华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第三册）

学　院 ____________专　业 ____________班　级 ____________
学　号 ____________姓　名 ____________任课教师____________

第五次作业

一．填空题：

1．某班级 12 名女生毕业后第一年的平均月薪分别为

1800	2000	3300	1850	1500	2900
4100	3000	5000	2300	3000	2500

则样本均值为 2770.8 样本中位数为 2700 ，众数为 3000 ，极差为 3500 ，

样本方差为 95269 。

2．设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x), a\in R$，则 $P\{\xi\ge a\}=$ $1-F(a-0)$ ，$P\{\xi=a\}=$ $F(a)-F(a-0)$

3. 设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Ax^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

则常数 $A=$ 1 ，$P\{0.5\le\xi\le 0.8\}=$ 0.39 。

二．选择题：

1．下述指标中描述样本数据“中心”的统计量有（ B ），描述样本数据“离散程度”的统计量有（ DE ）

A．样本均值　B．中位数　C．众数　D．极差　E．样本方差

2．下列表述为错误的有（ C ）

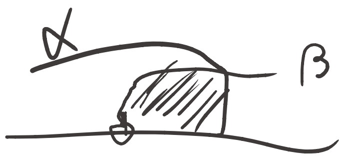
A．分布函数一定是有界函数　B．分布函数一定是单调函数

C．分布函数一定是连续函数　D．不同的随机变量也可能有相同的分布函数

3．设概率 $\boldsymbol{P(X>x_1)\ge\beta}$，$\boldsymbol{P(X\le x_2)\ge\alpha}$，且 $\boldsymbol{x_1<x_2}$，则 $\boldsymbol{P(x_1<X\le x_2)}$（ C ）

A．$\le\alpha+\beta-1$　　　　B．$\le 1-(\alpha+\beta)$

C．$\ge\alpha+\beta-1$　　　　D．$\ge 1-(\alpha+\beta)$



三. 计算题：

1. 利用 EXCEL 的数据分析工具验算填空题 1. 的计算结果，并把样本数据分为四组画出频率直方图（本题可选做）

2．设随机变量ξ的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0 \\ 1/4\ , & 0\le x<1 \\ 1/3\ , & 1\le x<3 \\ 1/2\ , & 3\le x<6 \\ 1\ , & x\ge 6 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 3^-} F(x)$ 也可写为 $F(3-0)$

试求 $P(\xi<3)$， $P(\xi\le 3)$， $P(\xi>1)$， $P(\xi\ge 1)$

$$P(\xi<3)=\lim_{x\to 3^-}F(x)=\frac{1}{3}$$

$$P(\xi\le 3)=F(3)=\frac{1}{2}$$

$$P(\xi>1)=1-P(\xi\le 1)=1-F(1)=\frac{2}{3}$$

$$P(\xi\ge 1)=1-P(\xi<1)=1-\lim_{x\to 1^-}F(x)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

3．已知随机变量ξ只能取-2，0，2，4四个值，概率依次为$\frac{c}{2},\frac{c}{3},\frac{c}{4},\frac{c}{6}$，求常数$c$，并计算$P(\xi<1|\xi>-1)$

由题意．$\frac{c}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{4}+\frac{c}{6}=1$．　$c=\cancel{\frac{5}{4}}$　$\frac{4}{5}$

$$P(\xi<1|\xi>-1)=\frac{P(-1<\xi<1)}{\cancel{P(\xi<1)}\ P(\xi>-1)}$$

$$=\frac{\frac{c}{3}}{\cancel{\frac{c}{2}}+\frac{c}{3}+\frac{c}{4}+\frac{c}{6}}=\cancel{\frac{2}{5}}\quad\frac{4}{9}$$

4．一批产品，其中有 9 件正品，3 件次品。现逐一取出使用，直到取出正品为止，求在取到正品以前已取出次品数的分布律、分布函数。

设已取出次品数X．

$P\{X=0\}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$　$P\{X=1\}=\frac{9\times3}{12\times11}=\frac{9}{44}$　$P\{X=2\}=\frac{3\times2\times9}{12\times11\times10}=\frac{9}{220}$

$P\{X=3\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=\frac{1}{220}$

ξ	0	1	2	3
$P\{X=\xi\}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{3}{4}, & 0\le x<1\\ \frac{21}{22}, & 1\le x<2\\ \frac{219}{220}, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$

5. 设连续随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求（1）常数 a;

（2） X 的分布函数;

（3） $P(0.5\le X\le 1.5)$.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$ ，

即 $\int_0^1 ax\,dx+\int_1^2(2-x)dx=1$.

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}=1$. $a=1$.

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$. 显然 $x<0$ 时 $F(x)=0$，$x>2$ 时 $F(x)=1$.

当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)=\int_0^x at\,dt=\frac{1}{2}ax^2$

当 $1<x\le 2$ 时，$F(x)=\frac{1}{2}a+\int_1^x 2-t\,dt=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}-2$

$=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x\le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1, & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

(3) $P(0.5\le X\le 1.5)=P(X\le 1.5)-P(X<0.5)$

$=F(1.5)-F(0.5)$

$=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}$

$=\frac{3}{4}$

第六次作业

一. 填空题:

$\Delta = \xi^2 - 4 \geq 0$, $\xi \geq 2$ (或 ≤ -2)

1. 若随机变量 $\xi \sim U[1,6]$，则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率为 $\underline{\frac{4}{5}}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} Ax^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，则 $A = \underline{3}$

$\frac{1}{3}x^3$

3. 设离散型随机变量 ξ 的分布函数为

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{x} < -10 \\ 0.7 & -10 \leq \boldsymbol{x} < 0 \\ 1 & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

则 ξ 的分布律为

X	-10	0
$P(\xi=x)$	0.7	0.3

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

$x^{\frac{3}{2}}$

则分布函数 $\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^{\frac{3}{2}}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

二. 选择题:

1. 在下列函数中，可以作为随机变量的概率密度函数的是（A）

A. $f(x) = \begin{cases} 2x & , & 0 < x < 1 \\ 0 & , & 其他 \end{cases}$ B. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , & 0 < x < 1 \\ 0 & , & 其他 \end{cases}$

C. $f(x) = \begin{cases} \cos x & , & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , & 其他 \end{cases}$ D. $f(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & , & x > 0 \\ 0 & , & x \leq 0 \end{cases}$

$-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

2. 下列表述中不正确有（D）A

A. $F(x)$ 为离散型随机变量的分布函数的充要条件是 $F(x)$ 为阶梯型函数

B. 连续型随机变量的分布函数一定是连续函数

C. 连续型随机变量取任一单点值的概率为零

D. 密度函数就是分布函数的导数

3.设随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}K(4x-2x^2), & 1<x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$$\int_1^2 4x-2x^2\,dx$$

$$=2x^2-\frac{2}{3}x^3\Big|_1^2$$

$$=\left(8-\frac{16}{3}\right)-\left(2-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}$$

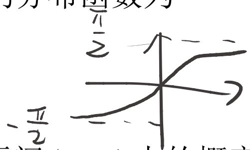
则 K=（C）。

A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

三. 计算题

1. （柯西分布）设连续随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x \quad -\infty<x<+\infty$$



求：（1）系数 A 及 B；(2) ξ 落在区间 $(-1,1)$ 内的概率；（3）ξ 的概率密度。

(1) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A-\frac{\pi}{2}B=0\\ A+\frac{\pi}{2}B=1\end{cases} \quad \begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=\frac{1}{\pi}\end{cases}$

(2) $P\{-1<\xi<1\}=F(1)-F(-1)$

$$=\frac{1}{\pi}(\arctan 1-\arctan -1)$$

$$=\frac{1}{2}$$

(3) 设概率密度 $f(x)$.

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

2．学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，单位为小时，它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} cx^2+x & 0\le x\le 0.5 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

（1） 确定常数 c；

（2） 写出 X 的分布函数；

（3） 试求在 20 min 内完成一道作业的概率；

（4） 试求 10 min 以上完成一道作业的概率。

(1) $F(0.5)=\int_0^{0.5} cx^2+x\,dx=\frac{c}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{0.5}$

$=\frac{c}{24}+\frac{1}{8}=1.$ 得 $c=21$

(2) $F(x)=\int_0^x 21x^2+x\,dx=7x^3+\frac{1}{2}x^2$ ， $0\le x\le 0.5$

即 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 7x^3+\frac{1}{2}x^2, & 0\le x\le 0.5 \\ 1, & x>0.5 \end{cases}$

(3) $P(X\le\frac{1}{3})=F(\frac{1}{3})=\frac{7}{27}+\frac{1}{18}=\frac{17}{54}$

$P(X>\frac{1}{6})=1-F(\frac{1}{6})=1-\frac{7}{216}-\frac{1}{72}=\frac{103}{108}$

3. 袋内有 5 个黑球 3 个白球,每次抽取一个不放回,直到取得黑球为至。记 Y 为抽取次数，求 Y 的概率分布及至少抽取 3 次的概率。

$P\{Y=1\}=\frac{5}{8}$ $P\{Y=2\}=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

$P\{Y=3\}=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$ $P\{Y=4\}=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$

分布律

y	1	2	3	4
$P(Y=y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ \frac{5}{8}, & 1\le x<2 \\ \frac{25}{28}, & 2\le x<3 \\ \frac{55}{56}, & 3\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}$

(设至少抽取3次为事件A)

$P(A)=P(Y\ge 3)=1-P(Y<3)=1-\lim\limits_{x\to 3}F(x)=1-\frac{25}{28}$

$=\frac{3}{28}$

4. 某种灯具的寿命ξ具有概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{x^2}, & x>10\\ 0, & x\le 10\end{cases}$$

任取三只这种灯具，问 150 小时内，三只灯具全部完好的概率是多少？又问 150 小时内，至少有两只损坏的概率又是多少？

$-\frac{10}{x}\Big|_{10}^{150}$

灯寿命小于 150h 概率：$p(\xi<150)=\int_{10}^{150}\frac{10}{x^2}dx=-\frac{10}{3}x^{-3}\Big|_{10}^{150}$

$=\cancel{0.0033}$ $\frac{14}{15}$

全部完好概率 $=p^3(\xi\geq 150)=(1-0.0033)^3=0.\cancel{99}01$

至少两只损坏概率 $=1-p^3(\xi\geq150)-3p^2(\xi\geq150)p(\xi<150)$

$=1-0.9901-3(1-0.0033)^2 0.0033=\cancel{0.0001}$

5. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ae^{-\lambda|x|}$，$\lambda>0$，$-\infty<x<+\infty$。
$a>0$.

求系数 a 和分布函数 $F(x)$。

$f(x)$ 偶函数. 则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$.

$\int_0^{+\infty}ae^{-\lambda x}dx=-\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{a}{\lambda}=\frac{1}{2}$, $a=\frac{\lambda}{2}$.

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$.

① 当 $x<0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda x}dx=\frac{1}{2}e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{\lambda x}$

② 当 $x\geq0$ 时, $F(x)=\frac{1}{2}+\int_0^x\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}\Big|_0^x=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}$

$\therefore F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x\geq0\end{cases}$