华东理工大学 2021–2022 学年第一学期

《高等数学（上)》课程期末考试试卷（A）　2021.12

开课学院：数学学院，　　专业：大面积，　　考试形式：闭卷，　所需时间 120 分钟

考生姓名：＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿　班级：＿＿＿＿＿　任课教师：＿＿＿＿＿

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	12	18	20	24	6	6	8	6	100
得分									
阅卷人									

注 意：试 卷 共 三 页 八 大 题

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\ln(1+x)\arcsin x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\ln(1+x)\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}(\mathrm{e}^{x-\sin x}-1)}{x^3}$ ------------3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ --------------3 分

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}\ln\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)\right)$ -------2 分

$=\exp\left(2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}(e^{\frac{x}{1+x}}-1)\right)$ -------2 分

$=\exp\left(2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}\dfrac{x}{1+x}\right)=e^2$ --------------------2 分

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 $\mathrm{d}y$.

解：方程两边同时对 x 求微分，得

$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ ---------------3 分

即 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}\mathrm{d}x$ ---------------3 分

2、设 $\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值.

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos(t^2)-2t^2\sin(t^2)-\frac{2t}{2t}\cos(t^2)}{-2t\sin(t^2)}=t$ -------------2 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{-2t\sin(t^2)}$ -------------2 分

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ -------------2 分

3、求曲线 $f(x)=x^4(12\ln x-7)$ 的凹凸区间和拐点.

解： $x\in(0,+\infty)$， $f'(x)=48x^3\ln x-16x^3, f''(x)=144x^2\ln x$

令 $f''(x)=0$，得 $x=1$.-------------3 分

当 $0<x<1$ 时， $f''(x)<0,\quad f(x)\cap$；

当 $x>1$ 时， $f''(x)>0,\quad f(x)\cup$，

拐点为 $(1,-7)$.-------------3 分

三、填空题和选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、当 $x\to 0$ 时， $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 为等价无穷小，则 $c=$ ____________，$k=$ ________________ .

解： $f(x)=3\sin x-\sin 3x=3\left(x-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)\right)-\left(3x-\dfrac{27}{6}x^3+o(x^3)\right)$

$=4x^3+o(x^3)\sim 4x^3 \quad (x\to 0)$

所以 $c=4,k=3$

2、设 $f(x)=xe^x$，则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 在点 __________ 处取极小值 _______________.

解：$-(n+1),-e^{-(n+1)}$

3、曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x\,(0\le x\le\pi)$ 与 Ox 轴围成的图形，绕 Ox 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V=__________.

解：$\dfrac{4}{3}\pi$.

4、若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为　　　　　　　　（　　　）

（A）$1+\sin x$　　（B）$1-\sin x$　　　（C）$1+\cos x$　　　（D）$1-\cos x$

解：B

5、下列命题中正确的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

（A）若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 与 $x=b$ 点有定义，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界;

（B）函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都连续的必要条件是函数 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

（C）若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值；

（D）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\dfrac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$.

解：B

四、计算下列积分（每小题 8 分，共 24 分）：

1、$\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(x^2+1)$　　　-----------------4 分

$=\dfrac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$ -----------------4 分

2、$\int\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：$\int\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(1-x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\ln(1-x)\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$=\ln|x|-\left(\dfrac{\ln(1-x)}{x}+\int\dfrac{1}{x(1-x)}\mathrm{d}x\right)$ -----------------4 分

$=\ln|x|-\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$ -----------------2 分

$=\ln|x|-\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\ln|x|+\ln(1-x)+C$

$=(1-\dfrac{1}{x})\ln(1-x)+C$ -----------------2 分

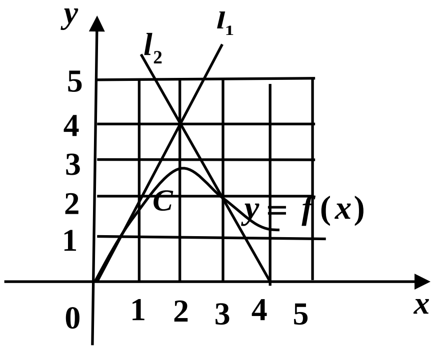
3、$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\sqrt{2x-1}$，则 $x=\dfrac{1+t^2}{2}, dx=tdt$，　----------------4 分

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=\int_0^1 te^t\mathrm{d}t$　--------------2 分

$=(te^t-e^t)\Big|_0^1=1$　--------------2 分

五、（本题 6 分）如图所示，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点（3,2）是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4).设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.



解：由题设图形可知，

$f(0)=0, f'(0)=2, f(3)=2, f'(3)=-2, f''(3)=0$，--------------2 分

由分部积分法可得

$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 (x^2+x)\mathrm{d}f''(x)$

$=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$　--------------2 分

$=-\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}f'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$

$=16+2f(3)-2f(0)=20$　--------------2 分

六、（本题 6 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}, x<0;\\ 1, \qquad x=0;\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t, x>0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解：　$f_-{}'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x)-1\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}=0$　--------------3 分

$f_+{}'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2dt-1\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\int_0^x \cos t^2dt-x}{x^2}=0$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.　--------------3 分

七、（本题 8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$.证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：作辅助函数 $F(x)=xf(x)$.----------------2 分

由积分中值定理，得

$$F(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2}\eta f(\eta)=F(\eta),\eta\in\left[0,\frac{1}{2}\right]，$$ ----------------3 分

$F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上满足罗尔中值定理的条件，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得

$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ ----------------3 分

八、（本题 6 分）锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比（比例系数为 $k>0$），在击第一次时，将铁钉击入木板 1cm，如果铁锤每次击打铁钉所做的功相等，问锤击第 2 次时，铁钉又击入多少？

解：取铁钉钉入点为原点，铁钉进入木板的方向为 x 轴的正向，由题设知阻力 $f=-kx$.第一次锤击所做的功为 $W_1=-\int_0^1 kxdx=-\frac{k}{2}$，----------------------2 分

设第二次锤击时击入 Lcm,则第二次锤击时所作的功

$W_2=-\int_1^{1+L}kxdx=-\frac{k}{2}\left(2L+L^2\right)=W_1$，----------------------2 分

故有 $2L+L^2=1\Rightarrow L=-1\pm\sqrt{2}$,由于 $L>0$，得 $L=\sqrt{2}-1(cm)$.----------------------2 分

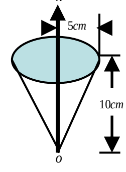
八、（本题 6 分）设生产某种产品的固定成本为 100 万元，边际成本（MC,单位：万元/单位）与边际收益（MR,单位：万元/单位）分别为 $MC=x^2-4x+6,\ MR=105-2x$，其中 x 为销售量.已知产销平衡，试确定厂商的最大利润.

解：设获得最大利润的产出水平为 x_0.由极值存在的必要条件知 $MC=MR$，即 $x^2-4x+6=105-2x$，解得 $x_1=-9,x_2=11$.显然 $x_1=-9$ 不合题意，舍去，即获的最大利润的产出是 $x_0=11$.----------------------3 分

最大利润为

$$L=\int_0^{x_0}(MR-MC)dx-C_0$$
$$=\int_0^{11}(105-2x-x^2+4x-6)dx-100$$ ----------------------3 分
$$=\frac{1999}{3}=666\frac{1}{3}（万元）$$

八、（本题 6 分）有一个圆锥形容器，锥顶向下放置，容器深 10 厘米，圆形的容器口半径为 5 厘米。现向该容器以每秒 10 立方厘米的速度注入水，求当水面升高到 5 厘米时，水面升高的速度为多少？



解：设水面高为 h 厘米，水平面半径为 r 厘米时，

体积为 V 立方厘米，有 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ 。

而由 $\dfrac{r}{5}=\dfrac{h}{10}$，得 $r=\dfrac{1}{2}h$，于是 $V=\dfrac{1}{12}\pi h^3$。-----------3 分

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{4}\pi h^2\cdot\dfrac{dh}{dt}=10$，$\therefore \dfrac{dh}{dt}\Big|_{h=5}=\dfrac{40}{\pi h^2}\Big|_{h=5}=\dfrac{8}{5\pi}$ 厘米/秒。-----------3 分

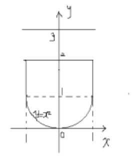
九、（本题 6 分）某船被一绳索牵引靠岸，绞盘位于比船头高 4m 处，绞盘卷绕拉动绳索的速度为 2m/s，当船距岸边 8m 时，船前进的速率为多大？

解：设时刻 t 时，船距岸边 x m,此时绞盘与船的距离为 $y=\sqrt{4^2+x^2}$，等式两边对 t 求导，

得 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}\dfrac{dx}{dt}$，-----------3 分

当 $\dfrac{dy}{dt}=2, x=8$ 时，得 $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{5}(m/s)$ -----------3 分

八、（本题 6 分）有一平面薄板垂直地沉入水中，（如图所示），其下半部是一抛物线弓形，上半部是一矩形，抛物线 $y=x^2$ 的顶点在水面下 3 米处，求此平面薄板上半部所受的水压力 P_1 与下半部所受的水压力 P_2 之比 $\dfrac{P_1}{P_2}$。



解：$\forall\,[y,y+dy]\subset[1,2]$，$dP_1=2dy(3-y)\rho g$，

$P_1=2\rho g\int_1^2(3-y)dy=3\rho g$ -----------2 分

$\forall[y,y+dy]\subset[0,1]$，$dP_2=2x^2dx(3-x)\rho g$

$P_2=2\rho g\int_0^1\sqrt{y}(3-y)dy=\dfrac{16}{5}\rho g$ -----------2 分

$\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{15}{16}$ -----------2 分