华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 5 册）

第九次作业

教学内容：5.1 孤立奇点　 5.2.1 留数的定义　 5.2.2 极点处留数的计算

1．填空题：

（1）函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-(1+i)}$ 的全部孤立奇点是 $\underline{\dfrac{1}{2}\ln 2+i(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi),k=0,\pm 1,\ldots\ldots}$

（2）$z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z-z}$ 的____三____级极点.

（3）$z=-2$ 是 $\dfrac{z^3-8}{(z^2-4)^3}$ 的____三_级极点.

（4）函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}(a>0)$ 在上半平面内奇点的留数之和为 $-\dfrac{\sqrt{2}i}{4a^3}$ 或 $-\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{\frac{3\pi}{4}i}}{4a^3}$..

（5）$\operatorname{Res}[z\cos\dfrac{1}{z},0]=\underline{-\dfrac{1}{2}}$

2．指出下列函数的奇点及其类型（不考虑 ∞ 点），若是极点，指出它的级.

(1) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$;

解：由 $z^n+1=0, z^n=-1$, 得 $z_k=e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}(k=0,1,\cdots,n-1)$ 为原式一级极点。

(2) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$

解 1：$\ln(1+z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}, 0<|z|<1$，$\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n+1}$ 无负幂项，故 $z=0$ 为其可去奇点。

解 2：$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(1+z)}=1$，故 $z=0$ 为可去奇点。

(3) $e^{\frac{z}{1-z}}$

解：由于$e^{\frac{z}{1-z}}=e^{\frac{z-1+1}{1-z}}=e^{-1}e^{\frac{1}{1-z}}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$，所以$z=1$为本性奇点。

(4) $\frac{\sin z}{z^3}$；

解：$z=0$为$\sin z$的一级零点，而$z=0$为z^3的三级零点，故$z=0$为$\frac{\sin z}{z^3}$的二级极点。

$\lim_{z\to 0}z^2\frac{\sin z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1\neq 0$，故$z=0$为$\frac{\sin z}{z^3}$的二级极点。

(5) $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$；

解：因$e^z-1=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}=z(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)$, 故$z=0$为$\frac{1}{z^2(e^z-1)}$的三级极点，而

$z=2k\pi i, k=\pm1,\pm2,\cdots$均为一级极点。

(6) $\frac{e^z\sin z}{z^2}$

解：由于$\frac{e^z\sin z}{z^2}=\frac{e^z(z-\frac{z^3}{3!}+....)}{z^2}=\frac{e^z(1-\frac{z^2}{3!}+...)}{z}$

所以$\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{e^z\sin z}{z^2}=1$，因此 $z=0$是一级极点

3 证明：如果z_0是$f(z)$的$m(m>1)$级零点，那么z_0是$f'(z)$的$m-1$级零点.

证明：z_0是$f\left(z\right)$的$m\left(m>1\right)$级零点，可设$f\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^m\varphi\left(z\right)$，

其中$\varphi\left(z\right)$在z_0点解析，且$\varphi'\left(z_0\right)\neq 0$，

$$f'\left(z\right)=m\left(z-z_0\right)^{m-1}\varphi\left(z\right)+\left(z-z_0\right)^m\varphi'\left(z\right)$$

令$\phi\left(z\right)=m\varphi\left(z\right)+\left(z-z_0\right)\varphi'\left(z\right)$，

则$f'\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^{m-1}\phi\left(z\right)$，

因为$\varphi(z)$在z_0点解析，所以$\phi(z)$也在z_0点解析，且$\varphi(z_0)\neq 0$，所以

$\phi(z_0)=m\varphi(z_0)\neq 0$，即$z_0$是$f'(z)$的$m-1$级零点。

4 求下列函数在各有限奇点的留数.

(1) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$;

解：$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}=\dfrac{1}{z^4}\left(-2z-\dfrac{4z^2}{2!}-\dfrac{8z^3}{3!}-\cdots\right)$

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),0\right]=c_{-1}=-\frac{4}{3};$$

(2) $\dfrac{\cos z}{z-i}$;

解：$\mathrm{z}=\mathrm{i}$为一级极点

$$\mathrm{Res}[\frac{\cos z}{z-i},i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\cos z}{z-i}=\cos i=\cosh 1$$

(3) $\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$;

解：$\mathrm{z}=\pm\mathrm{i}$为三级极点

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(1+z^2)^3},i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3\frac{1}{(1+z^2)^3}]=\frac{-3i}{16}$$

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(1+z^2)^3},-i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\frac{d^2}{dz^2}[(z+i)^3\frac{1}{(1+z^2)^3}]=\frac{3i}{16}$$

(4) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

解：$z^2\sin\dfrac{1}{z}=z^2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}$,

$$\mathrm{Re}\,s\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{6}$$

（5）$e^{\frac{z}{z-1}}$，$z=1$；

解：$e^{\frac{z}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}=e(1+\frac{1}{z-1}+....)$

故 $a_{-1}=e$

即 $\mathrm{Re}\,s[e^{\frac{z}{z-1}},1]=e.$

（6）$e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}$， $z=0.$

解：$e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}=(1+\frac{1}{z}+...)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+...)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...$

故 $\mathrm{Re}\,s[e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z},0]=1$

5. 判断 $e^{z+\frac{1}{z}}$.在扩充复平面上的孤立奇点的类型，并求其留数.

解：函数 $e^{z+\frac{1}{z}}$ 有孤立奇点 $0,\infty$，而且在 $0<|z|<+\infty$ 内有如下展开式：

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^ze^{\frac{1}{z}}=(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots)$$
$$=\cdots+\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\cdots\}\frac{1}{z}+\cdots$$

所以 $\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},0]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

$\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},\infty]=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

6. 设 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析， z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且 $\mathrm{Re}\,s\left[f(z),z_0\right]=A$，证明：

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z)\varphi(z),z_0\right]=A\varphi(z_0)$$

证明：因为 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，设 $f(z)=\frac{g(z)}{z-z_0}$, $g(z)$在z_0解析，$g(z_0)\neq 0$

所以 $\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{g(z)}{z-z_0}=g(z_0)=A$

又由于 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析所以 z_0 为 $f(z)\varphi(z)$ 的一级极点。

$$\mathrm{Res}\left[f(z)\varphi(z),z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)\varphi(z)}{z-z_0}=A\varphi(z_0)$$

7．已知 $z=0$ 是函数 $f(z)$ 的 n 级极点，证明 $\mathrm{Res}[\dfrac{f'(z)}{f(z)},0]=-n.$

证明：设 $f(z)=z^{-n}g(z),\ g(z)$ 在 $z=0$ 解析，且 $g(0)\neq 0$，于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-nz^{-n-1}g(z)+z^{-n}g'(z)}{z^{-n}g(z)}=\frac{-n}{z}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ 在 $z=0$ 解析，故 $\mathrm{Res}[\dfrac{f'(z)}{f(z)},0]=-n.$

第十次作业

教学内容　5.2.3 留数定理；5.2.4 函数在无穷远点的留数

1．填空题

（1）$\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$ 的留数为_0__.

(2) $\dfrac{2z}{3+z^2}$ 在 $z=\infty$ 的留数为___-2____.

(3) $e^{\frac{1}{z^2}}$ 在 $z=\infty$ 的留数为___0____.

(4) $\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 的留数为 $\underline{i\sin i}$.

2 利用留数定理计算下列积分.

(1) $\oint_C \dfrac{1}{1+z^4}dz,\quad C: x^2+y^2=2x$;

解：被积函数有四个一级极点，$z_k=e^{\frac{2k\pi+\pi}{4}i}\ (k=0,1,2,3)$ 其中只有 $z_0=e^{\frac{\pi}{4}i}, z_3=e^{\frac{7}{4}\pi i}$ 在 C 内

$$\oint_C \frac{1}{1+z^4}dz = 2\pi i[\mathrm{Re}\,s(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{\pi}{4}i}) + \mathrm{Re}\,s(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{7}{4}\pi i})];$$

$$= 2\pi i[\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{7}{4}\pi i}}]$$

$$= 2\pi i[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(i-1)]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(2) $\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz, \quad C: |z| = 4;$

解：被积函数有三个一级极点，$z=1, z=\pm 3i$，且都在 C 内

$$\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz, \quad = 2\pi i[\mathrm{Re}\,s(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},1) + \mathrm{Re}\,s(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},3i)$$

$$+ \mathrm{Re}\,s(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},-3i)]$$

$$= 2\pi i[\lim_{z\to 1}\frac{3z^3+2}{z^2+9} + \lim_{z\to 3i}\frac{3z^3+2}{(z-1)(z+3i)} + \lim_{z\to -3i}\frac{3z^3+2}{(z-1)(z-3i)}]$$

$$= 2\pi \mathrm{i}[\frac{1}{2} + \frac{2-81\mathrm{i}}{-18-6\mathrm{i}} + \frac{2+81\mathrm{i}}{-18+6\mathrm{i}}] = 6\pi \mathrm{i}$$

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{z}dz, \quad C: |z| = \frac{3}{2};$

解： $f(z) = \frac{\sin z}{z}$， $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$，所以 $z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点，则

$$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\sin z}{z}, 0\right] = 0，\oint_C \frac{\sin z}{z}dz = 0$$

（4） $\oint_C \frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz, \quad C: |z-i| = 1;$

解：被积函数在 C 内有一个三级极点 $\mathrm{z} = \mathrm{i}$。由留数定理

$$\oint_C \frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz = 2\pi i[\frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}, i]$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz}[\frac{2}{(e+e^{-1})}\cdot (z-i)^3 \cdot \frac{\cos z}{(z-i)^3}]$$

$$= \frac{2\pi i}{e+e^{-1}}[-\cos i] = -\pi i.$$

(5) $\oint_{|z|=1} z^n \cos\frac{1}{z}dz \quad n$ 是正整数.

解： $z^n \cos\frac{1}{z} = z^n(1-\frac{1}{2!z^2}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!z^{2k}}+\ldots)$.

$$\mathrm{Re}\,s[z^n\cos\frac{1}{z},0] = \begin{cases} 0 \quad n=2k \\ (-1)^k\dfrac{2\pi i}{(2k)!}, n=2k-1. \end{cases} (k=0,1,2,\ldots..)$$

3 计算下列积分，C 为正向圆周：

(1) $\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}dz, \quad C:|z|=3$;

解 ： 函 数 $\frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}$ 在 $|z|=3$ 的 外 部 ， 除 ∞ 点 外 没 有 其 他 奇 点 ， 故

$$\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}dz = -2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\infty\right] = 2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$= 2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{z(1+5z^2)^3(1+z^4)^2},0\right] = 2\pi i$$

（2）$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz.$

$$f(z) = \frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}} = z^2\frac{1}{1+\frac{1}{z}}e^{\frac{1}{z}}$$

$$=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$=z^2+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3z}+\frac{5}{24z^2}+\cdots\quad\left(1<|z|<\infty\right)$$

所以 $\operatorname{Re}s\left[f(z),\infty\right]=\frac{1}{3}$，

$$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=-\frac{2}{3}\pi i$$

（3）$\oint_C\frac{2i}{z^2+2az-1}dz, a>1, C:|z|=1$

解：$|z|=1$ 内只有一个一级极点：$-a+\sqrt{a^2+1}$，

$$\oint_C\frac{2i}{z^2+2az-1}dz=2\pi i\operatorname{Re}s\left[\frac{2i}{z^2+2az-1},-a+\sqrt{a^2+1}\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-a+\sqrt{a^2+1}}\frac{2i}{2z+2a}$$

$$=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}$$

（4）$\oint_{|z|=8}\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)}dz.$

解：在 $|z|=8$ 内，$z=0$ 是被积函数的可去奇点，留数为 0；而 $z=\pm2\pi i$ 是一级极点：

$$\operatorname{Re}s[\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)},2\pi i]=\frac{(1-\cos z)/z}{e^z}=\frac{1-\cos 2\pi i}{2\pi i}$$

$$\operatorname{Re}s[\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)},-2\pi i]=\frac{(1-\cos z)/z}{e^z}=\frac{1-\cos 2\pi i}{-2\pi i}$$

所以，$\oint_{|z|=8}\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)}dz=0.$