

概率论与数理统计

学 院 _____ 专 业 _____ 班 级 _____
学 号 _____ 姓 名 _____ 任课教师 _____

第 13 次作业

一. 填空题

1. 设 X 服从泊松分布, 若 $EX^2 = 6$, 则 $P(X > 1) = \underline{1 - 3e^{-2}}$.

解 $X \sim P(\lambda)$, $6 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2$ 故 $\lambda = 2$.

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}.$$

2. 设随机变量 $\xi \sim B(n, p)$, 已知 $E\xi = 2.4$, $D\xi = 1.44$, 则参数 $n = \underline{6}$,

$$p = \underline{0.4}.$$

$$\text{解 } \begin{cases} E\xi = np = 2.4, \\ D\xi = npq = 1.44, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 6, \\ p = 0.4. \end{cases}$$

3. 某保险公司的某人寿保险险种有 1000 人投保, 每个人在一年内死亡的概率为 0.005, 且每个人在一年内是否死亡是相互独立的, 欲求在未来一年内这 1000 个投保人死亡人数不超过 10 人的概率。用 Excel 的 **BINOMDIST** 函数计算。**BINOMDIST** (10, 1000, 0.005, TRUE) = 0.986531。

4. 运载火箭运行中进入其仪器仓的粒子数服从参数为 4 的泊松分布, 用 Excel 的 **POISSON** 函数求进入仪器舱的粒子数大于 10 的概率。**POISSON** (10, 4, TRUE) = 0.9972, 所求概率 $p = \underline{0.0028}$ 。

5. $\xi \sim P(4)$, 由切比雪夫不等式有 $P(|\xi - 4| < 6) \geq \underline{8/9}$ 。

二. 选择题

1. 在相同条件下独立的进行 3 次射击, 每次射击击中目标的概率为 $\frac{2}{3}$, 则至少击中一次的概率为 (D)

A. $\frac{4}{27}$ B. $\frac{12}{27}$ C. $\frac{19}{27}$ D. $\frac{26}{27}$

2. 设随机变量 X 服从泊松分布, 且已知 $P\{X=1\} = P\{X=2\}$, 则 $P\{X=4\} =$ (C)

A. $\frac{1}{3}e^{-1}$ B. $\frac{1}{3}e^{-1}$ C. $\frac{2}{3}e^{-2}$ D. $\frac{4}{3}e^{-2}$

3、某种灯管的使用寿命 ξ 服从参数为 0.002 的指数分布 $E(0.002)$ ，现任取三只这种灯管，则在 500 小时内，三只灯管中至多有两只损坏的概率为（ A ）

(A) $1-(1-e^{-1})^3$ (B) $3e^{-2}(1-e^{-1})$ (C) $1-e^{-3}$ (D) $3e^{-1}(1-e^{-2})$

三. 计算题

1. 设随机变量 ξ 的密度函数是

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对 ξ 独立的随机观察 4 次， η 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求

(1) η 的概率分布（分布律），

(2) $E\eta$ 和 $D\eta$ 。

解 $\eta \sim B(4, p)$ 。

(1) 设 A = “观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ ”，则 $p = P(A) = P(\xi \geq \frac{\pi}{3}) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}$ ，

所以 η 的概率分布为： $P(\eta=k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-k}$, ($k=0,1,2,3,4$)。

或

η	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2) $E\eta = 4 \times \frac{1}{2} = 2$, $D\eta = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$

2. 随机变量 ξ 服从参数为 p 的几何分布，即

$$P(\xi=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,\dots$$

(1) 求 $P(\xi > s)$ ，其中 s 是一个非负整数；

(2) 试证 $P(\xi > s+t | \xi > s) = P(\xi > t)$, 其中 s, t 是非负整数。(几何分布具有无记忆性)。

解 (1)
$$P(\xi > s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=s+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p(1-p)^s \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p(1-p)^s \frac{1}{p} = (1-p)^s$$

或者:
$$P(\xi > s) = 1 - P(\xi \leq s) = 1 - \sum_{k=1}^s p(1-p)^{k-1} = 1 - p \cdot \frac{1-(1-p)^s}{1-(1-p)} = (1-p)^s$$

(2)
$$P(\xi > s+t | \xi > s) = \frac{P(\{\xi > s+t\} \cap \{\xi > s\})}{P(\xi > s)} = \frac{P(\xi > s+t)}{P(\xi > s)}$$

$$= \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} = (1-p)^t = P(\xi > t)。$$

3. 设随机变量 X 服从泊松分布, 且 $P(X \leq 1) = 4P(X = 2)$, 求 $P(X = 3)$ 。

解: $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}$, $P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$

由 $P(X \leq 1) = 4P(X = 2)$ 知 $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 2\lambda^2 e^{-\lambda}$

即 $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ 解得 $\lambda = 1$, 故

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} e^{-1}.$$

4. 设在时间 t (单位: min) 内, 通过某路口的汽车服从参数与 t 成正比的泊松分布。已知在 1 分钟内没有汽车通过的概率为 0.2, 求在 2 分钟内至少有 2 辆车通过的概率。(提示: 设 ξ_t = “ t 时间内汽车数”, 则 $\xi_t \sim P(\lambda t)$)

解: 设 ξ_t = “ t 时间内汽车数”, 则 $\xi_t \sim P(\lambda t)$,

那么 $P(\xi_t = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$

由已知, 得 $P(\xi_1 = 0) = \frac{(\lambda)^0 e^{-\lambda}}{0!} = 0.2 \Rightarrow \lambda = \ln 5,$

所以
$$P(\xi_2 \geq 2) = 1 - P(\xi_2 = 0) - P(\xi_2 = 1) = 1 - \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!} - \frac{(2\lambda)^1 e^{-2\lambda}}{1!}$$

$$= 1 - e^{-2\lambda} - (2\lambda)e^{-2\lambda} = \frac{24 - 2\ln 5}{25}.$$

5. 在一次试验中事件 A 发生的概率为 p , 把这个试验独立重复做两次。在下列两种情况下分别求 p 的值:

(1) 已知事件 A 至多发生一次的概率与事件 A 至少发生一次的概率相等;

(2) 已知事件 A 至多发生一次的条件下事件 A 至少发生一次的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

解 设 ξ 为两次试验中事件 A 发生的次数, 则 $\xi \sim B(2, p)$ 。

(1) 由题意知, $P(\xi \geq 1) = P(\xi \leq 1)$, 即

$$P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1)$$

得 $P(\xi = 2) = P(\xi = 0)$, 亦即 $C_2^2 p^2 = C_2^0 (1-p)^2$, 解得 $p = \frac{1}{2}$ 。

(2) 由条件概率公式

$$P(\xi \geq 1 | \xi \leq 1) = \frac{P(\{\xi \geq 1\} \cap \{\xi \leq 1\})}{P(\xi \leq 1)} = \frac{P(\xi = 1)}{P(\xi \leq 1)} = \frac{2p(1-p)}{1-p^2} = \frac{2p}{1+p},$$

根据题意, $\frac{2p}{1+p} = \frac{1}{2}$, 解出, $p = \frac{1}{3}$ 。

第 14 次作业

一. 填空题:

1. 若 ξ 在 $[0, 5]$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + \xi^2 - 3\xi = 0$ 有实根的概率

0.8。

2. 设随机变量 X 在区间 $[2, 6]$ 上服从均匀分布, 现对 X 进行了 3 次独立试验,

则正好有 2 次观测值大于 4 的概率为 $\frac{3}{8}$ 。

3. 设每人每次打电话的时间 (单位: min) 服从 $E(1)$, 则在 808 人次的电话中有

3 次或以上超过 6 分钟的概率为 0.324。

二. 选择题:

1. 设 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则随着 σ 的增大, 则概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ (C)
A. 单调增大 B. 单调减少 C. 保持不变 D. 增减不定
2. 若灯管的寿命 $\xi \sim E(\lambda)$, 则该灯管已使用了 $a(a > 0)$ 小时, 能再使用 b 小时的概率 (A)。
A. 与 a 无关 B. 与 a 有关 C. 无法确定 D. 以上答案都不对
3. 随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)$, 且 $p(x) = p(-x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 有 (B)。
A. $F(-a) = 1 - \int_0^a p(x)dx$ B. $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a p(x)dx$
C. $F(-a) = F(a)$ D. $F(-a) = 2F(a) - 1$

三. 计算题:

1. 某地区 18 岁的女青年的血压服从 $N(110, 121)$ 。在该地区任选一 18 岁的女青年, 测量她的血压,
(1) 求 $P(X \leq 100)$, $P(105.5 \leq X \leq 121)$
(2) 确定最小的 x , 使 $P(X > x) \leq 0.05$

解: 设女青年的血压为 ξ , 则 $\xi \sim N(110, 121)$, $\frac{\xi - 110}{11} \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} (1) \quad P(X < 100) &= P\left(\frac{X - 110}{11} < \frac{100 - 110}{11}\right) \\ &= \Phi(-0.9091) = 1 - \Phi(0.9091) = 1 - 0.8184 = 0.1816 \\ P(105.5 \leq X \leq 121) &= \Phi\left(\frac{121 - 110}{11}\right) - \Phi\left(\frac{105.5 - 110}{11}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-0.4091) = \Phi(1) + \Phi(0.4091) - 1 \\ &= 0.8413 + 0.6588 - 1 = 0.5001 \end{aligned}$$

- (2) 要使 $P(X > x) \leq 0.05$, 只须 $P(X \leq x) > 0.95$

因 $\Phi(1.645) = 0.95$, 由 $\frac{x - 110}{11} > 1.645$ 可得 $x > 128.095$.

注: 以上求解利用了 Excel 的 NORM.S.INV() 和 NORM.S.DIST() 函数比查表的计算结果更准确, 二者稍有差异, 比如本题查表的近似解:

$$\because \Phi(1.65) = 0.95 \therefore \frac{x - 110}{11} > 1.65 \Rightarrow x > 128.15$$

2. 修理某机器所需时间（单位：小时）服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布。试问：

- (1) 修理时间超过 2 小时的概率是多少？
- (2) 若已持续修理了 9 小时，总共需要至少 10 小时才能修好的条件概率是多少？

解：设 ξ 是修理时间， $\xi \sim E(\frac{1}{2})$ ， ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

$$(1) P\{\xi > 2\} = 1 - P\{\xi \leq 2\} = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-\frac{2}{2}}) = e^{-1} \approx 0.367879;$$

$$(2) P\{\xi > 10 | \xi > 9\} = \frac{P\{\xi > 10\}}{P\{\xi > 9\}} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{10}{2}})}{1 - (1 - e^{-\frac{9}{2}})} = \frac{e^{-\frac{10}{2}}}{e^{-\frac{9}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.606531.$$

3. 假设测量的随机误差 $\xi \sim N(0, 10^2)$ ，试求在 100 次独立重复测量中，至少有二次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α 。

$$\text{解： } P(|\xi| > 19.6) = P(\xi > 19.6) + P(\xi < -19.6) = 2[1 - \Phi(\frac{19.6}{10})] = 0.05$$

令 η 为 100 次独立重复测量中，误差的绝对值大于 19.6 的次数，

则 $\eta \sim b(100, 0.05)$

$$P(\eta \geq 2) = 1 - P(\eta = 0) - P(\eta = 1) = 1 - (0.95)^{100} - C_{100}^1 (0.05)(0.95)^{99} = 0.9629$$

4. 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 $P(\xi < 89) = 0.90$ ， $P(\xi < 94) = 0.95$ ，求 μ 和 σ^2 。

解：根据

$$0.90 = P(\xi < 89) = \Phi(\frac{89 - \mu}{\sigma}), \text{ 和 } 0.95 = P(\xi < 94) = \Phi(\frac{94 - \mu}{\sigma}),$$

利用随机变量分布函数的单调性，有

$$\frac{89 - \mu}{\sigma} = 1.2816, \text{ 和 } \frac{94 - \mu}{\sigma} = 1.6449,$$

解得 $\mu = 71.3617$ ， $\sigma = 13.7627$ ，即 $\sigma^2 = 189.4128$

5. 测量至某一目标的距离时发生的随机误差 X (米) 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{800}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

求在三次测量中至少有一次误差的绝对值不超过 20 米的概率.

解: $X \sim N(10, 20^2)$

设 Y 为三次测量中误差绝对值不超过 $20m$ 的次数, 则 $Y \sim B(3, p)$, 其中

$$\begin{aligned} p &= P(|X| < 20) = P(-20 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-10}{20}\right) - \Phi\left(\frac{-20-10}{20}\right) \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(0.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.6915 + 0.9332 - 1 = 0.6247 \end{aligned}$$

所求概率为

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - p)^3 = 1 - (1 - 0.6274)^3 = 0.9471.$$