МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра загальної та медичної фізики

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
# З КУРСІВ «ФИЗИКА» та «ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА»

(АВТОРИЗОВАНИЙ ПЕРЕКЛАД РОСІЙСЬКОЮ)

Для студентів:

1. Інститут промислових технологій, дизайну та менеджменту, **напрям підготовки:**
   **1) 6.050101**– «Комп'ютерні науки»;
   **2) 6.051001**– «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології»;
   **3) 6.051002** – «Метрологія, стандартизація та сертифікація»;
   **4) 6.050402**– «Ливарне виробництво»;
   **5) 6.050502**– «Інженерна механіка»;
   **6) 6.050504** – «Зварювання».
2. Інститут радіоелектроніки і телекомунікацій, **напрям підготовки:**
   **1) 6.050901–«**Радіотехніка**»**;
   **2) 6.050902**–«Радіоелектронні апарати»;
   **3) 6.050101** – «Комп'ютерні науки»;
   **4) 6.050802** – «Електронні пристрої та системи».
3. Факультет інформаційної безпеки, **напрям підготовки:**
   **6.170102** – «Системи технічного захисту інформації».
4. Хіміко-технологічний факультет, **напрям підготовки:**
   **1) 6.051301** – «Хімічна технологія»;
   **2) 6.040106** – «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування»;
   **3) 6.120201**– «Технологія фармацевтичних препаратів».

Одеса - ОНПУ
2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра загальної та медичної фізики

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
# З КУРСІВ «ФИЗИКА» та «ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА»

(АВТОРИЗОВАНИЙ ПЕРЕКЛАД РОСІЙСЬКОЮ)

Для студентів:

1. Інститут промислових технологій, дизайну та менеджменту, **напрям підготовки:**
   **1) 6.050101**– «Комп'ютерні науки»;
   **2) 6.051001**– «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології»;
   **3) 6.051002** – «Метрологія, стандартизація та сертифікація»;
   **4) 6.050402**– «Ливарне виробництво»;
   **5) 6.050502**– «Інженерна механіка»;
   **6) 6.050504** – «Зварювання».
2. Інститут радіоелектроніки і телекомунікацій, **напрям підготовки:**
   **1) 6.050901**–«Радіотехніка»;
   **2) 6.050902**–«Радіоелектронні апарати»;
   **3) 6.050101** – «Комп'ютерні науки»;
   **4) 6.050802** – «Електронні пристрої та системи».
3. Факультет інформаційної безпеки, **напрям підготовки:**
   **6.170102** – «Системи технічного захисту інформації».
4. Хіміко-технологічний факультет, **напрям підготовки:**
   **1) 6.051301** – «Хімічна технологія»;
   **2) 6.040106** – «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування»;
   **3) 6.120201**– «Технологія фармацевтичних препаратів».

Конспект лекцій розглянут та затверджен
на засіданні кафедри ЗМФ ІМФ,
протокол № 3 від 19 вересня 2014 р.

Одеса - ОНПУ
2014

Конспект лекцій з курсів «Фізика» та «Загальна фізика», (авторизований переклад російською), для студентів інституту промислових технологій, дизайну та менеджменту, напрям підготовки: 6.050101-«Комп'ютерні науки», 6.051001-«Метрологія та інформаційно-вимірю-вальні технології», 6.051002-«Метрологія, стандартизація та сертифікація», 6.050402-«Ливарне виробництво», 6.050502-«Інженерна механіка», 6.050504-«Зварювання»; інституту радіоелектроніки і телекомунікацій, напрям підготовки: 6.050901–«Радіотехніка», 6.050902–«Радіоелектронні апарати», 6.050101–«Комп'ю-терні науки», 6.05080–«Електронні пристрої та системи»; факультет інформаційної безпеки, напрям підготовки: 6.170102–«Системи технічного захисту інформації»; хіміко-технологічний факультет, напрям підготовки: 6.051301–«Хімічна технологія», 6.040106–«Екологія,охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», 6.120201–«Технологія фармацевтичних препаратів» **// Раздел I: "Механіка" / Укладачі: Дудзінський Ю.М.; Манічева Н.В. - Одесса: ОНПУ, 2014. - 48 с.**

Укладачи: Дудзінський Ю.М.,
проф., доктор ф.-м. наук.

Манічева Н.В.,
старший вик.

Конспект лекцій відповідає програмам навчальних планів підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр. Самостійна робота з посібником допоможе отриманню студентами базових знань з курсів фізика та загальна фізика. Сприяє вивченню студентами основних фізичних явищ та ідей; опануванням фундаментальних понять, законів та теорій сучасної та класичної фізики; знань, що є фундаментальними і сприяють засвоєнню курсів загально-технічних та спеціальних дисциплін, які дозволяють орієнтуватися в потоці наукової і науково-технічної інформації, характерному для сучасної епохи. Стиль викладу матеріалу сприяє ефективному засвоєнню студентами курсів, формування у студентів наукового світогляду, що необхідно для вирішення виробничо-технічних, проектних, конструкторських та дослідних задач.

# Частина 1: «Механіка»

## СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ
## материя, масса, энергия, пространство, время

**Наука** – это сфера человеческой деятельности, направленная на выработку и систематизацию объективных знаний о окружающей действительности.

Науки бывают:

- естественные - физика, химия, биология, медицина и др.;
- общественные - философия, история, политэкономия, юриспруденция, искусствоведение и др.;
- о мышлении - психология, медицинская психиатрия, социология и др.

Основная **цель** науки – познание объективных закономерностей и поиски путей для их использования в человеческой деятельности. Науки оперируют понятиями. **Понятие** – это форма человеческого мышления, в которой реальные предметы и явления выступают в их основных чертах и соотношениях.

**Естественные науки** изучают различные процессы и явления, которые происходят в окружающем нас мире. Фундаментальным для всех естественных наук является понятие материи. ***Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана нам в ощущение, которая копируется, фотографируется, отражается этими ощущениями в сознании субъекта (человека) и существует независимо от него.*** В этом классическом определении материи

1. Подчеркивается объективный характер материи, т. к. она существует независимо от ощущений субъекта.

2. Подчеркивается принципиальная познаваемость мира.

3. Материи, как таковой не существует. Это лишь философская категория, которую нельзя отождествлять с конкретным материальным объектом. Например, не существует металла, как такового, а существуют железо, медь, алюминий и др. Хотя эти химические элементы обладают общими свойствами, например, электропроводностью.

Основным свойством материи является ее **движение**. Под движением в общем смысле понимают любое изменение материи, превращение ее из одной формы в другую. Движение включает и простейшее механическое перемещение, и мышление – самую сложную из известных форм движения. Материя не может существовать без движения, так же, как не может быть «чистого» движения без материи. Поэтому говорят, что движение есть основная форма существования материи. Еще правильнее сказать, что во Вселенной существует единственный объект – движущаяся материя.

**Физика** изучает простейшие, однако, наиболее общие **формы движения материи**:

1. **Механическое движение** и связанное с ним проявление гравитации.
2. **Тепловое движение**, обусловленное межмолекулярным взаимодействием.
3. **Электрические и электромагнитные** явления.
4. **Внутриатомные** процессы.

Поскольку эти формы движения всеобщи, они сопровождают все процессы в окружающем мире. Поэтому физика является базовой дисциплиной и ее основные положения и законы широко применяются в других науках: технических, химических, биологических.

Основные **понятия**, которыми оперирует физика, являются результатом философского обобщения данных науки.

### <u>Пространство и время</u>

С одной стороны, окружающий нас материальный мир выступает в форме сосуществования, взаимного расположения материальных объектов, обладающих некоторой протяженностью (в **пространстве**). С другой стороны, эти объекты существуют в форме **длительности**, смены различных качественных состояний материи (во **времени**).

Следовательно, материя не может существовать вне пространства и времени, т. е. пространство и время – основные формы существования материи. С другой стороны, свойства пространства и времени должны существенно зависеть от свойств материи, от явлений и процессов, которые в них протекают.

**Энергия**

Формы движения материи разнообразны. При этом движение может переходить из одной формы в другую. ***Количественная мера движения, которая не зависит от того, в какой форме движение выступает, называется энергией.*** Следовательно, энергия – это единая мера любой формы движения и только в каждом конкретном случае она переходит в механическую, тепловую, электрическую, химическую, биологическую, или иную форму движения.

**Масса**

Подобно тому, как энергия есть количественная мера движения, не зависящая от его формы, ***масса есть количественная мера самой материи – носителя движения, не зависимо от того, в какой форме материя выступает.***

Массу можно определить по любому физическому свойству объекта, которое связано с его количественной определенностью: по инерции, по гравитации, по теплоемкости и др.

Согласно современным представлениям материя может существовать в двух основных формах: **вещество** и **поле**.

1. **Вещество** состоит из элементарных частиц, которые обладают так называемой ***массой покоя*** (протон, электрон, нейтрон).
2. Существуют частицы, не обладающие массой покоя (фотоны, нейтрино, мезоны). Такие частицы могут существовать только в движении. Для них в квантовой механике вводится понятие ***релятивистской массы*** (полевая масса или масса движения).

**Примечание 1:** термины «масса покоя» и «релятивистская масса» так же условны, как и различные названия видов энергии. В обоих случаях речь идет об одной и той же количественной характеристике материи, но в двух различных формах: в форме вещества и в форме поля. Действительно, частицы, обладая массой покоя и зарядом, не могут не создавать в пространстве сопутствующих полей. С другой стороны, поля могут отрываться от породивших их частиц, создавая излучение.

**Примечание 2:** из определения массы следует, что материя не может превращаться в энергию, т. к. мера количества материи не может превращаться в меру ее движения. Материя и ее движение – неуничтожимы.

**Закон сохранения материи (сохранения энергии):**

**«В замкнутой системе количество материи постоянно. Полная энергия замкнутой системы – постоянна».**

# Раздел 1. МЕХАНИКА

## Основы классической механики

**Механика** изучает простейшую механическую форму движения материи, т. е. движение тел или их составных частей относительно друг друга.

**Статика** изучает законы равновесия системы тел.

**Кинематика** изучает законы движения тел без учета причин, которые эти движения вызывают.

**Динамика** изучает законы движения с учетом взаимодействия тел, в результате которого возникает изменение в состоянии их движения.

**Классическая механика** с большой степенью точности описывает движение макротел (размеры которых во много раз больше размеров молекул), которые перемещаются со скоростями, значительно меньшими скорости света. Если тела движутся со скоростями соизмеримыми со скоростью света, то вместо классической механики следует воспользоваться ***квантовой механикой*** и ***теорией относительности***. В классической механике используются следующие основные категории: абсолютное пространство, абсолютное время, система отсчета.

**Абсолютное пространство** – это вместилище материальных объектов, абсолютно пустое, неподвижное и однородное по своим свойствам. Его свойства никак не связаны со свойствами материи.

**Абсолютное время** – это чистая длительность, которая протекает в одном направлении, с постоянной скоростью, не зависимо от материальных процессов и явлений.

**Системой отсчета** называется совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета или системой тел.

## 1.1. Скалярные и векторные величины, способы их задания. Сумма векторов. Скалярное и векторное произведение векторов.

Любая **физическая величина** имеет численное выражение с размерностью и получена в результате сравнения с единицей измерения – эталоном. При этом физическая величина может быть скалярной  или векторной. **Скалярная** величина характеризуется только численным значением (масса, энергия, сила тока и т. д.), а **векторная** также характеризуется направлением в пространстве (перемещение, сила, момент импульса и т. д.).

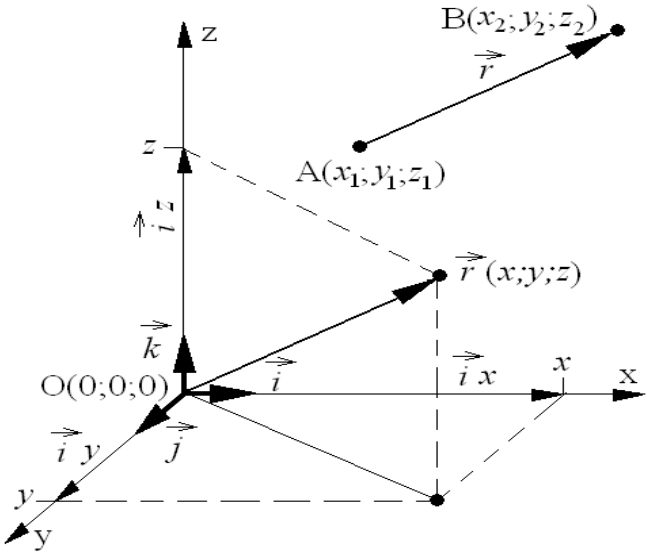



Рис. 1.1

Рассмотрим прямоугольную (декартову) систему координат (рис. 1.1). Направление координатных осей $x, y, z$ задают, соответствующие **орты** – единичной длины вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Как видно на рис. 1.1, в общем случае любой вектор можно задать шестью параметрами – координатами его начальной $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и конечной $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ точек. При этом принято путем плоскопараллельного переноса располагать все вектора таким образом, чтобы их начальные точки совпадали с началом координат – точкой $\mathrm{O}(0,0,0)$. Тогда для задания вектора достаточно лишь три параметра координаты его конца и нет необходимости в индексах: $\vec{r}(x, y, z)$. При этом вектор можно задать в виде суммы трех векторов:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\,. \tag{1.1}$$

В соответствии с трехмерной теоремой Пифагора величина вектора (его длина) составляет:

$$\left|\vec{r}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.2}$$

Сумма и разность векторов заданных в декартовой системе координат, соответственно, составляют

$$\begin{cases} \vec{r_1}+\vec{r_2}=\vec{i}\left(x_1+x_2\right)+\vec{j}\left(y_1+y_2\right)+\vec{k}\left(z_1+z_2\right); \\ \left|\vec{r_1}+\vec{r_2}\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2+\left(y_1+y_2\right)^2+\left(z_1+z_2\right)^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r_1}-\vec{r_2}=\vec{i}\left(x_1-x_2\right)+\vec{j}\left(y_1-y_2\right)+\vec{k}\left(z_1-z_2\right); \\ \left|\vec{r_1}-\vec{r_2}\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2+\left(z_1-z_2\right)^2}. \end{cases} \qquad (1.3)$$

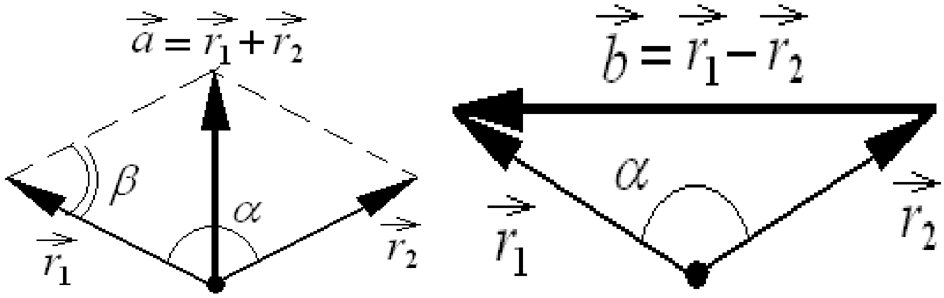



Рис. 1.2

В ряде задач удобно задавать вектора через их величины $r_1$, $r_2$ и угол $\alpha=\left(\vec{r_1};\vec{r_2}\right)$ между ними (рис. 1.2). Тогда сумма $\vec{a}$ векторов находится по правилу параллелограмма, а разность $\vec{b}$ – по правилу треугольника. Величину векторов в этом случае вычисляют по теореме косинусов:

$$a=\left|\vec{r_1}+\vec{r_2}\right|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1\cdot r_2\cdot\cos\beta}=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1\cdot r_2\cdot\cos\alpha},$$

$$b=\left|\vec{r_1}-\vec{r_2}\right|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1\cdot r_2\cdot\cos\alpha}, \qquad (1.4)$$

где $\alpha=\left(180°-\beta\right)$.

**Скалярным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр, равный произведению величин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=a\cdot b\cdot\cos\alpha=a_b\cdot b=b_a\cdot a. \qquad (1.5)$$

Как следует из определения, в скалярном произведении можно менять местами множители. Из рис. 1.3 видно, что величина $a_b=a\cdot\cos\alpha$ есть проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$. Аналогично $b_a=b\cdot\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$.

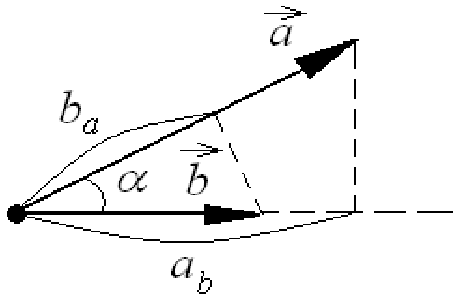



Рис. 1.3

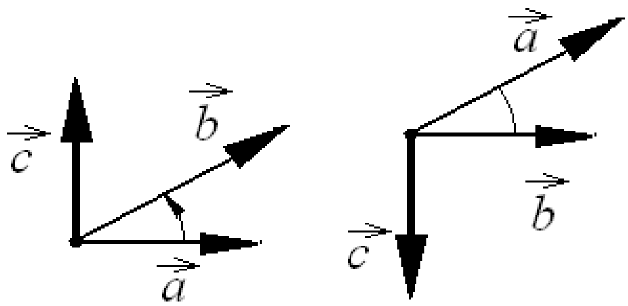



Рис. 1.4

**Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\text{, где } c=a\cdot b\cdot\sin\alpha. \qquad (1.6)$$

При этом вектора $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют правовинтовую пару (рис. 1.4). С конца результирующего вектора $\vec{c}$ поворот от первого сомножителя ко второму, совершаемый по кратчайшему пути, виден против часовой стрелки. Поэтому перестановка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

## 1.2. Материальная точка. Система отсчета. Путь, перемещение и скорость материальной точки

**Материальной точкой** называют тело конечной массы, размерами и формой которого можно пренебречь. Это абстракция, которой можно пользоваться, когда расстояние между телами или перемещение тела во много раз больше геометрических параметров тела.

**Механическое движение** – это простейшая форма движения материи, под которой понимают перемещение тел (или их частей относительно друг друга).

Тело (или среда), к которому относят движение, называют **телом (средой) отсчета**. Положение точечного тела в данный момент времени $t$, в данной точке пространства определяется радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала отсчета в данную точку. Движение материальной точки можно считать определенным, если известна функция

$$\vec{r}(x,y,z,t)=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=x(t);\\ y=y(t);\\ z=z(t). \end{cases} \qquad (1.7)$$

Если из уравнений движения (1.7) исключить время, то получим математически уравнение, которое описывает геометрически линию – **траекторию** движения. По механическому смыслу в каждой точке этой линии в разные моменты времени находилось тело. Длина траектории – пройденный телом **путь**.

Направленный отрезок прямой (вектор), соединяющий начальное и конечное положение материальной точки (начальную и конечную точки траектории) называется **перемещением**.

Пусть точечное тело в начальный момент времени занимало положение т.1, а через интервал времени $\Delta t=t_1-t_2$ – положение т.2 (рис. 1.5). Иначе говоря, начальное и конечное положения материальной точки можно охарактеризовать радиус-векторами $\vec{r_1}\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{r_2}\left(x_2,y_2,z_2\right)$, соответственно. Тогда путь, пройденный телом, составляет $\Delta S$, а перемещение, соответственно,

$$\overrightarrow{\Delta r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}=\vec{i}\left(x_2-x_1\right)+\vec{j}\left(y_2-y_1\right)+\vec{k}\left(z_2-z_1\right).$$

В международной системе (System International) единица измерения пути и перемещения – ***метр***: $\left[\text{м}\right]$.

Две материальные точки могут совершить одинаковые перемещения, однако из этого не следует, что движения этих точек одинаковы по кинематике. Для более полной характеристики движения вводится понятие **скорости**. Пусть за время $\Delta t$ точка прошла путь $\Delta S$ и, соответственно, совершила перемещение $\overrightarrow{\Delta r}$ (рис. 1.5). Поэтому можно ввести две различные величины скорости, которые в английском языке, например, обозначаются разными терминами: путевая скорость (**speed**) и скорость по перемещению (**velocity**). От первого термина происходит название автомобильного прибора – спидометр, а первая буква второго – используется для обозначения скорости.

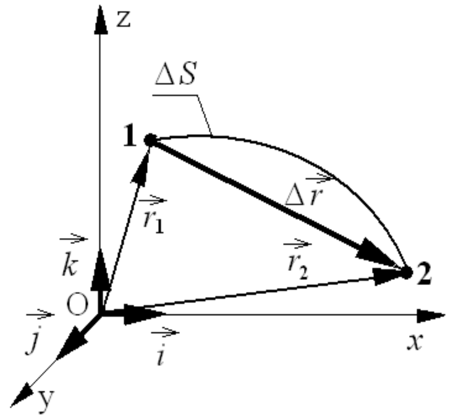



Рис. 1.5

***Путевой скоростью называют отношение пройденного телом пути к промежутку времени, в течение которого этот путь пройден:***

$$\mathrm{v}_S = \frac{\Delta S}{\Delta t}\left[\frac{м}{с}\right]. \tag{1.8}$$

Как следует из определения путевая скорость – скалярная величина с размерностью «метр в секунду».

***Скоростью по перемещению называют отношение перемещения тела к промежутку времени, в течение которого это перемещение совершено:***

$$\overrightarrow{\mathrm{v}_r} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}\left[\frac{м}{с}\right]. \tag{1.9}$$

Как следует из определения, скорость по перемещению – векторная величина с размерностью «метр в секунду».

Если уменьшать промежуток времени, взяв в пределе $\Delta t \to 0$, то путь и перемещение материальной точки (рис. 1.5) будут приблизительно одинаковы и обе скорости численно совпадут: $\mathrm{v}_r \approx \mathrm{v}_S$. В этом случае можно говорить о **мгновенной скорости** точки в данный момент времени:

$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}\left[\frac{м}{с}\right]. \tag{1.10}$$

Математически ***мгновенная скорость есть первая производная от функции перемещения по времени.***

По физическому смыслу ***скорость – это перемещение, совершаемое материальной точкой в единицу времени***

Опытным путем был установлен **<u>принцип независимости движения:</u>** «Если материальная точка совершила сложное перемещение, то результат этого перемещения не зависит от того, как происходили отдельные составляющие перемещения – одновременно или в какой-либо последовательности».

Если известны компоненты вектора перемещения, то возможно вычислить компоненты вектора скорости:

$$\left.\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt};\quad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt};\quad \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt};\right\} \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}. \tag{1.11}$$

## 1.3. Ускорение, его нормальная и тангенциальная составляющая

Скорость материальной точки с течением времени изменяется как по величине, так и по направлению. Необходимо численно охарактеризовать это изменение.

***Линейное ускорение – это первая временная производная от функции скорости точки, или иначе вторая производная от функции ее перемещения.***

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \left[ \frac{м}{c^2} \right]. \tag{1.12}$$

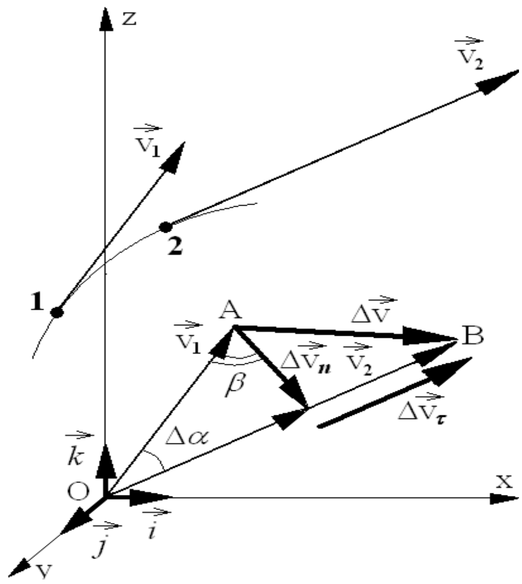



Рис. 1.6

Рассмотрим перемещение тела в общем случае по криволинейной траектории. Пусть за время $\Delta t$ точка переместится из положения т.1 в т.2 (рис. 1.6), при этом скорость ее изменилась от начального значения $\overrightarrow{v_1}$ до конечного $\overrightarrow{v_2}$. Совместим начала векторов скоростей тела с началом системы координат – т.О. Отложим на направлении конечной скорости $\overrightarrow{v_2}$ вспомогательный вектор $\vec{v}'$, величина вектора равна начальной скорости: $v' = v_1$. Как видно на рис. 1.6

$$\Delta\vec{v} = \Delta\overrightarrow{v_\tau} + \Delta\overrightarrow{v_n},$$

- $\Delta\overrightarrow{v_\tau}$ – характеризует изменение скорости по величине,
- $\Delta\overrightarrow{v_n}$ – характеризует изменение скорости по направлению.

Возьмем в пределе $\Delta t \to 0$ и воспользуемся определением ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{(d\overrightarrow{v_n} + d\overrightarrow{v_\tau})}{dt} = \frac{d\vec{v}_n}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_\tau},$$

Следовательно, получено выражение

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{a_\tau} = \dfrac{d\overrightarrow{v_\tau}}{dt}; \\ \overrightarrow{a_n} = \dfrac{d\overrightarrow{v_n}}{dt}, \end{cases} \tag{1.12}$$

где $\overrightarrow{a_\tau}$ – ***тангенциальная***, $\overrightarrow{a_n}$ – ***нормальная*** составляющие полного ускорения $\vec{a}$, соответственно. Составляющая $\overrightarrow{a_\tau}$ характеризует изменение по величине, а составляющая $\overrightarrow{a_n}$ – изменение направления $\vec{a}$.

Определим направления векторов $\vec{a}$, $\overrightarrow{a_\tau}$ и $\overrightarrow{a_n}$. Пусть $\Delta t \to dt \to 0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{v}_1 \approx \mathrm{v}_2; \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta\overrightarrow{\mathrm{v}_\tau} \to 0; \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta\overrightarrow{\mathrm{v}_n} \to 0; \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta\alpha \to 0; \end{array}\right\} \text{ или, если } dt \to 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta\alpha \to 0; \\ d\mathrm{v}_n \to 0; \\ d\mathrm{v}_\tau \to 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\Delta OAB$ – равнобедренный (рис. 1.6), т. е.

$$\lim_{\alpha\to 0}\beta \to \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \Delta\overrightarrow{\mathrm{v}_n} \perp \overrightarrow{\mathrm{v}_1}; \\ \Delta\overrightarrow{\mathrm{v}_n} \perp \overrightarrow{\mathrm{v}_2}; \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{a_n} \perp \vec{\mathrm{v}};$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{v}_1} \parallel \overrightarrow{\mathrm{v}_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a_\tau} \parallel \vec{\mathrm{v}}.$$

<u>**Доказано:**</u>

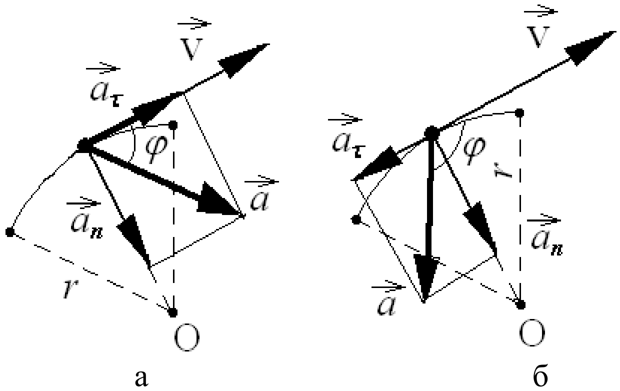
$$\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_\tau}; \\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \end{cases} \tag{1.13}$$

<u>**Вывод:**</u> ***тангенциальная составляющая ускорения*** $\overrightarrow{a_\tau}$ ***характеризует изменения вектора скорости*** $\vec{\mathrm{v}}$ ***по величине, нормальная составляющая ускорения*** $\overrightarrow{a_n}$ ***характеризует изменение вектора скорости по направлению.***

**Общий случай:** Движение по криволинейной траектории может быть ускоренное или замедленное. Рассмотрим часть криволинейной траектории точки, которую можно аппроксимировать дугой окружности с центром кривизны в т. О и радиусом $r$ (рис. 1.7).

**а)** в случае ускоренного движения (рис. 1.7а) вектора скорости и тангенциального ускорения одинаково направлены, а угол между векторами скорости и полного ускорения – острый: $\overrightarrow{a_\tau} \uparrow\uparrow \vec{\mathrm{v}}$; $\varphi = \left(\overrightarrow{a_\tau};\vec{\mathrm{v}}\right) < 90°$;

**б)** в случае замедленного движения (рис. 1.7б) вектора скорости и тангенциального ускорения противоположно направлены, а угол между векторами скорости и полного ускорения – тупой: $\overrightarrow{a_\tau} \uparrow\downarrow \vec{\mathrm{v}}$; $\varphi = \left(\overrightarrow{a_\tau};\vec{\mathrm{v}}\right) > 90°$.




а б

Рис. 1.7

**Частный случай 1:** прямолинейное движение с постоянной скоростью. В этом случае отсутствует нормальная составляющая ускорения $\left(\overrightarrow{a_n}\right)$, а полное ускорение совпадает с тангенциальной составляющей $\left(\vec{a} \equiv \overrightarrow{a_\tau}\right)$. Если $\vec{a} = \mathrm{const}$, то

- функция скорости

$$\mathrm{v} = \int a \cdot dt = at + C = at + \mathrm{v}_0,$$

где постоянная интегрирования $C = \mathrm{v}_0 = \mathrm{v}(0)$ – начальная скорость тела в момент $t = 0$;

- функция перемещения

$$r = \int \mathrm{v} \cdot dt = \int \left( at + \mathrm{v}_0 \right) \cdot dt = \frac{at^2}{2} + \mathrm{v}_0 t + C = \frac{at^2}{2} + \mathrm{v}_0 t + r_0 ,$$

где постоянная интегрирования $C = r_0 = r(0)$ – начальное смещение тела в момент $t = 0$.

**Частный случай 2:** вращение точки по окружности радиусом $r$, с постоянной по величине скоростью $\left( \mathrm{v} = \mathrm{const} \right)$. В этом случае отсутствует тангенциальная составляющая ускорения $\left( \vec{a}_\tau \right)$. Полное ускорение совпадает с нормальной составляющей, которая называется центростремительным ускорением $\left( \vec{a} \equiv \overrightarrow{a_\tau} \equiv \overrightarrow{a_{цс}} \right)$.

Установим связь между нормальной компонентой ускорения и мгновенной скоростью. Пусть точка за малый промежуток времени $\Delta t$ совершила перемещение $\Delta S$, при этом скорость ее изменилась на $\Delta \vec{\mathrm{v}} = \overrightarrow{\mathrm{v}_2} - \overrightarrow{\mathrm{v}_1}$ (рис. 1.8). Пусть центр кривизны траектории составляет $r$, а перемещению тела соответствует поворот радиуса на угол $\Delta \alpha$. Как следует из рис. 1.8:

$$\left. \begin{aligned} &\Delta \mathrm{v}_n = \left| \Delta \overrightarrow{\mathrm{v}_n} \right| = \mathrm{v} \cdot \sin\left( \Delta \alpha \right) \approx \mathrm{v} \cdot \Delta \alpha ; \\ &\Delta S = r \cdot \sin\left( \Delta \alpha \right) \approx r \cdot \Delta \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta \alpha = \frac{\Delta S}{r} ; \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathrm{v}_n = \frac{\mathrm{v} \cdot \Delta S}{r} .$$

В этих математических преобразованиях было учтено, что $\lim\limits_{\Delta \alpha \to 0} \left( \sin\left( \Delta \alpha \right) \right) \approx \Delta \alpha$. Воспользовавшись определением (1.12) ускорения для нормальной компоненты, получим:

$$a_n = \left| \overrightarrow{a_n} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}_n}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}}{r} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}}{r} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{\mathrm{v}^2}{r} ;$$

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} . \qquad (1.13)$$

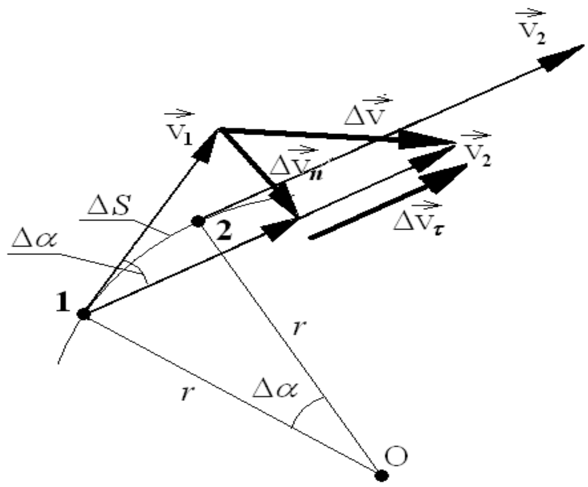



Рис. 1.8

***Нормальная компонента ускорения численно равна квадрату скорости, деленной на радиус кривизны траектории.***

Если известны компоненты вектора скорости или компоненты вектора перемещения, то возможно вычислить компоненты вектора ускорения:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\ a_y &= \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\ a_z &= \frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ . \tag{1.14}$$

**Пример.** Точка перемещается на плоскости, известны компоненты функции перемещения:

$$x(t) = 0.1 + 0.01 \cdot t - 0.02 \cdot t^2; \quad y(t) = -0.11 - 0.02 \cdot t + 0.03 \cdot t^2 .$$

Определить перемещение, скорость и ускорение в момент времени $t = 2\text{с}$.
***Решение***: Компоненты перемещения в момент времени $t = 2\text{с}$:

$$x(2) = 0.1 + 0.01 \cdot 2 - 0.02 \cdot 2^2 = 0.04\text{м}; \quad y(2) = -0.1 - 0.02 \cdot 2 + 0.03 \cdot 2^2 = -0.02\text{м} .$$

Полное перемещение точки в момент времени $t = 2\text{с}$:

$$r(2) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4 \cdot 10^{-2})^2 + (-2 \cdot 10^{-2})^2} = \sqrt{(16+4) \cdot 10^{-4}} = 4.472 \cdot 10^{-2}\,\text{м}$$

Функции компонент скорости:

$$\mathrm{v}_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(0,1 + 0,01t - 0,02t^2\right)}{dt} = 0.01 - 0.04t ;$$

$$\mathrm{v}_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(-1 - 0,02t + 0,03t^2\right)}{dt} = -0.02 + 0.06t .$$

Компоненты скорости в момент времени $t = 2\text{с}$:

$$\mathrm{v}_x(2) = 0.01 - 0.04 \cdot 2 = -0.07\,\text{м}/\text{с}; \quad \mathrm{v}_y(2) = -0.02 + 0.06 \cdot 2 = 0.10\,\text{м}/\text{с}$$

Полная скорость точки в момент времени $t = 2\text{с}$:

$$\mathrm{v}(2) = \sqrt{\left(\mathrm{v}_x\right)^2 + \left(\mathrm{v}_y\right)^2} = \sqrt{(-7 \cdot 10^{-2})^2 + (10 \cdot 10^{-2})^2} = \sqrt{(49+100) \cdot 10^{-4}} = 1.2207 \cdot 10^{-1}\,\text{м}/\text{с}.$$

Функции компонент ускорения:

$$a_x(2) = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = \frac{d(0.01 - 0.04t)}{dt} = -0.04\,\text{м}/\text{с}^2 = \text{const};$$

$$a_y(2) = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = \frac{d(-0.02 + 0.06t)}{dt} = 0.06\,\text{м}/\text{с}^2 = \text{const}.$$

Полное ускорение точки в момент времени $t = 2\text{с}$:

$$a(2) = \sqrt{\left(a_x\right)^2 + \left(a_y\right)^2} = \sqrt{(-4 \cdot 10^{-2})^2 + (6 \cdot 10^{-2})^2} = \sqrt{(16+36) \cdot 10^{-4}} = 7.211 \cdot 10^{-2}\,\text{м}/\text{с}^2 .$$

## 1.4. Вращение точки по окружности. Угловая скорость, её связь с линейной скоростью

Рассмотрим вращение тела по окружности радиусом $r$. Вращательное движение материальной точки удобно задавать углом поворота радиус-вектора – временной функцией $\varphi(t)$ (рис. 1.9).

**Математически** ***угловая скорость – первая производная, по времени от функции угла поворота радиус-вектора.***

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \left[ \frac{рад}{с} \right]. \tag{1.15}$$

**По физическому смыслу** ***угловая скорость – это угол, на который поворачивается радиус-вектор, проведенный к материальной точке из центра круговой траектории, за единицу времени.***

Установим связь между линейной $\vec{\mathrm{v}}$ и угловой $\vec{\omega}$ скоростью. Если промежуточное время бесконечно мало, то перемещение по величине приблизительно равно пути – дуге окружности (рис. 1.9).

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta r \approx \Delta S = dS = r \cdot \sin(\Delta\varphi) \approx r \cdot d\varphi; \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = d\varphi \to 0. \end{cases}$$

По определению линейной и угловой скорости имеем:

$$\mathrm{v} = \frac{dS}{dt} \approx \frac{r \cdot d\varphi}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot r. \tag{1.16}$$

Для полной характеристики вращательного движения точки кроме величины угловой скорости надо знать направление вращения (по часовой стрелке или против часовой стрелки), а также ориентацию в пространстве плоскости вращения. Поэтому принято задавать угловую скорость вектором $\vec{\omega}$, величина которого вычисляется по формуле (1.15), проведенный из центра круговой траектории, нормально к ее плоскости (рис. 1.9). При этом ***с конца вектора $\vec{\omega}$ вращение материальной точки должно быть видно против часовой стрелки***. Связь между радиус-вектором $\vec{r}$, вектором линейной скорости $\vec{\mathrm{v}}$ и вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ определяется векторным произведением

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \\ \mathrm{v} = \omega \cdot r \cdot \sin 90^0 = \omega \cdot r; \\ \vec{\mathrm{v}} \perp \vec{r}; \quad \vec{\mathrm{v}} \perp \vec{\omega}. \end{cases} \tag{1.15}$$

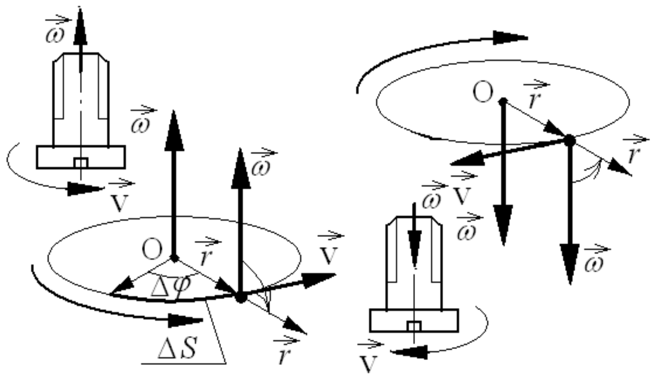



Рис. 1.9

***Если виртуальный винт с правой резьбой вращать в направлении скорости*** $\vec{\mathrm{v}}$***, то его линейное перемещение покажет направление угловой скорости*** $\vec{\omega}$ (рис. 1.9).

## 1.5. Угловое ускорение, его связь с линейным ускорением

Вообще говоря, вектор угловой скорости с течением времени может изменяться как по величине, так и по направлению. В первом случае речь идет об ускоренном или замедленном вращении, во втором – имеет место поворот плоскости вращения. Необходимо охарактеризовать изменение вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

***Угловое ускорение – это первая производная от функции угловой скорости по времени. Физический смысл $\vec{\varepsilon}$ – изменение в единицу времени $\vec{\omega}$:***

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \left[\frac{рад}{c^2}\right]. \tag{1.16}$$

Пусть за время $\Delta t$ изменение угловой скорости составило (рис. 1.10):

$$\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1; \quad \Delta\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega}_0 - \Delta\vec{\omega}_n, \tag{*}$$

где

- $\Delta\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ – характеризует изменение угловой скорости по величине,
- $\Delta\overrightarrow{\omega_n}$ – характеризует изменение угловой скорости по направлению.

Подставив выражения (*) в формулу (1.16), получим:

$$\overrightarrow{\varepsilon_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\omega_0} + \Delta\overrightarrow{\omega_n}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{\omega_0}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\omega_n}}{dt} = \overrightarrow{\varepsilon_0} + \overrightarrow{\varepsilon_n};$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_n^2}, \qquad (1.17)$$

где $\overrightarrow{\varepsilon_0} = d\overrightarrow{\omega_0}/dt$ – компонента, характеризующая изменение углового ускорения по величине, а компонента $\overrightarrow{\varepsilon_n} = d\overrightarrow{\omega_n}/dt$ – характеризующая изменение углового ускорения по направлению. В дальнейшем будем рассматривать **вращение материальной точки в одной плоскости** и тогда можно принять:

$$\overrightarrow{\varepsilon_n} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\varepsilon} \equiv \overrightarrow{\varepsilon_0}.$$

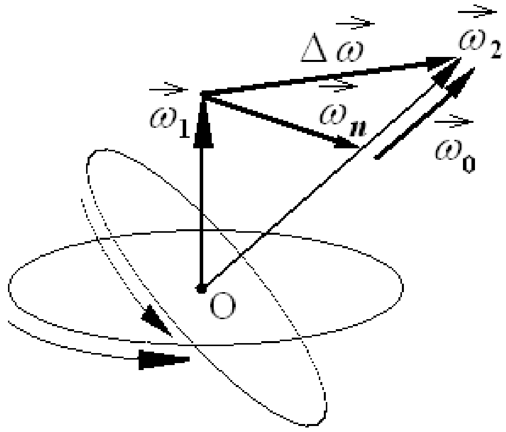



Рис. 1.10

Пусть точка вращается по окружности радиуса $r$ с постоянным угловым ускорением $\vec{\varepsilon} = \text{const}$, тогда функции угловой скорости и угла поворота радиус-вектора точки:

$$\omega(t) = \int \varepsilon \cdot dt = \varepsilon \int dt = \varepsilon t + \omega_0;$$

$$\varphi(t) = \int \omega \cdot dt = \int (\varepsilon t + \omega_0) dt = \varepsilon \int t \cdot dt + \omega_0 \int dt = \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0, \qquad (1.18)$$

где $\omega_0 = \omega(0)$; $\varphi_0 = \varphi(0)$ – начальные значения угловой скорости и угла поворота радиус-вектора. При этом величина вектора углового ускорения зависит от его направления (рис. 1.11):

1. $\dfrac{d\omega}{dt} > 0 \;\Rightarrow\; \vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$;  2. $\dfrac{d\omega}{dt} < 0 \;\Rightarrow\; \vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$.

Воспользуемся выражениями для тангенциальной компоненты линейного ускорения, линейной скорости и углового ускорения:

$$a_\tau = \frac{d\text{v}}{dt}; \quad \text{v} = \omega \cdot r; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

**Тангенциальная компонента ускорения равна произведению углового ускорения на радиус-вектор материальной точки:**

$$a_\tau = \frac{d\omega \cdot r}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \cdot r \qquad (1.19)$$

По правилу векторного произведения (рис. 1.11) имеем:

$$\overrightarrow{a_\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \ . \qquad (1.20)$$

***Если виртуальный винт вращать в направлении*** $\vec{a}_\tau$***, то его перемещение покажет направление*** $\vec{\varepsilon}$ (рис. 1.11)**.**

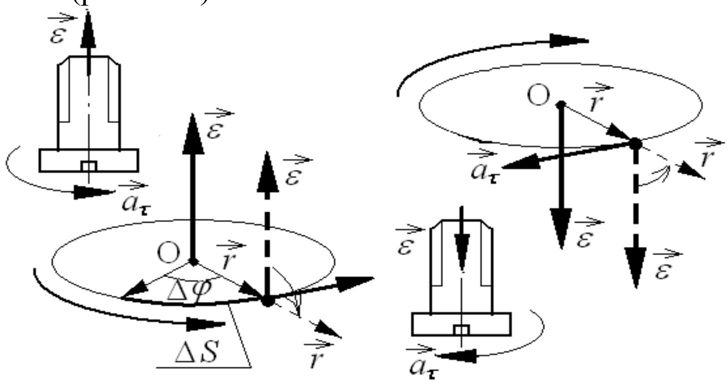



Рис. 1.11

Нормальное ускорение (1.13):

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r \, .$$

Тогда полное ускорение при вращении по окружности:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \ . \qquad (1.21)$$

## 1.6. Понятие силы. Принципы близкодействия и дальнодействия. Основные законы динамики поступательного движения

**Сила – единая мера взаимодействия двух и более тел.** Вместе с тем, сила позволяет количественно охарактеризовать взаимодействия тел.

**Проявляется сила:**

- **Статически:** взаимодействие неподвижных тел (воздействие тела на опору; гравитация и др.);
- **Динамически:** взаимодействие тел при движении одного тела относительно другого (удар; трение и др.).

Исторически были выдвинуты две взаимоисключающие ***гипотезы о природе сил***.

***1. Принцип близкодействия*** (Галилей, Ньютон): взаимодействие происходит мгновенно, не зависимо от расстояния между телами. Поля, как материальной субстанции, не существует. Поле – условное понятие, удобное для построения математических моделей.

***2. Принцип дальнодействия*** (Гюйгенс): взаимодействие между материальными телами происходит путем взаимодействия созданных ими полей. То есть поле заполняет все пространство, наделено физическими свойствами и служит “ посредником” для передачи сигналов. Скорость распространения поля конечна, поэтому взаимодействие происходит через некоторое время.

Вначале, благодаря авторитету Ньютона, получила распространение концепция близкодействия. Затем к середине XIX века благодаря успехам в развитии электромагнетизма, радиотехники, оптики получила всеобщее признание концепция близкодействия. В научных работах Максвелла, Фарадея и др. было доказано реальное существование физических полей различной природы. Согласно современным представлениям материя обладает дуализмом свойств: может существовать в вещественной форме (обладать массой покоя), полевой форме (фотоны, имеющие лишь релятивистскую массу) или одновременно обладать вещественными и полевыми свойствами (поток элементарных частиц).

Для количественной характеристики движения введена физическая величина __импульс__ – ***произведение массы тела на вектор его скорости***:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\mathrm{v}} \quad \left[\frac{кг \cdot м}{с}\right]. \qquad (1.22)$$

**__Принцип суперпозиции сил:__**

Если на тело действует несколько сил, то равнодействующая сила равна векторной сумме этих сил.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}.$$

Законы классической механики были приняты в качестве постулатов и впервые сформулированы в XVIII в. И. Ньютоном. Еще в XVII в. Г. Галилей показал, что тело, свободное от внешних воздействий, способно сохранять состояние своего движения неизменным. ***Свойство всех материальных тел (наличие массы покоя) сохранять неизменным состояние механического движения при отсутствии внешних воздействий называется*** **__инерцией__.**

Это свойство лежит в основе **__I закона динамики__: «Всякое тело пребывает в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это движение»:**

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathrm{v}} = 0 \text{ или } \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{const}. \qquad (1.23)$$

Ньютон, в частности, показал, что любое сложное движение включает движение по инерции в качестве составного элемента.

**__II Закон динамики__** установил количественную связь между взаимодействием тел и теми изменениями, которые происходят в состоянии их движения: **«Сила, действующая на тело, равна скорости изменения во времени его импульса».** Иначе говоря, сила равна первой производной от функции импульса тела по времени:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \qquad (1.24)$$

$$1H = \frac{1}{с} \cdot 1\frac{кг \cdot м}{с} = 1\frac{кг \cdot м}{с^2}.$$

Как следует из (1.24), на тело действует единичная сила, если в единицу времени его импульс изменения на единичную величину. Рассмотрим подробнее выражение (1.24):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{\mathrm{v}})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} + \vec{\mathrm{v}} \cdot \frac{dm}{dt} = m \cdot \vec{a} + \vec{\mathrm{v}} \cdot \frac{dm}{dt}. \qquad (1.24a)$$

__Частный случай:__ **при движении тела неизменной массы сила, действующая на него, равна произведению массы тела на его ускорение:**

$$m = const; \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}; \rightarrow \begin{cases} F_x = m \cdot \dfrac{d\mathrm{v}_x}{dt^2} = m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2}; \\ F_y = m \cdot \dfrac{d\mathrm{v}_y}{dt^2} = m \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2}; \\ F_z = m \cdot \dfrac{d\mathrm{v}_z}{dt^2} = m \cdot \dfrac{d^2z}{dt^2}; \end{cases} \rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \qquad (1.25)$$

Из выражения (1.25), в частности, следует, что мерой инертности тела при его поступательном движении служит масса.

Выражение (1.24) можно записать в виде:

$$d\left(m \cdot \vec{\mathrm{v}}\right) = \vec{F} \cdot dt.$$

Поэтому второй закон динамики можно сформулировать иначе: **“Элементарное изменение импульса тела равно элементарному импульсу силы, действующей на тело”.**

**<u>III Закон динамики</u>: «Два тела воздействуют друг на друга с усилиями, равными по величине, но противоположными по направлению»**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{1.26}$$

Силы действуют вдоль линии, которая проходит через центры инерции (центры масс) тел (рис. 1.12).

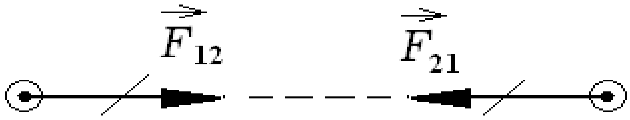



Рис. 1.12

В качестве материальной точки принимают положение центра инерции тела.

## 1.7. Центростремительная и центробежная силы

Если материальная точка движется по криволинейной траектории, например, по дуге окружности, то ее полное ускорение можно представить в виде векторной суммы тангенциальной и нормальной составляющей (1.13):

$$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}.$$

Тогда согласно второму закону динамики (1.25), каждой компоненте ускорения должна соответствовать некоторая сила:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a_\tau} + m\cdot\vec{a_n} = \vec{F_\tau} + \vec{F_{цс}}.$$

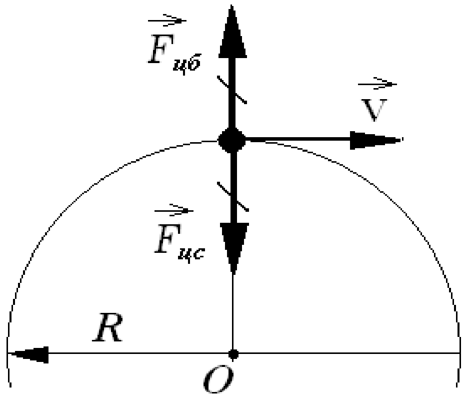



Рис. 1.13

Если материальная точка совершает вращение, то нормальная компонента ускорения и силы носит название ***центростремительная*** и направлены по радиусу к центру окружности (рис. 1.13). При ***равномерном вращении*** точки $(\mathrm{v} = \mathrm{const})$:

$$\left.\begin{aligned}\vec{a_\tau} &= 0;\\ \vec{F_\tau} &= 0;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a_n} \equiv \vec{a_{цс}};\\ \vec{F} &= \vec{F_n} \equiv \vec{F_{цс}};\end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned}a_{цс} &= \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \omega^2 R;\\ F_{цс} &= \frac{m\cdot \mathrm{v}^2}{R} = m\cdot\omega^2 R.\end{aligned}\right. \tag{1.27}$$

В этом случае центростремительная сила является единственной и обуславливает изменение скорости тела $\vec{\mathrm{v}}$ по направлению. Однако, согласно третьему закону динамики, для неизменности численного значения скорости $(\mathrm{v} = const)$ равнодействующая сила должна быть равной нулю. Поэтому должна существовать равная центростремительной и противоположно направленная центробежная сила, так что (рис. 1.13):

$$\vec{F_{цб}} = -\vec{F_{цс}}.$$

## 1.8. Инерциальные системы отсчета (СО). Механический принцип относительности. Принцип сложения скоростей Галилея

Нельзя считать все системы отсчета (СО) равноправными. Например, первый закон динамики справедлив не во всякой СО.

***Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называются*** **<u>инерциальными СО</u>.**

Отличительное свойство инерциальных СО: любая система, которая перемещается прямолинейно и равномерно $\left(\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{const}\right)$ относительно заведомо инерциальной СО, также является инерциальной. Поэтому можно считать инерциальными СО все системы отсчета, которые равномерно перемещаются или неподвижны относительно земли.

Еще Галилей отметил замечательное свойство инерциальных систем отсчета: все механические явления (процессы) в них протекают одинаково и никакими опытами и наблюдениями внутри такой СО невозможно определить движется она или покоится. Инерциальные СО являются преимущественными, т. к. в них изменение состояния тел определяется только их взаимодействиями с другими телами и не зависит от движения самой системы отсчета. Таким образом, с механической точки зрения все инерциальные СО эквивалентны, т. е. любую из них можно условно принять за покоящуюся и рассматривать движение других систем относительно данной. Например: автомобиль приближается к перекрестку с точки зрения неподвижного наблюдателя. С точки зрения пассажира, находящегося в подвижной СО перекресток приближается к автомобилю.

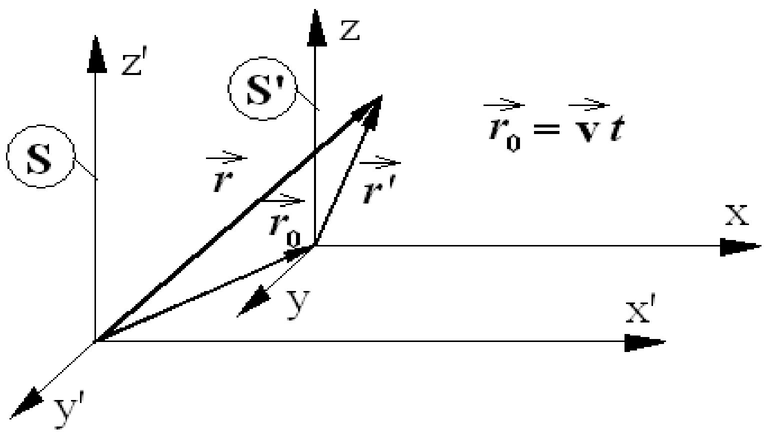



Рис. 1.14

Рассмотрим неподвижную систему $S\left(x;y;z\right)$ и перемещающуюся со скоростью $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{const}$ относительно нее подвижную систему $S'\left(x';y';z'\right)$ (рис. 1.14). Пусть за некоторое время $t$ материальная точка совершила перемещение:

- $\vec{r}\,'$ – относительно подвижной системы $S'$;
- $\vec{r}$ – относительно неподвижной системы $S$;
- $\vec{r}_0 = \vec{\mathrm{v}} \cdot t$ – перемещение подвижной СО относительно неподвижной.

Как видно на рис. 1.14:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 . \qquad (1.28)$$

Из (1.28) следует **<u>механический принцип относительности:</u> «Перемещение материальной точки относительно неподвижного системы отсчета равно векторной сумме перемещения этой точки в подвижной системе отсчета и перемещения самой подвижной системы отсчета относительно неподвижной».**

Прямые преобразования Галилея:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{v} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x' + v_x t; \\ y = y' + v_y t; \\ z = z' + v_z t. \end{cases} \tag{1.28а}$$

Обратные преобразования Галилея:

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x - v_x t; \\ y' = y - v_y t; \\ z' = z - v_z t. \end{cases} \tag{1.28б}$$

Продифференцируем по времени выражение (1.28):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \frac{d(\vec{v_0} \cdot t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_0}; \\ \vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_0}, \end{cases} \tag{1.29}$$

где $\vec{v}$ – абсолютная скорость точки относительно неподвижной системы $S$; $\vec{v'}$ – относительная скорость точки в подвижной системе $S'$; $\vec{v_0}$ – переносная скорость подвижной системы $S'$ относительно неподвижной системы $S$.

Выражение (1.29) отражает **закон сложения скоростей** в классической механике: **«Скорость тела, относительна неподвижной системы отсчета, равна векторной сумме его скорости относительно подвижной системы отсчета и скорости одной системы отсчета относительно другой».** Иначе говоря: **абсолютная скорость точки равна сумме относительной и переносной скоростей.**

## 1.9. Инварианты преобразований Галилея

Как следует из закона сложения скоростей (1.29), скорость тела изменяется при переходе от одной к другой инерциальной системы отсчета (СО) к другой. Однако, существует ряд кинематических характеристик движения, которые остаются при этом переходе неизменными. Они называются **инвариантами преобразований Галилея.**

**1. Инвариант расстояний**

Пусть две материальные точки находятся в т. $M_1$ и т. $M_2$, соответственно. Тогда положение точек в системе неподвижной $S$ и подвижной $S'$ можно описать с помощью радиус-векторов, соответственно:

$$\begin{cases} S: \quad M_1 \to \vec{r_1}(x_1; y_1; z_1); \qquad M_2 \to \vec{r_2}(x_2; y_2; z_2); \\ S': \quad M_1' \to \vec{r_1}'(x_1'; y_1'; z_1'); \quad M_2' \to \vec{r_2}'(x_2'; y_2'; z_2'). \end{cases}$$

Рассмотрим прямые преобразования Галилея (1.28а):

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{v} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x' + v_x t; \\ y = y' + v_y t; \\ z = z' + v_z t. \end{cases}$$

По определению расстояния между точками – разность их радиус-векторов:

$$\begin{cases} \Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \left(\vec{r_2'} + \vec{v_0} \cdot t\right) - \left(\vec{r_1'} + \vec{v_0} \cdot t\right) = \vec{r_2'} - \vec{r_1'} = \Delta\vec{r'}; \\ \Delta\vec{r'} = \vec{r_2'} - \vec{r_1'}. \end{cases}$$

***Расстояние между точками инвариантно относительно инерциальных систем отсчета:***

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r'}. \tag{1.30}$$

**2. Инвариантность взаимных скоростей**

Воспользуемся законом сложения скоростей (1.29) и выразим абсолютные скорости материальных точек через их относительные скорости и переносную скорость:

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1'} + \overrightarrow{v_0}; \qquad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2'} + \overrightarrow{v_0}.$$

По определению взаимной скорости двух точек:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_{12}} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = \left(\overrightarrow{v_2'} + \overrightarrow{v_0}\right) - \left(\overrightarrow{v_1'} + \overrightarrow{v_0}\right) = \overrightarrow{v_2'} - \overrightarrow{v_1'} = \overrightarrow{u_{12}'}; \\ \overrightarrow{u_{12}'} = \overrightarrow{v_2'} - \overrightarrow{v_1'}. \end{cases}$$

***Взаимная скорость двух точек инвариантна относительно инерциальных СО:***

$$\overrightarrow{u_{12}} = \overrightarrow{u_{12}'}. \tag{1.31}$$

**3.Инвариантность ускорения**

Продифференцируем по времени функцию взаимной скорости двух точек:

$$\frac{d\overrightarrow{u_{12}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_{12}'}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \overrightarrow{a'}. \tag{1.32}$$

***Ускорение точки – инвариантно относительно инерциальных СО.***

## 1.10. Движение тел переменной массы. Уравнение Мещерского

Основываясь на втором законе динамики, выведем уравнение движения тела переменной массы без учета его формы и размеров. Пусть некоторое тело в момент времени $t$ имело массу $m$ и скорость $\vec{v}$, а в момент $(t+dt)$, соответственно, $(m+dm)$ и $\left(\vec{v}+d\vec{v}\right)$. Предположим, что масса тела увеличилась. Обозначим через $\vec{u}'$ скорость присоединяющихся частиц относительно движущегося тела. По закону сложения скоростей $\vec{u}'$ можно рассматривать как относительную скорость, а скорость тела $\vec{v}$, как переносную. Тогда абсолютная скорость присоединяющихся частиц по закону сложения скоростей:

$$\vec{u} = \overrightarrow{u'} + \vec{v},$$

а ее импульс

$$dm\left(\overrightarrow{u'} + \vec{v}\right).$$

Тогда суммарный импульс системы (тело – частица):

- $\vec{p}(t) = m\vec{v} + dm\left(\overrightarrow{u'} + \vec{v}\right)$ – до присоединения;
- $\vec{p}(t+dt) = (m+dm)\left(\vec{v}+d\vec{v}\right)$ – после присоединения

Изменение импульса системы за время $dt$:

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m\cdot\vec{v} + m\cdot d\vec{v} + dm\cdot\vec{v} - m\cdot\vec{v} - dm\cdot\overrightarrow{u'} - dm\cdot\vec{v};$$

$$d\vec{p} = m\cdot d\vec{v} - dm\cdot\overrightarrow{u'}. \tag{*}$$

Продифференцируем выражение (*) по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} - \overrightarrow{u'}\cdot\frac{dm}{dt}. \tag{**}$$

В выражении (**) учтем, что

- $\vec{F}_{вн} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ – равнодействующая внешняя сила по второму закону динамики;
- $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ – ускорение системы.

Тогда выражение (**) принимает вид:

$$m\cdot\vec{a} = \vec{F}_{вн} + \overrightarrow{u'}\cdot\frac{dm}{dt} = \overrightarrow{F_{вн}} + \overrightarrow{F_{реак}}. \tag{1.33}$$

В уравнении Мещерского (1.33) слагаемое $\overrightarrow{F_{реак}}=\overrightarrow{u'}\cdot\dfrac{dm}{dt}$ по смыслу есть реакция механической системы на изменение ее массы и носит название реактивной силы.

**Случай 1.** Масса системы возрастает:

$$dm>0 \quad\to\quad \frac{dm}{dt}>0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{F_{реак}}\uparrow\uparrow\overrightarrow{u'}.$$

Реактивная сила $\vec{F}_{реак}$ действует в направлении вектора скорости присоединяющихся частиц.

**Случай 2.** Масса системы уменьшается:

$$dm<0 \quad\to\quad \frac{dm}{dt}<0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{F_{реак}}\uparrow\downarrow\overrightarrow{u'}.$$

Реактивная сила $\vec{F}_{реак}$ действует в направлении, противоположном вектору скорости вылетающих частиц.

**Случай 3.** Масса системы постоянна:

$$dm=0 \quad\to\quad \frac{dm}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{F_{реак}}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=m\vec{a}.$$

При отсутствии реактивной силы уравнение Мещерского трансформируется во второй закон динамики.

## 1.11. Механические системы. Закон сохранения импульса

***Всякая совокупность взаимодействующих тел образует механическую систему.*** В случае неподвижных тел система статическая, если тела перемещаются – динамическая.

Силы, действующие только между телами системы, называются **внутренними**, а силы, которые характеризуют взаимодействие с внешними телами, называются **внешними**.

Если между телами системы действуют только внутренние силы, то это **замкнутая система**, в противном случае речь идет о **незамкнутой** системе.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из $i=[1;n]$ точечных тел. Кинематические и динамические характеристики тел системы: массы $\{m_1,m_2,...,m_n\}\to m_i$; скорости $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,...,\mathrm{v}_n\}\to \mathrm{v}_i$; внутренние силы между парами тел $\{\overrightarrow{F_{12}},\overrightarrow{F_{21}},...,\vec{F}_{(n-1)n}\}\to\overrightarrow{F_{ij}}$. В результате взаимодействия, тела обмениваются скоростями, импульсами и энергиями. Применим второй закон динамики поступательного движения для каждого из тел системы:

$$\frac{d\left(m_i\overrightarrow{\mathrm{v}_i}\right)}{dt}=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{ij}}=\overrightarrow{F_i} \quad\to\quad \begin{cases}\dfrac{d\left(m_1\overrightarrow{\mathrm{v}_1}\right)}{dt}=\overrightarrow{F_{12}}+\overrightarrow{F_{13}}+\ldots+\overrightarrow{F_{1n}}=\overrightarrow{F_1};\\ \dfrac{d\left(m_2\overrightarrow{\mathrm{v}_2}\right)}{dt}=\overrightarrow{F_{21}}+\overrightarrow{F_{23}}+\ldots+\overrightarrow{F_{2n}}=\overrightarrow{F_2};\\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\ \dfrac{d\left(m_n\overrightarrow{\mathrm{v}_n}\right)}{dt}=\overrightarrow{F_{n1}}+\overrightarrow{F_{n2}}+\ldots+\vec{F}_{n(n-1)}=\overrightarrow{F_n},\end{cases} \qquad (*)$$

где $\overrightarrow{F_i}$ – равнодействующая всех сил, которые приложены к $i$-телу со стороны остальных $(n-1)$ тел системы. Просуммируем почленно все уравнения системы (*):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d(m_i\overrightarrow{\upsilon_i})}{dt}=\left(\overrightarrow{F_{12}}+\overrightarrow{F_{21}}\right)+\left(\overrightarrow{F_{13}}+\overrightarrow{F_{31}}\right)+\left(\overrightarrow{F_{23}}+\overrightarrow{F_{32}}\right)+...+\left(\overrightarrow{F_{ij}}+\overrightarrow{F_{ji}}\right). \qquad (**)$$

По III закону динамики между каждой парой тел действительно равно по величине и по противоположности по направлению силы, поэтому правая часть выражения (**) равна нулю:

$$\overrightarrow{F_{12}}=-\overrightarrow{F_{21}};...\overrightarrow{F_{ij}}=-\overrightarrow{F_{ji}};\overrightarrow{F}_{(n-1)n}=-\overrightarrow{F}_{n(n-1)}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{d(m_i\overrightarrow{\upsilon_i})}{dt}=0. \qquad (***)$$

Можно менять местами функции производных и суммы, тогда выражение (***) принимает вид:

$$\left(f_1+f_2\right)'=f_1'+f_2' \quad\Rightarrow\quad \frac{d\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{\mathrm{v}_i}\right)}{dt}=0.$$

Из последнего выражения следует **<u>закон сохранения импульса для замкнутой системы:</u> «Суммарный импульс замкнутой механической системы с течением времени не изменяется»**

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p_i}=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{\mathrm{v}_i}=\mathrm{const}; \qquad (1.34)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{\mathrm{v}_i}=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{u_i},$$

где $\overrightarrow{\mathrm{v}_i};\overrightarrow{u_i}$ – скорости тел системы до и после взаимодействия, соответственно.

**<u>Общий случай:</u>** ***если система незамкнутая, то изменение полного импульса системы равно равнодействующей внешних сил – второй закон динамики***:

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{\mathrm{v}_i}\right)}{dt}=\overrightarrow{F_{вн}}.$$

## 1.12. Понятие работы. Ее связь с энергией. Работа консервативной силы

В механике под работой понимают количественную характеристику движения, передающую от одних тел к другим в процессе их взаимодействия. Это чисто механическое понятие перешло в другие разделы физики, но в механике имеют дело с механической формой движения, поэтому работа – мера количества механического движения тела. Но единой формой движения является энергия. Это значит, что передача движения – это передача энергии. Следовательно, между работой и энергией (в любой ее форме) существует прямая связь, и измеряются они в одних единицах.

Хотя работа имеет ту же природу что и энергия, но это энергия в более узком смысле, поскольку:

1) работа связана с механической энергией,

2) работа связана только с той частью энергии, которая передается при взаимодействии.

3) всю работу можно превратить энергию, но всю энергию превратить в работу невозможно. Пример: работа силы трения полностью переходит во внутреннюю энергию трущихся тел, но перевести всю внутреннюю энергию сгоревшей порции топлива в энергию – невозможно (КПД $\eta<1$).

1. Работа всегда совершается за счет убывания любой формы энергии:

$$A=-\Delta E=E_1-E_2. \qquad (1.35)$$

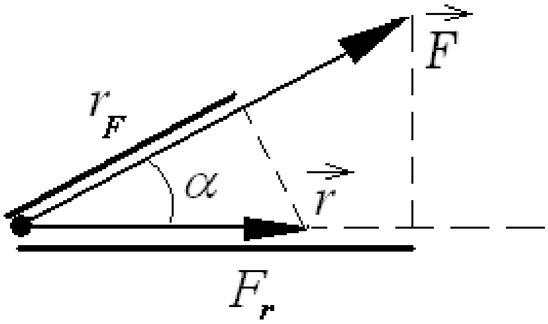



Рис. 1.15

Работа – скалярная величина, равная скалярному произведению векторов силы и перемещения (рис. 1.15):

$$A=\vec{F}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{F}=F\cdot r\cdot\cos\alpha=F_r\cdot r=r_F\cdot F\,, \tag{1.36}$$

где $\alpha=\left(\vec{F};\vec{r}\right)$, $F_r=F\cdot\cos\alpha$ – проекция вектора силы на направление вектора перемещения, $r_F=r\cdot\cos\alpha$ – проекция вектора перемещения на направление вектора силы.

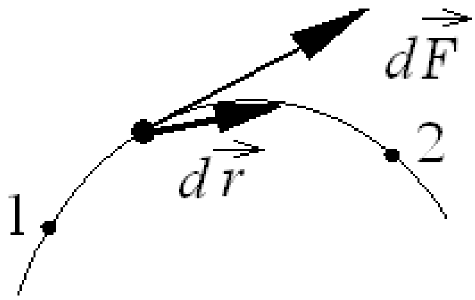



Рис. 1.16

По формуле (1.36) вычисляют работу постоянной силы $\left(\vec{F}=\text{const}\right)$. В общем случае, если сила изменяется при перемещении $\left(\vec{F}(r)\right)$, необходимо в диапазоне значений $\left[r_1;r_2\right]$ выбрать бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ (рис. 1.16), в пределах которого можно пренебречь изменением функции силы $\left(\vec{F}(r)\approx\text{const}\right)$. Этому перемещению соответствует элементарная работа $dA=\vec{F}(r)\cdot d\vec{r}$. Тогда полная работа составит сумму элементарных работ:

$$A=\int dA=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}(r)\cdot d\vec{r}\,. \tag{1.37}$$

По геометрическому смыслу $dA$ – площадь узкого столбика на графике функции силы (рис. 1.17). После разбиения всего на элементарные участки, площадь всей фигуры под графиком функции $F(r)$.

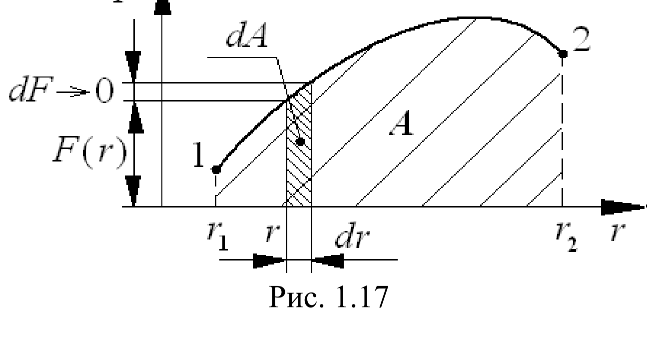



Рис. 1.17

***Если работа некоторой силы зависит только от начального и конечного положения тела, а не зависит от длины пути, то эта сила – <u>консервативная</u>.***

**Пример.** Сила тяжести – консервативная сила.

**Доказательство:** Пусть точечное тело массой $m$ находится вблизи поверхности Земли. Перемещение тела бесконечно мало по сравнению с радиусом планеты, поэтому можно считать силу тяжести неизменной $\vec{F} = m \cdot \vec{g} = \mathrm{const}$. Пусть тело перемещается из т.1 в т.2 по сложной траектории (рис. 1.18). Рассмотрим элемент перемещения т.1'→т.2', которому соответствует путь $dS$ и элементарное перемещение $d\vec{r}$. По определению элементарная работа на этом участке:

$$dA = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = m\vec{g} \cdot (dr \cdot \cos\alpha) = -mg \cdot dz.$$

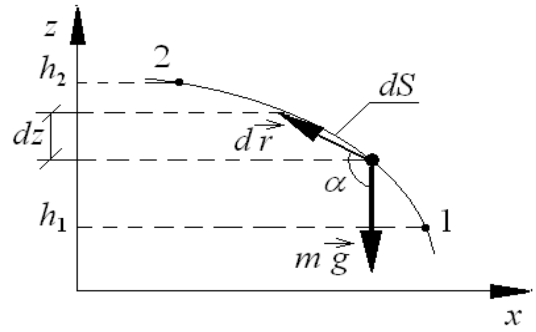



Рис. 1.18

В нашем случае высота меняется в пределах $z = [h_1; h_2]$ и полная работа:

$$A = \int dA = -mg \cdot \int_{h_1}^{h_2} dz = -mg \cdot z\Big|_{h_1}^{h_2} = mg(h_1 - h_2).$$

Доказано, что работа не зависит от траектории движения тела, т. е. сила тяжести является консервативной.

## 1.13. Кинетическая энергия поступательного движения

Мера механической формы движения носит название **<u>кинетической энергии</u>**, т. е. кинетическая энергия – это энергия тела в движении. Поскольку кинетическая энергия есть функция состояния движущегося тела, то она должна зависеть от его скорости.

По закону сохранения энергии работа сопровождается изменением энергии тела. Поэтому запас кинетической энергии может быть измерен работой, которую необходимо совершить для перевода тела из состояния покоя $(\vec{v}_1 = 0)$, в состояние движения $(\vec{v}_2 = \vec{v} \neq 0)$. Пусть тело массой $m = \mathrm{const}$ линейно перемещается в инерциальной системе отсчета в направлении действия силы $(\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v})$. Пусть на бесконечно малом перемещении $(dr \to 0)$ можно пренебречь изменением силы $(F \approx \mathrm{const})$. Тогда элементарная работа по определению составит:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot \cos 0 \cdot dr = F \cdot dr. \qquad (*)$$

Воспользуемся вторым законом динамики и определением скорости:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d\mathrm{v}}{dt}; \quad \mathrm{v} = \frac{dr}{dt}. \qquad (**)$$

С учетом соотношений (**) выражение (*) принимает вид:

$$E_к = A\Big|_0^{\mathrm{v}} = \int F \cdot dr = \int m \cdot a \cdot dr = \int \frac{m \cdot d\mathrm{v} \cdot dr}{dt} = m \cdot \int_0^{\mathrm{v}} \mathrm{v} \cdot d\mathrm{v} =$$

$$= \frac{m \cdot v^2}{2}\bigg|_0^v = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

**Кинетическая энергия при поступательном перемещении тела равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости:**

$$E_к = \frac{m \cdot v^2}{2}. \qquad (1.38)$$

Если скорость тела в процессе его движения изменяется в пределах $v_1 \to v_2$, то при этом совершается работа:

$$A = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} v \cdot dv = \frac{m \cdot v^2}{2}\bigg|_{v_1}^{v_2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = -\left(E_{к1} - E_{к2}\right) = -\Delta E_к.$$

**Случай 1:** скорость тела увеличивается:

$$v_2 > v_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \Delta E_к < 0.$$

Отрицательная работа совершается против сил инерции и идет на увеличение кинетической энергии тела.

**Случай 2:** скорость тела уменьшается:

$$v_2 < v_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \Delta E_к > 0.$$

Полезная работа совершается за счет уменьшения кинетической энергии тела.

## 1.14. Потенциальная энергия

**Энергия, которая обусловлена взаимодействием тел системы и определяется только их взаимным расположением, называется <u>потенциальной</u>.**

**Примеры:** энергия тела, поднятого на некоторую высоту, нужно совершить работу против силы тяжести, энергия упругой деформации тела.

Из этого определения видно, что изменение взаимного расположения тел системы приводит к изменению ее потенциальной энергии. Запас потенциальной энергии может быть измерен работой, которую необходимо совершить для перевода системы из одного состояния в другое, т. е. работой, которая расходована на изменение взаимного расположения тел системы. При этом возможны два случая:

- если такая работа совершается за счет внутренних сил (взаимодействия), то по закону сохранения энергии она совершается за счет уменьшения потенциальной энергии,
- если такая работа совершается внешними силами (против сил взаимодействия), то она расходуется на увеличение потенциальной энергии.

$$A = E_{п2} - E_{п1} = -\Delta E_п.$$

Наличие статической силы в некоторых случаях может создавать потенциальную энергию: сила тяжести, сила упругой деформации.

**Замечание:** сила трения не может накапливать энергию, а только превращает работу во внутреннюю энергию.

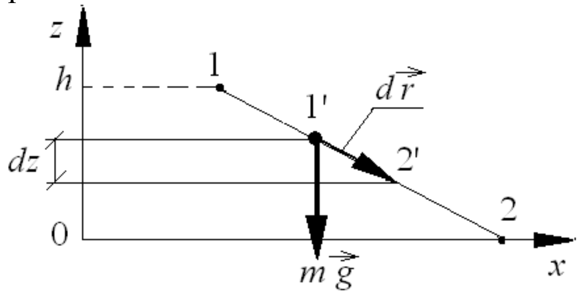



Рис. 1.19

### 1.14.1. Потенциальная энергия тела в гравитационном поле.

Если тело находится вблизи поверхности Земли, а его перемещение во много раз меньше радиуса планеты, то силу тяжести можно считать неизменной $\left(\vec{F} = m\vec{g} \approx \text{const}\right)$. Пусть тело перемещается с высоты $z_1 = h$ до $z_2 = 0$ по сложной траектории (рис. 1.19). Рассмотрим элементарное перемещение из 1' в 2', которому соответствует элемент перемещения $d\vec{r}$, вертикальная координата изменяется на $dz$. При этом совершается элементарная работа

$$dA = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg\left(dr \cdot \cos\alpha\right) = mg \cdot dz.$$

Тогда полная работа равна:

$$A = \int dA = \int_0^h mg \cdot dz = mg\int_0^h dz = mgz\Big|_0^h = mgh.$$

Поскольку работа совершается за счет убыли энергии, то

$$E_n = mgh. \tag{1.39}$$

### 1.14.2. Потенциальная энергия упругой деформации.

Рассмотрим однородный стержень длиной $l\left[м\right]$ с коэффициентом упругости $k\left[Н/м\right]$. Пусть в результате деформации (сжатия или растяжения) длина стержня изменяется на $\Delta x$ метров (рис. 1.20а). По закону Гука сила упругости:

$$F_{упр} = -kx,$$

где знак «–» означает, что смещение и сила упругости противоположно направлены.

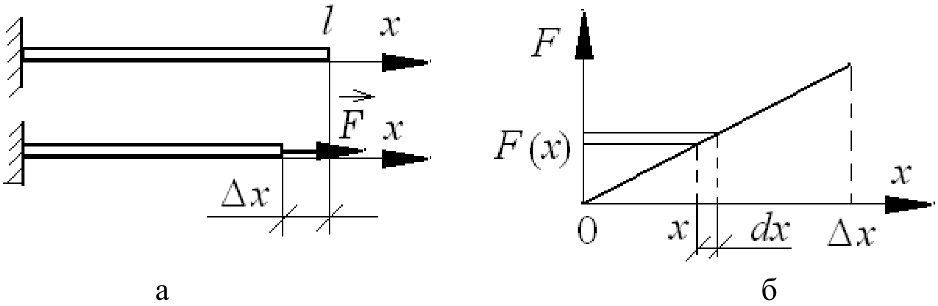



Рис. 1.20

Потенциальную энергию можно вычислить как работу внешней силы $\overrightarrow{F_{вн}} = -\overrightarrow{F_{упр}}$ против силы упругости: $E_n = A\Big|_0^{\Delta x}$. Пусть деформация находится в диапазоне значений $x = \left[0;\Delta x\right]$. На бесконечно малом приращении $\left(dx \to 0\right)$ можно считать силу постоянной $F_{вн} = kx \approx \text{const}$ (рис. 1.20б). Тогда элементарная работа:

$$dA = F_{вн} \cdot dx = kx \cdot dx.$$

Полная работа, равная потенциальной энергии упругой деформации:

$$E_n = A = \int dA = k\int_0^{\Delta x} x \cdot dx = k\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\Delta x} = \frac{k\left(\Delta x\right)^2}{2}. \tag{1.40}$$

## 1.15. Закон сохранения энергии в механике

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из $i = \left[1;n\right]$ тел с массами:

$$m_i = \left\{m_1; m_2; \ldots m_n\right\}.$$

Между парами тел действуют только внутренние силы:

$$\vec{F}_{ij} = \left\{\vec{F}_{12}; \vec{F}_{21}; \ldots \vec{F}_{ij}; \vec{F}_{ji}; \ldots \vec{F}_{(n-1)n}\right\}, \text{ где } i \neq j; \quad i, j = \left[1;n\right].$$

Рассмотрим *i*-тело. Пусть под действием равнодействующей силы оно совершает перемещение $d\vec{r_i}$, в пределах которого можно считать равнодействующую силу постоянной. При этом *i*-тело совершает элементарную работу:

$$dA_i = \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i}\,, \tag{*}$$

где $\vec{F_i} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к *i*-телу со стороны всех остальных тел системы. Воспользуемся II законом динамики и определением ускорения. Тогда выражение (*) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= m_i \cdot a_i; \\ a_i &= \frac{d\mathrm{v}_i}{dt}; \\ \mathrm{v}_i &= \frac{dr_i}{dt}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ dA_i = m_i \frac{dr_i \cdot d\mathrm{v}_i}{dt} = \frac{m_i \cdot \mathrm{v}_i \cdot d\mathrm{v}_i}{dt} = d\left(\frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}\right).$$

Просуммируем элементарные работы, совершаемые всеми телами системы:

$$\sum_{i=1}^{n} dA_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}\right) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}\right) = \Delta E_к\,. \tag{**}$$

В выражении (**) учтено, что можно менять местами функции дифференцирования и суммирования. Справа в выражении (**) стоит полный дифференциал изменения кинетической энергии системы, а слева – сумма элементарных работ, совершаемых внутренними силами системы. Но в замкнутой системе действуют только консервативные силы, поэтому полезная работа совершается только за счет уменьшения потенциальной энергии системы:

$$\Delta E_к = -\Delta E_п\ ; \qquad \Delta\left(E_к + \Delta E_к\right) = 0\,; \qquad E_к + \Delta E_к = \mathrm{const}\,. \tag{1.41}$$

Выражение (1.41) – **<u>закон сохранения энергии в механике:</u> «Если в замкнутой системе действует только консервативные силы, то полная механическая энергия этой системы, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, с течением времени не изменяется».**

**<u>Примечание:</u>** В такой системе отсутствует превращение механической энергии в другие виды. Увеличение кинетической энергии сопровождается равным уменьшением потенциальной и наоборот.

## 1.16. Применение законов сохранения к соударению тел

При соударении тела всегда в той или иной мере испытывают деформацию. При этом кинетическая энергия может переходить:

- в потенциальную энергию упругой деформации (механическая форма),
- в немеханические формы энергии (например, внутренняя энергия).

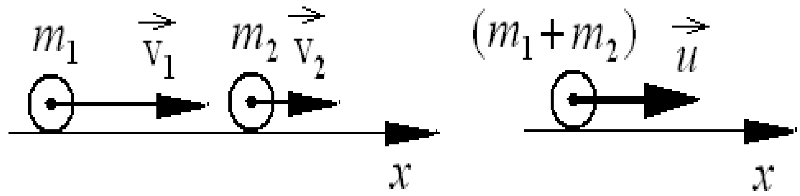
**Виды соударений:**

1) абсолютно неупругий удар (предельный случай);
2) абсолютно упругий удар (предельный случай);
3) частично упругий удар (реальный случай).

### 1.16.1. Абсолютно неупругий центральный удар.

**<u>Абсолютно неупругим</u>** ***называется соударение, при котором не возникает потенциальной энергии упругой деформации, а кинетическая энергия частично или полностью переходит в немеханические виды энергии (часто во внутреннюю энергию).*** При центральном ударе вектора начальных скоростей лежат на линии, соединяющей центры инерции тел. В этом случае имеет место одна стадия сближения тел, в конце которой сила взаимодействия становится максимальной. Затем тела перемещаются как единое целое с одинаковой скоростью.

Для простоты рассмотрим два тела с массами $m_1$ и $m_2$, которые до удара перемещались вдоль одной линии со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. 1.21а). После удара они слипаются и двигаются как одно тело с массой $\left(m_1+m_2\right)$ и скоростью $\vec{u}$ (рис. 1.21б). Необходимо вычислить скорость после удара $\vec{u}$ рассеяние энергии $\Delta E$.




а б

Рис. 1.21

По закону сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\left(m_1+m_2\right)\vec{u}; \qquad m_1 v_1+m_2 v_2=\left(m_1+m_2\right)u.$$

Скорость после неупругого удара:

$$\vec{u}=\frac{m_1 v_1+m_2 v_2}{m_1+m_2}. \tag{1.42}$$

**Частный случай 1.** Лобовой удар, когда $\vec{v}_1 \uparrow\downarrow \vec{v}_2$, то в скалярной форме принимаем $\left(+v_1\right)$ и $\left(-v_2\right)$. Формула (1.42) принимает вид:

$$\vec{u}=\frac{m_1 v_1-m_2 v_2}{m_1+m_2}.$$

**Частный случай 2.** Масса первого тела во много раз меньше второго: $m_1 \ll m_2$.

$$u=\lim_{m_1 \ll m_2}\left(\frac{\frac{m_1}{m_2}v_1+\frac{m_2}{m_2}v_2}{\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_2}{m_2}}\right)\to v_2.$$

В этом случае скорость системы определяется скоростью массивного тела.

Вычислим изменение кинетической энергии системы после неупругого удара.

$$\Delta E=E_к-(E_{к1}+E_{к2})=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}-\left(\frac{m_1 v_1^2+m_2 v_2^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{(m_1+m_2)(m_1 v_1+m_2 v_2)^2}{2(m_1+m_2)^2}-\frac{m_1 v_1^2}{2}-\frac{m_2 v_2^2}{2}=$$

$$=\frac{m_1^2 v_1^2+m_2^2 v_2^2+2m_1 v_1 m_2 v_2-m_1^2 v_1^2-m_1 m_2 v_1^2-m_1 m_2 v_2^2-m_2^2 v_2^2}{2(m_1+m_2)}=$$

$$=\frac{-m_1 m_2(v_1^2-2v_1 v_2+v_2^2)}{2(m_1+m_2)}=\frac{-m_1 m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}.$$

Знак «–» означает, что энергия при абсолютно неупругом ударе превращается во внутреннюю энергию тел:

$$\Delta E = -\frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} < 0. \qquad (1.43)$$

## 1.16.2. Абсолютно упругий удар.

**Абсолютно упругим** ***называется соударение, при котором не происходит диссипации механической энергии в другие формы.*** Тела после соударения полностью восстанавливает свою форму и размеры. Энергия системы после удара остается неизменной.

**Стадии упругого удара:**

1) сближение;
2) стадия упругой деформации контактируемых тел;
3) после восстановления формы тела взаимно удаляются с новыми скоростями.

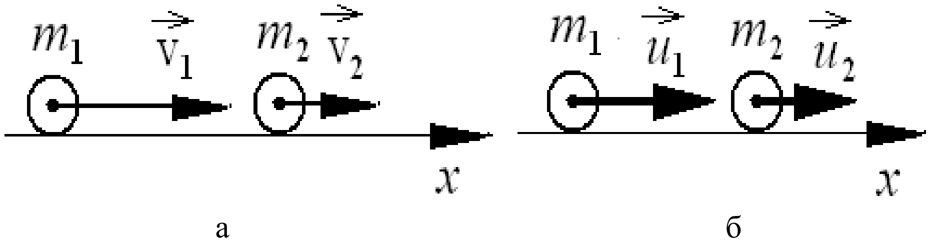



Рис. 1.22

Для простоты рассмотрим два тела с массами $m_1$ и $m_2$, которые до удара перемещались вдоль одной линии со скоростями $\vec{\mathrm{v}}_1$ и $\vec{\mathrm{v}}_2$ (рис. 1.22а). Необходимо вычислить их скорости после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (рис. 1.22б). Воспользуемся:

- законом сохранения импульса

$$m_1 \cdot \mathrm{v}_1 + m_2 \cdot \mathrm{v}_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2, \qquad (1^*)$$

- законом сохранения энергии

$$\frac{m_1 \cdot \mathrm{v}_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot \mathrm{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot u_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot u_2^2}{2}. \qquad (2^*)$$

Преобразуем выражения (1*) и (2*):

$$m_1\left(u_1 - \mathrm{v}_1\right) = m_2\left(\mathrm{v}_2 - u_2\right), \qquad (3^*)$$

$$m_1\left(u_1^2 - \mathrm{v}_1^2\right) = m_2\left(\mathrm{v}_2^2 - u_2^2\right). \qquad (4^*)$$

Разделим почленно выражение (4*) на выражение (3*):

$$u_1 + \mathrm{v}_1 = u_2 + \mathrm{v}_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = u_1 + \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2. \qquad (5^*)$$

После подстановки выражения (5*) в формулу (1*) имеем:

$$m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_2 = m_1u_1 + m_2u_1 + m_2\mathrm{v}_1 - m_2\mathrm{v}_2;$$

$$\Downarrow$$

$$u_1\left(m_1 + m_2\right) = m_2\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_1\left(m_1 - m_2\right).$$

Окончательно имеем:

$$u_1 = \frac{2m_2 \cdot \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_1\left(m_1 - m_2\right)}{m_1 + m_2}. \qquad (1.44)$$

После подстановки (1.44) в (5*) имеем:

$$u_2 = \frac{2m_1 \cdot \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\left(m_2 - m_1\right)}{m_1 + m_2}. \qquad (1.45)$$

**Частный случай 1.** Упругий удар тел одинаковой массы: $m_1 = m_2 = m$.

$$u_1=\frac{2m\cdot v_2+v_1(m-m)}{m+m}=v_2;$$

$$u_2=\frac{2m\cdot v_1+v_2(m-m)}{m+m}=v_1.$$

Происходит обмен скоростями.

**Частный случай 2.** Масса второго тела во много раз меньше массы первого:

$$u_1=\frac{2m_2\cdot v_2+v_1\left(m_1-m_2\right)}{m_1+m_2}=\frac{2v_2+v_1\left(\frac{m_1}{m_2}-1\right)}{\frac{m_1}{m_2}+1}\approx 2v_2-v_1;$$

$$u_2=\frac{2m_1\cdot v_1+v_2\left(m_2-m_1\right)}{m_1+m_2}=\frac{2v_1\cdot\frac{m_1}{m_2}+v_2\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right)}{\frac{m_1}{m_2}+1}\approx v_2.$$

Поскольку $u_1\approx 2v_2-v_1; u_2=v_2$, то скорость системы после взаимодействия определяется скоростью массивного тела.

## 1.17. Понятие абсолютно твердого тела (АТТ). Центр инерции (масс) тела

**Абсолютно твердое тело (АТТ)** ***такое – тело, которое не меняет ни формы, ни размеров под действием внешних сил.*** Такое тело можно рассматривать как систему жестко связанных между собой материальных точек.

**Движение** тела называется **поступательным**, если любая, жестко связанная с ним линия (прямая), в процессе перемещения остается параллельной первоначальному направлению.

При **вращательном движении** все точки тела перемещаются по окружностям разных радиусов, центры которых лежат на условной прямой линии – **оси вращения**. Если ось не меняет положения, то она – **статическая**; если изменяет – **динамическая**. Если речь идет о динамической оси в конкретный момент времени, то она – **мгновенная ось** вращения.

**Замечание:** При поступательном перемещении все точки имеют постоянную линейную скорость $\left(\vec{v}=\text{const}\right)$. При вращении угловые скорости всех точек тела одинаковы.

Движение тела всегда можно представить как комбинацию нескольких поступательных и нескольких вращательных движений.

**Плоскопараллельным** называется комбинация нескольких поступательных и нескольких вращательных движений тела, когда в процессе движения тело находится в одной плоскости.

Пусть произвольное тело массой $m$ совершает сложное перемещение. Разобьем АТТ на $i=[1;n]$ элементарных тел массами $m_i$ таким образом, что каждое из них можно считать точечным. На каждую из точек действуют внутренние силы $\overrightarrow{f_{ik}}$ и внешней силы $\overrightarrow{F_i}$. Очевидно, что вся масса тела $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$. Под действием равнодействующих внутренних и внешних сил каждая материальная точка получает ускорение $\overrightarrow{a_i}$. По II закону динамики:

$$m_i\overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{F_i}+\overrightarrow{f_{ik}}. \tag{1*}$$

Просуммируем почленно уравнения системы (1*):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{a_i} = \sum_{\substack{k,i=1 \\ i\neq k}}^{n} \overrightarrow{f_{ik}} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} . \qquad (2^*)$$

По III закону динамики:

$$\overrightarrow{f_{ik}} + \overrightarrow{f_{ki}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{f_{ik}} = 0 .$$

Поэтому в выражении (2*) остается равнодействующая внешних сил, приложенных к разным участкам тела:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{a_i} . \qquad (3^*)$$

Из множества $i = [1;n]$ элементов АТТ всегда можно найти один, для которого справедлив II закон динамики:

$$\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{a_c} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i . \qquad (4^*)$$

Эта точка называется **центр инерции (масс)** абсолютно твердого тела. Если в некоторой задаче АТТ заменено материальной точкой, то речь идет именно о его центре инерции.

Из выражений (3*) и (4*) получим **ускорение** центра инерции АТТ:

$$\overrightarrow{a_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{a_i}}{m} . \qquad (1.46)$$

**Скорость** центра инерции можно получить путем интегрирования выражения (1.46). Воспользовавшись правилом изменения последовательности интегрирования и суммирования, имеем:

$$\overrightarrow{\mathrm{v}_c} = \int \overrightarrow{a_c} \cdot dt = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int m_i \overrightarrow{a_i} \cdot dt}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( m \cdot \int \overrightarrow{a_i} \cdot dt \right)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\mathrm{v}_i}}{m} \quad \to \quad \overrightarrow{\mathrm{v}_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\mathrm{v}_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} . \qquad (1.47)$$

Перемещение центра инерции получаем интегрированием выражения (1.47):

$$\overrightarrow{r_c} = \int \overrightarrow{\mathrm{v}_c} \cdot dt = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \cdot \int \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\mathrm{v}_i} \cdot dt = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( m_i \cdot \int \overrightarrow{\mathrm{v}_i} \cdot dt \right)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i}}{m} .$$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \Rightarrow \quad \left\{ x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{m} \right\} \quad \Rightarrow \qquad (1.48)$$

$$\Rightarrow \quad r_c = \sqrt{(x_c)^2 + (y_c)^2 + (z_c)^2} .$$

**Пример.** Однородный стержень длиной $l = 1\text{м}$, массой $m$ имеет ось вращения на расстоянии $l/4$ от верхнего конца (рис. 1.23). На верхнем конце, закреплено точечное тело массой $2m$, на нижнем – цилиндр радиусом $R = 0.1 \cdot l = 0.1м$ и массой 3m. Найти положение центра масс $x_c$.

**Решение.** Расстояния от оси до центра инерций составных частей тела:

$$x_1 = 0.25 \cdot l; \quad x_2 = -0.25 \cdot l; \quad x_3 = 0.85 \cdot l.$$

Воспользуемся формулой (1.48):

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0.25 m \cdot l - 2m \cdot 0.25 \cdot l + 3m \cdot 0.85 \cdot l}{m + 2m + 3m} = 0.55 \cdot l = 0.55м.$$

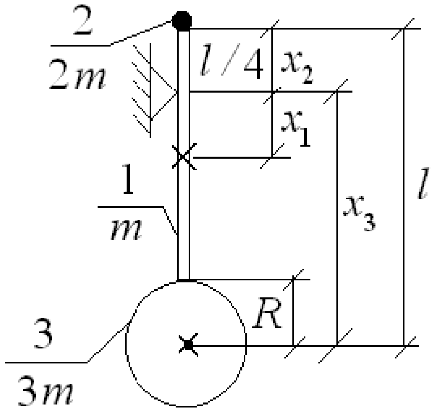



Рис. 1.23

Формулами (1.47), (1.48), (1.49) можно пользоваться, если АТТ состоит из нескольких простых тел. Если тело неоднородно, то заданная функция плотности зависит от координат: $\rho(x; y; z) \equiv \rho(V)$. Пусть в элементарном объеме тела $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ плотность неизменна $\rho \approx \text{const}$. Тогда

$$\begin{cases} \vec{a}_c = \dfrac{\int\limits_V \rho \vec{a}_i \cdot dV}{\int\limits_V \rho \cdot dV} = \dfrac{\iiint\limits_{xyz} \rho \vec{a}_i \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_{xyz} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz}; \\ \vec{\mathrm{v}}_c = \dfrac{\int\limits_V \rho \vec{\mathrm{v}}_i \cdot dV}{\int\limits_V \rho \cdot dV} = \dfrac{\iiint\limits_{xyz} \rho \vec{\mathrm{v}}_i \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_{xyz} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz}; \\ \vec{r}_c = \dfrac{\int\limits_V \rho \vec{r}_i \cdot dV}{\int\limits_V \rho \cdot dV} = \dfrac{\iiint\limits_{xyz} \rho \vec{r}_i \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_{xyz} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz}. \end{cases} \tag{1.49}$$

## 1.18. Кинетическая энергия вращательного движения тела. Момент инерции тела. Полная кинетическая энергия тела

Рассмотрим абсолютно твердое тело (АТТ), которое вращается с постоянной угловой скоростью $(\vec{\omega} = \text{const})$ вокруг постоянной оси. Для того чтобы телу, имеющему ось, сообщить угловую скорость $\vec{\omega}$, необходимо совершить некоторую работу. Следовательно, существует кинетическая энергия вращательного движения.

Условно разделим АТТ на множество материальных точек массами $dm$, с радиус-векторами точек $\vec{r}$ и линейными скоростями $\vec{\mathrm{v}}$. Кинетическая энергия материальной точки:

$$\begin{cases} dE = \dfrac{dm\cdot \mathrm{v}^2}{2} = \dfrac{dm\cdot(\omega\cdot r)^2}{2} = \dfrac{\left(dm\cdot r^2\right)\cdot\omega^2}{2} = \dfrac{\omega^2\cdot dJ}{2}; \\ \mathrm{v} = \omega\cdot r. \end{cases}$$

***Назовем** <u>**моментом инерции**</u> **материальной точки скалярную величину, равную произведению массы тела на квадрат расстояния до оси вращения***

$$J = m\cdot r^2 \left[кг\cdot м^2\right]. \tag{1.50}$$

Тогда кинетическая энергия вращательного движения:

$$E_{вр} = \int \frac{\omega^2}{2}\cdot dJ = \frac{\omega^2}{2}\cdot\int dJ = \frac{J\cdot\omega^2}{2}. \tag{1.51}$$

**Кинетическая энергия поступательного движения равна половине произведения момента инерции тела на квадрат его угловой скорости.**

**Примечание.** В отличии от поступательного, при вращательном движении инертность тела зависит не только от массы, а также от размеров и формы тела. В случае материальной точки – это расстояние до оси вращения.

<u>**Полная кинетическая энергия**</u> ***движения абсолютно твердого тела равна сумме кинетических энергий его поступательного и вращательного движений*:**

$$E_к = E_{пост} + E_{вр} = \frac{m\cdot\mathrm{v}^2}{2} + \frac{J\cdot\omega^2}{2}. \tag{1.52}$$

К моменту инерции тела применим принцип аддитивности:

1. Если тело состоит из конечного числа дискретных (отдельных) простых тел, то берется сумма моментов инерции всех этих элементов:

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n = \sum_{i=1}^{n} J_i. \tag{1.53}$$

2. Если масса равномерно распределена по длине, поверхности или объему тела и невозможно выделить отдельные элементы конструкции, то условно разбивают тело на множество материальных точек, вычисляют элементарный момент инерции (функция координаты), затем полученную функцию интегрируют:

$$J = \int dJ = \int r_i^2\cdot dm. \tag{1.54}$$

## 1.19. Моменты инерции однородных тел

**Моментом инерции материальной точки** называется скалярная величина, равная произведению массы тела на квадрат расстояния до оси вращения:

$$J = m\cdot r^2\left[кг\cdot м^2\right].$$

Если ось вращения проходит через центр инерции тела, то имеет место **собственный момент инерции** $(J_0)$, при другом расположении оси – произвольный момент инерции $(J)$.

### 1.19.1. Момент инерции однородного стержня.

Рассмотрим стержень массой $m$, которая равномерно распределяя по всей его длине $l$. Т.к. стержень однородный, то по всей его длин площадь поперечного сечения и плотность материала не изменяются: $S = \mathrm{const}$; $\rho = \mathrm{const}$. Линейная плотность стержня – масса единицы его длины: $\tau = \dfrac{m}{l}\left[\dfrac{кг}{м}\right]$.

**1. Ось вращения проходит через центр инерции.** Произвольным образом выделим на расстоянии от оси стержня $r = [-l/2; +l/2]$ точечный элемент длиной $(dr \to 0)$, масса которого $dm = \tau\cdot dr$ (рис. 1.24). Для материальной точки элементарный момент инерции:

$$dJ = dm \cdot r^2 = \tau \cdot r^2 \cdot dr\,.$$

По принципу аддитивности имеем:

$$J_0 = \int dJ = \tau \cdot \int\limits_{-l/2}^{+l/2} r^2 \cdot dr = \left.\frac{\tau \cdot r^3}{3}\right|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{\tau}{3} \cdot \left(\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right) = \frac{\tau \cdot l^3}{12} = \frac{m \cdot l^3}{12 \cdot l} = \frac{m \cdot l^2}{12}\,.$$

Собственный момент инерции однородного стержня равен одной двенадцатой от произведения массы стержня на квадрат его длины:

$$J_0 = \frac{m \cdot l^2}{12}\,. \tag{1.55}$$

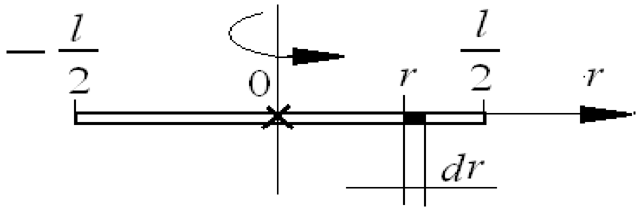



Рис. 1.24

**2. Ось вращения находится на конце стержня.** Произвольным образом выделим

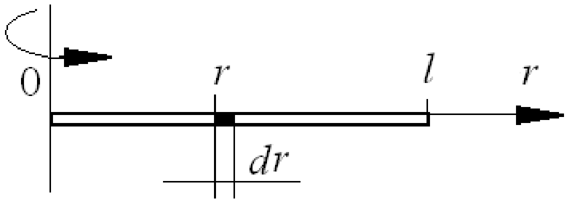



Рис. 1.25

на расстоянии от оси стержня $r = [0; l]$ точечный элемент длиной $(dr \to 0)$, масса которого $dm = \tau \cdot dr$ (рис. 1.25). Для материальной точки элементарный момент инерции:

$$dJ = dm \cdot r^2 = \tau \cdot r^2 \cdot dr\,.$$

По принципу аддитивности имеем:

$$J = \int dJ = \tau \cdot \int\limits_0^l r^2 \cdot dr = \left.\frac{\tau \cdot r^3}{3}\right|_0^l = \frac{\tau}{3} \cdot \left(l^3 - 0\right) = \frac{\tau \cdot l^3}{3} = \frac{m \cdot l^3}{3 \cdot l} = \frac{m \cdot l^2}{3}\,.$$

Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его конец, равен одной трети от произведения массы стержня на квадрат его длины:

$$J = \frac{m \cdot l^2}{3}\,. \tag{1.56}$$

**Замечание:** Собственный момент инерции тела всегда минимальный.

### 1.19.2. Собственный момент инерции тонкостенного цилиндра (кольцо, труба).

Однородный цилиндр $\left(\rho\left[кг/м^3\right] = \text{const}\right)$, толщина стенки которого во много раз меньше среднего радиуса $(h << R)$, ось вращения проходит через центр масс (рис. 1.26).

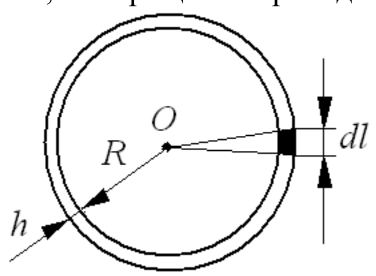



Рис. 1.26

Пусть $\tau = \dfrac{m}{l} = \dfrac{m}{2\pi R}\left[\dfrac{кг}{м}\right]$ – линейная плотность кольца. Выделим произвольным образом в пределах кольца $\left(l = [0; 2\pi R]\right)$ точечный элемент длиной $\left(dl \to 0\right)$. Очевидно его масса $dm = \tau \cdot dl$, а элементарный момент инерции:

$$dJ = R^2 \cdot dm = \tau \cdot R^2 \cdot dl .$$

По принципу аддитивности имеем:

$$J_0 = \int dJ = \tau \cdot R^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi R} dl = \tau \cdot R^2 \cdot l\Big|_0^{2\pi R} = 2\pi R^3 \cdot \tau = m \cdot R^2 .$$

Собственный момент инерции однородного кольца (тонкостенного цилиндра, трубы) равен произведению его массы на квадрат среднего радиуса:

$$J = m \cdot R^2 . \tag{1.57}$$

### 1.19.1. Момент инерции однородного цилиндра (диска).

Рассмотрим однородный цилиндр, у которого одинаковы площадь поперечного сечения $\left(S = \text{const}\right)$ и плотность материала, $\left(\rho = \text{const}\right)$, т. е. вся масса $m$ равномерно распределена по площади его основания $\left(S_{цил} = \pi R^2\right)$. Поверхностная плотность тела:

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}\left[\frac{кг}{м^2}\right] .$$

Произвольно внутри цилиндра (рис. 1.27) построим окружность радиуса $r = \left[0; R\right]$ и кольцо бесконечно малой толщины $dr \ll R$. На кольце выделим сегмент бесконечно малой длины $\left(dl \to 0\right)$, который можно считать материальной точкой массой $dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot dl \cdot dr$. Его момент инерции:

$$d^2 J = \sigma \cdot r^2 \cdot dr \cdot dl . \tag{*}$$

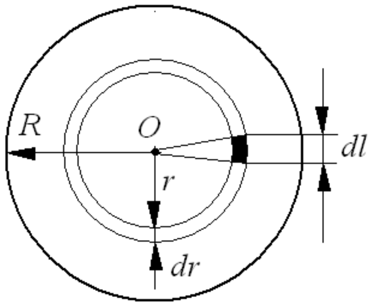



Рис. 1.27

**<u>Математические сведения.</u>** Величина (*) представляет двойной дифференциал от второй смешанной производной функции двух переменных $f\left(x; y\right)$:

$$f\left(x; y\right) \;\to\; f'' = \frac{d^2 f}{dx \cdot dy} \;\to\; d^2 f = f'' \cdot dx \cdot dy \;\to\; f = \iint\limits_{x,y} f'' \cdot dx \cdot dy .$$

По принципу аддитивности находим полный момент инерции цилиндра (диска):

$$J_0 = \int\limits_l \int\limits_r d^2 J = \int\limits_0^{2\pi R} \int\limits_0^{r} \sigma \cdot r^2 \cdot dr \cdot dl. \tag{**}$$

Учтем, что $\sigma = \text{const}$, а порядок интегрирования не имеет значения. Кроме того аргументы $r$ и $l$ не зависят друг от друга. Тогда выражение (**) принимает вид:

$$J_0 = \int\limits_l \int\limits_r d^2 J = \int\limits_0^{2\pi R} \int\limits_0^{r} \sigma \cdot r^2 \cdot dr \cdot dl = \sigma \cdot \int\limits_0^{R} \left[ \int\limits_0^{2\pi r} r^2 \cdot dl \right] \cdot dr =$$

$$= \sigma \cdot \int_0^R \left[ r^2 \cdot \int_0^{2\pi r} dl \right] \cdot dr = \sigma \cdot \int_0^R \left[ r^2 \, l \Big|_0^{2\pi r} \right] \cdot dr = \sigma \cdot 2\pi \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr =$$

$$= 2\pi \sigma \cdot \frac{r^4}{4} \bigg|_0^R = \frac{2\pi \sigma \cdot R^4}{4} = \frac{2\pi m R^4}{4\pi R^2} = \frac{m R^2}{2} .$$

Собственный момент инерции однородного цилиндра (диска) равен половине произведения его массы на квадрат радиуса:

$$J_0 = \frac{m R^2}{2} . \tag{1.58}$$

**Вывод:** увеличение радиуса цилиндра при неизменной массе приводит к большему увеличению момента инерции, чем эквивалентное увеличение его массы при неизменном радиусе.

## 1.20. Теорема Штейнера. Применение для вычисления момента инерции

Рассмотрим тело произвольной формы массой $m[кг]$, у которого ось вращения смещена относительно центра инерции на расстояние $a[м]$. Необходимо вычислить момент инерции тела.

**Теорема Штейнера: «Момент инерции абсолютно твердого тела относительно произвольной оси вращения равен сумме его собственного момента инерции и произведения массы тела на квадрат расстояния от оси вращения до центра инерции».**

$$J = J_0 + m \cdot a_c^2 . \tag{1.59}$$

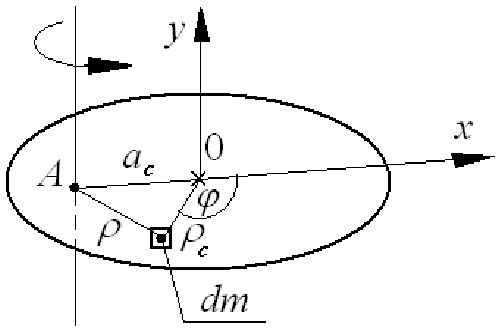



Рис. 1.28

**Доказательство:**

Рассмотрим тело (рис. 1.28) с центром инерции в т. О и осью вращения в т. А. Через т. А и т. О проведем ось $x$, а параллельно оси вращения – ось $y$. Произвольным образом выделим на поверхности тела элементарный участок массой $dm$, который можно считать материальной точкой. Введены обозначения:

$\rho$ – расстояние от оси до выделенной точки тела,

$\rho_c$ – расстояние от точки тела до его центра инерции,

$a_c$ – расстояние между осью вращения и центром инерции тела.

Момент инерции материальной точки:

$$dJ = dm \cdot \rho^2 .$$

По принципу аддитивности полный момент инерции тела:

$$J = \int dJ = \int_m \rho^2 \cdot dm . \tag{1*}$$

по теореме косинусов имеем:

$$\rho^2 = \rho_c^2 + a_c^2 - 2\rho_c \cdot a_c \cdot \cos(180° - \varphi) = \rho_c^2 + a_c^2 + 2\rho_c \cdot a_c \cdot \cos\varphi . \tag{2*}$$

С учетом выражения (2*) формула (1*) принимает вид:

$$J=\int\limits_m \rho_c^2\cdot dm+\int\limits_m a_c^2\cdot dm+2\cdot\int\limits_m a_c\cdot\rho_c\cdot\cos\varphi\cdot dm. \qquad (3^*)$$

<u>Анализ выражения (3*):</u>

1. Т.к. $a_c=\text{const}$, то

$$\int\limits_m a_c^2\cdot dm=a_c^2\cdot\int\limits_m dm=m\cdot a_c^2. \qquad (4^*)$$

2. По определению собственного момента инерции:

$$\int\limits_m \rho_c^2\cdot dm=J_0. \qquad (5^*)$$

3. Т. к. центр координат совпадает с центром масс, то

$$\int\limits_m a_c\cdot\rho_c\cdot\cos\varphi\cdot dm=a_c\cdot\int\limits_m \rho_c\cdot\cos\varphi\cdot dm=0. \qquad (6^*)$$

После подстановки (4*), (5*), (6*) в выражение (3*), имеем:

$J=J_0+m\cdot a_c^2$. **Теорема доказана.**

**Пример 1:** Однородный стержень массой $m$ и длиной $l$ с осью вращения на конце:

$$J_0=\frac{ml^2}{12};\ a_c=\frac{l}{2};\quad\Rightarrow\quad J=J_0+ma_c^2=\frac{ml^2}{12}+\frac{ml^2}{4}=\frac{4ml^2}{12}=\frac{ml^2}{3}.$$

**Пример 2:** Однородный диск массой $m$ и радиусом $R$ с осью вращения на образующей:

$$J_0=\frac{mR^2}{2};\ a_c=R;\quad\Rightarrow\quad J=J_0+ma_c^2=\frac{mR^2}{2}+mR^2=1.5mR^2.$$

## 1.21. Момент импульса. Вращающий момент силы. Второй закон динамики для вращательного движения

Одна и та же сила, приложенная к рычагу разной длины, приводит к различным угловым ускорениям. Для учета этого фактора вводится понятие вращающего момента силы (рис. 1.29).

<u>**Вращающий момент**</u> – ***это векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на вектор этой силы*:**

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}\quad\to\quad M=F\cdot(r\cdot\sin\alpha)=F\cdot l, \qquad (1.60)$$

где $\alpha=\left(\vec{r};\vec{F}\right)$, $l=r\cdot\sin\alpha$ – длина нормали, проведенная от оси вращения к линии действительной силы, называется **плечом**.

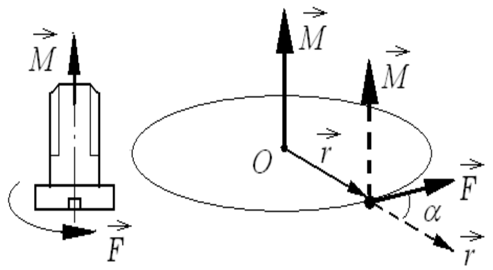



Рис. 1.29

Если виртуальный винт с правой резьбой вращать в направлении приложенной силы, то его линейное перемещение совпадает с направлением вращающего момента.

Величина вращающего момента пропорциональна синусу угла между радиус-вектором и вектором силы, поэтому

- максимальное значение соответствует условию:

$$\vec{F}\perp\vec{r}\quad\to\quad\alpha=\{90°;270°\}\quad\to\quad M_{\max}=F\cdot r;$$

- минимальное значение соответствует условию:

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \quad \to \quad \alpha = \{0°;180°\} \quad \to \quad M_{\min} = 0.$$

**Парой сил** ***называются две равные по величине и противоположно направленные силы, линии, действия которых не совпадают*** (рис. 1.30). Силы $\vec{F_1} = \vec{F}$ и $\vec{F_2} = -\vec{F}$ создают вращающие моменты одного направления, т. е. результирующий вращающий момент пары сил равен их сумме:

$$\begin{cases} \vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2}; \\ M = M_1 + M_2 = \dfrac{F \cdot r \cdot \sin\alpha}{2} + \dfrac{F \cdot r \cdot \sin\alpha}{2} = F \cdot r \cdot \sin\alpha. \end{cases} \tag{1.61}$$

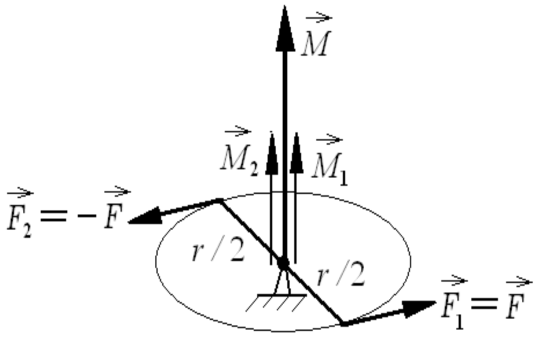



Рис. 1.30

Условно разделим тело на систему элементарных точечных тел массами $\Delta m_i$, где $i = [1; n]$, которые вращается вокруг общей оси с угловой скоростью $\vec{\omega} = \text{const}$. Линейная скорость точки $\vec{\mathrm{v}_i}$, ускорение $\vec{a_i}$. Рассмотрим замкнутую механическую систему. Равнодействующая внешних сил на отдельный элемент тела обозначим $\vec{F_i}$. По II закону Ньютона:

$$\frac{d\left(\Delta m_i \vec{\mathrm{v}_i}\right)}{dt} = \vec{F_i} + \vec{f_i},$$

где $\vec{F_i}$ и $\vec{f_i}$ – равнодействующие внешних и внутренних сил, приложенных к *i*-телу. Просуммируем это выражение для всех точек тела и поменяем последовательность функций суммирования и дифференцирования:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\left(\Delta m_i \vec{\mathrm{v}_i}\right)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i \vec{\mathrm{v}_i}\right). \tag{1*}$$

Умножим векторное выражение (1*) на радиус-вектор точки:

$$\vec{r_i} \times \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i \cdot \vec{\mathrm{v}_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r_i} \times \vec{F_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r_i} \times \vec{f_i}\right). \tag{2*}$$

Проанализируем вспомогательное выражение (2*):

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r_i}}{dt} \times \vec{\mathrm{v}_i} = \vec{\mathrm{v}_i} \times \vec{\mathrm{v}_i} = \mathrm{v}_i \cdot \mathrm{v}_i \cdot \sin 0 = 0; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\vec{r_i} \times \Delta m_i \cdot \vec{\mathrm{v}_i}\right) = \Delta m_i \cdot \dfrac{d\vec{r_i}}{dt} \times \vec{\mathrm{v}_i} + \vec{r_i} \times \dfrac{d\left(\Delta m_i \cdot \vec{\mathrm{v}_i}\right)}{dt} = \\ = \vec{r_i} \times \dfrac{d\left(\Delta m_i \cdot \vec{\mathrm{v}_i}\right)}{dt}. \end{cases} \tag{3*}$$

С учетом (3*) выражение (2*) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i}\times\Delta m_i\cdot\vec{\mathrm{v}_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i}\times\vec{F_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i}\times\vec{f_i}\right). \qquad (4^*)$$

**<u>Анализ правой части выражения (4*):</u>**

- По определению первое слагаемое – равнодействующий вращающий момент внешних сил: $\vec{r_i}\times\vec{F_i}=\vec{M_i}$. Результирующий вращающий момент внешних сил, приложенных к телу, по принципу суперпозиции: $\vec{M_i}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M_i}$.
- Результирующий вращающий момент внутренних сил $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i}\times\vec{f_i}\right)=0$ – согласно II закону динамики.

***Количеством вращательного движения материальной точки является <u>момент импульса</u>, равный векторному произведению радиус-вектора точки на его импульс***:

$$\vec{L_i}=\vec{r_i}\times\left(\Delta m_i\cdot\vec{\mathrm{v}_i}\right)=\vec{r_i}\times\vec{p_i}\ \left[\frac{кг\cdot м}{с}\right]. \qquad (1.62)$$

С учетом изложенного  выражение (4*) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M_i}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{L_i}\right),$$

где $\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M_i}$ – равнодействующий вращающий момент, приложенный к телу, $\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i}\times\Delta m_i\vec{\mathrm{v}_i}\right)$ – по принципу суперпозиции полный момент импульса всего тела.

Полученное выражение (1.63) – **<u>II закон динамики</u>** для вращательного движения (общий случай): **«Результат вращательного момента силы, приложенного к телу, равен, скорости изменяется во времени момента импульса этого тела»:**

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (1.63)$$

**Частный случай.** Вращение тела с постоянным моментом инерции $(J=\mathrm{const})$:

$$\vec{L}=m\cdot\vec{r}\times\vec{\mathrm{v}}\ \Rightarrow\ L=m\cdot r\cdot\mathrm{v}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=m\cdot r\cdot\mathrm{v}=\left(m\cdot r^2\right)\omega=J\cdot\omega.$$

***При неизменном моменте инерции тела его момент импульса равен произведению момента инерции на вектор угловой скорости*:**

$$\vec{L}=J\cdot\vec{\omega}. \qquad (1.64)$$

С учетом (1.64) II закон динамики (1.63) принимает вид:

$$J=\mathrm{const}\quad\Rightarrow\quad\vec{M}=\frac{d\left(J\cdot\vec{\omega}\right)}{dt}=J\cdot\frac{d\vec{W}}{dt}=J\cdot\vec{\varepsilon}.$$

**«При неизменном моменте инерции тела его момент импульса равен произведению момента инерции на вектор угловой скорости»:**

$$J=\mathrm{const}\quad\Rightarrow\quad\vec{M}=J\cdot\vec{\varepsilon}. \qquad (1.65)$$

Из закона сохранения импульса логически следует **<u>закон сохранения момента импульса:</u> «В замкнутой механической системе полный момент её импульса не изменяется»:**

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p_i}=\text{const} \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{p_i}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{L_i}=\text{const} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\overrightarrow{L_1}=\overrightarrow{L_2};\\ J_1\cdot\overrightarrow{\omega_1}=J_2\cdot\overrightarrow{\omega_2};\\ m_1\cdot\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{\mathrm{v}_1}=m_2\cdot\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{\mathrm{v}_2}.\end{cases} \tag{1.66}$$

## 1.22. Гироскопический эффект

***Всякое однородное симметричное тело, которое способно вращаться вокруг оси симметрично называется*** **<u>гироскоп</u>.**

Пусть гироскоп в форме волчка (юла) вращается вокруг вертикальной оси (рис. 1.31). Нижняя часть оси упирается в горизонтальную опору. К верхней части находится точка приложения силы $\vec{F}$ в направлении оси $y$. Со стороны опоры действует сила $-\vec{F}$. Пара сил создает вращающий момент $\overrightarrow{M}$, направленный вдоль оси $x$. По второму закону динамики смещение волчка наблюдается в направлении оси $x$, т. е. нормально к плоскости пары сил:

$$\overrightarrow{M}=\frac{d\vec{L}}{dt} \;\rightarrow\; d\vec{L}=\overrightarrow{M}\cdot dt \;\Rightarrow\; d\vec{L}\perp\left(\vec{F};-\vec{F}\right).$$

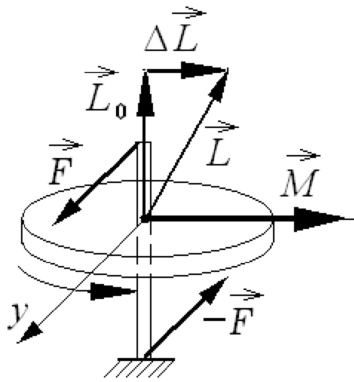



Рис. 1.31

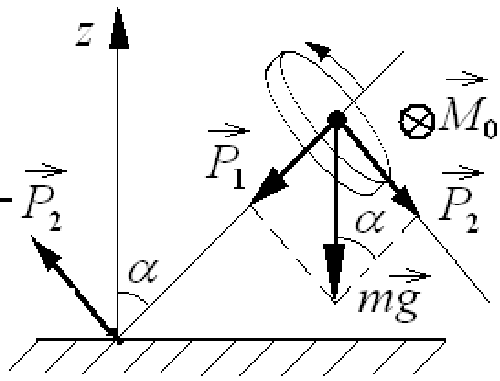



Рис. 1.32

Вращающий момент $\overrightarrow{M}$, созданный внешней силой $\vec{F}$, отклоняет ось гироскопа на некоторый угол от вертикальной оси $z$, а тело продолжает вращаться вокруг собственной оси. Дадим объяснение, почему под действием силы тяжести гироскоп не падает. Силу тяжести $m\vec{g}$ можно разложить на две составляющие (рис. 1.32):

$$m\vec{g}=\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2} \;\rightarrow\; \begin{cases}P_1=mg\cdot\cos\alpha;\\ P_2=mg\cdot\sin\alpha.\end{cases}$$

Со стороны опоры действует сила $-\overrightarrow{P_2}$, которая в паре с силой $\overrightarrow{P_2}$ создает вращающий момент $\overrightarrow{M_0}$, направленный нормально к плоскости $\left(\overrightarrow{P_1};\overrightarrow{P_2}\right)$. В результате ось гироскопа под действием $\overrightarrow{M_0}$ вращается вокруг вертикальной оси $z$, описывая в пространстве конус с вершиной в точке опоры. Это явление носит название **<u>прецессия волчка</u>**.

## 1.23. Закон Всемирного тяготения. Сила тяжести, как функция широты местности

Впервые **<u>закон Всемирного тяготения</u>** был сформулирован И. Ньютоном в 1687 году: «**Две материальные точки, обладающие массами, воздействуют друг на друга с гравитационными силами, пропорционально массам этих сил, обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними и направленными навстречу друг к другу»:**

$$\begin{cases} F_{гр} = \gamma \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}; \\ \overrightarrow{F_{гр}} = -\gamma \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}; \end{cases} \qquad \gamma = 6.670 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{м^3}{кг \cdot c^2} \right]. \tag{1.67}$$

где $\gamma$ – гравитационная постоянная. Формула (1.67) справедлива для случая, когда тела имеют сферически распределенную массу и расстояние между их центрами инерции во много раз больше размеров тел (рис. 1.33). В остальных случаях условно разбивают эти тела на элементы, столь малые, что их можно считать материальными точками. Затем суммируют все силы, действующие на все точки одного тела со стороны всех точек другого тела.

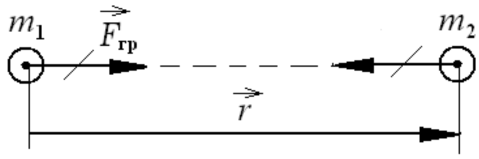



Рис. 1.33

**Свойства гравитационных сил:**

1. Действует между всеми материальными объектами, имеющими массу покоя.
2. Не зависят от физико-химической природы тел.
3. Гравитационные поля проникают сквозь любые преграды (невозможно их экранировать).
4. В космических масштабах именно гравитационные силы определяют движении макросистем.

Тела, поднятые над Землей и предоставленные самим себе, свободно падают, покоящиеся тела оказывают давление на опору. Гравитационная сила на Земле проявляется в силе тяжести. Деление на массу тела, дает ускорение свободного падения $\vec{g}$. Рассмотрим тело массой $m$, которое находится вблизи поверхности Земли на широте местности $\varphi[рад]$ (рис. 1.34). Вес тел вблизи поверхности Земли обусловлен совместным действием двух сил:

- гравитационной силы со стороны Земли: $F_{гр} = \gamma \cdot \dfrac{M \cdot m}{R^2}$, где $M, R$ – масса и радиус Земли, соответственно;
- центробежной силы, которая обусловлена суточным движением планеты: $F_{цб} = m \cdot \omega^2 \cdot r$, где $\omega$ – угловая скорость, $r$ – радиус плоскости вращения.

Радиус плоскости вращения зависит от угла широты местности $\varphi$: $r = R \cdot (\cos\varphi)$. Разложим вектор центробежной силы на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$\overrightarrow{F_{цб}} = \overrightarrow{F_n} + \overrightarrow{F_\tau} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F_n = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos\varphi = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot (\cos\varphi)^2; \\ F_\tau = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \sin\varphi = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi. \end{cases}$$

Как видно на рис. 1.34, горизонтальная составляющая центробежной силы $\overrightarrow{F_\tau}$ на силу тяжести не влияет. Поскольку гравитационная сила $\overrightarrow{F_{гр}}$ и нормальная компонента центробежной силы противоположно направлены, то сила тяжести:

$$P = F_{гр} - F_n = \gamma \frac{M\,m}{R^2} - m\omega^2 R (\cos\varphi)^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P = m\left[ \dfrac{\gamma M}{R^2} - \omega^2 R (\cos\varphi)^2 \right]; \\ g = \dfrac{P}{m} = \dfrac{\gamma M}{R^2} - \omega^2 R (\cos\varphi)^2. \end{cases} \tag{1.68}$$

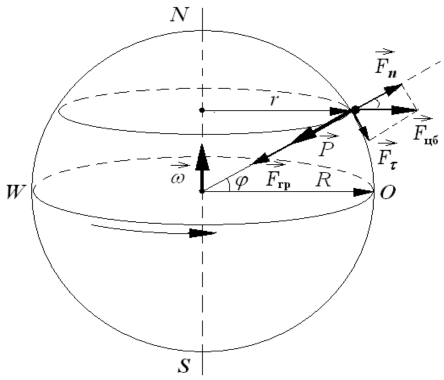



Рис. 1.34

Если тело находится на высоте $h$ над Землей, то в формулах (1.68) необходимо произвести замену $R \to (R+h)$:

$$\begin{cases} P = m\left[\dfrac{\gamma M}{(R+h)^2} - \omega^2 (R+h)(\cos\varphi)^2\right]; \\ g = \dfrac{P}{m} = \dfrac{\gamma M}{R^2} - \omega^2 (R+h)(\cos\varphi)^2. \end{cases} \tag{1.69}$$

**Выводы:**

1. Гравитационная сила минимальна на экваторе и максимальна на полюсах Земли:

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{\min} = P(0) = m\left[\frac{\gamma M}{R^2} - \omega^2 R\right];$$

$$\varphi = \{\pm 90°\} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = P(\pm 90°) = \frac{\gamma M\, m}{R^2}.$$

2. Меньшая сила тяготения в южных широтах приводит тому, что спортивные рекорды в разных странах необъективны.
3. Энергетически выгоднее запускать ракеты-носители вблизи экватора.

## 1.24. Неинерциальные системы отсчета (СО). Переносная центробежная сила инерции

В случае инерциальных систем отсчета $(\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{const})$ справедливы законы классической механики, поэтому они предпочтительны. Если СО перемещается с некоторым ускорением или по криволинейной траектории, то возникает дополнительные усилия. В отличие от классических сил, они не являются результатом взаимодействия с другими телами. Их появление обусловлено тем, что СО стала **неинерциальной**. Силы инерции – являются рез-том взаимодействий тела и неинерциальной системы. Ньютон предложил: в случае неинерциальной СО к традиционным силам добавлять силы инерции. Тогда можно пользоваться всеми законами динамики для инерциальных СО.

### 1.24.1. Переносная сила инерции.

Пусть подвижная СО - $S'$ перемещается относительно неподвижной системы - $S$ по прямой с некоторым ускорением $\vec{a} \neq 0$. При этом, на тело массой $m$ действует переносная сила инерции.

**Случай А.** Вагон увеличивает скорость относительно земли, т. е. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\mathrm{v}} \;\to\; a > 0$ (рис. 1.35а). Тело, обладая инертностью (пропорциональной его массе), стремится сохранить скорость неизменной, хотя скорость вагона увеличилась. На тело действует сила:

$$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\mathrm{v}}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\overrightarrow{a_{ин}}=-\vec{a};\\ \overrightarrow{F_{ин}}=m\cdot\overrightarrow{a_{ин}}=-m\cdot\vec{a};\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{F_{ин}}\uparrow\downarrow\vec{a}. \tag{1.70}$$

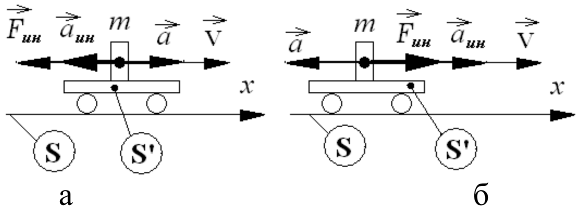



Рис. 1.35

**Случай Б.** Вагон уменьшает скорость относительно земли, т. е. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\mathrm{v}}\;\;\rightarrow\;\; a<0$ (рис. 1.35б). Инертное тело стремится сохранить скорость неизменной, хотя скорость вагона v уменьшилась. При этом на тело действует сила инерции:

$$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\mathrm{v}}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\overrightarrow{a_{ин}}=-\vec{a};\\ \overrightarrow{F_{ин}}=m\cdot\overrightarrow{a_{ин}}=-m\cdot\vec{a};\end{cases}\Rightarrow\;\overrightarrow{F_{ин}}\uparrow\downarrow\vec{a}. \tag{1.71}$$

***Наличие переносной силы объясняется тем, что любое инертное тело стремится сохранить неизменным состояние своего движения*** $\left(\vec{\mathrm{v}}\right)$.

## 1.24.2. Центробежная сила инерции.

При движении материальной точки по дуге окружности с постоянной по величине скоростью $(\mathrm{v}=\mathrm{const})$, направление вектора скорости с течением времени меняется, что приводит к возникновению обычной центробежной силы:

$$F_{цб}=\frac{m\mathrm{v}^2}{R}=m\omega^2R,$$

где $m$ – масса тела, $\mathrm{v},\omega$ – его линейная и круговая скорость, соответственно, $R$ – радиус круговой траектории. Если же тело (подвижное или покоящееся) находится в подвижной неинерциальной СО, которая совершает вращение с угловой скоростью $\omega_0$, то на него дополнительно действует центробежная сила инерции:

$$F_{цб.ин}=m\omega_0^2R_0,$$

где $R_0$ – расстояние от оси вращения СО до точечного тела.

## 1.25. Сила Кориолиса

Если материальная точка линейно перемещается в СО, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг стационарной оси, то на него кроме центробежной силы инерции будет дополнительно действовать **сила Кориолиса**.

## 1.25.1. Движение точки по радиусу вращающегося диска.

Диск (подвижная СО) вращается с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_0}$. Точечное тело массой $m$ линейно перемещается вдоль радиуса диска со скоростью $\vec{\mathrm{v}}'$ (рис. 1.36). За время $dt$ радиус повернулся на угол $d\varphi$.

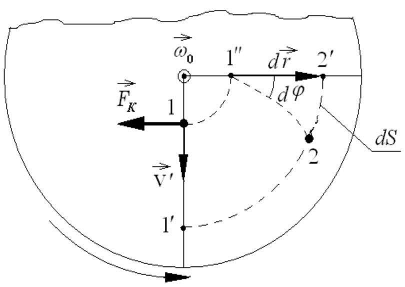



Рис. 1.36

Рассмотрим возможные варианты.

1. Если бы диск был неподвижным (инерциальная СО), то точка совершила бы перемещение т. 1→т. 1'.
2. Если тело было бы неподвижным, а диск вращался, точка совершила бы перемещение: т. 1→т. 1''.
3. Одновременное поступательное и вращательное движение точки в инерциальной СО. В соответствии с принципом Галилея, тело совершило бы перемещение: т. 1→т. 2'.
4. В действительном перемещение точки: т. 1→т. 2.

Это означает, что под действием некоторой инерциальной силы $\overrightarrow{F_K}$ тело прошло дополнительный путь $dS$ с ускорением $\overrightarrow{a_K}$. Этому соответствует дополнительное перемещению $d\vec{r}$ вдоль радиуса диска. Воспользуемся известными кинематическими выражениями:

$$dS = \frac{a_K \cdot dt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_K = \frac{2dS}{dt^2}, \tag{1*}$$

$$\begin{cases} d\varphi = \omega_0 \cdot dt; \\ dr = \mathrm{v}' \cdot dt; \end{cases} \quad \rightarrow \quad dS = dr \cdot d\varphi = \omega_0 \cdot \mathrm{v}' \cdot \left(dt^2\right). \tag{2*}$$

С учетом выражения (2*) формула (1*) принимает вид:

$$a_K = 2\omega_0 \cdot \mathrm{v}' \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{a_K} = 2\overrightarrow{\mathrm{v}'} \times \overrightarrow{\omega_0}. \tag{1.72}$$

Тогда сила Кориолиса в соответствии со II законом динамики

$$F_K = 2m \cdot \omega_0 \cdot \mathrm{v}' \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{F_K} = 2m \cdot \overrightarrow{\mathrm{v}'} \times \overrightarrow{\omega_0}. \tag{1.73}$$

**Примечание.** Сила Кориолиса действует в Северном полушарии вправо относительно направления движения, в Южном – влево. Причина в том, угловая скорость планеты $\vec{\omega}$ имеет противоположное направление к северу и к югу от экватора.

### 1.25.2. Движение точки перпендикулярно радиусу вращающегося диска.

Диск (подвижная СО) вращается с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_0}$. Точечное тело массой $m$ линейно перемещается перпендикулярно радиусу диска со скоростью $\overrightarrow{\mathrm{v}'}$ (рис. 1.37). Материальная точка совершает одновременно 2 вращения движения: относительно диска, вместе с диском относительно земли.

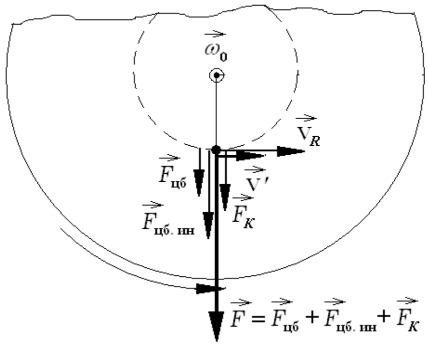



Рис. 1.37

По принципу сложения скоростей абсолютная скорость тела в неподвижной СО (земля) равна сумме его относительной скорости $\overrightarrow{\mathrm{v}'}$ и переносной скорости подвижной СО (диск) относительно неподвижной $\mathrm{v}_R = \omega_0 \cdot R$:

$$\vec{\mathrm{v}} = \overrightarrow{\mathrm{v}'} + \overrightarrow{\mathrm{v}_R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = \mathrm{v}' + \omega_0 \cdot R.$$

Тогда на тело действует результирующая сила инерции:

$$F=\frac{m\cdot \mathrm{v}^2}{R}=\frac{m}{R}\cdot\left(\mathrm{v}'+\mathrm{v}_R\right)^2=\frac{m}{R}\cdot\left(\left(\mathrm{v}'\right)^2+\mathrm{v}_R^2+2\mathrm{v}_R\cdot\mathrm{v}'\right)'=\frac{m\cdot\left(\mathrm{v}'\right)^2}{R}+\frac{m\cdot\mathrm{v}_R^2}{R}+\frac{2m\cdot\mathrm{v}_R\cdot\mathrm{v}'}{R}. \quad (1.74)$$

**Анализ формулы (1.74):**

1. $F_{цб}=\dfrac{m\cdot\left(\mathrm{v}'\right)^2}{R}$ – обычная центробежная сила, которая имеет в качестве противодействующей центростремительную силу,
2. $F_{цб.ин}=\dfrac{m\cdot\mathrm{v}_R^2}{R}$ – центробежная сила инерции, обусловленная вращением самой системы отсчета,
3. $F_K=\dfrac{2m\cdot\mathrm{v}_R\cdot\mathrm{v}'}{R}=2m\cdot\omega_0\cdot\mathrm{v}'$ – сила Кориолиса.

**Выводы.**

1. В случае неинерциальной вращающейся системы отсчета на тело помимо других сил инерции, действует сила Кориолиса, пропорциональная удвоенной массе тела, его скорости и угловой скорости системы отсчета. Направление силы Кориолиса определяется векторным произведением:
$$\overrightarrow{F_K}=2m\cdot\overrightarrow{\mathrm{v}'}\times\overrightarrow{\omega_0}.$$
2. Также, как в случае движения тела по радиусу диска, при движении нормально радиусу $\overrightarrow{F_K}$ направлена под прямым углом вправо по направлению движения.

### 1.25.3. Произвольное движение точки во вращающейся системе отчета.

Диск (подвижная СО) вращается с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_0}$. Точечное тело массой $m$ линейно перемещается произвольно. В случае произвольной ориентации вектора скорости представим $\overrightarrow{\mathrm{v}'}$ как сумму нормальной и радиальной составляющих (рис. 1.38):

$$\overrightarrow{\mathrm{v}'}=\overrightarrow{\mathrm{v}_n}+\overrightarrow{\mathrm{v}_R} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\mathrm{v}_n=\mathrm{v}'\cdot\cos\alpha;\\ \mathrm{v}_R=\mathrm{v}'\cdot\sin\alpha.\end{cases}$$

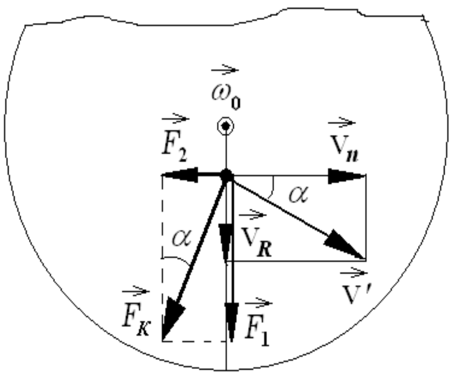



Рис. 1.38

Каждая из компонент $\overrightarrow{\mathrm{v}_R}$ и $\overrightarrow{\mathrm{v}_n}$ создает соответственную силу Кориолиса:

$$\begin{cases}\overrightarrow{F_1}=2m\cdot\overrightarrow{\mathrm{v}_n}\times\overrightarrow{\omega_0};\\ \overrightarrow{F_2}=2m\cdot\overrightarrow{\mathrm{v}_R}\times\overrightarrow{\omega_0};\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\overrightarrow{F_1}=2m\cdot\mathrm{v}_n\cdot\omega_0=2m\cdot\mathrm{v}'\cdot\omega_0\cdot\cos\alpha;\\ \overrightarrow{F_2}=2m\cdot\mathrm{v}_R\cdot\omega_0=2m\cdot\mathrm{v}'\cdot\omega_0\cdot\sin\alpha.\end{cases}$$

По принципу суперпозиции имеем:

$$\overrightarrow{F_K}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}; \text{ или } F_K=F_1^2+F_2^3=2m\cdot\mathrm{v}\cdot\omega_0\cdot\sqrt{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}=2m\cdot\mathrm{v}\cdot\omega_0;$$

$$\vec{F}_K=2m\cdot\vec{\mathrm{v}}\times\overrightarrow{\omega_0}. \quad (1.75)$$

**Вывод:** в случае движения тела по радиусу диска или нормально к нему, при произвольном движении тела сила Кориолиса направлена под прямым углом вправо по направлению движения.

## ЛИТЕРАТУРА

**Основная**

1. Бушок Г. Д. Курс фізики у двох книгах: кн. 1 "Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм". – К.: Либідь. – 1997.– 448с.
2. Бушок Г. Д. Курс фізики у двох книгах: кн. 2 "Оптика. Фізика атома.". – К.: Либідь. – 2001.– 424с.
3. Чолпан П. П. Основи фізики. – К.: Вища школа, 1995.– 488с.

**Дополнительная**

4. Зачек І. Р., Кравчук І. М., Романішин Б. М., Габа В. М. Курс фізики: навчальний підручник. – Львів. – Вид. "Бескид Біт". – 2002.– 376с.
5. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Наука, 1999.– 2000.– 720с
6. Трофимова Т.И. Курс физики. – // М.: Высшая школа, 1999.– 450с.
7. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.– М.: Наука. – 1999.– 464с.
8. Чертов А.Г., Воробьев А.А., Федоров М. Ф. Задачник по физике.– М.: Высшая школа. – 1990.– 430с.