**Лекція 3. Бінарні відношення**

**План**

1. Бінарне відношення. Область визначення, область значення бінарного відношення. Поняття впорядкованої пари.
2. Декартовий добуток множин. Властивості декартового добутку множин.
3. Матриця бінарного відношення, заданого на скінченній множині.

4. Властивості бінарних відношень

**1.** **Бінарне відношення. Область визначення, область значення бінарного відношення. Поняття впорядкованої пари**.

Терміном «відношення» у математиці часто користуються для того, щоб позначити який-небудь зв'язок між предметами, зокрема, елементами множини.

Найчастіше використовуваними є бінарні відношення. Бінарні (двомісні) відношення використовуються для визначення якихось взаємозв'язків, якими характеризуються пари елементів у множині  (на множині людей можуть бути задані, наприклад, наступні бінарні відношення: жити в одному будинку, бути старше, бути матір'ю). Задати відношення, визначене на скінченній множині, можна простим перерахуванням пар елементів, що знаходяться у заданому відношенні.

У загальному випадку при встановленні бінарного відношення для об'єктів важливо, у якому вони беруться порядку. Для ілюстрації розглянемо наступний приклад. Нехай множина членів однієї родини , де елементи визначаються наступним чином:

 - мати (35 років);

 - батько (41 рік);

 - син (11 років);

 - донька (7 років);

 - бабуся (60 років).

Між членами родини розглянемо відношення «бути старше». Будемо позначати відношення . Якщо два члени родини перебувають у такому відношенні один до іншого, як, наприклад,  і (оскільки батько старше матері), то будемо писати . Зауважимо, що  і  у розглянутому відношенні не знаходяться, тому що не вірно те, що мати старше батька. А тому у розглянутому бінарному відношенні важливий порядок об'єктів: який з них узятий першим, а який другим. Для розглянутої множини отримаємо, що, крім , мають місце: , , , , , , , , , однак, якщо об'єкти в парах поміняти місцями, то в зазначеному відношенні вони вже перебувати не будуть.

Звичайно бінарне відношення розглядає пари об'єктів, узятих у певному порядку: так звані *впорядковані пари*.

***Впорядкованою парою*** елементів  і , що позначається як , називається об'єкт, що має дві властивості:

1.  однозначно визначається елементами  і ;
2. Якщо існує впорядкована пара  така, що

,

то , .

Таким чином**, *бінарне відношення* – це множина впорядкованих пар**. Якщо  - це деяке відношення, то запис  означає, що .

Таким чином, задати відношення «бути старше» на множині  з попереднього прикладу можна наступним чином:



У загальному випадку можна розглядати *n*-місні відношення, де якоюсь властивістю пов'язані між собою не пари, а *n*-ки елементів. Тоді *n*-арне відношення – це множина впорядкованих *n*-ок елементів. Наприклад, для *n*=3 на множині всіх студентів ОНПУ можна задати тримісне відношення  «жити в одній кімнаті гуртожитку». Тоді множина  буде складатися з усіх трійок студентів, кожна з яких проживає в одній кімнаті.

***Областю визначення***бінарного відношення (позначається далі ) називається множина:

.

***Областю значень*** бінарного відношення (позначається далі ) називається множина:

.

**2.** **Декартовий добуток множин. Властивості декартового добутку множин**

***Прямим (чи декартовим) добутком*** множин називається множина:

.

Деякі властивості декартового добутку аналогічні властивостям добутку чисел:

;

;

;

;

;

.

Доведемо першу властивість. Для цього треба показати: будь-який елемент множини  є елементом множини ; будь-який елемент множини  є елементом множини . Дві умови можна об'єднати в одну: якщо елемент належить множині , то це рівносильне тому, що він належить множині . Для першої властивості маємо:



що й було потрібно довести.

Будь-яке бінарне відношення  є підмножиною деякого декартового добутку , такого, що , .

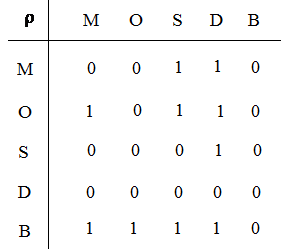
**3.** **Матриця бінарного відношення, заданого на скінченній множині**

Задати бінарне відношення на скінченній множині можна не тільки за допомогою перерахування впорядкованих пар, які цьому бінарному відношенню належать, але й за допомогою матриці. Так бінарному відношенню , де ,  ставиться у відповідність прямокутна матриця  з елементами . Елементи  визначаються відповідно до формули:



тобто , якщо між  і  має місце відношення , чи , якщо воно відсутнє.

Для прикладу, розглянутого вище, де відношення  визначалося як відношення «бути старше» на множині , відповідна матриця буде мати вигляд:



**4.** **Властивості бінарних відношень**

Нехай . Це відношення називається:

1. ***Рефлексивним***, якщо для : , тобто кожний елемент множини  пов'язаний відношенням  з самим собою. Наприклад, відношення паралельності для прямих на площині є рефлексивним, оскільки кожна пряма паралельна самій собі;
2. ***Антирефлексивним****,*  якщо не існує елемента множини , пов'язаного відношенням  з самим собою. Наприклад, відношення «бути матір'ю», задане на множині людей, є антирефлексивним, оскільки ніяка людина не може бути матір'ю для себе;
3. ***Симетричним****,* якщо з того, що  випливає, що , тобто якщо  знаходиться в відношенні  до , то і  знаходиться в відношенні  до . Наприклад, відношення «вчитися в одному університеті» є симетричним;
4. ***Антисиметричним****,* якщо для  з одночасної істинності  і  буде випливати, що , тобто ні для яких елементів  і , що різняться, не виконуються одночасно  і . Наприклад, відношення «бути вище» на множині студентів групи;
5. ***Транзитивним****,* якщо з того, що  і  випливає, що . Наприклад, відношення «бути молодше» на множині людей.

Для бінарного відношення, що має певні властивості, його матриця також має характерні ознаки:

* Для рефлексивного відношення  головна діагональ його матриці буде містити тільки одиниці;
* Для антирефлексивного відношення  головна діагональ його матриці буде містити тільки нулі;
* Для симетричного відношення  його матриця буде симетрична щодо головної діагоналі;
* Для антисиметричного відношення  у його матриці будуть відсутні одиниці, симетричні щодо головної діагоналі.

**Питання**

1. Що називається бінарним відношенням? Навести приклади бінарних відношень.
2. Що таке область визначення, область значення бінарного відношення? Навести приклади.
3. Що таке впорядкована пара елементів?
4. Як визначається декартовий добуток множин?
5. Властивості декартового добутку множин. Довести.
6. Способи завдання бінарного відношення на скінченній множині.
7. Як визначається матриця бінарного відношення?
8. Яке бінарне відношення називається рефлексивним/антирефлексивним? Які особливості мають матриці таких відношень? Навести приклади.
9. Яке бінарне відношення називається симетричним/антисиметричним? Які особливості мають матриці таких відношень? Навести приклади.
10. Яке бінарне відношення називається транзитивним? Навести приклади.