**Лекція 4. Відношення еквівалентності й порядку**

**План**

1. Покриття й розбивка множини.
2. Відношення еквівалентності.
3. Відношення порядку.
4. Операції над бінарними відношеннями.

**1.** **Покриття й розбивка множини**

Нехай  – деяке сімейство (сукупність) множин.

Сімейство  називається ***покриттям*** множини *А*, якщо кожний елемент А належить хоча б одній з множин , тобто

.

Якщо покриття  таке, що його елементи попарно не перетинаються (), і всі , то таке покриття називається ***розбивкою*** множини А.

***Приклад***. . Тоді  - покриття, але не розбивка, - розбивка і покриття, - не є ні покриттям, ні розбивкою.

Розбивка множини А завжди є його покриттям; покриття не завжди є розбивкою.

***Приклад***. На рис.1 побудована діаграма Вена для сукупності множин . Сімейство множин  утворює покриття множини , оскільки , але  не є розбивкою множини, оскільки можна вказати таку множину з , яка не є підмножиною , наприклад: .

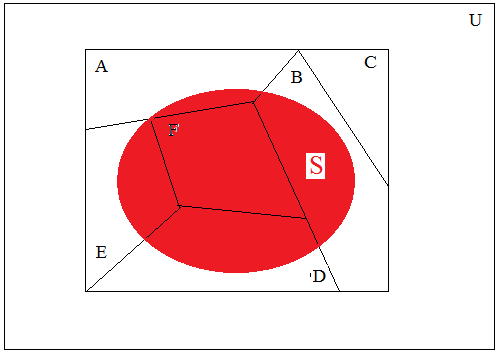


Рис.1.

**2.** **Відношення еквівалентності**

***Визначення***. Нехай задано бінарне відношення . Якщо це відношення є одночасно рефлексивним, симетричним і транзитивним, то воно називається ***відношенням еквівалентності***.

## ***Приклад***. Нехай - це множина таких дійсних чисел, що . Відношення має місце між елементами тоді й тільки тоді, коли їх різниця є раціональним числом, тобто коли . Таке відношення є рефлексивним, оскільки для (); є симетричним, оскільки, якщо , то , тобто якщо , то і ; транзитивним, оскільки, якщо і , то , тобто з того, що і , випливає, що . Таким чином, розглянуте відношення є відношенням еквівалентності.

***Приклад***. Відношення рівносильності, задане на множині формул, є відношенням еквівалентності.

***Приклад***. Відношення «проживання в одному будинку» на множині жителів міста Одеса є відношенням еквівалентності.

Якщо бінарне відношення  є відношенням еквівалентності, воно розбиває множину  на непересічні підмножини так, що елементи одної підмножини знаходяться у відношенні , а між елементами з різних підмножин відношення  не має місця. Отримані підмножини утворюють розбивку множини  і називаються *класами еквівалентності*.

Для останнього прикладу кожний клас еквівалентності буде містити жителів одного конкретного будинку.

***Теорема***. Якщо множина *X* розбита на непересічні підмножини, об'єднання яких дає множину *Х*, то відношення «бути в одній підмножині» є відношенням еквівалентності. Усяке відношення еквівалентності виходить описаним способом з деякої розбивки.

Скільки різних відношень еквівалентності можна задати на множині ? Кількість різних відношень еквівалентності визначиться кількістю різних розбивок множини: 

**3.** **Відношення порядку**

***Визначення***. Бінарне відношення  називається відношенням ***нестрогого порядку***, якщо воно є одночасно рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

***Визначення***. Бінарне відношення  називається відношенням ***строгого порядку***, якщо воно є одночасно антирефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

Відношення нестрогого й строгого порядку разом називаються ***відношеннями порядку***.

Приклади бінарних відношень нестрого порядку: «бути не старше» на множині людей, «бути не більше» на множині дійсних чисел.

Приклади бінарних відношень строго порядку: «бути старше» на множині людей, «бути більше» на множині дійсних чисел.

Нехай  - відношення порядку. Елементи  називаються ***порівнянними*** по відношенню порядку  на множині , якщо виконується  чи .

Множина , на якій задано відношення порядку , може бути:

* ***Повністю впорядкованою множиною***, якщо будь-які  порівнянні по відношенню порядку . У такому випадку говорять, що відношення  задає повний порядок на множині . Наприклад, відношення «бути молодше» задає повний порядок на множині всіх людей;
* ***Частково впорядкованою множиною***, якщо існує , які не порівнянні по відношенню порядку . У такому випадку говорять, що відношення  задає частковий порядок на множині . Наприклад, відношення «бути начальником» задає частковий порядок на множині співробітників деякої організації.

На множині *R×R* усіх пар дійсних чисел можна ввести частковий порядок, вважаючи, що〈x1, x2〉〈y1, y2〉, якщо x1x2 і y1y2. Цей порядок уже не буде повним: пари〈0,1〉і〈1,0〉не порівнянні.

**4.** **Операції над бінарними відношеннями**

Оскільки бінарні відношення визначаються як деякі множини впорядкованих пар ( чи ), то для них можна визначити ті ж операції, що й над іншими множинами.

1. ***Об'єднанням***бінарних відношень і  називається таке бінарне відношення , для якого має місце співвідношення:



1. ***Перерізом***бінарних відношень і  називається таке бінарне відношення , для якого має місце співвідношення:



1. ***Різницею*** бінарних відношень і  називається таке бінарне відношення , для якого має місце співвідношення:



1. ***Доповненням*** бінарного відношення  називається таке бінарне відношення , для якого має місце співвідношення:

, де  (якщо ) чи  (якщо )

1. ***Зворотним***відношенням до бінарного відношення називається таке бінарне відношення , для якого має місце співвідношення:

.

***Приклад***. Нехай  - бінарне відношення «бути керівником», яке визначено на множині  співробітників деякої організації. Тоді бінарні відношення  мають наступний сенс:

 - «не бути керівником»

 - «бути підлеглим».

Згадані відношення мають властивості, відображені в таблиці 1.

Таблиця 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Відношення | Рефлексивноє | Антирефлексивноє | Симетричноє | Антисиметричноє | Транзитивноє |
|  | - | + | - | + | + |
|  | + | - | - | - | - |
|  | - | + | - | + | + |

**Питання**

1. Що таке покриття множини? Навести приклади.
2. Чи для будь-якої множини можна побудувати покриття? Відповідь обгрунтувати.
3. Чим покриття множини відрізняється від розбивки цієї множини? Навести приклади.
4. Чи завжди покриття множини є її розбивкою?
5. Чи може покриття множини бути її розбивкою?
6. Чи завжди розбивка множини є її покриттям?
7. Яке бінарне відношення називається відношенням еквівалентності? Навести приклади відношень еквівалентності.
8. Яке бінарне відношення називається відношення нестрогого/строгого порядку? Навести приклади.
9. Яка множина називається повністю впорядкованою? Навести приклади.
10. Яка множина називається частково впорядкованою? Навести приклади.
11. Які операції над бінарними відношеннями можна визначити?