**Лекція 9. Двоїсті формули і їх властивості**

**План**

1. **Двоїсті операції й двоїсті формули.**
2. **Представлення довільної двозначної функції за допомогою логічної формули**.

**1. Двоїсті операції й двоїсті формули**

Припустимо, що логічні формули містять тільки операції кон’юнкції, диз'юнкції й заперечення. Будемо говорити, що операція «» двоїста до операції «» і навпаки.



Формули і називаються ***двоїстими***, якщо одна виходить із іншою заміною кожної операції на двоїсту із збереженням порядку операцій.



***Приклад***. Нехай

,



Тоді

.



***Твердження***. Якщо формули і - двоїсті формули, а - всі елементарні висловлення, що в них входять, то



(1)



чи

. (2)



***Закон двоїстості***. Якщо і - рівносильні формули, то й двоїсті до них і - рівносильні.



***Доказ***. Нехай . Тоді



З (2) випливає, що

,



,



звідки й отримуємо, що

,



що й було потрібно довести.

**2. Представлення довільної двозначної функції за допомогою логічної формули**

Нехай - довільна функція, що залежить від *n* змінних , причому й змінні, й сама функція приймають тільки два значення - ІСТИНА й НЕПРАВДА (1 і 0).



Таку функцію можна представити за допомогою логічної формули:

(3)



Кожний доданок суми (3) - це добуток, у якому перший множник є значенням функції при деяких певних значеннях змінних , інші ж множники є змінними або запереченнями цих змінних. Під знаком заперечення знаходяться ті й тільки ті змінні, які в першому множнику мають значення НЕПРАВДА. Розглянута сума (3) містить усілякі доданки такого виду. Формула (3) визначає функцію . Дійсно, дамо певні значення змінним, наприклад, . Значення поданої функції – це . Розглянемо доданок з (3):



. (4)



У цьому доданку всі множники, крім, можливо, першого, мають значення ІСТИНА. Тоді значення буде співпадати зі значенням . У всякому іншому доданку знаки заперечення над змінними розподіляються інакше, ніж в (4), але тоді в добуток множником увійде або НЕПРАВДА без заперечення, або ІСТИНА із запереченням, а значить такий добуток буде дорівнювати НЕПРАВДі. Таким чином, при розглянутій підстановці в змінні значень ІСТИНА й НЕПРАВДА всі доданки, крім одного - (4), мають значення НЕПРАВДА, а доданок (4) - значення . Тоді вся сума (3) має значення .



***Приклал***. Нехай функція визначена в вигляді таблиці:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Відповідний доданок у логічній формулі |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 | 1 | 0 | 1 |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 |  |

У логічну формулу внесемо лише ненульові доданки:

.



Очевидно, що отримана формула є ДДНФ.

**Питання**

1. Які формули і називаються двоїстими?



1. Сформулювати і довести закон двоїстості.
2. Представлення довільної двозначної функції за допомогою логічної формули.
3. Яку логічну формулу отримаємо в результаті представлення довільної двозначної функції за допомогою логічної формули?