华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第七册）

学　院 ____________ 专　业 ____________ 班　级 ____________
学　号 ____________ 姓　名 ____________ 任课教师 ____________

第十三次作业

一. 选择题：

1.设 $\xi \sim N(0,1)$，$\eta \sim N(0,4)$，$\varsigma = \xi + \eta$，下列说法正确的是（ B ）。

A. $\varsigma \sim N(0,5)$　　B. $E\varsigma = 0$　　C. $D\varsigma = 5$　　D. $\sqrt{D\varsigma} = 3$

λ, λ

2.设 X_1, X_2, X_3 相互独立同服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布，令 $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$，则 $E(Y^2) =$（ C ）　$D(Y) + E^2Y = 12$　$EY = 3$　$DY = 3$

A. 1.　　B. 9.　　C. 10.　　D. 6.

3.设 $X \sim P(\lambda)$，且 $E[(X-1)(X-2)] = 1$，则 $\lambda =$ （A）

A. 1，　　B. 2，　　C. 3，　　D. 0

$D(2X-3) = 4D(X) = 4\lambda = D(X-1) + D(X-2) + 2 = 2\lambda + 2$

二.填空题：

1． 已知二维随机变量 (ξ, η) 的联合概率分布为

$\xi \backslash \eta$		0	1
		0.5	0.5
0	0.25	0.1	0.15
1	0.45	0.25	0.2
2	0.3	0.15	0.15

则

$E\xi =$ 1.05，$E\eta =$ 0.5，$E\left(\sin\frac{\pi}{2}(\xi + \eta)\right) =$ 0.25 1.55，$E(\max(\xi, \eta)) =$ 1.2，

…

x	0	1	2
max	0.1	0.6	0.3

$D(\max(\xi,\eta)) = $ <u>0.36</u> 。 $1.8-1.44$

2. 设随机变量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互独立， $\xi_1 \sim U(0,6)$ ， $\xi_2 \sim N(0,4)$ ， $\xi_3 \sim E(3)$ ，则：

$3,3$ $0,4$ $3,5$

$E(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)=$ <u>~~12~~ 4</u>， $D(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)=$ <u>~~4~~ 20</u>。

3. 已知 $X \sim N(-2,0.4^2)$ ，则 $E(X+3)^2=$ <u>1.16</u>。

$Y=X+3 \sim N(1,0.4^2)$ $EY^2 = DY + E^2Y = 0.16+1$

三.计算题：

1. 设二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & 0<x<2,0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E\xi, E\eta, E(\xi\eta)$ 。

$$p_x(x) = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\,dy = \frac{1}{8}xy\Big|_0^2 + \frac{1}{16}y^2\Big|_0^2 = \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

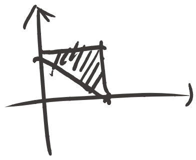
$$p_y(y) = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\,dx = \frac{1}{4}y+\frac{1}{4}$$

$$\therefore E\xi = \int_0^2 x p_x(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\,dx = \frac{1}{12}x^3+\frac{1}{8}x^2\Big|_0^2 = \frac{7}{6}$$

$$E\eta = E\xi = \frac{7}{6}.$$

$$E(\xi\eta) = \int_0^2\int_0^2 \frac{xy}{8}(x+y)\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{x^3y}{24}+\frac{x^2y^2}{16}\Big|_0^2\,dy = \int_0^2 \frac{y}{3}+\frac{y^2}{4}\,dy$$

$$= \frac{y^2}{6}+\frac{y^3}{12}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$



2. 二维随机变量(ξ,η)服从以点(0, 1)，(1, 0)，(1, 1)为顶点的三角形区域上的均匀分布，试求$E(\xi+\eta)$和$D(\xi+\eta)$。

设 $f(x,y)=\begin{cases} 2, & 0<x<1,\ 1-x<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$E(\xi+\eta)=\int_0^1\int_{1-x}^1 2(x+y)\,dy\,dx$
$=\int_0^1 y^2+2xy\Big|_{1-x}^1 dx$
$=\int_0^1 -3x^2+6x\,dx=\cancel{2}\ \frac{4}{3}$

$E(\xi+\eta)^2=\int_0^1\int_{1-x}^1 2x^2+4xy+2y^2\,dy\,dx$

$2x^2y+2xy^2+\frac{2}{3}y^3\Big|_{1-x}^1$
$\cancel{2x^2}+\cancel{2x}+\frac{2}{3}-\cancel{2x^2}+\cancel{2x^3}-\cancel{2x^3}+4x^2\cancel{-2x}+\frac{2}{3}(x^3+3x^2+3x+1)$

$=\int_0^1 \frac{2}{3}x^3+6x^2+2x+\frac{4}{3}\,dx=\frac{1}{6}x^4+2x^3+x^2+\frac{3}{4}\Big|_0^1$

$=\frac{47}{12}-\frac{3}{4}=\cancel{\frac{19}{6}}.\ \frac{11}{6}$

$D(\xi+\eta)=E(\xi+\eta)^2-E^2(\xi+\eta)=\cancel{\frac{19}{6}-4}\ \cdots\ \frac{1}{18}$

3. 有 10 个人同乘一辆长途汽车，沿途有 20 个车站，每到一个车站时，如果没有人下车，则不停车。设每位乘客在各站下车是等可能的，且各乘客是否下车是相互独立的，求停车次数的数学期望。

$P(\text{下车})=\frac{1}{20}$.

$P_j(\text{停车})=\left(\frac{19}{20}\right)^{10}=0.60=E(j)$.

$E(\text{停车次数})=E(j_1+j_2+\cdots+j_{20})=E(j_1)+E(j_2)+\cdots+E(j_{20})$
$=0.6\times 20=12$.

设 $\xi_i=\begin{cases}1, & \text{有下车}\\ 0, & \text{无下车}\end{cases}$ 则 $P(\xi_i=0)=\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$

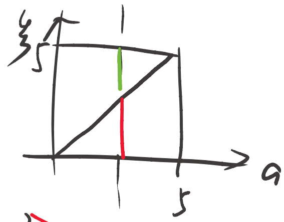
$P(\xi_i=1)=1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$

$E\xi_i=1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$

$E\xi=\sum E\xi_i=20\left(1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}\right)$.

4. 某厂生产一种化工产品，这种产品每月的市场需求量 ξ（单位：吨）服从 $[0,5]$ 上的均匀分布。这种产品生产出来后，在市场上每售出 1 吨可获利 6 万元。如果产量大于需求量，则每多生产 1 吨要亏损 4 万元。如果产量小于需求量，则不亏损，但只有生产出来的那一部分产品能获利。问：为了使每月的平均利润达到最大，这种产品的月产量 a 应该定为多少吨？这时，平均每月利润是多少元？

利润 $W=\begin{cases}10\xi-4a, & a>\xi\\ 6a, & a<\xi\end{cases}$



$EW=\frac{1}{5}\int_0^a 6a\,d\xi+\int_a^5 10\xi-4a\,d\xi=\cancel{a^2-4a+25}$

$5a^2-20a+125$

$EW=\int_0^5\frac{1}{5}W(x)dx=6a-a^2$.

最大值在 $a=3$ 时取到. $EW|_{a=3}=9$.

5. 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 $X\sim N(0,1/2)$，求 $D|X-Y|$

$Z=X-Y$. $E|Z|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $E|Z|^2=EZ^2=DZ=1$.

$D|X-Y|=1-\frac{2}{\pi}$.

第十四次作业

一. 填空题：

$\frac{1}{2}.$

$D\xi+D\eta-2\mathrm{cov}(\xi,\eta)=12$

1. 已知 $D\xi=4, D\eta=9$，则当 $D(\xi-\eta)=12$ 时，$\rho_{\xi\eta}=$ $\frac{1}{12}$；当 $\rho_{\xi\eta}=0.4$ 时，

$\overline{\ 6\ }$

$D(\xi+\eta)=$ 17.8 。

$13+\frac{24}{5}$ $\qquad \frac{\frac{12}{5}}{6}=\frac{2}{5}$

2. 设 $D(X)=25, D(Y)=36, \rho_{xy}=0.4$，则 $D(X+Y)=$ 85 。

$51+24.$ $\qquad \frac{\mathrm{cov}=12}{30}=\frac{2}{5}$

3. 设二维随机变量 $(\xi,\eta)\sim N(1,\ 4;\ 1,\ 4;\ 0.5)$，$\zeta=\xi-\eta$，则 $\mathrm{cov}(\xi,\zeta)=$ 2 .

$D\xi-\mathrm{cov}(\xi,\eta)$

$0.5=\frac{\mathrm{cov}}{4}$ $\qquad 4-2$

二. 选择题：

1. 已知随机变量 X 与 Y 独立同分布，记 $U=X+Y$，$V=X-Y$，则 U 与 V 必有（ B ）成立。

   A. 独立　　B. 不独立　　C. 相关　　D.不相关

2. 设随机变量 ξ 与 η 的方差存在且不等于 0，则 $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$ 是 ξ 与 η（ C ）

   $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0.$

   A. 独立的充要条件　　B. 独立的充分条件，但不是必要条件

   C. 不相关的充要条件　　D. 不相关的充分条件，但不是必要条件

3. 对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，则 （ B ）

   $\mathrm{cov}=0$

   A. $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$　　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

   C. X 和 Y 独立　　D. X 和 Y 不独立

三. 计算题

1. 已知随机变量ξ、η的概率分布分别为

ξ	-1	0	1
$P\{\xi=x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
$P\{\eta=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且$P\{\xi\eta=0\}=1$。

(1)求ξ、η的联合概率分布；(2)问ξ、η是否独立?

(3)求$\zeta=\max(\xi,\eta)$的概率分布。

(1)

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2) 不独立.

(3)

ζ	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

2．已知二维随机变量(ξ,η)的联合概率分布为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
		1	4	9
1　$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3　$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

(1)求$\rho_{\xi\eta}$；(2)ξ与η是否独立？说明理由。

$E\xi=\frac{3}{2}$. $E\eta=\cancel{\frac{4}{3}}\ \frac{3}{2}$ $D\xi=3-(\frac{3}{2})^2=\frac{3}{4}$. $D\eta=3-(\frac{4}{3})^2=\frac{11}{9}$

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi E\eta$.

$=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\cancel{\frac{1}{4}}\ 0$

$\xi\eta$	0	1	2	3	6	9
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

$\rho_{\xi\eta}=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{11}{12}}}=\cancel{\frac{\sqrt{132}}{44}}\ 0$

(2) 不独立. $P(\xi=1,\eta=0)=0\neq P(\eta=0)P(\xi=1)$,

3. 设二维随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x & 0<y<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求ξ与η的相关系数。

$E\xi\eta=\int_0^1\int_y^1 3x^2y\,dx\,dy=\frac{3}{10}$

$E\xi=\int_0^1\int_y^1 3x^2\,dx\,dy=\frac{3}{4}$

$E\eta=\int_0^1\int_y^1 3xy\,dx\,dy=\frac{3}{8}$

$E\xi^2=\int_0^1\int_y^1 3x^3\,dx\,dy=\frac{3}{5}$

$E\eta^2=\int_0^1\int_y^1 3xy^2\,dx=\frac{1}{5}$

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\frac{3}{160}$. $D\xi=\frac{3}{80}$ $D\eta=\frac{19}{320}$

$\rho_{\xi\eta}=\frac{3}{\sqrt{57}}$

4. 设两个随机变量ξ, η， $E\xi = -2, E\eta = 4, D\xi = 4, D\eta = 9, \rho_{\xi\eta} = -0.5$，求

$E(3\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2 - 3)$。 $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \rho_{\xi\eta} \cdot \sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta} = -3$

$E\xi\eta = \mathrm{cov}(\xi, \eta) + E\xi E\eta = -11$.

$E\xi^2 = D\xi + E^2\xi = 8$. $E\eta^2 = 25$.

$$E(3\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2 - 3) = 3E\xi^2 - 2E\xi\eta + E\eta^2 - 3$$

$$= 24 + 22 + 25 - 3$$

$$= 68$$

5. 设二维随机变量(X, Y)的相关系数为ρ_{XY}，而$\xi = aX + b, \eta = cY + d$，其中

a, b, c, d 为常量，并且已知$ac > 0$，试证$\rho_{\xi\eta} = \rho_{XY}$。

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E(ax+b)(cY+d) - E(ax+b)E(cY+d)}{\sqrt{D(ax+b)}\sqrt{D(cY+d)}}$$

$$= \frac{E(acXY + bcY + adX) + bd - (aEX+b)(cEY+d)}{a\sqrt{DX}\, c\sqrt{DY}}$$

$$= \frac{acE(XY) + bcEY + adEX + bd - acEXEY - bcEY - adEX - bd}{ac\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$= \frac{E(XY) - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \rho_{XY}.$$