

第三章 傅里叶变换

Fourier Transform, FT

本章主要内容

- 周期信号的傅里叶级数 (**Ch1**)
(**Fourier Series, FS**)
- 非周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换的性质
- 卷积和卷积定理
- 周期信号傅立叶变换
- 抽样信号的傅里叶变换和抽样定理
- 模拟滤波器(**ch7**)

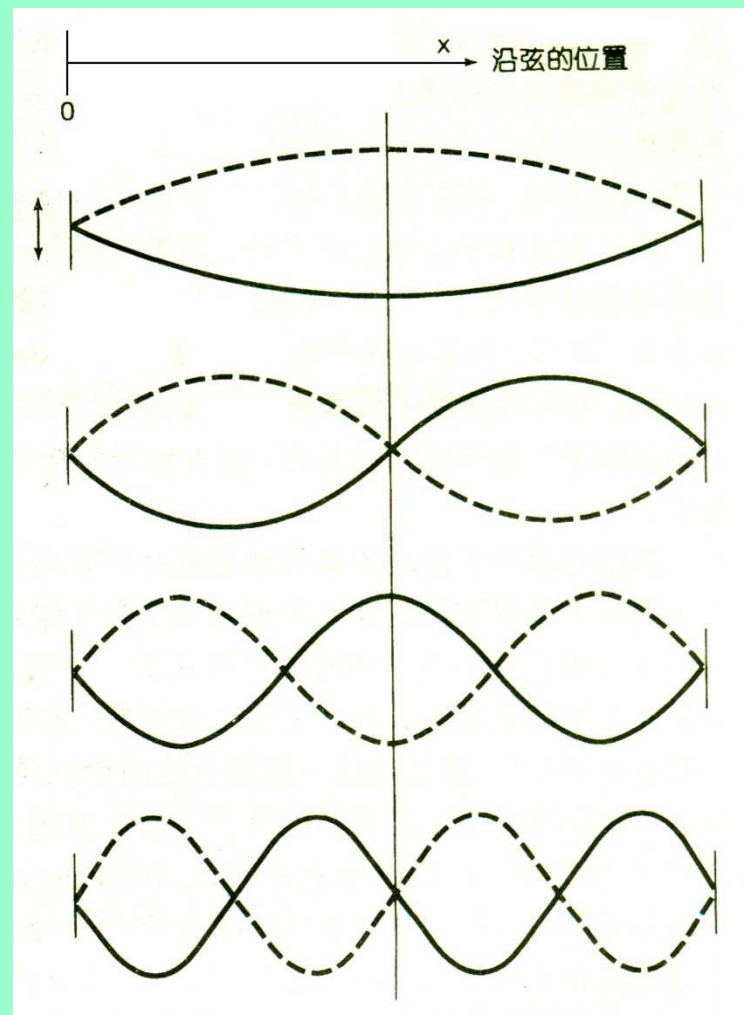
3.1 引言

一、傅立叶分析方法发展的历史

傅立叶分析方法的建立经历了漫长的过程，涉及到许多人的工作和对许多不同物理现象的研究。

(1) 1748 年，瑞士数学家欧拉 (L.Euler, 1707-1783) 对振动弦问题的研究。

用 $f(x,t)$ 表示弦在时间 t 和沿着某一横向距离 x 处的垂直偏离，则对任意固定时刻 t 来说，所有这些振荡模式均为 x 的正弦函数，并成谐波关系。



3.1 引言

一、傅立叶分析方法发展的历史



丹尼尔.伯努利

(2) 1753 年，瑞士数学家丹尼尔.伯努利 (D.Bernoulli, 1700-1782) 提出：一根弦的实际运动都可以用标准振荡模的线性组合来表示。但他并没有继续研究下去。当时，他的想法也未被广泛接受。

(3) 1759 年，法国数学家拉格朗日 (J. L. Lagrange, 1736-1813) 一直反对使用三角级数来研究振动弦振动问题。

3.1 引言

(4) 法国数学家傅立叶(J.Fourier, 1768-1830)在研究热的传播和扩散问题, 发现在描述一个物体的温度分布时正弦函数级数非常有用。1807年他在提交给巴黎科学院的一篇关于热传导的论文中首次提出这一思想。拉格朗日作为 4 名审稿人之一, 以文章缺乏严密性否决了这篇论文在法国科学院《报告》上发表。



傅立叶

1822年, 傅立叶发表著作《热的分析理论》, 其著作中再次提到这一思想, 即“每一个周期函数都可以表示成三角函数之和”的形式, 但没有给出完全的证明。

3.1 引言



狄利克雷

(5) 1829年，法国数学家狄利克雷（P.G.Dirichlet, 1805-1859）以严密的方式给出傅立叶级数与积分的存在条件的完整证明。

一个周期信号只有在满足这些条件的前提下，才可以用傅立叶级数表示。

狄利克雷的工作使傅立叶分析方法得到应有的承认和广泛应用。

3.1 引言



高斯

(6) 18和19世纪，德国数学家高斯(C.F.Gauss, 1777-1885)为使傅立叶分析能在离散时间信号与系统中应用做了大量基础性的工作。

(7) 1965年，美国学者库利(Cooley)和图基(Tukey)独立提出了快速傅立叶变换(FFT)的算法。

(8) 1984年，法国地球物理学家(Morlet)提出小波的概念，后经一批科学家的努力，逐渐建立小波分析方法。目前，小波成为30年来信号处理的经典理论与方法。

傅里叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1829年狄里赫利(Dirichlet)第一个给出收敛条件
- 拉格朗日Lagrange反对发表
- 1822年首次发表在“热的分析理论”一书中



傅立叶的两个最主要的贡献——

- “周期信号都可表示为谐波关系的正弦信号的加权和”——傅里叶的第一个主要论点
- “非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示”——傅里叶的第二个主要论点

- **frequency-domain analysis:**
 - — **Fourier transform** , 自变量为 $j\omega$
- **complex frequency analysis :**
 - — **Laplace transform**, 自变量为 $S = \sigma + j\omega$
- **Z-domain analysis :** — — — **Z 变换**, 自变量为 **z**

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

3.1 Frequency analysis of periodic signals --FS

- 满足狄利赫利条件的周期信号可展开成正交函数线性组合的无穷级数：

- 三角函数式的 傅立里叶级数 $\{\cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t\}$

Trigonometric series

- 复指数函数式的傅里叶级数 $\{e^{jn\omega_1 t}\}$

**complex exponential
function**

三角函数是正交函数

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t \cdot dt = 0 \quad (\text{所有 } m, n)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \sin m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cos m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

狄利赫利条件:

(1) 在一个周期内函数绝对可积, 即

$$\int_{t_0}^{t_0 + T_1} |f(t)| dt < \infty$$

(2) 在一个周期内有有限个极值点;

(3) 在一个周期内, 只有有限个间断点;
且在这些间断点上函数是有限值

- 一般周期信号都满足这些条件.

一、三角函数形式的傅里叶级数:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

直流
分量

基波分量
 $n=1$

谐波分量
 $n>1$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$n\omega_1$$

first harmonic components $n=1$

Nth harmonic components $n=N$

直流
系数

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t).dt$$

余弦分量
系数

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t).\cos n\omega_1 t.dt$$

正弦分量
系数

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t).\sin n\omega_1 t.dt$$

二、余弦形式的傅立叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n)$$

上式表明：一个周期信号可以表示直流分量（频率为0）和一系列正弦分量（谐波）之和。

比较几种系数的关系

$$a_0 = C_0 \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$a_n = C_n \cos \phi_n \quad b_n = -C_n \sin \phi_n$$

$$\tan \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

C_n 为 $n\omega_1$ 的偶函数， ϕ_n 为 $n\omega_1$ 的奇函数。

周期信号的傅立叶级数分析

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

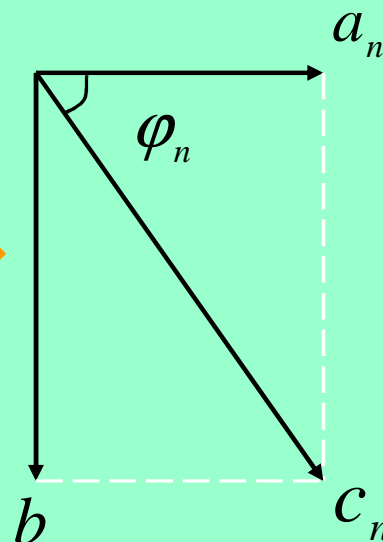
系数对应关系

$$c_0 = a_0,$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

矢量图表示

$$\varphi_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$



正弦分量的频率为 $\omega_1, 2\omega_1, \dots, n\omega_1, \dots$

幅度为 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ 相位为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$,

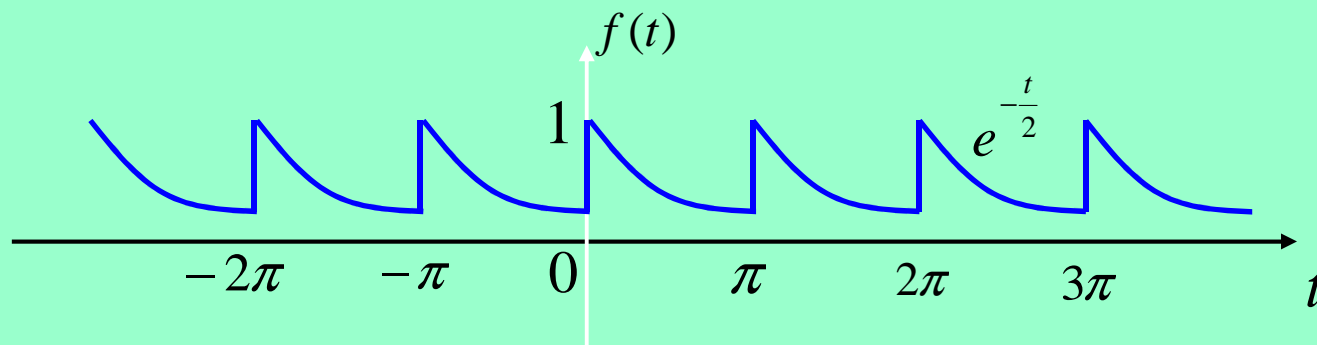
各个分量 a_n, b_n, c_n 和相位 φ_n 都是 $n\omega_1$ 的函数。

$c_n \sim n\omega_1$ 关系曲线, 称为信号的 **幅度频谱**。

$\varphi_n \sim n\omega_1$ 关系曲线, 称为信号的 **相位频谱**。

3.2 周期信号的傅立叶级数分析

例3-1 试求出下图所示的周期信号的紧凑型三角级数，并绘制其振幅图谱和相位图谱。



解：由图知 $T_0 = \pi$, $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{\pi}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$ 弧/秒

因此
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt)$$

其中
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{T_0} f(t) dt$$

3.2 周期信号的傅立叶级数分析

各系数为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} dt = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi/2}) = 0.504$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos 2nt dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{1+16n^2} [e^{-t/2} (2n \sin 2nt - \frac{1}{2} \cos 2nt)]_0^{\pi}$$

$$= 0.504 \left(\frac{2}{1+16n^2} \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin 2nt dt = 0.504 \left(\frac{8n}{1+16n^2} \right)$$

3.2 周期信号的傅立叶级数分析

因此

$$f(t) = 0.504 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right]$$

求得系数为

$$c_0 = a_0 = 0.504$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0.504 \left(\frac{2}{\sqrt{1+16n^2}} \right)$$

$$\varphi_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = -\tan^{-1} 4n$$

信号**f(t)**的支流分量和前**6**次谐波的系数列表如下：

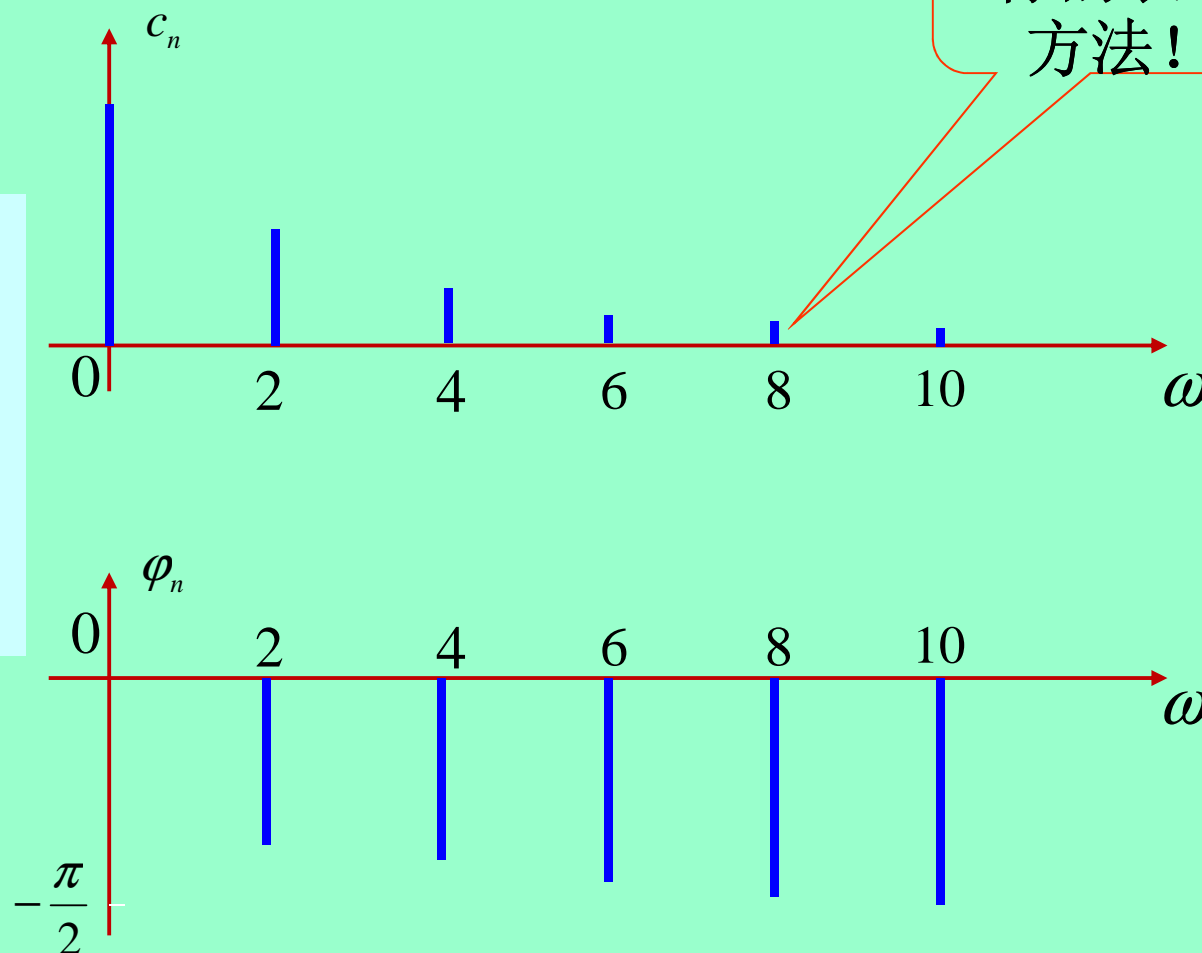
n	0	1	2	3	4	5	6
C_n	0.504	0.244	0.125	0.084	0.063	0.0504	0.042
φ_n	0	-75.96	-82.87	-85.24	-86.42	-87.14	-87.61

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.504 + 0.504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+16n^2}} \cos(2nt - \tan^{-1} 4n) \\ &= 0.504 + 0.244 \cos(2t - 75.96^\circ) + 0.125 \cos(4t - 82.87^\circ) \\ &\quad + 0.084 \cos(6t - 85.24^\circ) + 0.063 \cos(8t - 86.42^\circ) + \dots \end{aligned}$$

画出频谱如下：

注意横坐标的表示方法！

基于三角函数型傅立叶级数而画出的频谱，其幅度谱是单边谱。



3.2 周期信号的傅立叶级数分析

周期信号频谱的特点：

- (1) **离散性** —— 频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。

信号的周期 T_1 决定着其离散频谱谱线的间隔大小。

T_1 越大， ω_1 越小，谱线越密。

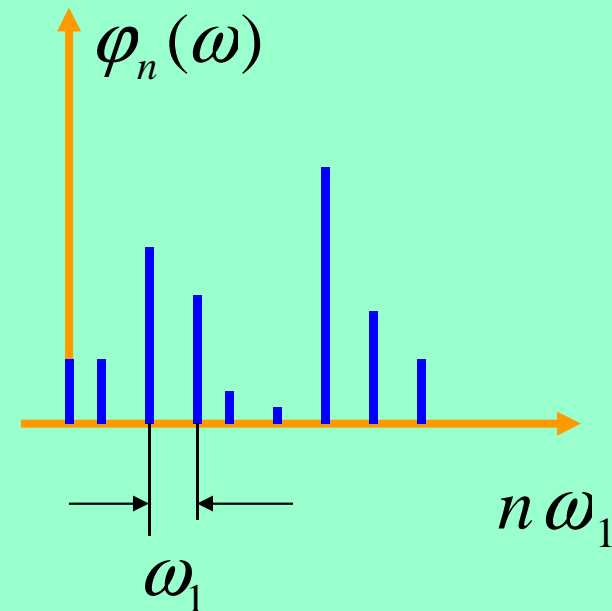
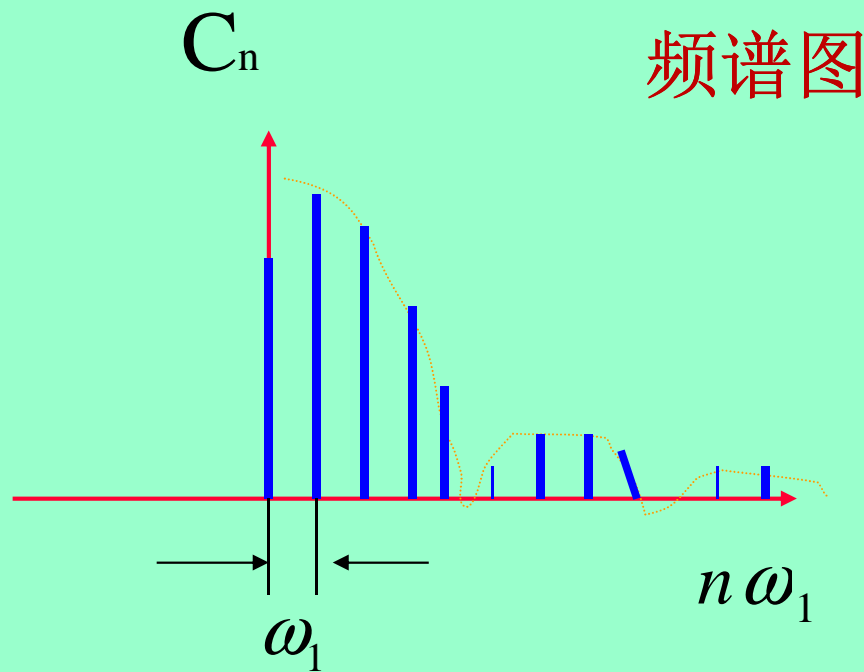
- (2) **谐波性** —— 谱线出现在基波频率 ω_1 的整数倍上。

- (3) **收敛性** —— 幅度谱反映了信号 $f(t)$ 中各频率分量的大小，其谱线幅度随着 $n \rightarrow \infty$ 而逐渐衰减到零。

通过频谱可直观看出各分量的大小，各分量的频移。

周期函数的频谱 C_n :

- 周期信号的谱线只出现在基波频率的整数倍的频率处。直观看出：各分量的大小，各分量的频移，



频率组成，而非单一的频率，比如说下面的信号：

$$S(t) = \sin(2\pi ft) + (1/2)\sin[2\pi(3f)t]$$

这个信号的组成成分只有频率为 f 和频率为 $3f$ 的正弦波，如图 2.17 所示。

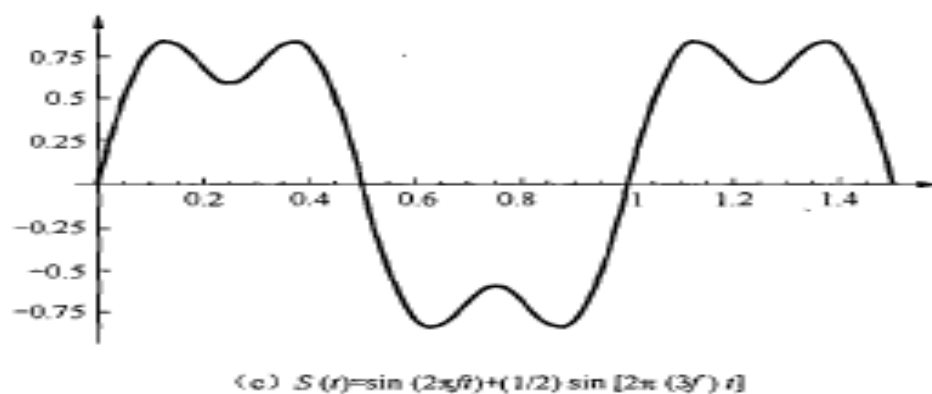
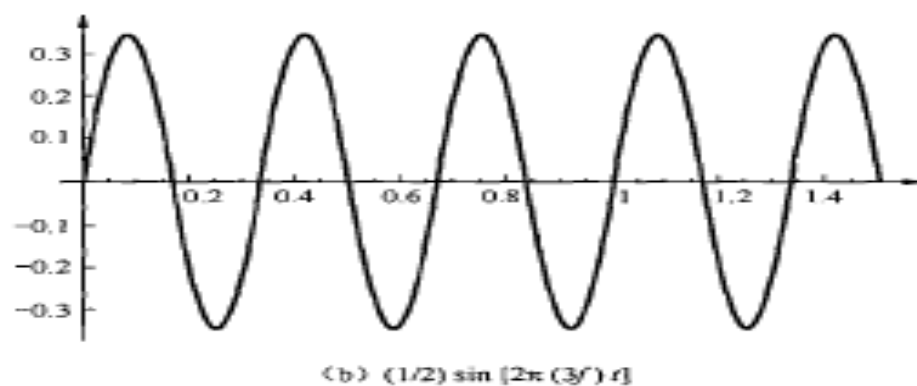
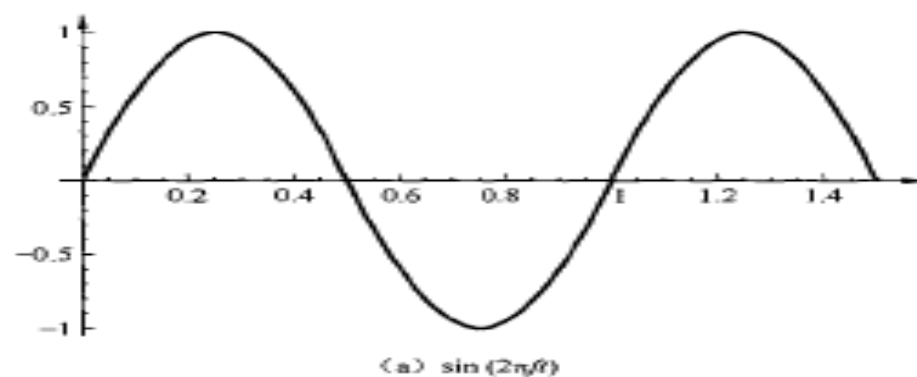


图 2.17 频率成分的叠加 ($T=1/f$)

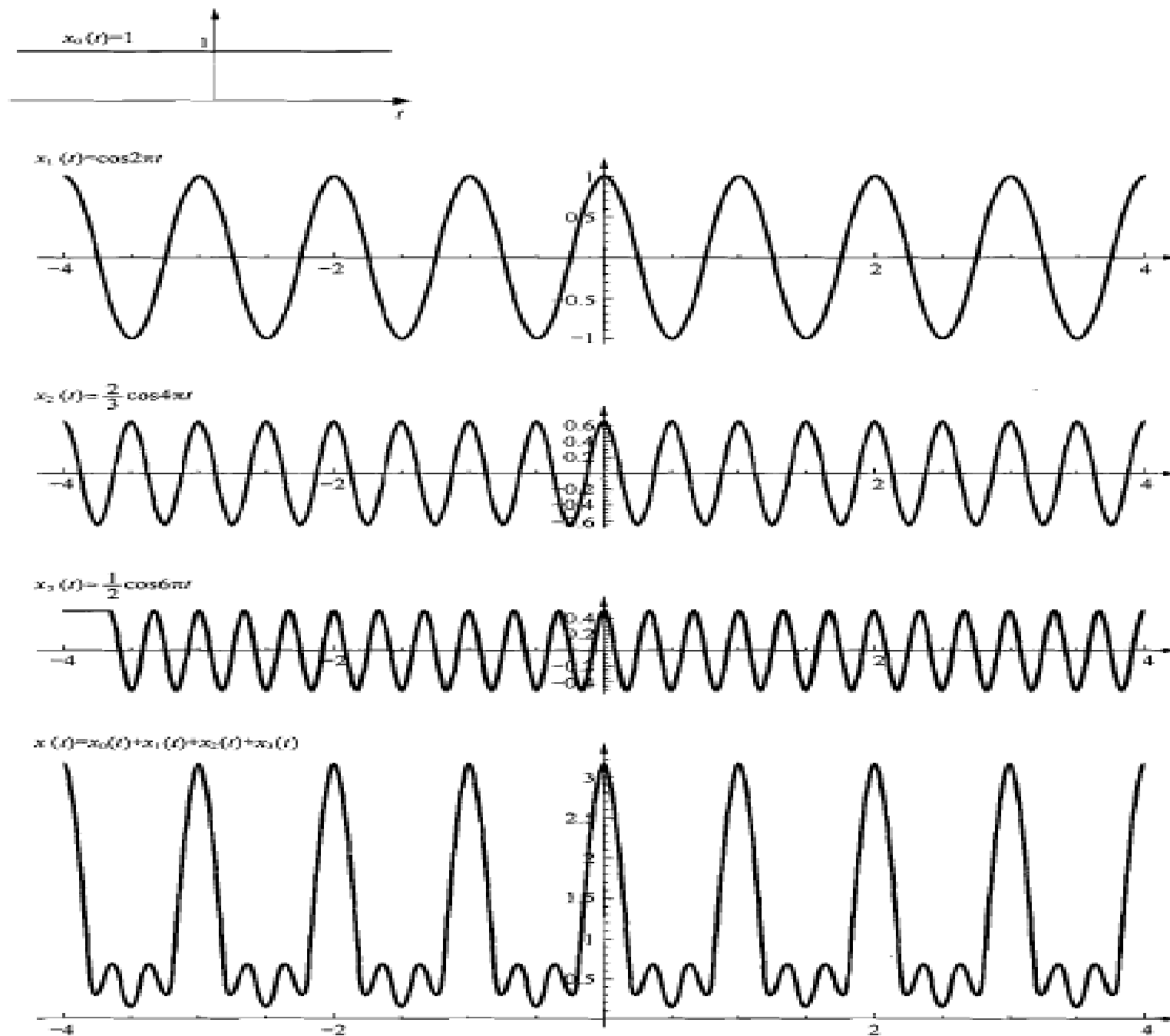


图 2.20 例 2.1 中 $x(t)$ 作为谐波关系的正弦信号的线性组合来构成的图解说明

频谱的应用

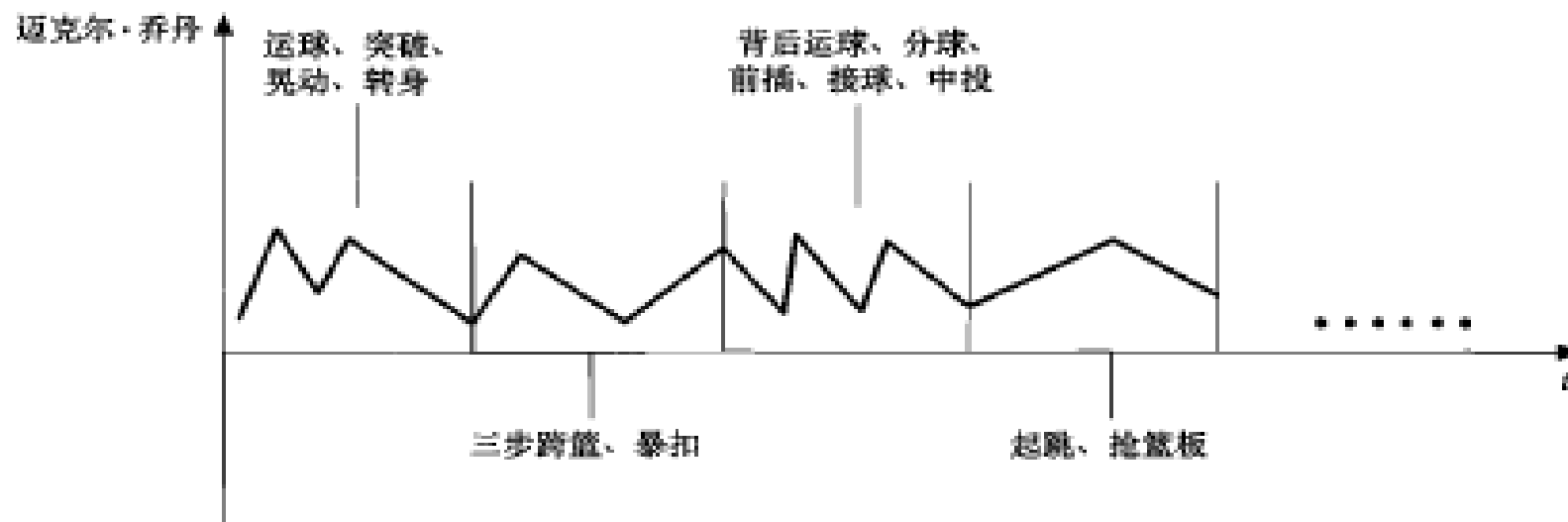


图 2.21 从时域的观点来欣赏迈克尔·乔丹

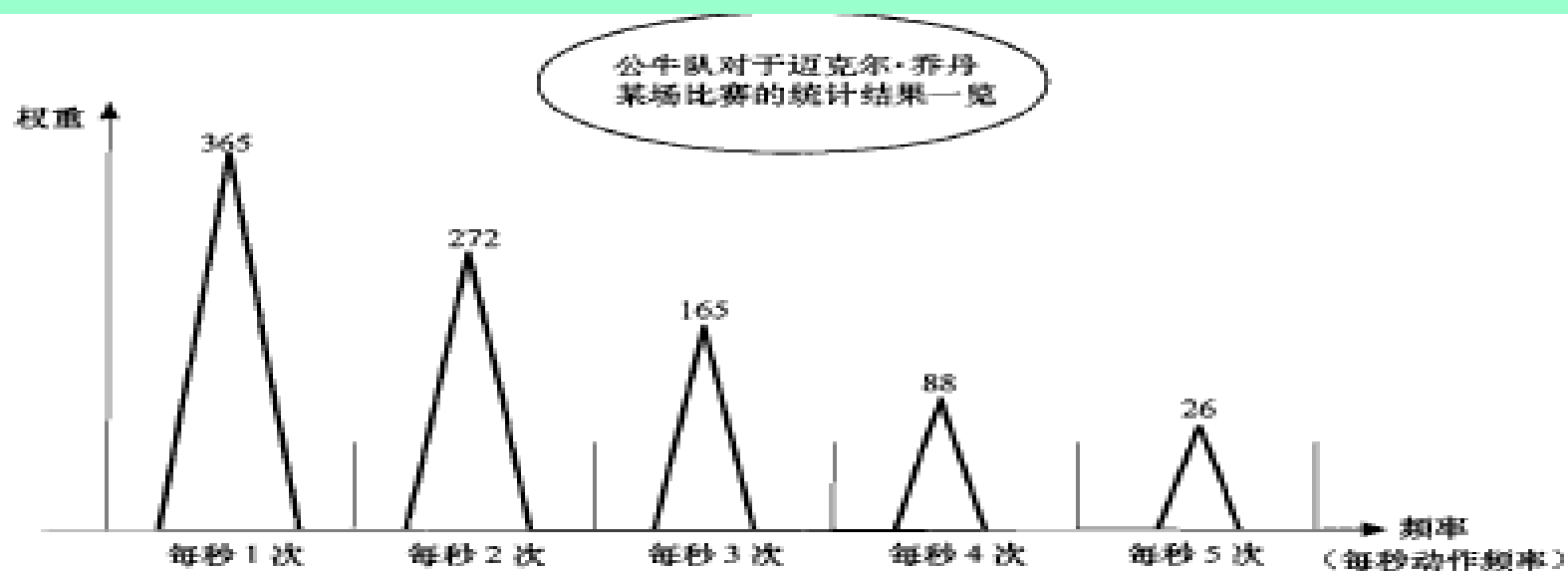


图 2.22 从频域的观点来欣赏迈克尔·乔丹

三、周期函数的指数形式付氏级数

- 由前知
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

- 由欧拉公式
$$\cos n\omega_1 t = (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}) / 2$$
$$\sin n\omega_1 t = (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}) / (2j)$$

- 代入，整理

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t}$$

设： $F(0) = a_0$ $F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

引入了负频率

$$F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

指数形式付
氏级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$\text{令 } F_n = F(n\omega_1)$$

则指数形式
付氏级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$\text{其中： } F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

傅立叶级数
的复系数 F_n

指数形式的傅里叶级数的复系数 F_n

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

三种傅氏级数的系数间的关系

$$F_0 = c_0 = a_0$$

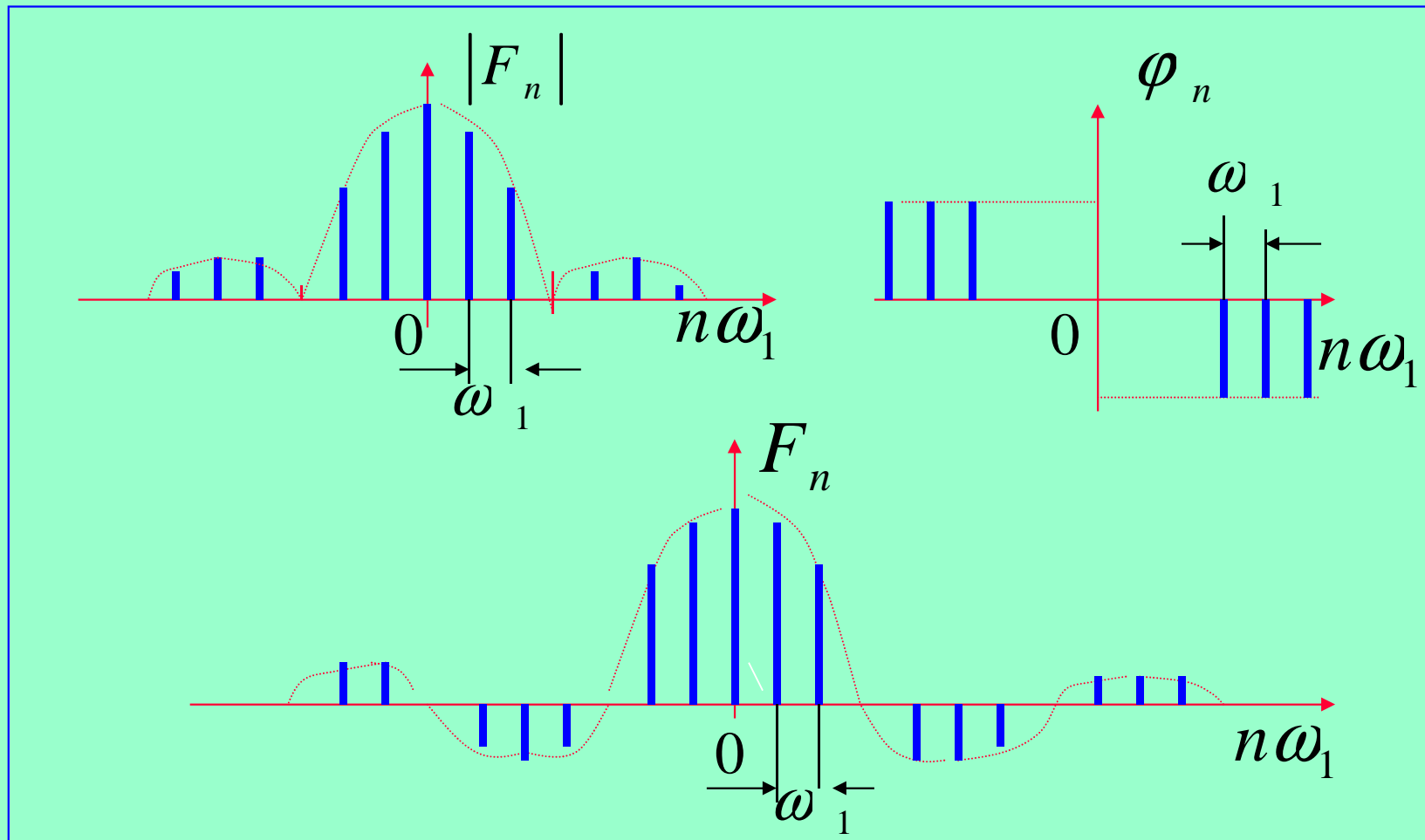
$$F_n = |F_n| e^{j\phi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{tg } \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

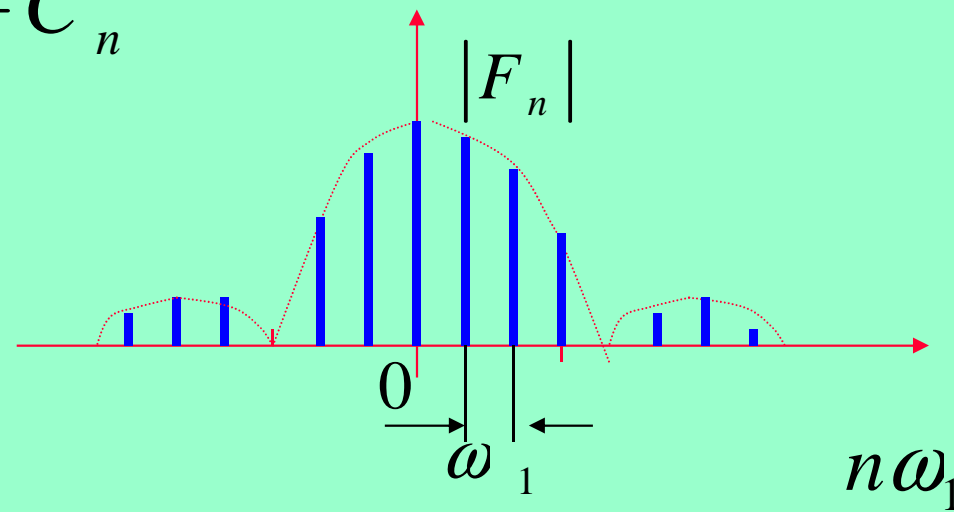
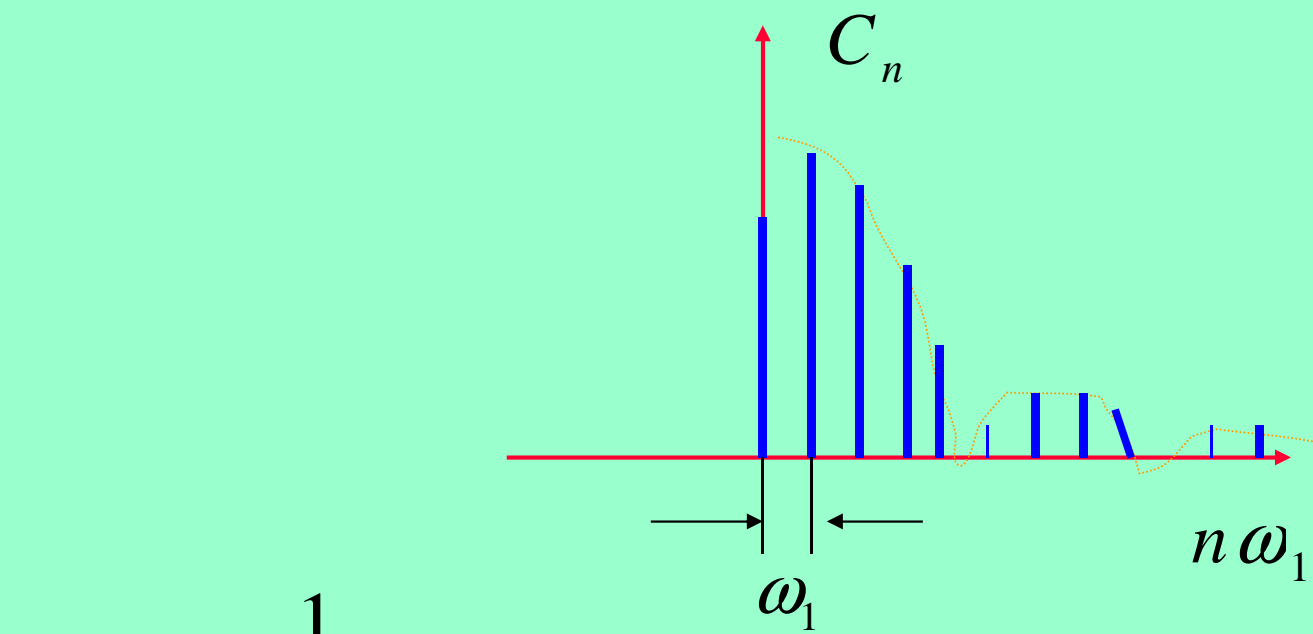
$$|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$|F_n| + |F_{-n}| = c_n \quad F_n + F_{-n} = a_n$$

$$j(F_n - F_{-n}) = b_n$$

周期复指数信号的频谱图





周期信号频谱的特点

- 周期信号的谱是离散的，谱线间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$
- 引入了负频率变量，没有物理意义，只是数学推导；
- C_n 是实函数， F_n 一般是复函数 $|F_n| = \frac{1}{2} C_n$
- 当 F_n 是实函数时，可用 F_n 的正负表示 0 和 π 相位，幅度谱和相位谱合一；

四、周期信号的功率特性

- P为周期信号的平均功率

$$P = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) \cdot dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

- 符合帕斯瓦尔定理 $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$

表明：周期信号的平均功率等于直流、基波和各次谐波分量有效值的平方和。

- 帕斯瓦尔定理 (Parseval)

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(t) \quad \because \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = 0 \quad (i \neq j)$$
$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt = K_i$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i^2 K_i$$

♣ 上式为帕斯瓦尔定理，该定理说明：
用一个完备的正交函数集来准确表示一个信号时，这个信号所含有的功率等于此信号在正交函数集中各分量的功率总和。

五、对称信号的傅里叶级数

三种对称：

- 偶函数： $f(t) = f(-t)$
 - 奇函数： $f(t) = -f(-t)$
 - 奇谐函数： $f(t) = -f(t \pm \frac{nT_1}{2})$
 - 任意周期函数有：
- 整周期对称 半周期对称

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{a_n \cos n\omega_1 t}_{\text{偶函数项}} + \underbrace{b_n \sin n\omega_1 t}_{\text{奇函数项}})$$

偶函数项

奇函数项

1.f(t) 是周期偶函数

只含直流和余弦分量

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_1 t$$

- 其中a是实数

$$a_n = \frac{4}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t) \cos n \omega_1 t \cdot dt$$

- $b_n=0$

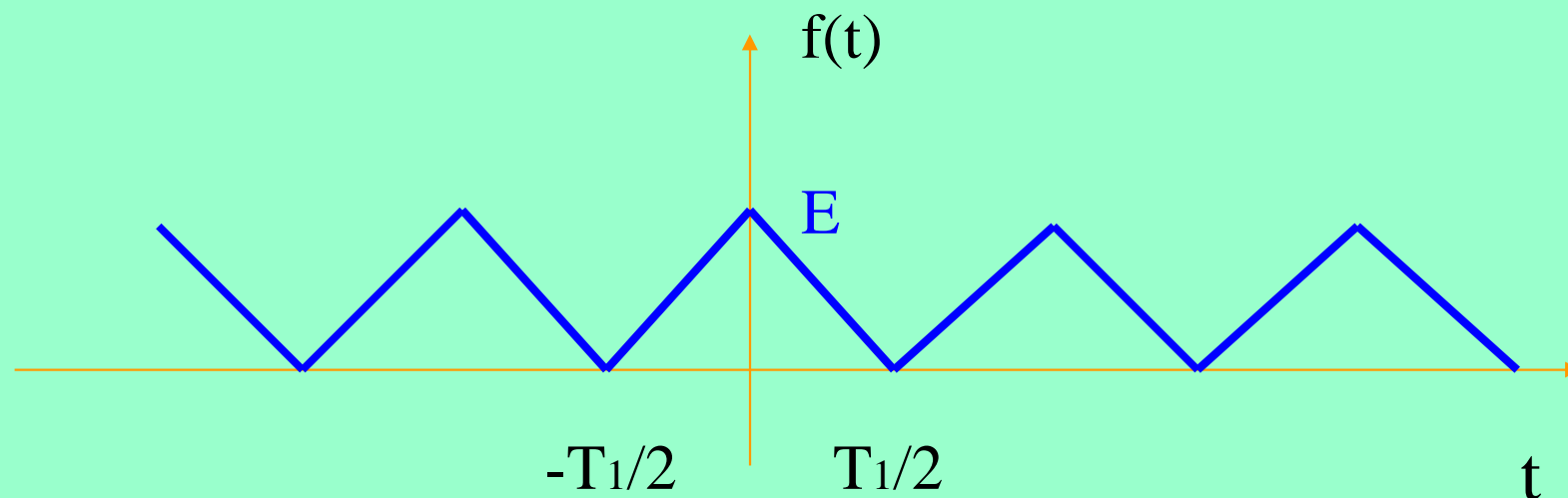
$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t) \sin n \omega_1 t dt = 0$$

- F_n 是实数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \omega_1) e^{jn \omega_1 t}$$

$$F_n = F_{-n} = \frac{a_n}{2}$$

例如:周期三角函数是偶函数



$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_1 t + \dots \right)$$

2.f(t)是周期奇函数 只含正弦分量

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega_1 t$$

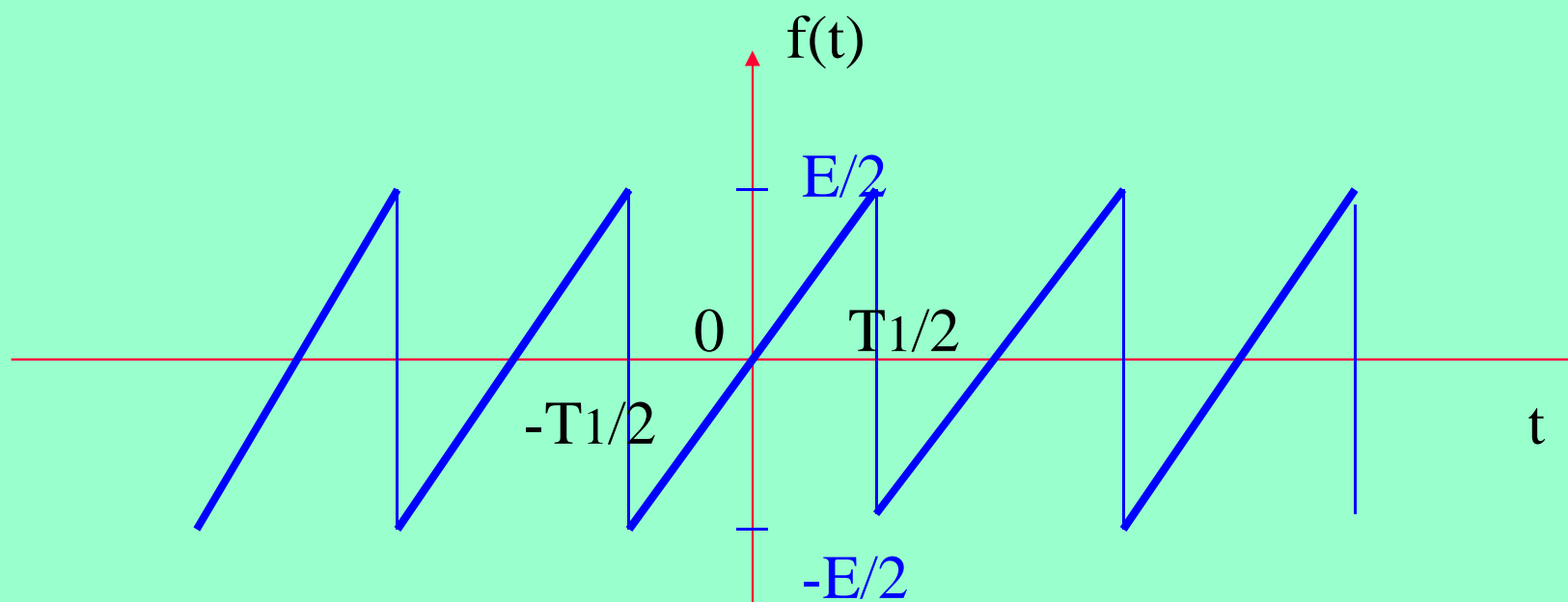
$$b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \cdot \sin n \omega_1 t \cdot dt$$

$$a_0 = 0 \quad a_n = 0$$

F_n 为虚数

$$F_n = -F_{-n} = -\frac{b_n}{2} j$$

例如周期锯齿波是奇函数



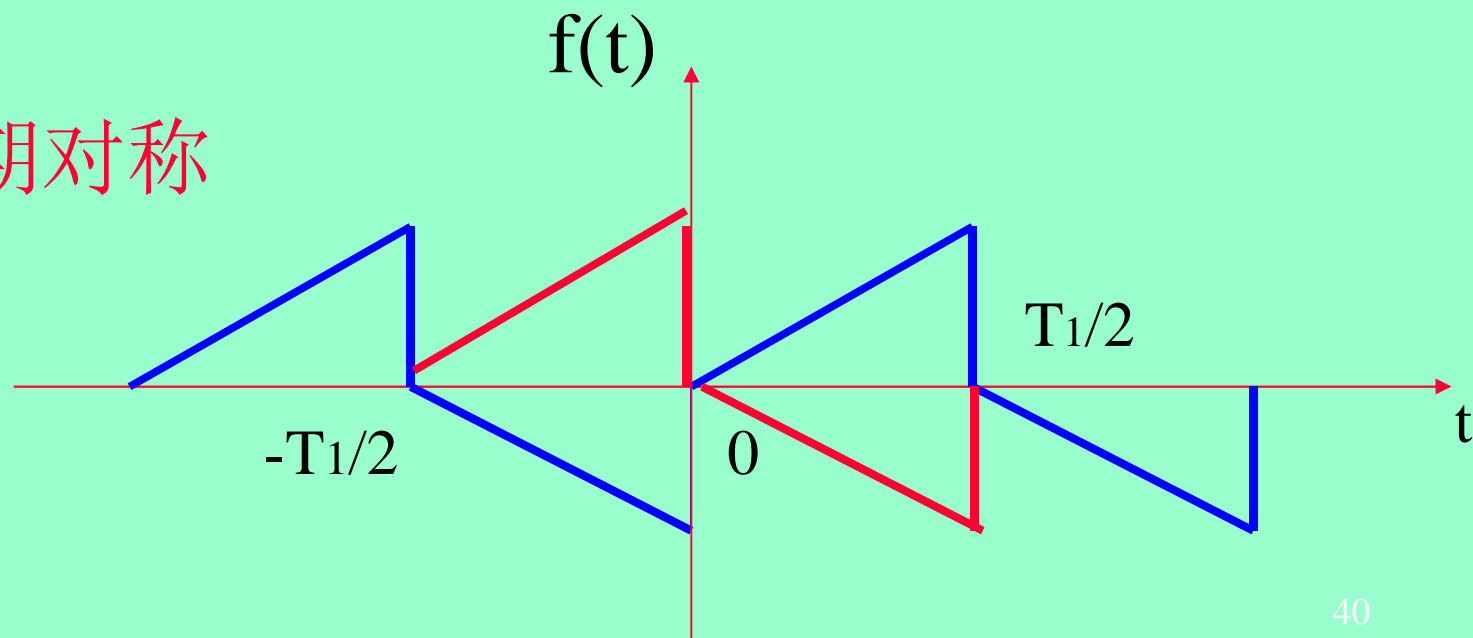
$$f(t) = \frac{E}{\pi} (\sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \dots)$$

3.f(t)是奇谐函数：

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right)$$

- 沿t轴移半个周期；沿横轴反转；波形不变；

- 半周期对称



奇谐函数的傅氏级数

偶次谐波的系数为**0**,

只有奇次谐波的正、余弦分量

$$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = b_2 = b_4 = b_6 = \cdots = 0,$$

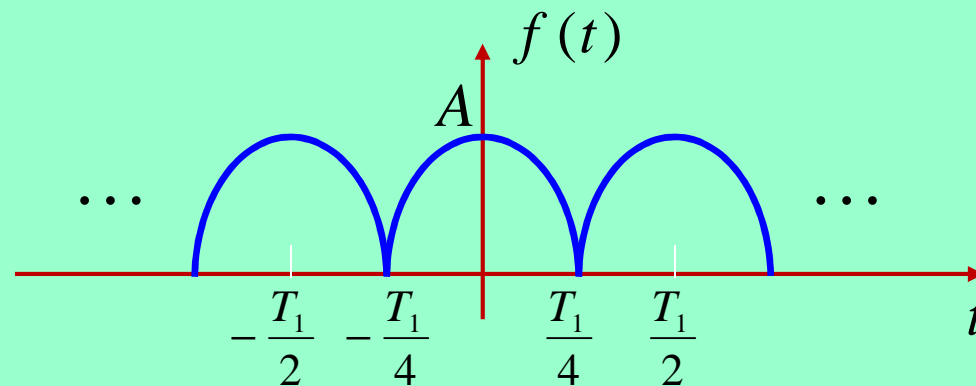
$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n \omega_1 t \cdot dt \\ b_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n \omega_1 t \cdot dt \end{aligned} \right\} \text{n为奇数}$$

$$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, n = 1, 3, 5 \cdots$$

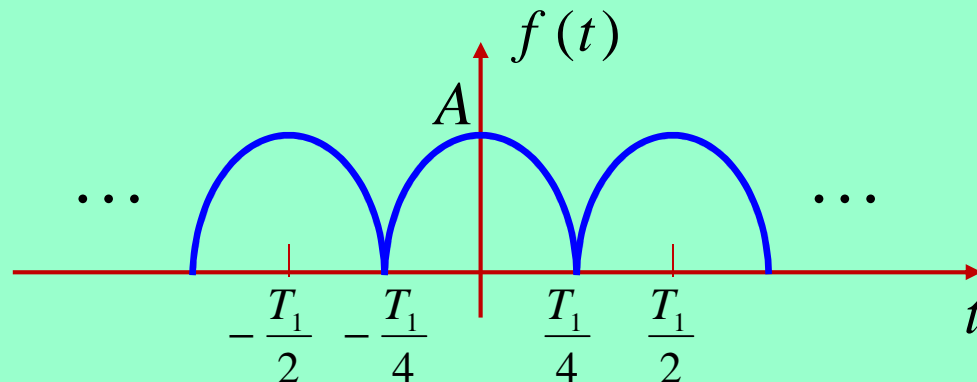
4. 偶谐函数 (even harmonic function) 的傅立叶级数

$$f(t \pm \frac{T_1}{2}) = f(t)$$

将余弦函数的负半周沿横轴反折，即得到下列偶谐函数



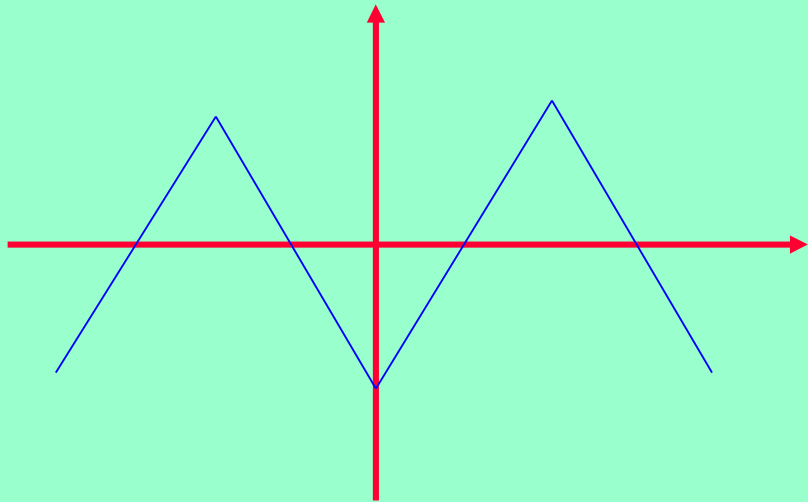
4. 偶谐函数 (even harmonic function) 的傅立叶级数



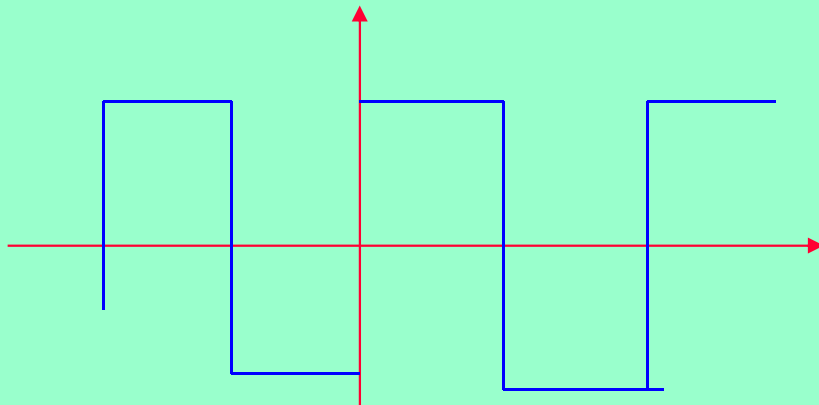
$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos(2\omega_1 t) - \frac{1}{15} \cos(4\omega_1 t) + \frac{1}{35} \cos(6\omega_1 t) \right] \\ - \dots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n^2 - 1} \cos(n\omega_1 t) + \dots], n = 2, 4, 6, \dots$$

在偶谐函数的傅里叶级数中，只含有（直流）与偶次谐波的正弦、余弦分量，而不会包含奇次谐波分量。

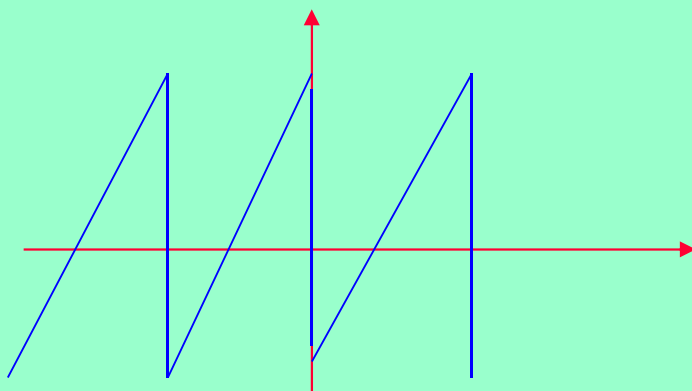
例：利用傅立叶级数的对称性判断所 含有的频率分量



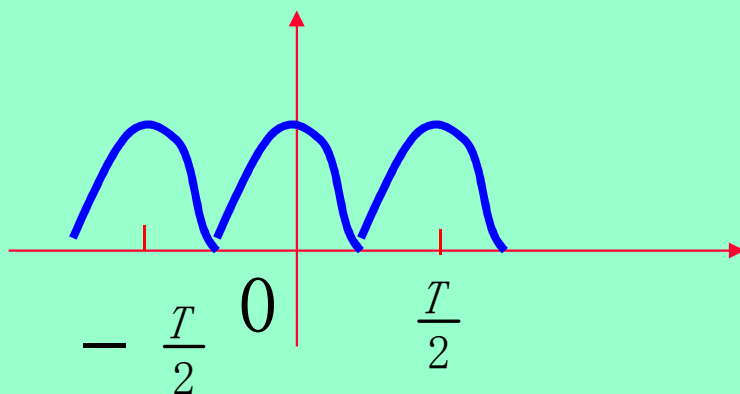
周期偶函数，奇谐函数，只含奇次谐波的余弦分量



周期奇函数，奇谐函数，只含奇次谐波的正弦分量



只含有正弦分量

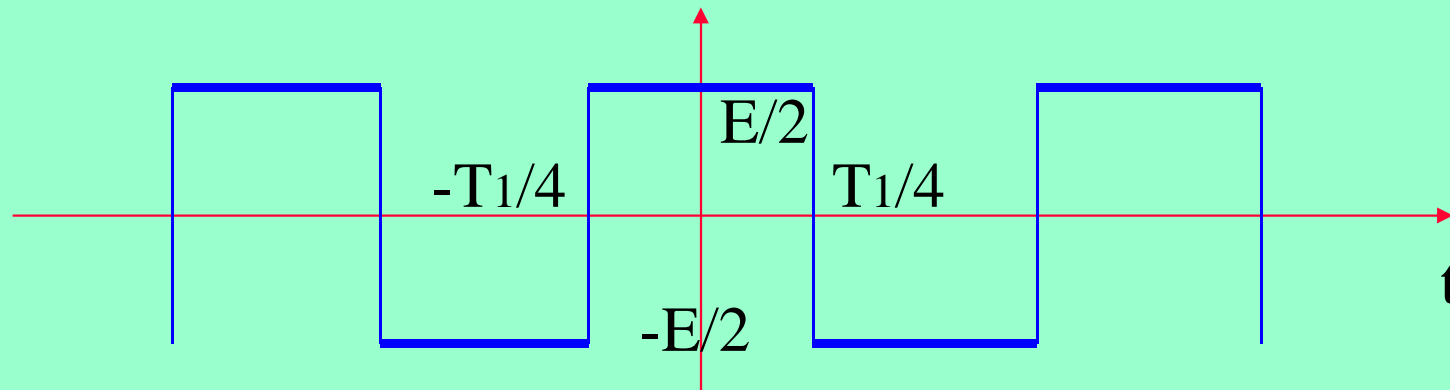


含有直流分量和余弦分量

六、Gibbs Phenomenon

EX: 对称方波, 是偶函数且奇谐函数

FS中只有奇次谐波的余弦项。



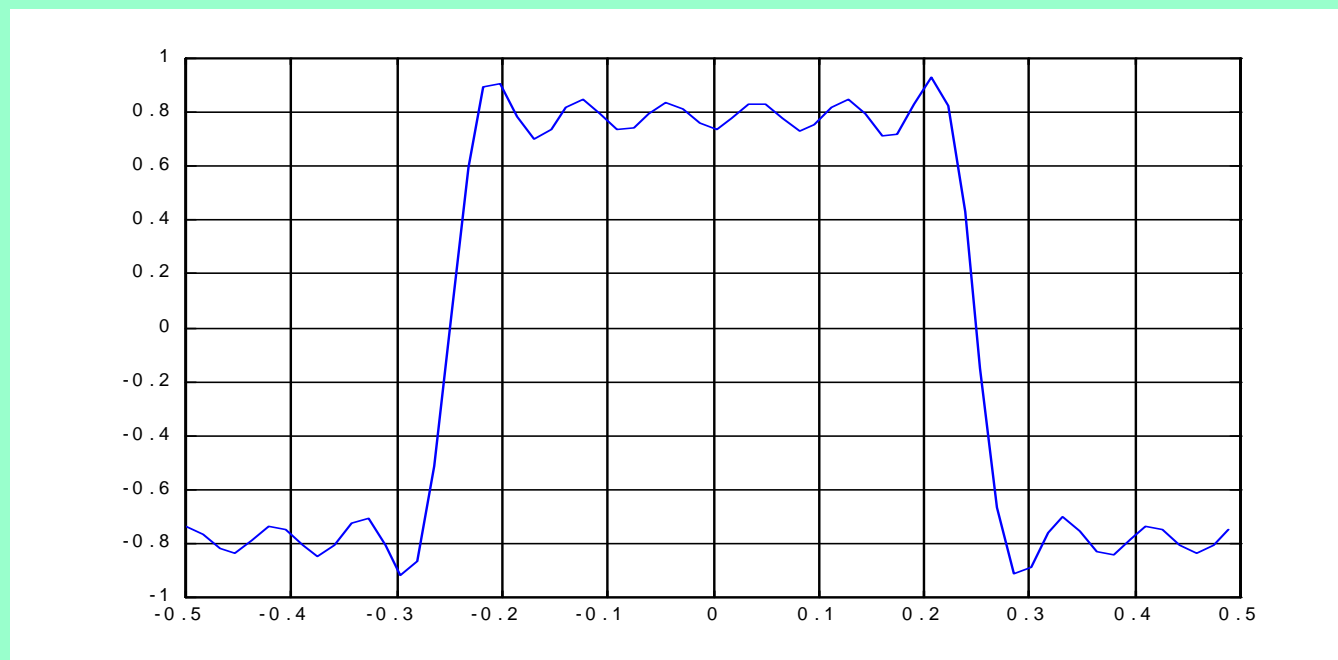
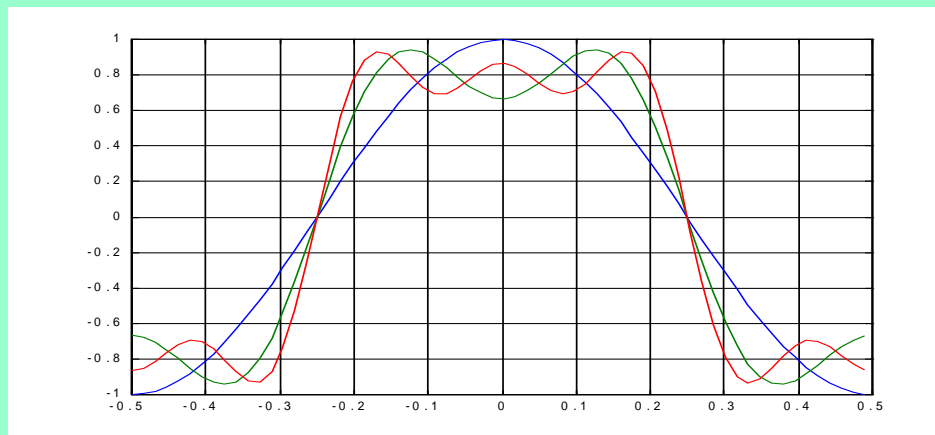
$$a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} (\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots)$$

对称方波有限项的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} (\cos\omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \cdots)$$

- 谐波次数N
- N=1
- N=3
- N=5
- N=11
- Gibbs.m



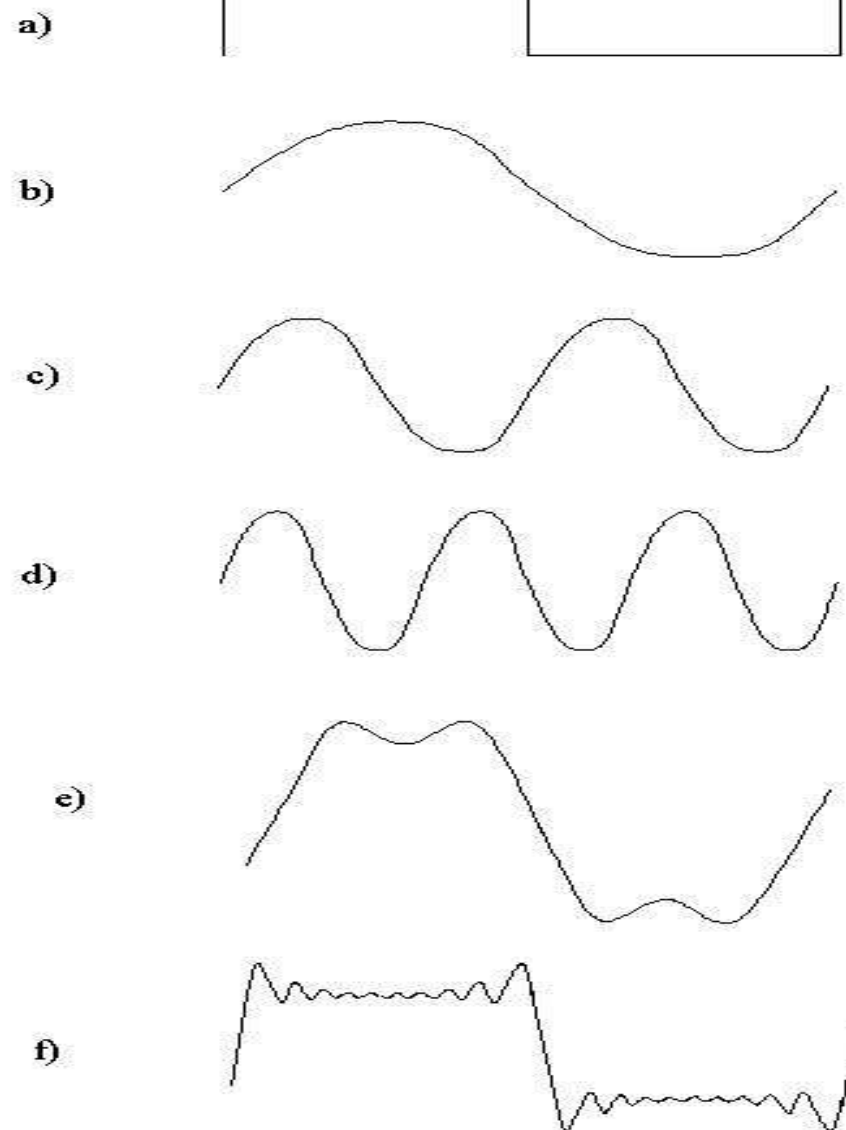
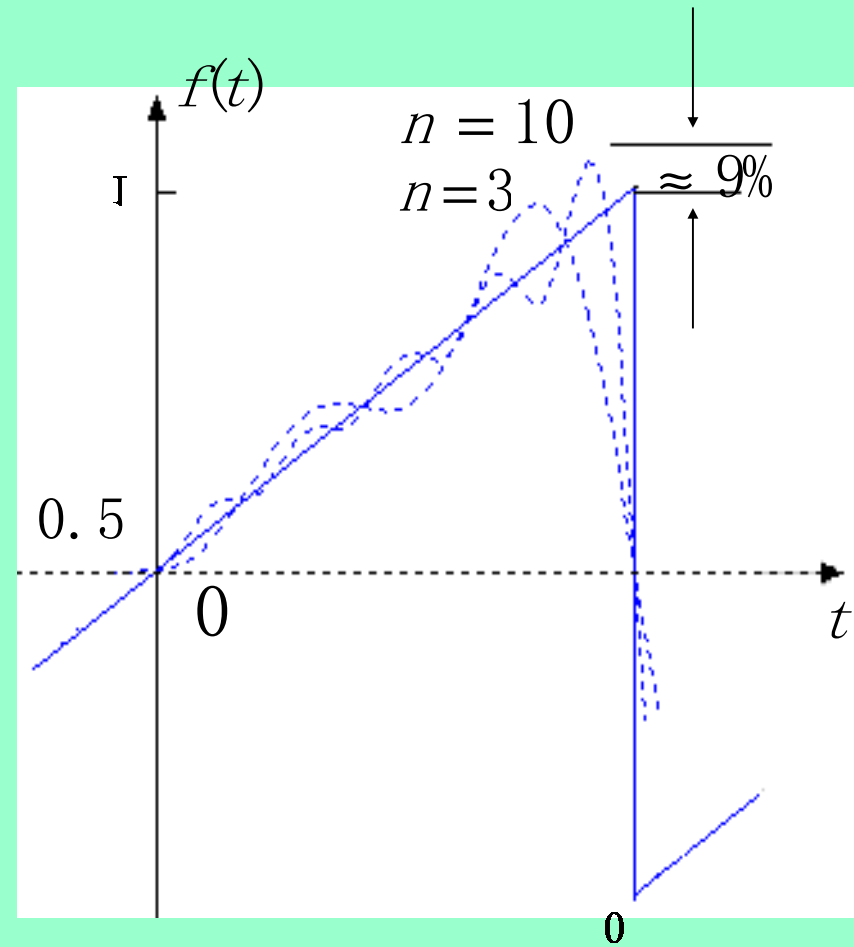
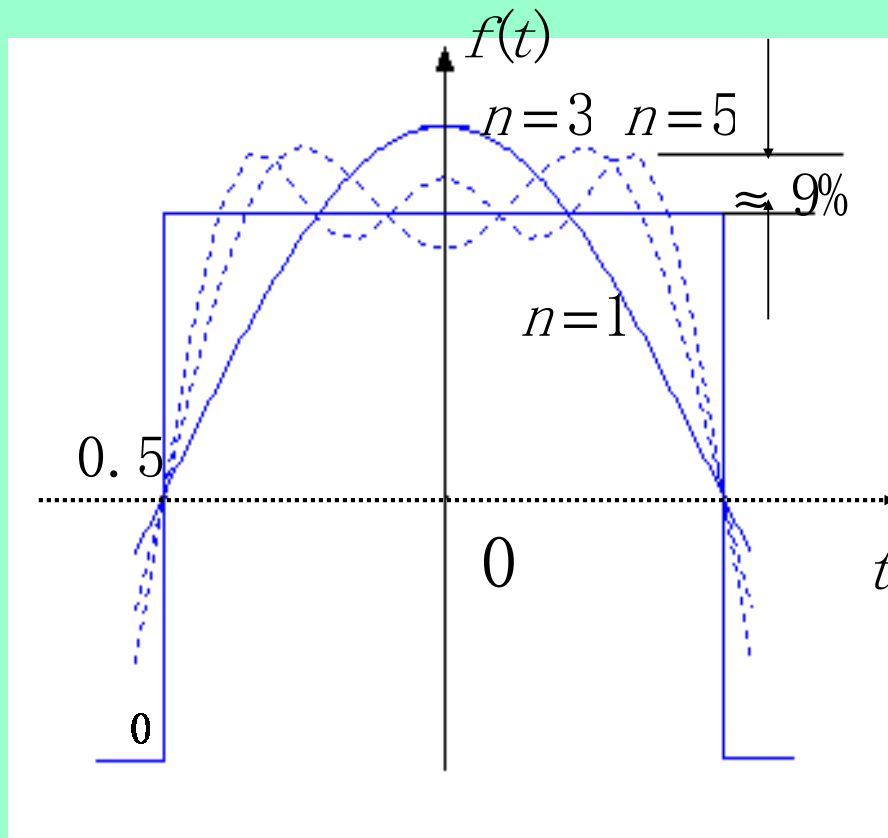


Figure 5.2-1 Decomposing a Square Wave with a Fourier Transform. a) the square wave, b) the fundamental, c) the first harmonic, d) the second harmonic, e) approximation to the sum of the fundamental and the first three harmonic harmonics, f) approximation to sum of the first 20 harmonics

Gibbs Phenomenon



由以上可见：

- N越大，越接近方波，误差越小
- 高频分量，快变信号，主要影响跳变沿；
- 低频分量，慢变信号，主要影响顶部；
- 任一分量的幅度或相位发生相对变化时，波形将会失真
- 有吉伯斯(Gibbs)现象发生

**HW1: 3-1, 3-2, 3-7(a,b,c,d)
3-13, 利用3-1的结论**