第七章 Laplace变换

1. *Laplace*变换的概念

2. *Laplace*变换的性质

3. *Laplace*变换的逆变换

4. *Laplace*变换的简单应用

§ 7.1 *Laplace*变换的概念

Fourier变换的局限性：

(1) 定义于$[0,+\infty)$,而不必考虑$t<0$时取值的函数；

(2)绝对可积的条件太强。许多简单函数的傅氏变换或者不存在，或者为非常义下的广义函数给应用带来很大的不方便。

一、Laplace变换的定义

设指数衰减函数 $\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\ge 0\end{cases}\ (\beta>0)$

考虑 $f(t), t\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(t)u(t)=f(t),\quad t>0$ 时.

若存在 $\beta>0$，使 $\lim\limits_{|t|\to\infty} e^{-\beta t}f(t)=0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\beta t}f(t)\right|dt<+\infty$

那么，$f(t)u(t)e^{-\beta t}$ Fourier积分总存在，并且

$$\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+i\omega)t}dt \overset{\text{令}s=\beta+i\omega}{=\!=\!=\!=} \int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$\triangleq F(s)$$

定义：设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$定义，s是一个复变量，若积分

$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在复平面内s的某一个域内收敛，

则由此积分所确定的函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

称为$f(t)$的Laplace变换，记为$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，相应地

$f(t)$为$F(s)$的逆变换，记为$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$，$f(t)$和$F(s)$

分别为象原函数和象函数.

例1. 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的Laplace变换.

解: $\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$

由于 $\int_0^{+\infty}\left|e^{-st}\right|dt=\int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(s)t}dt$ $\quad(\because \left|e^{a+bi}\right|=e^{a})$

当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，上式收敛，于是 $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ 收敛，而且

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$$

所以， $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$

例2. 求函数 $f(t)=e^{kt}$（k为实数）的*Laplace*变换。

解：$\mathscr{L}[e^{kt}]=\int_0^{+\infty} e^{kt}\cdot e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}dt$

由于 $\int_0^{+\infty}\left|e^{-(s-k)t}\right|dt=\int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(s-k)t}dt$

当*Re*(*s*)-*k*>0时收敛，于是当*Re*(*s*)>*k* 时，上述积分收敛

而且

$$\mathscr{L}[f(t)]=-\frac{1}{s-k}e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-k}\quad(\mathrm{Re}(s)>k)$$

其实*k*为复数时上式也成立, 只是收敛区间为 Re(*s*)>Re(*k*)

Laplace变换的存在定理

若函数 $f(t)$ 满足下列条件：

(1) 在$t\geq 0$的任一有限区间上分段连续；

(2) 当$t\to+\infty$时，$f(t)$的增长速度不超过某一指数函数，即存在常数$M>0$及$C\geq 0$，使得

$$|f(t)|\leq Me^{ct}\quad(0\leq t<+\infty)$$

则f(t)的Laplace变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

在半平面$Re(s)>C$上一定存在，并且$F(s)$在$Re(s)>C$内是解析函数。

§7.2 Laplace变换的性质

1. 线性性质与相似性质

线性性质

若α,β 为常数，$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$

则

$$\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]$$

相似性质 若$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(s/a)(a>0)$$

例1. 求$f(t)=\cos kt$的*Lapace*变换，k为实数。

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\mathscr{L}[\frac{1}{2}(e^{ikt}+e^{-ikt})]$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{ikt}]+\frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{-ikt}]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ik}+\frac{1}{s+ik}\right]$$

$$=\frac{s}{s^2+k^2}$$

同理可得 $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$

2.微分性质

(1) 函数的微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, 则 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

证明：由Laplace变换定义，有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt \qquad (df(t))$$

用分部积分法可得：

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= s\mathscr{L}[f(t)] - f(0) \quad (\mathrm{Re}(s) > C)$$

所以 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

推论 若$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, 则有

$$\mathcal{L}[f''(t)]=s\mathcal{L}[f'(t)]-f'(0)$$

$$=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

一般地，有

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

$$(\mathrm{Re}(s)>C)$$

特别地, 当初值$f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$时, 有

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$$

注：此性质可以使我们有可能将$f(t)$的微分方程转化为$F(s)$的代数方程.

例3. 求$f(t)=t^m$ **的**Laplace变换 ($m\geq 1$为正整数)

解： 由于 $f^{(m)}(t)=m!$, 且 $f(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0$

由微分性质有：$\mathscr{L}[f^{(m)}(t)]=s^m\mathscr{L}[f(t)]=s^m\mathscr{L}[t^m]$

即

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{1}{s^m}\mathscr{L}[m!]=\frac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1]$$

注意到 $\mathscr{L}[1]=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}$

所以 $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}\qquad (\mathrm{Re}(s)>0)$

例4. 求解微分方程

$$y''(t)+\omega^2 y(t)=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=\omega$$

解：对方程两端取Laplace变换，并利用线性性质及微分性质，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=0$$

其中，$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$

代入初值，即得 $Y(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sin\omega t$$

(2) 像函数的微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, 则 $F'(s) = -\mathscr{L}[tf(t)]$ $(\mathrm{Re}(s) > C)$

一般地，有 $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)]$ $(\mathrm{Re}(s) > C)$

例5. 求 $\mathscr{L}[t\sin kt]$

解： 因为 $\mathscr{L}[\sin kt] = \dfrac{k}{s^2+k^2}$，由像函数的微分性质可知

$$\mathscr{L}[t\sin kt] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

同理可得：$\mathscr{L}[t\cos kt] = -\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{s}{s^2+k^2}\right] = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

例6．求 $f(t)=t^2\cos^2 t$ 的Laplace变换.

解： $\mathscr{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{1}{2}\mathscr{L}[t^2(1+\cos 2t)]$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$=\frac{2(s^6+24s^2+32)}{s^3(s^2+4)^3}$$

例7 $\mathscr{L}[t^n e^{kt}]$(n为正整数，k为实数)。

解：设$f(t)=e^{kt}$ $\quad F(s)=\dfrac{1}{s-k}$,

$$\mathscr{L}[t^n f(t)]=(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}F(s)$$

$$\mathscr{L}[t^n e^{kt}]=(-1)^n F^{(n)}(s)=\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$$

3. 积分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \qquad (*)}$$

证明： 设 $h(t) = \int_0^t f(t)dt$, 则有 $h'(t) = f(t)$ 且 $h(0) = 0$

由微分性质，有

$$\mathscr{L}[h'(t)] = s\mathscr{L}[h(t)] - h(0) = s\mathscr{L}[h(t)]$$

即 $$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$

重复运用（*）式，可得到：

$$\mathscr{L}\underbrace{\left\{\int_0^t dt\int_0^t dt\cdots\int_0^t f(t)dt\right\}}_{n次}=\frac{1}{s^n}F(s)$$

象函数的积分性质：

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)ds}$$

或

$$f(t) = t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(s)ds\right]$$

特别地，若 $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ 存在，则有

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt$$ 令 $s = 0$ 即得：

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{\infty} F(s)ds \qquad (**)}$$

一般地，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] = \underbrace{\int_s^{\infty} ds \int_s^{\infty} ds \ldots \int_s^{\infty} F(s)ds}_{n\text{次}}$$

例9. 求 $\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt\right]$

解： 先求 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$，由于 $\mathscr{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$，

由象函数积分性质，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+1}ds=\arctan s\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan s$$

再由积分性质，可得

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan s\right)$$

于是由（**）还可以得到：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+1}ds=\arctan s\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

例10 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$。

解：由于 $\mathscr{L}[e^{-at}-e^{-bt}]=\mathscr{L}[e^{-at}]-\mathscr{L}[e^{-bt}]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$

利用像函数积分性质得：

$$\mathscr{L}\left[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right]=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds=\ln\frac{s+a}{s+b}\Bigg|_s^{\infty}=\ln\frac{s+b}{s+a}$$

而 $\mathscr{L}\left[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}e^{-st}dt$

令 $s=0$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\ln\frac{b}{a}$

4. 位移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$, 则

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)\quad(\mathrm{Re}(s-a)>c)$$

证明： $\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}dt$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

$$=F(s-a)$$

例11. 求 $\mathscr{L}[e^{at}t^m]$, $\mathscr{L}[e^{-at}\sin kt]$

解：利用位移性质及公式：

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}} \qquad \mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{at}t^m]=\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$$

$$\mathscr{L}[e^{-at}\sin kt]=\frac{k}{(s+a)^2+k^2}$$

例12：求 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+6s+10}]$

解：$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+6s+10}]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2+1}]$

而 $\mathscr{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+6s+10}]=e^{-3t}\sin t$$

5. 延迟性质

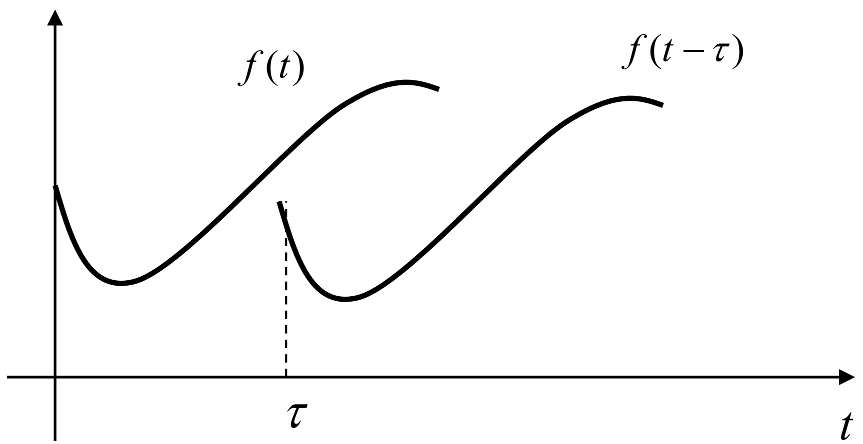
若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$, 则对任一非负实数τ, 有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau)$$

这个性质在工程技术中也称时移性， 它表示时间函数$f(t)$推迟

τ 的拉氏变换等于它的像函数乘以指数因子 $e^{-s\tau}$.



$f(t-\tau)$的图□ □ □$f(t)$□ □ □ □ 沿t□ □ □ □ □ □ □ τ□ □ .

例13 设$f(t)=\begin{cases}\sin t, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$，求$\mathscr{L}[f(t-\frac{\pi}{2})]$

解：已知$\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$，根据延迟性质

$$\mathscr{L}[f(t-\frac{\pi}{2})]=\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathscr{L}[\sin t]$$

$$=\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}]=\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t-\frac{\pi}{2}).=\begin{cases}-\cos t, t>\dfrac{\pi}{2}\\ 0, t<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

例14 计算 $\mathscr{L}[(t-1)^2]$

解：由线性性质，

$$\mathscr{L}[(t-1)^2]=\mathscr{L}[t^2-2t+1]=\mathscr{L}[t^2]-\mathscr{L}[2t]+\mathscr{L}[1]$$

$$=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$$

解2　由延迟性质

$$\mathscr{L}[(t-1)^2]=e^{-s}\mathscr{L}[t^2]=\frac{2}{s^3}e^{-s}$$

为什么?

6.初值定理与终值定理

(1)初值定理 若$f(t)$在$[0, +\infty]$可微，$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,且 $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ 存在,则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{s\to\infty} sF(s)\\ f(0) &= \lim_{s\to\infty} sF(s)\end{aligned}\right\}$$

或写为

(2) 终值定理

若$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$, 且$sF(s)$在$\mathrm{Re}(s)\geq 0$的区域解析, 则

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

或写为

$$f(+\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

这个性质表明$f(t)$在$t\to\infty$时的数值(稳定值), 可以通过$f(t)$的拉氏变换乘以s取$s\to 0$时的极限值而得到, 它建立了函数$f(t)$在无限远的值与函数$sF(s)$在原点的值之间的关系. 在拉氏变换的应用中, 往往先得到$F(s)$再去求出$f(t)$. 但经常并不关心函数$f(t)$的表达式, 而是需要知道$f(t)$在$t\to\infty$和$t\to 0$时的性态, 这两个性质 能使我们直接由$F(s)$来求出$f(t)$的两个特殊值$f(0)$, $f(+\infty)$.

例15 若 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s+a}$，求$f(0), f(+\infty)$.

解：根据初值定理和终值定理,

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+a}=1$$

$$f(+\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a}=0$$

我们已知$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}]=\dfrac{1}{s+a}$，即$f(t)=\mathrm{e}^{-at}$

上面所求与结果一致

但应用终值定理时需要注意定理条件是否满足.

例如函数$f(t)$的$F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$,

则$sF(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$的奇点为$s=\pm i$位于虚轴上,就不满足定理的条件.

虽然$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s}{s^2+1}=0$,

而$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=\sin t$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\sin t$是不存在的

§7.3 Laplace逆变换

由拉氏变换的概念可知, 函数 $f(t)$的拉氏变换, 实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的傅氏变换.

$$\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+i\omega)t}dt \xlongequal{\text{令}s=\beta+i\omega} \int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$\triangleq F(s)$$

因此, 按傅氏积分公式, 在$f(t)$的连续点就有

$$f(t)u(t)e^{-\beta t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}d\omega\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau}d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{i\omega t}d\omega,\quad t>0$$

等式两边同乘以$e^{\beta t}$, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}d\omega,\quad t>0$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}d\omega,\quad t>0$$

令$\beta+i\omega=s, d\omega=\frac{1}{i}ds$,有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds,\quad t>0$$

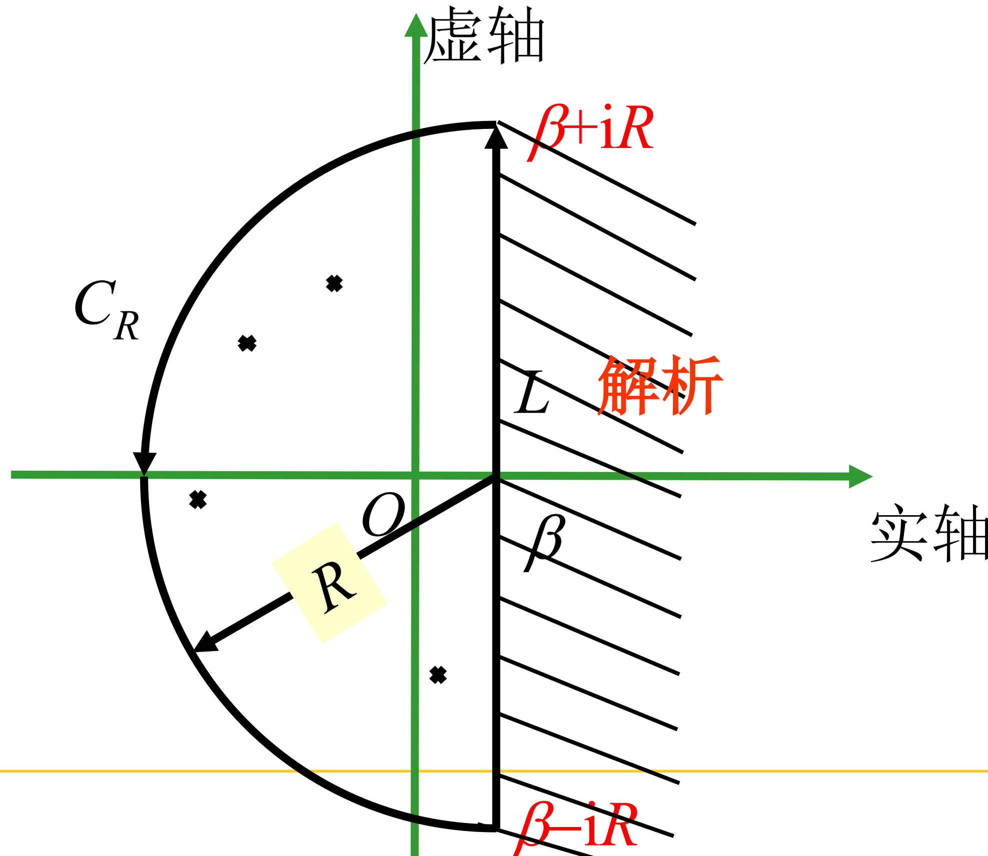
右端的积分称为拉氏反演积分.

积分路线中的实部β要求在$F(s)$的存在域即可。

计算复变函数的积分通常比较困难, 但是可以用留数方法计算.

定理：若$F(s)$在全平面只有有限个奇点$s_1, s_2, \ldots, s_n$(均在$\mathrm{Re}\, s = \beta$左侧）且$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$，则$t > 0$时，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k]$$



注:在应用定理时, 不能忽视$F(s)\to 0(s\to\infty)$这个条件. 在实际中经常遇到的有理函数类

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$$

, 其中$A(s)$,$B(s)$是不可约的多项式,

当分子$A(s)$的次数小于分母$B(s)$的次数时, 满足定理对$F(s)$的要求, 可用上式求$F(s)$的拉氏逆变换.

例1 求下列有理分式的拉氏逆变换：

$$(1)\frac{1}{s(s-1)^2};\qquad (2)\frac{s^2}{s^2+2s+1}.$$

解：（1）0 和 1 分别为函数的一级和二级极点，则

$$f(t)=\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{(s-1)^2}+\lim_{s\to 1}[\frac{e^{st}}{s}]'$$

$$=1+\lim_{s\to 1}\frac{te^{st}s-e^{st}}{s^2}=1+te^t-e^t.$$

（2） $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+1}$ 为有理假分式，于是分解

$$F(s)=1-\frac{2s+1}{s^2+2s+1}.$$

注意到 $s=-1$ 为 $F(s)$ 的二阶极点，故

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[1]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s^2+2s+1}\right]$$

$$=\delta(t)-\lim_{s\to -1}[(2s+1)e^{st}]'$$

$$=\delta(t)-(2-t)e^{-t}.$$

例2 求 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$ 的逆变换.

解一：利用留数求解.

易知 $s_1=2$ 和 $s_2=1$ 分别是$F(s)e^{st}$的1级极点和2级极点,

根据上述的留数计算方法知：

$$f(t)=\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},2\right]+\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},1\right]$$

$$=\left.\frac{e^{st}}{(s-1)^2}\right|_{s=2}+\left.\left(\frac{e^{st}}{s-2}\right)'\right|_{s=1}$$

$$=e^{2t}-e^{t}-te^{t}.$$

$$F(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)^2}$$

解二：显然 $F(s)=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$.

于是 $f(t)=L^{-1}[\dfrac{1}{s-2}]-L^{-1}[\dfrac{1}{s-1}]-L^{-1}[\dfrac{1}{(s-1)^2}]$

如何求？

事实上，$\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-k}]=e^{kt}$；$\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s-1)^2}]=te^{t}$.

微分性质

所以 $f(t)=e^{2t}-e^{t}-te^{t}$.

§7.4 卷积

1. 卷积的定义

如果当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，则定义

$$\boxed{f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau}$$

为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积。

-------拉氏变换下的卷积的定义.

注：不同变换下的卷积定义不同.

例1. 求$f_1(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ 和 $f_2(t)=\begin{cases} e^t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$的卷积

解：根据定义，有

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \tau e^{t-\tau}d\tau$$

$$=-\tau e^{t-\tau}\Big|_0^t+\int_0^t e^{t-\tau}d\tau$$

$$=-t-e^{t-\tau}\Big|_0^t$$

$$=-t-1+e^t$$

例2. 求$f_1(t)=t$ 和 $f_2(t)=\sin t$在区间$[0,+\infty)$上的卷积 $t*\sin t$

解：根据定义，有

$$t*\sin t=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t+\int_0^t\cos(t-\tau)d\tau$$

$$=t-\sin t$$

2、卷积的性质

（1）交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$

（2） 结合律

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t).$$

（3） 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t).$$

3. 卷积定理

设 $f_1(t), f_2(t)$ 满足Laplace变换存在定理中的条件，

且 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, 则 $f_1(t) * f_2(t)$ 的Laplace变换一定存在，且

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

或 $$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t)$$

若 $f_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ 满足Laplace变换存在定理中的条件，且

$$\mathscr{L}[f_k(t)] = F_k(s) \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

则有 $$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t) * \cdots * f_n(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \cdot \cdots \cdot F_n(s)$$

例3. 若 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$，求 $f(t)$

解： 因为 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$

所以 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right]=\cos t*\cos t$$

$$=\int_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}[\tau\cos t+\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)$$

例4 求 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$ 的逆变换.

解三：利用卷积求解.

设 $F_1(s)=\dfrac{1}{s-2}$ $\quad F_2(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}$

$$F(s)=F_1(s)\cdot F_2(s).$$

而 $f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]=e^{2t}$，$f_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[F_2(s)\right]=te^{t}$,

由卷积定理,

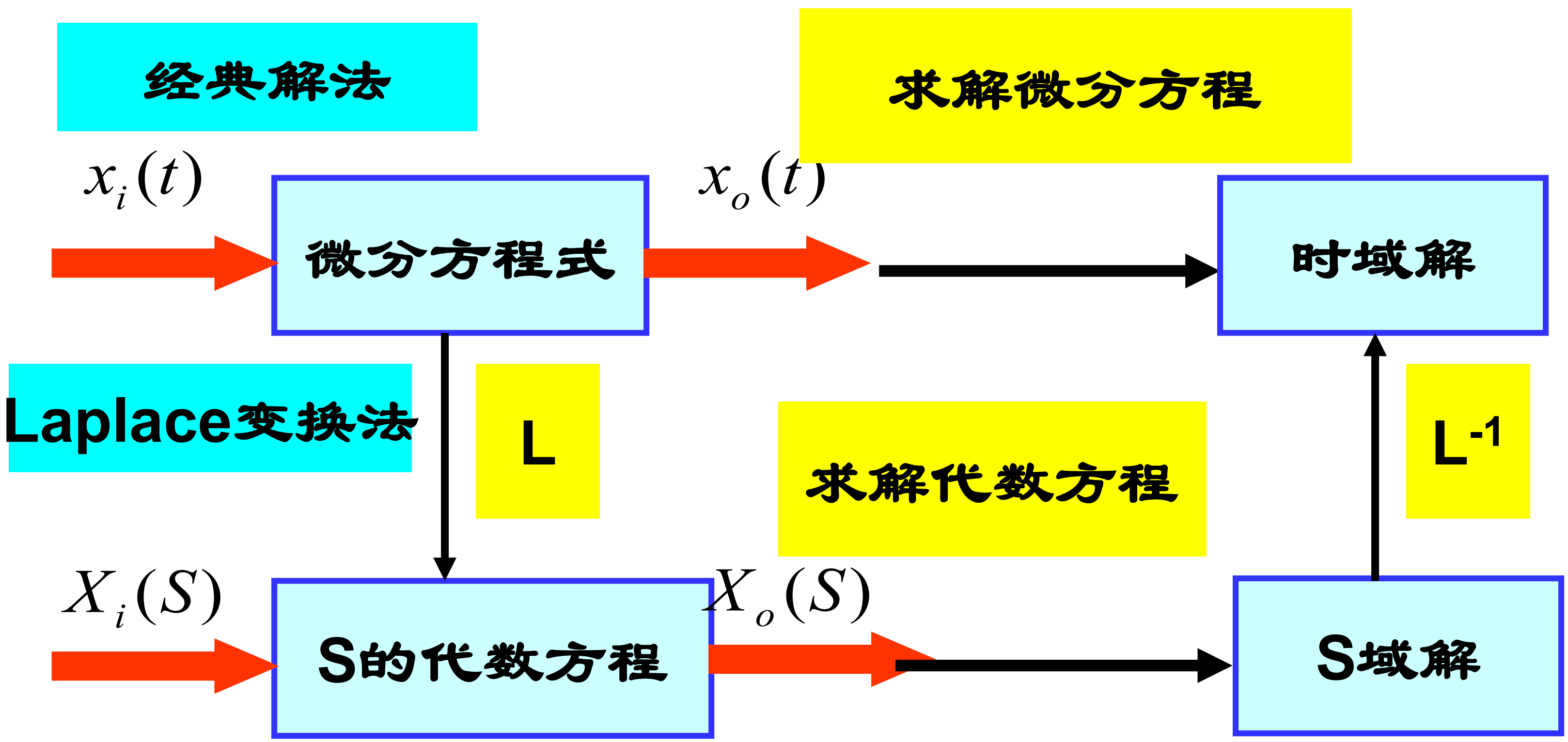
$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \tau e^{\tau}e^{2(t-\tau)}d\tau \quad =e^{2t}\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau$$

$$=e^{2t}(1-e^{-t}-te^{-t})=e^{2t}-e^{t}-te^{t}.$$

§7.5 Laplace变换的应用

求解线性常微分方程（组）

微分方程的解法



例1. 求 $y''(t)+4y(t)=0$ 满足 $y(0)=-2,\ y'(0)=4$ 的解.

解：设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$, 对方程两端取Laplace变换，则

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=0$$

利用初始条件，得

$$s^2Y(s)+2s-4+4Y(s)=0$$

$$Y(s)=\frac{-2s+4}{s^2+4}=\frac{-2s}{s^2+4}+\frac{4}{s^2+4}$$

取Laplace逆变换，得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=-2\cos 2t+2\sin 2t$$

为所求特解。

例2. 求$y''-3y'+2y=2e^{-t}$ 满足$y(0)=2$, $y'(0)=-1$的特解.

解: 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$, 对方程取Laplace变换, 得:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3sY(s)+3y(0)+2Y(s)=2\cdot\frac{1}{s+1}$$

代入初始条件，得:

$$(s^2-3s+2)Y(s)=\frac{2}{s+1}+2s-7$$

$$Y(s)=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+4\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{s-2}$$

取Laplace逆变换，得

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{t}-\frac{7}{3}e^{2t}$$

或者：Y(s)有三个一级极点为–1,1,2

$$Y(s)=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{2s^2-5s-5}{s^3-2s^2-s+2}=\frac{A(s)}{B(s)}$$

$B'(s)=3s^2-4s-1$, 因此

$$y(t)=\frac{A(s)\mathrm{e}^{st}}{B'(s)}\bigg|_{s=-1}+\frac{A(s)\mathrm{e}^{st}}{B'(s)}\bigg|_{s=1}+\frac{A(s)\mathrm{e}^{st}}{B'(s)}\bigg|_{s=2}$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{t}-\frac{7}{3}e^{2t}$$

例3. 求解微分方程组：

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=e^t \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2e^t \end{cases}, \quad x(0)=y(0)=1$$

解： 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$, 对方程两边取Laplace变换, 并代入初始条件, 得

$$\begin{cases} sX(s)-1+X(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1} \\ sY(s)-1+3X(s)-2Y(s)=2\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

求得

$$X(s)=Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

取Laplace逆变换，得原方程组的解为：

$$x(t)=y(t)=e^t$$

例4. 求解积解积分：$f(t)=at-\int_0^t \sin(\tau-t)f(\tau)d\tau \quad (a\neq 0)$

解： 由于 $f(t)*\sin t=\int_0^t f(t)\sin(t-\tau)d\tau$

所以原方程为 $f(t)=at+f(t)*\sin t$

令 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$,

因 $\mathscr{L}(t)=\dfrac{1}{s^2}$, $\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$

所以，对方程两边取Laplace变换，并由卷积定理得

$$F(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}F(s),\qquad F(s)=a\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right)$$

取Laplace逆变换，得原方程的解为：

$$f(t)=a\left(t+\frac{t^3}{6}\right)$$ 其中，$\mathscr{L}[t^3]=\dfrac{3!}{s^4}$

本章内容小结

1、掌握拉氏变换的定义

2、会用拉氏变换的性质求函数的拉氏变换

3、会求拉氏逆变换

4、掌握拉氏变换的卷积

5、会用拉氏变换求解微积分方程

练习题

(1)求方程组: $\begin{cases} y'(t)+2y(t)+6\int_0^t x(t)dt=-2, \\ y'(t)+x'(t)+x(t)=0 \end{cases}$

满足$x(0)=6, y(0)=-5$的解.

(2) 求 $F(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$ 的Laplace

逆变换.

答案与提示：

（1）$x(t)=2e^t+2\sin 2t, y(t)=4e^t-3e^{-4t}$

（2）解法1　$s_1=-1$和 $s_2=2$分别是 $F(s)e^{st}$ 的1级

和3级极点，故由计算留数的法则

$$\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st},\ -1\right]=\lim_{s\to-1}\frac{5s^2-15s-11}{(s-2)^3}e^{st}=-\frac{1}{3}e^{-t},$$

$$\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st},\ 2\right]=\frac{1}{2!}\lim_{s\to2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{5s^2-15s-11}{s+1}e^{st}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\left(5s-20+\frac{9}{s+1}\right)e^{st}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 2}\left\{\frac{18}{(s+1)^3}e^{st}+2t\left[5-\frac{9}{(s+1)^2}\right]e^{st}\right.$$

$$\left.+\left(5s-20+\frac{9}{s+1}\right)t^2e^{st}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}e^{2t}+4te^{2t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right]=-\frac{1}{3}e^{-t}+\left(\frac{1}{3}+4t-\frac{7}{2}t^2\right)e^{2t}.$$

解法2 $F(s)$可分解为形如

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2},$$

可以求得

$$A=-\frac{1}{3},\quad B=-7,\quad C=4,\quad D=\frac{1}{3}.$$

因为$\mathscr{L}\left[e^{at}t^n\right]=\dfrac{n\,!}{(s-a)^{n+1}}$，所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right]=-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}+4te^{2t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$