Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Одеська Політехніка»

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇХНЬОГО ВИКОНАННЯ

для студентів І курсу ІЦТДТ

Одеса 2023

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Одеська Політехніка»

Індивідуальні домашні завдання
з вищої математики
і методичні вказівки до їхнього виконання
для студентів І курсу ІЦТДТ

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики і
моделювання систем
Протокол №

Одеса 2023

Вступ

У першому семестрі курс вищої математики складається з двох модулів. Кожен модуль складається з аудиторних занять та індивідуальної роботи студентів. Обсяг і зміст семестрових індивідуальних завдань визначається робочою програмою курсу. Кожен модульний контроль оцінюється виходячи з 50 балів. Розподіл балів в межах кожного модульного контролю виконується залежно від обсягу навчальних складових дисципліни згідно з робочою навчальною програмою. Модульний контроль складається з поточного контролю та модульної контрольної роботи. Модульна контрольна робота виконується у письмовій формі. Сума балів одержана за виконання індивідуального домашнього завдання зараховується у поточний контроль.

При виконанні й оформленні індивідуальних домашніх завдань студент повинен дотримуватися таких правил:

а) виконувати завдання в окремому зошиті у клітинку 12 або 18 аркушів;

б) вказати на обкладинці прізвище та ініціали, номер групи та номер варіанта;

в) розв’язання задач розташовувати в довільному порядку, зазначаючи їх номери, виписуючи перед розв’язанням кожної задачі її умову;

г) у разі необхідності розв’язання задач супроводжувати кресленнями, креслення виконувати олівцем.

Кожна задача індивідуальних домашніх завдань складається з 30 варіантів. Студент виконує варіант, номер якого визначається викладачем або за своїм номером у списку групи.

Список літератури

1. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996.
2. Вища математика: основні розділи: Підруч.: У 2 кн. /За ред. Кулініча Г.Л. – К.:Либідь, 1997.
3. Кліх Ю.О., Плотнікова Л.І., Усов А.В. Лінійна алгебра та елементи аналітичної геометрії. Одеса, – ОДПУ, 1998.
4. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: У 2 кн. /За ред. Васильченка І.П. – К.:Либідь, 1992.
5. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум: Навчальний посібник.- Київ: Центр навчальної літератури, 2005.

Задача 1. Виконати дії. Представити результат в алгебраїчній формі**.**

1	$\dfrac{(2-i)\,i^{25}}{(2+2i)^2}$	11	$\dfrac{(3+i)(1+i^{17})}{(1+i)^2}$	21	$\dfrac{(1-i)^3}{(3+2i^2)(1+i)}$
2	$\dfrac{3+5i^{11}}{2i(4-i)}$	12	$\dfrac{i^{43}(5+i)}{(3-i)^2}$	22	$\dfrac{(2+3i)(4-i)}{i^{18}(1+i)}$
3	$\dfrac{(5-i^9)\,i^{16}}{2+i^3}$	13	$\dfrac{(2+i)^3}{i^{21}(2-3i)}$	23	$\dfrac{(-1+3i)\,i^6}{(1-i)^2}$
4	$\dfrac{(1-i)^4}{(2i^2-4)(i-1)}$	14	$\dfrac{(2+3i)\,i^5}{(1-2i)^2}$	24	$\dfrac{(3-i)^2\,i^5}{(1+2i)(1-3i)}$
5	$\dfrac{(3i-2)(i+4)}{i^{19}(5i+1)}$	15	$\dfrac{3i^7+5i^{11}}{6-i^5}$	25	$\dfrac{3-2i^{13}}{i^3(4-i)}$
6	$\dfrac{(-3i+1)\,i^7}{(1-i)^4}$	16	$\dfrac{(1+i^8)\,i^{14}}{(2+i)^3}$	26	$\dfrac{(7+i^9)\,i^{35}}{9-(2i)^3}$
7	$\dfrac{(i+3)(1+i^{21})}{(1+i)^4}$	17	$\dfrac{(-i+2)\,i^{24}}{(2i-5)^2}$	27	$\dfrac{(3-i)^2\,i}{(2i-1)(-3i)^2}$
8	$\dfrac{i^3(i+5)^2}{(3-i)^2}$	18	$\dfrac{3i^{11}+1}{(i-2)(4-i)}$	28	$\dfrac{(1+2i)^3}{i^{21}(2-i)}$
9	$\dfrac{(2+i)^3}{i^{19}(i-3)}$	19	$\dfrac{(i^9-4)\,i^{32}}{i^3+2}$	29	$\dfrac{(3+i)(1+i^{17})}{(1+i)(i-4)}$
10	$\dfrac{(1-i)^4}{(i^2+4)(i^3+1)}$	20	$\dfrac{(i-3)(1+i^{17})}{(1-i)^2}$	30	$\dfrac{(1-2i^5)(1+i^3)}{(1-2i)(1+2i)}$

Задача 2. Виконати дії. Представити результат у показниковій формі.

1	$\dfrac{(1-i)^4}{(2-2i)^5(1+i)}$	11	$\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{25}}{(\sqrt{3}+i)^{14}}$	21	$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4\,i^5}{(2+2i)(1-i)^{11}}$
2	$\dfrac{3+3i^{11}}{2i(-1+i)^9}$	12	$\dfrac{i^{43}(-1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^6}$	22	$\dfrac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{12}}{(1+i)^{26}}$
3	$\dfrac{(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^9\;i^{16}}{1+i^3}$	13	$\dfrac{(2+2i)^4}{i^{21}(1-\sqrt{3}i)^7}$	23	$\dfrac{(-1+i)^6}{i(1-i)^{12}}$
4	$\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{25}}{(2+2i)^{17}}$	14	$\dfrac{(1-i\sqrt{3})(1+i)^{17}}{(-1+i)^{21}}$	24	$\dfrac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{12}}{(2-2i)^{27}}$
5	$\dfrac{(i-\sqrt{3})^4(i+1)}{i^{19}(1-i)^7}$	15	$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^7\,5i^{11}}{(-1-i)^5}$	25	$\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{13}}{i^3(1-i)^5}$

6	$\dfrac{(-\sqrt{3}i+1)^7 i}{(1-i)^4}$	16	$\dfrac{(1+i)^8\ i^{14}}{(-2+2i)^3}$	26	$\dfrac{(1+i\sqrt{3})^9\ i^{35}}{(2-2i)^3}$
7	$\dfrac{(i+\sqrt{3})^5(1+i)^6}{(-1+i)^4}$	17	$\dfrac{(-i+\sqrt{3})^3\, i^{24}}{(2-2i)^5}$	27	$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^8\, i}{(2i-2)^5(-3i)^2}$
8	$\dfrac{i^3(i+1)^8}{(\sqrt{3}-i)^4}$	18	$\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{11}}{(1+i)^5(1-i)}$	28	$\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{10}}{(1-i)^6(1+i)}$
9	$\dfrac{(2+2i)^3}{i^{19}(i-\sqrt{3})^6}$	19	$\dfrac{(-1+i)^9\ i^{32}}{(1-\sqrt{3}i)^3}$	29	$\dfrac{(\sqrt{3}+i)^3(1+i)^7}{(1-i)^4}$
10	$\dfrac{(1-i)^4}{(-2+2i)^3(-1+i)^3}$	20	$\dfrac{(i-\sqrt{3})(1+i)^8}{(1-i)^4}$	30	$\dfrac{(-1-i)^5(1+i)^3}{(3-3i)^3(1-i)}$

Задача 3. Обчислити значення $\sqrt[n]{z}$ та побудувати їх на площині комплексної змінної.

1	$z=8,\quad n=3$	11	$z=-1+i,\ n=5$	21	$z=-81i,\ n=4$
2	$z=-2+2i,\quad n=3$	12	$z=-32\,i,\ n=5$	22	$z=-\sqrt{3}-i,\quad n=3$
3	$z=\sqrt{3}+i,\quad n=4$	13	$z=1-i\sqrt{3},\ n=3$	23	$z=-1-i\sqrt{3},\ n=4$
4	$z=3-3i,\quad n=2$	14	$z=8i,\quad n=3$	24	$z=-1-i,\ n=6$
5	$z=-27,\quad n=3$	15	$z=\sqrt{3}-i,\quad n=5$	25	$z=81\,i,\ n=4$
6	$z=-\sqrt{3}+i,\quad n=4$	16	$z=-2-2i,\quad n=3$	26	$z=-16+16i,\ n=4$
7	$z=-8+8i,\quad n=5$	17	$z=27,\quad n=3$	27	$z=1,\quad n=5$
8	$z=-1+i\sqrt{3},\ n=3$	18	$z=-9i,\ n=2$	28	$z=1+i\sqrt{3},\ n=4$
9	$z=-8,\quad n=3$	19	$z=16+16i,\ n=4$	29	$z=-27i,\quad n=3$
10	$z=64\,i,\ n=6$	20	$z=-1,\ n=3$	30	$z=-16-16i,\ n=4$

Задача 4. Побудувати на площині комплексної змінної множину точок, що задовольняють заданим умовам.

1	$\lvert z-2\rvert=\lvert 1-2\bar{z}\rvert$	11	$\lvert z-1\rvert+\lvert z+i\rvert<10$	21	$\operatorname{Re} z\ge \operatorname{Im} z,\ \lvert z\rvert\ge 1$
2	$\lvert (z-1)/(z+1)\rvert\le 1$	12	$\lvert z\rvert<3,\ 0\le \arg z\le \pi$	22	$\lvert z+3+2i\rvert>3$
3	$\operatorname{Im}(1/z)\le -1/2$	13	$\operatorname{Re} iz\ge 0, \operatorname{Im}(z^2)>1$	23	$z^2+\bar{z}^2\le 8$
4	$\lvert z-1\rvert\le 1,\ \lvert z-i\rvert\le 1$	14	$\lvert z\rvert^2+z+\bar{z}=0$	24	$\lvert z\rvert^2\ge 2\operatorname{Re} z+3$
5	$\lvert z-1\rvert\le 1,\ \lvert z+1\rvert>2$	15	$\lvert z\rvert-\operatorname{Im} z=6$	25	$\lvert z+3\rvert+\lvert z+1\rvert<5$
6	$\operatorname{Re} z=2\lvert z-i\rvert$	16	$\lvert z-i\rvert+\lvert z+i\rvert>4$	26	$\lvert z\rvert=\operatorname{Im} z-1$
7	$\lvert z-i\rvert=\lvert z+2i\rvert$	17	$1\le\lvert z+2\rvert\le 3$	27	$\lvert z-2+3i\rvert<2$

8	$\lvert z-i\rvert+\lvert z+3\rvert\le 9$	18	$\lvert z\rvert^2-z-\overline{z}=0$	28	$\lvert z\rvert^2\le 3-2\operatorname{Im}z$
9	$\lvert\operatorname{Re}z\rvert+\lvert\operatorname{Im}z\rvert=1$	19	$\lvert z\rvert=\operatorname{Re}z+1$	29	$\operatorname{Re}z<\operatorname{Im}z,\ \lvert z\rvert<1$
10	$2<\lvert z+i\rvert<3$	20	$\lvert z+1-i\rvert<1$	30	$\lvert z\rvert>2,\ \lvert\arg z\rvert\le\pi$

Задача 5. Написати розкладання вектора *X* по векторах *P*, *Q*, *R*.

1	*X*=(-1,0,2)	*P*=(1,-1,0)	*Q*=(1,2,0)	*R*=(1,-4,2)
2	*X*=(4,4,-6)	*P*=(1,1,0)	*Q*=(0,-1,2)	*R*=(2,-1,0)
3	*X*=(8,3,2)	*P*=(4,1,1)	*Q*=(1,1,-1)	*R*=(2,0,3)
4	*X*=(1,0,2)	*P*=(-2,2,0)	*Q*=(-5,2,-2)	*R*=(-3,2,2)
5	*X*=(0,1,2)	*P*=(1,0,4)	*Q*=(-2,1,7)	*R*=(1,0,2)
6	*X*=(-2,4,7)	*P*=(0,1,2)	*Q*=(1,0,1)	*R*=(-1,2,4)
7	*X*=(6,12,-1)	*P*=(1,3,0)	*Q*=(2,-1,1)	*R*=(0,-1,2)
8	*X*=(1,-4,4)	*P*=(2,1,-1)	*Q*=(0,3,2)	*R*=(1,-1,1)
9	*X*=(-9,5,5)	*P*=(1,1,1)	*Q*=(2,0,-3)	*R*=(-1,2,1)
10	*X*=(-5,-5,5)	*P*=(-2,0,1)	*Q*=(1,3,-1)	*R*=(0,4,1)
11	*X*=(13,2,7)	*P*=(5,1,0)	*Q*=(2,-1,3)	*R*=(1,0,-1)
12	*X*=(-19,-1,7)	*P*=(0,1,1)	*Q*=(-2,0,1)	*R*=(3,1,0)
13	*X*=(3,-1,4)	*P*=(1,0,2)	*Q*=(0,1,1)	*R*=(2,-1,4)
14	*X*=(3,3.-1)	*P*=(3,1,0)	*Q*=(-1,2,1)	*R*=(-1,0,2)
15	*X*=(-1,7,-4)	*P*=(-1,2,1)	*Q*=(2,0,3)	*R*=(1,1,-1)
16	*X*=(6,5,-14)	*P*=(1,1,4)	*Q*=(0,-3,2)	*R*=(2,1,-1)
17	*X*=(6,-1,7)	*P*=(1,-2,0)	*Q*=(-1,1,3)	*R*=(1,0,4)
18	*X*=(5,15,0)	*P*=(1,0,5)	*Q*=(-1,3,2)	*R*=(0,-1,1)
19	*X*=(2,-1,11)	*P*=(1,1,0)	*Q*=(0,1,-2)	*R*=(1,0,3)
20	*X*=(11,5,-3)	*P*=(1,0,2)	*Q*=(-1,0,1)	*R*=(2,5,-3)
21	*X*=(8,0,5)	*P*=(2,0,1)	*Q*=(1,1,0)	*R*=(4,1,2)
22	*X*=(3,1,8)	*P*=(0,1,3)	*Q*=(1,2,-1)	*R*=(2,0,-1)
23	*X*=(8,1,12)	*P*=(1,2,-1)	*Q*=(3,0,2)	*R*=(-1,1,1)
24	*X*=(-9,-8,-3)	*P*=(1,4,1)	*Q*=(-3,2,0)	*R*=(1,-1,2)
25	*X*=(-5,9,-13)	*P*=(0,1,-2)	*Q*=(3,-1,1)	*R*=(4,1,0)
26	*X*=(-15,5,6)	*P*=(0,1,5)	*Q*=(3,2,-1)	*R*=(-1,1,0)
27	*X*=(8,9,4)	*P*=(1,0,1)	*Q*=(0,-2,1)	*R*=(1,3,0)
28	*X*=(23,-14,-30)	*P*=(2,1,0)	Q=(1,-1,0)	*R*=(-3,2,5)
29	*X*=(3,1,3)	*P*=(2,1,0)	*Q*=(1,0,1)	*R*=(4,2,1)
30	*X*=(-1,7,0)	*P*=(0,3,1)	*Q*=(1,-1,2)	*R*=(2,-1,0)

Задача 6. Задані координати точок *A*, *B* та *C*. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

1	A(1,-2,3), B(0,-1,2), C(3,-4,5)	16	A(3,-6,9), B(0,-3,6), C(9,-12,15)

2	A(0,-3,6), B(-12,-3,-3), C(-9,-3,-6)	17	A(0,2,-4), B(8,2,2), C(6,2,4)
3	A(3,3,-1), B(5,5,-2), C(4,1,1)	18	A(3,3,-1), B(5,1,-2), C(4,1,1)
4	A(-1,2,-3), B(3,4,-6), C(1,1,-1)	19	A(-4,3,0), B(0,1,3), C(-2,4,-2)
5	A(-4,-2,0), B(-1,-2,4), C(3,-2,1)	20	A(1,-1,0), B(-2,-1,4), C(8,-1,-1)
6	A(5,3,-1), B(5,2,0), C(6,4,-1)	21	A(7,0,2), B(7,1,3), C(8,-1,2)
7	A(-3,-7,-5), B(0,-1,-2), C(2,3,0)	22	A(2,3,2), B(-1,-3,-1), C(-3,-7,-3)
8	A(2,-4,6), B(0,-2,4), C(6,-8,10)	23	A(2,2,7), B(0,0,6), C(-2,5,7)
9	A(0,1,-2), B(3,1,2), C(4,1,1)	24	A(-1,2,-3), B(0,1,-2), C(-3,4,-5)
10	A(3,3,-1), B(1,5,-2), C(4,1,1)	25	A(0,3,-6), B(9,3,6), C(12,3,3)
11	A(2,1,-1), B(6,-1,-4), C(4,2,1)	26	A(3,3,-1), B(5,1,-2), C(4,1,-3)
12	A(-1,-2,1), B(-4,-2,5), C(-8,-2,2)	27	A(-2,1,1), B(2,3,-2), C(0,0,3)
13	A(6,2,-3), B(6,3,-2), C(7,3,-3)	28	A(1,4,-1), B(-2,4,-5), C(8,4,0)
14	A(0,0,4), B(-3,-6,1), C(-5,-10,-1)	29	A(0,1,0), B(0,2,1), C(1,2,0)
15	A(2,-8,-1), B(4,-6,0), C(-2,-5,-1)	30	A(-4,0,4), B(-1,6,7), C(1,10,9)

Задача 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах a та b.

1	$a = p + 2q, \quad b = 3p - q, \quad \lvert p\rvert = 1, \quad \lvert q\rvert = 2, \quad \angle p,q = \pi/6$
2	$a = 3p + q, \quad b = p - 2q, \quad \lvert p\rvert = 4, \quad \lvert q\rvert = 1, \quad \angle p,q = \pi/4$
3	$a = p - 3q, \quad b = p + 2q, \quad \lvert p\rvert = 1/5, \quad \lvert q\rvert = 1, \quad \angle p,q = \pi/2$
4	$a = 3p - 2q, \quad b = p + 5q, \quad \lvert p\rvert = 4, \quad \lvert q\rvert = 1/2, \quad \angle p,q = 5\pi/6$
5	$a = p - 2q, \quad b = 2p + q, \quad \lvert p\rvert = 2, \quad \lvert q\rvert = 3, \quad \angle p,q = 3\pi/4$
6	$a = p + 3q, \quad b = p - 2q, \quad \lvert p\rvert = 2, \quad \lvert q\rvert = 3, \quad \angle p,q = \pi/3$
7	$a = 2p - q, \quad b = p + 3q, \quad \lvert p\rvert = 3, \quad \lvert q\rvert = 2, \quad \angle p,q = \pi/2$
8	$a = 4p + q, \quad b = p - q, \quad \lvert p\rvert = 7, \quad \lvert q\rvert = 2, \quad \angle p,q = \pi/4$
9	$a = p - 4q, \quad b = 3p + q, \quad \lvert p\rvert = 1, \quad \lvert q\rvert = 2, \quad \angle p,q = \pi/6$
10	$a = p + 4q, \quad b = 2p - q, \quad \lvert p\rvert = 7, \quad \lvert q\rvert = 2, \quad \angle p,q = \pi/3$
11	$a = 3p + 2q, \quad b = p - q, \quad \lvert p\rvert = 10, \quad \lvert q\rvert = 1, \quad \angle p,q = \pi/2$
12	$a = 4p - q, \quad b = p + 2q, \quad \lvert p\rvert = 5, \quad \lvert q\rvert = 4, \quad \angle p,q = \pi/4$
13	$a = 2p + 3q, \quad b = p - 2q, \quad \lvert p\rvert = 6, \quad \lvert q\rvert = 7, \quad \angle p,q = \pi/3$
14	$a = 3p - q, \quad b = p + 2q, \quad \lvert p\rvert = 3, \quad \lvert q\rvert = 4, \quad \angle p,q = \pi/3$
15	$a = 2p + 3q, \quad b = p - 2q, \quad \lvert p\rvert = 2, \quad \lvert q\rvert = 3, \quad \angle p,q = \pi/4$
16	$a = 2p - 3q, \quad b = 3p + q, \quad \lvert p\rvert = 4, \quad \lvert q\rvert = 1, \quad \angle p,q = \pi/6$

17	$a=5p+q,\quad b=p-3q,\quad \lvert p\rvert=1,\quad \lvert q\rvert=2,\quad \angle p,q=\pi/3$
18	$a=7p-2q,\quad b=p+3q,\quad \lvert p\rvert=1/2,\quad \lvert q\rvert=2,\quad \angle p,q=\pi/2$
19	$a=6p-q,\quad b=p+q,\quad \lvert p\rvert=3,\quad \lvert q\rvert=4,\quad \angle p,q=\pi/4$
20	$a=10p+q,\quad b=3p-2q,\quad \lvert p\rvert=4,\quad \lvert q\rvert=1,\quad \angle p,q=\pi/6$
21	$a=6p-q,\quad b=p+2q,\quad \lvert p\rvert=8,\quad \lvert q\rvert=1/2,\quad \angle p,q=\pi/3$
22	$a=3p+4q,\quad b=-p+q,\quad \lvert p\rvert=5/2,\quad \lvert q\rvert=2,\quad \angle p,q=\pi/2$
23	$a=7p+q,\quad b=p-3q,\quad \lvert p\rvert=3,\quad \lvert q\rvert=1,\quad \angle p,q=3\pi/4$
24	$a=p+3q,\quad b=3p-q,\quad \lvert p\rvert=3,\quad \lvert q\rvert=5,\quad \angle p,q=2\pi/3$
25	$a=3p+q,\quad b=p-3q,\quad \lvert p\rvert=7,\quad \lvert q\rvert=2,\quad \angle p,q=\pi/4$
26	$a=5p-q,\quad b=p+q,\quad \lvert p\rvert=5,\quad \lvert q\rvert=3,\quad \angle p,q=5\pi/6$
27	$a=3p-4q,\quad b=p+3q,\quad \lvert p\rvert=2,\quad \lvert q\rvert=3,\quad \angle p,q=\pi/4$
28	$a=6p-q,\quad b=5p+q,\quad \lvert p\rvert=1/2,\quad \lvert q\rvert=4,\quad \angle p,q=5\pi/6$
29	$a=2p+3q,\quad b=p-2q,\quad \lvert p\rvert=2,\quad \lvert q\rvert=1,\quad \angle p,q=\pi/3$
30	$a=2p-3q,\quad b=5p+q,\quad \lvert p\rvert=2,\quad \lvert q\rvert=3,\quad \angle p,q=\pi/2$

Задача 8. Обчислити об’єм трикутної піраміди з вершинами A,B,C,D та її висоту, проведену з вершини D на грань ABC.

1	$A(1,-1,2),\quad B(2,1,2),\quad C(1,1,4),\quad D(6,-3,8)$
2	$A(-4,2,6),\quad B(2,-3,0),\quad C(-10,5,8),\quad D(-5,2,-4)$
3	$A(7,2,4),\quad B(7,-1,-2),\quad C(3,3,1),\quad D(-4,2,1)$
4	$A(2,1,4),\quad B(-1,5,-2),\quad C(-7,-3,2),\quad D(-6,-3,6)$
5	$A(-1,-5,2),\quad B(-6,0,-3),\quad C(3,6,-3),\quad D(-10,6,7)$
6	$A(0,-1,-1),\quad B(-2,3,5),\quad C(1,-5,-9),\quad D(-1,-6,3)$
7	$A(5,2,0),\quad B(2,5,0),\quad C(1,2,4),\quad D(-1,1,1)$
8	$A(2,-1,-2),\quad B(1,2,1),\quad C(5,0,-6),\quad D(-10,9,-7)$
9	$A(-2,0,-4),\quad B(-1,7,1),\quad C(4,-8,-4),\quad D(1,-4,6)$
10	$A(14,4,5),\quad B(-5,-3,2),\quad C(-2,-6,-3),\quad D(-2,2,-1)$
11	$A(1,2,0),\quad B(3,0,-3),\quad C(5,2,6),\quad D(8,4,-9)$
12	$A(2,-1,2),\quad B(1,2,-1),\quad C(3,2,1),\quad D(-4,2,5)$
13	$A(1,1,2),\quad B(-1,1,3),\quad C(2,-2,4),\quad D(-1,0,-2)$
14	$A(2,3,1),\quad B(4,1,-2),\quad C(6,3,7),\quad D(7,5,-3)$
15	$A(1,1,-1),\quad B(2,3,1),\quad C(3,2,1),\quad D(5,9,-8)$
16	$A(1,5,-7),\quad B(-3,6,3),\quad C(-2,7,3),\quad D(-4,8,-12)$

17	$A(-3,4,-7),\quad B(1,5,-4),\quad C(-5,-2,0),\quad D(2,5,4)$
18	$A(-1,2,-3),\quad B(4,-1,0),\quad C(2,1,-2),\quad D(3,4,5)$
19	$A(4,-1,3),\quad B(-2,1,0),\quad C(0,-5,1),\quad D(3,2,-6)$
20	$A(1,-1,1),\quad B(-2,0,3),\quad C(2,1,-1),\quad D(2,-2,-4)$
21	$A(1,2,0),\quad B(1,-1,2),\quad C(0,1,-1),\quad D(-3,0,1)$
22	$A(1,0,2),\quad B(1,2,-1),\quad C(2,-2,1),\quad D(2,1,0)$
23	$A(1,2,-3),\quad B(1,0,1),\quad C(-2,-1,6),\quad D(0,-5,-4)$
24	$A(3,10,-1),\quad B(-2,3,-5),\quad C(-6,0,-3),\quad D(1,-1,2)$
25	$A(-1,2,4),\quad B(-1,-2,-4),\quad C(3,0,-1),\quad D(7,-3,1)$
26	$A(0,-3,1),\quad B(-4,1,2),\quad C(2,-1,5),\quad D(3,1,-4)$
27	$A(1,3,0),\quad B(4,-1,2),\quad C(3,0,1),\quad D(-4,3,5)$
28	$A(-2,-1,-1),\quad B(0,3,2),\quad C(3,1,-4),\quad D(-4,7,3)$
29	$A(-3,-5,6),\quad B(2,1,-4),\quad C(0,-3,-1),\quad D(-5,2,-8)$
30	$A(2,-4,-3),\quad B(5,-6,0),\quad C(-1,3,-3),\quad D(-10,-8,7)$

Задача 9. Задані координати точок *A* і *B*. Скласти рівняння прямої *AB* та рівняння перпендикулярної до *AB* прямої, що проходить через середину відрізку *AB*.

1	*A*(-4,1)	*B*(12,13)	11	*A*(-3,2)	*B*(9,2)	21	*A*(-6,8)	*B*(18,4)
2	*A*(-4,1)	*B*(8,17)	12	*A*(-3,2)	*B*(13,10)	22	*A*(-7,5)	*B*(25,13)
3	*A*(-4,2)	*B*(12,14)	13	*A*(-12,3)	*B*(42,9)	23	*A*(-5,4)	*B*(23,20)
4	*A*(-4,2)	*B*(8,18)	14	*A*(-1,4)	*B*(11,0)	24	*A*(-2,4)	*B*(18,24)
5	*A*(-4,4)	*B*(12,16)	15	*A*(-1,4)	*B*(15,4)	25	*A*(-9,8)	*B*(33,16)
6	*A*(-4,4)	*B*(8,20)	16	*A*(-8,4)	*B*(16,22)	26	*A*(-5,4)	*B*(35,36)
7	*A*(-6,3)	*B*(10,15)	17	*A*(-7,3)	*B*(25,3)	27	*A*(-6,8)	*B*(18,32)
8	*A*(-8,4)	*B*(4,20)	18	*A*(-1,4)	*B*(11,4)	28	*A*(-8,7)	*B*(28,21)
9	*A*(-6,6)	*B*(10,18)	19	*A*(-5,2)	*B*(27,14)	29	*A*(-3,8)	*B*(21,4)
10	*A*(-8,8)	*B*(4,24)	20	*A*(-7,4)	*B*(37,12)	30	*A*(-7,9)	*B*(17,3)

Задача 10. Задані координати точок *A*,*B*,*C*,*D*. Скласти рівняння площини *ABC* і знайти відстань від точки *D* до цієї площини. Знайти точку *D'* симетричну точці *D* відносно площини *ABC*.

1	*A*(1,3,6)	*B*(2,2,1)	*C*(-1,0,1)	*D*(-4,6,-3)
2	*A*(-2,2,8)	*B*(2,4,6)	*C*(-1,5,8)	*D*(3,-3,-2)
3	*A*(7,2,-4)	*B*(7,-1,2)	*C*(6,3,-7)	*D*(3,-8,-6)
4	*A*(2,1,4)	*B*(-1,5,-2)	*C*(-7,-3,2)	*D*(-3,3,6)
5	*A*(-1,-5,2)	*B*(-6,0,-3)	*C*(3,6,-3)	*D*(-10,6,7)
6	*A*(0,-1,-1)	*B*(3,-2,3)	*C*(0,2,-7)	*D*(-30,10,6)
7	*A*(5,2,0)	*B*(2,5,0)	*C*(1,2,4)	*D*(-1,1,1)
8	*A*(2,-1,-2)	*B*(1,2,1)	*C*(5,0,-6)	*D*(-10,9,-7)

9	A(-2,0,-4)	B(-1,7,1)	C(4,-8,-4)	D(1,-4,6)
10	A(1,3,0)	B(4,-1,2)	C(3,0,1)	D(4,3,0)
11	A(-2,3,-5)	B(4,0,-3)	C(-3,4,-6)	D(1,1,1)
12	A(2,-1,2)	B(1,2,-1)	C(3,2,1)	D(-4,2,5)
13	A(1,1,2)	B(-1,1,3)	C(2,-2,4)	D(-1,0,-2)
14	A(2,3,1)	B(4,1,-2)	C(6,3,7)	D(7,5,-3)
15	A(1,1,-1)	B(2,3,1)	C(3,2,1)	D(5,12,-8)
16	A(1,5,-7)	B(-3,6,3)	C(-2,7,3)	D(-4,8,-12)
17	A(-4,2,6)	B(2,-3,0)	C(-10,5,8)	D(-9,-5,5)
18	A(-1,2,-3)	B(4,-1,0)	C(2,1,-2)	D(3,4,5)
19	A(4,-1,3)	B(-2,1,0)	C(0,-5,1)	D(3,2,-6)
20	A(2,-3,1)	B(4,-1,5)	C(7,2,-1)	D(1,2,3)
21	A(1,2,0)	B(1,-1,2)	C(0,1,-1)	D(-3,0,1)
22	A(1,0,2)	B(1,2,-1)	C(2,-2,1)	D(2,1,0)
23	A(1,2,-3)	B(1,0,1)	C(-2,-1,6)	D(-2,-5,-4)
24	A(3,10,-1)	B(-2,3,-5)	C(-6,0,-3)	D(1,-1,2)
25	A(-1,2,4)	B(-1,-2,-4)	C(-3,0,-1)	D(0,6,2)
26	A(0,-3,1)	B(-4,1,2)	C(2,-1,5)	D(3,1,-4)
27	A(1,3,0)	B(4,-1,2)	C(3,0,1)	D(-4,3,5)
28	A(-2,-1,-1)	B(0,3,-40)	C(4,1,-4)	D(8,9,19)
29	A(-3,-5,6)	B(3,1,-4)	C(0,-3,0)	D(-7,20,-13)
30	A(2,-4,-3)	B(5,-6,0)	C(-1,3,-3)	D(-10,-8,11)

Задача 11. Задані рівняння двох площин P_1 і P_2. Знайти кут між площинами. Скласти канонічне рівняння їх лінії перетину.

№	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$
1	$4x+y+z+2=0$	$2x-y-3z-8=0$
2	$2x-3y+z+6=0$	$x-3y-2z+3=0$
3	$6x-5y-4z+8=0$	$6x+5y+3z+4=0$
4	$6x-7y-4z-2=0$	$x+7y-z-5=0$
5	$4x+y-3z+2=0$	$2x-y+z-8=0$
6	$5x+y-3z+4=0$	$x-y+2z+2=0$
7	$x+5y+2z+11=0$	$x-y-z-1=0$
8	$2x+3y+z+6=0$	$x-3y-2z+3=0$
9	$x-2y+z-4=0$	$2x+2y-z-8=0$
10	$2x+y+z-2=0$	$2x-y-3z+6=0$
11	$2x-3y-2z+6=0$	$x-3y+z+3=0$
12	$6x-5y+3z+8=0$	$6x+5y-4z+4=0$
13	$3x+3y+z-1=0$	$2x-3y-2z+6=0$

14	$3x+4y+3z+1=0$	$2x-4y-2z+4=0$
15	$2x+3y-2z+6=0$	$x-3y+z+3=0$
16	$x-3y+z+2=0$	$x+3y+2z+14=0$
17	$x+5y+2z-5=0$	$2x-5y-z+5=0$
18	$6x-7y-z-2=0$	$x+7y-4z-5=0$
19	$x-y+z-2=0$	$x-2y-z+4=0$
20	$x+5y-z+11=0$	$x-y+2z-1=0$
21	$x+y-2z-2=0$	$x-y+z+2=0$
22	$x-3y+2z+2=0$	$x+3y+z+14=0$
23	$x+y+z-2=0$	$x-y-2z+2=0$
24	$3x+y-z-6=0$	$3x-y+2z+8=0$
25	$3x+4y-2z+1=0$	$2x-4y+3z+4=0$
26	$x-y-z-2=0$	$x-2y+z+4=0$
27	$3x+3y-2z-1=0$	$2x-3y+z+6=0$
28	$8x-y-3z-1=0$	$x+y+z+10=0$
29	$x+5y-z-5=0$	$2x-5y+2z+5=0$
30	$5x+y+2z+4=0$	$x-y-3z+2=0$

Задача 12. Лінія задана рівнянням у полярній системі координат. Визначити рівняння кривої у прямокутній декартовій системі координат, в якої початок координат збігається з полюсом, а невід'ємна піввісь абсцис – з полярною віссю. Звести це рівняння до канонічного вигляду і визначити тип кривої.

1	$r=\dfrac{2}{5+4\cos\varphi}$	11	$r=\dfrac{3}{5-4\cos\varphi}$	21	$r=\dfrac{1}{5-3\cos\varphi}$
2	$r=\dfrac{1}{3-2\cos\varphi}$	12	$r=\dfrac{4}{3+2\cos\varphi}$	22	$r=\dfrac{4}{7-5\cos\varphi}$
3	$r=\dfrac{4}{4-3\cos\varphi}$	13	$r=\dfrac{1}{4+3\cos\varphi}$	23	$r=\dfrac{6}{7+5\cos\varphi}$
4	$r=\dfrac{5}{5-4\cos\varphi}$	14	$r=\dfrac{2}{5+3\cos\varphi}$	24	$r=\dfrac{1}{6+2\cos\varphi}$
5	$r=\dfrac{1}{3+\cos\varphi}$	15	$r=\dfrac{2}{6+4\cos\varphi}$	25	$r=\dfrac{4}{5+2\cos\varphi}$
6	$r=\dfrac{7}{3-\cos\varphi}$	16	$r=\dfrac{3}{6-4\cos\varphi}$	26	$r=\dfrac{6}{7+3\cos\varphi}$
7	$r=\dfrac{8}{4+2\cos\varphi}$	17	$r=\dfrac{7}{4-2\cos\varphi}$	27	$r=\dfrac{1}{5+\cos\varphi}$

8	$r=\frac{1}{2-\cos\varphi}$	18	$r=\frac{5}{2+\cos\varphi}$	28	$r=\frac{3}{5-2\cos\varphi}$
9	$r=\frac{3}{7-4\cos\varphi}$	19	$r=\frac{5}{7+4\cos\varphi}$	29	$r=\frac{4}{7-3\cos\varphi}$
10	$r=\frac{2}{4+\cos\varphi}$	20	$r=\frac{3}{4-\cos\varphi}$	30	$r=\frac{2}{6-2\cos\varphi}$

Зразок розв'язання задач

Задача 1. Виконати зазначені дії. Відповідь уявити в алгебраїчній формі $\dfrac{(1+i^{47})(2-i)}{(3+i)^2}$.

Рішення

Обчислимо спочатку $i^{47}=i\cdot(i^2)^{23}=i(-1)^{23}=-i$. Тоді маємо: $\dfrac{(1+i^{47})(2-i)}{(3+i)^2}=\dfrac{(1-i)(2-i)}{9+6i-1}=\dfrac{1-3i}{2(4+3i)}\cdot\dfrac{4-3i}{4-3i}=\dfrac{-5-15i}{2(16+9)}=\dfrac{-1-5i}{10}$.

Задача 2. Виконати дії. Представити результат у показниковій та алгебраїчній формі.

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{46}\overline{(1-i\sqrt{3})}}{(-2-2i)^{28}}.$$

Рішення

Обчислимо модулі та аргументи комплексних чисел $z_1=\sqrt{3}+i,\quad |z_1|=\sqrt{3+1}=2,\quad \arg z_1=\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})=\pi/6$,

$$z_2=\overline{1-i\sqrt{3}}=1+i\sqrt{3},\quad |z_2|=\sqrt{1+3}=2,\quad \arg z_2=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi/3,$$

$$z_3=-2-2i,\quad |z_3|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2},$$

$$\arg z_3=\operatorname{arctg}1-\pi=\pi/4-\pi=-3\pi/4.$$

Запишемо всі числа в показниковій формі: $z_1=2e^{i\pi/6}, z_2=2e^{i\pi/3}, z_3=2\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$.

Подальші дії виконуємо в показниковій формі. Для переходу до алгебраїчної формі скористаємося формулою Ейлера:

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{46}\overline{(1-i\sqrt{3})}}{(-2-2i)^{28}}=\frac{\left(2e^{i\pi/6}\right)^{46}2e^{i\pi/3}}{\left(2\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}\right)^{28}}=\frac{2^{47}e^{i8\pi}}{2^{42}e^{-i21\pi}}=2^5e^{i29\pi}=$$

$$=32e^{i(28\pi+\pi)}=32e^{i\pi}=32(\cos\pi+i\sin\pi)=-32.$$

Задача 3. обчислити значення $\sqrt[4]{-1}$ і побудувати їх на площині комплексної змінної.

Рішення

Обчислимо модуль і аргумент комплексного числа $z=-1$:

$$r=|-1|=1,\quad \varphi=\arg(-1)=\pi.$$

Скористаємося формулою для обчислення кореня з комплексного числа

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Отримаємо $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\quad k=0,1,2,3.$

Знайдемо чотири значення кореня:

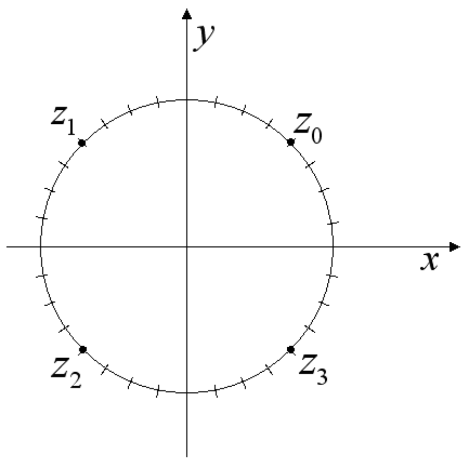
$$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},$$

$$z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4},$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4},$$

$$z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Всі значення $\sqrt[4]{-1}$ лежать на одиничному колі з центром в нульовій точці і ділять її на чотири рівні частини.



Задача 4. Побудувати на площині комплексної змінної множину точок, що задовольняють умові $\mathrm{Re}\frac{1}{\overline{z}}\geq\frac{1}{2}$.

Рішення

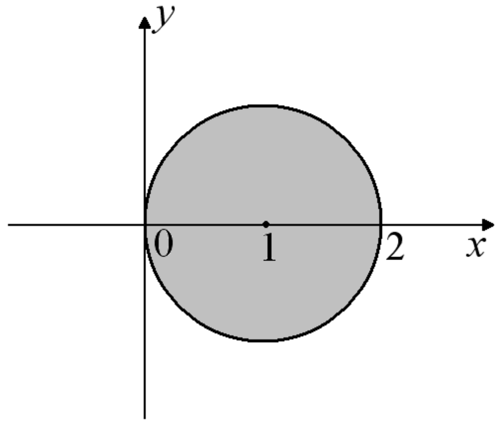
Для отримання даної умови в декартових координатах підставимо $z=x+i\,y$ в ліву частину нерівності. Отримаємо:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\overline{x+i\,y}}=\mathrm{Re}\frac{1}{x-i\,y}=\mathrm{Re}\frac{x+i\,y}{(x-i\,y)(x+i\,y)}=\mathrm{Re}\frac{x+i\,y}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Задана умова приймає вид

$$\frac{x}{x^2+y^2}\geq\frac{1}{2}\text{ або }2x\geq x^2+y^2.$$

Виділяючи повний квадрат по зміною x, отримаємо: $(x-1)^2+y^2\le 1$. Шукана множина являє собою одиничне коло з центром в точці (1,0). Побудуємо його на малюнку.



Задача 5. Написати розкладання вектора $\vec{X}=(15;-20;-1)$ по векторах $\vec{P}=(0;2;1)$, $\vec{Q}=(0;1;-1)$ та $\vec{R}=(5;-3;2)$.

Рішення

Вектор $\vec{X}$ допускає розкладання по векторах $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$, якщо ці вектори лінійно незалежні, тобто якщо їхній мішаний добуток не дорівнює нулю:

$$\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)\cdot\vec{R}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix}=0-10-0-5-0-0=-15\neq 0.$$

Розкласти вектор $\vec{X}$ по векторах $\vec{P}$, $\vec{Q}$ та $\vec{R}$ – це значить представити його у вигляді лінійної комбінації цих векторів, тобто $\vec{X}=\alpha\vec{P}+\beta\vec{Q}+\gamma\vec{R}$, де α, β та γ – коефіцієнти розкладання. У нашому випадку будемо мати рівняння:

$$(15;-20;-1)=\alpha(0;2;1)+\beta(0;1;-1)+\gamma(5;-3;2).$$

Два вектори, що задані своїми координатами , рівні тоді і лише тоді, коли дорівнюють їхні однойменні координати. Зрівнявши відповідні координати, одержимо систему:

$$\begin{cases}0\cdot\alpha+0\cdot\beta+5\gamma=15;\\ 2\alpha+\beta-3\gamma=-20;\\ \alpha-\beta+2\gamma=-1.\end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо $\gamma=3$ і підставляємо в друге та третє:

$$\begin{cases}\gamma=3;\\ 2\alpha+\beta=-11;\\ \alpha-\beta=-7.\end{cases}$$

Додаючи друге та третє рівняння, одержимо $3\alpha = -18$, звідки $\alpha = -6$. З третього рівняння виразимо $\beta = \alpha + 7$, отже $\beta = 1$.

Таким чином, розкладання вектора $\vec{X}$ по векторах $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ має вигляд:

$$\vec{X} = -6\vec{P} + \vec{Q} + 3\vec{R}.$$

Задача 6. Задані координати точок $A(-2,4,-6), B(0,2,-4), C(-6,8,-10)$. Знайти кут між векторами AB та AC.

Розв'язання

Обчислимо координати векторів $AB(2,-2,2)$ та $AC(-4,4,4)$ та їхні довжини

$$|AB| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$|AC| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Знайдемо скалярний добуток:

$$AB \cdot AC = 2 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = -8.$$

Обчислимо значення косинуса кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{-8}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}.$$

Задача 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $a = p + 2q$ та $b = 3p - q$, якщо $|p| = 1, |q| = 2, \angle p, q = \pi/6$.

Розв'язання

Користуючись властивостями векторного добутку, обчислимо площу паралелограму як модуль векторного добутку векторів a та b:

$$S = |a \times b| = |(p + 2q) \times (3p - q)| = |3p \times p - p \times q + 6q \times p - 2q \times q| =$$

$$= |-p \times q - 6p \times q| = |-8p \times q| = 8|p||q|\sin p, q = 8 \cdot 1 \cdot 2\sin(\pi/6) = 8.$$

Задача 8. Обчислити об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(1,3,6)$, $B(2,2,1)$, $C(-1,0,1)$, та її висоту, проведену з вершини $D(-4,6,-3)$ на грань ABC.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів $AB(1,-1,-5)$, $AC(-2,-3,-5)$ і $AD(-5,3,-9)$ та їх мішаний добуток:

$$(AB \times AC)AD = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 27 - 25 + 30 + 75 + 15 + 18 = 140.$$

Об'єм трикутної піраміди $ABCD$ обчислимо за формулою

$$V = \frac{1}{6}|(AB \times AC)AD| = \frac{140}{6} = \frac{70}{3}.$$

Знайдемо векторний добуток векторів, які визначають основу піраміди:

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -10i + 15j - 5k .$$

Обчислимо площу трикутника ABC як половину площі паралелограма, побудованого на векторах AB та AC:

$$S = |AB \times AC| = \sqrt{(-10)^2 + 15^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{4+9+1} = 5\sqrt{14} .$$

Довжину висоти піраміди знайдемо з відомої формули її об'єму

$V = \dfrac{1}{3} SH$, звідки

$$H = |AD| = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot (70/3)}{5\sqrt{14}} = \sqrt{14} .$$

Задача 9. Задані точки *A*(-8,4) і *B*(16,22). Скласти рівняння прямої *AB* та рівняння перпендикулярної до *AB* прямої, що проходить через середину відрізку *AB*.

Розв'язання

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

За умовою задачі одержимо

$$\frac{y-4}{22-4} = \frac{x-(-8)}{16-(-8)} \Rightarrow \frac{y-4}{18} = \frac{x+8}{24} \Rightarrow \frac{y-4}{3} = \frac{x+8}{4}.$$

Напрямний вектор цієї прямої $q(3,4)$.

Координати точки $P(x; y)$, що лежить у середині відрізка AB між точками $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, обчислимо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Підставимо у формулу значення координат точок *A* і *B*. Тоді:

$$x = \frac{-8+16}{2} = 4, \quad y = \frac{4+22}{2} = 13, \quad P(4;13).$$

Вектор $q(3,4)$ є нормальним вектором прямої перпендикулярної до прямої *AB*. Отже, рівняння цієї прямої має вигляд

$$3(x-4) + 4(y-13) = 0$$

або $3x + 4y - 62 = 0$.

Задача 10. Задані координати точок $A(3;3;1)$, $B(4;0;-1)$, $C(5;1;-1)$, $D(2;-1;1)$. Скласти рівняння площини *ABC* і знайти відстань від точки *D* до цієї площини. Знайти точку *D'* симетричну точці *D* відносно площини *ABC*.

Розв’язання

Нехай $M(x;y;z)$ –довільна точка площини *ABC*. Тоді вектори $\overrightarrow{AM}(x-3;y-3;z-1)$, $\overrightarrow{AB}(1;-3;-2)$ та $\overrightarrow{AC}(2;-2;-2)$ компланарні, тому

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо цей визначник:

$$6(x-3)-4(y-3)-2(z-1)+6(z-1)-4(x-3)+2(y-3)=0.$$

Розкриємо дужки, приведемо подібні доданки та скоротимо на 2. Одержимо рівняння площини *ABC*:

$$x-y+2z-2=0.$$

Помножимо загальне рівняння площини на нормувальний множник

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

одержимо нормальне рівняння площини *ABC*:

$$\frac{x}{\sqrt{6}}-\frac{y}{\sqrt{6}}+\frac{2z}{\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{6}}=0.$$

Нормувальний множник λ беремо із знаком “+”, бо вільний член рівняння площини від'ємний.

Відстань від точки *D* до площини *ABC* знайдемо, підставивши координати точки *D* у ліву частину нормального рівняння площини і взявши модуль отриманого результату:

$$d=\left|\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{6}}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Для визначення координат точки *D'*, що симетрична точці *D* відносно площини *ABC*, складемо рівняння прямої, що проходить через точку $D(2;-1;1)$ перпендикулярно цій площині. За напрямний вектор прямої візьмемо нормальний вектор площини *ABC*: $\vec{n}=(1;-1;2)$. Отже, рівняння прямої

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}.$$

Обчислимо координати точки K перетину цієї прямої з площиною *ABC*. Параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x=t+2; \\ y=-t-1; \\ z=2t+1. \end{cases}$$

Для визначення t в точці перетину прямої та площини, підставимо x, y та z з параметричних рівнянь у рівняння площини:

$$t+2+t+1+4t+2-2=0 \quad \Rightarrow 6t+3=0 \quad \Rightarrow t=-0,5.$$

Підставивши $t=-0,5$ у параметричні рівняння прямої, одержимо координати точки K перетину прямої та площини:

$$\begin{cases} x_K=-0,5+2=1,5; \\ y_K=0,5-1=-0,5; \\ z_K=-1+1=0. \end{cases}$$

Точка K поділяє відрізок DD' навпіл, тому

$$\frac{x_D+x_{D'}}{2}=x_K;\frac{y_D+y_{D'}}{2}=y_K;\frac{z_D+z_{D'}}{2}=z_K.$$

З останніх трьох рівнянь одержимо

$$\begin{cases} x_{D'}=2x_K-x_D; \\ y_{D'}=2y_K-y_D; \\ z_{D'}=2z_K-z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{D'}=2\cdot 1,5-2=1; \\ y_{D'}=2\cdot(-0,5)+1=0; \\ z_{D'}=2\cdot 0-1=-1. \end{cases}$$

Таким чином, $D'=(1;0;-1)$.

Задача 11. Задані рівняння двох площин P_1: $2x+y-3z-2=0$ та P_2: $2x-y+z+6=0$. Знайти кут між площинами. Скласти канонічне рівняння їх лінії перетину.

Розв'язання

В умові задачі задані загальні рівняння площин, отже відомі координати нормальних векторів цих площин $\vec{n}_1(2;1;-3)$ та $\vec{n}_2(2;-1;1)$. Кут між площинами знайдемо як кут між їх нормальними векторами:

$$\cos\vec{n}_1,\vec{n}_2=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{2\cdot 2+1\cdot(-1)-3\cdot 1}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{4+1+1}}=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=0$$

Отже, площини P_1 та P_2 перпендикулярні.

Напрямним вектором прямої перетину цих площин є векторний добуток нормальних векторів

$$\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}.$$

Для визначення координат будь-якої точки шуканої прямої візьмемо, наприклад, $z=0$ та розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x+y-2=0; \\ 2x-y+6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4=0; \\ 2y-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1; \\ y=4. \end{cases}$$

Таким чином, обрано точку $M(-1;4;0)$. Канонічне рівняння лінії перетину площин

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{-8}=\frac{z}{-4} \quad \Rightarrow \frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z}{2}.$$

Задача 12. Лінія задана рівнянням у полярній системі координат $r=\dfrac{3}{8-4\cos\varphi}$. Визначити рівняння кривої у прямокутній декартовій системі координат, в якої початок координат збігається з полюсом, а невід'ємна піввісь абсцис – з полярною віссю. Звести це рівняння до канонічного вигляду і визначити тип кривої.

Розв'язання

Для визначення рівняння даної кривої у прямокутній декартовій системі координат підставимо у рівняння кривої у полярних координатах, замість змінних r та φ, їхні значення у декартових координатах

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}; \\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}.$$

Маємо

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(8-4\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=3 \text{ або } 8\sqrt{x^2+y^2}=3+4x.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата та зведемо подібні доданки:

$$48x^2-24x+64y^2-9=0$$

Для зведення одержаного рівняння до канонічного вигляду виділимо повний квадрат по змінній x:

$$48\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+64y^2=12.$$

Розділивши обидві частини рівняння на 12, одержимо канонічне рівняння еліпса з центром у точці $(1/4;0)$ та півосями $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$:

$$\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{3}{16}}=1.$$