第五章 留数及其应用

- 孤立奇点的概念
- 留数的定义、计算、留数定理
- 留数定理的应用（积分计算）

5.1 孤立奇点

1、孤立奇点的定义

若$f(z)$在z_0点不解析，但在z的某个去心邻域内解析

则称z_0为$f(z)$的孤立奇点。

例如： $z=0$是$\dfrac{\sin z}{z}$、$e^{\frac{1}{z}}$的孤立奇点。

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z+1)}$$

有两个孤立奇点$z=i, z=-1$

$z=0$是函数$\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$的奇点，但不是孤立奇点，

因为$z=\dfrac{1}{k\pi}(k\in Z)$都是它的奇点，

$$\frac{1}{k\pi}\to 0 \quad (\text{当}k\to\infty\text{时})$$

2、孤立奇点的分类

设z_0是$f(z)$的孤立奇点，则存在z_0的去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$

$f(z)$在该邻域内解析。

于是$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内可展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

根据洛朗展开式中（$z-z_0$)的负方幂项数，孤立奇点可分三类：

（1）可去奇点

若洛朗展开式中不含有$(z-z_0)$的负幂项， 即$a_{-n}=0$, $(n=1,2,\ldots\ldots)$ 则称孤立奇点z_0为$f(z)$的可去奇点。

例如：
$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\ldots\right)$$
$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\ldots \qquad 0<|z|<\delta$$

所以，$z=0$是$\dfrac{\sin z}{z}$的可去奇点。

若补充 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 点的函数值为1，

则 $z=0$ 成为函数的解析点。

可去奇点的判别法：

(i) 展开为洛朗级数；

(ii) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l$（有限值），则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

若 z_0 为可去奇点，则

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots\ldots$$

显然，$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0$

（2）极点

若洛朗展开式中只含有有限项$(z-z_0)$的负方幂项，

即存在正整数m，使得$a_{-m}\neq 0$ 且当$n>m$时， $a_{-n}=0$,

则称z_0为$f(z)$的m级极点。

即 $$f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

$$(m\geq 1, a_{-m}\neq 0)$$

$f(z)$还可表示为 $$f(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$$

其中， $h(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+a_{-m+2}(z-z_0)+\ldots$

例如： $$f(z)=\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots)$$

$$=z^{-2}+z^{-1}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\ldots$$

所以，$z=0$是$f(z)$的二级极点。

极点的判别法：

(i) 展开为洛朗级数，用定义判别；

(ii) z_0为$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow$ $$f(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$$

其中，$h(z_0)\neq 0$且$h(z)$在z_0解析；

例如： $f(z)=\dfrac{z-2}{(z^2+1)(z-1)^2}$

$z=1$为$f(z)$的二级极点， $z=\pm i$是$f(z)$的一级极点。

例如： $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ $z=0$不是$f(z)$的二级极点，

因为 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}(z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots)$

$$=z^{-1}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\ldots$$

所以， $z=0$是$f(z)$的一级极点。

注意判别条件！

(iii) z_0为$f(z)$的极点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

极点和零点的关系

零点： 使解析函数$f(z)=0$的点z_0称为$f(z)$的零点。

m级零点： 若$f(z)$可表示为$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$,

其中，$g(z)$在z_0点解析，且$g(z_0)\neq 0, m$为正整数

则称z_0为$f(z)$的m级零点。

零点的判别若z_0为$f(z)$的解析点，则z_0为$f(z)$的m级零点$\Leftrightarrow$

$$f^{(k)}(z_0)=0\ \ (k=0,1,\ldots m-1)\quad 而 f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

例如： $f(z)=z^3-1$ $\quad z=1$为$f(z)$的一级零点。

$z=0$是$f(z)=z-\sin z$的三级零点。

(iv) z_0为$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow$ z_0为$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点；

(v) 若$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}, P(z_0)\neq 0$且$P(z)$在$z_0$点解析，

若z_0是$Q(z)$的m级零点，则必为$f(z)$的m级极点。

事实上， 若z_0为$Q(z)$的m级零点，则

$Q(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ $\varphi(z_0)\neq 0$ $\varphi(z)$在z_0解析

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{\varphi(z)}\frac{1}{(z-z_0)^m}=\frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$$

3、本性奇点

若$f(z)$的洛朗展开式中含有无穷多项$(z-z_0)$的负幂项，则称z_0为$f(z)$的本性奇点。

判别法：

(i) 把$f(z)$展开为洛朗级数，用定义判别；

(ii) z_0是$f(z)$的本性奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在，也不是$\infty$。

例如：
$$e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\ldots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\ldots$$

函数$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$以$z=0$为本性奇点

例1　试确定函数 $f(z)=\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$ 的奇点类型。

解：由于 $f(z)=\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}=\dfrac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)}$

显然，函数的奇点是

$$z=1,\quad z_k=1+\frac{2k+1}{2}\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$$

由于 $\lim\limits_{z\to1}\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\dfrac{1}{\cos(z-1)}=1$

所以，$z=1$为可去奇点。

又 $\left.\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}\right|_{z_k}\neq0,\quad \cos(z-1)\big|_{z_k}=0$

$$[\cos(z-1)]'_{z_k}=-\sin(z-1)\Big|_{z_k}=-\sin\frac{2k+1}{2}\pi$$

$$=-(-1)^k=(-1)^{k+1}\neq 0$$

所以z_k是$\cos(z-1)$的一级零点，是$f(z)$的一级极点。

例2 讨论$f(z)=\dfrac{\sin z}{z(e^z-1)}$的孤立奇点的类型。

解： $f(z)$的孤立奇点为：

$$z=0,\quad z_k=2k\pi i\quad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$$

由于$\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots\qquad (|z|<+\infty)$

$$e^z-1=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\qquad(|z|<+\infty)$$

于是 $f(z)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots}\right)=\dfrac{1}{z}h(z)\qquad |z|<+\infty$

其中，$h(0)=1\neq 0$且在$z=0$解析，于是，$z=0$为$f(z)$的一级极点。

以下考察$z_k=2k\pi i\quad(k=\pm1,\pm2,\dots)$

$$f(z)=\frac{\sin z}{z(e^z-1)}=\frac{\sin z/z}{(e^z-1)}$$

由于$\left.\dfrac{\sin z}{z}\right|_{z_k} \neq 0$且$\dfrac{\sin z}{z}$在$z_k$解析，

而$\left.(e^z-1)\right|_{z_k}=0, \quad \left.(e^z-1)'\right|_{z_k}=e^{z_k}\neq 0$

于是 $z_k=2k\pi i \quad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$是$e^z-1$的一级零点。

因此是$f(z)$的一级极点。

4. 函数在无穷远点的性态

定义：如果函数 $f(z)$在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<\infty$内解析，称点∞为$f(z)$的孤立奇点.

令 $w=\dfrac{1}{z}$

则扩充z平面上∞的去心邻域 $R<|z|<+\infty$变换成扩充w平面上原点的去心邻域：$0<|w|<\dfrac{1}{R}$

又 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)=\varphi(w)$ 显然，$\varphi(w)$在$0<|w|<\dfrac{1}{R}$内解析，

且$w=0$为$\varphi(w)$的孤立奇点。由于$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{w\to 0}\varphi(w)$

所以，$f(z)$在无穷远点 $z=\infty$ 的奇点类型

等价于$\varphi(w)$在$w=0$的奇点类型。

即$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点, 极点或本性奇点, 完全看极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 是否存在(有限值), 为无穷大或不存在又不是无穷大来决定.

例3 $f(z)=(z-2)(z^2+1)$. $z=\infty$为唯一奇点，三级极点

例4 $z=\infty$是$f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$的可去奇点。

例5 $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$. $z=0$与∞均为本性奇点.

5.2 留数定理

一、留数的定义

若$f(z)$在z_0的去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$内解析，

则$f(z)$在此邻域可展开为洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\ldots+a_{-n}(z-z_0)^{-n}+\ldots a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0$$
$$+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

在$0<|z-z_0|<\delta$内任取一条绕z_0的正向简单闭曲线C，

对上式两端在C上积分，并利用公式

$$\oint_C\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

及柯西积分定理，得：

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz}$$ 称之为$f(z)$在z_0点的留数，

记为 $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$ 即

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = a_{-1}$$

C为在$0 < |z - z_0| < \delta$内任意一条绕z_0的正向简单闭正向曲线

例1　求 $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$ 在孤立奇点 $z=0$ 处的留数。

解：由于在$0<|z|<\delta$内有

$$ze^{\frac{1}{z}}=z+1+\frac{1}{2!}z^{-1}+\frac{1}{3!}z^{-2}+\ldots$$

于是

$$\operatorname{Re}s[f(z),0]=a_{-1}=\frac{1}{2}$$

例2　求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-z},1\right]$

解：　$\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{1/z}}{z^2-z},1\right]$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{1/z}}{z^2-z}dz$$

其中, C 为 $0<|z-1|<\delta$ 内绕 $z=1$ 的一条简单正向闭曲线。

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{1/z}}{z(z-1)}dz$$

由柯西积分公式得

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\left(\frac{e^{1/z}}{z}\right)\Bigg|_{z=1}=e$$

二、留数的计算方法

1、若z_0是$f(z)$的可去奇点，则 $\boxed{\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0}$

2、若z_0是$f(z)$的一级极点，则

$$\boxed{\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$$

$$f(z)=a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

所以 $a_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

3、若z_0为$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的一级极点，且

$P(z),Q(z)$在z_0解析，$P(z_0)\neq 0, Q'(z_0)\neq 0$

则 $$\boxed{\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}}$$

由于 z_0为$f(z)$的一级极点，$Q(z_0)=0$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

4、若z_0为$f(z)$的m级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

$$f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\ldots$$

$$+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

$$\therefore\quad (z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\ldots$$

$$+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+a_0(z-z_0)^m+\ldots$$

两端求$(m-1)$阶导数：

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=(m-1)!a_{-1}+\text{含}(z-z_0)\text{的正幂项}$$

两边取$z\to z_0$时的极限，得：

5、若z_0为$f(z)$的本性奇点，

(1)将$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内展开成洛朗级数，求a_{-1};

(2)计算$a_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$

例3　求$\mathrm{Res}[\dfrac{ze^z}{z^2-1},1]$

解：显然，$z=1$是$f(z)$的一级极点，

所以 $$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2}$$

或者：　取$P(z)=ze^z$，$Q(z)=z^2-1$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{P(1)}{Q'(1)}=\frac{e}{2}$$

例4 求 $\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(z^2+1)^3},i]$

解：由于 $f(z)=\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$

所以$z=i$是$f(z)$的三级极点。

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),i]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}[(z-i)^3 f(z)]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}(-3)(-4)(z+i)^{-5}$$

$$=-\frac{3i}{16}$$

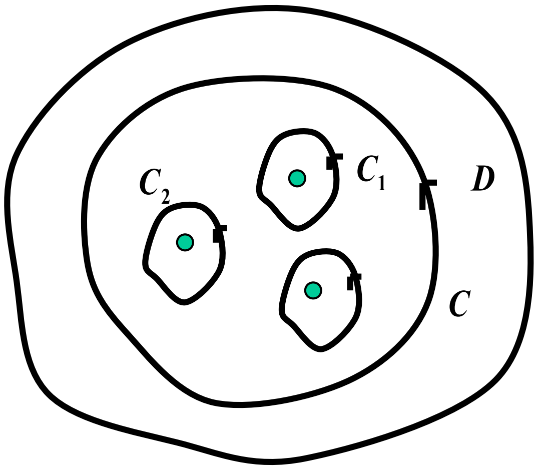
三、留数定理

定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 z_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 外处处解析, C 为 D 内包围各奇点的一条正向简单闭曲线, 则

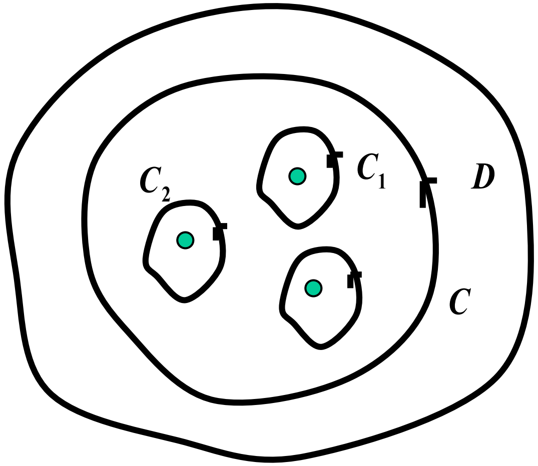
$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

证明:

把 C 内的孤立奇点 z_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 用互不相交且互不包含的正向简单闭曲线 C_k 围绕起来。



由复合闭路定理及留数定义，



$$\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]}$$

留数定理的重要作用之一，就是把计算封闭路径 C 上的积分化为求被积函数在 C 内各孤立奇点处的留数。

例6　计算积分 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz \quad C:|z|=2$

解： 由于 $f(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$ 有两个一级极点 1、-1，而且它们都在圆周 C 内

所以 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),1]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-1]\}$

而 $\mathrm{Re}\,s[f(z),1] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1} = \frac{e}{2}$

$\mathrm{Re}\,s[f(z),-1] = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{ze^z}{z^2-1} = \frac{e^{-1}}{2}$

于是 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right) = 2\pi i\,\mathrm{ch}\,1$

例7　求 $\oint_{|z|=6} \tan z dz$

解： $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 的奇点为 $z_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

由于　$\cos z\big|_{z=z_k} = 0$

$$(\cos z)' = -\sin z\big|_{z_k} = (-1)^{k+1} \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

所以 $z = z_k$ 为 $\tan z$ 的一级极点,

$$\operatorname{Res}[\tan z, z_k] = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z_k} = -1$$

由于在$|z|<6$内的极点有$z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\quad(k=0,\pm1,-2)$

于是,由留数定理有

$$\oint_{|z|=6}\tan z\,dz=2\pi i(-1-1-1-1)=-8\pi i$$

例8　计算积分 $\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz$

解： 显然, $z=0$ 是 $f(z)=\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}$ 的孤立奇点,而且

其它使 $1-e^z=0$ 的点 $z_k=2k\pi i$ 都不在 $|z|=1$ 内 $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$。

所以 $$\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz=2\pi i\cdot\operatorname{Re}s[f(z),0]$$

将 $\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}$ 在 $0<|z|<1$ 内展开成罗朗级数：

$$\frac{z\sin z}{(1-e^{z})^{3}}=\frac{z\left(z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\cdots\right)}{-\left(z+\frac{z^{2}}{2!}+\cdots\right)^{3}}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{\left(1-\frac{z^{2}}{3!}+\frac{z^{4}}{5!}-\cdots\right)}{-\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)^{3}}$$

$$=-\frac{h(z)}{z}$$

$h(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $h(0)\neq 0$

所以, $z=0$ 是 $\frac{z\sin z}{(1-e^{z})^{3}}$ 的一级极点。

于是得到：

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\left(-\frac{h(z)}{z}\right)=-h(0)=-1$$

从而有：$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^{z})^{3}}dz=2\pi i\cdot(-1)=-2\pi i$

例9　计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$

解: $z=1$ 是 $f(z)$ 的一级极点

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\sin 1$$

由于 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}$ 不存在且不为 ∞

所以, $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

求 $f(z)$ 罗朗展开式中的系数 a_{-1}：

由于

$$\frac{1}{z-1}=-\left(1+z+\cdots z^n+\cdots\right)$$

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

所以
$$a_{-1}=-1+\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}-\cdots$$
$$=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots\right)$$
$$=-\sin 1$$

于是得到：

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz=2\pi i\{\operatorname{Re}s[f(z),1]+\operatorname{Re}s[f(z),0]\}$$
$$=2\pi i[\sin 1-\sin 1]=0$$

例10　计算积分 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^{101}(1-z^2)} dz$

解： $f(z) = \frac{1}{z^{101}(1-z^2)}, z = 0$为101阶极点

在$0<|z|<1$内：

$$f(z) = \frac{1}{z^{101}} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{z^{101}}(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots)$$

$a_{-1} = 1$　　　$\mathrm{Res}[f(z),0] = 1$

原式$= 2\pi i$

四、在无穷远点的留数

设函数 $f(z)$在圆环域 $R<|z|<\infty$内解析, C为圆环域内绕原点的任何一条简单闭曲线, 则积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z$$

的值与C无关, 称其为$f(z)$在∞点的留数, 记作

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz}$$

C^-理解为圆环域内绕∞的任何一条简单闭曲线。

$f(z)$在圆环域 $R<|z|<\infty$内解析：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n \Rightarrow$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz \quad =-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)dz=-a_{-1}$$

这说明，$f(z)$在∞点的留数等于它在∞点的去心邻域 $R<|z|<+\infty$内洛朗展开式中 z^{-1} 的系数变号.

注：当∞为可去奇点时，$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$不一定为零.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$, ∞为可去奇点。

$f(z)$在$1<|z|<+\infty$内展开为Lauren级数:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}[f(z),\infty]=-a_{-1}=1$$

定理 如果 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，那末 $f(z)$ 在所有各奇点(包括∞点)的留数总和必等于零.

证：除∞点外，设 $f(z)$ 的有限个奇点为 $z_k(k=1,2,\ldots,n)$. 且 C 为一条绕原点的并将 $z_k(k=1,2,\ldots,n)$ 包含在它内部的正向简单闭曲线

则根据留数定理与在无穷远点的留数定义，有

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)dz\quad=0$$

无穷远点留数的计算公式:

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]}$$

上述定理与公式为我们提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法, 在很多情况下, 它比利用上一段中的方法更简便.

因此, $\operatorname{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=-\operatorname{Res}[f(z),\infty]$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=a_{-1}$$

C为包含$|z|=R$的任一正向简单闭曲线

例4 计算下列各函数在∞点处的留数.

11

$$(1)\ \sin\frac{1}{z} \qquad (2)\ \frac{e^z}{z^2-1}$$

解:

$$(1)\ \mathrm{Re}\,s\left[\sin\frac{1}{z},\infty\right]=-\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\sin z}{z^2},0\right]$$

$$=-\lim_{z\to 0}\left(z\cdot\frac{\sin z}{z^2}\right)=-1$$

$$\text{或}\because \sin\frac{1}{z}\ \underset{L-\text{展开}}{\overset{0<|z|<\infty}{=}}\ \frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots$$

$$\therefore C_{-1}=1,\ \mathrm{Re}\,s[\sin\frac{1}{z},\infty]=-1$$

$$(2)\quad Res\left[\frac{e^z}{z^2-1},\infty\right]$$

$$=-\left[Res\left(\frac{e^z}{z^2-1},1\right)+Res\left(\frac{e^z}{z^2-1},-1\right)\right]$$

$$=-\left[\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+1)}+\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{e^z}{(z-1)(z+1)}\right]$$

$$=-\left(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2}\right)=\frac{e^{-1}-e}{2}$$

例 12

计算(1) $\mathrm{I} = \oint_{|z|=4} \dfrac{z^{15}}{(z^4+2)^3(z^2+1)^2} dz$

解: $|z| < 4$内有6个极点: $\pm i$(二阶), $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$(三阶)

$$I = -2\pi i \operatorname{Re} s[f(z), \infty]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Re} s[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}, 0]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Re} s[\frac{1}{z(1+2z^4)^3(1+z^2)^2}, 0]$$

$$= 2\pi i$$

(2) 计算积分$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$, C为正向圆周：$|z|=2$

解：$\frac{z}{z^4-1}$在$|z|=2$的外部除∞外无奇点，

所以$\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z^2}\frac{z^{-1}}{z^{-4}-1}=\frac{z^{-3}}{z^{-4}-1}=\frac{z}{1-z^4}$

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz=-2\pi i \operatorname{Re}s[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i \operatorname{Re}s[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=2\pi i \operatorname{Re}s[\frac{z}{1-z^4},0]=0$$

(3) $\oint_C \dfrac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(3-z)}$ $C:|z|=2$正向

解: $f(z)$的奇点为$z=-i,1,3,\infty,$

只有$-i$，1在C内，而3，∞在C外

$$\therefore \text{原式} = -2\pi i\left\{Res\left[f(z),3\right]+Res\left[f(z),\infty\right]\right\}$$

$$= -2\pi i\left\{\lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(3-z)} - Res\left[\frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(3z-1)},0\right]\right\}$$

$$= -2\pi i\left(\frac{-1}{2(3+i)^{10}}+0\right)=\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}$$

§ 5.3 留数在定积分计算中的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 型积分

其中 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 是关于 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数。

求解思路： 第一, 先将积分转化为复变量的围线 (封闭路径)积分;

第二, 利用留数定理将复变量的围线积分转化为留数问题, 并计算留数得到原积分值。

令 $z=e^{i\theta}$ 则

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$$

从变换 $z=e^{i\theta}$ 知, 当 θ从 0 变到 2π 时, z 恰好沿单位圆周 $C:|z|=1$ 的正向绕一周, 所以有:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_C R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}dz$$

若有理函数 $f(z)=R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}$ 在$C:|z|=1$的

内部有 n 个孤立奇点 z_k $(k=1,2,\cdots,n)$（在圆周上无奇点），

由留数定理:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

注:有理函数的孤立奇点均为极点或可去奇点(可以证明)

例1 求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

解： 令 $z=e^{i\theta}$， $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz$$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz$$

被积函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+4z+1}$ 在 $|z|=1$ 内只有一个一级极点 $z=-2+\sqrt{3}$

所以

$$I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),-2+\sqrt{3}]$$

$$=4\pi\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\left\{[z-(-2+\sqrt{3})]\cdot\frac{1}{z^2+4z+1}\right\}$$

$$=4\pi\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{1}{z-(-2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

例2　求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta \quad (0<p<1)$

解：令 $z=e^{i\theta}$，由于 $\cos 2\theta=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}=\frac{z^2+z^{-2}}{2}$

所以 $I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{1}{iz}dz$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2i(z^3-pz^2-pz^4+p^2z^3)}dz$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}dz$$

在 $|z|=1$ 内被积函数 $f(z)$ 有二个极点 0 和 p,

$z=0$ 二级极点, $z=p$ 一级极点

而且 $\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right]$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{(1+z^4)}{2i(1-pz)(z-p)}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z-pz^2-p+p^2z)4z^3-(1+z^4)(1-2pz+p^2)}{2i(z-pz^2-p+p^2z)^2}$$

$$=-\frac{1+p^2}{2ip^2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),p]=\lim_{z\to p}(z-p)f(z)$$

$$=\lim_{z\to p}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)}=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}$$

因此, 有 $I=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),p]\}$

$$=2\pi i\left\{-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}\right\}=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}$$

注： 若$R(\cos\theta,\sin\theta)$为θ的偶函数，

$$\boxed{\text{则}\int_0^{\pi} R d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R d\theta \overset{z=e^{i\theta}}{=} \oint_{|z|=1} f(z)dz}$$

例3 计算$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{5-4\cos x}dx$

解： $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{5-4\cos x}dx=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5-4\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz$

$$=-\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z\left(2z^2-5z+2\right)}dz=-\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{2z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}dz$$

$$=\frac{1}{8i}\cdot 2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Re}\,s[f(z),\frac{1}{2}]\}$$

$$=-\frac{\pi}{4}\left[\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z^2+1}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}+\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{z^2+1}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{5}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

例4 计算$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos 2x}$, $0<\varepsilon<$的值.

解：令 $\theta=2x, d\theta=2dx;\ x:0\to\pi, \theta:0\to 2\pi$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{i}\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon},\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}]$$

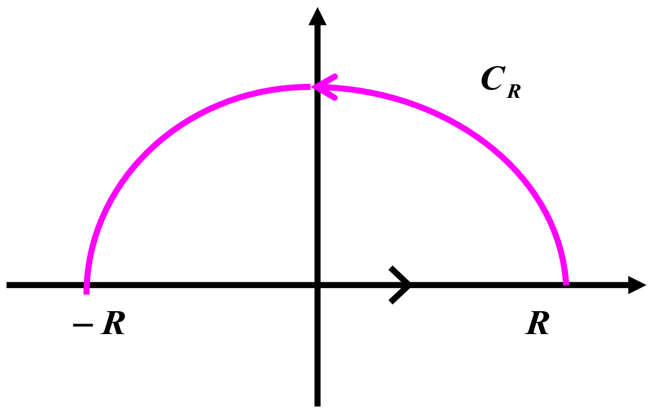
$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 型积分

其中, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函数, 并且 $Q(x)$ 的次数高于 $P(x)$ 的次数至少2次以上, 且 $Q(x)$ 在实轴上没有零点

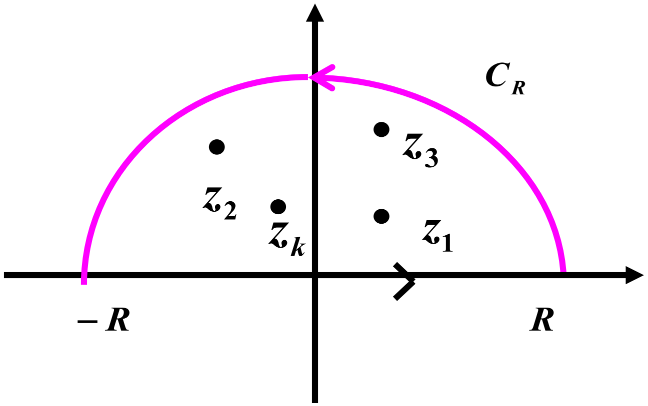
解决方法:

选取积分路线 C 为上半圆周 $C_R: |z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0$ 与实轴上线段 $-R \leq x \leq R, \operatorname{Im} z = 0$ 围成的闭曲线。



被积函数取为$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$,

取 R 充分大, 使 C 所围区域包含 $f(z)$ 在上半平面内的一切孤立奇点 z_k $(k=1,2,\cdots,n)$。



由留数定理知:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

即

$$\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

可以证明：当 $R\to+\infty$ 时，$\int_{C_R} f(z)dz=0$

事实上，在 C_R 上，令 $z=re^{i\theta}$，则

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=\int_0^{\pi}\frac{P(re^{i\theta})ire^{i\theta}}{Q(re^{i\theta})}d\theta$$

由于 $Q(z)$ 的次数高于 $P(z)$ 的次数至少2次以上，所以

$$|z|=r\to\infty\text{时},\ \frac{zP(z)}{Q(z)}=\frac{P(re^{i\theta})ire^{i\theta}}{Q(re^{i\theta})}\to 0$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=\lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{P(re^{i\theta})ire^{i\theta}}{Q(re^{i\theta})}d\theta=0$$

因此有 $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]}$$

若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为偶函数, 则

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]}$$

求解步骤：

（1）写出$f(x)$对应的复变函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$；

（2）找出复变函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在上半平面的极点，

求其留数；

（3）套用公式$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s[f(z),z_k]$.

例5　计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx \quad (a>0,b>0)$

解：　令 $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$

则$f(z)$上半平面有两个一级极点：$z_1=ai, z_2=bi$

$$I=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),ai]+\mathrm{Res}[f(z),bi]\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{a}{2i(a^2-b^2)}+\frac{b}{2i(b^2-a^2)}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{a+b}$$

例6 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$

解： $f(x)=\frac{1}{x^4+1}$为偶函数， 所以$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$

令 $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$， 它在上半平面有两个一级极点：

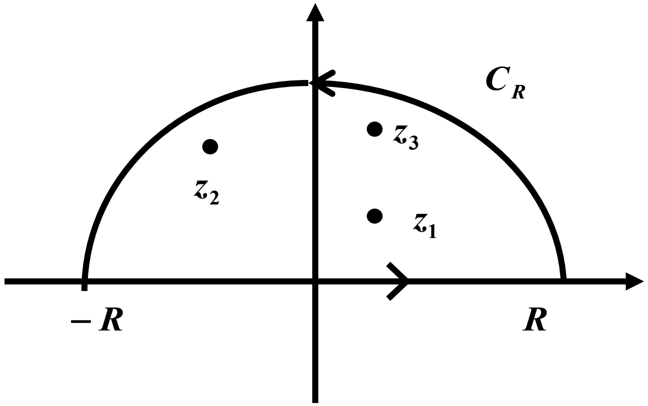
$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},\ z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$\text{所以}I=\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),e^{\frac{\pi}{4}i}]+\mathrm{Res}[f(z),e^{\frac{3\pi}{4}i}]\right\}$$

$$=\pi i\left[\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}+\frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}}\right]=\frac{\pi}{4}i(e^{-\frac{3\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i})=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx \ (\alpha>0)$ 型积分

其中, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函数，$Q(x)$ 的次数比 $P(x)$ 次数至少高一次，$Q(x)\neq 0$。



解决方法：

选取积分路线 C 为上半圆周 $C_R: |z|=R, \operatorname{Im} z\geq 0$ 与实轴上线段 $-R\leq x\leq R, \operatorname{Im} z=0$ 围成的闭曲线。

被积函数取为 $f(z)e^{i\alpha z}$, 取 R 充分大, 使 C 所围区域包含 $f(z)e^{i\alpha z}$ 在上半平面内的所有孤立奇点 $z_k \ (k=1,2,\cdots,n)$

由留数定理：

$$\oint_C f(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k]$$

即

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}dx + \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k]$$

可以证明：
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0$$

于是有：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k]}$$

由于 $e^{i\alpha x}=\cos\alpha x+i\sin\alpha x$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x dx$$

由此可以看出，要计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x dx$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x dx$，只要求出 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx$ 的实部或虚部。

注：$f(z)e^{i\alpha z}$ 与 $f(z)$ 具有相同的极点。

例7　计算 $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$

解：因 $\frac{\cos x}{x^2+a^2}$ 为偶函数，所以

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$$

先计算 $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}e^{ix}dx \quad (a>0)$

由于 $f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ 在上半平面有一级极点 ai

所以 $$J = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}, ai\right]$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi}{a}e^{-a}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(J)$$

$$= \frac{\pi}{2a}e^{-a}$$

例8　计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$

解：先计算 $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2-2x+10}e^{ix}dx$

因为 $\frac{z}{z^2-2z+10}$ 在上平面有一个一级极点 $z=1+3i$

所以
$$J=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10},1+3i\right]$$
$$=2\pi i\cdot\frac{1+3i}{6i}e^{i(1+3i)}$$
$$=\frac{\pi}{3}e^{-3}[(\cos 1-3\sin 1)+i(3\cos 1+\sin 1)]$$

故　$I=\operatorname{Im}(J)=\frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1+\sin 1)$

小结 (1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ R是三角函数有理式

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right].$$

z的有理函数，且在单位圆周上分母不为零。

包围在单位圆周内的孤立奇点.

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

1) $f(z)$ 在实轴上无奇点;

2) $f(z)$ 在上半平面上存在有限个奇点外是解析的;

3) 当分母比分子高至少2次

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{imz}, z_k].$$

条件： 设$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理函数，$Q(z)$在实轴上没有零点，多项式$Q(z)$的次数至少比$P(z)$的次数高1次，$z_1, z_2, \cdots, z_n$是$f(z)$在上半平面内的所有孤立奇点，则对任何实数$m>0$,

思考练习：

计算下列积分

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx \quad (2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx \quad (a>0,b>0)$$

答案：

$$(1)\frac{\pi\cos 2}{e} \quad (2)\pi e^{-ab}$$

5.4 对数留数与辐角原理

- 一、对数留数
- 二、辐角原理
- 三、儒歇定理

一、对数留数

1. 定义 具有下列形式的积分:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

称为$f(z)$关于曲线C的对数留数.

说明: 1) 对数留数即函数 $f(z)$的对数的导数 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在C内孤立奇点处的留数的代数和;

2) 函数 $f(z)$的零点和奇点都可能是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的奇点.

引理5.1 (1)设a为$f(z)$的n级零点，则a必为$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级级点，并且 $\operatorname{Re}s[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a]=n$

(2)设b为$f(z)$的m级极点，则b必为$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级级点，并且 $\operatorname{Re}s[\dfrac{f'(z)}{f(z)},b]=-m$

证明 (1)若a为$f(z)$的n级零点，则在点a的邻域内有

$$f(z)=(z-a)^n g(z),$$

其中$g(z)$在点a的邻域内解析,且$g(a)\neq 0$.于是

$$f'(z)=n(z-a)^{n-1}g(z)+(z-a)^n g'(z),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)};$$

$\boxed{f(z)=(z-a)^n g(z),}$

由于$\dfrac{g'(z)}{g(z)}$在点a的邻域内解析,

故a必为$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]=n$

(2)若b为$f(z)$的m级极点，则在点b的邻域内有

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-b)^m},$$

其中$h(z)$在点b的邻域内解析，且$h(b)\neq 0$.于是

$$f'(z)=-\frac{mh(z)}{(z-b)^{m+1}}+\frac{h'(z)}{(z-b)^m},$$

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-b)^m},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{m}{z-a}+\frac{h'(z)}{h(z)};$$

由于$\dfrac{h'(z)}{h(z)}$在点b的邻域内解析，

故b必为$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-m$

定理5.13 设C是一条简单闭曲线，且若$f(z)$满足

(1)在C的内部除去有限个极点以外也处处解析,

(2) $f(z)$在C上解析且不为零,

则有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \underbrace{M}_{f(z)\text{在}C\text{内的零点个数}} - \overbrace{N}^{f(z)\text{在}C\text{内的极点个数}}$$

其中: ***m*级零点或极点算作*m*个零点或极点.**

证明　设$a_k(k=1,2,\cdots p)$为$f(z)$在C内部的不同零点，其级数相应的为m_k;

设$b_j(j=1,2,\cdots q)$为$f(z)$在C内部的不同极点，其级数相应的为n_j;

由引理5.1可知,

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在C的内部及C上除去在C内部有一级极点$a_k(k=1,2\cdots p)$及$b_j(j=1,2\cdots q)$外均解析,

故由留数定理及引理5.1得,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)},a_k] + \sum_{j=1}^{q}\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)},b_j]$$

$$= \sum_{k=1}^{p} m_k + \sum_{j=1}^{q}(-n_j)$$

$$= M - N$$

例1 **计算积分** $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{z^9}{z^{10}-1}dz.$

解 设 $f(z)=z^{10}-1,$

则 $f(z)$ 在 $|z|=4$ 上解析且不等于零,

$f(z)$ 在 $|z|=4$ 内部解析, 有10个零点,

故 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz=\frac{1}{10}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{(z^{10}-1)'}{z^{10}-1}dz$$

$$=\frac{1}{10}\{M-N\}$$

$$=\frac{1}{10}\{10-0\}=1.$$

例2 求函数 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ 关于圆周 $|z|=\pi$ 的对数留数.

解 令 $1+z^2=0$ 得, $f(z)$ 有两个一级零点 $i,-i$.

再令 $g(z)=1-\cos 2\pi z=0$ 得

$g(z)$ 有无穷多个零点 $z_n=n, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

且 $g'(n)=0,\quad g''(n)=4\pi^2\neq 0,$

所以这些零点是二级零点，从而是 $f(z)$ 的二级极点.

因为在圆周$|z|=\pi$的内部有

$f(z)$的两个一级零点 和七个二级极点：

$$z_0=0,\quad z_1=1,\quad z_2=-1,\quad z_3=2,$$

$$z_4=-2,\quad z_5=3,\quad z_6=-3.$$

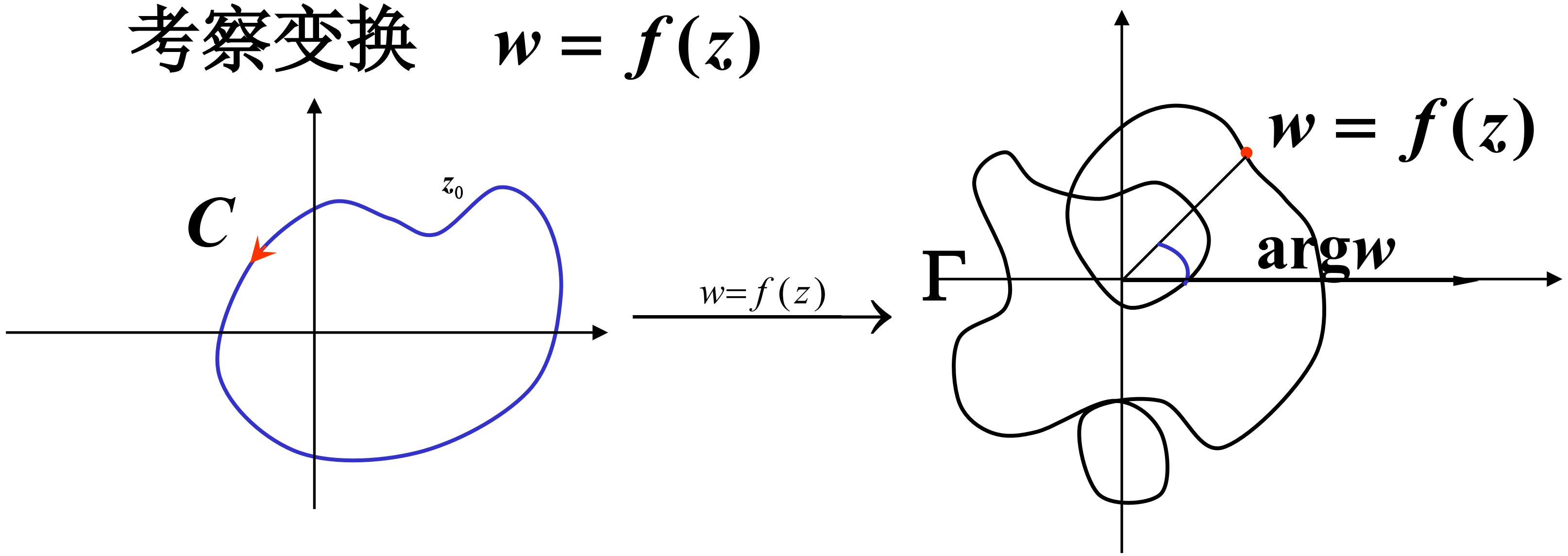
所以由对数留数公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=2-7\times 2=-12.$$

二、辐角原理

1. 对数留数的几何意义

考察变换 $w = f(z)$



Γ 不一定为简单闭曲线, 其可按正向或负向绕原点若干圈. $f(z)$在C上不为零, 则Γ不经过原点.

因为 $\mathrm{dLn}f(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z,$

所以 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{dln}f(z).$

$=\dfrac{1}{2\pi i}\Big[$当z沿C的正向绕行一周$\ln f(z)$的改变量$\Big]$

等于零

$=\dfrac{1}{2\pi i}\Big[$当z沿C的正向绕行一周 $\ln|f(z)|$ 的改变量

单值函数

$+i\arg f(z)$的改变量$\Big]$.

若将z沿C的正向绕行一周，$f(z)$的辐角的改变量

记为 $\Delta_C \arg f(z)$

由定理5.13及对数留数的几何意义得

$$M - N = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

当$f(z)$在C内解析时，$N = 0$

$$M = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

可计算$f(z)$在C内零点的个数

定理5.14 （辐角原理）

在定理5.13条件下, $f(z)$在周线C内部的零点个数与极点个数之差,等于当z沿C正向绕行一周后, $\arg f(z)$的改变量$\Delta_C \arg f(z)$除以2π,即

$$M-N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

注 若$f(z)$在C上及C内解析,且$f(z)$在C上不为零,则

$$M=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

三、儒歇定理

定理5.15(儒歇定理)

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上和 C 内解析，且在 C 上满足条件 $|f(z)|>|g(z)|$, 那么在 C 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 的零点的个数相同. （证明略）

说明:

利用此定理可对两个函数的零点个数进行比较，进而判定某个方程根的个数。

例3 证明 $P(z)=z^7-5z^4+z^2-z$在$|z|=1$内有4个根.

证明 令$f(z)=-5z^4$, $\varphi(z)=z^7+z^2-z$,

则$f(z)$及$\varphi(z)$在z平面解析,

且在$|z|=1$上

$$|\varphi(z)|\le|z|^7+|z|^2+|z|=3 \ < \ |f(z)|=5|z|^4=5,$$

$$\therefore M(P,C)=M(f,C)=4.$$

例4 试确定方程 $z^4-5z+1=0$

在圆环$1<|z|<2$内根的个数.

解 （1） 设$f_1(z)=-5z$, $\varphi_1(z)=z^4+1$,

则$f_1(z)$及$\varphi_1(z)$在z平面解析,

且在$C_1:|z|=1$上有

$$|\varphi_1(z)|\le|z|^4+1=2<5=5|z|=|f_1(z)|,$$

所以$M(f_1+\varphi_1,C_1)=M(f_1,C_1)=1$,

即方程$z^4-5z+1=0$在$|z|=1$内有一个根.

（2） 设$f_2(z)=z^4$, $\varphi_2(z)=-5z+1$,

则$f_2(z)$及$\varphi_2(z)$在z平面解析,

且在$C_2: |z| = 2$上有

$$|\varphi_2(z)| \le 5|z| + 1 = 11 < 16 = |z|^4 = |f_2(z)|,$$

所以$M(f_2 + \varphi_2, C_2) = M(f_2, C_2) = 4,$

即方程$z^4 - 5z + 1 = 0$在$|z| = 2$内有四个根.

(3) 而在$|z| = 1$上有

$$|z^4 - 5z + 1| \ge 5|z| - |z^4 + 1|$$

$$\ge 5 - 2 = 3 > 0,$$

即在$|z| = 1$上方程$z^4 - 5z + 1 = 0$无根.

故方程$z^4 - 5z + 1 = 0$在$1 < |z| < 2$内有三个根.

本章要求

(1) 会求函数的孤立奇点, 并判别其类型;

(2) 会求函数在孤立奇点处的留数;

(3) 利用留数定理计算 $\oint_C f(z)dz$;

(4) 利用留数定理计算三类实变量积分。

（5） 熟悉对数留数及其与函数的零点及极点的关系;
了解辐角原理与儒歇定理.