第八章　　共形映射

- 共形映射的概念
- 分式线性映射
- 几个常见区域间的分式线性映射
- 几个初等函数所构成的映射

§8.1 共形映射的概念

一、解析函数的导数的几何意义

设$w = f(z)$在区域D内解析，z_0是D内任意一点，$f'(z_0) \neq 0$

考察$f'(z_0)$的几何意义：

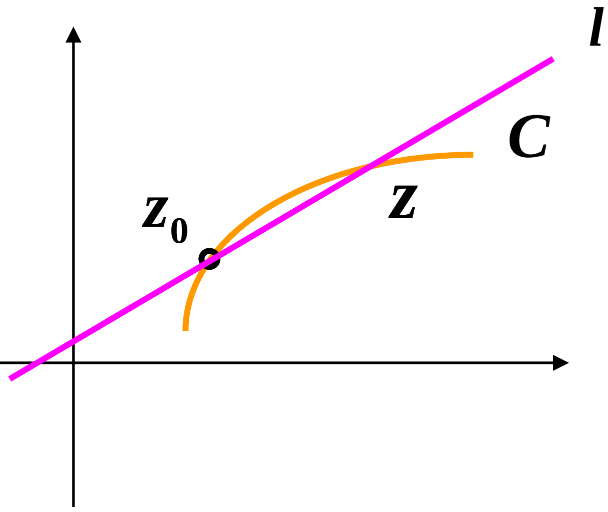
设C是z平面内一条过z_0点的有向光滑曲线，

其参数方程为$C: z = z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$

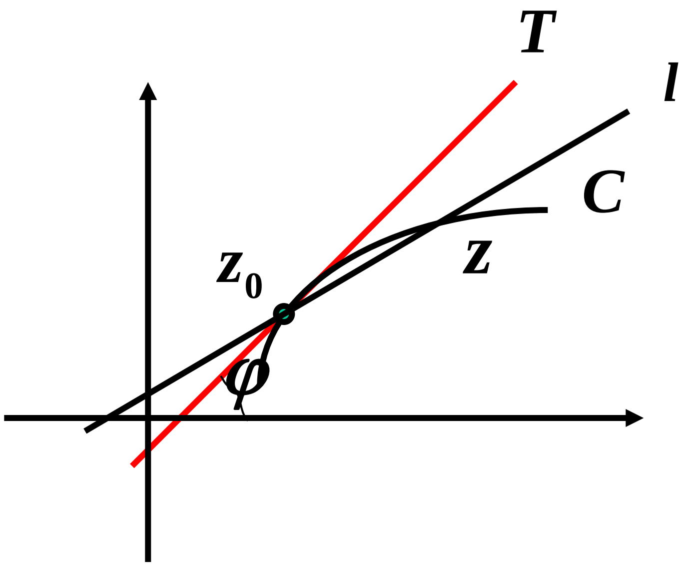
其正向为t增大的方向。

$$z'(t_0) \neq 0, z_0 = z(t_0)\ t_0 \in (\alpha, \beta)$$

割线l的正向为$\overrightarrow{z_0 z}$的方向。



所以l的方向与$\dfrac{z-z_0}{t-t_0}$方向相同。

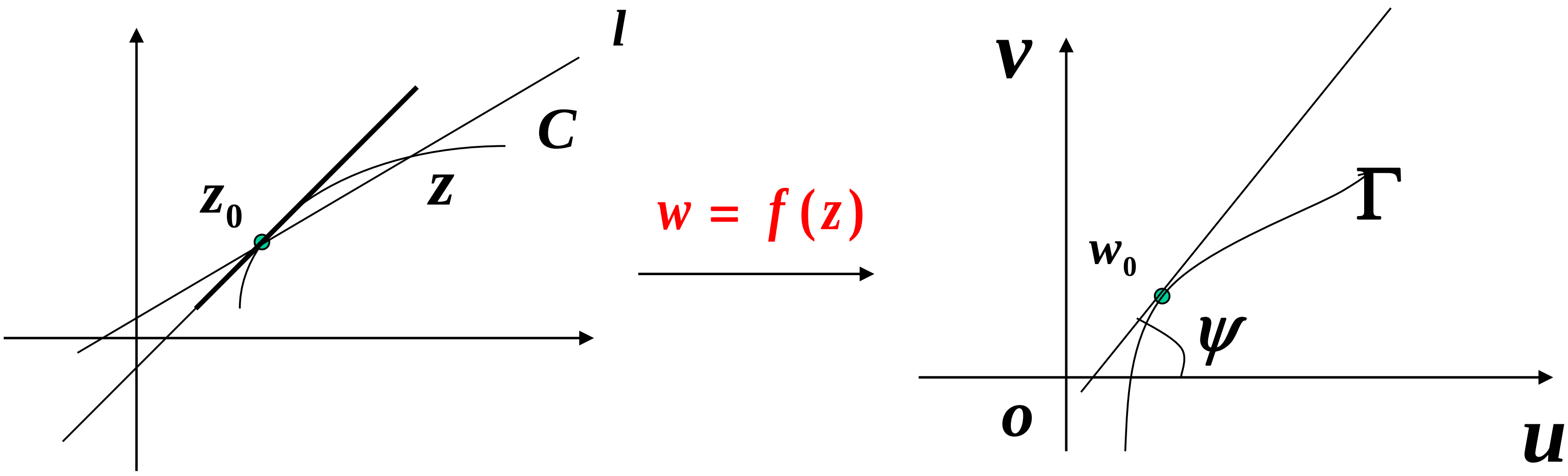


当$t \to t_0 (z \to z_0)$时，$\dfrac{z-z_0}{t-t_0} \to z'(t_0)$

割线l的极限位置是切线T

于是切线T的方向与$z'(t_0)$一致。

即$\varphi = \arg z'(t_0)$



$$C: z = z(t), \alpha \le t \le \beta \;\longrightarrow\; \Gamma: w = f(z(t)), \alpha \le t \le \beta$$

Γ在$w_0 = f(z_0)$处的切线与实轴正向夹角为:

$$\arg w'(t_0) = \arg[f'(z_0)\cdot z'(t_0)]$$

$$= \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) \quad = \arg f'(z_0) + \varphi$$

于是 $\arg f'(z_0)=\arg w'(z_0)-\arg z'(t_0)=\psi-\varphi$

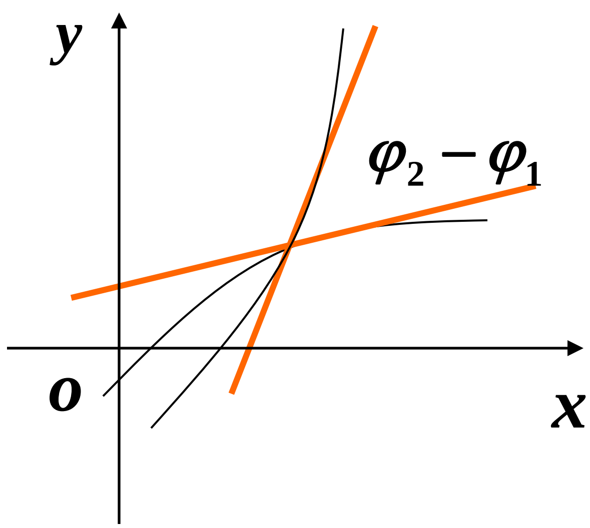
上式表明:

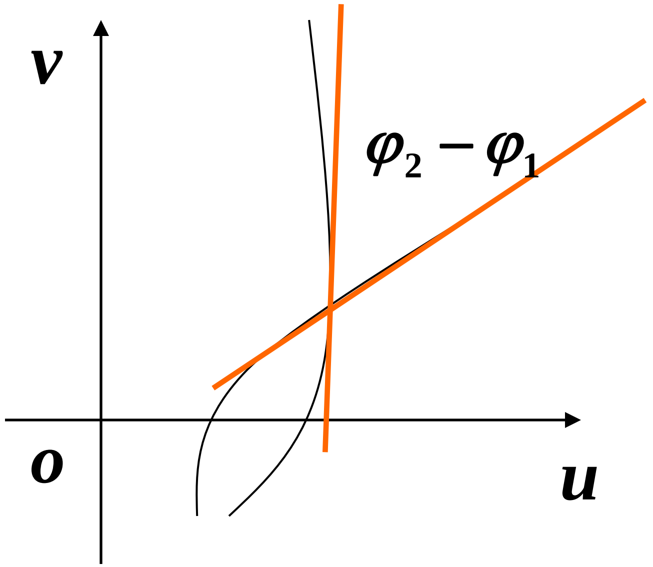
在$w=f(z)$的映射下,

(1) 像曲线 Γ 在 w_0 的切线方向可由曲线 C 在 z_0 处的切线旋转角度 $\arg f'(z_0)$ 得到, 称 $\arg f'(z_0)$ 为 $w=f(z)$ 在点 z_0 转动角(导数辐角的几何意义);

(2) 转动角的大小、方向与过 z_0 的曲线 C 的形状无关(转动角的不变性);

设 C_1、C_2 在 z_0 处切线与 x 轴正向夹角为 φ_1 、φ_2，则 C_1 、C_2 夹角(切线正向)为 $\varphi_2-\varphi_1$。



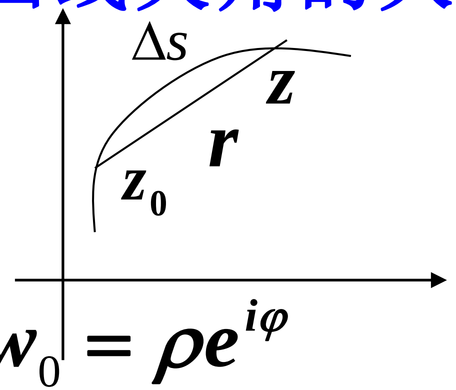


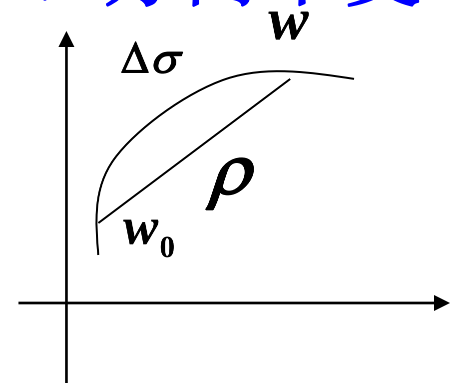
C_1、C_2 经 $w=f(z)$ 映射后，像曲线 Γ_1、Γ_2 的夹角为：

$$(\varphi_2+\arg f'(z_0))-(\varphi_1+\arg f'(z_0))=\varphi_2-\varphi_1$$

曲线夹角的不变性:

$w=f(z)$ 在 z_0 处保持两曲线夹角的大小、方向不变。





$|f'(z_0)|$ 的几何意义:

令 $z-z_0=re^{i\theta},\quad w-w_0=\rho e^{i\varphi}$

$$\frac{w-w_0}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\rho e^{i\varphi}}{re^{i\theta}}=\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\cdot\frac{\rho}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta s}{r}e^{i(\varphi-\theta)}$$

取极限: $$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$$

称为曲线在 z_0 点的伸缩率(导数模的几何意义)。

伸缩率的不变性：伸缩率 $|f'(z_0)|$ 只与 z_0 有关，而与过 C 的曲线的形状无关。

定理：设 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，$z_0\in D$, $f'(z_0)\neq 0$, 则映射 $w=f(z)$ 在 z_0 点具有性质：

(1)保持曲线夹角不变；(2)保持曲线伸缩率不变。

例 求映射 $w=f(z)=z^2+2z$ 在 $z_0=-1+2i$ 转动角及伸缩率。

并说明映射将 z 平面的哪一部分放大？

哪一部分缩小？

解： $f'(z)=2z+2=2(z+1)$

$$f'(-1+2i)=2(-1+2i+1)=4i$$

所以 $f(z)$ 在 $-1+2i$ 转动角为 $\arg 4i=\frac{\pi}{2}$, 伸缩率为 $|4i|=4$。

$$|f'(z)|=2|z+2|=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

而 $|f'(z)|<1\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2<\frac{1}{4}$

所以，映射 $w=z^2+4z$ 把以 $z=-2$ 为圆心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆内部缩小，外部放大。

二、共形映射的概念

定义： 设$w=f(z)$在某$N(z_0)$有定义，若$w=f(z)$在z_0处具有保持曲线夹角和伸缩率不变性，则称$w=f(z)$在z_0处是保角的；

若$w=f(z)$在D内每一点都是保角的，且为1-1映射，则称之为**共形映射**。

推论： 若$w=f(z)$为解析函数，若$f'(z_0)\neq 0, z_0\in D$，则$f(z)$在z_0处是保角的。

共形映射中的两个基本问题:

(1)已知共形映射$w = f(z)$及z平面上的区域D,

求w平面上的相应区域D^*

(2)求一共形映射$w = f(z)$,使它将z平面上的已知区域D,

映射成w平面上的指定区域D^*

例 试求在映射 $w=z^2$ 下，z 平面上的直线 $y=x$ 及 $x=1$ 的像曲线. 在这两条曲线的交点处 $w=z^2$ 是否具有保角性? 旋转角、伸缩率是多少?

解: 令 $w=u+iv,\quad z=x+iy$

则 $w=z^2$ 变为: $u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

即 $$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$$

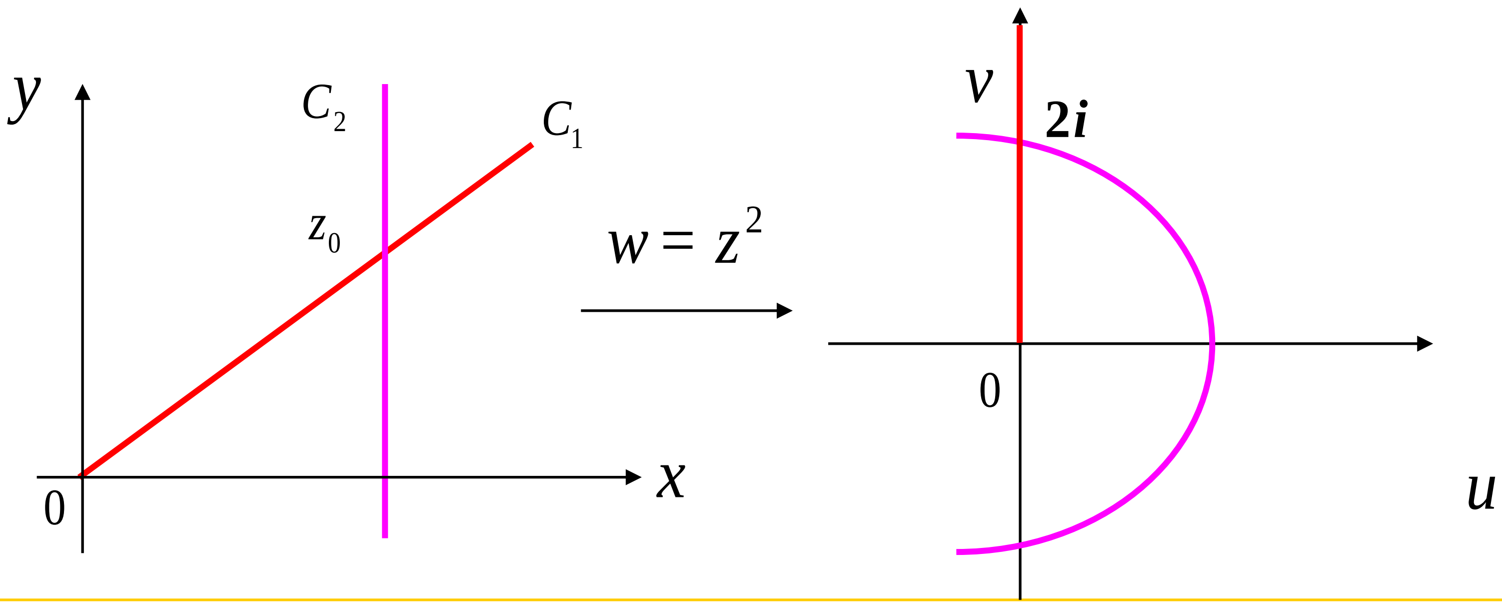
z 平面上直线 $C_1: y=x$ 在 w 平面上的像曲线是:

$$\Gamma_1:\begin{cases} u=0 \\ v=2y^2 \end{cases}$$ w平面上的上半虚轴。

z 平面上直线 $C_2: x=1$ 在平面上的像曲线是:

$$\Gamma_2: \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \qquad \text{即} v^2 = 4(1-u)$$

w 平面上的一条抛物线



$y=x$ 与 $x=1$ 的交点为 $z_0=1+i$,

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z_0=1+i}=\left.2z\right|_{z_0=1+i}=2(1+i)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\neq 0$$

映射 $w=z^2$ 在交点 $z_0=1+i$ 处是保角的, 且旋转角为 $\dfrac{\pi}{4}$,

伸缩率为 $2\sqrt{2}$, z_0 的像 $w_0=2i$。

8.2 分式线性映射及其性质

- 1. 分式线性映射及其分解
- 2. 分式线性映射的性质
    - •共形性
    - •保圆性
    - •保对称性
- 3. 确定分式线性映射的条件

一. 分式线性映射及其分解

形如

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0)$$

的映射称为**分式线性映射.**

其中, a、b、c、d 为复常数。

补充定义使分式线性函数在整个扩充平面上有定义：

$$\text{当}c\neq 0\text{时，}\quad w=\begin{cases}\infty & z=-d/c\\ a/c & z=\infty\end{cases}$$

当$c=0$时，在$z=\infty$时，定义$w=\infty$.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow z=\frac{-dw+b}{cw-a}\qquad (-d)(-a)-bc\neq 0$$

则其逆映射仍为分式线性映射,

所以$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$为1－1映射.

当$c=0$时, $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$,

当$c\neq 0$时, $w=\dfrac{c(az+b)+ad-ad}{c(cz+d)}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cz+d)}$

$=\dfrac{bc-ad}{c}\quad\eta\quad+\dfrac{a}{c}$,

$$\boxed{\text{令}\xi=cz+d,\eta=\frac{1}{\xi}}$$

因此，分式线性映射可分解为

(1) $w = kz + h \quad (k \neq 0)$ 称为线性映射.

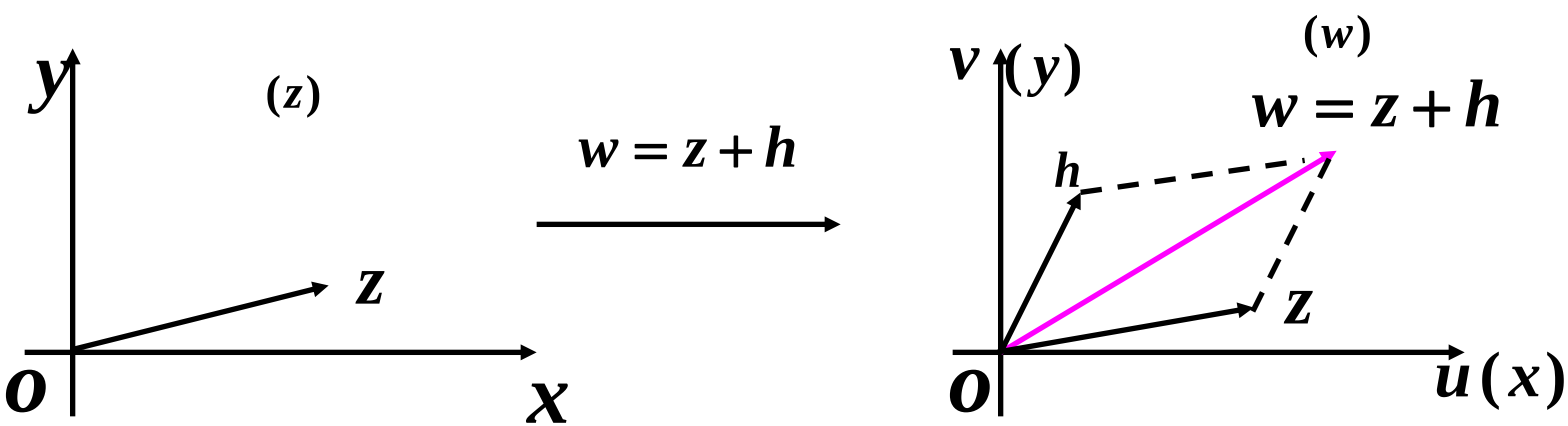
(2) $w = \dfrac{1}{z}$ 称为反演映射.

1、线性映射 $w = kz + h \ (k \neq 0)$

当 $k = 1$ 时, $w = z + h$ **称为** 平移映射。

设 $w = u + iv \quad z = x + iy \quad h = h_1 + ih_2$

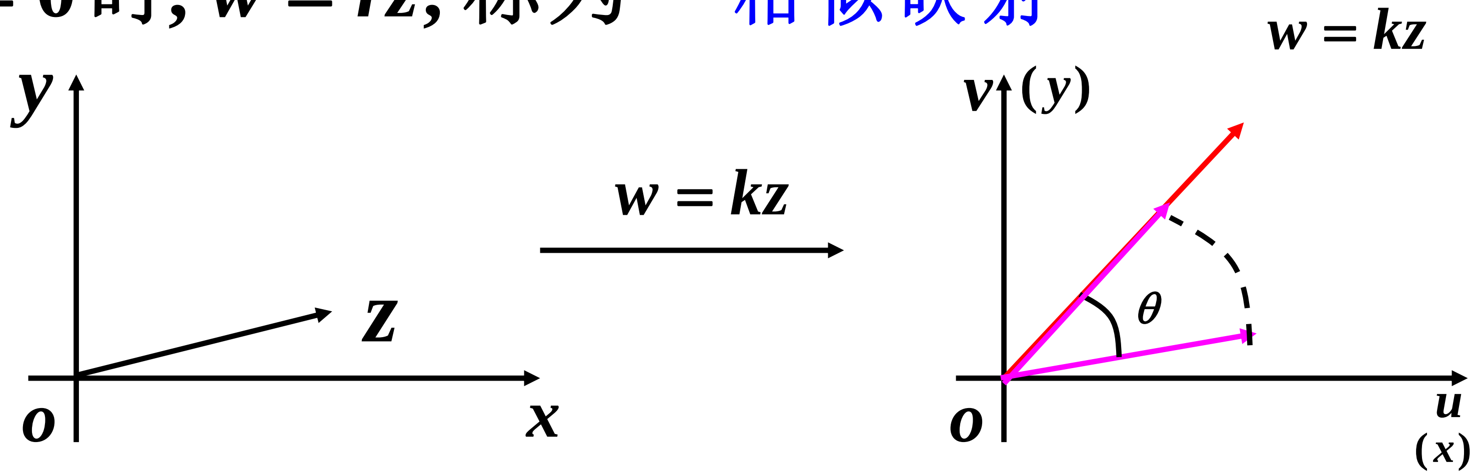
于是 $\begin{cases} u = x + h_1 \\ v = y + h_2 \end{cases}$



当 $h=0$ 时, $w=kz$, 设 $k=re^{i\theta}$, 则 $w=re^{i\theta}z$

$r=1$ 时, $w=e^{i\theta}z$, 称为旋转映射

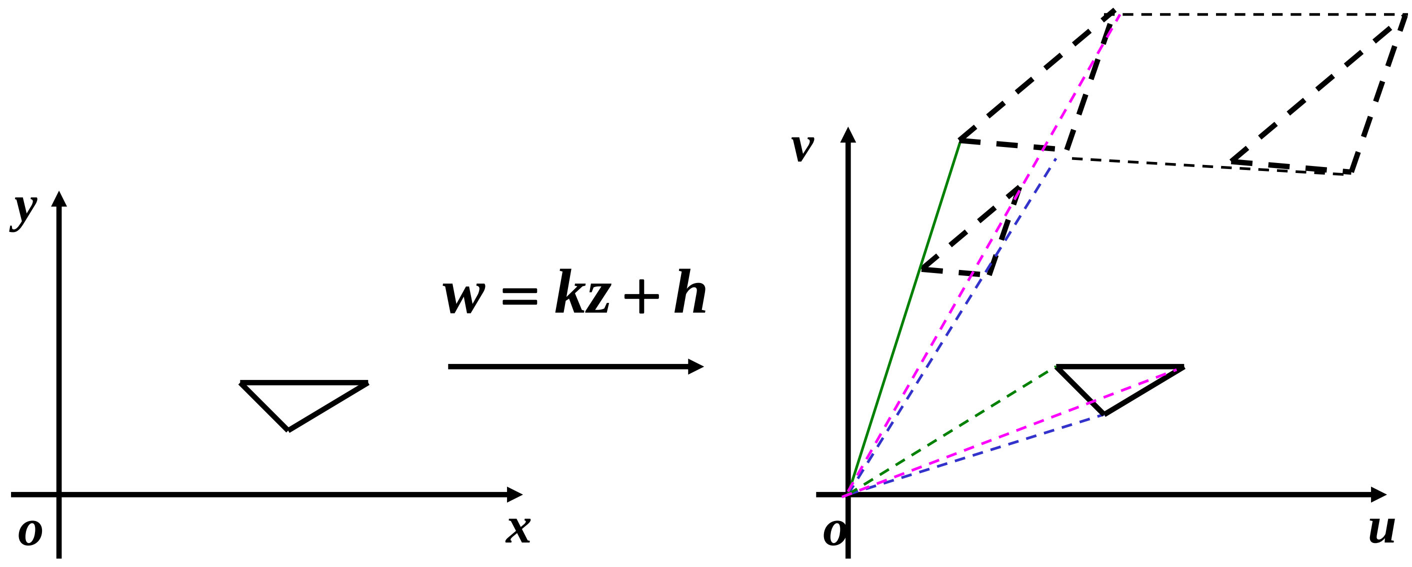
$\theta=0$ 时, $w=rz$, 称为 相似映射



$w=kz+h\ \ (k\neq 0)$ 的映射过程:

先将 z 旋转 θ, 再将 $|z|$ 伸长 (或缩短) r 倍, 最后平移向量 h。

例如，对于z平面上的三角形在映射$w=kz+h$下可得w平面上另一个三角形。



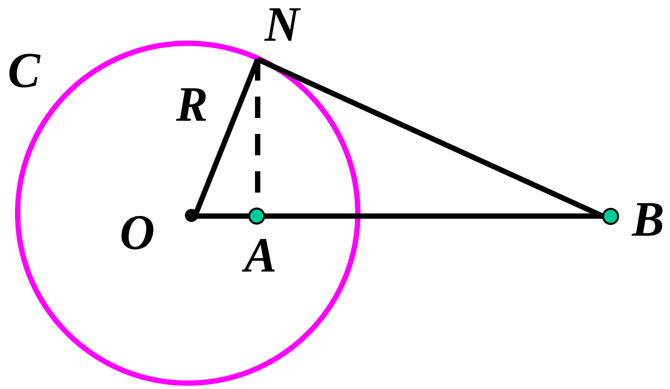
显然，映射$w=kz+h\ (k\neq 0)$不改变图形的形状

2、反演映射 $w=\dfrac{1}{z}$

关于圆周的对称点:

设 C 是以原点为中心, 半径为 R 的圆周, 若圆内点 A 及圆外点 B 在由圆心 O 出发的射线上, 且 $|OA|\cdot|OB|=R^2$, 则称 A 和 B 关于圆周 C 对称。

对称点的作法:



规定: 圆心 O 关于圆周的对称点为 ∞。

将 $w=\dfrac{1}{z}$ 分解为：$w=\overline{w_1}, w_1=\dfrac{1}{\bar{z}}$

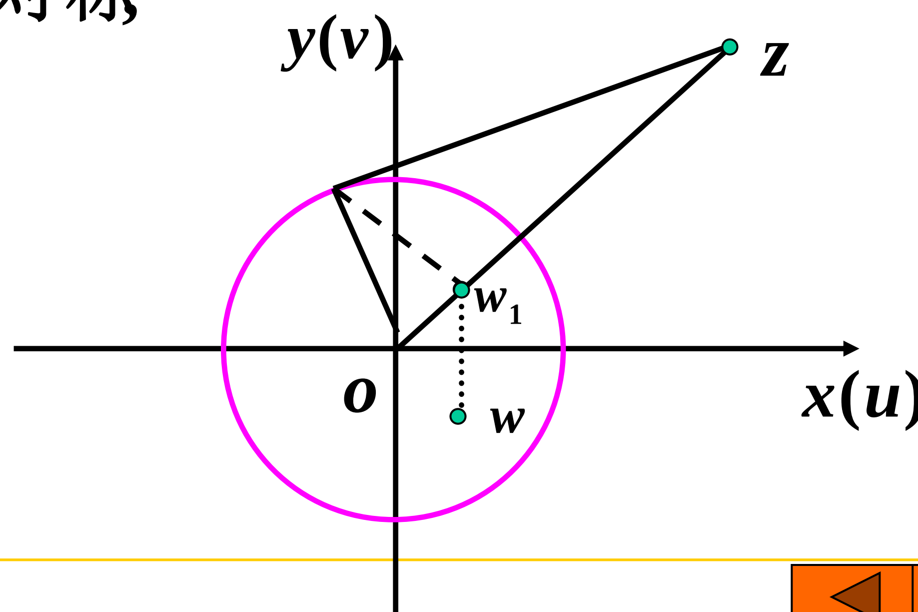
设 $z=re^{i\theta}$ 则 $\bar{z}=re^{-i\theta}$ $w_1=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{r}e^{i\theta}\Rightarrow w=\overline{w_1}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

由于 $|z|\cdot|w_1|=1$，所以 z 与 w_1 是关于单位圆周的对称点。

再根据 w 与 w_1 关于实轴对称

则得到由 z 作出点 $w=\dfrac{1}{z}$

的几何作法：



2. 分式线性映射的性质

先讨论以上两种映射的性质,从而得出一般分式线性映射的性质.

(1)共形性

对于映射$w=\dfrac{1}{z}$ $z=0\xrightarrow{w=\frac{1}{z}}w=\infty;z=\infty\xrightarrow{w=\frac{1}{z}}w=0$

因此 $w=\dfrac{1}{z}$ **在扩充复平面上是一一的映射。**

由于$w'=\dfrac{-1}{z^2}\neq 0(z\neq 0,\ \infty)$

所以,当$z\neq 0,\ \infty$时,$w=\dfrac{1}{z}$是保角的.

规定：∞处曲线的夹角等于它们在映射$\xi=\dfrac{1}{z}$下$\xi=0$处的像曲线的夹角 即有

i) 当$w=f(z)$将$z=\infty$映成$w=w_0(\neq\infty)$时，作$\zeta=\dfrac{1}{z}$，若$w=f(\dfrac{1}{\zeta})$在$\zeta=0$处是保角的，则称$w=f(z)$在$z=\infty$处是保角的；

ii) 当$w=f(z)$将$z=z_0(\neq\infty)$ 映成$w=\infty$时，作$\zeta=\dfrac{1}{w}$，若$\zeta=\dfrac{1}{f(z)}$在$z=z_0$处是保角的，则称$w=f(z)$在$z=z_0$处是保角的；

iii) 当$w=f(z)$ **将** $z=\infty$ **映成** $w=\infty$ **时，作** $\eta=\dfrac{1}{w},\zeta=\dfrac{1}{z}$,

若$\eta=\dfrac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$ **在** $\zeta=0$ **处是保角的，则称** $w=f(z)$**在**$z=\infty$

处是保角的。

当$z=\infty$时，$w=\dfrac{1}{z}=\xi$在$\xi=0$点是保角的

$(w=\xi$解析，且$w'_{\xi}=1\neq 0)$

$\Longrightarrow$ $w=\dfrac{1}{z}$在$z=\infty$点是保角的

$\Longrightarrow$ $z=\dfrac{1}{w}$在$w=\infty$点是保角的

即$w=\dfrac{1}{z}$在$z=0$点是保角的

所以，$w=\dfrac{1}{z}$在扩充复平面上为共形 映射.

类似方法可推得:

线性映射$w = kz + h(k \neq 0)$在扩充复平面上是共形映射.

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad \eta = \frac{1}{w}$$

于是，有以下结论:

$$\eta = \frac{\xi}{k + h\xi}$$在$\xi = 0$点的保角性

性质1

分式线性映射是扩充复平面上共形映射.

(2)保圆性

我们规定：直线是半径为无穷大的圆周。

因为$w = az + b$是平移，旋转，伸缩的合成映射.

所以，z平面上的圆周$C \xrightarrow{w=az+b}$ w平面上的圆周Γ

z平面上的直线$l \xrightarrow{w=az+b}$ w平面上的直线L

所以，$w = az + b$在扩充复平面上把圆周映射成圆周，即具有保圆性.

对于$w=\dfrac{1}{z}$, $z=0\xrightarrow{w=1/z}\infty, z=\infty\xrightarrow{w=1/z}0$

圆周$C: a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \xrightarrow{w=1/z}$?

令$z=x+iy \quad w=\dfrac{1}{z}=u+iv,$

将$z=x+iy$代入$w=\dfrac{1}{z}$得

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

或 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \quad y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$ 代入圆的方程得

$$\Gamma: d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

所以，圆周$C: a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

$$\xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \Gamma: d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$a,d \neq 0$ 圆周$C \to$ 圆周Γ

$a \neq 0, d=0$ 圆周$C \to$ 直线Γ

$a=0, d \neq 0$ 直线$C \to$ 圆周Γ

$a=0, d=0$ 直线$C \to$ 直线Γ

因此，反演映射具有保圆性.

性质2 分式线性映射将扩充z平面上圆周映射成扩充w平面上的圆周,即具有保圆性.

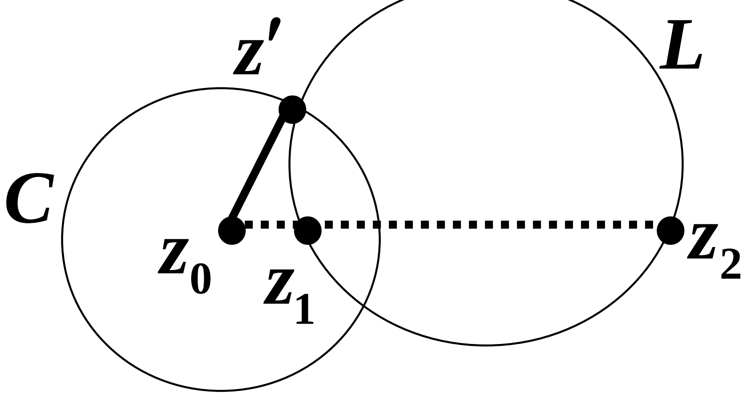
综上所述我们有：在分式线性映射下，如果给定的圆周或直线上没有点映射成无穷远点，那么它就映射半径为有限的圆周，如果有一点映射成无穷远点，那么它就映射成直线。

3 保对称性

定理： 在扩充复平面上，z_1, z_2是关于圆周C对称的充要条件是通过z_1, z_2的任何圆周L和圆周C正交。

证明： 如果 C 是一条直线结论显然成立。

如果 $C: |z-z_0|=R$, 当 L 为过 z_1, z_2 的直线时，则 L 一定通过圆心 z_0，因此 C 与 L 正交。当 L 为半径有限的圆周时，由点 z_0 作 L 的切线，切点为z'，因此由平面解析几何知识得

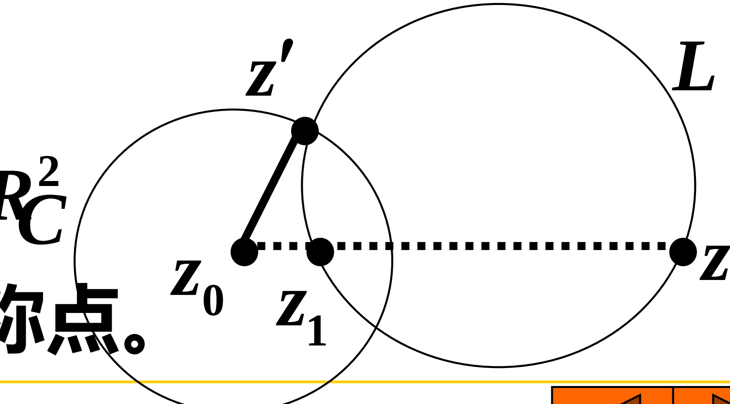


$$|z'-z_0|^2=|z_2-z_0||z_1-z_0|=R^2$$

因此 z' 在圆周 C 上，L 的切线为 C 半径，即 C 与 L 正交。

反过来，设 L 是过 z_1,z_2 的与 C 正交的任意圆周，那么特别连接 z_1,z_2 的直线必与 C 正交，因此必通过 C 的圆心，如果 L 是半径为有限的圆周，那么 L 与 C 在交点 z' 处正交，因此 C 的半径 z_0z' 为 L 的切线，所以有

$$|z_2-z_0||z_1-z_0|=|z'-z_0|^2=R^2$$



因此 z_1,z_2 为关于圆周 C 的对称点。

性质3 设 z_1, z_2 是关于圆周 C 的对称点，则在分式线性映射下，它们的像 w_1, w_2 一定是关于 C 的像曲线 L 的对称点。映射的这种性质称为**保对称性**。

证　设通过 w_1, w_2 的任意圆周为 L' 是经过 z_1, z_2 的圆周 C' 由分式线性映射过来的，由于 C 与 C' 正交，所以 L 与 L' 正交，(由保角性)

因此 w_1, w_2 是关于圆周 L 的对称点。

三、唯一确定分式线性映射的条件

定理. 在扩充z平面上给定三个不同点z_1、z_2、z_3，在扩充w平面上也给定三个不同的点w_1、w_2、w_3，则存在唯一分式线性映射把z_1、z_2、z_3分别映射为w_1、w_2、w_3，可以证明这个映射为

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

称之为对应点公式

证明 设$w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$,将$z_k(k=1,2,3)$依次

$\to w_k(k=1,2,3)$, 即$w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}\quad(k=1,2,3)$

因而有 $$w-w_k=\frac{(z-z_k)(ad-bc)}{(cz+d)(cz_k+d)},(k=1,2)$$

$$w_3-w_k=\frac{(z_3-z_k)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_k+d)},(k=1,2)$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{(z-z_1)\cancel{(ad-bc)}}{\cancel{(cz+d)}(cz_1+d)}\frac{\cancel{(cz+d)}(cz_2+d)}{(z-z_2)\cancel{(ad-bc)}}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{(cz_2+d)}{(cz_1+d)}$$

同理 $$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\frac{(cz_2+d)}{(cz_1+d)}$$

所求分式线性映射

故 $$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}--(1)$$

注： （1） 式(1)是三对点所确定的唯一的一个映射。

(2) 式(1)左端的式子通常称为四个点 w, w_1, w_2, w_3 的交比($cross-ratio$).

因此，式(1)说明分式线性映射具有保交比不变性。

(3)在实际应用时，常常会利用一些特殊点（如 $z=0, z=\infty$）等使公式简化。

(2)如果z_k或w_k中有一个为∞,则只需将对应点公式中含有∞的项换为1。

例　求把$z_1=1, z_2=i, z_3=-1$映射为$w_1=0, w_2=1, w_3=\infty$的分式线性映射。

解：由对应点公式，有

$$\frac{w-0}{w-1}:\frac{1}{1}=\frac{z-1}{z-i}:\frac{-1-1}{-1-i}$$

由此得：
$$\frac{w}{w-1}=\frac{1+i}{2}\frac{z-1}{z-i}$$

$w=i\dfrac{1-z}{1+z}$　为所求分式线性映射.

定理

在分式线性映射$w = f(z)$下，将圆周C映射为圆周C'，圆周C的内部，不是映射为C'的内部，就是映射成C'的外部.

确定对应区域的两个方法：

(1) 若z_0在C内部，$f(z_0)$在C'内部，则C的内部映射为C'的内部；

若z_0在C内部，$f(z_0)$在C'外部，则C的内部映射为C'的外部；

(2) 若C依$z_1 \to z_2 \to z_3$与C'依$w_1 \to w_2 \to w_3$绕向相同，则C的内部映射为C'的内部，否则，C的内部映射为C'的外部。

例 中心分别在$z=1$与$z=-1$，半径为$\sqrt{2}$的二圆弧所围区域在映射$w=\dfrac{z-i}{z+i}$下映成什么区域?

解 两圆弧的交点为$-i$与i，且互相正交，交点

$$z=i\to w=0 \quad z=-i\to w=\infty$$

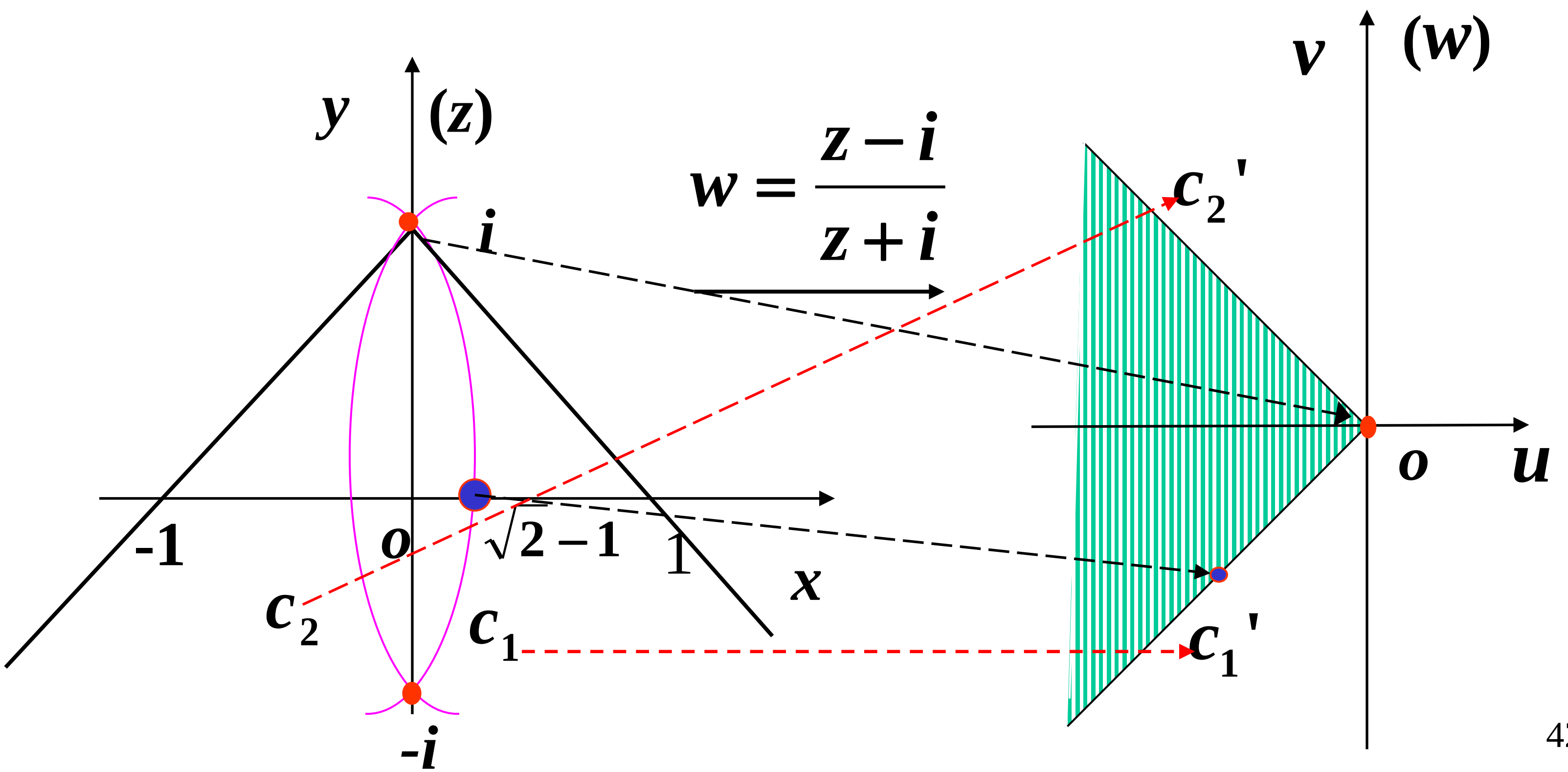
$\therefore$ 映射后的区域是以原点为顶点张角为$\dfrac{\pi}{2}$的角形区域.

取$z=\sqrt{2}-1\in C_1\to w=\dfrac{(1-\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}$

(第三象限角分线上的点)

$\therefore C_1 \to C_1' --$第三象限的分角线

由保角性$C_2 \to C_2' --$第二象限的分角线



8.3 常见的分式线性映射

上半平面 $\longrightarrow$ 上半平面

上半平面 $\longrightarrow$ 单位圆内部

单位圆内部 $\longrightarrow$ 单位圆内部

例1 求将 $\mathrm{Im}(z)>0 \to \mathrm{Im}(w)>0$的分式线性映射.

解 设$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $\forall z_k \in R,(k=1,2,3)$,即实轴上的点

当a,b,c,d均为实数时,$w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$也为实数,

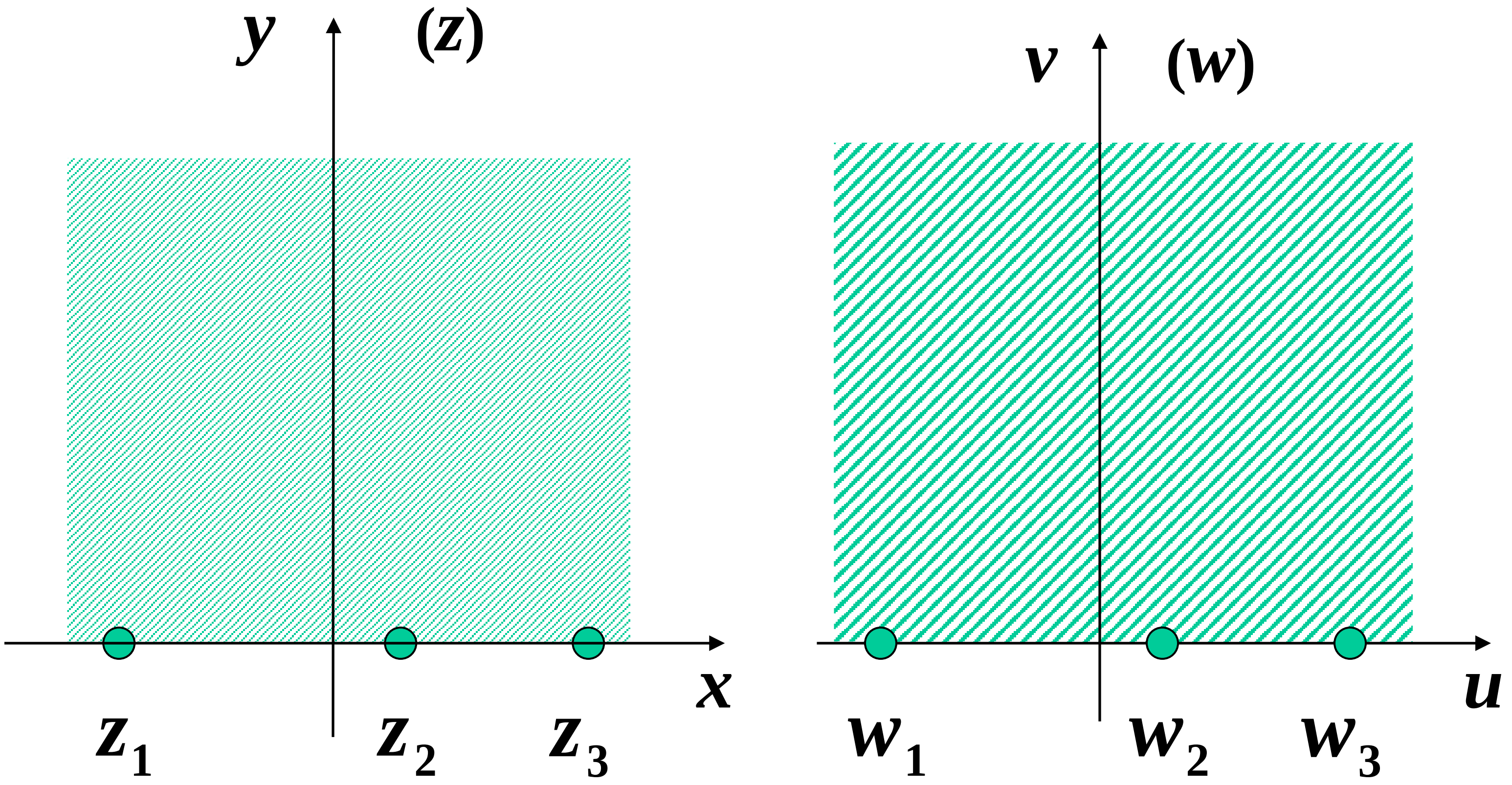
故,w必将实轴$\to$实轴.

又$w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}>0$(当$z$为实数且$ad-bc>0$时)

即,实轴变成实轴是同向的,

因此,上半z平面$\to$上半w平面.

即，当a,b,c,d均为实数时,且$ad-bc>0$,线性分式映射$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$将$\mathrm{Im}(z)>0\to\mathrm{Im}(w)>0$



注意：

①具有这一形式的映射也将 $\mathrm{Im}(z)<0\to\mathrm{Im}(z)<0$

②$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，其中 a,b,c,d 为实数，$ad-bc<0$

将 $\underset{\text{上半}z\text{平面}}{\mathrm{Im}(z)>0}\to\underset{\text{下半}w\text{平面}}{\mathrm{Im}(w)<0}$

③求 $\mathrm{Im}(z)>0\to\mathrm{Im}(w)>0$ 的映射，可在实轴上取三对相异的对应点：$z_1<z_2<z_3$，$w_1<w_2<w_3$ 代入

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$ 即得.

例2 求将上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 映射为单位圆域 $|w| < 1$ 的分式线性映射。

解法一 在实轴上依次取点 $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$

在 $|w| = 1$ 上取 $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ 使

$$w_i = f(z_i) \quad (i = 1,2,3)$$

所求映射满足:

$$\frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{z+1}{z-0} : \frac{1+1}{1-0}$$

即: $$w = \frac{z-i}{iz-1}$$

若取点 $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1,$

$w_1 = i, w_2 = -1, w_3 = -i$

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

解法二(利用性质)：设 $w = f(z)$

由保圆性,上半平面必有一点(设为λ)映射成$|w|=1$的圆心$w=0$,即 $f(\lambda)=0$

由保对称性,λ 与 $\bar{\lambda}$ 关于实轴对称,

所以，$w=0$ 与 $w=\infty$ 关于$|w|=1$对称,

于是

$$f(\bar{\lambda})=\infty$$

于是 $w = f(z)$ 具有形式:

$$w = k\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right) \quad (k\text{为常数})$$

z 在实轴上取值时, $|z-\lambda|=|z-\bar{\lambda}|$, 此时有: $|k|=1$

所以, $k=e^{i\theta}$, 即所求映射为:

$$\boxed{w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)}$$

当 $\lambda=i, \theta=-\dfrac{\pi}{2}$ 时, 映射为解法一的映射;

当 $\lambda=i, \theta=0$ 时, 映射为:

$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

例3 求将上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 映射为 $|w - w_0| < R$ 的分式线性映射 $w = f(z)$, 使得 $f(i) = w_0$, $f'(i) > 0$。

解： 由保对称性, i 与 $-i$ 关于 x 轴对称, 于是 $f(-i) = \infty$

利用 $f(i) = w_0$, 于是所求映射具有形式:

$$w = k\frac{z-i}{z+i} + w_0 \quad (k\text{为常数})$$

又由于 $f'(i) = \left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=i} = \left.\dfrac{2ki}{(z+i)^2}\right|_{z=i} = -\dfrac{ik}{2} > 0$

于是可知 k 为纯虚数。

当 z 取实轴上的点时, $|z - i| = |z + i|$

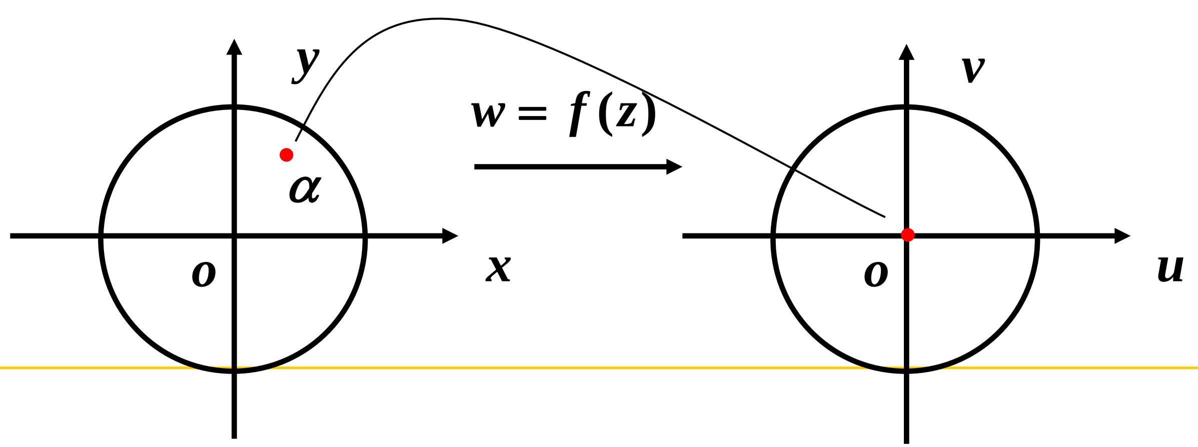
$$R=|w-w_0|=|k|\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=|k|$$

于是 $k=iR$，

$$w=iR\frac{z-i}{z+i}+w_0$$

例4 求将单位圆 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$ 的分式线性映射。

解：设 $w=f(z)$，并将 $|z|<1$ 内某点 α 映射为 $w=f(\alpha)=0$



由于 α 与 $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ 关于 $|z|=1$ 对称, 而且 $w=0$ 与 $w=\infty$

关于 $|w|=1$ 对称

于是 $f(\dfrac{1}{\overline{\alpha}})=\infty$ 所求映射具有形式:

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}}=k\overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}=-k\overline{\alpha}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)=k'\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)$$

由于 $|z|=1$ 上的点映射为 $|w|=1$ 上的点

取 $z=1$ 代入上式, 得到:

$$|w|=|k'|\cdot\left|\frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}\right|=1$$

由于$|1-\alpha|=|1-\overline{\alpha}|$，于是 $|k'|=1$

$$k'=e^{i\varphi} \quad (\varphi\text{为任意实数})$$

所求映射具有形式:

$$\boxed{w=e^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) \quad (|\alpha|<1)}$$

例5 求将单位圆$|z|<1$映射为$|w<1$的分式线性映射，

并且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$。

解：由已知：$\alpha=\frac{1}{2}$，利用上例得到:

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = e^{i\varphi}\frac{2z-1}{2-z}$$

则 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\varphi}\left.\frac{2(2-z)-(2z-1)(-1)}{(2-z)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}e^{i\varphi}$

由 $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 得 : $\varphi = 0$。

所求映射为: $w = \frac{2z-1}{2-z}$

例6 求分式线性映射 $w = f(z)$, 它将 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$, 且使 $z=1、1+i$ 映射为 $w=1、+\infty$。

解：将 $|z|=1$ 映射为 $|w|=1$ 的映射为: $w = e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

因为 $f(1+i)=+\infty$, 即 $f\left(\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right)=\infty$

所以 $\bar{\alpha}=\dfrac{1}{1+i}$, $\alpha=\dfrac{1}{1-i}$

又 $f(1)=1$, 故 $e^{i\theta}\dfrac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}=1$, $e^{i\theta}=\dfrac{1-\bar{\alpha}}{1-\alpha}=i$

$$\text{所以 } w = i\frac{z-\dfrac{1}{1-i}}{1-\dfrac{z}{1-i}} = \frac{(i+1)z-i}{-z+(1-i)}$$

§8.4 几个初等函数所构成的映射

1. 幂函数

2. 指数函数

1.幂函数

幂函数: $w=z^n\ (n\geq 2$为自然数$)$

$$\because \frac{dw}{dz}=nz^{n-1}\quad \frac{dw}{dz}\neq 0\quad (z\neq 0)$$

$\therefore$ 在z平面内除去原点外,由$w=z^n$所构成的映射处处共形.

令$z=re^{i\theta}\quad w=\rho e^{i\varphi}$

又$w=z^n=r^n e^{in\theta}\Rightarrow \rho=r^n\quad \varphi=n\theta$

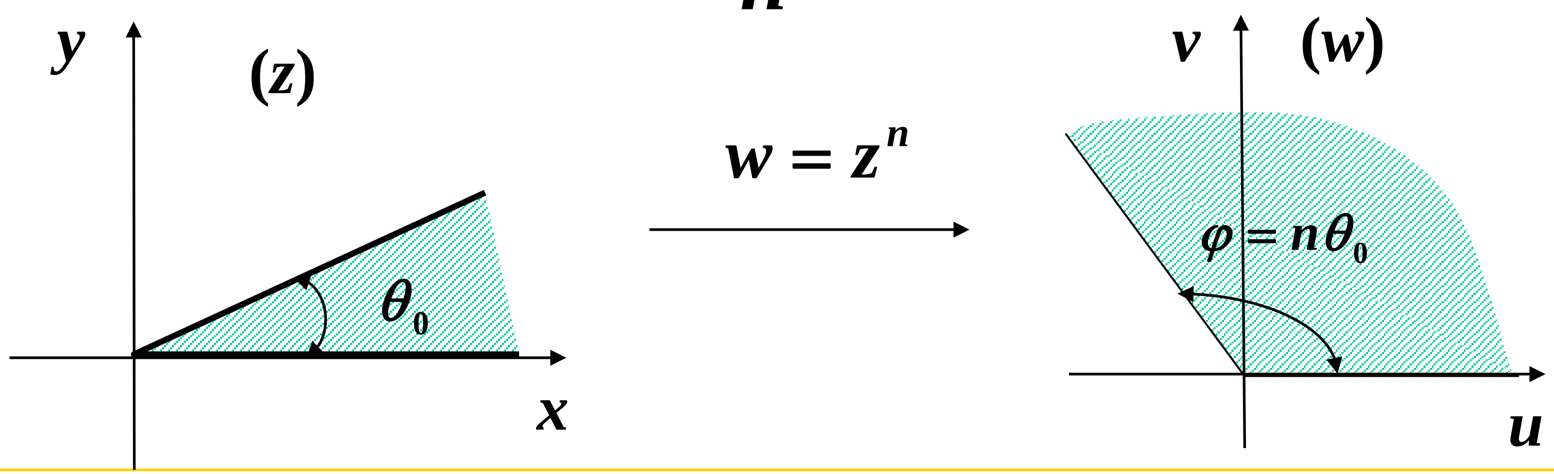
由此可见,在$w=z^n$映射下,

$|z|=r \to |w|=r^n$ 特别: $|z|=1 \to |w|=1.$

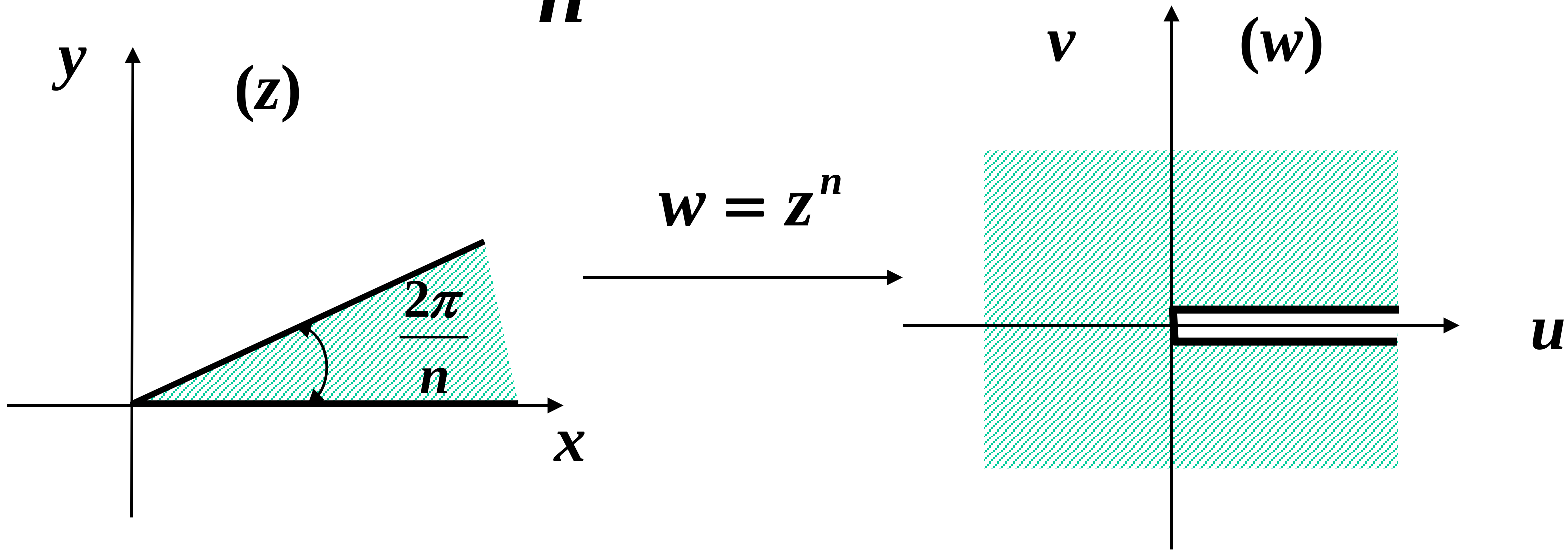
射线$\theta=\theta_0 \to \varphi=n\theta_0$

特别: $\theta=0 \to \varphi=0$(正实轴映射成正实轴)

角形域$0<\theta<\theta_0 (<\dfrac{2\pi}{n}) \to$ 角形域$0<\varphi<n\theta_0$



特别：$0<\theta<\dfrac{2\pi}{n} \rightarrow 0<\varphi<2\pi$



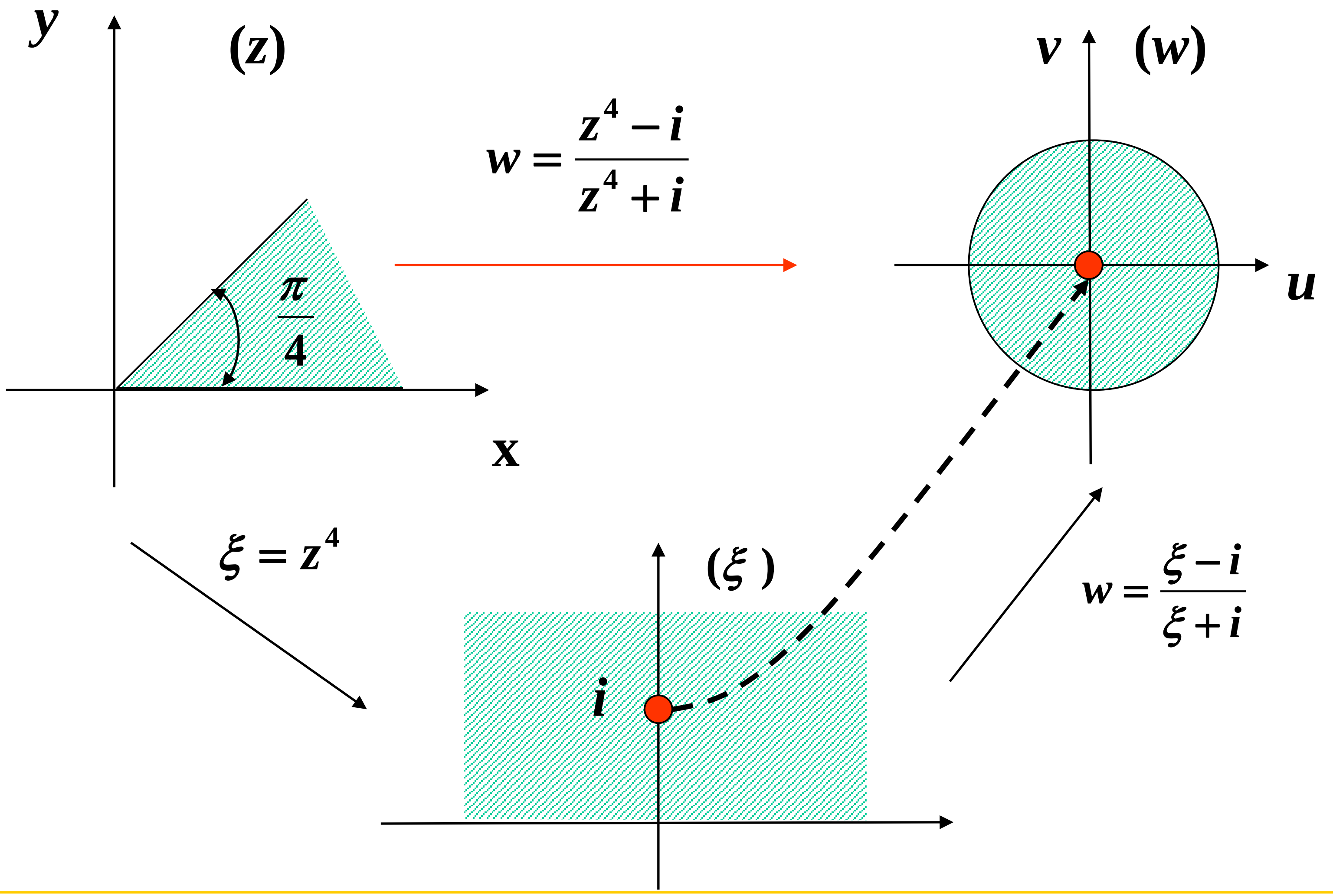
从这里可以看出在$z=0$处角形域的张角经过这一映射后变了原来的n倍,$\therefore n\geq 2$时,映射$w=z^n$在$z=0$处没有保角性

幂函数所构成的映射特点：把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域，但张角变成了原来的n倍，因此，

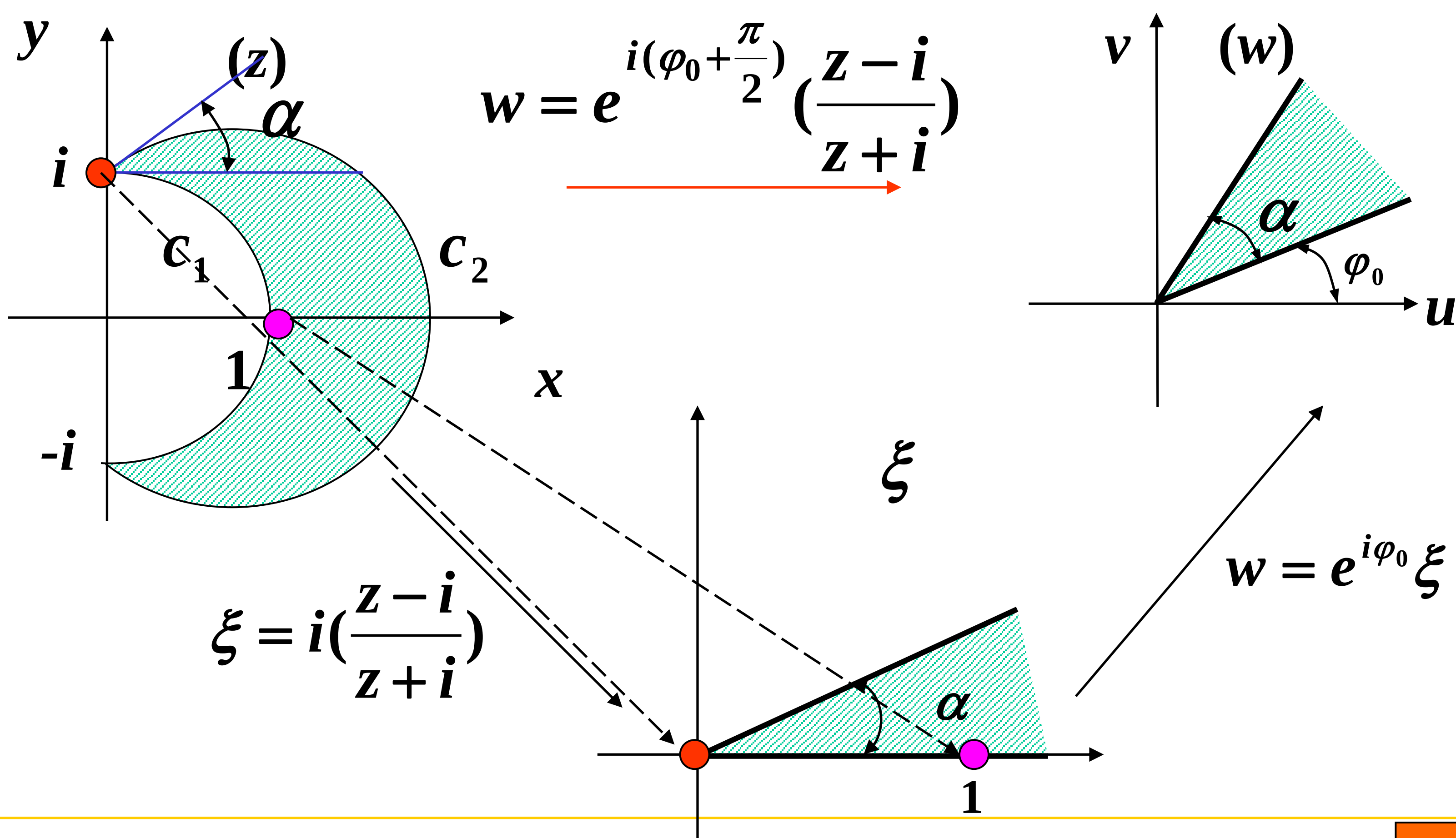
如果要把角形域→角形域常采用幂函数.

例1 求将$0<\arg z<\dfrac{\pi}{4} \to |w|<1$的一个映射.

解:



例2 求将图中由圆弧c_1与c_2所围成的交角为α的月牙域$\rightarrow \varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + \alpha$的一个映射.



解: 令C_1,C_2的交点$z=i$与$z=-i$分别映射成ζ平面中的$\zeta=0$与$\zeta=\infty$, 将所给月牙域映射成ζ平面中的角形域的映射是具有以下形式的分式线性函数:

$$\zeta = k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$ **其中k为待定的复常数.**

令 $z=1 \mapsto \zeta=1 \Rightarrow \zeta = k\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = -ik = 1 \Rightarrow k = i$。

这样,$\zeta = i\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$就把$C_1$映射成$\zeta$平面上的正实轴.

根据保角性,所给的月牙域映射成角形域$0<\arg\zeta<\alpha$.

由此得所求的映射为$w = ie^{i\varphi_0}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) = e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2})}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$.

2. 指数函数

指数函数 : $w = e^z$

$\because w' = e^z \neq 0$

$\therefore w = e^z$是全平面上的共形映射.

设$z = x + iy \quad w = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho = e^x \quad \varphi = y$ --(2)

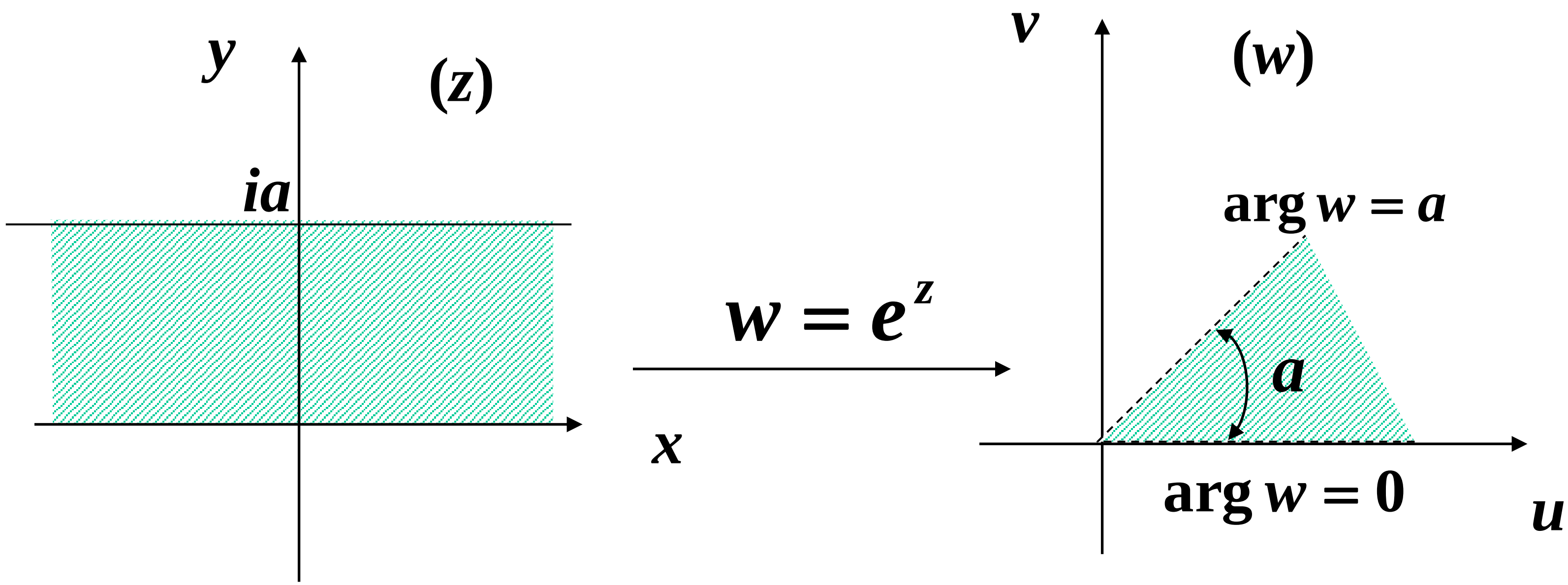
由此可知

直线 : $\mathrm{Re}\, z =$ 常数 $= c \to$ 圆 : $|w| = e^c$

直线 : $\mathrm{Im}\, z =$ 常数 $= c_1 \to$ 射线 : $\varphi = c_1$

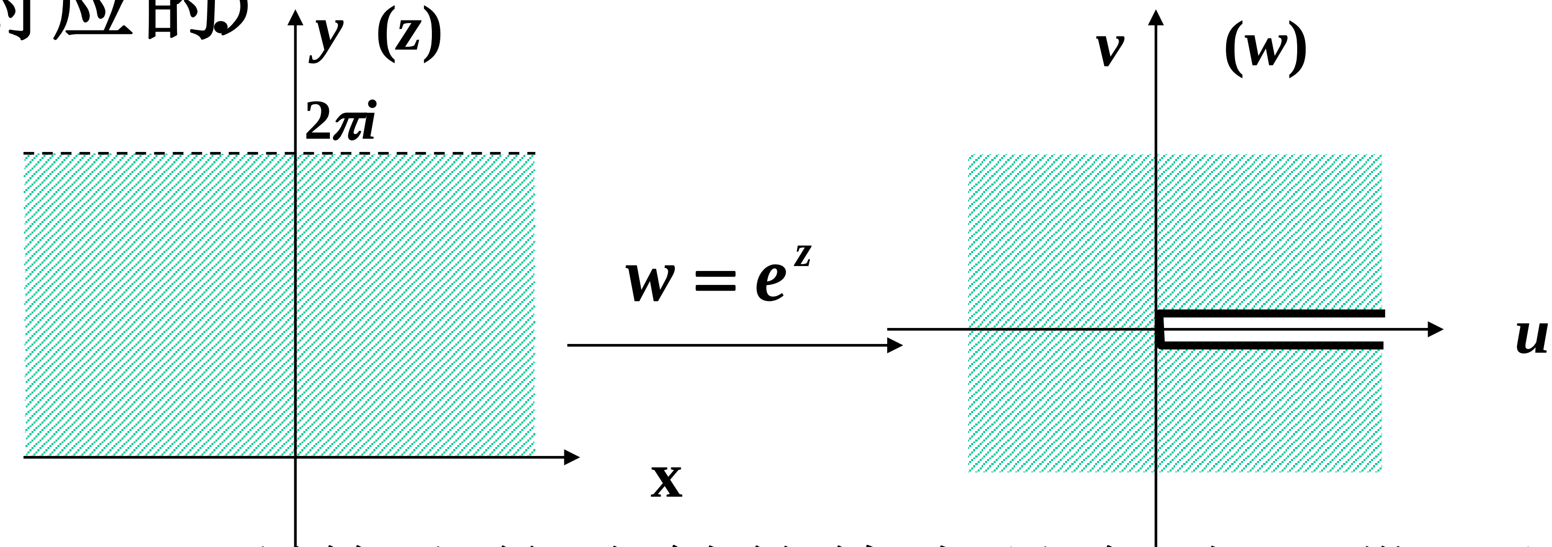
$$0 < \operatorname{Im} z < a \, (0 < a \le 2\pi) \rightarrow 0 < \arg w < a$$

带形区域 $\longrightarrow$ 角形区域



特别:$0<\operatorname{Im} z<2\pi \rightarrow 0<\arg w<2\pi$

(沿正实轴剪开的w平面,它们之间的点是一一对应的)



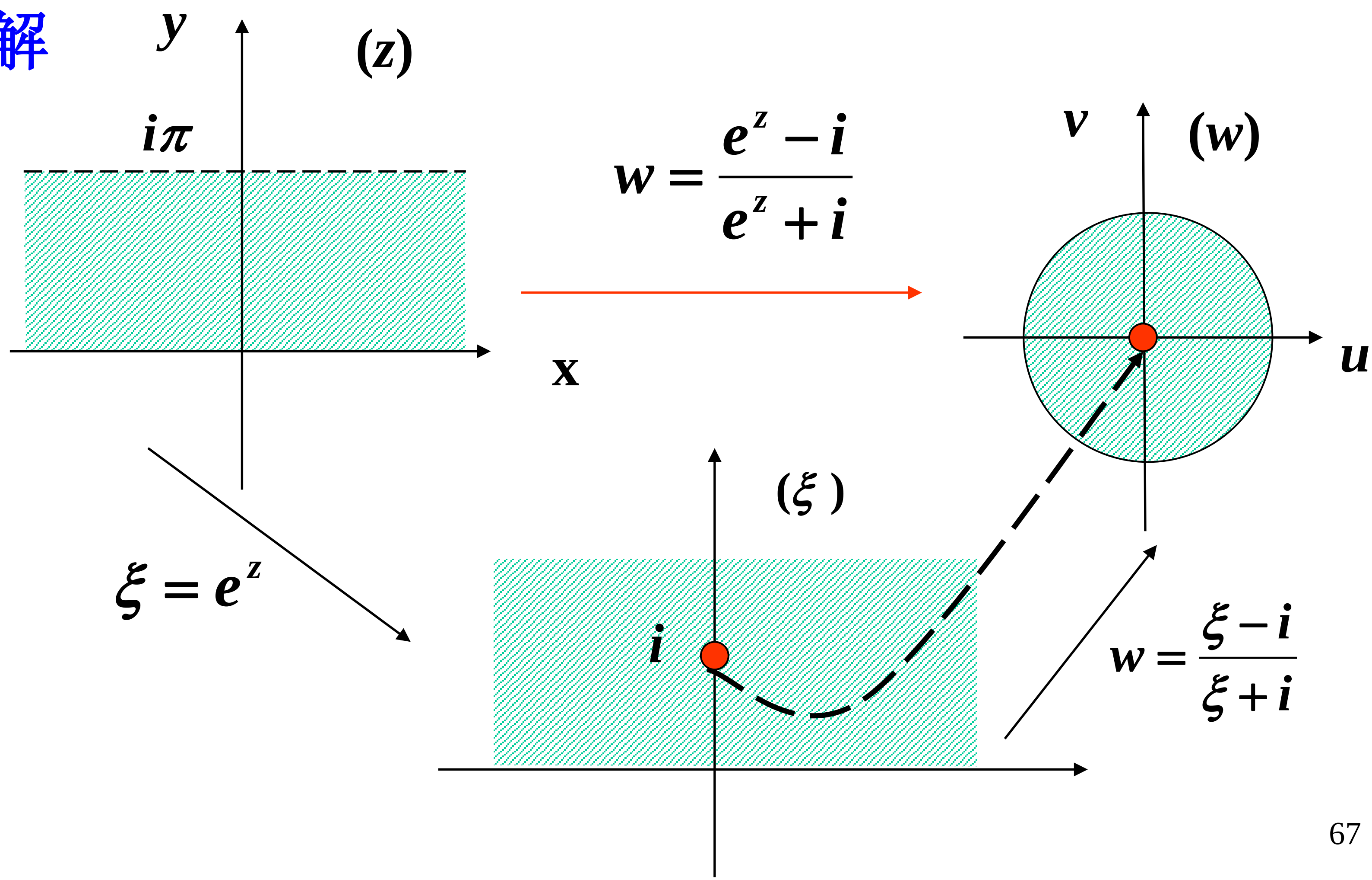
由$w=e^z$所构成的映射的特点是:把水平带形域

$0<\operatorname{Im}(z)<a(a\leq 2\pi) \rightarrow$角形域$0<\arg w<a$

因此,若需把带形域映射成角形域,常用指数函数.

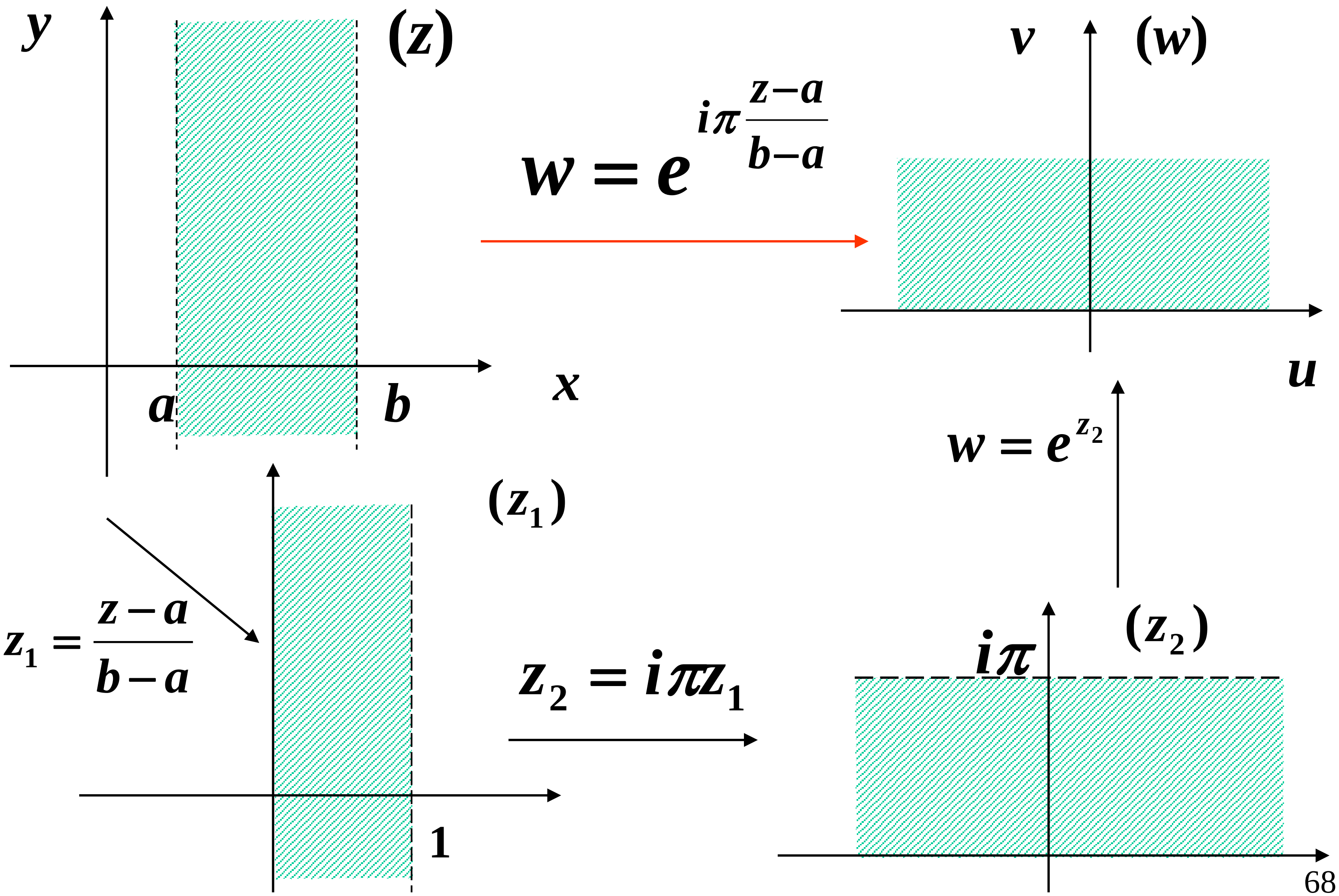
例3 求将 $0<\mathrm{Im}(z)<\pi$ 映射成 $|w|<1$ 的一个映射.

解



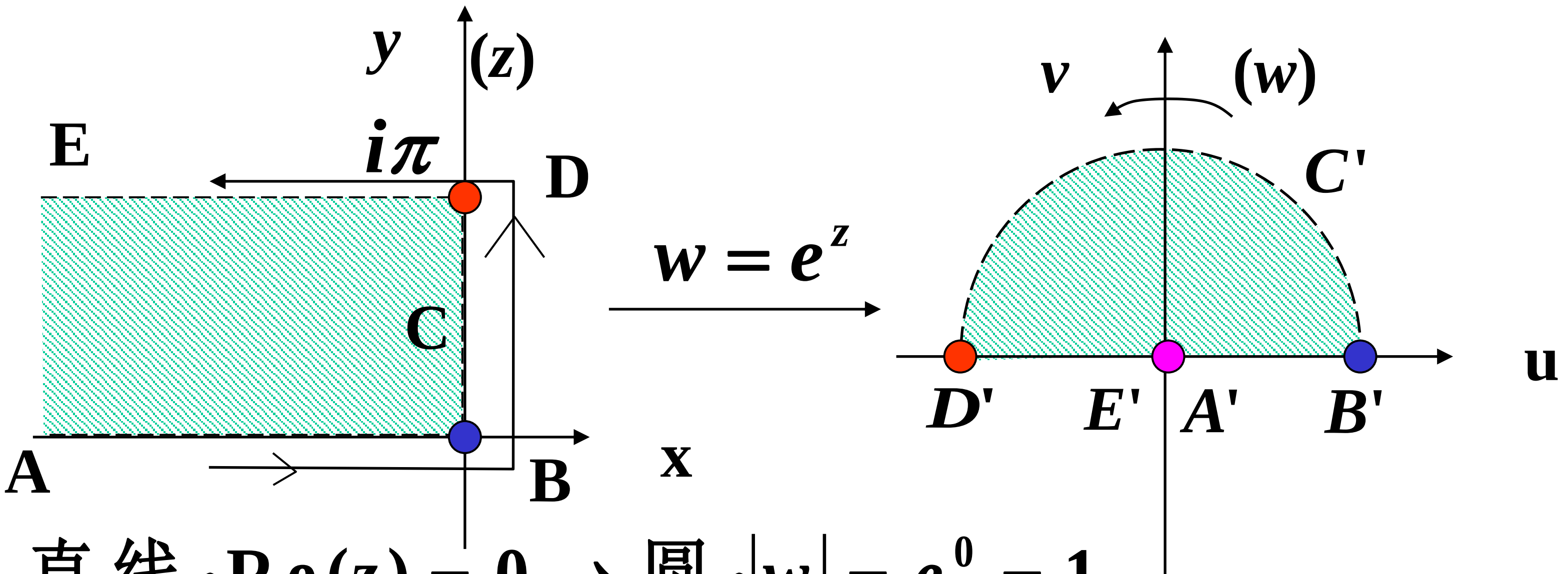
例4 求把带形域$a < \mathrm{Re}\, z < b$映射成上半平面$\mathrm{Im}(z) > 0$.

解



例5 问：$w=e^z$将半带形域$\begin{cases}-\infty<\mathrm{Re}(z)<0\\ 0<\mathrm{Im}(z)<\pi\end{cases}$

映射成什么区域？



解 直线：$\mathrm{Re}(z)=0\to$ 圆：$|w|=e^0=1$

直线：$\mathrm{Im}(z)=0\to$ 射线：$\varphi=0$

直线：$\mathrm{Im}(z)=\pi\to$ 射线：$\varphi=\pi$

$ABCDE\to$

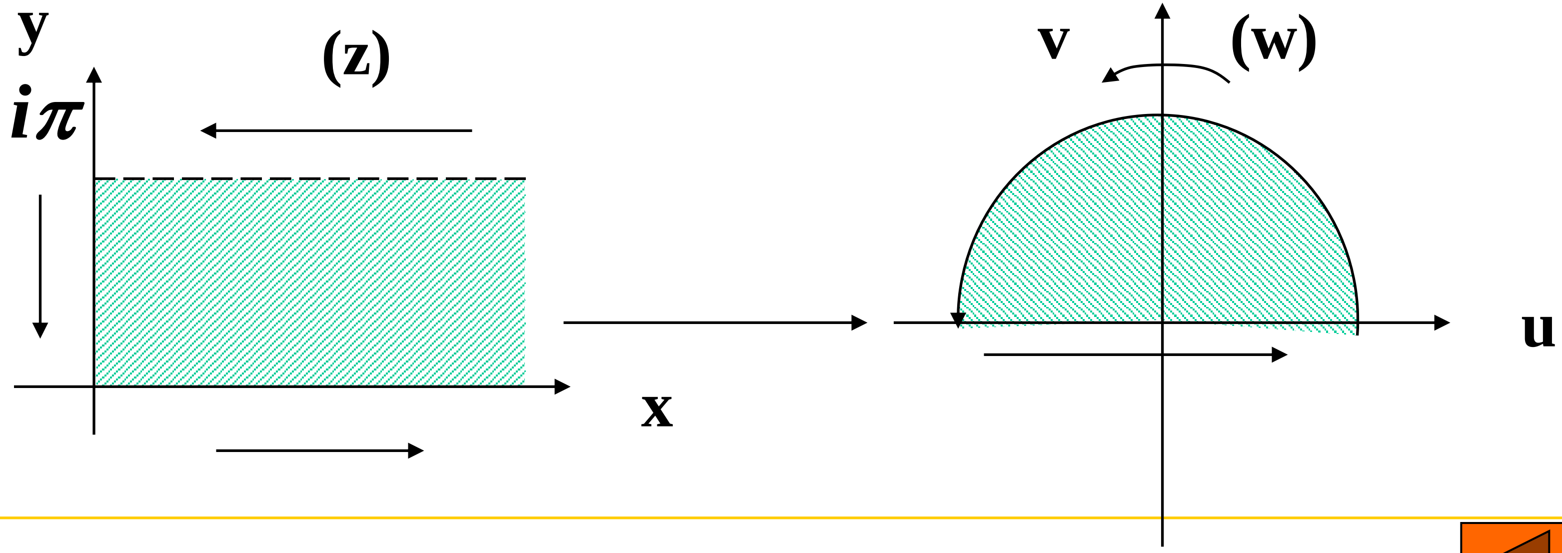
$A'B'C'D'E'$

答： $w=e^{z}$将半带形域$\begin{cases}-\infty<\mathrm{Re}(z)<0\\ 0<\mathrm{Im}(z)<\pi\end{cases}$

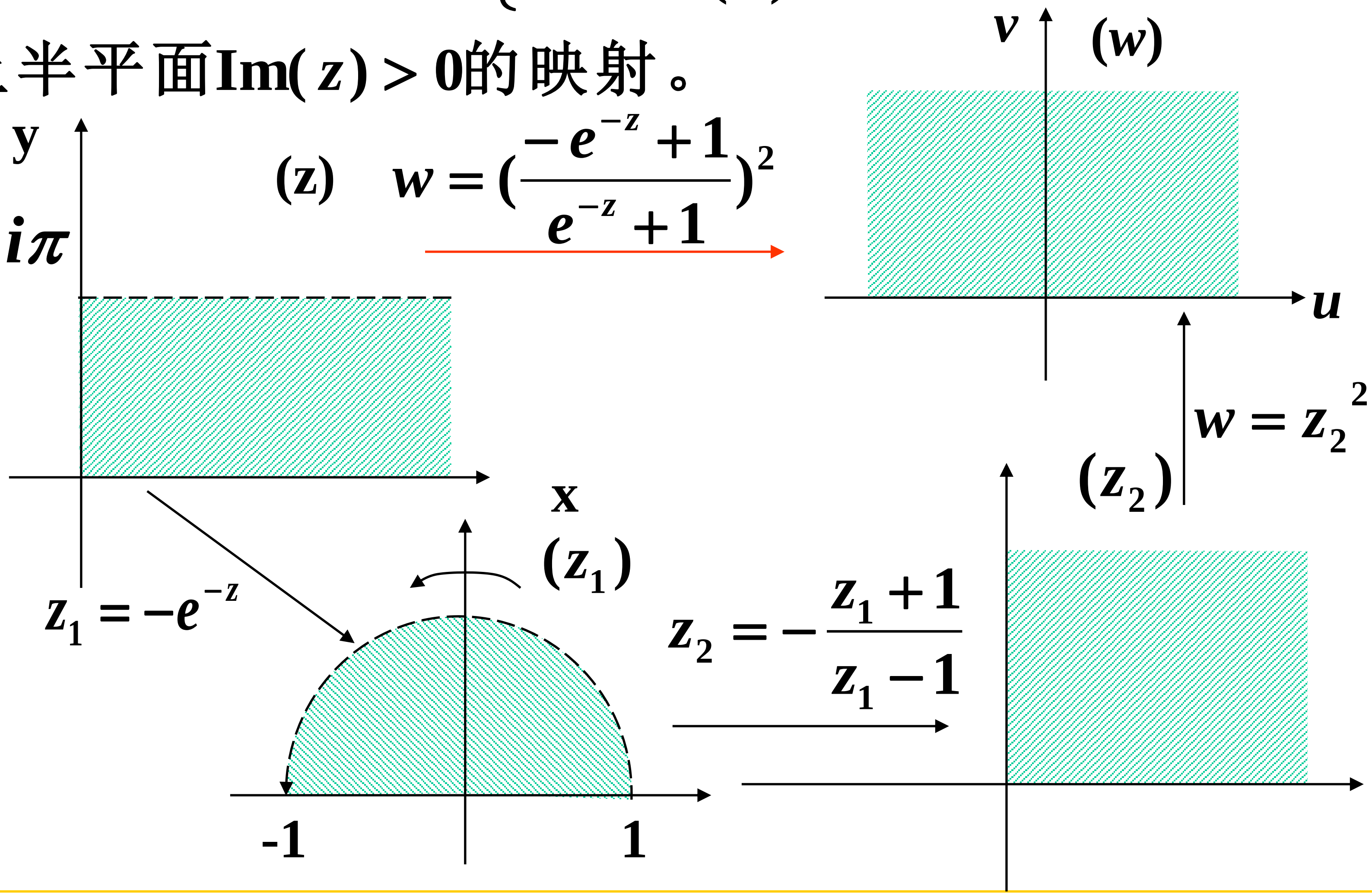
映射成半单位圆$|w|<1(\mathrm{Im}(z)>0)$

同理 $w=-e^{-z}$将半带形域$\begin{cases}0<\mathrm{Re}(z)<+\infty\\ 0<\mathrm{Im}(z)<\pi\end{cases}$

半单位圆映射成$|w|<1(\mathrm{Im}(z)>0)$

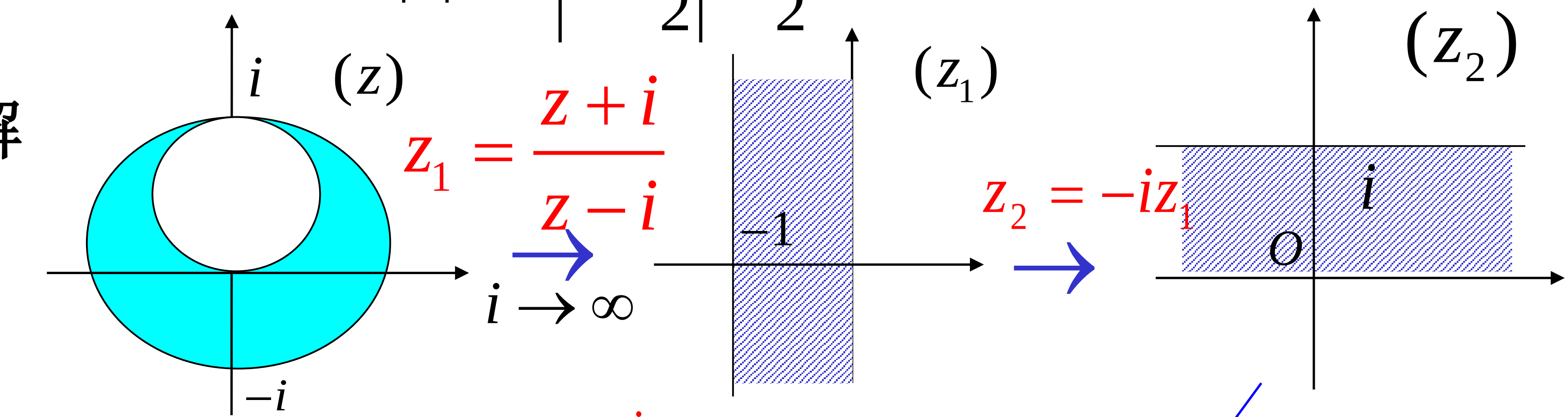


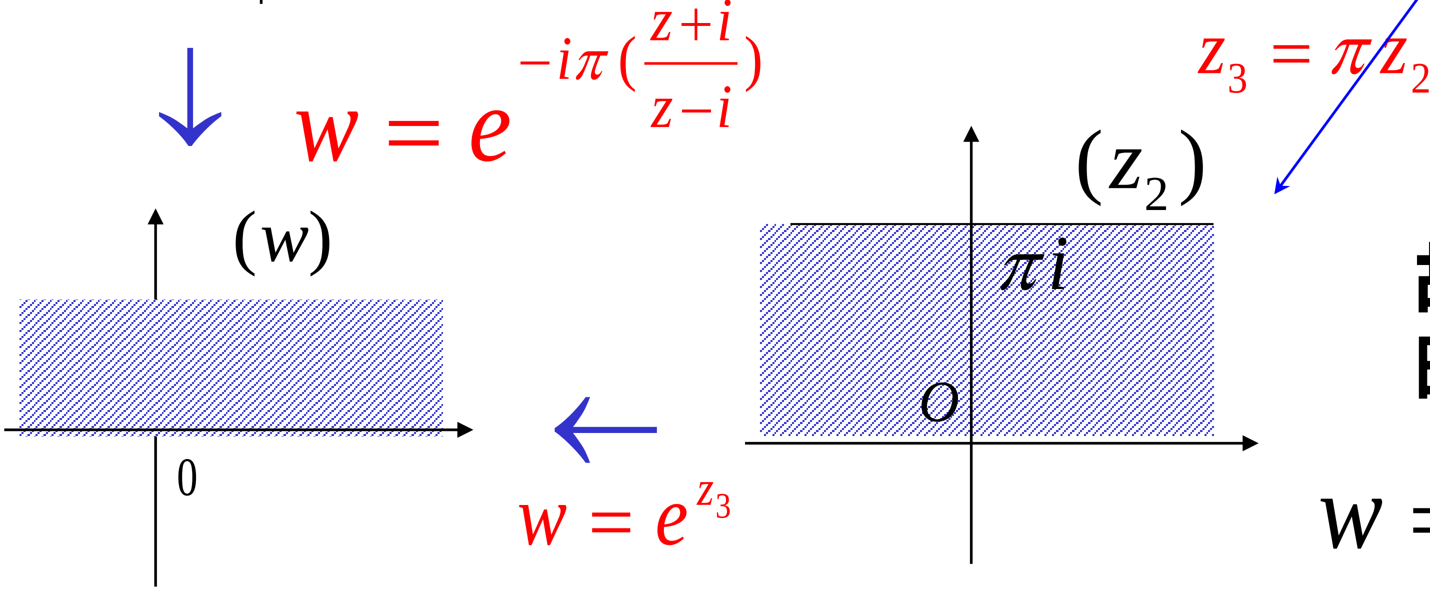
例6 求将半带形域$\begin{cases} 0 < \mathrm{Re}(z) < +\infty \\ 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi \end{cases}$映射成上半平面$\mathrm{Im}(z) > 0$的映射。



例7 求把区域$D:|z|<1,\left|z-\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$;变成上半平面的共形变换.

解

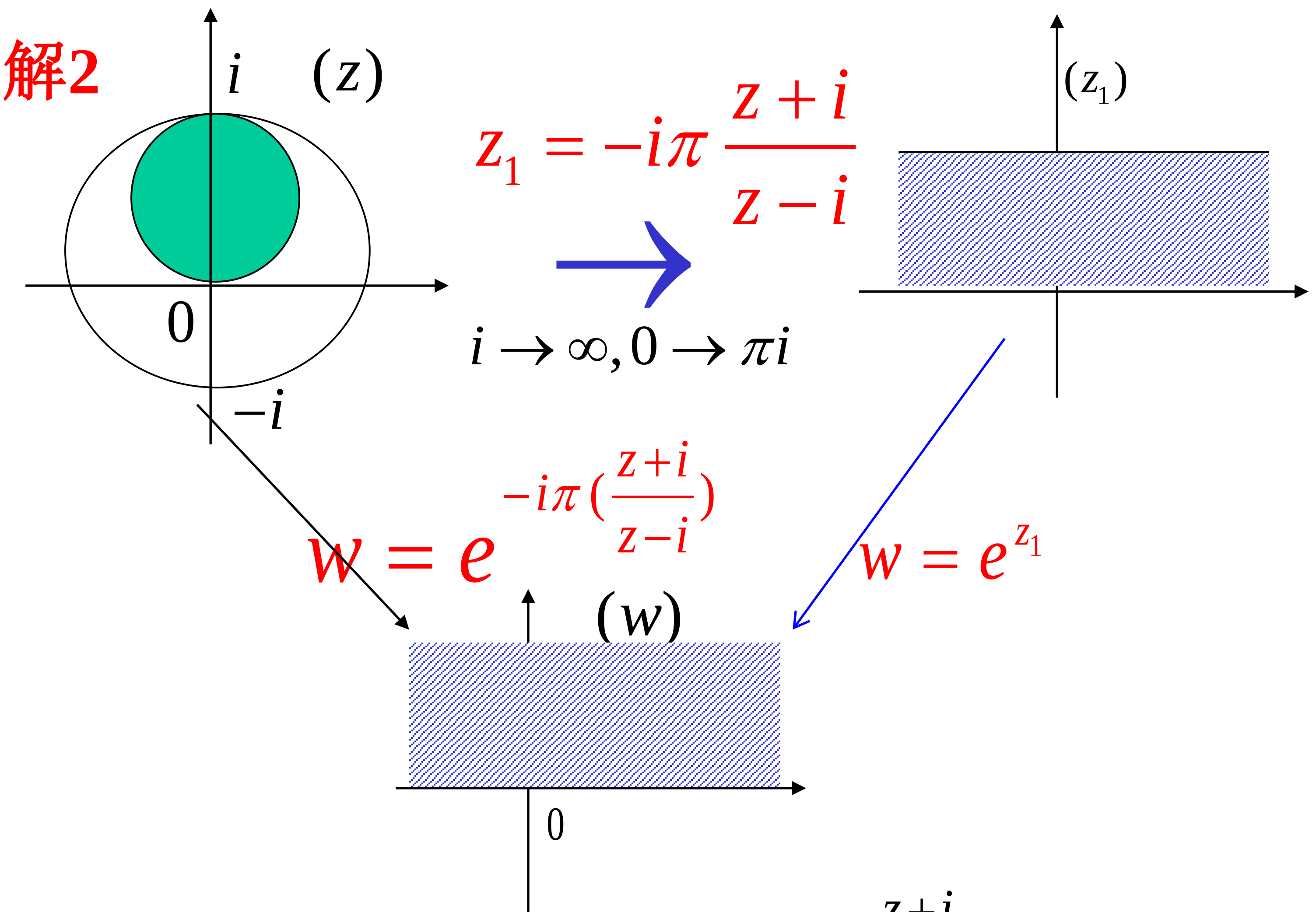




故所求的映射为

$$w=e^{-i\pi\left(\frac{z+i}{z-i}\right)}.$$

解2



故所求的映射为

$$w = e^{-i\pi(\frac{z+i}{z-i})}.$$

本章要求

1、掌握解析函数的导数的几何意义。

2、掌握共形映射的定义

3.会求曲线或区域经过某个映射后变成什么图形或区域;

4、掌握分式线性映射的构成及其性质以及对应点公式。

5、掌握常见的三个区域间的映射。

6、掌握幂函数和指数函数的映射特点并会利用两个初等函数的映射的映射特点求一些简单区域间的映射。