**Лекція 5. Основні поняття математичної логіки**

**План**

1. Поняття висловлення. Прості й складені висловлення
2. Основні логічні операції.Пріоритет логічних операцій
3. Логічні функції. Поняття таблиці істинності

**1.** **Поняття висловлення. Прості й складені висловлення**

Основним об'єктом традиційних розділів логіки є висловлення.

***Визначення***. *Висловлення* – це розповідне речення, щодо якого точно можна сказати, що воно або істинне, або хибне. Висловлення не може бути одночасно істинним і хибним.

Усі наукові знання, події повсякденного життя, ситуації, що виникають у процесах керування, формулюються у вигляді висловлень.

*Приклади* висловлень:

1. «Згідно із Законом України « Про захист персональних даних», який регулює правові відносини, пов'язані із захистом і обробкою персональних даних, в органах державної влади й органах місцевого самоврядування, організаціях, установах, на підприємствах усіх форм власності в обов'язковому порядку організують відділ або призначається відповідальна особа, яка організовує роботу, пов'язану із захистом персональних даних при їхній обробці й зберіганні» - це розповідне речення є істинним. Це висловлення.

2. «Людина - безсмертна» - це розповідне речення, воно є хибним. Це висловлення.

Для того, щоб оперувати розповідними реченнями як висловленнями, ми повинні знати про кожне з них, істинно воно або хибне. Необхідно відзначити, що в ряді випадків істинність або хибність висловлення залежить від того, яку конкретну реальність ми намагаємося з його допомогою описати. Наприклад, істинність або хибність речення «У понеділок був дощ» залежить від того, про який саме понеділок мова йде, однак для кожного конкретного понеділка це висловлення обов'язкове або істинно, або хибне. У такому випадку говорять, що дане висловлення істинне або хибне в даній інтерпретації (контексті).

Скрізь далі будемо припускати, що контекст заданий і висловлення має певне істиносне значення. Це дозволяє відволіктися від безпосереднього змісту висловлення й обмежитися тільки тою його властивістю, що воно є або ІСТИНОЮ, або НЕПРАВДОЮ.

Будемо позначати висловлення: 

Будемо називати висловлення *простим* (або *елементарним*), якщо воно розглядається як якесь неподільне ціле (аналогічно елементу множини). Зазвичай до них відносять висловлення, що не містять логічних зв'язок (І, ЧИ, ЯКЩО...ТО, та ін).

З існуючих елементарних висловлень за допомогою логічних зв'язок, які в природній мові визначаються союзами «І», «АБО», часткою «НЕ», словосполученнями «ЯКЩО…. ТО……», «АБО…..АБО….», «ТОДІ Й ТІЛЬКИ ТОДІ, КОЛИ….» та ін., формуються нові висловлення - *складені* (або *складні*). Наприклад, «Я поступив в Одеський політех **І** моя майбутня спеціальність - це програмна інженерія»; «На підприємстві буде створений відділ, що займається захистом персональних даних при їхній обробці й зберіганні **АБО** на підприємстві буде призначена відповідальна особа, що займається захистом персональних даних при їхній обробці й зберіганні».

**2.** **Основні логічні операції. Пріоритет логічних операцій**

Визначимо перераховані зв'язки формально, беручи до уваги тільки те, що кожне висловлення визначається тільки своїм істиносним значенням: НЕПРАВДА або ІСТИНА:

1. *Кон’юнкцією (*операцією логічного «І», логічним добутком) двох висловлень називається висловлення, яке позначається  чи , чи  (читається:  **і** ) і є істинним, коли оба висловлення  істинні, і хибним в усіх інших випадках (тобто: коли  - істинне, а  - хибне; коли  - хибне, а  - істинне; коли  - хибне і  - хибне); Наприклад, висловлення ***С***: «Завтра я піду в кіно з Ігорем **І** Мишею» буде істинним тільки тоді, коли будуть окремо істинними висловлення ***А***:«Завтра я піду в кіно з Ігорем», ***В***: «Завтра я піду в кіно з Мишею», кон’юнкція яких і привела до висловлення ***С***. Хибність хоча б одного зі складових ***А*** або ***В*** приведе до хибності ***С***.
2. *Диз’юнкцією* (операцією логічного «АБО», логичної суми) двох висловлень називається висловлення, яке позначається  (читається:  або ) і є хибним, коли обидва висловлення  хибні, і істинним в усіх інших випадках (тобто: коли  - істинне, а  - хибне; коли  - хибне, а  - істинне; коли  - істинне, і  - істинне). Наприклад, висловлення ***С***: «Завтра я піду в кіно з Ігорем **АБО** Мишею» буде істинним, якщо буде істинним хоча б одне з висловлень ***А***: «Завтра я піду в кіно з Ігорем», В: «Завтра я піду в кіно з Мишею», диз’юнкція яких і привела до висловлення ***С***.
3. *Запереченням* (інверсією) висловлення називається висловлення, яке є істинним, коли висловлення  хибне, і хибним – інакше. Позначення: . Читається: не ; не вірно, що .
4. *Імплікацією* двох висловлень називається висловлення, яке позначається  (читається: якщо , то ; з  випливає ;  тягне ), яке хибне тільки в тому випадку, коли  істинне, а  хибне. В усіх інших випадках  істинне. Висловлення  називається *посилкою* імплікації, а висловлення  - *висновком*.
5. *Еквівалентністю* (рівнозначністю) двох висловлень називається висловлення, істинне, коли істинісні значення  і  співпадають, і хибне в протилежному випадку. Позначення: . Читається:  еквівалентно ;  тоді й тільки тоді, коли .
6. *Виключним «АБО»* (чи додаванням по модулю 2) двох висловлень називається висловлення, істинне, коли істинісні значення  і  не співпадають, і хибне в протилежному випадку. Позначення: . Читається: або , або . Розуміється - у розділовому сенсі.

Усі перераховані операції 1-6 називаються логічними операціями. Всяке висловлення, складене з деяких вхідних висловлень за допомогою застосування логічних операцій 1-6, будемо називати формулою алгебри висловлень. Наприклад, формулою є: .

Логічні операції мають певний пріоритет друг відносно друга (у відсутності дужок, які задають цей пріоритет явно):

1. Заперечення;
2. Кон’юнкція;
3. Диз’юнкція;
4. Імплікація і еквівалентність.

Наприклад, в формулі  першою виконається операція , другою - , а імплікація буде третьою. Однак, якщо в цій же формулі поставити дужки, то порядок операцій можна змінити: для  першою буде виконана імплікація , потім диз’юнкція , а лише останньою – кон’юнкція.

**3.** **Логічні функції. Поняття таблиці істинності**

Вхідні висловлення можуть бути постійними, тобто мати певні значення: ІСТИНА або НЕПРАВДА, а можуть не мати конкретного фіксованого значення ( про них відомо лише, що вони можуть приймати значення: ІСТИНА або НЕПРАВДА). Перші висловлення будемо називати постійними елементарними висловленнями, другі - змінними елементарними висловленнями.

***Приклад***. Записати логічними формулами наступні два висловлення:

1. «Якщо мало працюєш над домашнім завданням і при цьому займаєшся не систематично, то приходиш на заняття непідготовленим або шукаєш поважну причину для пропуску занять». Дане складне висловлення складається з декількох простих:

 - «Мало працюєш над домашнім завданням»;

 - «Займаєшся не систематично»;

 - «Приходиш на заняття непідготовленим»;

 - «Шукаєш поважну причину для пропуску занять».

З урахуванням введених позначень для простих висловлень і визначених вище логічних операцій складне висловлення може бути представлено символьно у вигляді наступної логічної формули:

. (1)

2. «Якщо аналіз системи захисту інформації банку показує, що вона є неефективною й при цьому дорогою, то начальник відділу інформаційної безпеки повинен буде звільнений або, у найкращому разі, одержати догану». Дане складне висловлення складається з декількох простих:

 - «Аналіз системи захисту інформації банку показує, що вона є неефективною»;

 - «Аналіз системи захисту інформації банку показує, що вона є дорогою»;

 - «Начальник відділу інформаційної безпеки повинен буде звільнений»;

 - «Начальник відділу інформаційної безпеки одержить догану».

З урахуванням введених позначень для простих висловлень і визначених вище логічних операцій складне висловлення може бути представлено символьно у вигляді наступної логічної формули:

. (2)

При порівнянні (1) і (2) видно, що обидва складних висловлення описуються однією логічною формулою, хоча мають різний зміст (символи елементарних висловлень  змістовно інтерпретуються по-різному). У математичній логіці вивчається будова складних логічних висловлень, виражених формулами, незалежно від змісту простих висловлень, що їх складають. Тому два висловлення, наведені в прикладі, логічно не розрізняються. Істинісні значення цих і інших складних висловлень, що описуються даною логічною формулою , будуть визначатися тільки тим, істинне або хибне кожне вхідне в них висловлення . Оскільки кожне із цих висловлень може бути або істинним, або хибним, тобто мати одне із двох значень, то кількість різних комбінацій значень для четвірки  - 24. При цьому змістовних інтерпретацій цієї формули, очевидно, нескінченно багато.

Далі для простоти й зручності будемо позначати «ІСТИНУ» за допомогою «1», а «НЕПРАВДУ» - за допомогою «0».

Із усього вищесказаного випливає, що будь-яка формула алгебри висловлень визначає деяку функцію, аргументами якої є змінні елементарні висловлення. При цьому й аргументи, і сама функція можуть приймати тільки два значення: 0 і 1. Така функція, яку далі будемо називати логічною, може бути повністю описана скінченною таблицею, яка називається таблицею істинності. Наприклад, таблиця істинності для формули  має вигляд:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Останній елемент кожного рядка таблиці дає значення формули при тих значеннях аргументів, що входять у неї, які знаходяться у перших двох позиціях рядка.

Якщо формула має більш складний вид, то при побудові таблиці стовпці формуються з урахуванням зручності обчислень. Наприклад, для формули  зручним буде спочатку обчислити значення ,  при всіляких значеннях вхідних у них змінних, а потім уже значення . Відповідна таблиця буде мати 24 рядків.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

З останньої таблиці явно видно, що висловлення, представлене логічною формулою , буде хибним тільки в одному випадку: коли висловлення  і  - істинні, а висловлення  і  - хибні.

**Питання**

1. Що називається висловленням? Навести приклади висловлень.
2. Чи може висловлення бути одночасно істинним і хибним?
3. Яке висловлення називається простим (елементарним)? Навести приклади.
4. Яке висловлення називається складним? Навести приклади.
5. Що таке постійне й змінне висловлення?
6. Перерахувати логічні операції. Коли значення кожної з перерахованих операцій дорівнює 1? Дорівнює 0?
7. Пріоритет логічних операцій. Для чого в логічних формулах використовуються дужки?
8. Чи може одна логічна формула відповідати різним за змістом висловленням?
9. Яка функція називається логічною?
10. Що таке таблиця істинності логічної формули? Навести приклади побудови таблиць істинності.