自用复习
近似点算法学习

李鑫

吉林大学

2021 年 1 月 19 日

对称矩阵定义及其性质

定义 (对称矩阵)

矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的: $A^T = A$

两个基本性质

性质 (实对称矩阵)

1. 实对称矩阵所有特征值为实数
2. 不同特征值的特征向量正交

复习下复数的东西

- 先来看看什么叫做复数矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 对于复数定义为 $z = x + yi$ 其中 $i = \sqrt{-1}$. 那么对应的 $\mathbb{C}^n$ 就是每一个元素都是复数的向量，而 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 就是每一个元素都是复数的矩阵.
- 我们记复数的共轭是 $z^* = x - yi$. 对于复数向量 $u \in \mathbb{C}^n$ 和复数矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 他们的共轭是他们每个元素的共轭.
- $u \in \mathbb{C}^n$ 的共轭是 $(u_i)^* = (u^*)_i$.
- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的共轭是 $(A_{ij})^* = (A^*)_{ij}$.
- 性质
  - $u = v \Leftrightarrow u^* = v^*$.
  - $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = B \Leftrightarrow A^* = B^*$.
  - $(Au)^* = A^* u^*$ 和 $(A^*)^T = (A^T)^*$.

对称矩阵定义及其性质

实对称矩阵基本性质的证明.

1. 对于特征值 λ 和特征向量 u，有

$$Au = \lambda u \tag{1}$$

对两边同时取共轭可得到

$$A^* u^* = \lambda^* u^* = A u^* \tag{2}$$

对公式 (1) 两边同时乘以 $(u^*)^T$ 得到

$$\begin{aligned}\lambda (u^*)^T u &= (u^*)^T (Au) = ((u^*)^T A) u \\ &= (A^T u^*)^T u \\ &= (A u^*)^T u \\ &= (\lambda^* u^*)^T u = \lambda^* (u^*)^T u\end{aligned} \tag{3}$$

得到 $(\lambda - \lambda^*)(u^*)^T u = 0$，证明完毕.

$\square$

对称矩阵定义及其性质

实对称矩阵基本性质的证明.

2 对于不同特征值 $\lambda \neq u$ 对于的特征向量 $x \neq y$, 有

$$\begin{aligned} < Ax, y > &= \lambda < x, y > \\ < Ax, y > &=< x, Ay >= u < x, y > \\ (\lambda - u) < x, y > &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

由于 $\lambda \neq u$ 得到 $< x, y >= 0$.

$\square$

基础知识

集合 $\mathcal{C}$ 是闭集，如果它包含边界，即

$$x^k \in \mathcal{C},\, x^k \to \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \in \mathcal{C}$$

保持闭集的操作

- 闭集的交集还是闭集.
- 有限个闭集的并集还是闭集.
- 如果 $\mathcal{C}$ 是闭集，则线性映射的原象也是闭集，也就是 $\{x|Ax \in \mathcal{C}\}$ 是闭集合

Thank You