华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第六册）

学　院 ____________ 专　业 ____________ 班　级 ____________

学　号 ____________ 姓　名 ____________ 任课教师 ____________

第十一次作业

$\int_0^{+\infty} ae^{-y}\,dy$

$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ae^{-x-y}\,dxdy = 1$

一．填空题：

1．设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(x+y)}, & 0<x,y<+\infty \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则 $a=$ 1

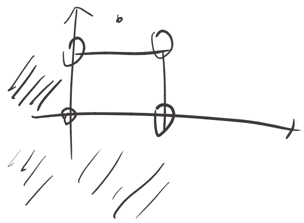
$P(X\le 2, Y\le 1)=$ $1+e^{-3}-e^{-2}-e^{-1}$

$\int_0^1 -(e^{-2-y}-e^{-y})\,dy$

$e^{-2-y}\big|_0^1 - e^{-y}\big|_0^1$

2．若二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$



$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 或 y<0 \\ \frac{1}{6}, & 0\le x<1,\ 0\le y<1 \\ \frac{5}{12}, & 0\le x<1,\ y\ge 1 \\ \frac{1}{2}, & x\ge 1,\ 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1,\ y\ge 1 \end{cases}$

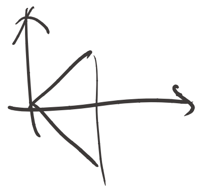
则随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 ____________

3. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，$i=1,2$，且满足 $P(X_1X_2=0)=1$，

则 $P(X_1=X_2)=$ 0 .

二. 选择题

（1）设 (X,Y) 服从二维均匀的分布，联合密度函数为



$$f(x,y)=\begin{cases}A, & 0<x<1,|y|<x \\ 0, & 其它\end{cases},\qquad 则常数 \boldsymbol{A}=(\ \ B\ \ ).$$

（A）$\frac{1}{2}$ (B) 1 (C)2 (D) 4.

（2）设（X，Y）的分布函数为 $F(x,y)$，则 $P\{X\geq a,Y>b\}=$（ C ）

1-

A. $F(a,b)$ B. $1-F(a,b)$

C. $1+F(a-0,b)-F(+\infty,b)-F(a-0,+\infty)$

D. $1+F(a,b)-F(+\infty,b)-F(a,+\infty)$

（3）设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度为 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则可以作为某个连续随机变量的概率密度函数的是（ D ）

A. $f_1(x)f_2(x)$ B. $2f_1(x)F_2(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$ D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

三. 计算题

1. 设二维随机向量 (ξ,η) 仅取 $(1,1),(2,3),(4,5)$ 三个点，且取它们的概率相同，求 (ξ,η) 的联合分布列。

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

$\xi\backslash\eta$	1	3	5
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	0
4	0	0	$\frac{1}{3}$

2. 某箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80，10，10 件，现在从中随机抽取一件，记 $X_i=\begin{cases}1 & 抽到i等品\\ 0 & 其他\end{cases}$，$(i=1,2,3)$

试求随机变量 X_1和 X_2 的联合概率分布。

$P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=P(A_3)=0.1$

解：

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$\cancel{\frac{1}{3}}$ 0.1	$\cancel{\frac{1}{3}}$ 0.1
1	$\cancel{\frac{1}{3}}$ 0.8	0

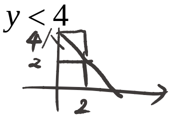
3. 将一硬币抛掷 3 次，X 表示 3 次中出现正面的次数，Y 表示 3 次中出现正面次数与反面次数之差的绝对值，求 X 和 Y 的联合分布率。

$X \sim B(3, 0.5)$

$X \backslash Y$	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

4．设随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}A(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$-x^2$

（1）确定常数A;（2）求$P\{X<1,Y<3\},P\{X+Y<4\}$

解：(1) $\int_0^2\int_2^4 A(6-x-y)\,dy\,dx=1$ $\int_0^2[2(6-x)-6A]dx=1$. $24-12A-4=1$

$A=\cancel{\frac{19}{12}}\ \frac{1}{8}$

(2) $P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3 A(6-x-y)\,dy\,dx=\frac{3}{8}$

$P\{X+Y<4\}=\int_0^2\int_2^{4-x} A(6-x-y)\,dy\,dx=\frac{2}{3}$

5. 若随机变量X, Y的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且满足$P(X^2=Y^2)=1$。求二维随机变量(X, Y)的联合概率分布。

解：

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

第十二次作业

一. 填空题:

1. 如果随机向量(ξ,η)的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	0.1	b 0.2
1	a	0.4

并且$P(\xi=1|\eta=1)=\dfrac{2}{3}$，则 a=$\underline{0.3}$, b=$\underline{0.2}$.

2. (ξ,η)的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
−1	$\frac{1}{15}$	t $\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
1	s $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

$\frac{4}{15}+t=\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}+s=\frac{3}{5}$

若ξ,η相互独立，则（s, t）=$\underline{\left(\frac{1}{10},\frac{2}{15}\right)}$。

$\frac{1}{2}$

3.设(X,Y)在以原点为中心，r为半径的圆域R上服从均匀分布，X 的边缘概率密度为$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & -R<x<R\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f(x,y)\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}\\ 0\end{cases}$

$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy$

$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy$

二. 选择题

（1）设随机变量X服从正态分布$N\left(\mu,4^2\right)$, 随机变量Y服从正态分布$N\left(\mu,5^2\right)$,

记$p_1=P\{X\le\mu-4\}$， $p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$, 则 A

A. 对任何实数μ, 都有$p_1=p_2$

B. 对任何实数μ, 都有$p_1<p_2$

C. 仅对μ的个别值, 有$p_1=p_2$

D. 对任何实数μ, 都有$p_1>p_2$

（2）设随机变量 X 的可能取值为 x_1, x_2， Y 的可能取值为 y_1, y_2, y_3， 若

$P(X=x_1, Y=y_1)=P(X=x_1)P(Y=y_1)$，则随机变量 X 和 Y （C ）

A．一定独立　　B．一定不独立　　C．不一定独立　　D. 以上答案都不对

（3）．设随机变量 X，Y 相互独立，服从相同的两点分布 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$，则（A）

A．$P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$ B．$P\{X=Y\}=\frac{1}{3}$ C．$P\{X=Y\}=0$ D．$P\{X=Y\}=\frac{1}{4}$

三. 计算题

1．设随机变量 ξ, η 的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{12}$	0	0	
	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$		

（1） 求边缘分布列；

（2） 在 $\eta=1$ 的条件下，ξ 的条件分布列；

（3） 问 ξ 和 η 是否独立？

(1)

ξ	0	1	2
$P_\xi(\xi)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

η	0	1	2
$P_\eta(\eta)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$

(2) $f_{\xi|\eta=1}(\xi|\eta) = \dfrac{f(\xi,1)}{P_\eta(1)}$

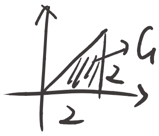
ξ	0	1	2
$f_{\xi|\eta=1}(\xi|\eta)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	0

(3) 任取 ξ,η，不满足 $f(\xi,\eta)=P_\xi(\xi)\cdot P_\eta(\eta)$

∴ 不独立.

2． 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}Axy & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



其中 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0<y\le x\}$，

（1） 求系数 A；

（2） X 和 Y 的边缘密度函数；

（3） 在给定 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$；

（4） X 和 Y 是否独立，为什么？ $\frac{1}{2}Axy^2$ $\frac{1}{8}Ax^4$

(1) $\int_0^2\int_0^x Axy\,dy\,dx=1 \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{2}Ax^3\,dx=1 \Rightarrow 2A=1$. $A=\frac{1}{2}$

(2) $p_X(x)=\int_0^x \frac{1}{2}xy\,dy=\frac{1}{4}x^3$，$0\le x\le 2$；0，其他

$p_Y(y)=\int_y^2 \frac{1}{2}xy\,dx=y-\frac{1}{4}y^3$，$0<y\le 2$；0 其它

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{x}{2-\frac{1}{2}y^2}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(4) 取 $(2,2)\in G$，

$f(2,2)=2$，$p_X(2)\cdot p_Y(2)=2\times 0=0\ne 2$.

∴不独立.

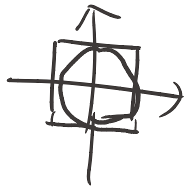
(不是矩形区间，不独立

3．设随机变量（X，Y）的联合密度为：$\phi(x,y)=\begin{cases} C & |x|<1,|y|<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

试求：(1)常数C；

(2) $P\{X+Y>\frac{1}{2}\}$ 及 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$；

(3) X 和 Y 的边缘密度函数



(1) 区域 $S=4$.　$C=\frac{1}{S}=\frac{1}{4}$.

(2) $S_{X+Y>\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{8}$. $P\{X+Y>\frac{1}{2}\}=C\cdot S_{X+Y>\frac{1}{2}}=\frac{9}{32}$

$S_{X^2+Y^2\le1}=\pi$, $P\{X^2+Y^2\le1\}=C\cdot S_{X^2+Y^2\le1}=\frac{\pi}{4}$.

(3) $\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\,dy=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

同理 $\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$