a}|}. \quad (3.17)$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Підставивши вирази (3.16) в рівність (3.11), отримаємо

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2\cdot\cos^2\alpha + |\bar{a}|^2\cdot\cos^2\beta + |\bar{a}|^2\cdot\cos^2\gamma .$$

Скоротивши на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, отримаємо співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад 10. Довести, що діагоналі чотирикутника, заданого координатами вершин $A(-4, -4, 4)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(2, 5, 1)$, $D(3, -2, 2)$, взаємно перпендикулярні.

Розв'язок. Складемо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$, що лежать на діагоналях даного чотирикутника:

$$\overline{AC} = (2-(-4), 5-(-4), 1-4) = (6, 9, -3);$$

$$\overline{BD} = (3-(-3), -2-2, 2-2) = (6, -4, 0).$$

Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 6\cdot 6 + 9\cdot(-4) + (-3)\cdot 0 = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Згідно властивості 5, вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ перпендикулярні, що й треба було довести. ◀

Приклад 11. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-1, 1, 3)$, $B(3, 3, -4)$, $C(2, 1, -1)$. Знайти проекцію сторони AB на сторону AC.

Розв'язок. Складемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, що лежать на сторонах даного трикутника:

$$\overline{AB} = (3-(-1), 3-1, -4-3) = (4, 2, -7);\ \ \overline{AC} = (2-(-1), 1-1, -1-3) = (3, 0, -4)$$

.

З формули (3.9) знаходимо

$$np_{\overline{AC}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}=\frac{4\cdot 3+2\cdot 0+(-7)\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{12+0+28}{\sqrt{9+16}}=\frac{40}{5}=8. \blacktriangleleft$$

Приклад 12. Знайти кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, якщо $\overline{AB}(4,2,-7)$, $\overline{AC}(3,0,-4)$.

Розв'язок. За формулою (3.14) знаходимо

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 3+2\cdot 0+(-7)\cdot(-4)}{\sqrt{4^2+2^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{12+28}{\sqrt{16+4+49}\cdot\sqrt{9+0+16}}=$$

$$=\frac{40}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{25}}=\frac{40}{5\sqrt{69}}=\frac{8}{\sqrt{69}},$$

$\varphi=\arccos\frac{8}{\sqrt{69}}$. ◀

Приклад 13. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(3,4,-5)$, $B(-1,8,-3)$.

Розв'язок. Знайдемо координати і довжину вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=(-1-3,\,8-4,\,-3-(-5))=(-4,\,4,\,2),$$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6.$$

За формулами (3.17)

$$\cos\alpha=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

3.8. Векторний добуток векторів

Означення векторного добутку.

Векторним добутком двох неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, такий, що:

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$ і $\bar{c}\perp\bar{b}$, тобто $\bar{c}$ перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

2) направлений так, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку;

3) має довжину**,** що дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними, тобто $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, то їх векторний добуток за означенням вважається рівним нульовому вектору.

Векторний добуток позначається $[\bar{a},\bar{b}]$.

Геометричний зміст векторного добутку. Модуль векторного добутку $\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 3.10).

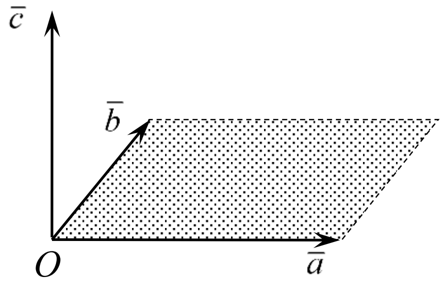

Рис. 3.10

Властивості векторного добутку.

1. $[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}]$.

Справедливість цієї властивості випливає з означення.

2. $[\lambda\bar{a},\bar{b}] = \lambda[\bar{a},\bar{b}]$.

Доведення. Нехай $\lambda > 0$. Вектор $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (вектори $\lambda\bar{a}$ і $\bar{a}$ лежать в одній площині). Вектор $\lambda[\bar{a},\bar{b}]$ також перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Отже, вектори $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ і $\lambda[\bar{a},\bar{b}]$ колінеарні. Очевидно, що їх напрямки співпадають. Вони мають однакову довжину:

$$\left|[\lambda\bar{a},\bar{b}]\right| = |\lambda\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi = \lambda|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi \text{ і } \left|\lambda[\bar{a},\bar{b}]\right| = \lambda\left|[\bar{a},\bar{b}]\right| = \lambda|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi.$$

Тому $[\lambda\bar{a},\bar{b}] = \lambda[\bar{a},\bar{b}]$. Аналогічно доведення при $\lambda < 0$.

3. $[\bar{a},\bar{b}+\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b}] + [\bar{a},\bar{c}]$.

Приймемо без доведення.

4. Два ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток рівний нульовому вектору, тобто $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow [\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}$.

Доведення. Якщо $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то вектор $[\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}$ за означенням.

Якщо $[\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}$, то $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi = 0$. Тоді $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$, тобто $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Приклад 14. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $\bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 6$, $\varphi = (\widehat{\bar{m},\bar{n}}) = \pi/4$.

Розв'язок. Використовуючи властивості векторного добутку, отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}] = [3\bar{m} + 2\bar{n}, \bar{m} - \bar{n}] = 3[\bar{m},\bar{m}] - 3[\bar{m},\bar{n}] + 2[\bar{n},\bar{m}] - 2[\bar{n},\bar{n}] =$$
$$= 3\cdot\bar{0} - 3[\bar{m},\bar{n}] - 2[\bar{m},\bar{n}] - 2\cdot\bar{0} = -5[\bar{m},\bar{n}].$$

Тоді за означенням $\left|[\bar{a},\bar{b}]\right| = \left|-5[\bar{m},\bar{n}]\right|$

$= |-5|\cdot\left|[\bar{m},\bar{n}]\right| = 5\cdot4\cdot6\cdot\sin\pi/4 = 5\cdot4\cdot6\cdot\sqrt{2}/2 = 60\sqrt{2}$. ◀

Векторний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}$, $\bar{b} = \beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k}$.

Знайдемо векторний добуток цих векторів, перемноживши їх згідно властивостям 1–3:

$$[\bar{a},\bar{b}]=[\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k},\ \beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k}]=\alpha_1\beta_1[\bar{i},\bar{i}]+\alpha_1\beta_2[\bar{i},\bar{j}]+\alpha_1\beta_3[\bar{i},\bar{k}]+$$
$$+\alpha_2\beta_1[\bar{j},\bar{i}]+\alpha_2\beta_2[\bar{j},\bar{j}]+\alpha_2\beta_3[\bar{j},\bar{k}]+\alpha_3\beta_1[\bar{k},\bar{i}]+\alpha_3\beta_2[\bar{k},\bar{j}]+\alpha_3\beta_3[\bar{k},\bar{k}]. \quad (3.18)$$

Векторні добутки $[\bar{i},\bar{i}]$, $[\bar{j},\bar{j}]$, $[\bar{k},\bar{k}]$, що входять в цю рівність, рівні нульовому вектору згідно властивості 4.

Векторний добуток $[\bar{i},\bar{j}]$ є вектором, модуль якого рівний $|\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\sin\pi/2=1\cdot1\cdot1=1$ і колінеарний та однаково направлений з вектором $\bar{k}$, а отже $[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$. Аналогічно $[\bar{j},\bar{k}]=\bar{i}$, $[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j}$ (рис. 3.11). Згідно властивості 1 $[\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k}$, $[\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i}$, $[\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}$.

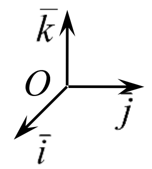

Рис. 3.11

Підставивши знайдені добутки в (3.18), отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}]=\alpha_1\beta_2\bar{k}-\alpha_1\beta_3\bar{j}-\alpha_2\beta_1\bar{k}+\alpha_2\beta_3\bar{i}+\alpha_3\beta_1\bar{j}-\alpha_3\beta_2\bar{i}=$$
$$=\bar{i}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)-\bar{j}(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+\bar{k}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Цю рівність символічно можна записати у вигляді

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}. \quad (3.19)$$

Приклад 15. Знайти $[\bar{a},\bar{b}]$, якщо $\bar{a}=2\bar{i}+6\bar{j}-5\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$.

Розв'язок. Згідно (3.19) отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 6 & -5\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}6 & -5\\ -1 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=13\bar{i}-11\bar{j}-8\bar{k}. \blacktriangleleft$$

Приклад 16. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(-1,1,5)$, $B(2,3,-4)$, $C(0,-6,-2)$.

Розв'язок. Очевидно (рис. 3.12), що $S_{\Delta ABC}=1/2\cdot\left|[\overline{AB},\overline{AC}]\right|$. Так як $\overline{AB}(3,2,-9)$,

$\overline{AC}(1,-7,-7)$, то

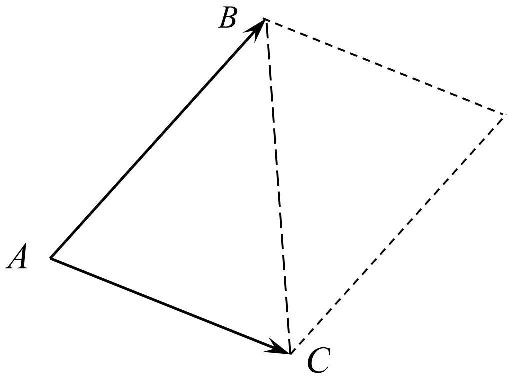

Рис. 3.12

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & -9\\ 1 & -7 & -7\end{vmatrix}=-77\bar{i}+12\bar{j}-23\bar{k},$$

$$\left|[\overline{AB},\overline{AC}]\right|=\sqrt{(-77)^2+12^2+(-23)^2}=\sqrt{6602}.$$

Отже, $S_{\Delta ABC}=\sqrt{6602}/2$. ◀

3.9. Мішаний добуток векторів

Означення мішаного добутку.

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називається число, отримане наступним чином: векторний добуток $[\bar{a},\bar{b}]$ множимо скалярно на вектор $\bar{c}$.

Мішаний добуток позначається $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

Отже,

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}).$$

Геометричний зміст мішаного добутку. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис 6.3).

Маємо:

$$([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})=\bar{d}\cdot\bar{c}=\left|\bar{d}\right|\cdot \text{пр}_{\bar{d}}\bar{c},\quad \left|\bar{d}\right|=\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|=S,$$

де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$;
$\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}=H$ для правої трійки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}=-H$ для лівої трійки, де H – висота паралелепіпеда.

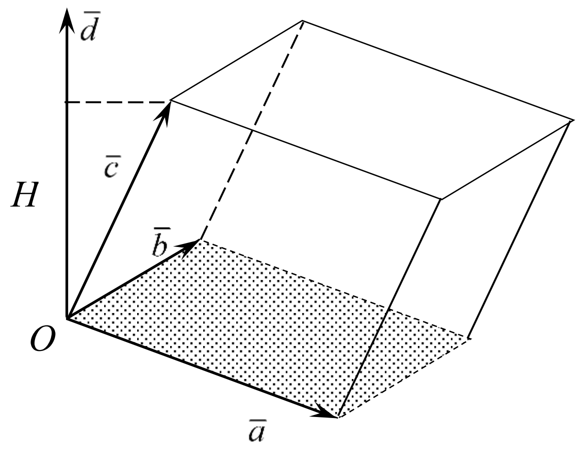

Рис. 3.13

Отримуємо

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = ([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = S\cdot(\pm H),$$

тобто

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \pm V,$$

де V – об’єм паралелепіпеда, утвореного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Таким чином, модуль мішаного добутку трьох некомпланарних векторів чисельно рівний об’єму паралелепіпеда, ребрами якого є ці вектори: $\left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right| = V$.

Властивості мішаного добутку.

1. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці його множників: $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = ([\bar{b},\bar{c}],\bar{a}) = ([\bar{c},\bar{a}],\bar{b})$.

Дійсно, в цьому випадку не змінюється ні об’єм паралелепіпеда, ні орієнтація векторів.

2. $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

Доведення. Так як за властивістю 1 $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = ([\bar{b},\bar{c}],\bar{a})$ і скалярний добуток $([\bar{b},\bar{c}],\bar{a})$ не зміниться при перестановці векторів, тобто $([\bar{b},\bar{c}],\bar{a}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$, то $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

3. $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -(\bar{a},\bar{c},\bar{b})$, $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -(\bar{b},\bar{a},\bar{c})$, $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -(\bar{c},\bar{b},\bar{a})$.

Дійсно, при перестановці довільних двох векторів, враховуючи властивості 1, 2, переставляються множники векторного добутку, тому знак змінюється на протилежний.

4. Три ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток рівний нулю.

Доведення. Якщо $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні, то вектор $\bar{d} = [\bar{a},\bar{b}]$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, а отже $\bar{d}\perp\bar{c}$, тому $\bar{d}\cdot\bar{c} = 0$, тобто $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0$.

Якщо $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0$ і вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – ненульові, то або вектор $[\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}$, а отже $\bar{a}\parallel\bar{b}$ і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні, або $[\bar{a},\bar{b}] = \bar{d}\perp\bar{c}$, а отже $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ –

компланарні.

Мішаний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\bar{c}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}$, $\bar{b} = \beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k}$, $\bar{c} = \gamma_1\bar{i} + \gamma_2\bar{j} + \gamma_3\bar{k}$.

Так як згідно (3.19)

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

то скалярний добуток $[\bar{a},\bar{b}]$ на $\bar{c}$ рівний

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\gamma_3.$$

Отриману формулу можна записати у вигляді

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{3.20}$$

Приклад 17. Вияснити, яка орієнтація трійки векторів $\bar{a} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = -4\bar{i} + \bar{j}$.

Розв'язок. Згідно (3.20)

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\cdot 13 - 11 + 0 = -63 < 0,$$

тому вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ мають ліву орієнтацію. ◄

Приклад 18. Перевірити, чи компланарні вектори $\bar{a} = 5\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = 9\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}$.

Розв'язок. Так як

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 40 + 9 - 108 + 25 + 4 = 0,$$

то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні. ◄

Приклад 19. Знайти об'єм піраміди $ABCD$, якщо $A(1, 0, 4)$, $B(2, 7, 3)$, $C(4, 0, -1)$, $D(2, 8, -1)$.

Розв'язок. Знайдемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (2-1, 7-0, 3-4) = (1, 7, -1), \qquad \overline{AC} = (4-1, 0-0, -1-4) = (3, 0, -5),$$

$\overline{AD} = (2-1, 8-0, -1-4) = (1, 8, -5)$.

Відомо, що $V_{ABCD} = \frac{1}{6}V$, де V – об’єм паралелепіпеда, ребрами якого є вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Отже

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 8 & -5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\cdot\left|0-24-35+0+105+40\right| =$$

$$= \frac{96}{6} = 16 \text{ (куб. од.)} \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

3.1 Що називається вектором?

3.2 Який вектор називається ортом?

3.3 Які два вектори називаються колінеарними?

3.4 Які два вектори називаються рівними?

3.5 Які вектори називаються вільними?

3.6 Які вектори називаються компланарними?

3.7 Які операції над векторами називають лінійними?

3.8 Які властивості лінійних операцій над векторами?

3.9 Що називається лінійною комбінацією векторів?

3.10 Що називається базисом на площині?

3.11 Що називається базисом в просторі?

3.12 Що називається координатами вектора $\overline{a}$ в базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$?

3.13 Який базис називається ортонормованим?

3.14 Чому рівні координати суми векторів в даному базисі?

3.15 Як визначаються координати при множенні вектора на число в даному базисі?

3.16 Яка умова колінеарності двох ненульових векторів?

3.17 Що називається декартовою прямокутною системою координат в просторі?

3.18 Що називається координатами точки M в системі $Oxyz$?

3.19 Як визначаються координати вектора $\overline{AB}$ в системі $Oxyz$?

3.20 Які три вектори утворюють праву трійку, а які – ліву?

3.21 Що означає розділити відрізок AB у відношенні λ $(\lambda \neq -1)$?

3.22 Чому рівні координати точки C, що ділить відрізок AB у відношенні λ?

3.23 Чому рівні координати середини відрізка?

3.24 Що називається скалярним добутком двох векторів?

3.25 Як виражається скалярний добуток через проекції одного вектора на інший?

3.26 Які властивості скалярного добутку?

3.27 Як виражається скалярний добуток через координати векторів в *декартовій системі координат?*

3.28 Як виражається довжина вектора через його координати?

3.29 Як виражається відстань між двома точками через їх координати?

3.30 Чому рівний кут між двома ненульовими векторами?

3.31 Яка умова ортогональності двох векторів?

3.32 Що називається напрямними косинусами вектора?

3.33 Що називається векторним добутком двох векторів?

3.34 Який геометричний зміст векторного добутку?

3.35 Які властивості векторного добутку?

3.36 Як виражається векторний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?

3.37 Що називається мішаним добутком трьох векторів?

3.38 Який геометричний зміст мішаного добутку?

3.39 Які властивості мішаного добутку?

3.40 Як виражається мішаний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?

Задачі та вправи

3.1. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$. *Знайти вектор* $\bar{c} = 4\bar{a} - 6\bar{b}$.

3.2. Перевірити, чи колінеарні вектори $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$, *задані в базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$*:*

а) $\bar{a}(-1,\ 4,\ 1)$, $\bar{b}(2,\ -8,\ -2)$*;*

б) $\bar{a}(0,\ 1,\ -6)$, $\bar{b}(0,\ -3,\ 18)$*;*

в) $\bar{a}(5,\ 4,\ 0)$, $\bar{b}(-5,\ -4,\ 1)$.

3.3. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. *Перевірити чи утворюють вони базис:*

а) $\bar{a}(2,\ 0,\ -3)$, $\bar{b}(1,\ 1,\ -2)$, $\bar{c}(-4,\ 6,\ 1)$*;*

б) $\bar{a}(2,\ 4,\ -1)$, $\bar{b}(-5,\ 2,\ 1)$, $\bar{c}(-2,\ -4,\ 1)$.

3.4. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a} = 7\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, $\bar{b} = -2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $\bar{c} = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. *Показати, що вектори* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *утворюють базис, і знайти координати вектора* $\bar{d} = -3\bar{e}_1 + 14\bar{e}_2 + 10\bar{e}_3$ *в базисі* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

3.5. Точка $C(-5, 3, 0)$ *ділить відрізок* AB *у відношенні* $\lambda = \dfrac{1}{3}$. *Знайти координати точки A, якщо* $B(2, -8, 1)$.

3.6. Дано точки $A(-1, 2, 1)$, $B(2, 1, -3)$, $C(3, 0, 5)$. *Підібрати координати точки* D *так, щоб чотирикутник* $ABCD$ *був паралелограмом.*

3.7. Знайти $\bar{a} \cdot \bar{b}$, *якщо* $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 2$, $\varphi = (\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = \pi/3$.

3.8. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-1, 3, 5)$, $B(2, 1, -1)$, $C(0, 2, 1)$. *Знайти проекцію сторони* AC *на сторону* AB.

3.9. Знайти кут між векторами $\overline{AB}$ *і* $\overline{AC}$, *якщо* $A(-1, 3, 5)$, $B(2, 1, -1)$, $C(0, 2, 1)$.

3.10. Знайти $(4\bar{a} - \bar{b})^2$, *якщо* $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 2$, $\varphi = (\bar{a}, \hat{\ } \bar{b}) = \pi/4$.

3.11. Знайти напрямні косинуси вектора $\bar{a}(12,3,-4)$.

3.12. Знайти $|[\bar{a}, \bar{b}]|$, *якщо* $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 8$, $\varphi = (\bar{m}, \hat{\ } \bar{n}) = \pi/6$.

3.13. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(2,3,-1)$ *і* $\bar{b}(1,-1.1)$.

3.14. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = -\bar{i} + \bar{k}$. *Вияснити, яка орієнтація трійки векторів* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

3.15. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 8\bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 4\bar{i} + \bar{k}$, $\bar{c} = 5\bar{i} + 2\bar{i} - \bar{k}$.

3.16. Перевірити, чи лежать точки A, B, C, D *в одній площині:*

а) $A(0, 2, -1)$, $B(3, 1, 1)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-4, 1, 2)$;

б) $A(5, 5, 4)$, $B(3, 8, 4)$, $C(3, 5, 10)$, $D(5, 8, 2)$.