华东理工大学

# 概率论与数理统计

# 作业簿（第十一册）

学　院 ____________专　业 ____________班　级 ____________
学　号 ____________姓　名 ____________任课教师____________

## 第 21 次作业

一. 选择题

1. 关于“参数 $\mu$ 的 95%的置信区间为 $(a,b)$ ”的正确理解的是　　　　（ A ）
   A. 至少有 95%的把握认为 $(a,b)$ 包含参数真值 $\mu$；
   B. 恰好有 95%的把握认为 $(a,b)$ 包含参数真值 $\mu$；
   C. 恰好有 95%的把握认为参数真值 $\mu$ 落在区间 $(a,b)$ 内；
   D. 若进行 100 次抽样，必有 95 次参数真值 $\mu$ 落在区间 $(a,b)$ 内

2. 设总体 $\xi \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2)$，其中 $\sigma_0$ 已知。在样本容量 n 和置信水平 $1-\alpha$ 确定的情况下，对不同的样本观测值，若样本均值 $\bar{x}$ 增大，则总体期望 $\mu$ 的置信区间的长度（ C ）
   A. 变长　　　　B. 变短
   C. 不变　　　　D. 不能确定

3. 设从总体 $\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ 和总体 $\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$ 中分别抽取容量为 9，16 的独立样本，以 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$S_x^2$，$S_y^2$ 分别表示两个独立样本的样本均值和样本方差，若已知 $\sigma_1=\sigma_2$，则 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%的置信区间为　　　　（ D ）

   A. $\left(\bar{x}-\bar{y}-z_{0.975}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{9}+\frac{\sigma_2^2}{16}},\ \bar{x}-\bar{y}+z_{0.975}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{9}+\frac{\sigma_2^2}{16}}\right)$

   B. $\left(\bar{x}-\bar{y}-z_{0.975}\sqrt{\frac{S_x^2}{9}+\frac{S_y^2}{16}},\ \bar{x}-\bar{y}+z_{0.975}\sqrt{\frac{S_x^2}{9}+\frac{S_y^2}{16}}\right)$

   C. $\left(\bar{x}-\bar{y}-\frac{t_{0.975}(25)S_w}{5},\ \bar{x}-\bar{y}+\frac{t_{0.975}(25)S_w}{5}\right)$，其中 $S_w=\sqrt{\frac{9S_x^2+16S_y^2}{25}}$

   D. $\left(\bar{x}-\bar{y}-t_{0.025}(23)S_w\frac{5}{12},\ \bar{x}-\bar{y}+t_{0.025}(23)S_w\frac{5}{12}\right)$，其中 $S_w=\sqrt{\frac{8S_x^2+15S_y^2}{23}}$

二、填空题

1. 将合适的数字填入空格，其中：

（1）置信水平$\alpha$，（2）置信水平$1-\alpha$，（3）精确度，（4）准确度。

置信区间的可信度由<u>（2）</u>控制，而样本容量可用来调整置信区间的<u>（3）</u>。

2．有一大批糖果，先从中随机地取 16 袋，称的重量（单位：g）如下：

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 506 | 508 | 499 | 503 | 504 | 510 | 497 | 512 |
| 514 | 505 | 493 | 496 | 506 | 502 | 509 | 496 |

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，

则总体均值$\mu$的置信水平为 95%的置信区间为<u>[500.4,507.1]</u>，

总体标准差$\sigma$的置信水平为 95%的置信区间为<u>[4.582,9.599]</u>。

3. 设总体$\xi\sim N(\mu,4)$，样本均值$\overline{X}$，要使总体均值$\mu$的置信水平为 95%的置信区间

为[$\overline{X}$-0.56，$\overline{X}$+0.56]，样本容量（观测次数）n 至少为<u>49</u>.

三、计算题

1．设某地旅游者日消费额服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且标准差$\sigma=12$，今对该地旅游者的日平均消费额进行估计，为了能以 95%的置信水平相信这种估计误差小于 2（元)，问至少需要调查多少人？

解：由于总体为正态分布,且标准差$\sigma(=12)$已知,又由$1-\alpha=0.95$,即$\alpha=0.05$,

查表可得 $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$

误差小于 2 即: $1.96\cdot\frac{12}{\sqrt{n}}<2\Rightarrow n>138.2976$，故至少要调查 139 人。

2. 设某炼铁厂炼出的铁水含碳量（单位：%）服从于正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$，根据长期积累的资料，已知其中$\sigma=0.108$。现测量 5 炉铁水，测得含碳量为：4.28，4.40，4.42，4.35，4.37. 求总体均值$\mu$的水平为 95%的置信区间.

解：据题意，要求$\mu$的置信度为 95%的置信区间，且方差已知:

则$\mu$的置信度为 95%的置信上下限为:

$$\overline{x}\mp z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=[4.2693,4.4587].$$

3．设某种清漆的干燥时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。现有该清漆的 9 个样本，干燥时间分别为 6.0，5.7，5.8，6.5，7.0，6.3，5.6，6.1，5.0。试求该种清漆平均

干燥时间的置信度为95%的置信区间。

解：据题意，要求$\mu$的置信度为95%的置信区间，且方差未知。

由样本得：$n=9$，$\bar{x}=6$，$s_{n-1}^2=0.33$，查$t$分布表得$t_{0.025}(8)=2.306$

则$\mu$的置信度为95%的置信上下限为

$$\bar{x} \pm t_{0.025}(8)\cdot\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 6 \pm 2.306\times\frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{9}} = 6 \pm 0.44$$

即该种清漆平均干燥时间的置信度为95%的置信区间为[5.56, 6.44]。

4．某厂生产一批圆形药片，已知药片直径$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 16 粒药片，测得样本均值$\bar{x}=4.87$ mm，样本标准差$s=0.32$ mm，求总体的方差$\sigma^2$在置信水平为 0.95 下的置信区间。

解：由样本值得$s=0.32$，$n=16$，$\alpha=0.05$，自由度为$n-1=15$。

查表得$\chi^2_{0.975}(15)=6.262$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.488$。所以，

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(15)}=\frac{15\times0.32^2}{27.488}=0.0559,$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(15)}=\frac{15\times0.32^2}{6.262}=0.2453.$$

即$\sigma^2$的置信水平为 0.95 的置信区间为：$[0.0559,\quad 0.2453]$。

5. 为了测试某药物的疗效，随机抽取 10 人测量其服用药物前后某指标的数据：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 服用前 X: | 41 | 60.3 | 23.9 | 36.2 | 52.7 | 22.5 | 67.5 | 50.3 | 50.9 | 24.6 |
| 服用后 Y: | 49.6 | 64.5 | 33.3 | 36 | 43.5 | 56.8 | 60.7 | 57.3 | 65.4 | 41.9 |

假设服用前后该指标测量值分别都服从正态分布：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

根据上述数据经计算得服用前的样本均值为: $\bar{X}=42.99$, 样本**标准**差$S_X=15.93$

服用后的样本均值为: $\bar{Y}=50.90$, 样本**标准**差$S_Y=11.72$，令$Z=Y-X$，根据服药前后的样本数据算得: $\bar{Z}=7.91$, 样本**标准**差$S_Z=12.56$.

1) 证明若服药前后的样本容量均为 n, 则有 $\dfrac{\bar{Z}-(\mu_2-\mu_1)}{S_z}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

2) 求 $\mu_2-\mu_1$ 的置信水平为 95%的置信区间

证明: 1) $Z=Y-X\sim N(\mu_2-\mu_1,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$$\bar{Z}\sim N\left(\mu_2-\mu_1,\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}\right),\qquad A=:\frac{\bar{Z}-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

$B=:\dfrac{(n-1)S_Z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 $S_Z$ 与 $\bar{Z}$ 相互独立.

$$\frac{A}{\sqrt{B/(n-1)}}=\frac{\bar{Z}-(\mu_2-\mu_1)}{S_z}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$

2) 按单正态总体方差未知时，总体期望的置信区间公式可得：

$$[7.91-t_{0.025}(9)\frac{12.56}{\sqrt{10}},\quad 7.91+t_{0.025}(9)\frac{12.56}{\sqrt{10}}]=[-1.074,\quad 16.894]\quad .$$

# 第 22 次作业

一．选择题

1. 假设检验中分别用 $\boldsymbol{H_0}$ 和 $\boldsymbol{H_1}$ 表示原假设和备择假设，则犯第一类错误的概率是指 ( C )

   A. $\boldsymbol{P\{接受H_0 \mid H_0为真\}}$ B. $P\{接受H_0 \mid H_0不真\}$

   C. $\boldsymbol{P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}}$ D. $P\{拒绝H_0 \mid H_0不真\}$

2. 一个显著性的假设检验问题，检验的结果是拒绝原假设还是接受原假设,与之有关的选项中, 正确的 ( D )

   A. 与显著性水平有关 B. 与检验统计量的分布有关

   C. 与样本数据有关 D. 与上述三项全有关

3. 一个显著性水平为 α 的假设检验问题，如果原假设 $\boldsymbol{H_0}$ 被拒绝,则 ( B )

A. 原假设 $\boldsymbol{H}_0$ 一定不真　　　　B. 这个检验犯第一类错误的概率不超过 α

C. 这个检验也可能会犯第二类错误　　D. 这个检验两类错误都可能会犯

二. 填空题：

1．假设检验的基本思想是基于 小概率反例否定法(或 小概率事件原理)

2. 选择原假设最重要的准则是 含有等号

3. 假设检验中可能犯的两类错误的关系为, 一定条件下若降低了犯第一类错误的概率,会增加犯第二类错误的概率,(反之亦然).

三. 计算题：

1．已知在正常生产情况下某厂生产的汽车零件的直径服从正态分布 $N(54, 0.75^2)$，在某日生产的零件中随机抽取 10 件，测得直径（cm）如下：

54.0 ，55.1 ，53.8，54.2 ，52.1 ，54.2，55.0 ，55.8，55.1，55.3

如果标准差不变，在显著水平 $\alpha = 0.05$ 情况下,能否认为该日生产零件直径的均值与标准值 54cm 无显著差异？ 并问这个检验可能犯的错误是哪一类?

解：由样本观测值计算,得 $\bar{X} = 54.46$，本问题相当于要检验

$$H_0: \mu = 54，H_1: \mu \neq 54$$

考虑到总体服从正态分布 $N(54, 0.75^2)$ ,故采用双侧 U 检验法，

取检验统计量的测试值为 $\hat{U} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \dfrac{54.46 - 54}{0.75 / \sqrt{10}} = 1.9395$，

由水平 $\alpha = 0.05$,查表得 $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96 > 1.9395$, 故接受 $H_0$，

即该日生产的零件直径的均值与标准值没有显著差异。
因原假设被接受,故这个检验可能犯的错误是第二类.

2．从一批矿砂中，抽取 5 个样品，测得它们的镍含量（单位：%）如下：

3.25　　3.24　　3.26　　3.27　　3.24

设镍含量服从正态分布，问：能否认为这批矿砂中镍含量的平均值为 3.25（显著水平 $\alpha = 0.05$）。

解:由样本观测值计算,得 $\bar{X}=3.252, S_{n-1}=0.013$，本问题相当于要检验

$$H_0: \mu=3.25, \quad H_1: \mu \neq 3.25$$

考虑到总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中方差 $\sigma^2$ 未知,故采用双侧 t 检验法，

取检验统计量的测试值为 $\hat{T}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}}=\dfrac{3.252-3.25}{0.013/\sqrt{5}}=0.3440$，

由水平 $\alpha=0.05$，而 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.776$, 由于 $|\hat{T}|<t_{0.025}(4)$，

故接受 $H_0$，即可以认为这批矿砂中的镍含量的平均值为 3.25。

3．用热敏电阻测温仪间接测量地热勘探井底温度 7 次。测得温度（$^{\circ}C$）：

112.0， 113.4， 111.2，112.0，114.5，112.9，113.6

而用某精确办法测得温度为 112.6（可看作温度真值），试问热敏电阻测温仪的间接测量有无系统偏差？ （显著水平 $\alpha=0.05$）。

解：由样本观测值计算，得 $\bar{X}=112.8, S_{n-1}=1.1358$，

本问题相当于要检验 $H_0: \mu=112.6, H_1: \mu \neq 112.6$，

考虑到方差 $\sigma^2$ 未知，故采用双侧 t 检验法。

计算检验统计量的值为 $\hat{T}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}}=\dfrac{112.8-112.6}{1.1358/\sqrt{7}}=0.4659$，

由水平 $\alpha=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(6)=2.4469$, 由于 $|\hat{T}|<t_{0.025}(6)$

故接受 $H_0$，即可以认为热敏电阻测温仪间接测温无系统偏差.

4. 某工厂生产的铜丝的折断力（$N$）服从标准差为 40 的正态分布，某日抽取 10 根铜丝进行折断力试验，测得结果如下：

2830，2800，2795，2820，2850，2830，2890，2860，2875, 2785

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 情况下,能否认为该日生产的铜丝折断力的标准差无显著性改变？

解：由样本观测值计算，得 $\bar{X}=2833.5, S_{n-1}^2=1228.0556$，

本问题相当于要检验$H_0:\sigma=40,\quad H_1:\sigma\neq 40$，

考虑到均值$\mu$未知，故采用双侧$\chi^2$检验法，

取检验统计量的测试值为$\hat{\chi}^2=\dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times 1228.0556}{40^2}=6.9078$

由水平$\alpha=0.05$，查表得

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=\chi_{0.025}^2(9)=19.023,\ \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=\chi_{0.975}^2(9)=2.70,$$

由于 2.7<6.9078<19.023，故接受$H_0$，

即可以认为该日生产的铜丝折断力的标准差无显著性改变。

5. 某种饮料的罐装量$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，这里$\mu,\sigma^2$未知。现从中随机抽取 10 瓶，测得饮料的体积（单位：ml）为

100，101， 96， 92， 97， 95 98， 97， 104， 101

在显著水平$\alpha=0.05$下，讨论

(1) 在方差未知的条件下，是否可以认为饮料的罐装量达到$\mu=100$ (ml)？

(2) 是否可以认为罐装量是稳定的，即是否达到方差$\sigma^2=16$？

**解**：由样本观测值计算，得$\bar{X}=98.1, S_{n-1}^2=12.1$，

（1）$H_0:\mu=100, H_1:\mu\neq 100$。

$$\hat{T}=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_{n-1}}\sqrt{n}=\frac{98.1-100}{3.4785}\sqrt{10}=-1.7273$$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.2622$，由于$|\hat{T}|<t_{0.025}(9)$

所以不拒绝$H_0$。

（2）$H_0:\sigma^2=16,\quad H_1:\sigma^2\neq 16$，

取检验统计量的测试值为$\hat{\chi}^2=\dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times 12.1}{16}=6.80625$

由水平$\alpha=0.05$，查表得

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=\chi_{0.025}^2(9)=19.023,\ \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=\chi_{0.975}^2(9)=2.70,$$

由于 2.7<6.80625<19.023，故不拒绝$H_0$，可以认为罐装量是稳定的。

另解：$\left[\dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\chi^2_{0.025}(9)}, \dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\chi^2_{0.975}(9)}\right] = \left[\dfrac{9\times 12.1}{19.023}, \dfrac{9\times 12.1}{2.700}\right] = [5.7246, 40.3333]$

方差 $\sigma^2$ 在上述置信水平 1-5%的置信区间，可以认为罐装量是稳定的。

6. 设总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$,其中 $\mu$和$\sigma^2$ 均未知, 抽取一个容量为 n 的样本,

对总体期望 $\mu$ 的检验原假设为 $H_0: \mu = \mu_0$. 证明:在显著性水平 $\alpha$ 下接受 $H_0$ 的充要条件是 $\mu$ 的置信水平为 1-$\alpha$ 的置信区间包含 $\mu_0$

证明：设 $\bar{X}$和$S$ 分别表示样本均值和样本标准差,显著性水平 $\alpha$ 下对原假设 $H_0$ 的检验, 检验统计量为 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$， 接受 $H_0$,即统计量观测值落入接受域，

即：$|T| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \Leftrightarrow \bar{X}\text{-}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le u_0 \le \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

即 $\mu$ 的置信水平为 1-$\alpha$ 的置信区间 $[\bar{X}\text{-}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$ 包含 $\mu_0$