**Лекція 7. Досконалі нормальні форми логічних формул**

**План**

1. Критерії тотожної істинності, тотожної хибності логічних формул.
2. Досконалі нормальні форми.
3. Критерій рівносильності довільних логічних формул.

**1. Критерії тотожної істинності, тотожної хибності логічних формул**

Для кожної логічної формули КНФ і ДНФ визначаються неоднозначно. Так у попередній лекції для формули  була знайдена КНФ: . Однак з урахуванням рівносильних перетворень:



отримуємо, що логічна формула  також є КНФ для .

Аналогічні результати можуть бути отримані й для ДНФ.

***Твердження 1***. Для того, щоб логічна формула була тотожно істинною, необхідно й достатньо, щоб кожний множник її КНФ мав, принаймні, два доданки, з яких один є деякою змінною, а другий - її запереченням.

Дійсно, у цьому випадку кожна елементарна сума, що є множником КНФ, буде дорівнювати 1, а тоді й уся кон’юнкція також виявиться рівною одиниці, тобто тотожно істинною.

Твердження 1 відіграє важливу роль. Дійсно, для розв'язку питання про те, чи є конкретна формула тотожно істинною, можна побудувати її КНФ. Якщо отримана КНФ задовольняє твердженню 1, то одержуємо позитивну відповідь на поставлене питання.

***Приклад***. З'ясувати, чи є формула  тотожно істинною. Проведемо розв'язок цього завдання двома способами:

1. За допомогою КНФ, рівносильній даній формулі;
2. За допомогою таблиці істинності.

Побудуємо КНФ для заданої логічної формули:

 (1)

Як видно, кожний множник отриманої КНФ має два доданки, один з яких - змінна, а інший - її заперечення: у першому множнику  - ці доданки  і ; у другому множнику  - ці доданки  і . Відповідно до твердження 1 це говорить про тотожну істинність заданої логічної формули. Якщо рівносильні викладки в (1) продовжити, то отримаємо:



При побудові таблиці істинності формули  маємо:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

тобто наша логічна формула завжди приймає значення 1, тобто є тотожно істинною.

***Твердження 2***. Для того, щоб логічна формула була тотожно хибною, необхідно й достатньо, щоб кожний доданок її ДНФ мав, принаймні, два множники, з яких один є деякою змінною, а другий - її запереченням.

Дійсно, у цьому випадку кожний елементарний добуток, що є доданком ДНФ, буде дорівнювати 0, а тоді й уся диз'юнкція також виявиться рівної нулю, тобто тотожно хибною.

Для розв'язку питання про те, чи є конкретна формула тотожно хибною, можна скористатися твердженням 2: побудувати її ДНФ і перевірити: якщо отримана ДНФ задовольняє твердженню 2, то одержуємо позитивну відповідь на поставлене питання.

**2.** **Досконалі нормальні форми**

Нехай логічна формула  не є тотожно хибною.

***Визначення***. Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) формули , яка містить *n* різних змінних , називається така ДНФ, яка має наступні властивості:

1. В ній немає двох однакових доданків;
2. Жодний доданок не містить двох однакових множників;
3. Ніякий доданок не містить змінної разом з її запереченням;
4. У кожному доданку є в якості множника або змінна , або її заперечення , де .

Нехай дана довільна формула . Для отримання її ДДНФ необхідно:

* привести її спочатку до якої-небудь ДНФ;
* якщо який-небудь доданок, який позначимо через , взагалі не містить змінну , то замінити його рівносильною формулою: , оскільки

.

Таким чином, умова 4 буде виконаною;

* при наявності однакових доданків, виключити всі з них, крім одного. При наявності в доданках однакових множників, виключити всі з них, крім одного.
* Вилучити всі ті доданки, які містять яку-небудь змінну разом з її запереченням, тому що такі доданки представляють із себе тотожно хибні вирази. Результат – ДДНФ.

Якщо  - тотожно хибна формула, то в процесі побудови ДДНФ усі доданки будуть вилучені, ми не отримаємо ДДНФ.

ДДНФ для логічної формули визначається однозначно.

***Приклад***. Для формули  побудувати ДДНФ.

Спочатку побудуємо яку-небудь ДНФ для заданої формули:





ДДНФ для заданої формули має вид: .

Аналогічним чином визначається досконала кон’юнктивна нормальна форма (ДКНФ) логічної формули.

Нехай логічна формула  не є тотожно істинною.

***Визначення***. Досконалою кон’юнктивною нормальною формою (ДКНФ) формули , яка містить *n* різних змінних , називається така КНФ, яка має наступні властивості:

1. У ній немає двох однакових множників;
2. Жоден множник не містить двох однакових доданків;
3. Ніякий множник не містить змінної разом з її запереченням;
4. У кожному множнику є в якості доданка або змінна , або її заперечення , де .

Нехай дана довільна формула . Для отримання її ДКНФ необхідно:

* привести її спочатку до якої-небудь КНФ;
* якщо який-небудь множник, який позначимо через , взагалі не містить змінну , то замінити його рівносильною формулою: , оскільки

.

Таким чином, умова 4 буде виконаною;

* при наявності однакових множників, вилучити всі з них, крім одного. При наявності в множнику однакових доданків, вилучити всі з них, крім одного.
* Вилучити всі ті множники, які містять яку-небудь змінну разом з її запереченням, тому що такі множники представляють із себе тотожно хибні вирази. Результат – ДКНФ.

**3.** **Критерій рівносильності довільних логічних формул**

Досконалі нормальні форми (ДНФ) дозволяють сформулювати критерій рівносильності двох довільних логічних формул  і . Можна вважати, що  і  містять однакові змінні. Дійсно: якщо це не так, тобто, наприклад, формула  не містить деяку змінну , яка входить в формулу , то  можна замінити рівносильною формулою: , яка вже містить . Після цього формули  і  приводяться до досконалих диз’юнктивних (або кон’юнктивних) нормальних форм. Якщо  і  рівносильні формули, то в силу єдиності ДНФ як диз'юнктивні, так і кон’юнктивні нормальні форми цих формул повинні співпадати. Таким чином порівняння ДНФ формул  і  вирішує питання про їх рівносильність.

**Питання**

1. Скільки різних КНФ (ДНФ) можна побудувати для логічної формули? Навести приклади.
2. Сформулювати критерій (необхідну й достатню умову) тотожної істинності логічної формули. Навести приклади тотожно істинних формул.
3. Сформулювати критерій (необхідну й достатню умову) тотожної хибності логічної формули. Навести приклади тотожно хибних формул.
4. Що називається ДДНФ логічної формули?
5. Що називається ДКНФ логічної формули?
6. Правила побудови ДДНФ, ДКНФ. Навести приклади побудови ДДНФ, ДКНФ для логічної формули.
7. Критерій рівносильності довільних логічних формул.