第三次作业

一. 填空题：

1. 已知$P(A)=0.7, P(A-B)=0.3, P(B)=0.6$，则$P(\overline{A}\,\overline{B})=$ <u>0.1.</u>

2. 设A、B是任意两个事件，则$P\left\{\left(\overline{A}+B\right)\left(A+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\left(A+\overline{B}\right)\right\}=$ **<u>0</u>**。

3. 设事件A、B满足$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则$P\left(A\cup B\right)=$ <u>1</u>，$P\left(AB\right)=$ <u>0</u>。

二. 选择题：

1． 从数列 1,2,…,n 中随机地取三个数（1<k<n），则一个数小于 k, 一个数等于 k，而一个数大于 k 的概率(D)

A. $\dfrac{k-1}{n}$　B. $\dfrac{(k-1)(n-k)}{n^2}$　C. $\dfrac{(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$　D. $\dfrac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$

2． 箱子中装有 5 个白球和 6 个黑球,一次取出 3 只球,发现都是同一种颜色的,在此前提下得到的全是黑色概率为(A)

A. $\dfrac{2}{3}$　B. $\dfrac{3}{11}$　C. $\dfrac{6}{11}$　D. $\dfrac{4}{33}$

3．设事件A与B互不相容，则（　D　）。

A. $P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=0$　　B. $P\left(AB\right)=P(A)P(B)$

C. $P\left(A\right)=1-P(B)$　　D. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1$

三. 计算题

1. 设$P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，试就下列三种情况下分别求出$P(\overline{A}B)$的值：

(1) A与B互不相容；

(2) $A\subset B$；

(3) $P(AB)=\dfrac{1}{8}$。

解：

(1) $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$；

(2) $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$；

(3) $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$。

2. 已知 10 只晶体管中有两只是次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样，求下列事件的概率：

（1） 两只都是正品；
（2） 两只都是次品；
（3） 一只是正品，一只是次品；
（4） 第二次取出的是次品

解: 设 A_i = “第 i 次取出的是正品”，则

（1）$P(A_1A_2)=P(A_2\mid A_1)P(A_1)=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{28}{45}$；

（2）$P(\overline{A_1}\ \overline{A_2})=P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$；

（3）$P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{16}{45}$；

（4）$P(\overline{A_2})=P\left(\left(A_1\cup\overline{A_1}\right)\overline{A_2}\right)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\ \overline{A_2})=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{5}$。

3. 某旅行社 100 人中有 43 人会讲英语，35 人会讲日语，32 人会讲日语和英语，9 人会讲法语、英语和日语，且每人至少会讲英语、日语、法语 3 种语言中的一种。试求：
（1） 此人会讲英语和日语，但不会讲法语的概率；
（2） 此人只会讲法语的概率。

解：设 A、B、C 分别为会讲英语、日语、法语。

（1）$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=\dfrac{32}{100}-\dfrac{9}{100}=0.23$；

（2）

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(A\cup B\cup C-A\cup B)=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\left(\frac{43}{100}+\frac{35}{100}-\frac{32}{100}\right)=0.54$$

4. 在空战中，甲机先向乙机开火，击落乙机的概率是 0.2；若乙机未被击落，就进行还击，击落甲机的概率是 0.3；若甲机未被击落，则再攻击乙机，击落乙机的概率是 0.4。试求在这几个回合中
（1） 甲机被击落的概率；
（2） 乙机被击落的概率。

解：设在这三次攻击中，“击落敌机”事件分别为 A、B、C，则依题意有

$$P(A)=0.2,P(B\,|\,\overline{A})=0.3,P(C\,|\,\overline{A}\,\overline{B})=0.4。$$

（1）$P(\text{甲机被击落})=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})=0.24$；

（2）

$$\begin{aligned} P(\text{乙机被击落}) &= P(A\cup\overline{A}\,\overline{B}\,C) = P(A)+P(\overline{A}\,\overline{B}\,C) \\ &= P(A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\,|\overline{A})P(C\,|\overline{A}\,\overline{B}) = 0.424 \end{aligned}$$ 。

5. 设 A 、B 是两个随机事件，已知 $P(B)=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{1}{4}$，$P(\overline{A}|B)=\frac{1}{5}$，试求 $P(A)$ 。

解：

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(A\cup B\right)-P\left(B\right)+P\left(AB\right) = 1-P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)-P\left(B\right)+P(B)P\left(A|B\right) \\ &= 1-P(\overline{B})P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)-P\left(B\right)+P(B)\left[1-P\left(\overline{A}|B\right)\right] \\ &= 1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{23}{30}=0.7667 \end{aligned}$$ 。

6. 从数字 1，2，3，…，9 中（可重复地）任取 n 次，求 n 次所取的数字的乘积能被 10 整除的概率。

解：定义事件 A＝“取到数字 5 ”，定义事件 B＝“取到偶数”。

$$P(AB)=1\text{-}P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-\left[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})\right]=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}$$ 。

7. 某班 n 个战士各有一支归个人保管使用的枪，外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，每人随机地取了一支枪，求至少有一人拿到自己枪的概率。

解　这是一个配对问题。设 $A_i=\{$第 i 个战士拿到自己的枪$\}$，$i=1,2,...,n$ 。则所求的概率为 $P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)$ 。

$P(A_1)=P(A_2)=...=P(A_n)=\frac{1}{n}$；

$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=...=P(A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)}$；　（共 C_n^2 个）

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=...=P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$；（共 C_n^3 个）

……

$P(A_1A_2...A_n)=\frac{1}{n!}$.

所以由概率的加法公式得

$$P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)=\frac{n}{n}-C_n^2\frac{1}{n(n-1)}+C_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

第四次作业

一． 填空题：

1．设事件 A, B 相互独立，且 $P(\overline{A})=0.2, P(B)=0.5$，则 $P(B|A\cup\overline{B})=$ ___4/9___。

2．设 A、B、C 两两独立，且 ABC=Φ， $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$， $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，

则 P(C)= 0.25 。

3. 已知事件 A, B 的概率 $P(A)=0.4, P(B)=0.6$ 且 $P(A\cup B)=0.8$，则 $P(A|B)=$

__$\frac{1}{3}$__，$P(B|A)=\frac{1}{2}$。

二． 选择题：

1. 设袋中有 a 只黑球，b 只白球，每次从中取出一球，取后不放回，从中取两次，则第二次取出黑球的概率为（ A ）；若已知第一次取到的球为黑球，那么第二次取到的球仍为黑球的概率为（ B ）

A．$\frac{a}{(a+b)}$　　B．$\frac{a-1}{a+b-1}$　　C．$\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$　　D．$\frac{a^2}{(a+b)^2}$

2．已知 $P(A)=0.7, P(B)=0.6, P(B|A)=0.6,$ 则下列结论正确的为（ B ）。

A．A与B互不相容；　　B．A与B独立；

C．$A\supset B$；　　D．$P(B|\overline{A})=0.4.$

3．对于任意两事件 A 和 B，则下列结论正确的是（ C ）。

A． 若$AB=\varnothing$，则A，B一定不独立；　　B． 若$AB\neq\varnothing$，则A，B一定独立；

C． 若$AB\neq\varnothing$，则A，B有可能独立；　　D． 若$AB=\varnothing$，则A，B一定独立

三． 计算题：

1．设有 2 台机床加工同样的零件，第一台机床出废品的概率为 0.03，第二台机床出废品的概率为 0.06，加工出来的零件混放在一起，并且已知第一台机床加工的零件比第二台机床多一倍。

（1） 求任取一个零件是废品的概率；

（2） 若任取的一个零件经检查后发现是废品，则它是第二台机床加工的概率。

解：(1)设 B ={取出的零件是废品}， A_1={零件是第一台机床生产的}，

A_2={零件是第二台机床生产的}，则 $P(A_1)=\frac{2}{3},P(A_2)=\frac{1}{3}$，

由全概率公式得：

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)=0.03\times\frac{2}{3}+0.06\times\frac{1}{3}=0.04$$

(2) $P(A_2|B)=\dfrac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.02}{0.04}=0.5$

2．三个元件串联的电路中，每个元件发生断电的概率依次为 0.1，0.2，0.5，且各元件是否断电相互独立，求电路断电的概率是多少?

解：设 A_1,A_2,A_3 分别表示第 1，2，3 个元件断电， A 表示电路断电，

则 A_1,A_2,A_3 相互独立， $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})\\&=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\\&=1-(1-0.1)(1-0.2)(1-0.5)\\&=0.64\end{aligned}$$

3．有甲、乙、丙三个盒子，其中分别有一个白球和两个黑球、一个黑球和两个白球、三个白球和三个黑球。掷一枚骰子，若出现 1，2，3 点则选甲盒，若出现 4 点则选乙盒，否则选丙盒。然后从所选的中盒子中任取一球。求：

（1）取出的球是白球的概率；

（2）当取出的球为白球时，此球来自甲盒的概率。

解： 设 A={选中的为甲盒}， B={选中的为乙盒}， C={选中的为丙盒}，D={取出一球为白球}，则

$$P(A)=\frac{3}{6},\quad P(B)=\frac{1}{6},\quad P(C)=\frac{2}{6}$$

$$P(D|A)=\frac{1}{3},\quad P(D|B)=\frac{2}{3},\quad P(D|C)=\frac{3}{6}$$

（1） $P(D)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{4}{9}$

（2）$P(A|D)=\dfrac{\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{3}}{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{3}{8}$

4．某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随机的拨号，求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率是多少？如果已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解：记H表示拨号不超过三次而能接通。

A_i表第i次拨号能接通。

$$H=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$
$$P(H)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$$

记B表示最后一个数字是奇数，有

$$\boldsymbol{P(H|B)=P\left(A_1|B\right)+P\left(\overline{A}_1A_2|B\right)+P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3|B\right)}$$
$$=P(A_1|B)+P(\overline{A}_1|B)P(A_2|B\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1|B)P(\overline{A}_2|B\overline{A}_1)P(A_3|B\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

5．设三个工厂生产的一种产品，次品率分别为 0.1、0.15 和 0.2，这三个工厂的这种产品在市场的占有率分别为 0.5、0.4 和 0.1，现在从市场中任意抽取一件这种产品，经检验后发现它是次品，求这件产品分别是这三家工厂生产的概率，并判断它最有可能是由哪家工厂生产的？

解： 设 A、B、C 分别表示三个厂的产品，D 表示是次品. 则

$$P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(C)=0.1;P(D|A)=0.1,P(D|B)=0.15,P(D|C)=0.2$$

由全概率公式有

$$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)$$
$$=0.1\times0.5+0.15\times0.4+0.2\times0.1=0.13$$

由贝叶斯公式分别有

$$P(A|D)=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\frac{0.1\times0.5}{0.13}=\frac{5}{13}$$

$$P(B|D)=\frac{P(D|B)P(B)}{P(D)}=\frac{0.15\times 0.4}{0.13}=\frac{6}{13}$$

$$P(C|D)=\frac{P(D|C)P(C)}{P(D)}=\frac{2}{13}$$

相比较而言，这件次品是工厂 B 生产的可能性最大。

6. 三个人同时射击树上的一只鸟，设他们各自射中的概率分别为 0.5，0.6，0.7。若无人射中的鸟不会坠地；只有一人射中的鸟坠地的概率为 0.2；两人射中的鸟坠地的概率为 0.6；三人射中的鸟一定坠地。三人同时向鸟射击一次,求鸟坠地的概率？

解：设 $A_i=\{第i个人射中\}$，（i=1, 2, 3），由题意知

$$P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.6, P(A_3)=0.7$$

假 设 $B_0=\{三人都射不中\}$ ， $B_1=\{只有一人射中\}$ ， $B_2=\{恰有两人射中\}$ ，

$B_3=\{三人同时射中\}$，$C=\{鸟坠地\}$。

$P(C|B_0)=0, P(C|B_1)=0.2, P(C|B_2)=0.6, P(C|B_3)=1,$

$P(B_0)=0.06,\quad P(B_1)=0.29,\quad P(B_2)=0.44,\quad P(B_3)=0.21$ 。

由全概公式

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(C|B_i)=0.532$$