华 东 理 工 大 学

复变函数与积分变换作业（第2册）

班级__________学号__________姓名__________任课教师__________

第三次作业

教学内容： 2.1.2 柯西—黎曼方程

1．填空：

(1) 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 的导数 $f'(z)=$ 0，$z=0$

(2) 函数 $f(z)=z^n$ 的导数 $f'(z)=$ nz^{n-1}

(3) 函数 $\dfrac{z-3}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为 $-1,\pm i$

2．下列函数何处可导？何处解析？

(1) $f(z)=x^2-yi$；

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-1$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$．当 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 即 $2x=-1$

∴在 $x=-\frac{1}{2}$ 处可导，不解析．

(2) $f(z)=2x^3+3y^3i$；

$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2$，$\frac{\partial v}{\partial y}=9y^2$．$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$．当 $6x^2=9y^2$ 时．

即 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}y$ 处可导．不解析．

(3) $f(z)=z^2\bar{z}$

$=|z|^2z=(x^2+y^2)(x+yi)$．

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2$．$\frac{\partial v}{\partial y}=3y^2+x^2$．$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy$．$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$．

仅当 $x=0,y=0$ 时满足 C-R 方程．

∴仅在 $z=0$ 可导，不解析．

3．验证函数 $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ 在复平面上解析，并求其导数。

$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cosh y$. $\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\cosh y$. $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\sinh y$.

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\sinh y$. 满足 C-R 方程 且定义域为复平面.

$\therefore f(z)$ 在复平面解析.

$f'(z)=\cos x\cosh y-\sin x\sinh y\, i$.

4．设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i\left(x^3+Lxy^2\right)$ 是复平面内解析函数，求 L，m，n 的值。

$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2Lxy$, $\frac{\partial u}{\partial y}=nx^2+3my^2$, $\frac{\partial v}{\partial x}=Ly^2+3x^2$.

由 C-R 方程得 $n=L$, $n=-3$, $3m=-L$.

有 $\begin{cases} L=-3 \\ m=1 \\ n=-3 \end{cases}$.

5．设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数.

（1）$\overline{f(z)}$ 解析；

有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

$\overline{f(z)}=u-iv$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\partial v}{\partial y}$. $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$,

则有 $\frac{\partial v}{\partial y}=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$

$\therefore u, v$ 为常数 即 $f(z)$ 在 D 内为常数

(2) $2u+3v=1$；

$u=\frac{3v-1}{2}$，$v=\frac{2u-1}{3}$. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \frac{2u-1}{3}}{\partial y}$，$\frac{\partial \frac{2u-1}{3}}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ 得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

同理 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. $\therefore u,v$ 为常数 即 $f(z)$ 在 D 内为常数

(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数.

即 $u^2+v^2\equiv const$.

$2uu_x+2vv_x=0$

$2uu_y+2vv_y=0$.

说明 u,v 与 x,y 无关？

6. 证明：若 $f(z)$ 解析，则有 $(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|)^2=|f'(z)|^2$

$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$. 左式 $=\left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{u^2+v^2}\right)^2$

$=\left(\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2+\left(\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2=u_x^2+v_x^2=|u_x+iv_x|^2$.

$=|f'(z)|^2$

7. 试证下列函数在平面上任何点都不解析：

（1） $f(z)=x+2iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=2.$$

∴ 不解析.

（2） $f(z)=x+y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

∴ 不解析

（3） $f(z)=\mathrm{Re}\,z=x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

∴ 不解析.

（4） $f(z)=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\ \neq\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

在(0,0)外不成立，

在(0,0)处无定义

∴ 不解析

第四次作业

教学内容：2.2 初等函数及其解析性　2.3 解析函数与调和函数的关系

1.填空题

（1）$\exp\left(\frac{2-\pi i}{3}\right)=$ $e^{\frac{2}{3}}\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)$

（2）$\left(e^{i}\right)^{i}=$ e^{-1}； $(e^{i})^{i}=e^{i\,Ln\,e^{i}}=e^{-(1+2k\pi)}$.

（3）$Ln(-3+4i)=$ $\ln 5$ $+i(\arctan(-\frac{4}{3})+\pi)+2k\pi i$.

（4）$\ln(ie)=$ $1+\frac{\pi}{2}i$；

(5) $\ln e^{i}=$ i.

2　求下列各式的值

（1）3^{i}；

$=e^{i\ln 3}$ $e^{i\,Ln\,3}=e^{-2k\pi+i\ln 3}$

$=\cos\ln 3+i\sin\ln 3$

（2）$(1+i)^{i}$；

$=e^{i\,Ln(1+i)}=e^{i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2k\pi i)}$

$=e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}}$

（3）$\sin(1+2i)$；

$=\frac{e^{-2+i}-e^{2-i}}{2i}$ ✓ $=\frac{(e^{-2}-e^{2})\cos 1+i(e^{-2}+e^{2})\sin 1}{2i}$

$=\cancel{\frac{e^{-2}e^{-1}-e^{2}e^{1}}{-2}}=\frac{e^{3}-e^{-3}}{2}$

（4）$|\cos z|^{2}$

$=\cancel{\frac{|e^{iz}+e^{-iz}|^{2}}{4}}$ 代为 $x+iy$. $=|\cos(x+iy)|^{2}$

$=(\cos x\cosh y)^{2}+(\sin x\sinh y)^{2}$

3. 设 $z = re^{i\theta}$ 求 $\mathrm{Re}[Ln(z-1)]$

$\mathrm{Re}[Ln(z-1)] = \ln|z-1| = \frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$

4. 解下列方程：

（1） $e^x - 1 - \sqrt{3}i = 0$；

$e^x = 1+\sqrt{3}i$

$x = Ln(1+\sqrt{3}i)$

$= \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + 2k\pi i$

（2） $\ln z = 2 - \frac{\pi}{6}i$；

$\ln|z| = 2,\ \arg z = -\frac{\pi}{6}$

$z = e^2 e^{-\frac{\pi}{6}i}$

（3） $\cos z = 0$；

$e^{iz} + e^{-iz} = 0$

$e^{2iz} = -1$?

$z = \frac{\pi}{2} + k\pi$

5. 证明下列各式：

(1) $\cos iz = \cosh z$

$左 = \frac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cosh z.$

(2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$;

$(\cosh z + \sinh z)(\cosh z - \cancel{\sinh z}) = 1$

$\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2 = 1.$

6．由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z) = u + iv$：

（1）$u = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$；

$= x^3 - y^3 - 3xy^2 + 3x^2y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6xy = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\therefore v = \int \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2y - y^3 + 3xy^2 + f(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 3y^2 + f'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 - 6xy + 3x^2.$

$f(z) = x^3 - y^3 - 3xy^2 + 3x^2y + (3x^2y - y^3 + 3xy^2 + f(x))i.$

$= (1-i)z^3 + C.$

（2） $v=\arctan\frac{y}{x},x>0$；

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial x}=\int\frac{1}{x^2+y^2}dx^2+y^2.$$
$$=\ln x^2+y^2+f(x)$$

$$f(z)=\ln x^2+y^2+f(x)+i\arctan\frac{y}{x}$$

$$f(z)=\ln z+C$$

（3） $v=\frac{y}{x^2+y^2},f(2)=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.\quad \frac{\partial f(z)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(x^2-y^2-2xyi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\quad f(z)=\frac{-1}{z}+C.\quad =\frac{(x-yi)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{z^2}.$$

$$C=\frac{1}{2}.$$

7.设$u(x,y)=e^{px}\sin y$，求 p 的值使$u(x,y)$为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$. $\frac{\partial u}{\partial x}=pe^{px}\sin y=\frac{\partial v}{\partial y}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=p^2e^{px}\sin y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{px}\sin y$$ 两者之和为0.

$p=\pm1$. ① $p=1$. $v=\int\frac{\partial v}{\partial y}=-pe^{px}\cos y+f(x)$.

$$f(z)=e^x\sin y-i(e^x\cos y+f(x))$$

② $p=-1$. $f(z)=e^{-x}\sin y+(e^{-x}\cos y+f(x))i$.

8．已知$u+v=x^2-y^2+2xy-5x-5y$，试确定解析函数$f(z)=u+iv$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2y-5. \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=2x-5-2y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}. \text{①} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x} \text{②}$$

$\frac{①+②}{2}$ 得 $\frac{\partial u}{\partial x}=4x-10$, $u=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=2x^2-10x+f(y)$

同理 $\frac{\partial v}{\partial y}=4x-10$. $v=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=4xy-10y+f(x)$.

$$\therefore f(z)=2x^2-10x+f(y)+i(4xy-10y+f(x))$$

$$=z^2-5z+c_0-c_0 i$$

9. 设函数$f(z)=u+iv$解析，且$u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$，求$f(z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2+6xy. \quad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=-3y^2-6xy+3x^2 \quad ②$$

$\frac{①-②}{2}$, 得 $\frac{\partial u}{\partial x}=12xy$. $u=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=6x^2y+f(y)$.

同理. $\frac{\partial v}{\partial y}=12xy$. $v=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=6xy^2+f(x)$

$$\therefore f(z)=6x^2y+f(y)+i(6xy^2+f(x)).$$

$$-iz^3+C.$$

部分题目参考答案：

第三次作业

3． $f'(z)=\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

4． $L=-3$，$m=1$，$n=-3$

第四次作业

2．（1） $e^{-2k\pi - i\ln 3}$ $\quad k=0,\pm1\ldots$

（2） $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\ln\sqrt{2}}$ $(k=0,\pm1\ldots)$

（3） $\dfrac{(e^{-2}+e^{2})\sin 1 - i(e^{-2}+e^{2})\cos 1}{2}$

（4） $\cos^2 x+\sinh^2 y$，

3． $\dfrac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$

4．（1） $z=\ln 2+i(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi)$ $\quad k=0,\pm1\ldots$

（2） $z=e^2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2})$

（3） $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\quad k=0,\pm1\ldots$

6． （1） $f(z)=(1-i)z^3+ic, c\in R$

（2） $f(z)=\ln z+c, c\in R$

（3） $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$

7． $p=\pm1$

当 $p=1$ 时，

$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)$

当 $p=-1$ 时， $f(z)=e^{-x}\sin y+i(e^{-x}\cos y+C)$

8． $f(z)=z^2-5z+C-Ci$,其中C为任意常数。

9． $f(z)=-iz^3+C$,其中C为复常数。