

## 华东理工大学

### 复变函数与积分变换作业本 (第3册)

#### 第五次作业

教学内容: 3.1 复变函数积分概念      3.2 柯西积分定理

1. 计算积分  $\int_C \operatorname{Re} z dz$ , 其中积分路径  $C$  为:

- (1) 从原点到  $1+i$  的直线段;
- (2) 从原点到点 1 的直线段, 以及连接由点 1 到  $1+i$  的直线段所组成的折线。

解:

(1) 直线段的参数方程为

$$z = (1+i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\text{故 } \int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 \operatorname{Re}[(1+i)t](1+i)dt = \frac{1+i}{2}$$

(2) 从原点到点 1 的直线段的参数方程为

$$z = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

连接由点 1 到  $1+i$  的直线段的参数方程为

$$z = (1+i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

故

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 \operatorname{Re}[t]dt + \int_0^1 \operatorname{Re}[(1+i)t]dt = \frac{1}{2} + i$$

2. 计算积分  $\int_C (x-y+ix^2)dz$ , 其中  $C$  为从原点到  $1+i$  的直线段。

解: 积分曲线的方程为  $x=t, y=t$ , 即  $z=x+iy=t+ti, t:0 \rightarrow 1$ , 代入原积分表达式, 得

$$\begin{aligned} \int_C (x-y+ix^2)dz &= \int_0^1 (t-t+it^2)(t+it)'dt \\ &= \int_0^1 it^2(1+i)dt = \frac{-1+i}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{-1+i}{3} \end{aligned}$$

3. 计算积分  $\int_C e^z dz$ , 其中  $C$  为从 0 到 1 再到  $1+i$  的折线

解: (1) 从 0 到 1 的线段  $C_1$  方程为:  $z=x+iy=x, x:0 \rightarrow 1$ ,

从 1 到  $1+i$  的线段  $C_2$  方程为:  $z=x+iy=1+iy, y:0 \rightarrow 1$ ,

代入积分表达式中, 得

$$\begin{aligned}
\int_C e^z dz &= \int_{C_1} e^z dz + \int_{C_2} e^z dz = \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 e^{1+iy} (1+iy)' dy \\
&= e^x \Big|_0^1 + ei \int_0^1 (\cos y + i \sin y) dy = e - 1 + ei(\sin y - i \cos y) \Big|_0^1 \\
&= e^{1+i} - 1 \quad (\text{与路径无关})
\end{aligned}$$

4. 计算积分  $\oint_C |z| \bar{z} dz$ , 其中  $C$  是由直线段  $-1 \leq x \leq 1, y = 0$  及上半单位圆周组成的正向闭曲线。

解:  $C = C_1 + C_2$ ,  $C_1$  表示为  $z = x + iy$ ,  $(-1 \leq x \leq 1, y = 0)$ ;

$C_2$  表示为  $z = x + iy = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ),  $dz = (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta$ ,

$$\begin{aligned}
\oint_C |z| \bar{z} dz &= \int_{C_1} |z| \bar{z} dz + \int_{C_2} |z| \bar{z} dz \\
&= \int_{-1}^1 |x| x dx + \int_0^\pi (\cos \theta - i \sin \theta)(-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta \\
&= \pi i
\end{aligned}$$

5. 设  $f(z)$  在单连域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内任何一条正向简单闭曲线, 问

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz = \oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz = 0$$

是否成立, 如果成立, 给出证明; 如果不成立, 举例说明。

证: 未必成立。令  $f(z) = z, C: |z| = 1$ , 则  $f(z)$  在全平面上解析, 但是

$$\begin{aligned}
\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[e^{i\theta}] d e^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \cos \theta (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = \pi i \neq 0 \\
\oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[e^{i\theta}] d e^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \sin \theta (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = -\pi \neq 0
\end{aligned}$$

6. 观察得出下列积分的值, 并说明理由。

$$(1) \oint_{|z|=1.5} e^z (z^2 + 1) dz;$$

解: 0 由于被积函数在复平面上处处解析, 由柯西积分定理知积分为零。

$$(2) \oint_{|z|=1.5} \frac{3z+5}{z^2+2z+3} dz;$$

解: 0。由于被积函数在  $|z| \leq 1.5$  内处处解析, 由柯西积分定理知积分为零。

$$(3) \oint_{|z|=r} \ln(1+z) dz \quad 0 < r < 1$$

解: 0 由于被积函数在复平面上除去  $z = -1$  开始的负实轴外处处解析, 由柯西积分定理知

积分为零。

$$(4) \oint_{|z|=1} \frac{1}{\cos z} dz$$

解：0 由于被积函数在  $|z|=1$  所围成的区域解析，由柯西积分定理知积分为零。

7. 沿下列指定曲线的正向计算积分  $\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$  值：

$$(1) C: |z| = \frac{1}{2};$$

解：原式

$$\begin{aligned} &= \oint_C \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)} \right] dz \\ &= 2\pi i - 0 - 0 = 2\pi i \end{aligned}$$

$$(2) C: |z+i| = \frac{1}{2};$$

$$\text{解：} \oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)} = \oint_C \frac{1}{z} dz - \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z+i} dz = 0 - 0 - \pi i = -\pi i$$

8. 设  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内解析，且不为零， $C$  为  $D$  内任何一条简单光滑闭曲线，判断积

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{是否为零？说明理由。}$$

解：等于零。因  $f(z)$  在  $D$  内解析，故  $f(z)$  具有各阶导数且仍为解析函数，从而  $f'(z)$  在

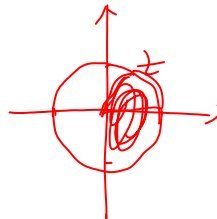
$D$  内也解析，又因在  $D$  内  $f(z) \neq 0$ ，故  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  在  $D$  内解析，从而在  $C$  上及  $C$  的内

部也解析，于是由 Cauchy-Goursat 定理， $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ 。

9. 设区域  $D$  为右半平面， $z$  为  $D$  内的圆周  $|z|=1$  上的任意一点，用在  $D$  内的任意一条曲线

$C$  连接原点与  $z$ ，证明：

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2} \right] = \frac{\pi}{4}$$



证明：函数  $\frac{1}{1+\xi^2}$  在右半平面解析，故从 0 到  $z$  沿任意曲线  $C$  的积分与路径无关，积分路

径换为先沿实轴从 0 到 1，再沿圆周到  $z$  点。

$$\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\theta \frac{ie^{i\eta}}{1+e^{2i\eta}} d\eta$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{i}{2\cos\eta} d\eta$$

$$\text{所以 } \operatorname{Re}\left[\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

10. 计算下列积分:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 z dz ;$$

$$\text{解: } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 z dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2z}{2} dz = \left(\frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4}\right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi\right)i$$

$$(2) \int_1^i \frac{\ln(z+1)}{(z+1)} dz .$$

解: 由于被积函数在复平面上除去  $z < -1$  上的点外处处解析, 因此积分与路径无关。  
所以

$$\text{原式} = \int_1^i \ln(z+1) d \ln(z+1) = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{-1}{8} \left( \frac{\pi^2}{4} + 3 \ln^2 2 \right) + \frac{i\pi}{8} \ln 2$$

$$(3) \int_L (z+1)e^z dz, \quad L \text{ 为 } |z|=1 \text{ 的上半圆周.}$$

解: 由于被积函数为解析函数, 所以积分与路径无关

$$\int_L (z+1)e^z dz = \int_{-1}^1 (z+1)e^z dz = -2 \cos 1$$

$$(4) \int_L (z^2 + 7z + 1) dz, \quad L \text{ 为 } z_1 = 1 \text{ 到 } z_2 = 1-i \text{ 的直线段}$$

解: 由于被积函数为解析函数, 所以积分与路径无关

$$\int_L (z^2 + 7z + 1) dz = \int_1^{1-i} (z^2 + 7z + 1) dz = -\frac{9}{2} - \frac{26}{3}i$$

## 第六次作业

教学内容: 3.3 复合闭路定理 3.4 柯西积分公式

1. 设  $C$  为正向椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 定义  $f(z) = \oint_C \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 2}{\varepsilon - z} d\varepsilon$ ,  $z$  不在  $C$  上, 求

$f(1), f'(i), f''(-i)$ 。

解:  $z$  在  $C$  内部时,  $\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 2}{\varepsilon - z}$  在  $\varepsilon = z$  处不解析,

$$f(z) = \oint_C \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 2}{\varepsilon - z} d\varepsilon = 2\pi i (z^2 - z + 2),$$

$$f(1) = 2\pi i (z^2 - z + 2)|_{z=1} = 4\pi i;$$

$$f'(i) = 2\pi i (2z - 1)|_{z=i} = -2\pi (2 + i);$$

$$f''(-i) = 4\pi i$$

2. 沿指定曲线的正向计算下列各积分。

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz, \quad C: |z-2|=1;$$

解：由 Cauchy 积分公式， $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^z|_{z=2} = 2\pi i e^2$

$$(2) \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz, C: |z|=r>1;$$

解：(1)  $\cos \pi z$  在由  $C: |z|=r>1$  围成的区域内解析，

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} (\cos \pi z)^{(4)}|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12}$$

$$(3) \oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} dz, \quad C: |z|=2.$$

解：由高阶求导公式， $\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} dz = 2\pi i (\sin z)'|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

3. 计算积分

$$(1) \oint_C \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi}{4} z dz, \quad C: |z|=2$$

在积分曲线内被积函数有两个奇点  $\pm 1$ ，围绕  $1, -1$  分别做两条相互外离的小闭合曲线

$C_1, C_2$ ，则由复合闭路定理

$$\oint_C \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi}{4} z dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z+1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{1}{z+1} \sin \frac{\pi z}{4} \Big|_{z=1} + \frac{1}{z+1} \sin \frac{\pi z}{4} \Big|_{z=-1} \right] = \sqrt{2}\pi i$$

$$(2) \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz, \quad C: |z-2i| = \frac{3}{2};$$

解：由 Cauchy 积分公式， $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \oint_C \frac{e^{iz} dz / (z+i)}{z^2-i} = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z+i} \Big|_{z=i} = \pi/e$

$$(3) \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}, \quad C: |z-a| = a;$$

$$\text{解 1: } \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2} = \oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a} dz = 2\pi i \frac{1}{z+a} \Big|_{z=a} = \frac{\pi}{a} i$$

$$\text{解 2: } \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left( \oint_C \frac{1}{z-a} dz - \oint_C \frac{1}{z+a} dz \right) = \frac{\pi}{a} i$$

$$(4) \oint_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)}, \quad C: |z| = \frac{3}{2};$$

解：因被积函数的奇点  $z = \pm i$  在  $C$  的内部， $z = \pm 2i$  在  $C$  的外部，故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式有：

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)} &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)} + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)} \\ &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{\frac{(z^2+4)(z+i)}{z-i}} dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{\frac{(z^2+4)(z-i)}{z+i}} dz \\ &= 2\pi i \frac{1}{(z^2+4)(z+i)} \Big|_{z=i} + 2\pi i \frac{1}{(z^2+4)(z-i)} \Big|_{z=-i} = 0 \end{aligned}$$

4. 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析， $C$  为  $D$  内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在  $D$  内但不在  $C$  上的任意一点  $z_0$ ，等式： $\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$  成立。

证明：利用 Cauchy 积分公式，有  $\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f'(z) \Big|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$ ；

$$\text{又由高阶导数公式 } \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z) \Big|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$$

故所证等式成立。

5. 设  $f(z)$  在  $|z| \leq 1$  上解析且  $f(0)=1$ , 试求:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left[ 2 \pm \left( z + \frac{1}{z} \right) \right] \frac{f(z)}{z} dz$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left[ 2 \pm \left( z + \frac{1}{z} \right) \right] \frac{f(z)}{z} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left[ \frac{2f(z)}{z} \pm \frac{(z^2+1)f(z)}{z^2} \right] dz \\
 &= 2f(0) \pm \left[ (z^2+1)f(z) \right]' \Big|_{z=0} \\
 &= 2 \pm \left[ 2z \cdot f(z) + (z^2+1)f'(z) \right] \Big|_{z=0} \\
 &= 2 \pm f'(0)
 \end{aligned}$$