复变函数与积分变换

朱焱

数学学院

Email:zhuygraph@ecust.edu.cn

课 程 介 绍

课本：

复变函数与积分变换 (华东理工大学出版社)

作业：

每两周收取一次作业，由助教批改。

答疑：

第6、8、10周：A教二楼教师休息室 12：00-13：00

第12、14、16周：D教三楼教师休息室 12：00-13：00

第一章　复数与复变函数

- 一、复数的概念
- 二、复数的代数运算

一、复数的概念

1. 虚数单位:

对虚数单位的规定:

(1) $i^2 = -1$;

(2) i 可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算.

一般地，如果n是正整数, 则

$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$

2.复数:

对于任意两实数 x, y, 我们称 $z = x + yi$ 或 $z = x + iy$ 为复数.

其中 x, y 分别称为 z 的实部和虚部,

记作 $x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$

当 $x = 0,\ y \neq 0$ 时, $z = iy$ 称为纯虚数;

当 $y = 0$ 时, $z = x + 0i$, 我们把它看作实数 x.

两复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

复数 z 等于0当且仅当它的实部和虚部同时等于0.

说明 两个数如果都是实数,可以比较它们的大小, 如果不全是实数, 就不能比较大小, 也就是说, 复数不能比较大小.

二、复数的代数运算

设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

1. 两复数的和:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2. 两复数的积:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

3. 两复数的商:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

4. 共轭复数:

与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$,

若 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$.

例1 计算共轭复数 $x + yi$ 与 $x - yi$ 的积.

解 $(x - yi)(x + yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

结论:

两个共轭复数 $z, \bar{z}$ 的积是一个实数.

5. 共轭复数的性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$;

(3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

以上各式证明略.

例2 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ 与 $z\cdot\bar{z}$.

解 $$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\cdot i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},$$

$$z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

思考

观察复数 i 和 0, 由复数的定义可知 $i \neq 0$,

(1) 若 $i > 0$, 则 $i \cdot i > 0 \cdot i$, 即 $-1 > 0$, 矛盾;

(2) 若 $i < 0$, 则 $i \cdot i > 0 \cdot i$, 同样有 $-1 > 0$, 矛盾.

由此可见, 在复数中**无法定义大小关系**.

复数的几何表示

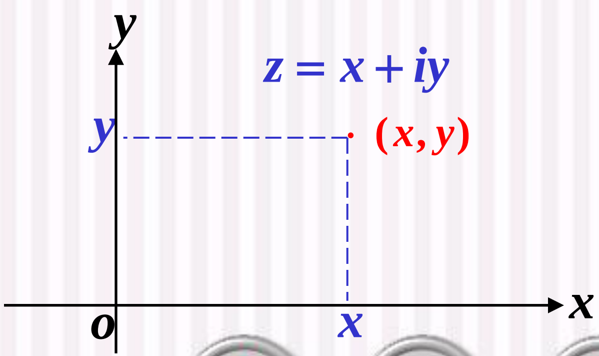
- 一、复平面
- 二、复球面

一、复平面

1. 复平面的定义

复数 $z = x + iy$ 与有序实数对 (x, y) 成一一对应. 因此, 一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数, 通常把横轴叫实轴或 x 轴, 纵轴叫虚轴或 y 轴. 这种用来表示复数的平面叫复平面.

复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的点 (x, y) 表示.

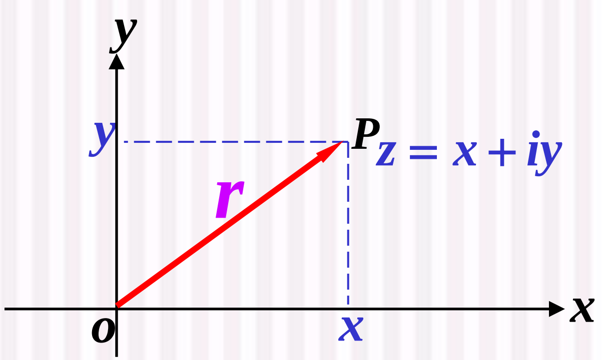


2. 复数的模(或绝对值)

复数 $z = x + iy$ 可以用复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示,

向量的长度称为 z 的模或绝对值,

记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



显然下列各式成立

$$|x| \le |z|, \qquad |y| \le |z|,$$

$$|z| \le |x| + |y|, \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

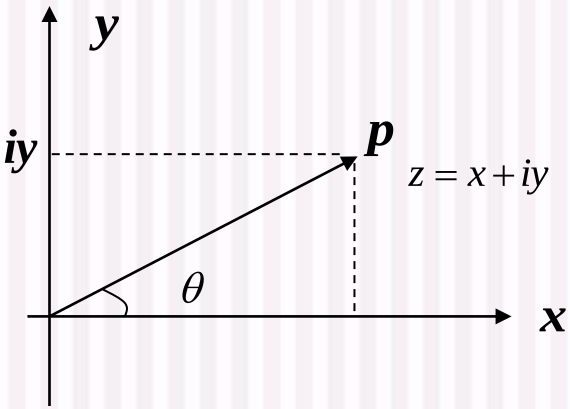
3. 复数的辐角

以正实轴为始边，以$z(z \neq 0)$所对应向量为终边的角称为z的辐角记为 $\mathrm{Arg}\, z$

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta + 2k\pi$$

显然 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$

所以 $\tan(\mathrm{Arg}\, z) = \tan\theta = \dfrac{y}{x}$



任何一个复数$z \neq 0$有无穷多个辐角,它们之间相差2π的整数倍。

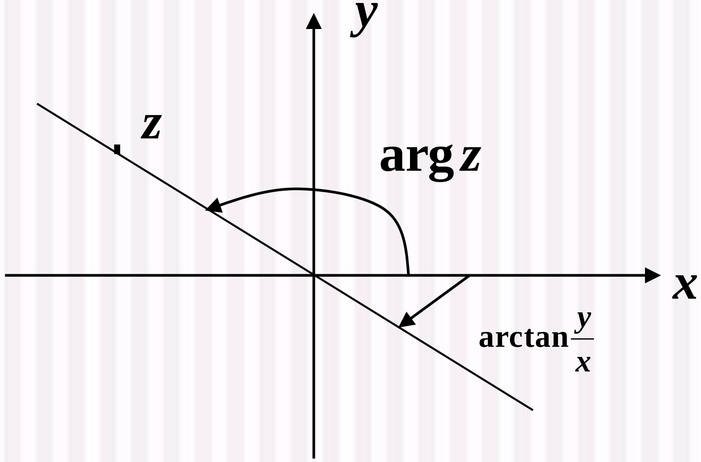
满足$-\pi < \theta_0 \leq \pi$的辐角称为辐角的主值，记为

$$\theta_0 = \arg z$$

于是有 $Arg\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

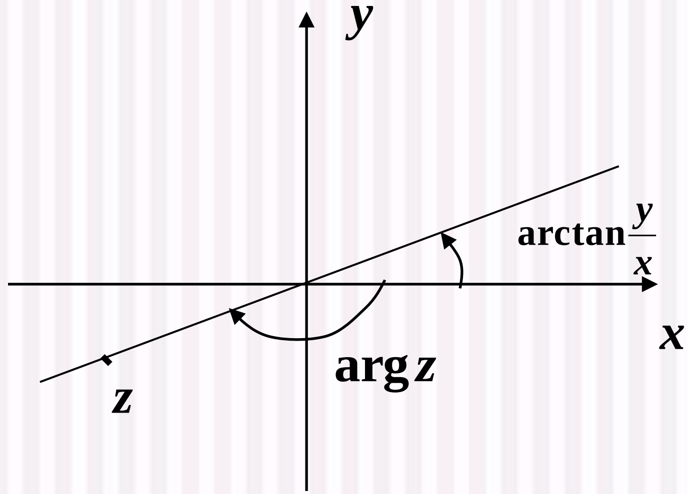
当 $z = 0$ 时, $|z| = 0$, 而辐角不确定

复数辐角的确定： 由 $\tan(Arg\, z) = \tan\theta = \dfrac{y}{x}$ 来确定



$$\arg z = \pi - \left(-\arctan \frac{y}{x} \right)$$

$$= \pi + \arctan \frac{y}{x}$$



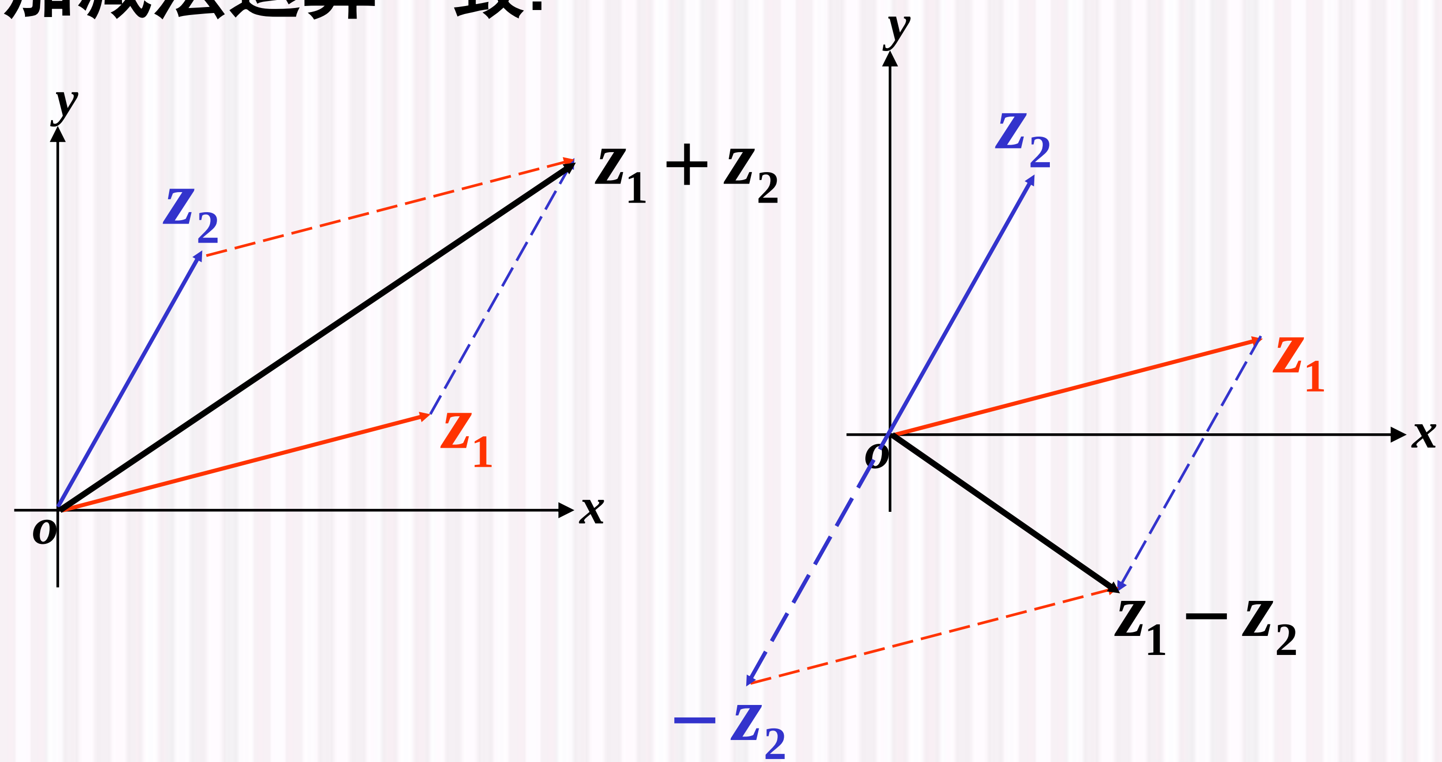
$$\arg z = -\pi + \arctan \frac{y}{x}$$

$\arg z$ 由 $\arctan\frac{y}{x}\ \left(-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}\right)$ 按如下关系确定：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & (x>0) \quad (I, IV)\\ \frac{\pi}{2} & (x=0, y>0)\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & (x<0, y\geq 0) \quad (II)\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & (x<0, y<0) \quad (III)\\ -\frac{\pi}{2} & (x=0, y<0)\end{cases}$$

4. 利用平行四边形法求复数的和差

两个复数的加减法运算与相应的向量的加减法运算一致.

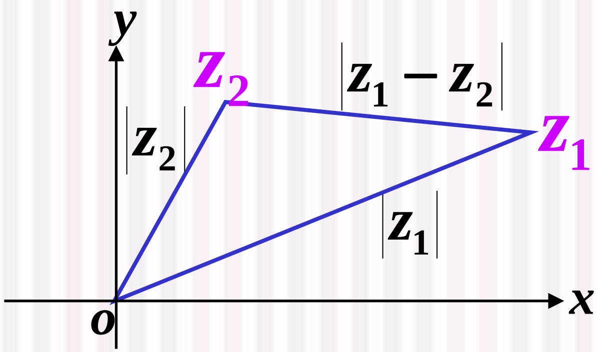


5. 复数和差的模的性质

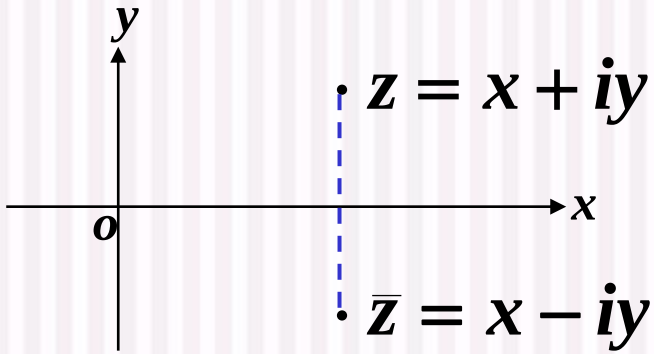
因为 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 之间的距离, 故

(1) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

(2) $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$.



一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称的.



6. 复数的三角表示和指数表示

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$

复数可以表示成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

复数的三角表示式

再利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$

复数可以表示成 $z = re^{i\theta}$

复数的指数表示式

例1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2i;$　　(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5};$

(3) $z=\frac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}.$

解　(1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$, 因为z在第三象限,

所以$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi,$

故三角表示式为$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right],$

指数表示式为 $z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

(2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$　　显然 $r = |z| = 1,$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10},$$

故三角表示式为 $z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10},$

指数表示式为 $z = e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

(3) $z=\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$.

因为 $\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi=e^{5\varphi i}$,

$\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi=\cos(-3\varphi)+i\sin(-3\varphi)=e^{-3\varphi i}$,

所以 $\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}=\dfrac{(e^{5\varphi i})^2}{(e^{-3\varphi i})^3}=e^{19\varphi i}$,

故三角表示式为 $z=\cos 19\varphi+i\sin 19\varphi$,

指数表示式为 $z=e^{19\varphi i}$.

例6 将通过两点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解 通过两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的直线的方程

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

所以它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

故,由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \le t \le 1)$$

若取 $t = \dfrac{1}{2}$,

得线段 $\overline{z_1 z_2}$ 的中点坐标为 $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

例8 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+i|=2$; (2) $|z-2i|=|z+2|$;

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为2的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$, $|x+(y+1)i|=2$,

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$, 圆方程 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2i|=|z+2|$

表示所有与点$2i$和-2距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点$2i$和-2的线段的垂直平分线. 设$z=x+iy$,

$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得 $y=-x$.

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$ 设$z=x+iy$,

$i+\bar{z}=x+(1-y)i$, $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为$y=-3$.

二、复球面

1. 南极、北极的定义

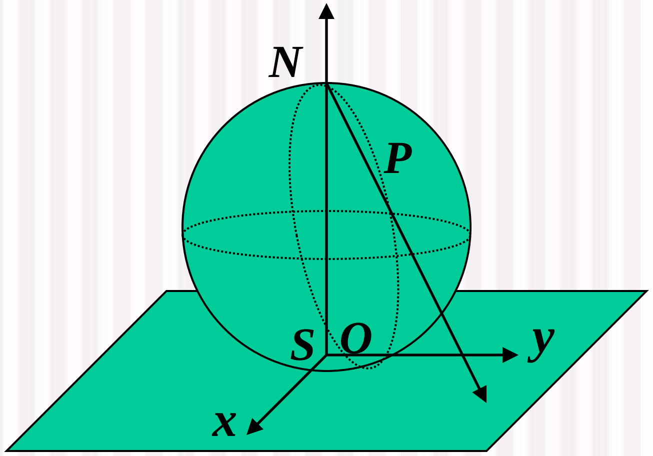
取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面，

球面上一点 S 与原点重合，

通过 S 作垂直于复平面的

直线与球面相交于另一点 N，

我们称 N 为北极，S 为南极.



2. 复球面的定义

球面上的点, 除去北极 N 外, 与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 我们可以用球面上的点来表示复数.

我们规定: 复数中有一个唯一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应. 因而球面上的北极 N 就是复数无穷大的几何表示.

球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应, 这样的球面称为复球面.

3. 扩充复平面的定义

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.

不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面,或简称复平面.

对于无穷大复数来说, 实部,虚部,辐角等概念均无意义, 它的模规定为正无穷大.

复球面的优越处:

能将扩充复平面的无穷远点明显地表示出来.

关于∞的四则运算规定如下：

(1) 加法： $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(2) 减法： $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(3) 乘法： $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq 0)$

(4) 除法： $\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty, (\alpha\neq\infty), \quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty, (\alpha\neq 0)$

三、小结与思考

学习的主要内容有复数的模、辐角;复数的各种表示法. 并且介绍了复平面、复球面和扩充复平面.

注意：为了用球面上的点来表示复数，引入了无穷远点．无穷远点与无穷大这个复数相对应,所谓无穷大是指模为正无穷大（辐角无意义）的唯一的一个复数，不要与实数中的无穷大或正、负无穷大混为一谈.

思考题

是否任意复数都有辐角?

思考题答案

否. 唯有 $z=0$ 的情况特殊,

它的模为零而辐角不确定.

复数的乘幂与方根

- 一、乘积与商
- 二、幂与根

一、乘积与商

定理一　两个复数乘积的模等于它们的模的乘积; 两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

证　设复数z_1和z_2的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2. \qquad \text{[证毕]}$$

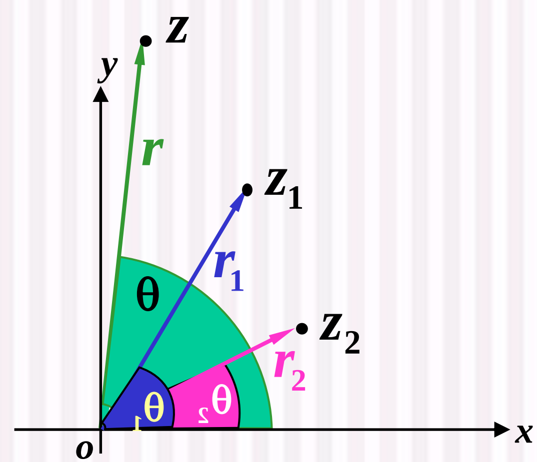
从几何上看, 两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$,

先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向

旋转一个角 θ_2,

再把它的模扩大到 r_2 倍,

所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.



两复数相乘就是把模数相乘, 辐角相加.

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$ 则 $$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

由此可将结论推广到 n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}, \quad (k = 1,2,\cdots,n)$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)}.$$

定理二　两个复数的商的模等于它们的模的商; 两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证　按照商的定义, 当 $z_1 \neq 0$ 时, $z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1$,

$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| |z_1|, \qquad \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \operatorname{Arg} z_1,$$

于是 $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$, $\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1.$

设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$. [证毕]

例1 已知 $z_1=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$, $z_2=\sin\dfrac{\pi}{3}-i\cos\dfrac{\pi}{3}$,

求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

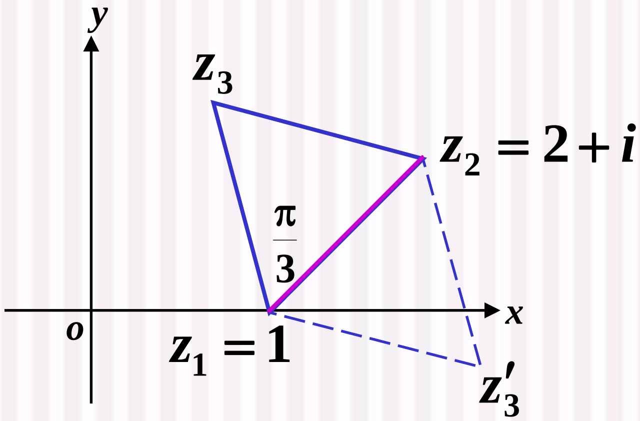
解 因为 $z_1=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

所以 $z_1\cdot z_2=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=-i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例2 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$，求它的另一个顶点.



解 如图所示，

将表示 $z_2 - z_1$ 的向量

绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$(或 $-\frac{\pi}{3}$)就得

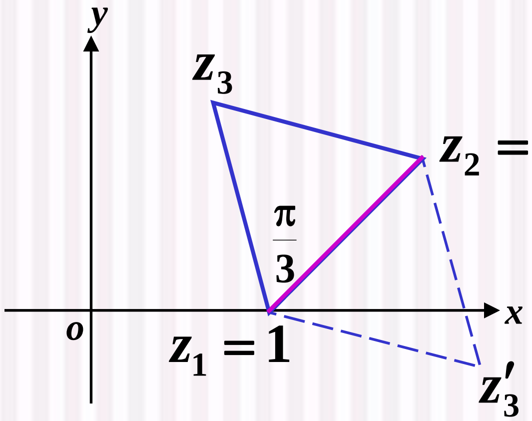
到另一个向量，它的终点即为所求顶点 z_3 (或 z_3').

因为复数 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 的模为1，转角为 $\frac{\pi}{3}$，

$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$



所以 $z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$, $z_3' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$

二、幂与根

1. n次幂:

n个相同复数z的乘积称为z的n次幂,

记作z^n, $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n个}$.

对于任何正整数n, 有$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

如果我们定义$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, 那么当n为负整数时,

上式仍成立.

2. 棣莫佛公式

当z的模$r=1$,即$z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

棣莫佛公式

3. 方程$w^n=z$的根w,其中z为已知复数.

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

推导过程如下:

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

根据棣莫佛公式,

$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

于是 $\rho^n=r$, $\cos n\varphi=\cos\theta$, $\sin n\varphi=\sin\theta$,

显然 $n\varphi=\theta+2k\pi$, $\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

故 $\rho=r^{\frac{1}{n}}$, $\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$,

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根：

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数值代入时，这些根又重复出现.

例如 $k=n$ 时,

$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) = w_0.$$

从几何上看, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心, $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例3 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解 $$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$(1+i)^n+(1-i)^n=$$

$$(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n+(\sqrt{2})^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

例4 计算 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.

解 $1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad (k=0,1,2,3).$$

即 $w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right]$,

$w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right]$,

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right],$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right].$$

这四个根是内接于中心在原点半径为$\sqrt[8]{2}$的圆的正方形的四个顶点.