

概率论与数理统计

(第六册)

学 院 _____ 专 业 _____ 班 级 _____
学 号 _____ 姓 名 _____ 任课教师 _____

第 11 次作业

一. 填空题:

1. ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

则 $E\xi =$ 2.7。

2. 设 ξ 的分布列为:

ξ	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

则 $E\xi = \frac{1}{3}$, $E(-\xi + 1) = \frac{2}{3}$, $E\xi^2 = \frac{35}{24}$ 。

3. 设 X_1, X_2, X_3 是 3 个独立同分布的随机变量, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = 8$, 对于

$\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i$, 则用切比雪夫不等式估计 $P\{|\bar{X} - \mu| < 4\} \geq \frac{5}{6}$ 。

二. 填空题:

1. 若对任意的随机变量 ξ , $E\xi$ 存在, 则 $E(E(E\xi))$ 等于 (C)。

(A). 0 (B). ξ (C). $E\xi$ (D). $(E\xi)^2$

2. 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元, 2 张为 5 元, 某人从中随机地无放回地抽取 3 张, 则此人所得奖金的数学期望为 (C)
 (A) 6.5 (B) 12 (C) 7.8 (D) 9
3. 已知随机变量 X 满足 $E(X) = 2$, $D(X) = 4$, 则 $E(4X^2 - 3) =$ (B)
 (A) 32 (B) 29 (C) 0 (D) 13

三. 计算题

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-1} x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

其中 $\theta > 1$, 求 EX 。

$$\text{解 } EX = \int_0^1 x \frac{1}{\theta-1} x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\theta-1} x^{\frac{1}{\theta-1}} dx = \frac{1}{\theta} x^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\theta}。$$

2. 设随机变量 ξ 的概率密度函数

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 $E\xi$, $E(2\xi + 3)$, $E(\xi + e^{-2\xi})$ 和 $E(\max\{\xi, 2\})$ 。

$$\text{解 } E\xi = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1;$$

$$E(2\xi + 3) = 2E\xi + 3 = 5;$$

$$E(\xi + e^{-2\xi}) = E\xi + E(e^{-2\xi}) = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx = \frac{4}{3};$$

$$\begin{aligned} E(\max\{\xi, 2\}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x, 2\} p(x) dx = \int_0^{+\infty} \max\{x, 2\} e^{-x} dx \\ &= \int_0^2 2e^{-x} dx + \int_2^{+\infty} x e^{-x} dx = 2(1 - e^{-2}) + 2e^{-2} + e^{-2} = 2 + e^{-2}。 \end{aligned}$$

3. 一台机器由三大部件组成, 在运转中各部件需要调整的概率分别为 0.1, 0.2 和 0.3。假设各部件的状态相互独立, 用 ξ 表示同时需要调整的部件数, 试求 ξ 的数学期望。

解 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个部件需要调整}\} (i=1, 2, 3)$, 则 $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.3$ 。
 所以

$$P(\xi=0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=0.9\times 0.8\times 0.7=0.504,$$

$$P(\xi=1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=0.398,$$

$$P(\xi=2)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=0.092,$$

$$P(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)=0.006.$$

从而

$$E\xi=0\times 0.504+1\times 0.398+2\times 0.092+3\times 0.006=0.6$$

4. 设球的直径均匀分布在区间 $[a, b]$ 内, 求球的体积的平均值。

解 设球的直径长为 ξ , 且 $\xi \sim U[a, b]$, 球的体积为 η , 与直径 ξ 的关系为 $\eta = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\xi}{2}\right)^3$, 那

$$\text{么, } E\eta = \frac{4\pi}{3} \cdot E\left(\frac{\xi}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot E\xi^3 = \frac{\pi}{6} \int_a^b \frac{x^3}{b-a} dx = \frac{\pi(a+b)(a^2+b^2)}{24}.$$

5. 6 个元件装在 3 台仪器上, 每台仪器装两个, 元件的可靠性为 0.5。如果一台仪器中至少有一个元件正常工作, 不需要更换, 若两个元件都不工作, 则要更换, 每台仪器最多更换一次, 记 X 为 3 台仪器需要更换元件的总次数, 求 EX

解 随机变量 X 的取值: $k=0,1,2,3$, 每台仪器需要更换元件的概率:

$$p=0.5\times 0.5=0.25, \text{ 则 } P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{3-k}, \quad k=0,1,2,3$$

X	0	1	2	3
P	27/64	27/64	9/64	1/64

$$\text{故 } EX=0\times \frac{27}{64}+1\times \frac{27}{64}+2\times \frac{9}{64}+3\times \frac{1}{64}=\frac{3}{4}. \quad (\text{或 } EX=np=0.75)$$

6. * 某种产品上的缺陷数 ξ 服从分布律

$$P(\xi=k)=\frac{1}{2^{k+1}}, \quad k=0,1,2,\dots$$

求此种产品上的平均缺陷数。(* 高等数学 8 学分的学生可以不做)

$$\text{解 } E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, \quad \text{令 } x = \frac{1}{2}, \text{ 则}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{所以 } E\xi = 1.$$

第 12 次作业

一. 填空题

1. 设随机变量 ξ 的分布律为

ξ	-1	0	1
P	a	$\frac{1}{2}$	b

已知 $D\xi = 0.5$, 则 $a = \underline{1/4}$, $b = \underline{1/4}$ 。

2. 若随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\} = \frac{e^{-1}}{k!}$, $k=0,1,2,\dots$ 则

$$E(X) = \underline{1}; \quad D(X) = \underline{1}。$$

3. 事件在一次试验中发生次数 ξ 的方差一定不超过 $\underline{1/4}$ 。

二、选择题

1. 设 X 是一随机变量, $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, ($\mu, \sigma > 0$ 为常数), 则对任意常数 C , 必有 (D) 成立

A. $E(X-C)^2 = E(X^2) - C^2$ B. $E(X-C)^2 = E(X-\mu)^2$
C. $E(X-C)^2 < E(X-\mu)^2$ D. $E(X-C)^2 \geq E(X-\mu)^2$

2. 抛一枚均匀硬币 100 次, 根据切比雪夫不等式可知, 出现正面的次数在 40~60 之间的概率 p 为 (A)

A. ≥ 0.75 B. ≥ 0.95 C. ≤ 0.75 D. ≤ 0.25

3. 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量, a, b 为实数, 则下列等式不成立的是

(D) .

A. $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$
B. $E(XY) = E(X)E(Y)$
C. $E(aX^2+bY^2) = aE(X^2) + bE(Y^2)$
D. $D(aX^2+bY^2) = aD(X^2) + bD(Y^2)$

三、计算题

1. 设 ξ 的分布列为:

ξ	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

求 $D\xi$ 和 $D(1-3\xi)$ 。

解 $D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = \frac{35}{24} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{97}{72}$, $D(1-3\xi) = 9D\xi = \frac{97}{8}$ 。

2. 一台机器由三大部件组成, 在运转中各部件需要调整的概率分别为 0.1, 0.2 和 0.3。假设各部件的状态相互独立, 用 ξ 表示同时需要调整的部件数, 求 $D\xi$

解 $D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = 0 \times 0.504 + 1 \times 0.389 + 4 \times 0.093 + 9 \times 0.006 - 0.6^2 = 0.46$ 。

3. 设随机变量 ξ 具有概率密度 $p(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 计算 $D\xi$ 。

解 $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x \cdot (2-x)dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_1^2 = 1$,

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot xdx + \int_1^2 x^2 \cdot (2-x)dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_1^2 = \frac{7}{6},$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = \frac{1}{6}。$$

4. 设随机变量 ξ 仅在 $[a, b]$ 取值, 试证

$$a \leq E\xi \leq b, \quad D\xi \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2。$$

证 因为 $a \leq \xi \leq b$, 所以 $a \leq E\xi \leq b$ 。

又因为

$$\frac{a-b}{2} = a - \frac{a+b}{2} \leq \xi - \frac{a+b}{2} \leq b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \xi - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{|b-a|}{2}, \Rightarrow D\xi \leq E\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

5. 已知某种股票的价格是随机变量 ξ ，其平均值是 1 元，标准差是 0.1 元。求常数 a ，使得股价超过 $1+a$ 元或低于 $1-a$ 元的概率小于 10%。(提示：应用切比雪夫不等式)。

解 已知 $E\xi = 1$, $\sqrt{D\xi} = 0.1$,

$$\text{由切比雪夫不等式 } P\{|\xi - 1| \geq a\} \leq \frac{0.01}{a^2},$$

$$\text{令 } \frac{0.01}{a^2} \leq 0.1, \quad \text{得 } a \geq 0.32。$$

6. 设随机变量 ξ 的概率分布为

$$P(\xi = x) = \left(\frac{a}{2}\right)^{|x|} (1-a)^{1-|x|}, \quad x = -1, 0, 1$$

其中 $0 < a < 1$ 。试求： $D\xi$, $D|\xi|$ 。

$$\text{解 } E\xi = (-1) \cdot \frac{a}{2} + 0 \cdot (1-a) + 1 \cdot \frac{a}{2} = 0, \quad E\xi^2 = (-1)^2 \cdot \frac{a}{2} + 0^2 \cdot (1-a) + 1^2 \cdot \frac{a}{2} = a,$$

$$\text{所以 } D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = a。$$

$$\text{又 } E|\xi| = a, \quad E|\xi|^2 = E\xi^2 = a, \quad \text{故 } D|\xi| = E|\xi|^2 - (E|\xi|)^2 = a(1-a)$$