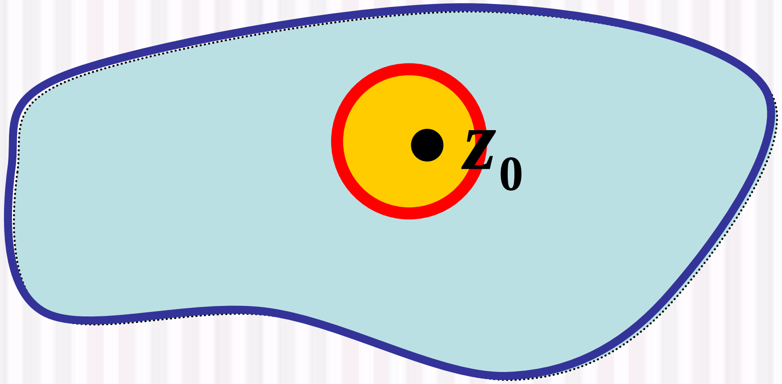
第二节　区　域

- 一、区域的概念
- 二、单连通域与多连通域
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、区域的概念

1. 邻域:

平面上以z_0为中心,δ(任意的正数)为半径的圆: $|z-z_0|<\delta$内部的点的集合称为z_0的邻域.



说明

包括无穷远点自身在内且满足$|z|>M$的所有点的集合,其中实数$M>0$,称为无穷远点的邻域.

2.去心邻域:

称由不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 所确定的点的集合为 z_0 的去心邻域.

说明

不包括无穷远点自身在内, 仅满足 $|z| > M$ 的所有点的集合, 称为无穷远点的去心邻域. 可以表示为 $M < |z| < +\infty$.

3.内点:

设 G 为一平面点集, z_0 为 G 中任意一点. 如果存在 z_0 的一个邻域, 该邻域内的所有点都属于 G, 那末 z_0 称为 G 的内点.

4.开集:

如果 G 内每一点都是它的内点, 那末 G 称为开集.

5.区域:

如果平面点集D满足以下两个条件, 则称它为一个区域.

(1) D是一个**开集**;

(2) D是**连通的**, 就是说D中任何两点都可以用完全属于D的一条折线连结起来.

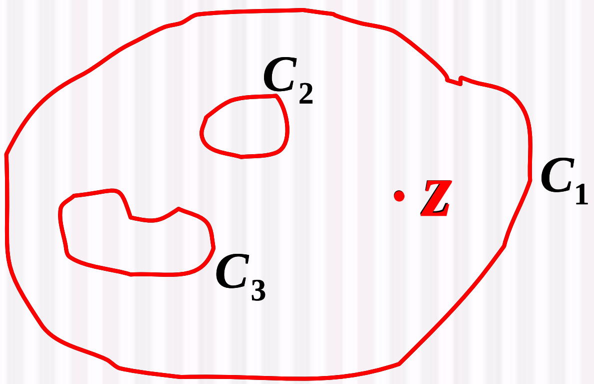
6.边界点、边界:

设D是复平面内的一个区域, 如果点P 的任一邻域总含有属于D和不属于D的点,这样的 P 点我们称为D的**边界点**.

D的所有边界点组成D的**边界**.

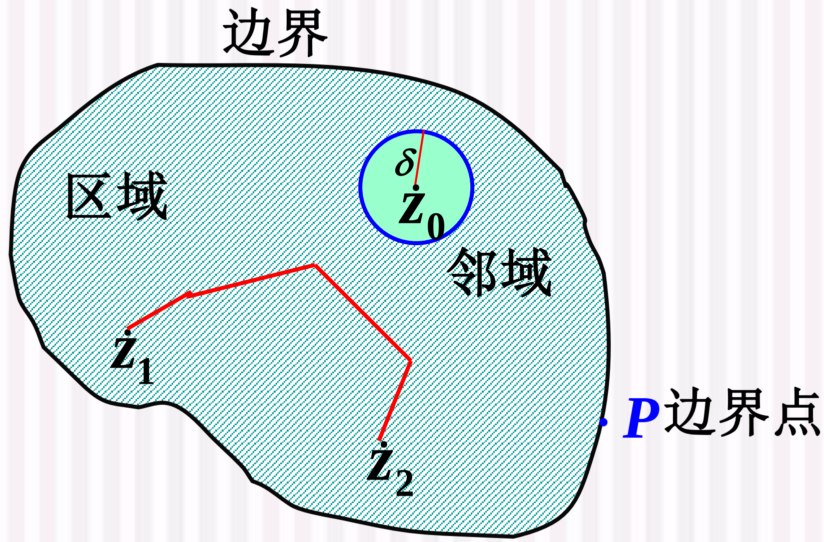
说明

(1) 区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.



(2) 区域D与它的边界一起构成**闭区域** $\overline{D}$.

以上基本概念的图示

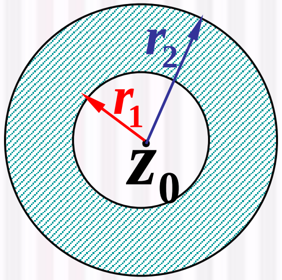


7.有界区域和无界区域:

如果一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面,即存在 $M>0$,使区域的每一个点都满足 $|z|<M$,那末 D 称为有界的,否则称为无界的.

课堂练习 判断下列区域是否有界?

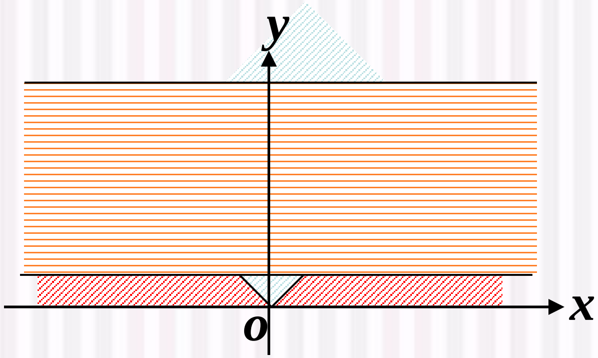
(1) 圆环域: $r_1 < |z - z_0| < r_2$;



(2) 上半平面: $\operatorname{Im} z > 0$;

(3) 角形域: $0 < \arg z < \varphi$;

(4) 带形域: $a < \operatorname{Im} z < b$.



答案 (1)有界; (2) (3) (4)无界.

二、单连通域与多连通域

1. 连续曲线:

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数, 那末方程组 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(a \le t \le b)$ 代表一条平面曲线, 称为连续曲线.

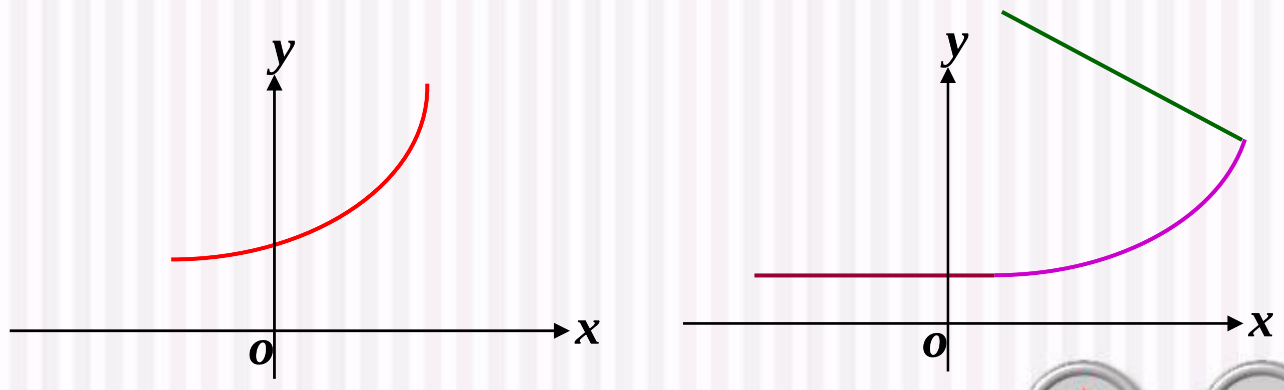
平面曲线的复数表示:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \quad (a \le t \le b)$$

2. 光滑曲线:

如果在 $a \le t \le b$ 上, $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的, 且对于 t 的每一个值, 有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$, 那末称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.



3. 简单曲线:

设$C: z = z(t)\ (a \le t \le b)$为一条连续曲线, $z(a)$与$z(b)$分别称为C的起点和终点.

对于满足$a < t_1 < b,\ a \le t_2 \le b$的$t_1$与$t_2$,当$t_1 \ne t_2$而有$z(t_1) = z(t_2)$时,点$z(t_1)$称为曲线$C$的重点.

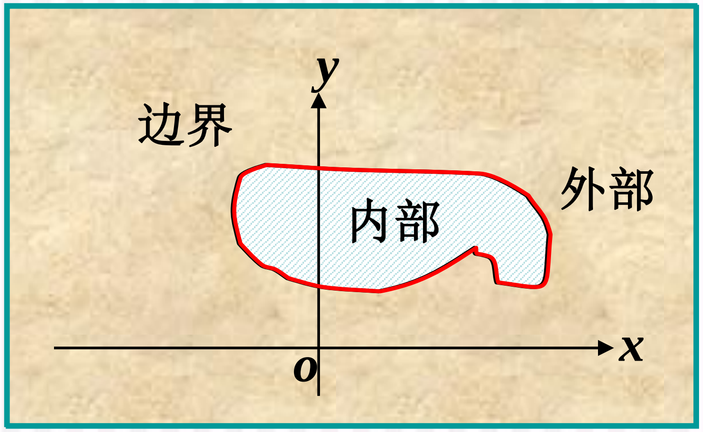
没有重点的曲线C称为简单曲线(或若尔当曲线).

如果简单曲线 C 的起点和终点重合,即 $z(a)=z(b)$,那末称 C 为简单闭曲线.

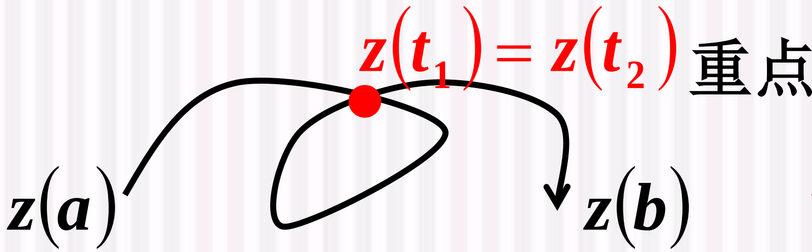
换句话说,**简单曲线自身不相交**.

简单闭曲线的性质:

任意一条简单闭曲线 C 将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.



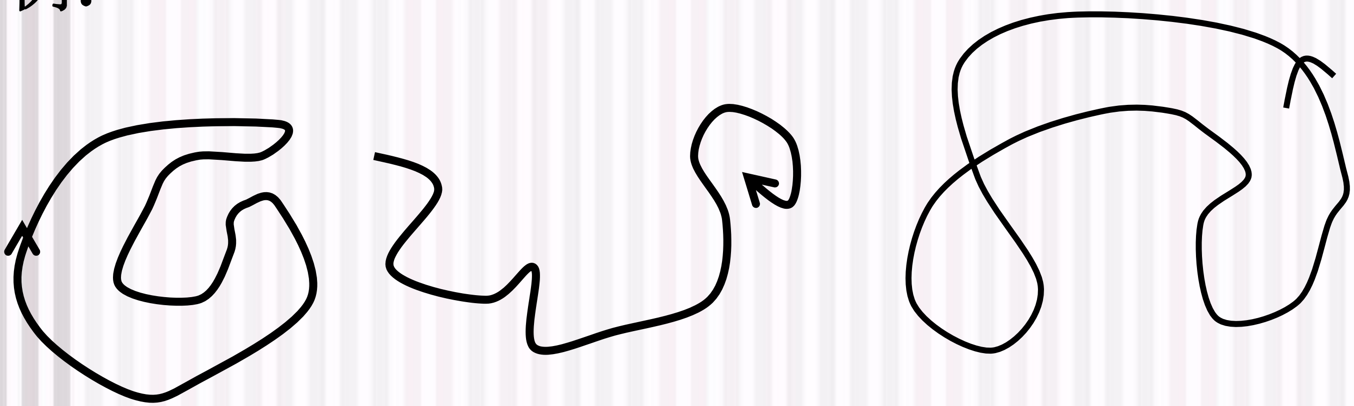
简单曲线或若尔当（Jardan）曲线: 没有重点的曲线



不简单、不闭

简单闭曲线：$z(a) = z(b)$ 的简单曲线

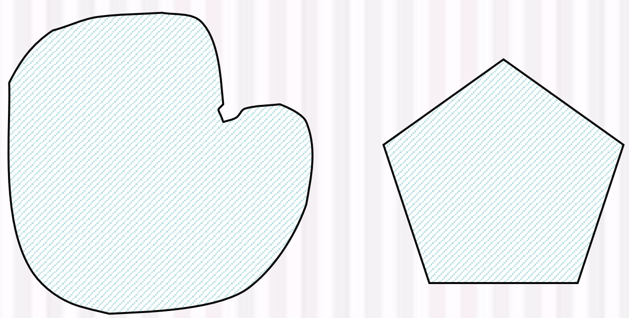
例：



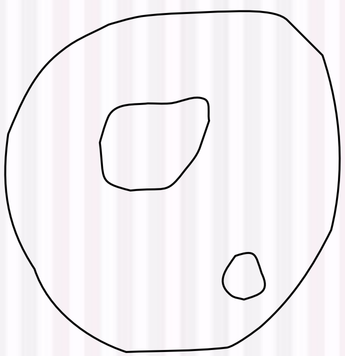
简单、闭　　　简单、不闭　　　不简单、闭

4. 单连通域与多连通域的定义:

复平面上的一个区域B, 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于B, 就称为单连通域. 一个区域如果不是单连通域, 就称为多连通域.



单连通域



多连通域

第三节　复变函数

- 一、复变函数的定义
- 二、映射的概念
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、复变函数的定义

1.复变函数的定义:

设 G 是一个复数 $z=x+iy$ 的集合.如果有一个确定的法则存在,按这个法则,对于集合 G 中的每一个复数 z,就有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与之对应,那末称复变数 w 是复变数 z 的函数(简称复变函数),记作 $w=f(z)$.

2.单(多)值函数的定义:

如果 z 的一个值对应着一个 w 的值,那末我们称函数 $f(z)$ 是单值的.

如果 z 的一个值对应着两个或两个以上 w 的值,那末我们称函数 $f(z)$ 是多值的.

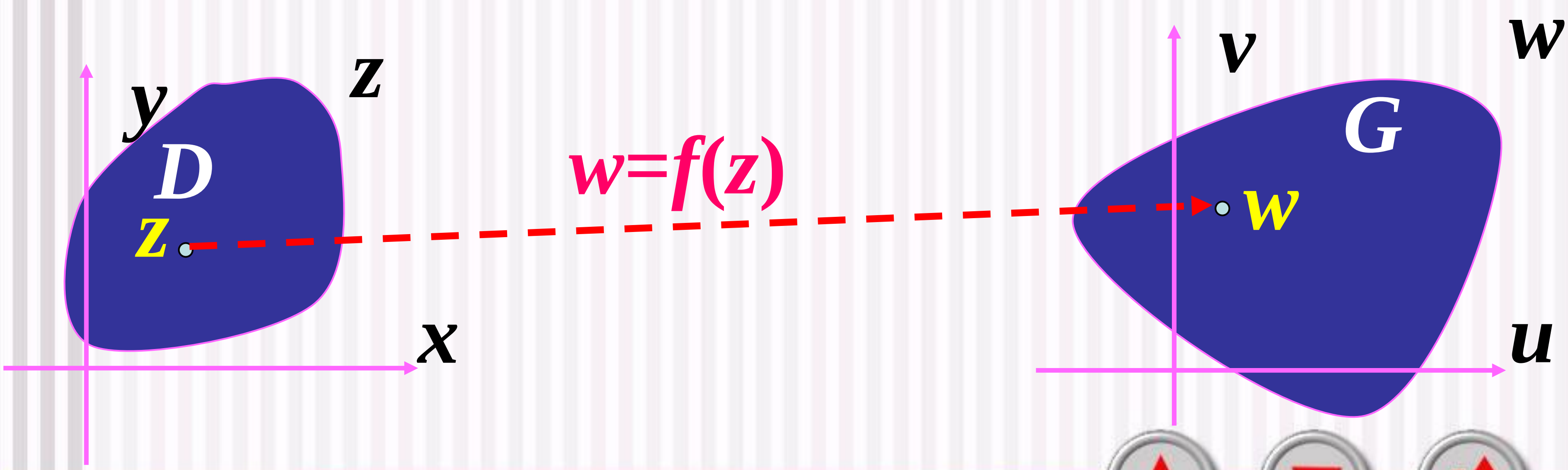
例如, $w = z^2$, $w = |z|$ 为单值函数,
$w = \sqrt[3]{z}$, $w = \mathrm{Arg}\, z$ 为多值函数。

注：若无特殊声明，则我们讨论的复变函数均为单值复变函数。

4. 复变函数的几何意义——映射

取两张复平面，分别称为z平面和w平面.

如果D中的点z被映射$w=f(z)$映射成G中的点w，那么w称为z的象(映象)，而z称为w的原象.



复变函数的极限和连续性

- 一、函数的极限
- 二、函数的连续性
- 三、小结与思考

一、函数的极限

1.函数极限的定义:

设函数 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内,如果有一确定的数 A 存在,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$ 使得当 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta\le\rho)$ 时,有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 那末称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限.

记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. (或 $f(z)\xrightarrow{z\to z_0}A$)

注意: 定义中 $z\to z_0$ 的方式是任意的.

例1 证明函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证： 令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,

则 $f(z)=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$,

例如 z 沿正实轴 $\arg z=0$ 趋于零时, $f(z)\to 1$,

沿 $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$ 趋于零时, $f(z)\to 0$,

故 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

2. 极限计算的定理

定理一

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ A=u_0+iv_0,$ $z_0=x_0+iy_0$, 那末 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

说明

该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题, 转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

例1 证明函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 令 $z=x+iy$, 则 $f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad v(x,y)=0,$$

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+(kx)^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+k^2)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

随 k 值的变化而变化,

所以 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y)$ 不存在, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = 0,$

根据定理一可知, $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ 不存在.

定理二

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 那末

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB;$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0).$

唯一性

与实变函数的极限性质类似.

二、函数的连续性

1. 连续的定义:

如果 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 那末我们就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 处连续的意义是

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in C.$$

由函数连续的定义:

连续的三要素:

（1） $f(z)$在z_0处有定义

（2）$f(z)$在z_0处有极限

（3）$f(z)$在z_0处的极限值等于函数值

定理三

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在$z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是:$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例如, $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 在复平面内处处连续,

故 $f(x,y)$ 在复平面内除原点外处处连续.

例3 证明:如果 $f(z)$ 在 z_0 连续,那末 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,

则 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$,

由 $f(z)$ 在 z_0 连续,

知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处都连续,

于是 $u(x,y)$ 和 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 处连续,

故 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 连续.

例3：求 $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{\overline{z}-1}{z+2}$

解：$\because \dfrac{\overline{z}-1}{z+2}$ 在点 $z=i$ 处连续，

$$\therefore \lim_{z\to i}\frac{\overline{z}-1}{z+2}=\frac{-i-1}{i+2}=-\frac{3}{5}-\frac{i}{5}$$

定理4. 1)连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续函数.

2)连续函数的复合函数还是连续函数.

注

1.函数$f(z)$在曲线C上z_0点处连续的意义是指

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),\ z \in C.$$

2. 在闭曲线或包括曲线端点在内的曲线段上连续的函数在曲线上是有界的.

3.因一般复数不能比较大小，故实连续函数的最大、最小值定理，介值定理不再成立.

由上述定理可推出:

(1) $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 在整个 z 平面连续;

(2) 有理分式函数 $w=\dfrac{p(z)}{Q(z)}$ ($p(z)$、$Q(z)$ 为多项式函数) 在 z 平面上使 $Q(z)\neq 0$ 的点处连续。

四. 复变函数的导数

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D, z_0 是区域 D 内的一点,

点 $z_0 + \Delta z \in D$, 若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导。此极限值

称为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数, 记作:

$$f'(z_0) \quad \text{或} \quad \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

即

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

注意:

定义中, $\Delta z \to 0\,(z_0+\Delta z \to z_0)$ 的方式是任意的,

定义中极限值的存在与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关。

如果 $w = f(z)$ 在 D 内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 D 内可导, $f'(z)$ 称为 $f(z)$ 的导数, 简称导数。

例2. 讨论 $f(z)=|z|^2$ 的可导性。

解：当 $z=0$ 时，$f(z)=0$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\cdot\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}$$

设 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，则 $\overline{\Delta z}=\Delta x-i\Delta y$

由于 $\Delta z\to 0$ 时，$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，从而 $\overline{\Delta z}\to 0$

所以，$f'(0)=0$，即 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导。

当 $z \neq 0$ 时，有

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z \cdot \bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \Delta z \bar{z} + \Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \cdot \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right)$$

当 Δz 沿平行于 x 轴方向 $\to 0$ (即 $z+\Delta z \to z$)时,

$\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x \to 0$, 从而

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = 1$$

所以 $\lim_{\Delta z \to 0}\left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \cdot \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = \bar{z} + z$

当 Δz 沿平行于 y 轴方向 $\to 0$, 即 $\Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y$,

此时 $\lim_{\Delta z \to 0}\left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \cdot \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = \bar{z} - z$

所以, $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处不可导。

微分

设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 上，$z_0\in D$，若 $f(z)$ 在 z_0 可导，$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$

$$=A\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z \qquad (\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0)$$

A 为复常数。则称 $A\Delta z$ 为函数 $f(z)$ 在 z_0 处的微分。

记 $dw=A\cdot\Delta z$

可以推得：$A=f'(z_0)$，$\Delta z=dz$

于是

$$dw=f'(z_0)dz$$

可微 $\Leftrightarrow$ 可导

若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微，称 $f(z)$ 在 D 内可微。

求导法则（与实变函数求导法则相同）

(1) $c' = 0 \quad (c\text{为复常数})$

(2) $(z^n)' = nz^{n-1} \quad (n\text{为正整数})$

(3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$

(4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0)$

(6) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z) \quad (w = g(z))$

(7) $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$, 其中, $w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 是两个互为反函数的单值函数且 $\varphi'(w) \neq 0$。

本章基本要求

- 掌握复数的各种表示方法（三角形式、指数形式、代数形式）及其运算（加法、减法、乘法除法、幂运算、开方运算）
- 理解无穷远点的概念
- 理解复变函数的概念
- 了解复变函数的极限与连续可导与可微的概念
- 理解区域、单连域、多连域、简单曲线等概念

【思考与练习】

（1）化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$

⑵ 把复数$1+i$对应的向量按顺时针旋转$\frac{2}{3}\pi$

所得向量对应的复数为________。

解： (1) $$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4=\left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^4=(-i)^4=1$$

(2) $$z=(1+i)e^{-\frac{2\pi}{3}i}=(1+i)\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=(1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$