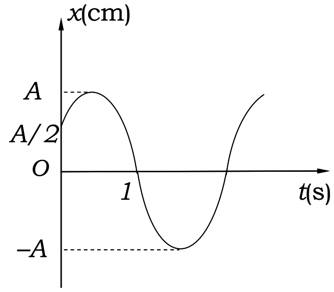
第四章　振 动

1、 如图为一谐振动的振动曲线，

（1）　写出振动表达式；

（2）求 $t=1s$ 和 $t=0.5s$ 时刻的位相差 $\Delta\varphi$



解：（1）由振动曲线可知

$$t=0 \quad \varphi_0=-\frac{\pi}{3} \qquad t=1 \quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0=\frac{5}{6}\pi$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta i}=\frac{5}{6}\pi$$

$$x=A\cos(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3})$$

（2）　$\frac{\Delta\varphi'}{2\pi}=\frac{\varphi_1-\varphi_{0.5}}{2\pi}=\frac{t_1-t_{0.5}}{T}$　　$\Delta\varphi'=\frac{5}{12}\pi$

2、质量为 10×10^{-3} kg的小球与轻弹簧组成的系统，按 $x=0.1\cos(8\pi t+\frac{2\pi}{3})$ 规律作谐振动，式中 t 以秒计，x 以米计，求：

（1）振动的周期 T，振幅 A 和初位相 Φ；

（2）t=1s 时刻的位相、速度；

（3）最大的回复力；

解：(1)与简谐振动标准运动方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 比较得

$$\omega=8\pi/s \qquad \Phi=\frac{2}{3}\pi \qquad A=0.1m \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=0.25s$$

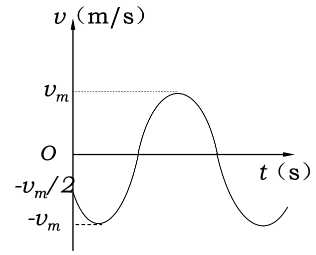
（2）当 $t=1$ 时　位相：$\omega t+\varphi=8\pi\times1+\frac{2}{3}\pi=8\frac{2}{3}\pi$

速度：$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=-0.1\times8\pi\sin(8\pi t+\frac{2}{3}\pi)$

$$v_1=-0.8\pi\sin(8\pi+\frac{2}{3}\pi)=-2.2\,m/s$$

（3）$F_{max}=ma_{max}=10\times10^{-3}\times A\omega^2=10\times10^{-3}\times0.1\times(8\pi)^2=0.63N$

3、一质点按余弦规律作简谐振动，其速度—时间关系曲线如图所示,周期 T=2s，试求振动表达式。



解： $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$

$$A=\frac{V_m}{\omega}=\frac{V_m}{\pi}$$

根据 $-\frac{V_m}{2}=-V_m\sin\varphi$ 且 $V<0$

得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $x=\frac{V_m}{\pi}\cos(\pi t+\frac{\pi}{6})\,(m)$

4、一弹簧振子沿 X 轴作谐振动，已知振动物体最大位移 x_m=0.4m，最大恢复力 F_m=0.8N，最大速度 V_m=0.8πm/s，已知 t=0, x_0=0.2m, V_0<0 ，求：

（1）振动能量；

（1）振动表达式。

解：（1） $\because F_{max}=kA$

$$\therefore k=\frac{F_{max}}{A}$$

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}F_{max}A=\frac{1}{2}\times0.8\times0.4=0.16J$$

（2） $\because t=0$ $\quad x_0=\frac{A}{2}$ $\quad v_0<0$

$$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$$

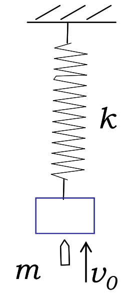
又 $v_m=\omega A$ 所以 $\omega=\frac{v_m}{A}=2\pi$

则 $x=0.4\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})\,(m)$

5、一弹簧振子，由弹性系数为 k 的弹簧和质量为 M 的物块组成，将弹簧一端与顶板连接，如图所示。开始时物块静止，一质量为 m、速度为 v_0 的子弹由下而上射入物块，并停留在物块中，试求：

（1）振子振动的振幅和周期；

（2）物块由初位置运动到最高点所需的时间；



解：（1）子弹打入木块动量守恒　$mv_0=(m+M)V$

初时位置　$mg=kx_0$　　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{V^2}{\omega^2}}=\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2\Big/\frac{k}{M+m}}$$

$$=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{kv_0^2}{(m+M)g^2}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

（2）$\mathrm{tg}\varphi=-\dfrac{v}{x_0\omega}=-\dfrac{\dfrac{mv_0}{M+m}}{\dfrac{mg}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}}=-\dfrac{v_0}{g}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$　（取向上为正，平衡位置 $x_0=\dfrac{mg}{k}$）

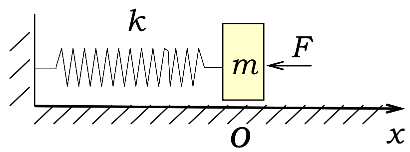
最高点　$x=A\cos(\omega t+\varphi)=0$

$$\therefore\quad \frac{0-\varphi}{\Delta t}=\frac{2\pi}{T}=\omega$$

$$\Delta t=\sqrt{\frac{M+m}{k}}\mathrm{tg}^{-1}(\frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{k}{M+m}})$$

6、如图所示，有一水平弹簧，倔强系数 k=24N/m，重物质量 m=6kg，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 F=10N 向左作用于物体（不计摩擦），使由平衡位置向左运动了 0.05m，此时撤去力 F，当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。

解：根据动能定理



$$Fx=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore A=\sqrt{\frac{2Fx}{k}}=0.204$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$$

$$\varphi=\pi$$

$$\therefore x=0.204\cos(2t+\pi)(\mathrm{m})$$

7、、如图所示，物体的质量为 m，放在光滑的斜面上，斜面与水平面的倾角为α，弹簧的弹性系数为 k，滑轮的转动惯量为 J，半径为 R。先把物体托住，使弹簧维持原长，然后由静止释放，试证明物体作谐振动，并求振动周期。

解：以物体受力平衡点为坐标原点，如图建立坐标

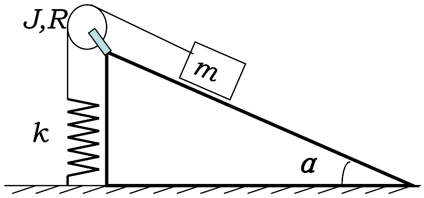
$$mg\sin\alpha - T_1 = ma \qquad (1)$$

$$(T_1 - T_2)R = J\alpha \qquad (2)$$

$$T_2 = k(x + x_0) \qquad (3)$$

$$mg\sin\alpha = kx_0 \qquad (4)$$

$$a = R\alpha \qquad (5)$$



由（1）（2）（3）（4）（5）解得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\frac{J}{R^2} + m}x = 0$$ 此为谐振动方程

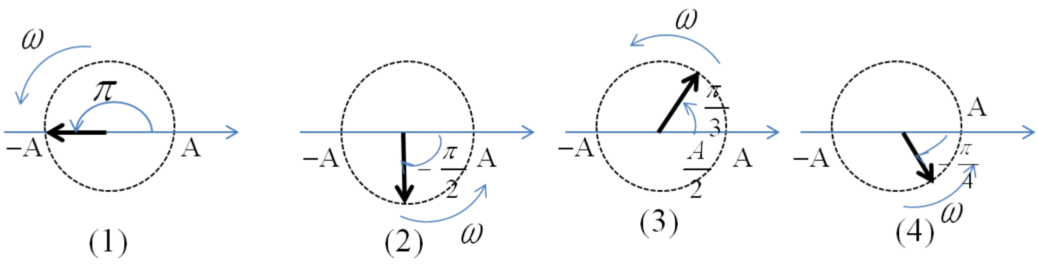
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{J}{R^2} + m}{k}}$$

8、一个沿 x 轴作谐振动的弹簧振子，振幅为 A，周期为 T，其振动方程用余弦函数表示。如果在 $t = 0$ 时，质点的状态分别是：

（1）在负方向的端点；（2）过平衡位置向 x 正方向运动；

（3）位移为 $\frac{A}{2}$，且向负方向运动；（4）位移为 $\frac{A}{\sqrt{2}}$，且向正方向运动，

试在旋转矢量图上表示质点的初相，并写出相应的谐振动方程。



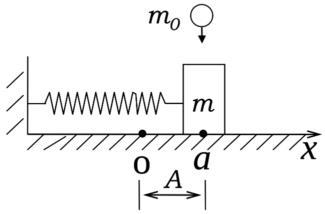
（1） $x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \pi)$ （2） $x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2})$

（3） $x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3})$ （4） $x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{4})$

9、如图所示，一质量为 m 的弹簧振子，在光滑水平面上作谐振动，O 为平衡位置，振动的振幅为 A。当 m 运动到最大位移点 a 时，突然一质量为 m_0 的物体竖直落下并粘在 m 上，与 m 一起振动，求：（1）该系统的圆频率和振幅；（2）若 m 运动到 O 点时，m_0 落下并与 m 粘在一起振动，则系统振动的圆频率和振幅。

解：（1） m 到最大位移 a 点时速度为 v=0，m_0 竖直落下，所以 $m+m_0$ 的速度为零

$$\therefore A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=A_0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m+m_0}}$$



（2）圆频率 $\omega'=\sqrt{\dfrac{k}{m+m_0}}$ 不变

m_0 未落下前，m 运动到 O 时速度为 $v_0=A_0\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}A_0$

当 m_0 落在 m 上时系统速度变为 v'，根据系统动量守恒

$$mv_0=(m+m_0)v'$$

$$\therefore \quad A'=\frac{v'}{\omega}=\frac{\dfrac{m}{m+m_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}}A_0}{\sqrt{\dfrac{k}{m+m_0}}}=\sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0$$

10、在一块平板下装有弹簧，平板上放一质量为1Kg的重物。现使平板沿竖直方向作上下简谐振动，周期为0.5s，振幅为 $2\times10^{-2}\,m$，求：

（1）平板到最低点时，重物对平板的作用力；

（2）若频率不变，则平板以多大振幅振动时，重物会跳离平板？

（3）若振幅不变，则平板以多大频率振动时，重物会跳离平板？

解：（1）当重物在最低点时 $F_N-mg=ma_{max}=mA\omega^2$

$$F_N=mg+mA\omega^2=mg+mA\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=12.96(N)$$

重物对木板的作用力与 F_N 大小相等，方向相反。

（2）当重物在最高点时 $mg-F'_N=mA'\omega^2$

当 ω 不变，$F'_N=0$ $\qquad A'=\dfrac{g}{\omega^2}=6.2\times10^{-2}(m)$

（3）当振幅不变时 $F'_N=0$ $\qquad v'=\dfrac{\omega'}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{A}}=3.52(Hz)$

11、有两个同方向的谐振动，它们的方程为

$$x_1 = 0.05\cos\left(10t + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$x_2 = 0.06\cos\left(10t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

式中 x 以 m 计，t 以 s 计，求：

（1）它们合成振动的振幅和初位相；

（2）若另有一振动 x_3 =0.07cos(10t+φ)，则φ为何值时，x_1+x_3 的振幅为最大？φ为何值时，x_2+x_3 的振幅为最小？

解：（1）

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$= \sqrt{(0.05)^2 + (0.06)^2 + 2\times 0.05\times 0.06\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$= 0.078m$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} = 11$$

$$\varphi = 84^0 48'$$

（2） $\varphi_3 - \frac{3}{4}\pi = 0 \qquad \varphi_3 = \frac{3}{4}\pi$

$\varphi'_3 - \frac{1}{4}\pi = \pi \qquad \varphi'_3 = \frac{5}{4}\pi$

12、两个同频率同方向的谐振动的合振幅为20cm，合振动与第一谐振动的位相差为 $\phi - \phi_1 = \frac{\pi}{6}$，若第一个谐振动的振幅为10 $\sqrt{3}$ cm，求：

（1）第二个振动的振幅 A_2；

（2）第一、第二两个谐振动的位相差。

解：（1） $A_2 = \sqrt{A_1^2 + A^2 - 2AA_1\cos\frac{\pi}{6}} = 10cm$

（2） $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$