第三章 复变函数的积分

- 复变函数的积分概念
- 柯西积分定理
- 复合闭路定理
- 柯西积分公式

§ 3.1 复变函数积分的概念

一、积分的定义

有向曲线: 若一条光滑或逐段光滑曲线规定了其起点和终点，则称曲线为有向曲线。

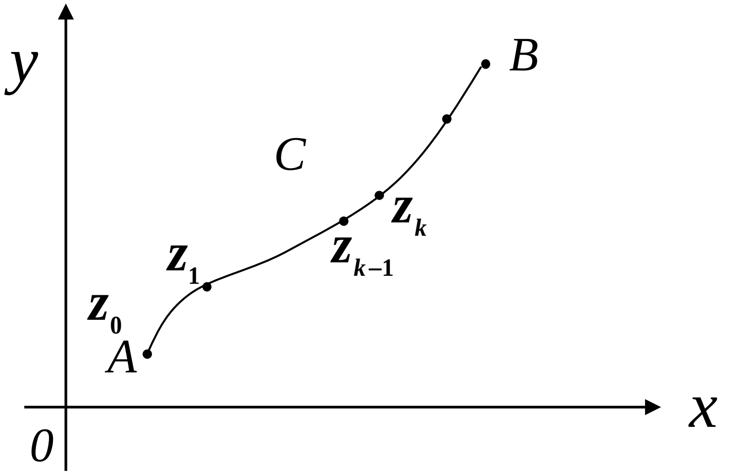
曲线的方向规定:

若曲线C为开口弧段，A为起点，B为终点，则沿曲线从A到B的方向为正向，记为C^{+}

从B到A的方向为负向，记为C^{-}.

若曲线C为封闭曲线，规定逆时针方向为C^{+}，顺时针方向为C^{-}。

积分定义



设 $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在给定的光滑或逐段光滑曲线 C 上有定义。

C 以A为起点, B 为终点,

把 C 任意分割成n 个小弧段, 设分点

依次为 $A = z_0, z_1, \cdots, z_k, \cdots, z_n = B$, 在

各小弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ 上任意取一点ξ_k, 并作和:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \qquad 其中\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

记 $\Delta S_k = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$, $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta S_k\}$ 则当 $n \to \infty$ 时, $\lambda \to 0$。

$\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n$存在且极限值与曲线$C$的分法及$\xi_k$的取法无关,

那么称这个极限值为函数$f(z)$沿曲线C的积分。

记为 $\int_C f(z)dz$

即 $$\int_C f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

若曲线C为封闭曲线那么沿C的积分记为

$$\oint_C f(z)dz$$

若C为x轴上区间线段$[a,b]$,而$f(z)=u(x)$时,

这个积分就是一元函数的定积分$\int_a^b u(x)dx$

二、积分存在的条件

定理3.1

若函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在光滑曲线 C 上连续，则 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分存在，并且

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy}$$

设$z_k=x_k+iy_k, \xi_k=\lambda_k+i\mu_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}[u(\lambda_k,\mu_k)+iv(\lambda_k,\mu_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\lambda_k,\mu_k)\Delta x_k-v(\lambda_k,\mu_k)\Delta y_k]+i\sum_{k=1}^{n}[v(\lambda_k,\mu_k)\Delta x_k+u(\lambda_k,\mu_k)\Delta y_k]$$

如果$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是连续的$\Rightarrow u(x,y),v(x,y)$是连续的。

且当$n\to\infty$，则$\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0\Rightarrow \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta x_k|\to 0, \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta y_k|\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}[u(\lambda_k,\mu_k)+iv(\lambda_k,\mu_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)\right)$$

则$\int_C f(z)dz=\int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy$

从形式上可以看成

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x + iv\mathrm{d}x + iu\mathrm{d}y - v\mathrm{d}y$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

定理表明:

（1）当$f(z)$是连续函数而C是光滑曲线时，

积分$\int_C f(z)dz$一定存在；

（2）即可把$\int_C f(z)dz$的计算化为两个实二元函数的曲线积分来计算。

为便于记忆,可把$f(z)dz$理解为 $\underbrace{(u+iv)}_{f(z)}\underbrace{(dx+idy)}_{dz}$

则 $f(z)dz = udx - vdy + i(vdx + udy)$

三、积分的基本性质

(1) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$ （k 是复常数）

(2) $\int_C [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz \pm \int_C f_2(z)dz$

(3) $\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$ （C^- 为 C 的负向曲线）

（4）若曲线 C 是由光滑曲线 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 依次连接而成时, 则

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

(5) 设曲线C的长度为L,函数$f(z)$在C上满足

$$|f(z)| \le M, \text{那末} \left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML.$$

证明:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta s_k$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML$$

所以$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML$

四、积分的计算

设 C 由参数方程给出：

$$C: \quad z = z(t) = x(t) + iy(t) \ \ (\alpha \le t \le \beta)$$

且 $z(\alpha)$、$z(\beta)$ 对应 C 的起点和终点则

由 $\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i(\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy)$ 得：

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta \{u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\}dt$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \{v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)\}dt$$

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta \{u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))\}(x'(t)+iy'(t))dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

所以 $$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt}$$

注意：定积分下、上限分别对应 C 的起点和终点。

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

例1　分别计算积分 $\int_C z dz$ 及 $\int_C \bar{z} dz$, C 是:

(1) 从原点到 $1+i$ 的直线段;

(2) C 由 0 到 1, 再由 1 到 $1+i$ 的折线段;

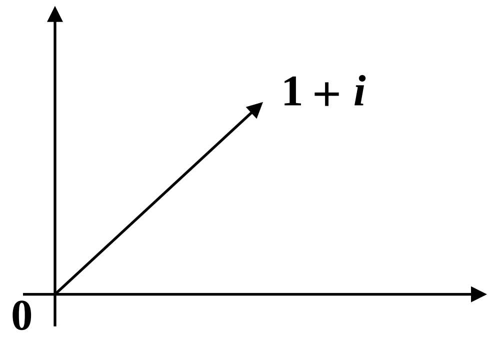
(3) 从原点到 $1+i$ 的抛物线段 $y = x^2$

解: (1) 积分路径 C 的参数方程:

$$z = z(t) = t + it, \quad 0 \le t \le 1$$

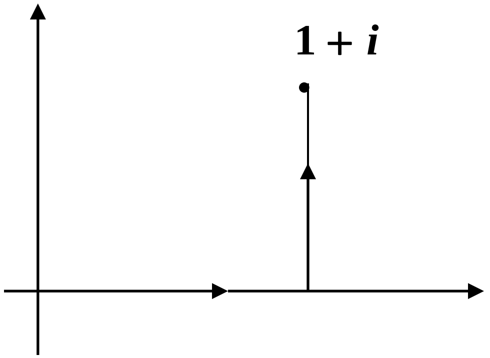
$$\int_C z dz = \int_0^1 (t+it)(1+i)dt = i$$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 (t-it)(1+i)dt = 1$$



(2) $C = C_1 + C_2$

$$C_1: z = z_1(t) = t, \quad 0 \le t \le 1$$



$$C_2: z = z_2(t) = 1 + t(1 + i - 1)$$

$$= 1 + it, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_C z dz = \int_{C_1} z dz + \int_{C_2} z dz$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1 + it) i dt \ = i$$

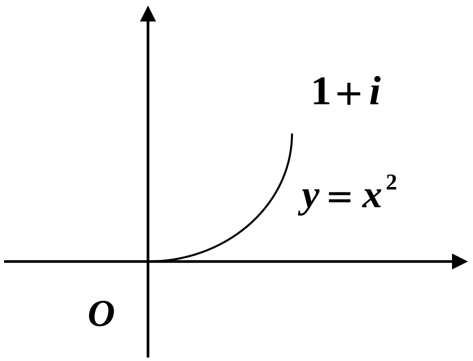
$$\int_C \bar{z} dz = \int_{C_1} \bar{z} dz + \int_{C_2} \bar{z} dz$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1 - it) i dt \ = 1 + i$$

(3) C_3的参数方程：

$$z = z(t) = t + it^2, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_C z\,dz = \int_0^1 (t+it^2)(1+2it)\,dt = i$$



$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^1 (t-it^2)(1+2it)\,dt = 1+\frac{i}{3}$$

注意 一般不能将函数$f(z)$在以α为起点, 以β为终点的曲线C上的积分记成$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\mathrm{d}z$, 因为积分值可能与积分路径有关, 所以记$\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

例2 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

其中C为以z_0为中心，r为半径的正向圆周，n为整数

解：C的参数方程：

$$z = z_0 + re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$dz = ire^{it}dt$$

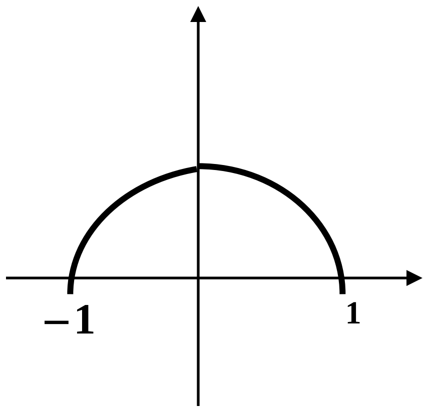
$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}}dt = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}dt$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ \dfrac{i}{r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}(\cos nt - i\sin nt)dt, & n \ne 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}}$$

重要结论：积分值与圆周的中心、半径无关.

例3　计算$\int_C (z^2+z\bar{z})dz$，C为$|z|=1$上半部分从$z_1=1$到$z_2=-1$的弧。



解：C的参数方程 $z=e^{it}$，$0\le t\le \pi$

$$dz=ie^{it}dt$$

而　$z^2+z\cdot\bar{z}=e^{i2t}+1$

所以

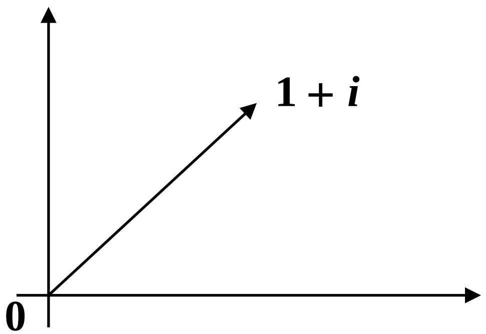
$$\int_C (z^2 + z\cdot\bar{z})dz = \int_0^\pi (e^{i2t} + 1)ie^{it}dt$$

$$= i\int_0^\pi (e^{i3t} + e^{it})dt$$

$$= \frac{1}{3}e^{i3\pi} - \frac{1}{3} + e^{i\pi} - 1$$

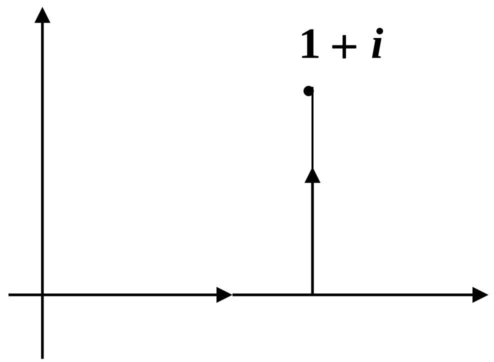
$$= -\frac{8}{3}$$

计算积分$\int_C z\,dz$及$\int_C \bar{z}\,dz$，其中C是：



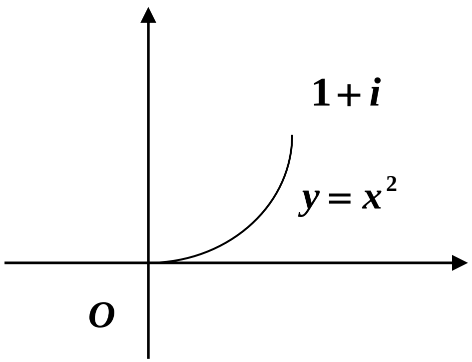
$$\int_C z\,dz = i$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = 1$$



$$\int_C z\,dz = i$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = 1 + i$$



$$\int_C z\,dz = i$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = 1 + \frac{i}{3}$$

§ 3.2 柯西积分定理

一、柯西积分定理

问题：$f(z)$ 在什么条件下，$\int_C f(z)dz$ 仅与积分路径的起点和终点有关，而与积分路径无关呢?

由于 $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$

回顾高等数学知识：

当 $P(x,y), Q(x,y)$ 在单连通域 D 内具有一阶连续偏导数

且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 时，则 $\int_C Pdx + Qdy$ 与积分路径无关($C \subset D$)。

所以当u、v具有一阶连续偏导数并且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

时，$\int_C udx-vdy$ 和 $\int_C vdx+udy$ 均与积分路径无关。

因此，$\int_C f(z)dz$ 与积分路径无关.

若C为区域D内的封闭曲线，由Green公式，有

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C udx-vdy+i\oint_C vdx+udy=0$$

上述条件成立时，$f(z)$是一个解析函数。

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

设区域D的边界为光滑或分段光滑曲线L。

格林公式（Green Theorem）

若函数P(x,y)与Q(x,y)在闭区域D上连续且具有一阶连续偏导数，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma = \oint_L Pdx + Qdy$$

定理(柯西积分定理) 若 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, 那么函数 $f(z)$ 沿 D 内任意一条闭曲线 C 的积分为零, 即

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0}$$

说明: (1) 曲线 $C \subset D$;

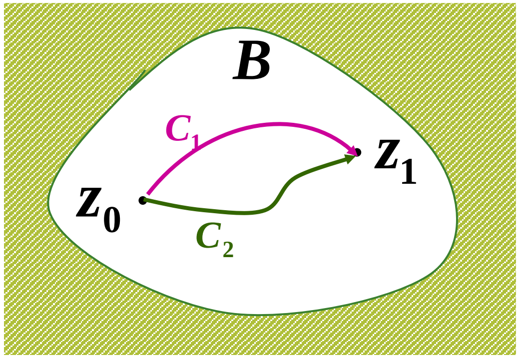
(2) 若 $C = \partial D$, $f(z)$ 在 D 及 ∂D 解析, 则 $\oint_C f(z)dz = 0$

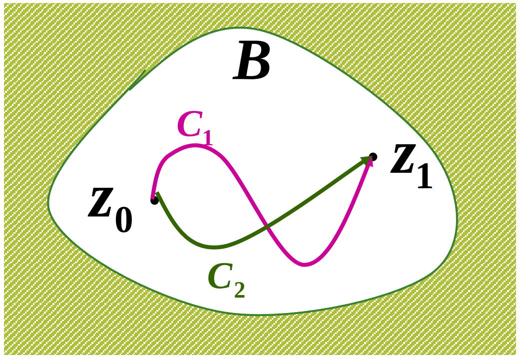
(3) 若 $C = \partial D$, $f(z)$ 在 D 内解析, 在 ∂D 连续, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

由定理得

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$





推论　如果函数 $f(z)$ 在单连通域D内处处解析，那末积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连结起点及终点的路线 C 无关.

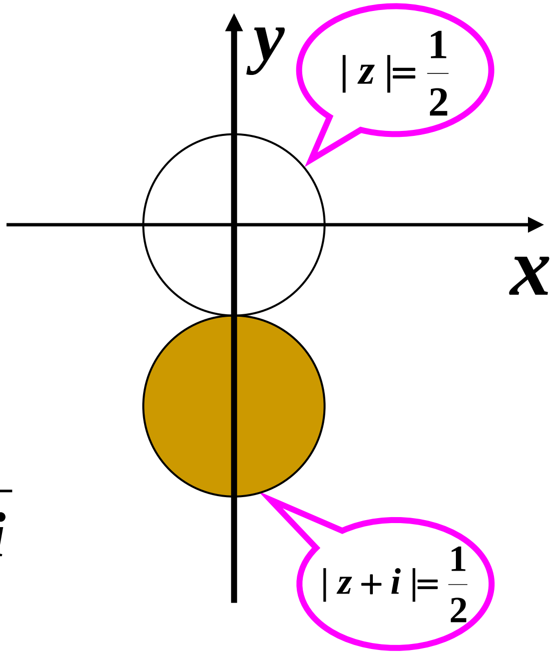
注意: 应用柯西定理时一定要注意定理的条件:

$f(z)$ 解析, D 单连通

当 $f(z)$ 有奇点时,不能直接应用该定理。

例1 计算 $\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz$

(1) C 为 $|z|=\frac{1}{2}$; (2) C 为 $|z+i|=\frac{1}{2}$



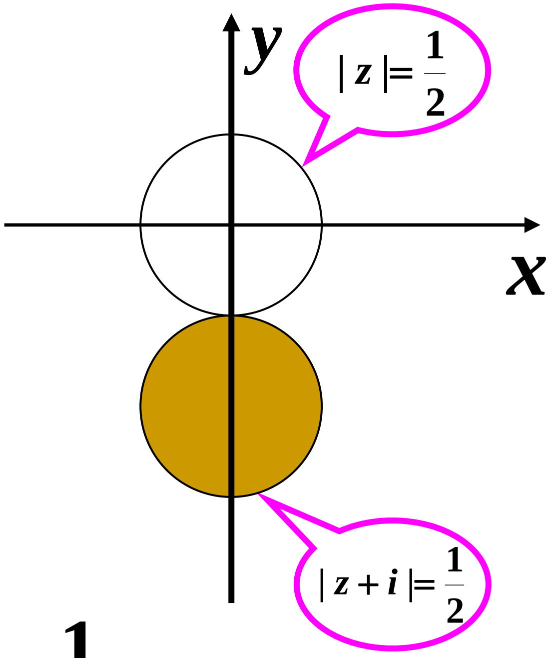
解: 由于 $\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}$

所以

$$(1)\ I=\oint_C\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\right)dz$$

$$=\oint_C\frac{1}{z}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z-i}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z+i}dz$$

$$=2\pi i-0-0=2\pi i$$



$$(2)\ I=\oint_C\frac{1}{z}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z-i}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z+i}dz$$

$$=0\ \ -0\ \ -\frac{2}{2}\pi i\ \ =-\pi i$$

例2 计算 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z.$

解 当 $|z| \le 1$ 时,

$$\left|z^2+2z+4\right| \ge 4-|2z|-|z|^2 \ge 4-2-1=1,$$

故由柯西积分定理得

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z = 0.$$

二. 变上限积分与原函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \quad (z_0, z\in D, z_0 \text{ 固定})$$

称为变上限积分.

定理 若 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析

则函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \quad (z_0$ 固定) 在 D 内解析, 并且

$$F'(z)=f(z) \quad (z\in D)$$

原函数:

设 $f(z)$ 在区域 D 内连续, 若存在 D 内解析函数 $F(z)$, 使 $F'(z)=f(z)$, 则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。

显然, $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。

利用原函数的概念, 可以得出与高等数学牛顿—莱布尼兹公式类似的解析函数的积分计算公式:

定理　设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数, 则对 $\forall z_1, z_2 \in D$, 有

$$\boxed{\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)}$$

注：

(1) 本公式只用于计算与积分路径无关的积分;

(2) 在计算积分时, 高等数学计算实函数不定积分的换元积分法和分步积分法仍成立。

例3 计算积分 $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$

解：z^2 在整个复平面上解析，积分与路径无关

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{1+i}^{2+4i} = -\frac{1}{3}(86+18i)$$

例4 计算积分 $\int_0^i z \sin z dz$

由于 $z \sin z$ 在复平面内处处解析，因而积分与路径无关。由分部积分法可得

$$\int_0^i z \sin z dz = -z\cos z\Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz = -i \cos i + \sin i$$

$$= -i(\cos i + i \sin i) = -ie^{-1}$$

柯西-古萨基本定理　　(柯西积分定理)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析，那末函数 $f(z)$ 沿 D 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零：$\oint_{c} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

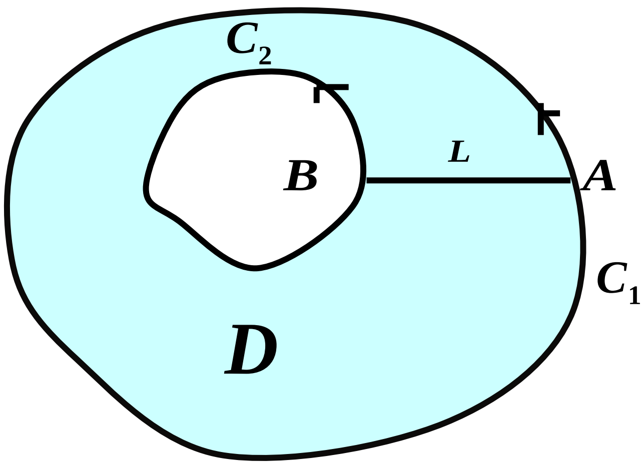
问题：如果区域是多连通，以上定理可能不再成立，那么将会是什么结论？

§3.3 复合闭路定理

设 $f(z)$ 在 D 上解析, D 由外边界 C_1 及内边界 C_2 组成,

C_1、C_2 为简单正向闭曲线, $C=C_1+C_2$, $f(z)$ 在 C 上连续,

用割线将 D 割开,



则简单闭曲线 $\Gamma=C_1+L+C_2^-+L^-$

围成一个单连通区域。

由柯西积分定理得到:

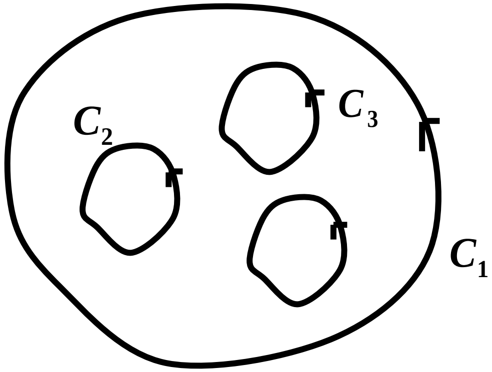
$$\oint_\Gamma f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_L f(z)dz+\oint_{C_2^-} f(z)dz+\oint_{L^-} f(z)dz$$

$$=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2^-} f(z)dz=0$$

即 $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz$

定理 (复合闭路定理)区域 D 的边界 C 由互不相交的正向简单闭曲线组成并且 $C_2,\ldots,C_n$ 包含在 C_1 的内部, $f(z)$ 在 D 内解析, 在 C 上连续, 则

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz$$



或 $$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \cdots - \oint_{C_n} f(z)dz$$

$$= \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2^-} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n^-} f(z)dz$$

$$= 0$$

例5 设 C 是复平面包含 z_0 的任一简单闭曲线, 证明

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}}$$

证: 在 C 内部作一个以 z_0 为圆心, r 为半径的正向圆周 C_r

由于

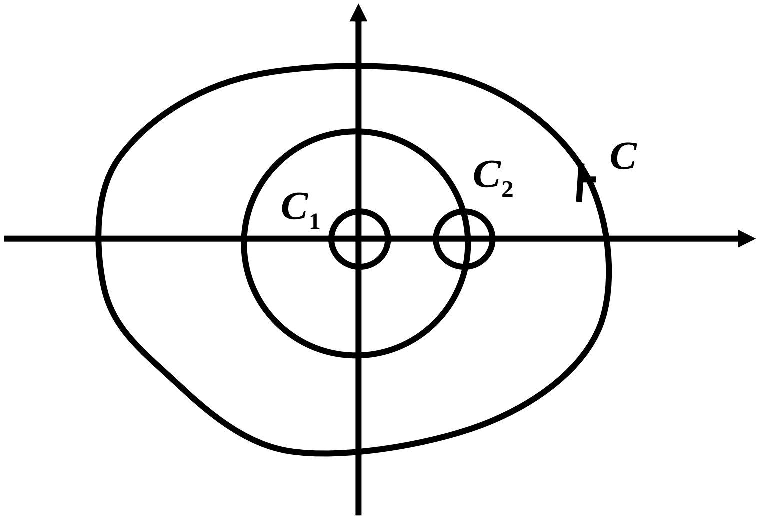
$$\oint_{C_r}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

由复合闭路定理得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

例6 计算$\oint_C \frac{1}{z^2-z}dz, C$为包含圆盘$|z|\le 1$在其内部的任何正向简单闭曲线

解： $f(z)=\frac{1}{z^2-z}$在复平面内除$z=0$、$z=1$两个奇点外处处解析。



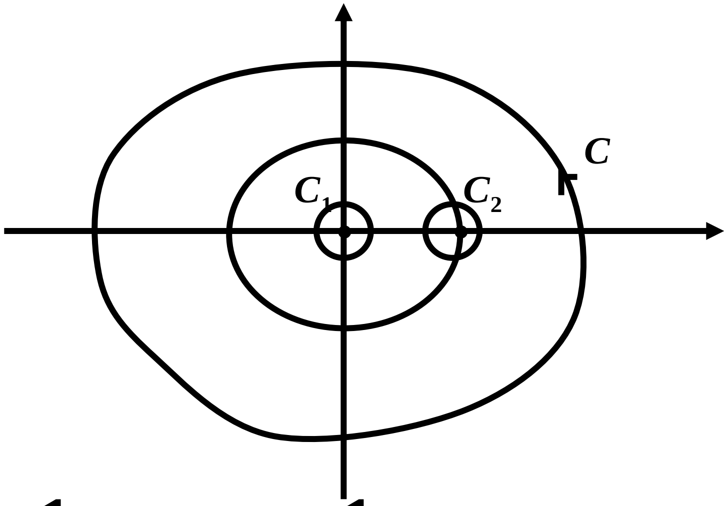
以$z=0, z=1$为圆心作两个互不相交且互不包含的圆周

$$C_1:|z|=r_1 \quad C_2:|z-1|=r_2$$

由复合闭路定理得到:

$$\oint_C \frac{1}{z^2-z}dz=\oint_{C_1}\frac{1}{z^2-z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z^2-z}dz$$

由于 $\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{(z-1)z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$



于是，得到

$$\oint_C \frac{1}{z^2-z}dz=\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=0-2\pi i+2\pi i-0=0$$

例7　沿指定路径$C:|z-i|=\dfrac{3}{2}$计算以下积分

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz$$

解　$\dfrac{1}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

利用柯西-古萨基本定理及重要公式

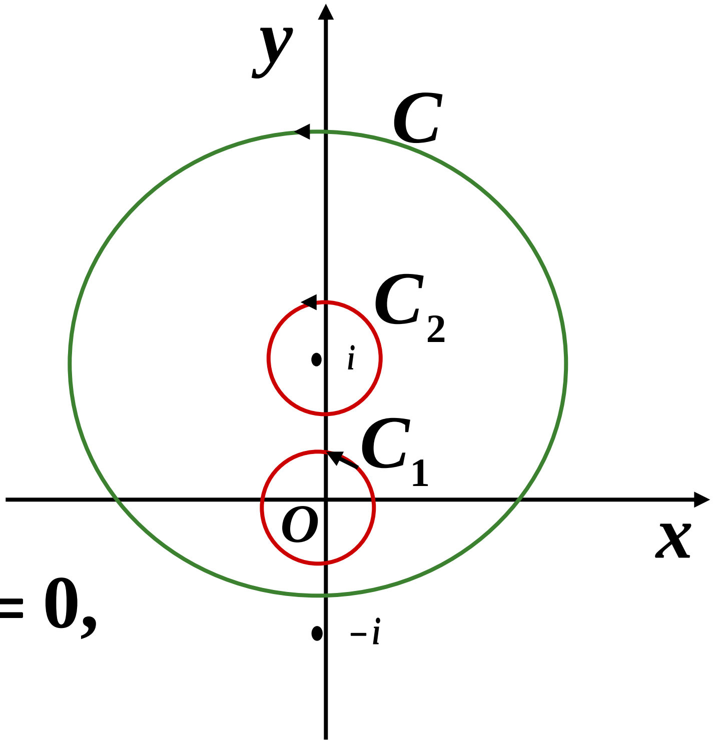
$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}$$

由柯西–古萨基本定理有

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=0,\quad \oint_{C_2}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$



$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \oint_{C_2} \frac{1}{2(z-i)}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i$$

$$= \pi i.$$

§ 3.4 柯西积分公式与高阶导数

一、柯西积分公式

定理 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 在 $C=\partial D$ 连续, C 为正向简单闭曲线, 对 $\forall z_0 \in D$, 则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$ 称之为柯西积分公式

或 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad (z\in D)$$ (证明略)

说明: (1) 通过柯西积分公式可以把函数在 C 内部任一点 z 的值用它在边界 C 上的值通过积分来表示.

(2) 给出了解析函数的一个积分表达式:

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)}$$

(3) 积分曲线 C 可以是解析区域 D 内部的包含 z_0 的任意曲线

(4) $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$ 中，$z=z_0$ 是被积函数 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 的惟一奇点，

若被积函数在C内部包含两个以上的奇点，就不能直接应用柯西积分公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

特别地, 若定理中区域D为圆周$C: z=z_0+re^{i\theta}$围成, 则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot re^{i\theta}\cdot id\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

------ 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的算术平均值.

例1 计算下列积分 (沿圆周正向) 值：

$$(1)\oint_{|z-3i|=2}\frac{e^z}{z(z-2i)}dz \quad (2)\oint_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz$$

解： (1) $f(z)=e^z/z$ 在 $|z-3i|\le 2$ 上解析

$$\oint_{|z-3i|=2}\frac{e^z}{z(z-2i)}dz=\oint_{|z-3i|=2}\frac{e^z/z}{z-2i}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2i}$$

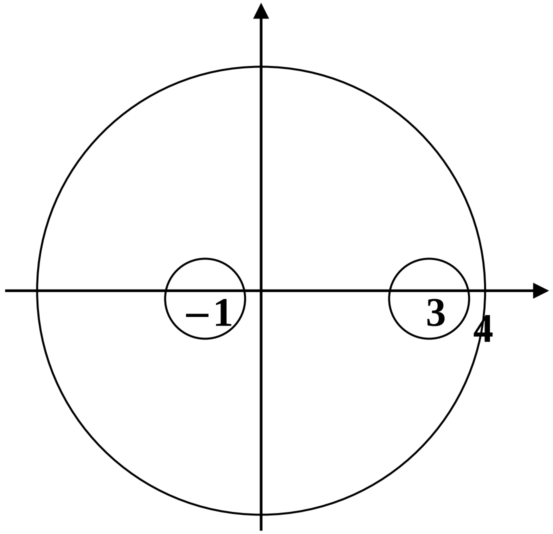
$$=\pi(\cos 2+i\sin 2)$$

$$(2)\ \frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}=\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}$$

$$\oint_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz=\oint_{|z|=4}\frac{1}{z+1}dz+\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}dz$$

由于 $z=-1, z=-3$ 包含在 $|z|=4$ 内

$$\oint_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz \quad = 2\pi i + 2\cdot 2\pi i = 6\pi i$$



解法2

$$f(z)=\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}$$ 在 C 内有两个奇点 $z=-1,3$

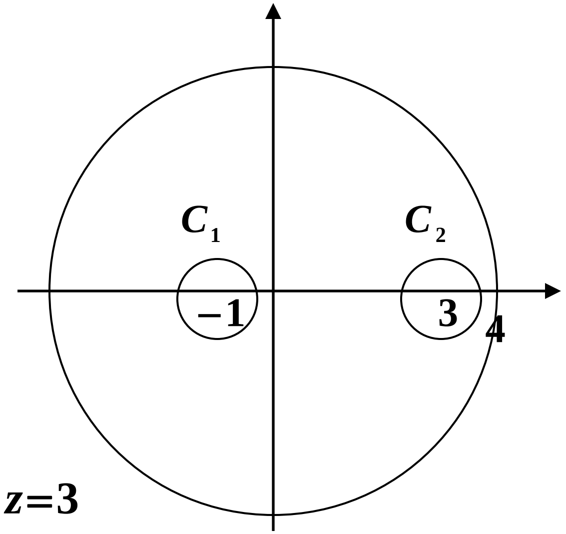
以 $z=-1, z=3$ 作两个互不相交的圆 C_1、$C_2\subset\{|z|\le 4\}$

由复合闭路定理, 得到

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{3z-1}{(z+1)(z-3)} dz + \oint_{C_2} \frac{3z-1}{(z+1)(z-3)} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{3z-1}{z-3}}{z+1} dz \quad + \oint_{C_2} \frac{\frac{3z-1}{z+1}}{z-3} dz$$



$$= \left.\frac{3z-1}{z-3}\right|_{z=-1} \cdot 2\pi i \; + 2\pi i \cdot \left.\frac{3z-1}{z+1}\right|_{z=3}$$

$$= 2\pi i + 4\pi i = 6\pi i$$

例2 设 $f(z)=\oint_C \dfrac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，$C$ 为正向圆周 $x^2+y^2=3$

求 $f'(1+i)$

解：由柯西积分公式知当 z 在 C 内时，

$$f(z)=2\pi i(3\xi^2+7\xi+1)\Big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1)$$

$$f'(z)=2\pi i(6z+7)$$

而 $z=1+i$ 在 C 内

所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$

二、高阶求导公式

定理 设 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $C=\partial D$ 连续，C 为简单正向闭曲线，则 $f^{(n)}(z)$ 在 D 内仍解析，且

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \forall z_0\in D,\ n=1,2,\ldots$$

说明: (1) C 可以是含于D内任何包含z_0的简单正向闭曲线;

(2) 上述公式可改写为 $$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

(3)公式中，$z=z_0$是被积函数在C内部的惟一奇点，如果被积函数在C内部有两个以上奇点，不能直接用该公式。

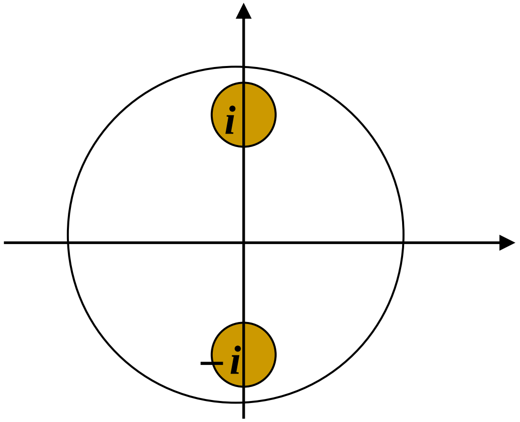
例3 求下列积分值:

$$(1)\ \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\,dz,\quad C:|z|=r>1$$

解: $\cos \pi z$ 解析　**由高阶导数公式，有**

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\,dz=\frac{2\pi i}{4!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1}=-\frac{\pi^5 i}{12}$$

(2) $\oint_C \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}dz, \quad C: |z| = r > 1$

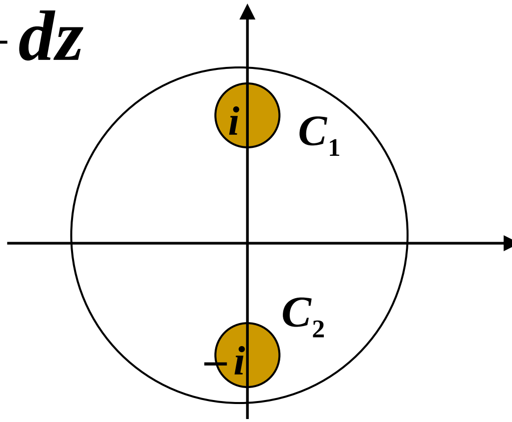


解：$z = \pm i$ 为 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 的奇点

以 $z = i$ 和 $-i$ 分别为圆心作两个互不相交互不包含的圆周 C_1、C_2

则 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $C + C_1 + C_2$ 所围区域解析

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$$



$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i} + \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=-i}$$

$$= \frac{(1-i)e^i}{2}\pi - \frac{(1+i)e^i}{2}\pi = \frac{\pi}{2}[(e^i - e^{-i}) - i(e^i + e^{-i})]$$

$$= \frac{\pi}{2}[2i\sin 1 - 2i\cos 1] = \pi i[\sin 1 - \cos 1]$$

例. $f(z)$在复平面上解析且有界，则$f(z)$恒为常数。

证：在复平面上任取一点

z_0，以z_0为圆心，以任意大的整数R为半径，

做正向圆$C:|z-z_0|=R$。由于$f(z)$有界，则

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,$$ 同时这里$|f(z)|<M$

所以$$|f'(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2}ds\le\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{M}{R^2}ds=\frac{M}{R}$$

$R\to\infty$，则$f'(z_0)=0$，于是f(z)为常数。

例4 设 C 是不通过 z_0 的简单正向闭曲线，

求 $g(z_0)=\oint_C \dfrac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}dz$ 的值。

解: 当 z_0 在 C 的外部时，$\dfrac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}$ 在 C 内解析

由柯西积分定理 有 $g(z_0)=0$

当 z_0 在 C 的内部时，设 $f(z)=z^4+z^2$

由高阶导数公式有

$$g(z_0)=\frac{2\pi i}{2!}f''(z_0)=\pi i(12z_0^2+2)=2(6z_0^2+1)\pi i$$

高阶导数公式是复积分的重要公式. 它表明了解析函数的导数仍然是解析函数这一异常重要的结论, 同时表明了解析函数与实变函数的本质区别.

判断被积函数的奇点，奇点数大于等于2，则可利用复合闭路定理，而后根据情况使用柯西公式或高阶导数公式。

高阶导数公式 $$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

本章小结

1. 复积分的概念: $\int_C f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$

2. 变上限积分:

若 $f(z)$ 解析$(z\in D)$, 则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$

$F'(z)=f(z)$ $\quad$ $(z_0$、$z\in D$, z_0 固定)

3. 积分方法:

(1) $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$

(2) $\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt, \quad C: z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$

(3) $f(z)$ 解析, $z \in D$, $\int_\alpha^\beta f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$,

$F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数, α、$\beta \in D$

(4) 利用柯西积分公式:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

条件: $f(z)$ 在 D 内解析, $C \subset D$, C 包含 z_0

(或者 $C = \partial D$ 连续)

(5) 利用高阶导数公式:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0) \quad (n=1,2,\ldots)$$

条件: $f(z)$ 在 D 内解析, $C\subset D$, C 包含 z_0

(或者 $C=\partial D$ 连续)

4. 在积分计算中常用以下公式简化计算:

$$(1)\ \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, n=0 \\ 0,\ n\neq 0 \end{cases}$$

C 为包含 z_0 的任意简单正向闭曲线

(2) 柯西积分定理 $\oint_C f(z)dz = 0$

条件: $f(z)$ 在 D 内解析, $C \subset D$

($C = \partial D$, $f(z)$ 在 C 连续)

(3) 复合闭路定理 $\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$

$f(z)$ 在 C、C_1、…、C_n 所包含区域解析

5. 若 $f(z)$ 解析, 则 $f^{(n)}(z)$ 解析 $(n = 1,2,\ldots)$

如: 若 $f(z)$ 解析, 则 $\oint_C [f(z) + f'(z)]dz = 0$

$(z \in D, C \subset D)$

思考与练习：

1. $\oint_{|z-1|=1}[\sin^{(n)} z+\cos z]dz =$ ____0____

2. 计算积分 $\int_C (|z|-e^z \sin z)dz$,

其中 C 为正向圆周 $|z|=a>0$.

解： 由于 $e^z \sin z$ 在C内解析，所以 $\int_C e^z \sin z dz=0$

于是 $\int_C (|z|-e^z \sin z)dz = \int_C |z| dz = 0$