华东理工大学

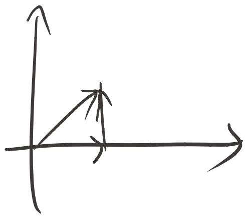
复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 3 册）

班级____________学号____________姓名____________任课教师____________

第五次作业

教学内容：3.1 复变函数积分概念　　3.2 柯西积分定理

1. 计算积分 $\int_C \operatorname{Re} z dz$，其中积分路径 C 为：



(1) 从原点到 $1+i$ 的直线段;

(2) 从原点到点 1 的直线段，以及连接由点 1 到 $1+i$ 的直线段所组成的折线。

(1) $z(t)=(1+i)t$, $\operatorname{Re} z(t) = t$,

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1+i)\,dt = \frac{1+i}{2}$$

(2) $z_1(t) = t$, $z_2(t) = 1+it$.

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 i\,dt = \frac{1}{2}+i.$$

2. 计算积分 $\int_C (x-y+ix^2)dz$，其中 C 为从原点到 $1+i$ 的直线段。

$dx=dy$, $\int_C (x-y+ix^2)dz = \int_0^1 (x-y+ix^2)(dx+idy)$

$$=\int_0^1 ix^2(1+i)\,dx = \frac{i-1}{3}$$

3．计算积分$\int_C e^z dz$，其中C为从0到1再到$1+i$的折线

$z_1(t) = t$，$z_2(t) = 1+it$，

$$\int_C e^z dz = \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 i e^{1+it} dt$$

$$= e - 1 + e^{1+it}\Big|_0^1$$

$$= e^{1+i} - 1$$

4. 计算积分$\oint_C |z|\bar{z}dz$，其中 C 由直线段$-1 \le x \le 1, y=0$及上半单位圆周组成的正向闭曲线。

$C_1 = (-1,0) \to (1,0)$. $C_2 =$ 

$$\oint_C |z|\bar{z}dz = \oint_{C_1} |z|\bar{z}dz + \oint_{C_2} |z|\bar{z}dz$$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$.

$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$.

$$= \int_{-1}^{1} |x| x\,dx + \int_0^{\pi} (\cos\theta - i\sin\theta)(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} i(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \pi i.$$

5. 设函数$f(z)$在单连通域D内解析，C 为D内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_c \mathrm{Re}[f(z)]dz = \oint_c \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立，如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

设$f(z) = \bar{z} = e^{-i\theta}$

$= \cos\theta - i\sin\theta$

$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$

$$\oint_C \mathrm{Re}\, f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \cos\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta\, d\theta + i\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta.$$

$$= 0 + i(\pi + 0). = \pi i$$

$$\oint_C \mathrm{Im}\, f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} -\sin\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta + i\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\sin 2\theta\, d\theta$$

$$= \pi + i\left(\frac{1}{4}\cdot 0\right) = \pi.$$

6. 观察得出下列积分的值，并说明理由。

（1）$\oint_{|z|=1.5} e^z(z^2+1)dz = 0$;

e^z 解析，z^2+1 解析.

（2）$\oint_{|z|=1.5} \frac{3z+5}{z^2+2z+3}dz$; $= \oint_{|z|=1.5} \frac{3z+5}{(z+1)^2+2} dz$.

奇点为 $z=-1-\sqrt{2}i$ 不在区域内.

∴ 解析，原式 $=0$.

（3）$\oint_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad 0<r<1$

$\ln(1+z)$ 在除去 $x\le -1$ 的负实轴上处处解析.

∴ $=0$.

（4）$\oint_{|z|=1} \frac{1}{\cos z}dz$

$\frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}$ 在区域内解析.

∴ $=0$

7. 沿下列指定曲线的正向计算积分 $\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$ 值：奇点 $z=0,\ z=\pm i$

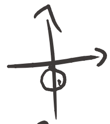
$$= \oint_C \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)}\, dz .$$

(1) $C: |z| = \frac{1}{2}$;

区域内 $\frac{1}{2(z\pm i)}$ 解析.

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)} = \oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-i\theta}\, d\tfrac{1}{2}e^{i\theta} = \int_0^{2\pi} i\, d\theta = 2\pi i .$$

(2) $C: |z+i| = \frac{1}{2}$;



$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)} = -\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+i} = -\frac{1}{2}(2\pi i) = -\pi i .$$

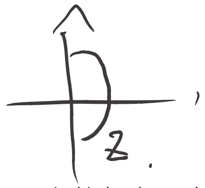
8．设 $f(z)$ 在单连通区域D内解析，且不为零，C为D内任何一条简单光滑闭曲线，判断积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 是否为零？说明理由。

由 $f(z)$ 解析, $f(z)$ 有各阶导且仍为解析

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \oint_C \frac{1}{f(z)}\, df(z)$$

由 $f(z)$ 在 D 解析且 $\neq 0$，则 $\frac{1}{f(z)}$ 也解析且 $\neq 0$.

$$\therefore \oint_C \frac{1}{f(z)}\, df(z) = 0 .$$



9. 设区域 D 为右半平面，z 为 D 内的圆周 $|z|=1$ 上的任意一点，用在 D 内的任意一条曲线 C 连接原点与 z，证明：

$$\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}\right]=\frac{\pi}{4}$$

$$Re\left[\int_0^z \frac{\frac{1}{2}i}{\xi+i}+\frac{-\frac{1}{2}i}{\xi-i}\,d\xi\right]=\frac{\pi}{4}$$

$\frac{1}{1+\xi^2}$ 在右半平面解析，与路径无关.

$$原式=Re\left[\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}+\int_0^\theta \frac{ie^{i\eta}}{1+e^{2i\eta}}d\eta\right]=\frac{\pi}{4}$$

10. 计算下列积分：

（1）$\int_{-\pi i}^{\pi i}\sin^2 z dz$；

$$=\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}\sin 2z\Big|_{-\pi i}^{\pi i}$$

$$=\pi i-\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2\pi)i.$$

(2) $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{(z+1)}dz$

$$=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i \checkmark.$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2(1+i)-\frac{1}{2}\ln^2 2.$$

$$=\frac{1}{4}\ln^2 2+i\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln^2 2=i\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln^2 2$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4}+3\ln^2 2\right)+\frac{i\pi}{8}\ln 2$$

(3) $\int_L (z+1)e^z dz$，L 为 $|z|=1$ 的上半圆周.

由 $(z+1)e^z$ 在 $|z|=1$ 处解析.

$$\int_L (z+1)e^z dz = \int_{-1}^{1}(z+1)e^z dz = ze^z\Big|_1^{-1}$$

$$= + \frac{1}{e} + e.$$

(4) $\int_L (z^2+7z+1)dz$，L 为 $z_1=1$ 到 $z_1=1-i$ 的直线段

z^2+7z+1 解析. 原式 $= \int_1^{1-i} (z^2+7z+1)dz$

$$= \frac{1}{3}z^3 + \frac{7}{2}z^2 + z\Big|_1^{1-i} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(-1-i) + 7(-i) + 1 - i - \frac{29}{6}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{29}{6} - \cancel{\left(8+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)i}.$$

$$-\frac{9}{2} - \frac{26}{3}i,$$

第六次作业

教学内容：3.3 复合闭路定理　3.4 柯西积分公式

1. 设 C 为正向椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，定义 $f(z)=\oint_C \frac{\zeta^2-\zeta+2}{\zeta-z}d\zeta$，$z$ 不在 C 上，求 $f(1), f'(i), f''(-i)$.

$1, i, -i$ 均在 C 内

$$f(1) = \oint_C \frac{\zeta^2-\zeta+2}{\zeta-1}d\zeta = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$$

$$f'(i) = \oint_C \frac{(\zeta-i)\cancel{(\zeta^2-\zeta+2)}}{(\zeta-i)^2}d\zeta =$$

☆ $f(z) = 2\pi i(z^2-z+2)$

2. 沿指定曲线的正向计算下列各积分。

（1）$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, \quad C:|z-2|=1$； 奇点为 $z=2$.

由 e^z 解析，由柯西积分公式

有 $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i e^2$.

（2）$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}dz, \quad C:|z|=r>1$;

$\cos\pi z$ 解析 原式 $= 2\pi i(\cos\pi z)^{(4)}\frac{1}{4!}$

$= \frac{\pi^5 i \cos\pi z}{12}$ $z=1$.

（3）$\oint_C \frac{\text{sinz}}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz, \quad C:|z|=2$

$\sin z$ 解析，原式 $= \frac{2\pi i}{1!}(\sin z)' = 2\pi i \cos z$.

0. $z=\frac{\pi}{2}$.

3. 计算积分

（1）$\oint_C \frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi}{4}zdz, \quad C:|z|=2$ $\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{2}$ 解析，奇点 $z=\pm1$ 在C内.

$= \oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{2(z-1)}dz - \oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{2(z+1)}dz$

$= \pi i(\sin\frac{\pi}{4} - \sin -\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\pi i$.

$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z+i} + \frac{-A}{z-i}$ $A = -\frac{i}{2}$

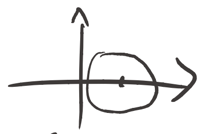
(2) $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$, $C:|z-2i| = \frac{3}{2}$; 奇点为 $\pm i$. 仅 $z=i$ 在 C 内.

$= \oint_C \frac{e^{iz}}{2(z-i)}dz - \oint_C \frac{e^{iz}}{2(z+i)}dz$. $z=i$?

$= 0 - 2\pi i \cdot \frac{e}{2}$

$= -\pi i e$.

(3) $\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}$, $(a\neq 0)$ $C:|z-a| = a$; 奇点为 $z=\pm a$.



$\frac{A}{-a} + \frac{-A}{z+a}$

$z=a \in C$.

$= \oint_C \frac{dz}{2a(z-a)} - \oint_C \frac{dz}{2a(z+a)}$

$= \frac{\pi i}{a} - 0 = \frac{\pi i}{a}$

(4) $\oint_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)}dz$, $C:|z| = \frac{3}{2}$;

$= \frac{1}{3}\left(\oint_C \frac{dz}{z^2+1} - \oint_C \frac{dz}{z^2+4}\right)$.

$= \frac{1}{6}\left(\oint_C \frac{dz}{z-i} - \oint_C \frac{dz}{z+i}\right)$

$= 0$.

4. 设$f(z)$在区域D内解析，C 为D内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在区域D内但不在C上的任意一点z_0有等式：$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ 成立。

有 $\oint \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f'(z_0)$.

而右边 $= \frac{2\pi i}{1!} f'(z_0) =$ 上式.

因此等式成立.

5. 设$f(z)$在$|z|\le 1$上解析且$f(0)=1$，试求：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{f(z)}{z}dz$。

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{[2z\pm(z^2+1)]f(z)}{z-0}dz$$

$$= \pm f(0) = \pm 1.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[\frac{2f(z)}{z} \pm \frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}\right]dz$$

$$= 2f(0) \pm [(z^2+1)f(z)]'|_{z=0}.$$

$$= 2 \pm f'(0)$$

部分习题参考答案：

第五次作业

1. （1）$\dfrac{\mathrm{i}+1}{2}$； （2）$\dfrac{1}{2}+i$

2. $\dfrac{\mathrm{i}-1}{3}$；

3. $e^{1+i}-1$；

4. πi；

5．未必成立

6. （1）0 ；（2）0.（3）0 ；（4）0.

7. (1) $2\pi\mathrm{i}$；(2) $-\pi\mathrm{i}$

8．等于零。

10.（1）$(\pi-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}2\pi)\mathrm{i}$；(2) $\dfrac{-1}{8}(\dfrac{\pi^2}{4}+3\ln^2 2)+\dfrac{i\pi}{8}\ln 2$ (3) $-2\cos h1$ (4) $-\dfrac{9}{2}-\dfrac{26}{3}i$

第六次作业

1. $f(1)=4\pi i$; $f'(i)=-2\pi(2+i)$; $f''(-i)=4\pi i$；

2. （1）$2\pi e^2 i$；（2）$\dfrac{-\pi^5 i}{12}$；（3）0。

3. （1）$\sqrt{2}\pi i$ ；（2）$\dfrac{\pi}{\mathrm{e}}$；（3）$\dfrac{\pi i}{a}$；（4）0.;

5. $2\pm f'(0)$.