§ 3.9 Fourier transform of periodic signal

- 一般周期信号的傅立叶变换
- 傅立叶级数**FS**与其单脉冲的傅立叶变换**FT**的关系
- 周期矩形脉冲**FS**与单矩形脉冲**FT**的关系
- 周期矩形脉冲的**FS**和**FT**
- 周期单位冲激序列的**FS**和 **FT**
- 正余弦信号的傅立叶变换**FT**

Recall:

周期信号 →非周期信号 →周期信号

FS FT FT

- 周期信号不满足绝对可积条件
- 引入冲激信号后，冲激的积分是有意义的
- 在以上意义下，周期信号的傅立叶变换是存在的

周期信号FT→周期抽样FT→抽样定理→实际应用

1、一般周期信号的傅立叶变换

- 满足狄里赫利条件的周期信号f(t)的FS：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n . e^{jn\omega_1 t}$$

$$FT[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

  - 由一些冲激组成离散频谱
  - 位于信号的谐频处
  - 大小不是有限值，而是无穷小频带内有无穷大的频谱值

周期信号的傅立叶变换存在条件

- 周期信号不满足绝对可积条件
- 引入冲激信号后，冲激的积分是有意义的
- 在以上意义下，周期信号的傅立叶变换是存在的
- 周期信号的频谱是离散的，其频谱密度，即傅立叶变换是一系列冲激

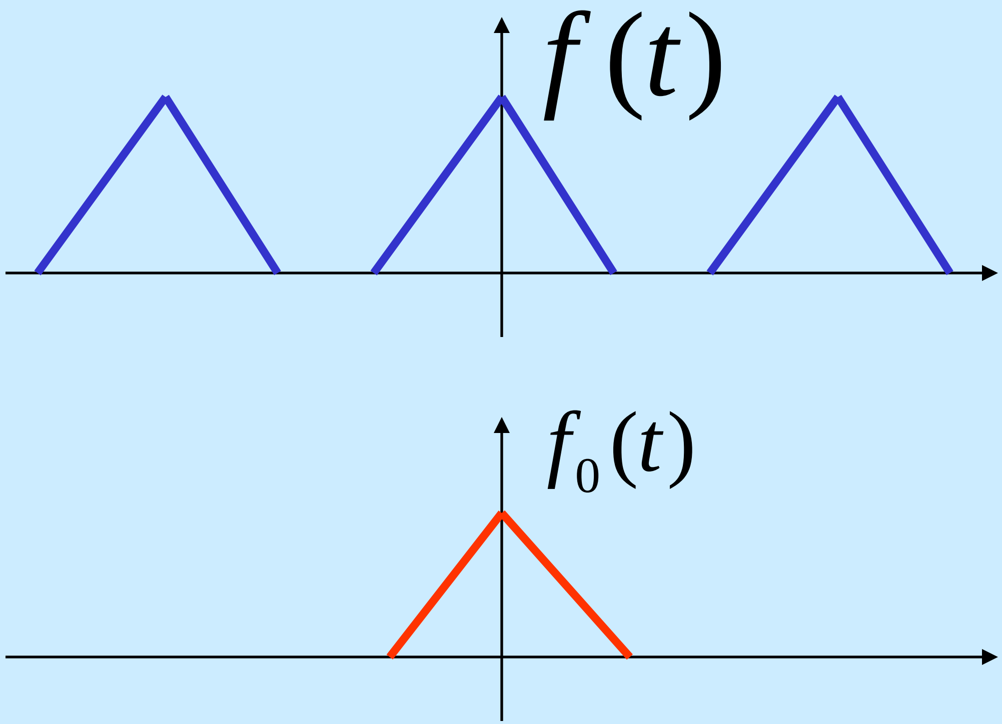
2、周期信号 FS与单脉冲FT的关系

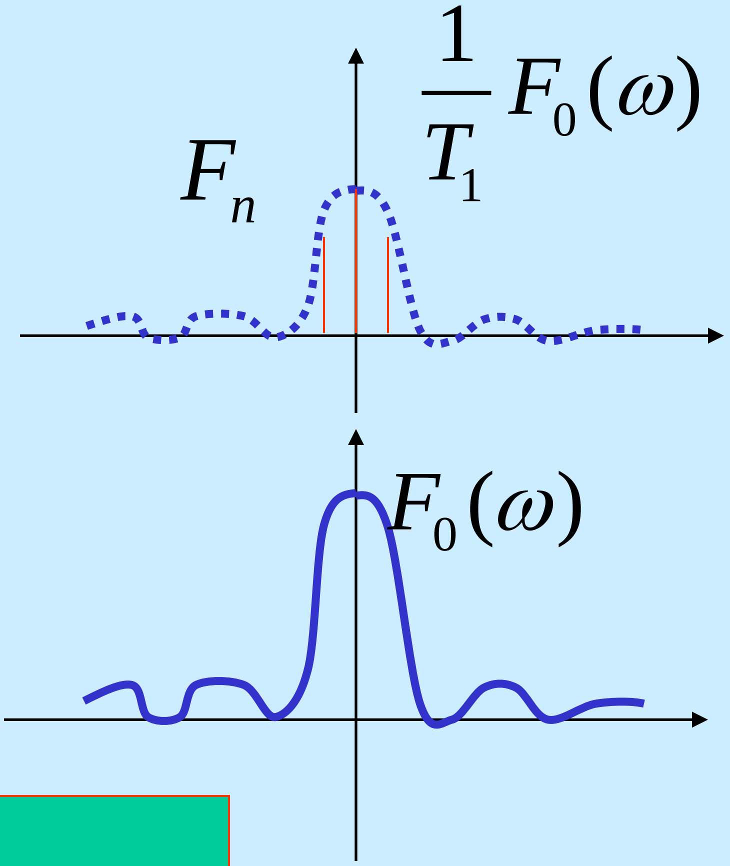
$$FT[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t).e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$F_0(\omega) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_0(t).e^{-j\omega t}dt$$

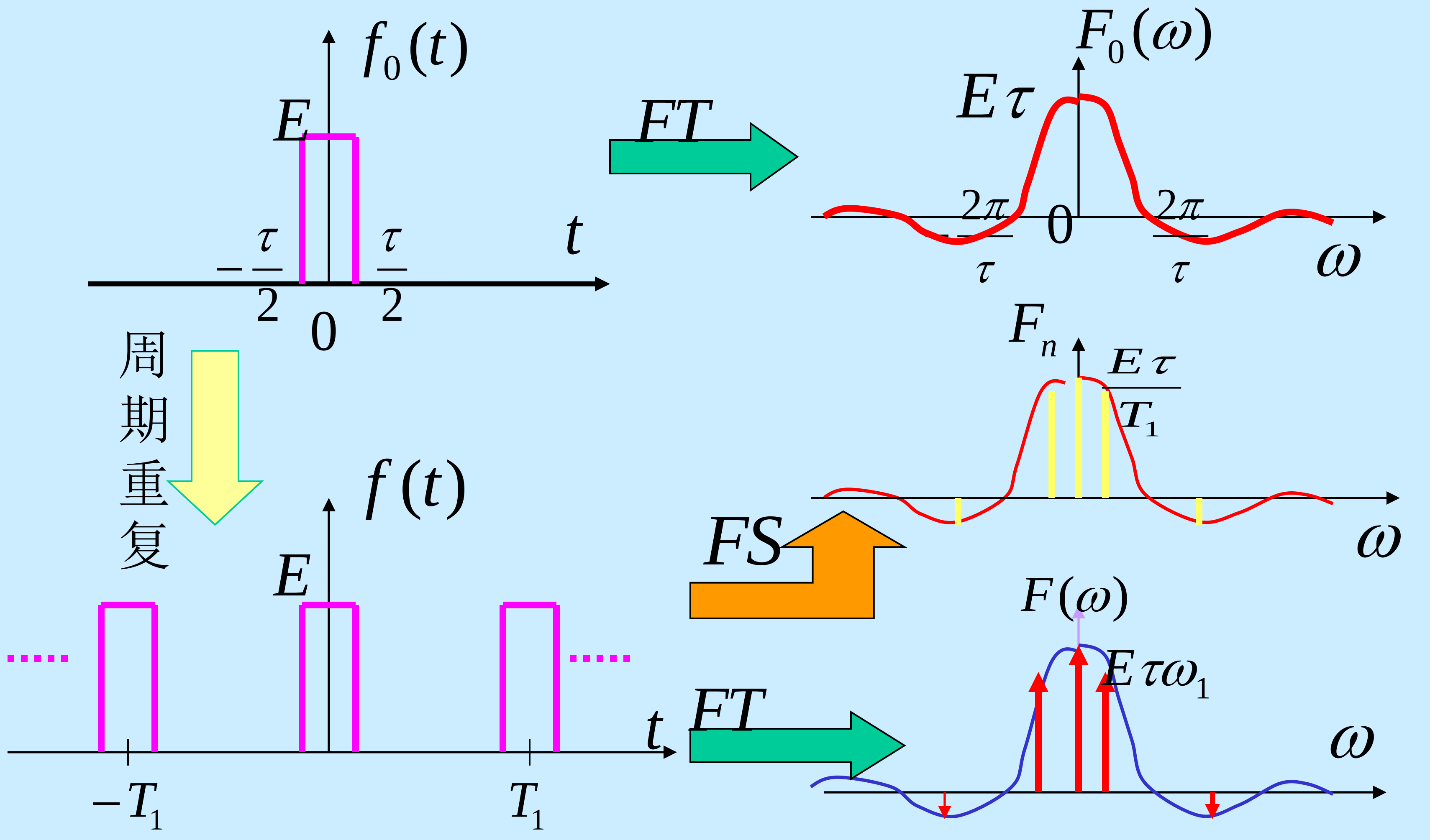
$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega = n\omega_1}$$





$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega = n\omega_1}$$

3、周期矩形脉冲的FS和FT



$$F_0(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由单脉冲联想FS的Fn

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

FS

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) . e^{jn\omega_1 t}$$

FT

$$F(\omega) = E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

4、周期单位冲激序列的FS

Impulse-train

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n . e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta_{T_1}(t) . e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1}$$

$$\delta_{T_1}(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t}$$

5、周期单位冲激序列的FT

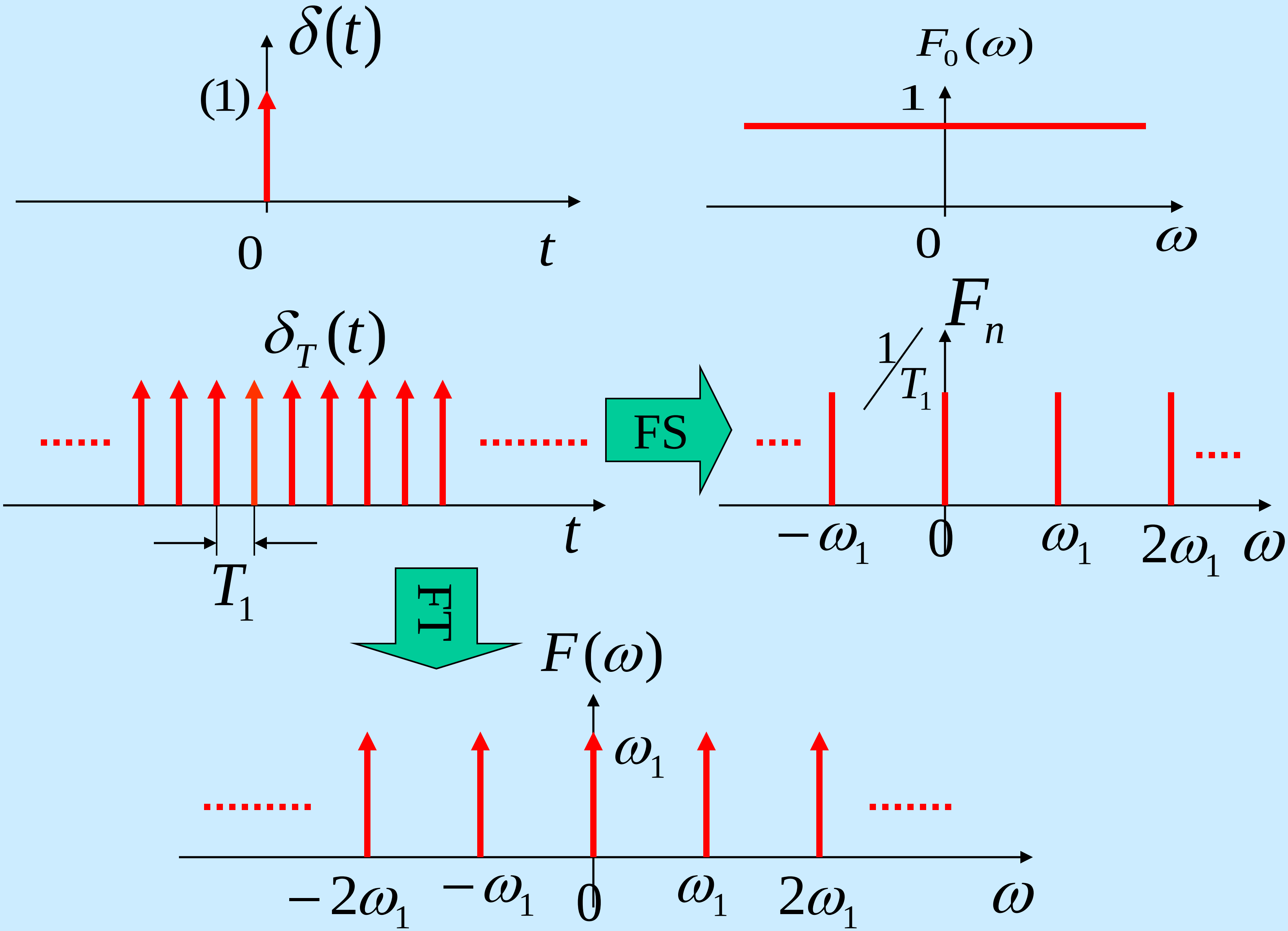
Impulse-train

$$\delta_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n.e^{jn\omega_1 t}=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_1 t}$$

$$FT[f(t)]=2\pi\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$F(\omega)=FT[\delta_{T_1}(t)]=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$F(\omega) = FT[\delta_{T_1}(t)] = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$



小结——单脉冲和周期信号的傅立叶变换的比较

- 单脉冲的频谱 $F_0(\omega)$ 是连续谱，它的大小是有限值；
- 周期信号的谱 $F(\omega)$ 是离散谱，含谱密度概念，它的大小用冲激表示；
- $F_0(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 的包络的 $1/\omega_1$ 。

HW4: 3-36(b), 3-37(c)