**Лекція 8. Основні схеми логічно правильних міркувань**

**Вступ**

Поряд із правилами побудови складних висловлень - логічних формул математична логіка містить правила перетворення логічних формул. Правила перетворення реалізують загальнологічні закони й забезпечують логічно правильні міркування.

Якщо опис системи, процесу, явища і т.д. представлений сукупністю складних висловлень - логічних формул, істинних для даної системи (у даній інтерпретації її простих висловлень), то за допомогою припустимих перетворень наявних логічних представлень про систему може бути виконаний їхній аналіз (синтез), можуть бути отримані нові характеристи зазначеної системи (істинні для даної системи) і т.і. Таким чином, за допомогою припустимих у логіці перетворень з'являється можливість одержання нових знань із наявних.

Процес отримання нових знань, виражених висловленнями, з інших знань, також виражених висловленнями, називається міркуванням (умовиводом). Вхідні висловлення називаються посилками (гіпотезами, умовами), а отримувані висловлення - висновком (наслідком).

Нижче приводяться найбільше використовувані схеми логічно правильних міркувань.

1. ***Правило висновку***: *Якщо з висловлення  випливає висловлення  і справедливо (істинно) висловлення , то справедливо .* Позначення:

.

***Приклади***. Якщо студент був відсутній на модулі (*А*), він не написав модульну роботу (*В*). Студент був відсутній на модулі. Отже, він не написав модульну роботу.

Якщо один кут у трикутнику прямий (*А*), то два інші кути - гострі (*В*). Один кут трикутника прямий, отже два інших - гострі.

Якщо неавторизований доступ до інформаційної системи банку відбувся (*А*), то винним, у першу чергу, є начальник відділу інформаційної безпеки (*В*).

Логічна формула, що відображає правило висновку, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням: перший множник , , другий - , , що відповідно до твердження 1 з лекції 7 говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність правила висновку.

2. ***Правило заперечення****: Якщо з  випливає , і висловлення  хибне, то хибне і  (це використовується при доказі від противного).* Позначення:

.

***Приклади***. Довести, що будь-яка скінченна множина М є обмеженою. Доказ від противного: нехай множина *М* є необмеженою (висловлення *А*), але тоді істиною є те, що ця множина нескінченна (висловлення *В*). Але множина *М* скінченна, тобто *В* – хибне, тому і *А* хибне, тобто наше припущення *А* – хибне, тобто множина *М* – обмежена (істинно висловленя «*не* *А*»).

Якщо студент був відсутній на модулі (*А*), він не написав модульну роботу (*В*). Студент написав модульну роботу. Отже він НЕ був відсутній на модулі.

Якщо неавторизований доступ до інформаційної системи банку відбувся (висловлення *А*), то винним, у першу чергу, є начальник відділу інформаційної безпеки (висловлення *В*). Начальник відділу інформаційної безпеки ні в чому не винний, отже неавторизованого доступу до інформаційної системи банку не відбулося.

Логічна формула, що відображає правило заперечення, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням: перший множник , , другий - , , що відповідно до твердження 1 з лекції 7 говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність правила заперечення.

3.***Правила твердження-заперечення****: Якщо істинним є тільки одне з висловлень  чи , і істинно одне з них, то друге хибне.* Позначення:

.

***Приклад***. 17 листопада я поїду на конференцію в Київ (висловлення *А*) або у відрядження у Вінницю (висловлення *В*). 17 я поїду в Київ, отже у Вінницю я не поїду.

Логічні формули, що відображають правила твердження-заперечення, виглядають наступним чином: , . Ці формули є тотожно істинними. Доведемо це для однієї з них (першої), тому що доказ тотожної істинності другої буде аналогічним.

У першу чергу покажемо, що , користуючись таблицею істинності:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Користуючись тим, що , побудуємо КНФ для :



Оскільки кожний множник отриманої КНФ містить серед доданків змінну і її заперечення, то  є тотожно істинною формулою.

4.***Правила заперечення-твердження:*** *Якщо істинним є тільки одне з висловлень  чи , і невірно одне з них, то друге є істинним.* Позначення:

.

Доказ аналогічний правилу 3.

5. ***Правило транзитивності****: Якщо з  випливає , а з  випливає , то з  випливає .*

Позначення:

.

***Приклад***. Якщо студент систематично займається (висловлення *А*), то він опанує матеріал дисциплін, що йому читаються (висловлення *В*). Якщо студент опанує матеріал дисциплін, що йому читаються (*В*), то він здасть сесію в строк (висловлення *С*).

Логічна формула, що відображає правило транзитивності, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням: перший множник , , другий - , , третій - , , четвертий множник - , , що відповідно до твердження 1 з лекції 7 говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність правила транзитивності.

6. ***Закон протиріччя (від противного):*** *Якщо з  випливає  і , то  хибне.*

Позначення:

.

***Приклад***. Розглянемо висловлення *А*: Скінченна множина *Х* є необмеженою. Тоді з (*А*) випливає:

* *Х* має найбільший і найменший елементи (висловлення *В*) ;
* Не вірно, що *Х* має найбільший і найменший елементи (висловлення ),

тому не вірним є висловлення *А*, що відповідає дійсності.

Логічна формула, що відображає закон протиріччя, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням, що говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність закону протиріччя.

7. ***Правило контрапозиції****: Якщо з  випливає , то з того, що невірне , випливає те, що невірне .*

Позначення:

.

***Приклад***. Якщо Іван мій син (*А*), то я старша за Івана (*В*). Якщо я не старша за Івана, то він мені не син.

Логічна формула, що відображає правило контрапозиції, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням, що говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність правила контрапозиції.

8. ***Правило складної контрапозиції****: Якщо з  і  випливає , то з  і  випливає .*

Позначення:

.

***Приклад***. Якщо одягти гумові чоботи (*А*) і взяти парасольку (*В*), то в дощ не вимокнеш (*С*). Якщо ти одяг гумові чоботи й вимокнув у дощ, то ти не взяв парасольку.

Логічна формула, що відображає правило складної контрапозиції, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням, що говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність правила складної контрапозиції.

9. ***Правило перерізу****: Якщо з  випливає , а з  і  випливає , то з  і  випливає* .

Позначення:

.

***Приклад***. Якщо ти живеш в Одесі (*А*), то влітку до тебе приїжджають знайомі відпочивати (*В*). Якщо знайомі приїжджають (*В*) і залишаються на все літо (*С*), то твоя відпустка зіпсована (*D*).

Логічна формула, що відображає правило перерізу, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням, що говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність правила перерізу.

10. ***Правило імпортації (об'єднання посилок):*** *Якщо з  випливає те, що з  випливає , то  випливає з  і .*

Позначення:

.

***Приклад***. Якщо я живу в Одесі (*А*), то якщо я залишаюся у відпустці вдома (В), то відпустка пропала (З).

Логічна формула, що відображає правило імпортації, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:



Отримали КНФ для . Кожний множник отриманої КНФ містить змінну разом з її запереченням, що говорить про тотожну істинність  і підтверджує правильність правила імпортації.

11. ***Правило експортації (роз'єднання посилок):*** *Якщо  випливає з  і , то з  випливає, що з  випливає .*

Позначення:

.

Логічна формула, що відображає правило експортації, виглядає наступним чином: . Ця формула є тотожно істинною:





Отримана КНФ і підтверджує правильність правила экспортации.

12. ***Правила ділем:***

а) ; б) 

в)  г) .

***Завдання***. Довести правильність правил дилем.