华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第四册）

学　院 ______________ 专　业 ______________ 班　级 ______________

学　号 ______________ 姓　名 ______________ 任课教师 ______________

第七次作业

一．填空题：

1. ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

则 $E\xi =$ __2.7__。

$\frac{1}{10}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}$

2. ξ 的分布列为：

1　　0　　$\frac{1}{4}$　　1　　4

ξ	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

则 $E\xi =$ __$\frac{1}{3}$__，$E(-\xi+1) =$ __$\frac{2}{3}$__，$E\xi^2 =$ __$\frac{35}{24}$__。

3. 设 X_1, X_2, X_3 是 3 个独立同分布的随机变量，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=8$，对于 $\overline{X}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i$，则用切比雪夫不等式估计 $P\{|\overline{X}-\mu|<4\}\geq$ __$\cancel{\frac{1}{2}}$ $\frac{5}{6}$__.

二．选择题：

1. 若对任意的随机变量 ξ，$E\xi$ 存在，则 $E(E(E\xi))$ 等于　（ C ）。

A．0　　B．ξ　C．$E\xi$　D．$(E\xi)^2$

2. 现有 10 张奖券，其中 8 张为 2 元，2 张为 5 元，某人从中随机地无放回地抽取 3 张，则此人所得奖金的数学期望为 $\frac{117}{15}$　（ C ）

A．6.5　　B．12　　C．7.8　　D. 9

6	9	12
$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

3. 已知随机变量 X 满足 $E(X)=2$，$D(X)=4$，则 $E(4X^2-3)=$ B

A．32　　B．29　　C．0　　D．13

$4E(X^2)-3 = 4(D(X)+E^2(X))-3$

三． 计算题

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta-1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

其中$\theta>1$，求 EX 。

有性质 $\int_0^1 \frac{1}{\theta-1} x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}} dx = x^{\frac{1}{\theta-1}}\Big|_0^1 = 1-0=1$.

则 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\theta-1} x^{\frac{1}{\theta-1}} dx = \frac{1}{\theta} x^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\theta}$

2. 设随机变量ξ的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求 $E\xi,\ E(2\xi+3),\ E(\xi+e^{-2\xi})$ 和 $E(\max\{\xi,2\})$。

$E\xi = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = (-x-1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$E(2\xi+3) = 2E(\xi)+3 = 5.$

$E(\xi+e^{-2\xi}) = E(\xi)+E(e^{-2\xi})$

$= 1+\int_0^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}dx = 1-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{4}{3}.$

$E(\max\{\xi,2\}) = \int_0^2 xe^{-x}dx + 2$ X $= \int_0^2 2e^{-x}dx + \int_2^{+\infty} xe^{-x}dx$

$= (-x-1)e^{-x}\Big|_0^2 + 2$

$\cancel{= 3-3e^{-2}}$

$2+e^{-2}$

3. 一台机器由三大部件组成，在运转中各部件需要调整的概率分别为 0.1，0.2 和 0.3。假设各部件的状态相互独立，用ξ表示同时需要调整的部件数，试求ξ的数学期望。

求分布律：$P(\xi=0)=(1-0.1)(1-0.2)(1-0.3)=0.504$

$P(\xi=1)=0.1(1-0.2)(1-0.3)+0.2(1-0.1)(1-0.3)+0.3(1-0.1)(1-0.2)=0.398$

$P(\xi=2)=0.1\times0.2\times(1-0.3)+0.1\times0.3\times(1-0.2)+0.2\times0.3\times(1-0.1)=0.092$

$P(\xi=3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$

$E\xi=0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$

4. 设球的直径均匀分布在区间[a , b]内，求球的体积的平均值。

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$， $r\sim U(a,b)$. $r\sim U(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$

$EV=\int_a^b\frac{1}{b-a}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3dr=\frac{\pi}{3(b-a)}\cdot r^4\Big|_a^b$

$=\frac{\pi}{3(b-a)}(b^4-a^4)$

5. 6 个元件装在 3 台仪器上，每台仪器装两个，元件的可靠性为 0.5。如果一台仪器中至少有一个元件正常工作，不需要更换，若两个元件都不工作，则要更换，每台仪器最多更换一次，记 X 为 3 台仪器需要更换元件的总次数，求 EX

一台仪器需要更换：Y.

$P(Y) = 0.5^2 = 0.25$

$X \sim B(3, 0.25)$,

$E(X) = np = 0.75$

6. * 某种产品上的缺陷数 ξ 服从分布律

$$P(\xi = k) = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

求此种产品上的平均缺陷数。（* 高等数学 8 学分的学生可以不做）

$E\xi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+1}}$ 显然收敛.

$E\xi = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots$

$2E\xi = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots$

$\therefore E\xi = 2E\xi - E\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$

$= 1$

第八次作业

一. 填空题

$a^2+b^2-2ab=0$.

1. 设随机变量ξ的分布律为

$b=a$.

ξ	-1	0	1
P	a	$\frac{1}{2}$	b

已知 $D\xi=0.5$，则 a= $\frac{1}{4}$，b= $\frac{1}{4}$。

2. 若随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $X\sim\pi(1)$

$E(X)=$ 1；$D(X)=$ 1。

3. 事件在一次试验中发生次数ξ的方差一定不超过 ~~1~~ $\frac{1}{4}$。

0	1
p	$1-p$

二. 选择题

1. 设 X 是一随机变量，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，(μ, σ>0 为常数)，则对任意常数 C，必有（ D ）成立。

A $E(X-C)^2=E(X^2)-C^2$　　B. $E(X-C)^2=E(X-\mu)^2$

C. $E(X-C)^2<E(X-\mu)^2$　　D. $E(X-C)^2\geqslant E(X-\mu)^2$

2. 抛一枚均匀硬币 100 次，根据切比雪夫不等式可知，出现正面的次数在 40~60 之间的概率 p 为(A)

$\sim B(100, 0.5)$

A. ≥ 0.75　B. ≥ 0.95　C. ≤ 0.75　D. ≤ 0.25

$\geqslant 1-\frac{DX}{10^2}$ 25.

3. 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，a,b 为实数，则下列等式不成立的是（　　）.

A. $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ ✓

B. $E(XY)=E(X)E(Y)$ ✓

C.

D.

三、计算题

1．对第七次作业第三大题第 2 小题的 ξ，求 $D\xi$ 。

$$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$E\xi = 1$ ． $E\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$.

$D\xi = E\xi^2 - E^2\xi = 1$.

2．对第七次作业第三大题第 3 小题中的 ξ，求 $D\xi$ 。

x	0	1	2	3
$P(\xi=x)$	0.504	0.398	0.092	0.006

$E\xi = 0.6$

$E\xi^2 = 0.398 + 4\times0.092 + 9\times0.006$
$= 0.82$

$D\xi = E\xi^2 - E^2\xi = 0.82 - 0.6^2 = 0.46$

3．设随机变量ξ具有概率密度 $p(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，计算 $D\xi$。

$$E\xi=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)xdx$$
$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+x^2\Big|_1^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2=1$$

$$E\xi^2=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(2-x)x^2dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1+\frac{2}{3}x^3\Big|_1^2-\frac{1}{4}x^4\Big|_1^2=\frac{7}{6}$$

$$D\xi=E\xi^2-E^2\xi=\frac{1}{6}$$

4．设随机变量ξ仅在$[a,b]$取值，试证

$a\le E\xi\le b,\quad D\xi\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$。设概率密度 $p(x)$，$\int_a^b p(x)dx=1$

$$E\xi=\int_a^b xp(x)dx$$

$\because a\le\xi\le b$，$\therefore a\le E\xi\le b$． ?

$$\frac{a-b}{2}=a-\frac{a+b}{2}\le\xi-\frac{a+b}{2}\le b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2},$$

$\therefore\left|\xi-\frac{a+b}{2}\right|\le\left|\frac{b-a}{2}\right|$． $D\xi\le E\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

5．已知某种股票的价格是随机变量ξ，其平均值是 1 元，标准差是 0.1 元。求常数 a，使得股价超过 1+a 元或低于 1-a 元的概率小于 10%。(提示：应用切比雪夫不等式)。

由切不等式：

$P(|x-1|\geq\varepsilon)\leq\frac{0.1}{\varepsilon^2}$ 0.01　本例中 $\varepsilon=a$.

要使 $\frac{0.1}{\varepsilon^2}=10\%$，只需令 $a=\varepsilon=1$．即可.

6．设随机变量ξ的概率分布为

$$P(\xi=x)=\left(\frac{a}{2}\right)^{|x|}(1-a)^{1-|x|},\quad x=-1,0,1.$$

其中 $0<a<1$。试求：$D\xi$，$D|\xi|$。

x	-1	0	1
$P(\xi=x)$	$\frac{a}{2}$	$1-a$	$\frac{a}{2}$

x	0	1
$P(\lvert\xi\rvert=x)$	$1-a$	a

$E\xi=0$, $E\xi^2=a$

$\therefore D\xi=a$

$E|\xi|=a$. $E|\xi|^2=a$.

$\therefore D|\xi|=a-a^2=a(1-a)$