华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 5 册）

班级__________学号__________姓名__________任课教师__________

第九次作业

教学内容：5.1 孤立奇点　5.2.1 留数的定义　5.2.2 极点处留数的计算

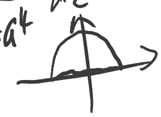
1．填空题：　$e^z = 1+i.$

（1）函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-(1+i)}$ 的全部孤立奇点是 $\frac{1}{2}\ln 2+(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i$

（2）$z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z - z}$ 的 3 级极点.

（3）$z=-2$ 是 $\dfrac{z^3-8}{(z^2-4)^3}$ 的 3 级极点.

$2\pi i\oint_C \frac{1}{z^4+a^4}dz$



（4）函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}(a>0)$ 在上半平面内奇点的留数之和为 0.

（5）$\mathrm{Res}[z\cos\dfrac{1}{z},0]=$ $+\frac{1}{2}$.　$\cos z^{-1} = 1-\frac{1}{2!z^2}\cdots$

2．指出下列函数的奇点及其类型（不考虑 ∞ 点），若是极点，指出它的级.

(1) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$;　$n\geq 1.$

$z^n=-1$ 即 $z=\sqrt[n]{-1}=\cos\left(\frac{1}{n}(2k+1)\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{n}(2k+1)\pi\right)$

$= e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}.$　　$k=0,1\ldots n-1$

为一级极点

☆ (2) $\frac{\ln(1+z)}{z}$　$z=0$, $z=-1$.

当 $z=0$ 时, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1$ 为有限值, 为可去奇点.

当 $z=-1$ 时 $\lim\limits_{z\to -1}\frac{\ln(1+z)}{z}=\infty$, 为极点. ?

$\frac{\ln(1+z)}{z}=\frac{-1}{1-(z+1)}$.

(3) $e^{\frac{z}{1-z}}$

奇点: $z=1$.

$\lim\limits_{z\to 1} e^{\frac{z}{1-z}}$ 不存在, 为本性奇点

(4) $\frac{\sin z}{z^3}$; 奇点: $z=0$.

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z^2}=\infty$. 为极点.

将 $\sin z$ 展开为 $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\cdots$　$\frac{\sin z}{z^3}=z^{-2}+\cdots$

∴ 为 2 级极点.

(5) $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$; 奇点: $z=0$, $z=2k\pi i$

$\frac{1}{z^2(e^z-1)}=z^{-2}\cdot\left(z^{-1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=z^{-1}+\cdots$

∴ 为三级极点　而 $z=2k\pi i$ 为一级极点.

(6) $\frac{e^z \sin z}{z^2}$ 奇点：$z=0$. $\lim_{z\to 0}\frac{e^z\sin z}{z^2}=\infty$ 为极点.

展开，得原式 $= z^{-2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=z^{-1}+\cdots$

$\therefore$ 为一级极点

3. 证明：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

展开 $f(z)$ 得 $f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\cdots$

$f'(z)$ 设 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$. $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$.

$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)$.

令 $\phi(z)=m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)$ 则 $f'(z)=(z-z_0)^{m-1}\phi(z)$

$\phi(z_0)\neq 0$, 即 $\cdots$

4. 求下列函数在指定奇点处的留数.

(1) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$, $z=0$;

$=-z^{-4}\left(2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\cdots\right)$

易知 $a_{-1}=-\frac{2^3}{3!}=-\frac{4}{3}$.

$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]=-\frac{4}{3}$.

(2) $\dfrac{\cos z}{z-i}$, $z=i$;

$$=\left(\cos i+\frac{(-\sin i)(z-i)}{1!}+\cdots\right)(z-i)$$

得 $a_{-1}=\cos i=\operatorname{ch}1$.

$\therefore \operatorname{Res}\cdots=\operatorname{ch}1$.

(3) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$, $z=0$

$\lim\limits_{z\to 0} z^2\sin\frac{1}{z}$ 不存在，为本性奇点.

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(z^{-1}-\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-5}}{5!}-\cdots\right),$$

$$a_{-1}=\frac{-1}{3!}=-\frac{1}{6}.$$

$\therefore \operatorname{Res}\cdots=-\frac{1}{6}$

（4） $\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$, $z=\pm i$;

三级极点.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3}, i\right]=\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]=\frac{-3i}{16}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3}, -i\right]=\frac{3i}{16}$$

(5) $e^{\frac{z}{z-1}}$，$z=1$；本性奇点．令 $u=\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$.

$=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots$

$=1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots$

$\therefore \mathrm{Res}\ \cdots = a_{-1}=1$

(6) $e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}$，$z=0$.

$=\left(1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-3}}{3!}+\cdots\right)\left(z^{-1}-\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-5}}{5!}-\cdots\right)$

$\mathrm{Res}\ \cdots = a_{-1}=1.$

☆ **5.** 判断 $e^{z+\frac{1}{z}}$.的孤立奇点的类型，并求其留数.

奇点 $z=0$．$z=\infty$.

$e^{z+\frac{1}{z}}=e^{z}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots\right)$

由于负幂项无穷项，因此为本性奇点.

$\mathrm{Res}\left[e^{z+\frac{1}{z}},0\right]=a_{-1}=1+\cancel{\frac{1}{1!2!}}+\frac{1}{2!3!}+\cdots$

$\mathrm{Res}\left[e^{z+\frac{1}{z}},\infty\right]=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

6. 设 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=A$，证明：

$$\mathrm{Res}[f(z)\varphi(z),z_0]=A\varphi(z_0)$$

$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=A.$

令 $g(z)=f(z)\varphi(z)$，由 $\varphi(z)$ 解析，$\varphi(z)$ 洛朗展开无负幂项，

$\therefore z_0$ 仍为 $g(z)$ 的一级极点.

$\mathrm{Res}[f(z)\varphi(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\varphi(z)=A\varphi(z_0).$

7. 已知 $z=0$ 是函数 $f(z)$ 的 n 级极点，证明 $\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)},0]=-n.$

设 $f(z)=z^{-n}g(z)$，$g(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $g(0)\neq 0$.

$\therefore \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-n}{z}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$

第十次作业

教学内容 5.2.3 留数定理；5.2.4 函数在无穷远点的留数

1. 填空题 $\left(1-\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-4}}{4!}-z^{-1}+\frac{z^{-3}}{3!}-\frac{z^{-5}}{5!}\right)z^{-2}.$

（1） $\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$ 的留数为 $\underline{\quad 0 \quad}$.

$-\left[\frac{2}{z(3z^2+1)},0\right]$

(2) $\frac{2z}{3+z^2}$ 在 $z=\infty$ 的留数为 $\underline{\quad -2 \quad}$.

(3) $e^{\frac{1}{z^2}}$ 在 $z=\infty$ 的留数为 $\underline{\quad 0 \quad}$.

$-\left[\frac{e^{z^2}}{z^2},0\right].$ $1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}$

$(1+z^2+z^4+\cdots)(1+\frac{z^{-1}}{1!}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots)$

(4) $\frac{e^z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 的留数为 $2i\sin i$. $-\left[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2(1-z^2)}, 0\right]$

2. 利用留数定理计算下列积分.

(1) $\oint_C \frac{1}{1+z^4}dz$, $C: x^2+y^2=2x$; $z^4=-1$. $z=e^{\frac{(2k+1)\pi}{4}i}$. $k=0,1,2,3$.

在C内奇点有 $e^{\frac{\pi}{4}i}$. $e^{\frac{7}{4}\pi i}$ 一级极点!

$\therefore \oint_C \frac{1}{1+z^4}dz = 2\pi i\{Res[\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{\pi}{4}i}] + Res[\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{7}{4}\pi i}]\}$.

$= 2\pi i[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)+\frac{\sqrt{2}}{8}(i-1)] = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$.

(2) $\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$, $C: |z|=4$; 奇点: $z=1$, $z=\pm 3i$. 皆在C内.

$\therefore \oint_C \cdots = -2\pi i\, Res[\cdots, \infty]$

$= 2\pi i\, Res\left[\frac{3+2z^3}{(1-z)(1+9z^2)z^2}, 0\right]$

$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{3+2z^3}{(1-z)(1+9z^2)} =$ 计算

不好算, 可分为三个奇点计算

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{z}dz$, $C: |z|=\frac{3}{2}$; $z=0$ 为可去奇点.

$\therefore \oint_C \frac{\sin z}{z}dz = 2\pi i\, Res[\frac{\sin z}{z}, 0] = 0$.

（4）$\oint_C \frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz$， $C:|z-i|=1$；

$z=i$ 为三级极点，在C内.

$\therefore$ 原式 $=2\pi i\,\mathrm{Res}[\cdots,i]$

$=2\pi i\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}\right]$

$=-\pi i\lim_{z\to i}\frac{1}{e+e^{-1}}\cdot 2\cos z=-\pi i$.

（5）$\oint_{|z|=1} z^n\cos\frac{1}{z}dz$　n 是正整数.

$z=0$ 为本性奇点

原式 $=-2\pi i\,\mathrm{Res}[z^n\cos\frac{1}{z},\infty]=-2\pi i\,\mathrm{Res}[z^{-n-2}\cos z,0]$

为 $n+2$ 级极点.

$\therefore=-2\pi i\frac{1}{(n+1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\cos z=\begin{cases}0, & n\in odd\\ \frac{2\pi i}{(n+1)!}, & n\%4=1.\\ \frac{-2\pi i}{(n+1)!}, & n\%4=3.\end{cases}$

3.　计算下列积分，C 为正向圆周：

(1) $\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}dz$， $C:|z|=3$；

$z=\pm\sqrt{5}i$（三级极点），$z=e^{\frac{(2k+1)\pi}{4}i}$（二级极点）. 均在C内.

$\therefore$ 原式 $=-2\pi i\,\mathrm{Res}[\cdots,\infty]=+2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+5z^2)^3(1+z^4)^2z},0\right]$

0为 $\frac{1}{(1+5z^2)^3(1+z^4)^2z}$ 的1级极点，

$\therefore \mathrm{Res}[\cdots,0]=\left.\frac{1}{[(1+5z^2)^3(1+z^4)^2z]'}\right|_{z=0}=1$.

$\therefore$ 原式 $=+2\pi i$.

（2）$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz.$ $z=0$ 为本性奇点，$z=-1$ 也是

$$\therefore \oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}} = +2\pi i\, Res\left[e^{z}\cdot\frac{1}{(1+z)z^4}, 0\right]$$

$$= 2\pi i\, Res\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-z+z^2-z^3+\cdots\right)z^{-4}, 0\right]$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{6}-1+1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}\pi i.$$

（3）$\oint_{|z|=1}\frac{2idz}{z^2+2az-1}.$ $(a>1) = \oint_{|z|=1}\frac{2i}{(z+a)^2-(a^2+1)}dz$ $z=\sqrt{a^2+1}-a$ 为内部1级极点.

$$\therefore 原式 = 2\pi i\cdot 2i\cdot Res\left[\frac{1}{z^2+2az-1}, \sqrt{a^2+1}-a\right]$$

$$= 2\pi i\cdot 2i\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}$$

（4）$\oint_{|z|=8}\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)}dz.$ $z=0$ 为可去奇点. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)}=\frac{1}{2}.$

$\therefore$ 原式 $=2\pi i\cdot 0=0.$

部分题目答案

第九次作业

2． (1) $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} (k = 0,1,\cdots,n-1)$，一级极点；

(2) $z = 0$ 为可去奇点 ；

(3) $z = 1$ 为本性奇点；

(4) $z = 0$ 为二级极点;

(5) $z = 0$ 为三级极点； $z = 2k\pi i, (k = \pm1,\pm2,\cdots)$ 均为一级极点。

(6) $z = 0$ 是一级极点

4． (1) $-\frac{4}{3}$；

(2) $\cosh 1$；

(3) $-\frac{1}{6}$

(4) $\mathrm{Res}[\frac{1}{(1+z^2)^3}, i] = \frac{-3i}{16}$； $\mathrm{Res}[\frac{1}{(1+z^2)^3}, -i] = \frac{3i}{16}$；

（5） e

（6）1.

5. $\mathrm{Res}[e^{z+\frac{1}{z}}, 0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$； $\mathrm{Res}[e^{z+\frac{1}{z}}, \infty] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$

第十次作业

2． (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{i}$； (2) $6\pi\mathrm{i}$； (3) 0； （4） $-\pi\mathrm{i}$

$$(5)\ \mathrm{Res}[z^n \cos\frac{1}{z}, 0] = \begin{cases} 0 \quad n = 2k \\ (-1)^k \dfrac{2\pi i}{(2k)!}, n = 2k-1. \end{cases} (k = 0,1,2,.....)$$

3． (1) $2\pi\mathrm{i}$； （2） $-\frac{1}{3}$； （3） $-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}$ （4） 0