第2章 解析函数

本章要讨论的问题：

1. 解析函数的概念
2. 复变函数可导与解析的判别法（C-R方程）
3. 初等函数的解析性
4. 解析函数与调和函数的关系

一、解析函数概念

定义 若函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 及 z_0 的某邻域内处处可导, 称 $f(z)$ 在 z_0 解析。

若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析, 则称 $f(z)$ 为 D 上的解析函数或称 $f(z)$ 在 D 内解析。

若 $f(z)$ 在点 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点。

注意:

(1) 函数在一点处解析与在一点可导不等价。

(2) 函数在区域内解析与在该区域内可导是等价的。

例1. 讨论函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性。

由前面的讨论可知, $f(z)=|z|^2$ 除了在 $z=0$ 处可导外,在复平面上处处不可导,因此, $f(z)=|z|^2$ 在复平面上处处不解析。

例2. 讨论函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的解析性。

由于 $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$

所以, $f(z)$ 除了 $z=0$ 外处处可导。

因此,函数 $\dfrac{1}{z}$ 在复平面上除了 $z=0$ 点外处处解析。

以上两例中, $z=0$ 都是 $f(z)$ 的奇点, 但前者在 $z=0$ 处可导, 后者在 $z=0$ 处不可导。

解析函数的性质:

(1) 若 $f(z)$、$g(z)$ 在 D 内解析, 则 $f(z)\pm g(z)$、$f(z)g(z)$、$f(z)/g(z)\,(g(z)\neq 0)$ 仍在 D 内解析。

(2) 若 $h=g(z)$ 在 z 平面上区域 D 内解析, 函数 $w=f(h)$ 在 h 平面上区域 G 内解析, 若对 $\forall z\in D$, $h=g(z)\in G$, 则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析;

(3) 设 $w=f(z)$ 在 D 内解析, 且 $\forall z\in D,\ f'(z)\neq 0$,
而 $w=f(z)$ 的反函数 $z=h(w)$ 在相应的区域
G 内连续, 则 $z=h(w)$ 在 G 内解析, 且 $h'(w)=\dfrac{1}{f'(z)}$

（4）一个解析函数不可能仅在一个点或一条曲线上解析；

所 有解析点的集合必为开集。

由以上性质可得如下结论：

多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在复平面上解析。

有理分式函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)\neq 0$ 的区域内为解析函数。

问题: 对函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,

如何判别其解析（可导）性？

换句话说:

$f(z)$的解析$\left(可导\right)$与u,v的偏导数之间有什么关系？

偏导定义. 设函数 $w=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内

极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

存在, 则称此极限为函数 $w=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x

的偏导数，记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $f_x(x_0,y_0)$；

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微 $\longrightarrow$ 函数在该点连续

定理1(必要条件) 若函数 $w = f(x, y)$ 在点(x, y) **可微**，则该函数在该点偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 必存在,且有

$$\mathrm{d} f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续, 则函数在该点可微分.

解析函数的充要条件

设函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点

$z=x+iy$可导,则

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

若沿平行于实轴的方式 $z+\Delta z \to z(\Delta y = 0)$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

偏导数的定义

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

若沿平行于虚轴的方式 $z+\Delta z \to z(\Delta x = 0)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\because f'(z)$存在

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

定义　　方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}}$$

称为柯西-黎曼Cauchy-Riemann方程(简称C-R方程).

定理 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$在 D 内有定义，

则 $f(z)$在点 $z=x+iy \in D$处可导的充要条件是

$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，且满足

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

上述条件满足时,有

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y - iu_y = v_y + iv_x$$

函数在区域 D 内解析的充要条件

定理二　函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微, 并且满足柯西－黎曼方程.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

说明:

(1) 是否满足$C-R$方程是定理的主要条件,如果 $f(z)$在 D内不满足$C-R$方程,那么$f(z)$在 D内一定不解析满足$C-R$方程是解析的必要条件。

(2) 若 $f(z)$在 D内满足 $C-R$方程,u、v具有一阶连续偏导数(从而v、v在 D内可微),则 $f(z)$在 D内解析。

解析(可导)$\Leftrightarrow u,v$可微且满足C-R方程

推论：若u,v在(x,y)处一阶偏导数连续且满足$C-R$方程,

则$f(z)=u+iv$在$z=x+iy$处可导.

推论: 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在D内有定义，

若 u_x、u_y、v_x、v_y存在且连续，并满足

$C-R$方程, 则 $f(z)$ 在 D内解析。

例：u(x,y)、v(x,y)如下：

$$u(x,y)=v(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

令$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则在点$z=0$满足

$C-R$方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

但$u(x,y)$、$v(x,y)$在点(0,0)不连续，所以复变函数$f(z)$在$z=0$不连续,从而不可导.

例3 判断以下函数的可导性与解析性:

(1) $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

(2) $f(z)=x^{2}+iy^{2}$

(3) $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$

解: (1) $u(x,y)=e^{x}\cos y,\ v(x,y)=e^{x}\sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y$$

在复平面内这四个偏导数处处连续，则 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 处处可微，且满足 $C-R$ 条件

于是，由定理知 $f(z)$ 在复平面上处处解析。

(2) $f(z)=x^2+iy^2$

$$u(x,y)=x^2,\quad v(x,y)=y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

在复平面连续且 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

但仅当 $y=x$ 时才有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

所以 $f(z)$ 仅在 $y=x$ 上可导,从而在复平面上处处不解析。

(3) $f(z)=z\operatorname{Re}z$

$$f(z)=z\operatorname{Re}z=(x+iy)x=x^2+ixy$$

$$u(x,y)=x^2, v(x,y)=xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=y, \frac{\partial v}{\partial y}=x$$

这四个偏导数在复平面内连续,但仅当 $x=y=0$ 时才满足 $C-R$ 条件,所以, $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 仅在 $z=0$ 点可导,故 $f(z)$ 在复平面处处不解析。

例4　设 $f(z)$ 在 D 内解析, 证明: 若满足下列条件之一, 则 $f(z)$ 在 D 内必为常数:

(1) $f'(z)=0$

(2) $\mathrm{Re}\, f(z)=$ 常数

(3) $|f(z)|=$ 常数

证： (1) 若 $f'(z)=0$, 即

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

所以 u、v 为常数, 即 $f(z)=u+iv$ 为常数。

(2) $\mathrm{Re}\, f(z)=$ 常数, 即 $u=$ 常数, 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

由 $C-R$ 方程得: $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

即 u、v 为常数, 从而 $f(z)$ 为常数。

(3) $|f(z)|$ 为常数,即 u^2+v^2 为常数,所以

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

代入 $C-R$ 方程: $u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0$

得到: $(u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0$

若 $u^2+v^2=0$, 则 $u=v=0$ 　则 $f(z)=0$

若 $u^2+v^2\neq 0$, 　则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 从而 u 为常数。

同理可推得 v 为常数。 所以 $f(z)$ 为常数。

2.2 初等函数及其解析性

1.指数函数

定义　对 $\forall z = x + iy$, 定义关系式

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

为复数域上的指数函数。

e^z 还可以用 $\exp(z)$ 表示。

特别地:

当 $y = 0$, 即 z 取实数时, 与实指数函数定义一致;

当 $z = iy$ 时, 得到 Euler 公式: $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

指数函数的性质：

(1) $|e^z| = e^x$, $Arg(e^z) = y + 2k\pi$ (k为整数)

(2) e^z 在复平面内处处有定义, 且是单值的;

$$e^z \neq 0$$

(3) 对$\forall\, z_1, z_2 \in C$, 有 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

（证明留作练习）

(4) e^z 以 $2\pi i$ 为周期

事实上, $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$,

$$e^{z+2n\pi i} = e^z \cdot e^{2n\pi i} = e^z$$

(5) e^z 当 $z\to\infty$ 时无极限

证：因为当 z 沿实轴正向趋于 $+\infty$ 时，

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x>0}} e^z = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

当 z 沿负实轴趋于 ∞ 时，

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x<0}} e^z = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

这些性质表明复变函数的指数函数保留了实的指数函数的全部优点.

(6) 指数函数 e^z 在整个复平面上解析，

并且 $(e^z)' = e^z$

例1 $|e^{z^2}| = \underline{e^{x^2-y^2}}$， $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = \underline{e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos(\frac{y}{x^2+y^2})}$

解：$e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+i2xy}$

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}}$$

二、对数函数

定义 满足方程 $e^w = z\ (z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$, 称为对数函数，记作 $w = \mathrm{Ln}\, z$

若令 $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$, 则 $e^{u+iv} = re^{i\theta}$

于是有：$e^u = r$, $v = \theta + 2k\pi\ \ (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$u = \ln r, \quad v = \mathrm{Arg}\, z\ \ (z \neq 0)$$

由此, 得到:

$$\boxed{w = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z \quad (z \neq 0)}$$

为多值函数

当 $\operatorname{Arg} z$ 取主值 $\arg z$ 时, $\operatorname{Ln} z$ 为一单值函数, 称为 $\operatorname{Ln} z$ 的主值, 记为

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\arg z}$$

因而

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi \quad (k = \pm1, \pm2, \ldots)$$

表示其它各分支, 对每个 k, 上式表示一个单值函数, 称为 $\operatorname{Ln} z$ 的一个分支。

特殊地, 当 $z = x > 0$ 时, $\operatorname{Ln} z$ 的主值 $\ln z = \ln x$, 是实变数对数函数.

例2 计算下列函数值及它们的主值:

$$(1)\ \mathrm{Ln}(-1) \quad (2)\ Ln(3-\sqrt{3}i) \quad (3)\ \mathrm{Ln}(e^{i})$$

解: $(1)\ \mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\,\mathrm{Arg}(-1)$

$$=\ln 1+i(2k\pi+\pi)$$

$$=(2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

当 $k=0$ 时, 得主值 $\ln(-1)=\pi i$

$$(2)\ \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)=\ln|3-\sqrt{3}i|+iArg(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i(2k\pi-\frac{\pi}{6}) \quad (k\text{为整数})$$

当$k=0$时, 得主值$\ln 2\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{6}i$

$$(3)\ \mathrm{Ln}(e^{i})=\ln|e^{i}|+i(\mathrm{Arg}\,e^{i})\qquad (\arg e^{i})=1$$

$$=0+(2k\pi+1)i$$

$$=i(1+2k\pi)\quad (k\text{为整数})$$

当$k=0$时, 得$\mathrm{Ln}\,e^{i}$的主值为i

例3　解方程　$e^z-1-\sqrt{3}i=0$

解：对 $e^z=1+\sqrt{3}i$ 两端取对数,得：

$$z=\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)=\ln|1+\sqrt{3}i|+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$$

$$=\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)\quad (k\text{取整数})$$

或：　令 $z=x+iy,\ e^{x+iy}=1+\sqrt{3}i,\quad e^x=|1+\sqrt{3}i|=2$

即有 $x=\ln 2,$

$$y=Arg(1+\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad (k\text{取整数})$$

所以　$z=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

注意:

在实函数中,对数函数的定义域是$(0,+\infty)$,而复对数函数的定义域是除$z=0$外的全体复数;

实对数函数是单值函数,而复对数函数是多值函数。

由辐角的性质,可以得到复对数的运算性质:

$$(1)\ \mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$$

$$(2)\ \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$$

注意:以上两式理解为两端可能取的函数值的全体是相同的。

连续性: $\ln z$在除去原点与负实轴外处处连续.

主值: $\ln z = \ln|z| + i\arg z$,

其中 $\ln|z|$除原点外在其它点均连续;

而 $\arg z$在原点与负实轴上都不连续.

$\therefore$除原点及负实轴外, $\ln z$在复平面内处处连续

对数函数的解析性：

主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$在除去原点和负实轴的复平面上是解析的

$$\text{并且}\ \frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}$$

$\mathrm{Ln}\,z$ 各分支在除去原点及负实轴的平面内也解析，且具有相同的导数值。

注解

1、对数函数$w = \mathrm{Lnz}$是定义在整个复平面减去原点上的多值函数;

2、对数函数的代数性质（运算性质）：

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Lnz}_1 + \mathrm{Lnz}_2$$

$$\mathrm{Ln}(z_1 / z_2) = \mathrm{Lnz}_1 - \mathrm{Lnz}_2$$

和幅角的加法一样上面的等式应该理解为集合相等，并且下面的等式将不再成立：

$$\mathrm{Lnz}^2 = 2\mathrm{Lnz}, \qquad \mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \tfrac{1}{n}\mathrm{Lnz}$$

而应是：$\mathrm{Lnz}^2 = 2\ln|z| + i2\arg z + 2k\pi i,$

$$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \tfrac{1}{n}\ln|z| + i\tfrac{1}{n}\arg z + 2k\pi i$$

三、幂函数

称 $w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}$ (a为任意复常数, $z \neq 0$) 为幂函数。

z^a 一般是多值函数 (除 a 为整数外)

(1)当a为整数时,

$$z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{a(\ln z + 2k\pi i)} = e^{a\ln z}\cdot e^{2ka\pi i} = e^{a\ln z}$$

为单值函数

(2)当$a = \dfrac{p}{q}$为有理数时($(p,q)=1$, p、q为正整数)

$$z^a = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$$有q个不同分支

(3)当a为无理数或复数时，z^a 有无穷多值。

解析性：

$a=n$为正整数时，z^n 在 z 平面解析，且 $(z^n)'=nz^{n-1}$

$a=-n$ (n为正整数)时，z^{-n} 在除去原点的复平面内解析。且 $(z^{-n})'=-nz^{-n-1}$

当$a=p/q$ (p、q 为整数)时，

由于Ln z 的各分支在除去原点和负实轴的复平面内解析，

因而 $z^{\frac{p}{q}}$ 各分支在除去原点和负实轴的复平面内也是解析的。 $\frac{d}{dz}z^a=az^{a-1}$

例4　求 i^i，$(1+i)^{1-i}$的值。

解：$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\, i} = e^{i^2(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$　(k 为整数)

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\mathrm{Ln}(1+i)}$$

$$= e^{(1-i)[\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}$$

$$= e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}[\cos(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})]$$

$(k = 0,\pm 1,\ldots)$

四、三角函数与双曲函数

由 Euler 公式, y 为实数时,

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y$$

从而有 $\sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},\quad \cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$

由此,我们定义复变量的三角函数:

正弦函数: $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

余弦函数: $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

均为单值函数。

性质：

(1) $\cos z$ 是偶函数, $\sin z$ 是奇函数, 即

$$\cos(-z)=\cos z,\quad \sin(-z)=-\sin z$$

(2) $\sin z$、$\cos z$ 以 2π 为周期;

(3) $\sin z$、$\cos z$ 在复平面内处处解析且

$$(\sin z)'=\cos z, (\cos z)'=-\sin z$$

(4) 三角恒等式成立

$$\sin(z_1 \pm z_2)=\sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(5) $\sin z$ 的零点是: $z = n\pi (n = 0, \pm 1, \cdots)$

$\cos z$ 的零点是 : $z = n\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots)$

(6) $|\sin z| \le 1$、$|\cos z| \le 1$不再成立。

例如:取 $z = iy$

因为 $\cos(iy) = \dfrac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} > \dfrac{e^{y}}{2}$

所以, 有 $|\cos iy| \to \infty$ (当 $y \to \infty$)

注意，$\cos^2 z, \sin^2 z$不总是非负的。

例如：
$$\sin^2(-3i) = \left[\frac{e^{i(-3i)} - e^{-i(-3i)}}{2i}\right]^2$$
$$= \left(\frac{e^3 - e^{-3}}{2i}\right)^2 = -\frac{(e^3 - e^{-3})^2}{4}$$

其它三角函数：

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

双曲函数:

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$\sinh z$ 和 $\cosh z$ 在复平面内解析,并且

$$(\sinh z)'=\cosh z,\quad (\cosh z)'=\sinh z$$

双曲函数与三角函数的关系: **(利用定义即可推得)**

$$\sinh iz=i\sin z,\quad \cosh iz=\cos z,$$

$$\sin iz=i\sinh z,\quad \cos iz=\cosh z,$$

$$\cosh^{2}z-\sinh^{2}z=1$$

例5　解方程: $\sinh z = i$

解: 方程等价于 $\dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = i$

即　$(e^z)^2 - 2ie^z - 1 = 0$

所以有

$$e^z = i,$$

$$z = \mathrm{Ln}\, i = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

§ 2.3解析函数与调和函数的关系

调和函数:如果实二元函数$u(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导数,并且满足*Laplace*方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

则称$u(x,y)$为区域D内的 **调和函数**:

定理 任何在区域D内解析的函数它的实部和虚部都是D内的调和函数。

证明: 设 $f(z)=u+iv$ 为D内的解析函数

则 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

由于解析函数具有任意阶导数

则 u 与 v 具有任意阶连续偏导数，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

即 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 都是调和函数

共轭调和函数

设 $u(x,y)$,$v(x,y)$是区域D内的两个调和函数

且满足C-R方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

则称 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$在区域D内的共轭调和函数.

定理 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内解析的充要条件是：$v(x,y)$是$u(x,y)$的共轭调和函数

注意: 若$u(x,y)$,$v(x,y)$是区域D内的任意两个调和函数,$u(x,y)+iv(x,y)$不一定是解析函数.

已知一个解析函数的实部 $u(x,y)$（或虚部 $v(x,y)$），可求其虚部 $v(x,y)$（或实部 $u(x,y)$）.

例1 验证 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，并求其共轭调和函数 $v(x,y)$，从而构成一个解析函数 $f(z)=u+iv$

解： 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\quad u(x,y)$ 为调和函数。

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$，得

$$v=\int -6xydy=-3xy^2+g(x) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x)$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$，得： $-3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2$

$$g(x)=\int 3x^2dx=x^3+C \qquad v(x)=x^3-3xy^2+C$$

从而得到解析函数:

$$f(z)=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+C)$$

例2 已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+xy$

求一个满足条件$f(0)=0$的解析函数$f(z)=u+iv$

解法一：（偏积分法）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$$

由$C-R$条件得：$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y$$

于是 $$v=\int(2x+y)dy=2xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x) \quad =-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x$$

$$\varphi'(x) = -x \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$v(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

从而得到:

$$f(z) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C)$$

代入 $f(0)=0$, 解得 $C=0$

由此得到解析函数:

$$f(z) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}(2-i)z^2$$

解法二：（凑微分法）

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$$

$$=2x+y-i(-2y+x)$$

$$=2x+i2y+y-ix$$

$$=2(x+iy)-i(x+iy)=(2-i)z$$

$$f(z)=\frac{1}{2}(2-i)z^2+C$$

再利用 $f(0)=0$，得到 $C=0$

所以，有 $f(z)=\frac{1}{2}(2-i)z^2$

解法三（利用第二型曲线积分）

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$

由$C-R$条件 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x+2y$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx+(2x+y)dy$$

$$=\int_0^x(-x)dx+\int_0^y(2x+y)dy$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+C$$

$$f(z)=x^2-y^2+xy+i(2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+C)$$

利用 $f(0)=0$, 求出$C=0$

注：1、已知调和函数求共轭调和函数通常采用以上三种方法，对于较简单的函数可采用凑微分法，较复杂的函数通常采用偏积分法或线积分法。

2、一般地，将形如 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的函数化为关于z的函数有以下三种方法：

（1）将$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}), y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$带入$u(x,y)+iv(x,y)$可$f(z)$;

（2）将 $u(x,y)+iv(x,y)$的各项通过分解拼凑成$x+iy$的因式得到$f(z)$;

（3）若$f(z)$解析，设$u(x,y)+iv(x,y)$中的$y=0$,得到$f(x)$,再写成z的函数$f(z)$.

内 容 小 结

1. 解析函数的概念；

2. 函数解析性与可导性的判别

3. 初等函数中的多值函数及主值的概念

4、已知调和函数求解析函数

思考与练习

已知 $v(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x},\ \ x>0$

求解析函数 $f(z)=u+iv$, 使得 $f(1)=0$

解答：因为$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

即$v(x,y)$满足*Laplace*方程，所以，$v(x,y)$是调和函数

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial y}dy=\int-\frac{\partial v}{\partial x}dy=\int\frac{y}{x^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(x)$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+g'(x)=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

得 $g'(x)=0$

所以 $g(x)=C$（C为任意常数）

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}+C$$

又由 $f(1)=0$，则 $C=0$

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$$

$$=\ln|z|+i\arg z$$