**Лекція 6. Рівносильні формули алгебри логіки**

**План**

1. Рівносильні логічні формули.
2. Проблема розв’язності.
3. Нормальні форми.

**1. Рівносильні логічні формули**

Дві формулі  і  називаються рівносильними, якщо при будь-яких значеннях , , …, , де , , …,  - це сукупність усіх змінних, що входять в  і , ці формули приймають однакові значення. Наприклад,  рівносильна ,  рівносильна .

Рівносильність логічних формул може бути встановлена шляхом побудови таблиць істинності для кожної з них: якщо таблиці містять однакові значення в стовпцях для результуючих формул при однакових значеннях усіх вхідних у формули змінних, то формули рівносильні.

*Приклади рівносильних формул*:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | рівносильна |  | (1) |
|  | рівносильна |  | (2) |
|  | рівносильна |  | (3) |
|  | рівносильна |  | (4) |
|  | рівносильна |  | (5) |
|  | рівносильна |  | (6) - І |
|  | рівносильна |  | (7) -ІІ |
|  | рівносильна |  | (8) |
|  | рівносильна |  | (9) |
|  | рівносильна |  | (10) |
|  | рівносильна |  | (11) |
|  | рівносильна |  | (12) |
|  | рівносильна | 1 | (13) |
|  | рівносильна |  | (14) |
|  | рівносильна | 0 | (15) |
|  | рівносильна |  | (16) |
|  | рівносильна |  | (17) |

Формули (6) і (7) називаються відповідно першим і другим дистрибутивними законами.

Доведемо рівносильність (10) за допомогою таблиць істинності:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Порівняння таблиць істинності говорить про рівносильність формул  і  (одним кольором у таблицях зафарбовані відповідні рядки).

Логічні операції  не є незалежними. Дійсно,

 (18)

 (19)

Доведемо формулу (18) за допомогою таблиці істинності:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Співпадіння виділених у таблиці стовпців доводить рівносильність (18). Для формули (19) зробимо аналогічним чином:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Співпадіння виділених у таблиці стовпців доводить рівносильність (19).

Таким чином, для запису будь-якої логічної формули замість набору , що складається з 5-ти логічних операцій, можна завжди скористатися тільки трьома: .

Кількість операцій, через які виражаються всі інші, можна зменшити до двох. Ці пари:  чи . Дійсно, враховуючи рівносильні формули (1) – (17), отримуємо:

,

тобто диз’юнкція виражається через заперечення й кон’юнкцію, а тому усі основні логічні операції можна виразити тільки через .

Аналогічно, оскільки має місце

,

тобто кон’юнкція виражається через заперечення і диз’юнкцію, то усі основні логічні операції можна виразити тільки через .

**2.** **Проблема розв’язності**

Логічна формула називається ***тотожно істинною***, якщо вона при всіх значеннях вхідних у неї змінних висловлень приймає значення 1.

***Приклад***:  при будь-яких значеннях .

Логічна формула називається ***здійсненною***, якщо існує хоча б один такий набір значень вхідних у неї змінних висловлень, на якому вона приймає значення 1.

***Приклад***: , коли , . Оскільки ми змогли вказати такий набір значень змінних , на якому формула  істинна, то вона здійсненна.

Логічна формула називається ***нездійсненною***, або ***тотожно хибною***, якщо вона при будь-яких значеннях вхідних у неї змінних висловлень приймає значення 0.

***Приклад***.  при будь-яких значеннях , тому формула  є тотожно хибною.

Для формули логіки часто вирішується задача про те, чи є вона тотожно істинною. Така задача в класичній логіці називається проблемою розв'зності. Найпростіший спосіб для розв'язку такої задачі: побудова таблиці істинності формули й аналіз стовпця значень формули (чи є в цьому стовпці нулі).

**3.Нормальні форми**

***Елементарним добутком*** називається кон’юнкція (добуток) змінних і/або їх заперечень. При цьому вхідні в елементарний добуток змінні або їх заперечення будуть називатися множниками.

***Приклад***. , . Для останньої формули  - множники.

***Елементарною сумою*** називається диз'юнкція (сума) змінних і/або їх заперечень. При цьому вхідні в елементарну суму змінні або їх заперечення будуть називатися доданками.

***Приклад***. , . Для останньої формули  - доданки.

***Теорема***. Щоб елементарна сума була тотожно істинною, необхідно й достатньо, щоб у ній була хоча б одна пара доданків, з яких один є деякою змінною, а інший - її запереченням.

***Доказ***.

*Достатність*. Нехай є елементарна сума, у складі якої є пари доданків, з яких один є деякою змінною, а інший - її запереченням, тобто формула виглядає наступним чином: . Частина цієї формули, позначена фігурною дужкою, дорівнює 1, у силу чого вся сума буде істинною при будь-яких значення змінних, які входять у неї.

*Необхідність*. Припустимо, що елементарна сума є тотожно істинною, але не містить ні одної пари доданків, з яких один є деякою змінною, а інший - її запереченням, тобто доданків виду . Тоді кожній змінній, що не знаходиться під знаком заперечення, можна дати значення 0, а кожній змінній, що стоїть під знаком заперечення - 1. У цьому випадку вся сума виявиться рівною 0, що суперечить її тотожній істинності.

***Теорема***. Щоб елементарний добуток був тотожно хибним, необхідно й достатньо, щоб у ньому містилася хоча б одна пара множників, з яких один є деякою змінною, а інший - її запереченням.

*Доказ* самостійно.

***Визначення***. Логічна формула, рівносильна даній формулі, що представляє собою суму елементарних добутків, називається ***диз'юнктивною нормальною формою*** (ДНФ) даної формули.

Для кожної логічної формули існує ДНФ, яка отримується з використанням І дистрибутивного закону.

***Визначення***. Логічна формула, рівносильна даній формулі, що представляє собою добуток елементарних сум, називається ***кон'юнктивною нормальною формою*** (КНФ) даної формули.

Для кожної логічної формули існує КНФ, яка отримується з використанням ІІ дистрибутивного закону.

***Приклад***. Знайти КНФ і ДНФ для формули . Для розв'язку поставленого завдання, у першу чергу, перетворимо дану формулу в рівносильну, що використовує тільки ті три логічні операції, які фігурують у ДНФ і КНФ: :



Оскільки в КНФ і ДНФ знак заперечення може бути тільки над змінною, то скористаємося далі для рівносильних перетворень (10) і (11):



Отримана в результаті формула є добутком елементарних сум, тобто КНФ. Застосуємо до неї І дистрибутивний закон:



У результаті отримана сума елементарних добутків, яка є ДНФ.

**Питання**

1. Які дві формулі  і  називаються рівносильними?
2. Як може бути встановлена рівносильність логічних формул?
3. Як за допомогою таблиці істинності довести рівносильність формул?
4. Довести всі надані приклади рівносильних формул.
5. Перший і другий дистрибутивні закони. Довести.
6. Які операції є основними серед логічних операцій?
7. Скільки логічних операцій вистачає для запису будь-якої логічної формули? Чому?
8. Яка логічна формула називається тотожно істинною?
9. Яка логічна формула називається здійсненою?
10. Яка логічна формула називається тотожно хибною?
11. Що таке елементарний добуток?
12. Що таке елементарна сума?
13. Коли елементарна сума є тотожно істинною?
14. Коли елементарний добуток є тотожно хибним?
15. Що називається ДНФ, КНФ логічної формули?

.