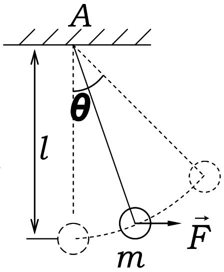
第二章 守恒定律

1、质量为m的小球系于绳的一端，绳长为l，上端A 固定，(如图示)。今有水平变力$\vec{F}$作用在该小球上时，使小球极其缓慢地移动，即在所有位置上均处于近似力平衡状态，直到绳子与竖直方向成θ角，

（1）试用变力作功方法计算$\vec{F}$ 力的功；（2）重力作功多大？

均



解：根据力的平衡可得：

$$\begin{cases} F = T\sin\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases}$$

处于近似力平衡状态的水平变力：$\therefore \quad F = mg\tan\theta$

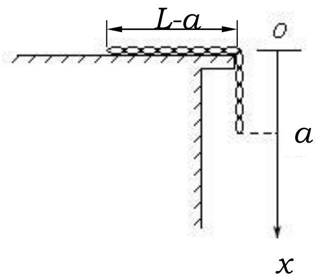
（1）该变力作功 $A_F = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int F ds\cos\theta = \int mg\tan\theta \cdot l\, d\theta\cos\theta$

$$= mg\, l\int_0^\theta \sin\theta d\theta = mg\, l(1-\cos\theta)$$

（2）重力作功 $A_P = \int m\vec{g}\cdot d\vec{s} = \int mg ds\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = mg\, l\int_0^\theta(-\sin\theta)d\theta = -mgl\,(1-\cos\theta)$

2、一根均匀链条的质量为m，总长为 l ，一部分放在光滑的桌面上，另一部分从桌面边缘下垂，下垂的长度为a，开始时链条静止，求链条刚好全部离开桌面时的速率。

解：根据机械能守恒，设桌面为重力势能的零点



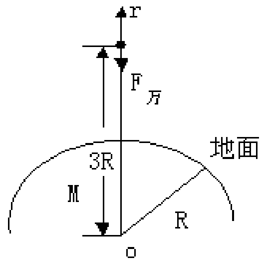
$$-\frac{m}{l}a\,g\frac{a}{2} = --mg\frac{l}{2}+\frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\, l^2 - a^2\right)}$$

3、地球质量M、半径R，一质量m的质点处于距地心 r=3R处，求质点地球系统在此相对位置时的引力势能，

（1）取无穷远处为零势能参考位置；

（2）取地球表面为零势能参考位置。



解：（1）取 $E_p(\infty)=0$ 则

质点地球系统在此相对位置时的引力势能：

$$E_p=\int_{3R}^{\infty}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{s}=\int_{3R}^{\infty}-G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\frac{1}{r}\Big|_{3R}^{\infty}=-\frac{GMm}{3R}$$

(2) 取 $E_p(R)=0$ 则：

质点地球系统在此相对位置时的引力势能：

$$E_p=\int_{3R}^{R}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{s}=\int_{3R}^{R}-G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\frac{1}{r}\Big|_{3R}^{R}=\frac{2GMm}{3R}$$

4、在地球表面上垂直向上以第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2gR}$ 发射一物体，R为地球半径，g为重力加速度，试求此物体到达与地心相距为nR时所需的时间。

解：设物体运动到距地心x时其速度v，此过程中机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{x}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{mM}{R}$$

$$\because\quad v_2=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{mM}{R}=0$$

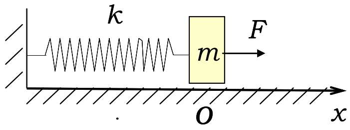
$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{x}=0\Rightarrow v=\sqrt{2GM}\,x^{\frac{1}{2}}=\frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^t dt=\int_R^{nR}\sqrt{2GM}\,x^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow t=\frac{2}{3}\frac{R}{v_2}(n^{\frac{3}{2}}-1)$$

5、弹簧的弹性系数为k，一端固定，另一端与质量为m的物体相连，物体与桌面的摩擦系数为μ，若以不变的力F拉物体由平衡位置0自静止开始运动，求：

（1）物体到达最远处离平衡位置的距离。

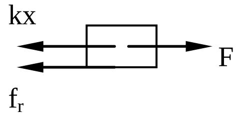
（2）物体在什么位置速度最大？最大速度为多少？



解：（1）物体、弹簧为系统，根据功能原理。

不变的力 F 拉物体得：$(F-\mu mg)x_{max}=\frac{1}{2}kx^2$

$$x_{max}=\frac{2(F-\mu mg)}{k}$$



（2）速度最大处为水平合力瞬时为 0 处（即力的平衡位置）

此时弹簧伸长为 x_0：

$$F-\mu mg-kx_0=0$$

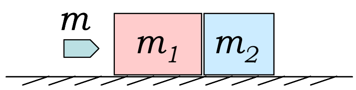
$$x_0=\frac{F-\mu mg}{k}$$

由功能原理得：$(F-\mu mg)x_0=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv^2-0$

$$\therefore \quad v=\frac{F-\mu mg}{\sqrt{km}}$$

6、A、B两木块，质量分别为m_A、m_B，并排放在光滑的水平面上。今有一子弹水平地穿过木块A、B，所用时间分别为Δt_1和Δt_2，若木块对子弹的阻力为恒力F，求子弹穿过后两木块的速度？

解：未击穿 A 时，m_A、m_B一起运动，根据动量定理



$$F\Delta t_1=(m_A+m_B)v_A-0$$

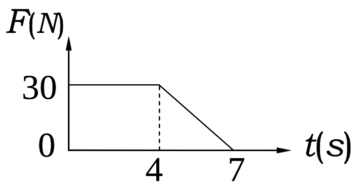
$$v_A=\frac{F\Delta t_1}{m_A+m_B}$$

子弹击穿 A 进入 B 后，A 保持原速，B 受力变速，则：

$$F\Delta t_2=m_B v_B-m_B v_A$$

$$v_B=\frac{F\Delta t_2}{m_B}+\frac{F\Delta t_1}{m_A+m_B}$$

7、一质量m=10kg 的木箱，在水平拉力F的作用下由静止开始运动，若拉力F随时间变化关系如图所示，已知木箱与地面间的摩擦系数μ=0.2 试从动量原理求t=4s，t=7s，t=6s时的木箱的速度各为多大？



解：由图可知水平力的函数关系：

$$F=\begin{cases}30 & 0\le t\le 4\\ 70-10t & 4\le t\le 7\end{cases}$$

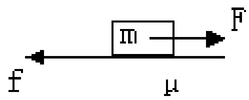
4秒内得到的冲量： $I=\int_0^4(F-\mu mg)dt=mv_4-0$

$$\therefore\quad v_4=4\,\mathrm{m/s}$$

7秒内得到的冲量： $I=I_F+I_f=30\times4+\frac{1}{2}\times30\times(7-4)-0.2\times10\times10\times7=mv_7-0$

$\therefore\quad v_7=2.5\,\mathrm{m/s}$

4 秒到 6 秒得到的冲量： $I=\int_4^6[70-10t-0.2\times10\times10]dt=$

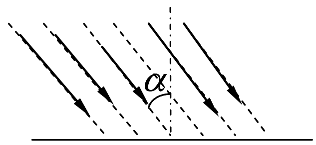


$\therefore\quad v_6=4\,\mathrm{m/s}$

8、雨天，大量雨滴以速率 v 落在表面积为 S 的屋顶上，已知雨滴下落方向与屋顶平面的法线成α角，雨滴在单位体积内的雨滴数为 n，每一雨滴的质量为 m。设雨滴落到屋顶后速率变为零，求雨滴对屋顶产生的平均正压力。

解：设 M 为Δt时间内落到屋顶的总质量

根据动量定理屋顶对其的冲量为动量的变化；



$$\bar{f}_n\Delta t=0-Mv\cos\alpha=-(nv\Delta t\cos\alpha S)mv\cos\alpha$$
$$=-nv^2m\cos^2\alpha S\Delta t$$

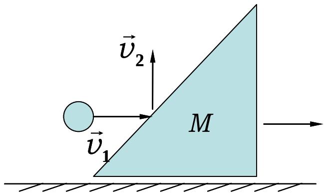
$$\therefore\quad \bar{f}_n=-nmv^2\cos^2\alpha S$$

屋顶受到的压力大小与$\bar{f}_n$相同，方向相反

$\therefore$ 平均压力 $P=\frac{\bar{f}'_n}{s}=nmv^2\cos^2\alpha$

9、如图所示，质量为 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动．一质量为 m 的小球水平向右飞行，以速度 $\vec{v}_1$（对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速率为 v_2（对地）．若碰撞时间为 Δt，试计算此过程中滑块对地的平均作用力和滑块速度增量的大小．

解：(1) 碰撞中小球 m 给 M 的竖直方向冲力在数值上应等于 M 对小球的竖直冲力．根



据动量定理得 $\overline{f} = \dfrac{m\upsilon_2}{\Delta t}$

对 M，由牛顿第二定律，在竖直方向上

$\overline{N} - Mg - \overline{f} = 0$， $\overline{N} = Mg + \overline{f}$

又由牛顿第三定律，M 给地面的平均作用力也为

$$\overline{F} = \overline{f} + Mg = \frac{m\upsilon_2}{\Delta t} + Mg$$ 方向竖直向下．

(2) 解法 1 M 受小球的水平方向冲力为 $\overline{f}' = \dfrac{m\upsilon_1}{\Delta t}$，方向与 m 原运动方向一致

对 M 用动量定理 $\overline{f}' = M\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}, \Rightarrow \Delta \text{v} = m\text{v}_1\ M$

解法 2：小球和木块碰撞过程中，在水平方向动量守恒，设木块碰撞前的速度为 v_0，有方程

$$M(v_0 + \Delta v) = Mv_0 + mv_1,$$

利用上式的 $\overline{f}'$，即可得 $\Delta\upsilon = m\upsilon_1 / M$

10、A、B两条船，质量都为m，静止在平静的湖面上，A船上有一质量为m/2的人，以水平速度u相对A船从A船跳到B船上。如果忽略水对船的阻力，求人跳到B船后，A船和B船的速度。

解：设 v_A 为 A 船对地的速度，v_B 为 B 船对地速度，在人跳出 A 船的过程中，水平方向无外力作用——人、A 船系统动量守恒定理，即

A 船：$0 = \text{m}\text{v}_A + \dfrac{\text{m}}{2}(\text{u} + \text{v}_A)$

得 $\text{v}_A = -\dfrac{1}{3}\text{u}$ 方向与人跳出速度方向相反

同理人跳入 B 船过程，人、B 船系统水平方向动量守恒

B 船：$\dfrac{\text{m}}{2}\text{v}_{人地} = \dfrac{\text{m}}{2}(\text{u} - \dfrac{\text{u}}{3}) = (\dfrac{\text{m}}{2} + \text{m})\text{v}_B$

得 $\text{v}_B = \dfrac{2\text{u}}{9}$ 方向与人跳入速度方向相同

11、水平桌面上铺一张纸纸上放一个均匀球，球的质量为0.5kg,将纸向右拉时会有 $f=0.1N$ 摩擦力作用在球上。求该球的球心加速度 a_c 以及在从静止开始的2.0秒内，球心相对桌面移动的距离。

解：匀质球球心为质心

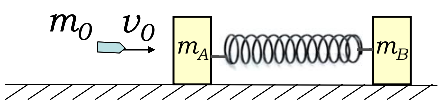
水平方向的合力：$f=ma_c \Rightarrow a_c=\dfrac{f}{m}=0.2m/s^2$

匀加速运动：$s=\dfrac{1}{2}a_c t^2=0.4m$

12、滑块A和B的质量分别为m_A、m_B，用弹性系数为k的弹簧相连，并置于光滑的水平面上，最初弹簧处于自由长度。质量为m_0 的子弹以速度v_0沿水平方向射入滑块A内，试求弹簧的最大 压缩量。

解：（1）子弹击中木块 A 到他们取得共同速度 v_1 为止。此时弹簧还未被压缩（冲力），子弹、A 系统动量守恒，即

$$m_0 v_0=(m_0+m_A)v_1 \qquad (1)$$



（2）子弹与木块 A 取得同速度 v_1 到弹簧达到最大压缩为止，这时 A、B 具有共同速度 v_2，子弹、弹簧、A 和 B 系统动量守恒和机械能守恒：

$$(m_A+m_0)v_1=(m_A+m_B+m_0)v_2 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}(m_A+m_0)v_1^2=\frac{1}{2}(m_A+m_B+m_0)v_2^2+\frac{1}{2}kx^2 \qquad (3)$$

由（1)、(2)、(3）解得

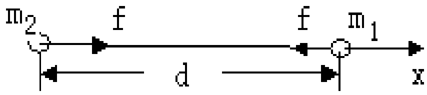
$$x=\sqrt{\frac{m_B m_0^2 v_0^2}{k(m_A+m_0)(m_A+m_B+m_0)}}$$

13、有两个质量分别为m_1、m_2的行星，开始相距为无限远处，可看作静止，由于万有引力作用，它们彼此接近，当它们接近相距为d时，它们接近的相对速度为多大？

解：m_1、m_2为系统，仅有内力为保守力，所以系统动量守恒，机械能守恒

$$m_2v_2-m_1v_1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-G\frac{m_1m_2}{d}=0 \qquad (2)$$



由（1)、（2）解得

$$v_1=m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)d}}$$

$$v_2=m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)d}}$$

两粒子的相对速度 v_r （$\vec{v}_{21}=\vec{v}_{2地}+\vec{v}_{地1}=\vec{v}_{2地}-\vec{v}_{1地}$）

$$\therefore \qquad v_r=v_2-(-v_1)=v_2+v_1=\sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{d}}$$

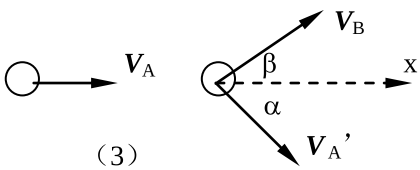
14、质量为$7.2\times10^{-23}Kg$、速率为$6\times10^7 m/s$的粒子A与另一个质量为其一半而静止的粒子B发生二维完全弹性碰撞，碰撞后粒子A的速率为$5\times10^7 m/s$，求：

（1）粒子B的速率及相对粒子A 原来速度方向的偏角；

（2）粒子A的偏转角。

解：动量的水平分量守恒：$mV_A=\frac{m}{2}V_B\cos\beta+mV'_A\cos\alpha$ （1）

动量的竖直分量守恒：$0=\frac{m}{2}V_B\sin\beta-mV'_A\sin\alpha$（2）



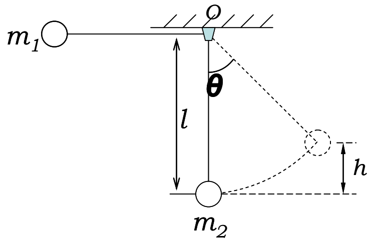
弹性碰撞能量守恒：$\frac{1}{2}mV_A^2=\frac{1}{2}(\frac{m}{2})V_B^2+\frac{1}{2}mV_A'^2$ （3）

由（1)、（2)、（3）式得

$V_B=4.69\times10^7(m/s)$ $\qquad \alpha=22^0 20'$ $\qquad \beta=54^0 6'$

15、已知两根长为 l 的绳子，一端固定于 o 点，质量分别 m_1 和 m_2 的小球系于它们的另一端。如把 m_1 拉至水平位置放下，使 m_1、m_2 发生对心碰撞（完全弹性碰撞），设 $m_1=3m_2$。求碰后 m_2 沿圆周上升的高度。

解： m_1 小球下落机械能守恒：

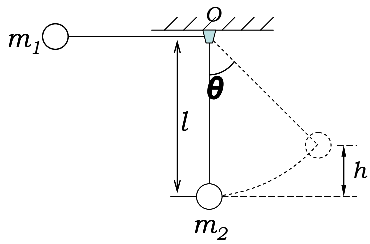


$$m_1 gl = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2; v_{10} = \sqrt{2gl}$$

对心碰撞水平方向动量守恒 $m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2$

对心碰撞能量量守恒

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$



解得：$v_1 = \frac{1}{2} v_{10}, v_2 = \frac{3}{2} v_{10}$，$m_2$ 将跃过 O 点！

M_2 小球上升机械能守恒：

$$m_2 gl(1+\cos\theta) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

M_2 小球法向力：$T + m_2 g\cos\theta = m_2 \frac{v_2^2}{l}$

m_2 跃过 O 点重力法向分力与拉力组成法向合力：

$T = 0; m_2 g\cos q = m_2 \frac{v_2^2}{l}; \cos q = \frac{5}{6}$；得到：$h = \frac{11}{6} l$

16、一质量为 m 的质点沿空间曲线运动，该曲线在直角坐标下的位置矢量为

$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$ （a, b, ω 均为常数）

求：相对于坐标原点，质点所受力矩及质点的角动量。

解：m 质点的速度： $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega \sin\omega t\,\vec{i} + b\omega \cos\omega t\,\vec{j}$

m 质点的加速度： $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -a\omega^2 \cos\omega t\,\vec{i} - b\omega^2 \sin\omega t\,\vec{j} = -\omega^2 \vec{r}$

相对于坐标原点，质点所受力矩：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} \quad \therefore \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

相对于坐标原点，质点的角动量：

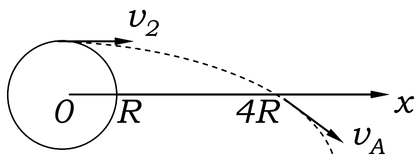
$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon} = mab\omega \cos^2 \omega t\,\vec{k} - mab\omega \sin^2 \omega t(-\vec{k})$$

$$= mab\omega\vec{k}$$

17、火箭以第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2Rg}$沿地面表面切向飞出，在飞离地球过程中，火箭发动机停止工作，不计空气阻力，则火箭在距地心 4R 的 A 处速度的大小和方向？

解：火箭在万有引力的作用下运动，对地心的角动量守恒

$$mv_2R = m4Rv\sin\theta \qquad （1）$$



火箭、地球系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{4R} \qquad （2）$$

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \qquad （3）$$

由（1）、（2）、（3）联立解得

$$v = \sqrt{\frac{gR}{2}} \qquad \theta = 30^0$$

18、质量为m_1=0.2kg的框子，用一弹簧悬挂起来，弹簧伸长0.1m，今有质量为m_2=0.2kg的油灰由距离框底0.3m高处的位置自由落到框上（如图）。求：油灰冲撞框子而使框向下移动的最大距离？

解：（1）m_2自由落体（2）m_1、m_2完全非弹性碰撞（3）m_1、m_2、弹簧、地球系统机械能守恒（设$E_{P弹}(原长)=0$，$E_{P重}(D)=0$）

$$m_1g = kx_1 \rightarrow k = m_1g/x_1 = 20\,N/m$$

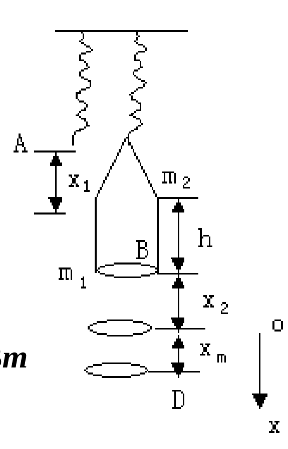
$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

$$m_2v = (m_1+m_2)V \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + (m_1+m_2)g(x_2+x_m) + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(x_1+x_2+x_m)^2 \qquad (3)$$

又 $$x_1 = m_1g/k \qquad (4)$$

$$x_1 + x_2 = (m_1+m_2)g/k \qquad (5)$$



由（1）——（5）联立解得

$$x_m = \sqrt{\frac{m_2^2g^2}{k^2} + \frac{2m_2^2gh}{k(m_1+m_2)}} = 0.2m$$

$$\boldsymbol{\therefore x = x_2 + x_m = \frac{m_2g}{k} + x_m = \frac{0.2\times10}{20} + 0.2 = 0.3m}$$