**Лекція 2. Властивості операцій над множинами**

**План**

1. Поняття обмеженості множини. Точні верхня й нижня границі обмеженої множини.
2. Асоціативні, комутативні й дистрибутивні закони теорії множин.
3. Закони ідемпотентності, поглинання, закони де Моргана.

**1. Поняття обмеженості множини. Точні верхня й нижня границі обмеженої множини**

***Визначення 1***. Множина  називається ***обмеженою знизу***, якщо існує така стала , що для  виконується: . В цьому випадку  називається нижньою межею множини .

***Визначення 2***. Множина  називається ***обмеженою зверху***, якщо існує така стала , що для  виконується: . В цьому випадку  називається верхньою межею множини .

***Приклад 1***. - сегмент. - нижня межа , оскільки всі елементи  будуть більші за 0. Крім того нижньою межею також можуть бути числа: , , . Взагалі будь-яке число, менше або рівне 3, є нижньою межею , множина - обмежена знизу. Будь-яке число, яке більше або дорівнює 9, буде верхньою межею , тому  - множина, яка обмежена зверху.

З розглянутого прикладу зрозуміло: якщо деяка множина обмежене знизу (або зверху), вона має нескінченно багато нижніх (або верхніх) меж.

***Приклад 2***. Множина натуральних чисел  обмежена знизу, тому що всі натуральні числа більші, наприклад, 0, тобто 0 - це одна з нижніх меж, але  - не обмежена зверху.

***Визначення 3***. Множина  називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена знизу й зверху, тобто існує така стала , що для  виконується: .

Таким чином,  - обмежена множина, а - необмежена множина.

***Визначення 4***. Число  називається ***точною нижньою межею***, або ***інфімумом*** множини  і позначається , якщо виконуються наступні умови:

1.  - нижня межа ;
2. Для   вже не буде нижньою межею для , тобто знайдеться такий елемент , що .

Таким чином, точна нижня межа - це найбільша з усіх нижніх меж множини, вона визначається однозначно. Так для попередніх прикладів, коли , то , а .

***Визначення 5***. Число  називається ***точною верхньою*** ***межею***, або ***супремумом*** множини  і позначається , якщо виконуються наступні умови:

1.  - верхня межа ;
2. Для   вже не буде верхньою межею для , тобто знайдеться такий елемент , що .

Таким чином, точна верхня межа - це найменша з усіх верхніх меж множини, вона визначається однозначно. Так для попередніх прикладів, коли , то , а  не існує.

Якщо множина обмежена зверху (знизу), у неї обов'язково існує точна верхня (нижня) межа.

**2.** **Асоціативні, комутативні й дистрибутивні закони теорії множин**

Для будь-яких підмножин , ,  універсальної множини  мають місце наступні властивості ( тут розуміється як ):

1.  1-а. 
2.  2-а. 
3.  3-а. 
4.  4-а. 
5.  5-а. 

Закони 1 і 1-а називаються *асоціативними* законами для об'єднання й перерізу.

Закони 2 і 2-а називаються *комутативними* законами; 3 і 3-а - *дистрибутивними* законами для об'єднання й перерізу.

Доведемо для прикладу твердження 3, скориставшись для цього способом доказу, що випливає із принципу об'ємності (лекція 1). Для цього:

1. Візьмемо  і покажемо, що цей елемент . Дійсно: якщо , то  чи . Якщо , то  і , але тоді . Якщо ж , то  і , а тоді  і , а тому .
2. Візьмемо тепер  і покажемо, що . Дійсно, якщо , то  і , тому,  чи  і , тобто .

Згідно із законом 1 об'єднання множин  можна записувати без дужок: . Отриманий висновок можна узагальнити: усі множини, що отримуються за допомогою операції об'єднання із заданих множин , узятих у фіксованому порядку, рівні одна одній. Будемо позначати таку множину: .

Аналогічне твердження має місце й для перерізу: .

Загальні асоціативні закони дозволяють установити загальні комутативні закони: якщо  - це числа 1,2,…,*n*, які беруться в довільному порядку, то:

,

.

Аналогічно можна сформулювати загальні дистрибутивні закони:



.

1. **Закони ідемпотентності, поглинання, закони де Моргана**

Для будь-яких підмножин ,  універсальної множини  мають місце наступні властивості ( тут розуміється як ):

1. Якщо для  виконується 1-а. Якщо для  виконується

рівність: , то . рівність: , то .

1. Якщо  і , то .
2. .
3. . 4-а. .
4.  5-а. .
5.  6-а. .
6.  7-а. .
7.  8-а. .

Закони 5 і 5-а називаються законами *ідемпотентності*, 7 і 7-а - закони *поглинання*, 8 і 8-а - закони *де Моргана*.

Закон 2 стверджує, що будь-яка множина має єдине доповнення.

Доведемо для прикладу закон 8. Для цього:

1. Візьмемо довільний елемент  і покажемо, що . Дійсно, якщо , то , тому,  і , а значить  і , тобто .
2. Візьмемо довільний елемент  і покажемо, що . Дійсно, якщо , то  и , тому,  і , а значить  не може належати , тобто .

Наступні твердження про довільні множини ,  попарно еквівалентні:

(І) ;

(ІІ) ;

(ІІІ) .

**Питання**

1. Які закони об'єднання й перерізу множин називаються комутативними, загальними комутативними?
2. Які закони об'єднання й перерізу множин називаються асоціативними, загальними асоціативними?
3. Які закони об'єднання й перерізу множин називаються дистрибутивними, загальними дистрибутивними?
4. Сформулювати й довести закони де-Моргана.
5. Довести закони поглинання.