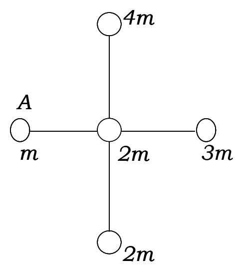
第三章 刚体的转动

1、五个质点的质量和分布情况如图所示，五个质点是用长为 l 的四根细杆（质量可忽略）连接着，求这整个系统绕通过A而垂直于质点系所在平面的轴的转动惯量。



解：$J_A = \sum m_i r_i^2$

$$= 2ml^2 + 3m(2l)^2 + 4m(\sqrt{2}l)^2 + 2m(\sqrt{2}l)^2$$

$$= 26ml^2$$

2、一飞轮直径为0.3m，质量为5Kg，边缘绕有绳子，现用恒力拉绳子的一端，使其由静止均匀的加速，经0.5s转速达10r/s。假定飞轮可看作实心圆柱体，求：

（1）飞轮的角加速度及在这段时间内转过的圈数；

（2）拉力和拉力所做的功；

（3）从拉动后 t=10s 时，飞轮的角速度及轮边缘上一点的速度和加速度。

解：（1） $\omega = \alpha t \qquad \alpha = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi\times 10}{0.5} = 1.26\times 10^2\,(s^{-2})$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad N = \frac{\theta}{2\pi} = 2.5\ (\text{转})$$

（2） $FR = J\alpha \qquad F = \dfrac{J\alpha}{R} = 47.3\,(\text{N})$

$$A = M\theta = J\alpha\,\theta = 111(J)$$

（3） $\omega = \alpha t = 1.26\times 10^3\ (rad/s)$

$$v = R\omega = 1.89\times 10^2\ (m/s)$$

$$a_n = R\omega^2 = 2.38\times 10^5\ (m/s^2)$$

$$a_t = R\alpha = 18.9\,(m/s^2)$$

3、一固定在机轴上的皮带轮，半径R=0.5m，由电机带动皮带轮转动，皮带轮对轴的转动惯量$J=40kg\cdot m^2$，皮带轮的紧边拉力$T_1=1600N$，松边拉力$T_2=700N$，轮轴中的摩擦阻力矩为$M_1=50N\cdot m$，问当机轴空载（即不带动其他的转动部件）时，起动后需要多少时间，皮带轮才能达到转速n=600r/min？

解：.由转动定律 $\sum M = J\alpha$

$$\alpha = \frac{\sum M}{J} = \frac{T_1R - T_2R - M_f}{J} = \frac{(1600-700)\times 0.5 - 50}{40} = 10\,\mathrm{rad/s^2}$$

根据匀加速转动 $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (\omega_0 = 0)$

$$\therefore \quad t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{n\cdot 2\pi}{\alpha} = \frac{10\times 2\times 3.14}{10} = 6.28\ (s)$$

4、一匀质圆盘，半径为R，质量为m，放在粗糙的水平桌面上，绕过其中心的竖直轴转动。如果圆盘与桌面的摩擦系数为μ，求：

（1）圆盘所受摩擦力矩的大小；

（2）若盘开始角速度为ω_0，经多长时间圆盘会停下？

解：（1）取半径为 r，宽为 dr 的小圆环元，其质量为 $dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$

它所受的摩擦力矩为

$$dM_f = r\mu g dm = \frac{2\mu m g}{R^2} r^2 dr$$

整个圆盘所受的摩擦力矩为

$$M_f = \int dM_f = \int_0^R \frac{2\mu m g}{R^2} r^2 dr = \frac{2}{3}\mu m g R$$

（2）根据转动定律

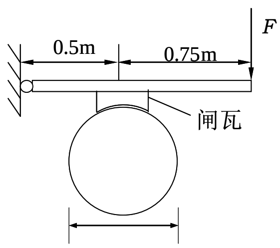
$$-M_f = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$-\frac{2}{3}\mu m g R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$\int_0^t dt = \int_{\omega_0}^0 -\frac{3}{4}\frac{R}{\mu g} d\omega$$

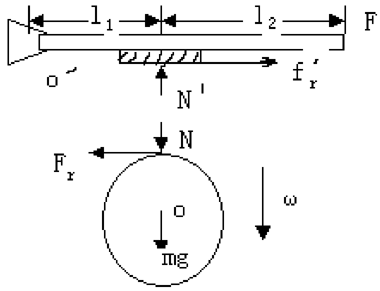
$$\therefore \quad t = \frac{3}{4}\frac{R}{\mu g}\omega_0$$

5、如图所示，飞轮的质量为60kg，直径为0.5m，飞轮的质量全部分布在轮外周上，转速为1000r/min，假定闸瓦与飞轮之间的摩擦系数μ=0.4，现要求在5秒内使其制动，求制动力F。



解：飞轮质量分布在圆周上的转动惯量为 $J=mR^2$ (1)

匀减速转动 $\omega=\omega_0+\alpha t$ $\alpha=\dfrac{0-\omega_0}{t}$ (2)



杆对 o_1' 力矩之和为零（杆静止）

$F(l_1+l_2)-Nl_1=0$ (3)

飞轮对 O 的力矩： $-F_r\cdot R=J\alpha$ (4)

$F_r=\mu N$ (5)

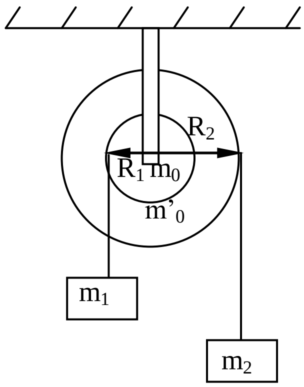
由（1）、（2）、（3）、（4）、（5）得

$$F=\frac{l_1}{l_1+_2}\times\frac{J\alpha}{\mu R}=\frac{l_1}{l_1+_2}\frac{mR^2\frac{\omega_0}{t}}{\mu R}=\frac{l_1}{l_1+_2}\cdot\frac{mR\omega_0}{\mu t}=314(N)$$

6、如图所示，两个鼓轮的半径分别为R_1和R_2，质量分别为m_0和m_0'，两者都可视为均匀圆柱体，而且同轴固结在一起，鼓轮可以绕一水平固定轴自由转动。今在两鼓轮上各绕以细绳，绳端分别挂上质量是m_1和m_2的两个物体。（设R_1=0.1m，R_2=0.2m，m_0=4kg，m_0' = 10kg，$m_1=m_2$=2kg，）求：

（1）当m_2下落时，鼓轮的角加速度？

（2）两侧绳的张力？



解：（1）设 a_1、a_2 和 α 分别是 m_1、m_2 和圆柱体的加速度和角加速度

$T_1-m_1g=m_1a_1$ (1)

$m_2g-T_2=m_2a_2$ (2)

$T_2R_2-T_1R_1=J\alpha$ (3)

$a_1=R_1\alpha$ (4)

$a_2=R_2\alpha$ (5)

$J=\dfrac{1}{2}m_0R_1^2+\dfrac{1}{2}m_0'R_2^2$ (6)

由上式解得： $\alpha=\dfrac{R_2m_2-R_1m_1}{J+m_2R_2^2+m_1R_1^2}g$

$$=\frac{(0.2\times2-0.1\times2)\times9.8}{\frac{1}{2}\times10\times0.20^2+\frac{1}{2}\times4\times0.10^2 2\times0.20^2+2\times0.10^2}=6.13\,{}^{rad}\!/\!_{s^2}$$

（2） $T_1=m_1R_1\alpha+m_1g=2\times0.10\times0.13+2\times9.8=20.8N$

$T_2=m_2g-m_2R_2\alpha=2\times9.8-2\times0.20\times6.13=17.1N$

7、一飞轮的转动惯量为 J，开始制动时的角速度为ω_0，设阻力矩与角速度的平方成正比，比例系数为 k，求使角速度减少为起始时的三分之一时所经过的时间？

解：由题意和转动定律得

$$-k\omega^2 = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{k}{J}dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{3}} \frac{d\omega}{\omega^2} = \int_0^t -\frac{k}{J}dt$$

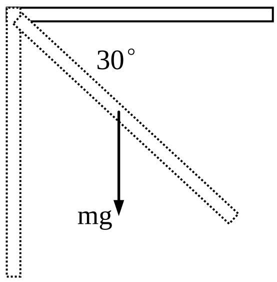
得 $t = 2J/\omega_0 k$

8、如图所示，已知质量为m，长为 l 的均匀细棒，可绕通过点0，垂直于棒的水平轴转动，若将棒由水平位置静止释放，求：

（1）开始释放时棒的角加速度？

（2）棒从水平位置转到垂直位置时棒的角速度 ？

（3）棒从水平位置转到 $\theta=30^0$，棒的角速度与棒中心点的切向和法向加速度？



解：（1）由转动定律 $mg\cdot\frac{l}{2} = (\frac{1}{3}ml^2)\alpha$

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

（2）由动能定理 $A = \int Md\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}J\omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{2A}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

（3）棒、地球系统机械能守恒

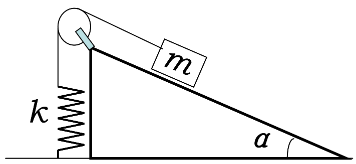
$$mg\frac{l}{2}\sin 30^0 = \frac{1}{2}J\omega'^2 \qquad \omega' = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

$$a_n = R\omega'^2 = \frac{l}{2}\frac{3g}{2l} = \frac{3}{4}g$$

$$mg\frac{l}{2}\cos 30^0 = \frac{1}{3}ml^2\alpha \qquad \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4l}g$$

$$\therefore a_t = R\alpha = \frac{l}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4l}g = \frac{3\sqrt{3}}{8}g$$

9、如图所示，物体质量为m，放在光滑的斜面上，斜面与水平面的倾角为α，弹簧弹性系数为k，滑轮的转动惯量为 J，半径为R。先把物体托住，使弹簧维持原长，然后由静止释放，求：物体沿斜面滑下距离 l 时的速度？



解：物体、弹簧、滑轮和地球系统机械能守恒

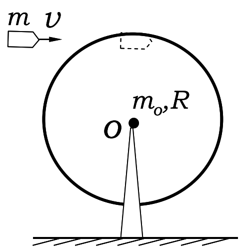
$$mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kl^2 \qquad (1)$$

$$v = R\omega \qquad (2)$$

由（1）（2）得

$$v = \sqrt{\frac{2mgl\sin\alpha - kl^2}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

10、一颗子弹质量为m，速度为v，击中能绕通过中心的水平轴转动的轮子（看作圆盘）边缘，并留在盘内，轮子质量为m_0，半径为R，求：击中后轮的角速度，角动量和转动动能？



解：子弹、轮子对转轴角动量守恒 $\quad mvR = (\frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2)\omega$

得 $$\omega = \frac{mvR}{\frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2} = \frac{2mv}{(m_0 + 2m)R}$$

角动量 $$L = (\frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2)\frac{2mv}{(m_0 + 2m)R} = mvR$$

转动动能 $$E_K = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2)\left[\frac{mvR}{\frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2}\right]^2 = \frac{m^2v^2}{m_0 + 2m}$$

11、一质量为20Kg的小孩，站在一半径为3m、转动惯量为450Kgm^{2}的静止水平转台的边缘上，此转台可绕通过转台中心的竖直轴转动，转台与轴间的摩擦不计。如果此小孩相对转台以 1m/s的速率沿转台边缘行走，问转台的角速度为多大？

解：设此时转台的角速度为ω_0，人相对地面的角速度为ω

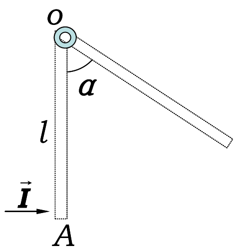
则有 $\omega = \omega_0 + \dfrac{v}{R}$

由角动量守恒得 $J_0\omega_0 + J_1(\omega_0 + \dfrac{v}{R}) = 0$

$$J_1 = mR^2$$

$$\omega_0 = -\frac{mR^2}{J_0 + mR^2} \times \frac{v}{R} = -9.52 \times 10^{-2}(1/s)$$

12、一质量为m，长为 l 的均匀直棒，能绕通过点O的水平轴在竖直平面内自由转动，此棒原来静止。现于A端作用与棒垂直的冲量I，使此棒获得角速度，然后从竖直位置摆到最大角度α，求此冲量的量值？



解：设直棒受冲击后得角速度为ω，由角动量原理

$$\int_0^t Fl\,dt = l\int_0^t F\,dt = Il = J\omega$$

棒上摆过程中棒、地球系统机械能守恒

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$

得 $I = \dfrac{m}{3}\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}$