华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第6册）

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第十一次作业

教学内容： 5.3 利用留数计算实积分 7.1　Fourier 积分公式　　7.2 Fourier 变换

1 计算下列积分：

(1) $\int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{a+b\cos\theta}, 0<b<a$ ；

解：设 $z=e^{i\theta}$ ， $\cos\theta = \dfrac{z^2+1}{2z}$

原式

$$= \oint_{|z|=1} \dfrac{1}{a+b\dfrac{z^2+1}{2z}} \dfrac{1}{iz} dz$$

$$= \dfrac{1}{i}\oint_{|z|=1} \dfrac{2}{bz^2+2az+b} dz = 2\pi i \dfrac{2}{i} \operatorname{Re}s[\dfrac{1}{bz^2+2az+b}, \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}] = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$ ；

令 $f(z)=\dfrac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$ 则 $f(z)$ 在上半平面有两个一级极点 $z_1=i, z_2=3i$

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_1]=\dfrac{z^2-z+2}{(z^4+10z^2+9)'}\Big|_{z_1=i}=-\dfrac{1}{16}(1+i)$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_1]=\dfrac{z^2-z+2}{(z^4+10z^2+9)'}\Big|_{z=3i}=\dfrac{3-7i}{48}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx = 2\pi i[-\dfrac{1}{16}(1+i)+\dfrac{3-7i}{48}]=\dfrac{5}{12}\pi$$

(3) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^4}$

解：令 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ $f(z)$ 在上半平面上有两个一级极点 $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$\mathrm{Re}\, s[f(z), z_1] = \dfrac{1}{(1+z^4)'}\Big|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$

$\mathrm{Re}\, s[f(z), z_2] = \dfrac{1}{(1+z^4)'}\Big|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$

$\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^4} = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^4} = 2\pi i[-\dfrac{\sqrt{2}}{8}(1+i) + \dfrac{\sqrt{2}}{8}(1-i)] = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

(4) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx, (a>0, b>0)$；

解：令 $f(z) = \dfrac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx = 2\pi i[f(z), bi] = 2\pi i\dfrac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)'}\Big|_{z=bi} = \pi i e^{-ab}$

所以 $\int_0^{+\infty} \dfrac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx = \dfrac{1}{2}\pi e^{-ab}$

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x dx}{(x^2+4x+5)^2}$

所求的积分是积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{ix}}{(x^2+4x+5)^2}dx$ 的实部

而 $I = 2\pi i\, \mathrm{Re}\, s[\dfrac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)^2}, -2+i]$

$= 2\pi i[\dfrac{e^{iz}}{(z+2+i)^2}]'\Big|_{z=i-2}$

$= \pi e^{-1-2i}$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{(x^2+4x+5)^2}dx = \dfrac{\pi}{e}\cos 2$

*2．证明方程 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在圆环域 $1 \le |z| \le 2$ 内。

证明：当 $|z|<2$ 时，取 $f(z)=z^7$ ， $g(z)=12-z^3$ ，当 $|z|=2$ 时，

$$\left|g(z)\right|=\left|12-z^3\right|\le\left|12+z^3\right|\le20<\left|z^7\right|=\left|f(z)\right|$$

所以 ， $z^7-z^3+12=0$ 的根与 z^7 的根的个数相同，因此， $z^7-z^3+12=0$ 的根全部在 $|z|=2$ 内部

当 $|z|<1$ 时，取 $f(z)=12$ ， $g(z)=z^7-z^3$

当 $|z|=1$ 时， $\left|f(z)\right|>\left|z^7\right|+\left|z^3\right|\ge\left|z^7-z^3\right|=\left|g(z)\right|$

故 $z^7-z^3+12=0$ 的根与 12 的根个数相同，即在 $|z|=1$ 内无根。

综上所述， $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1\le|z|\le2$ 内

3、 求下列函数的 Fourier 积分变换

（1） $f(t)=\begin{cases} -1 & -1<t<0 \\ 1 & 0<t<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

解： $\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{0}-e^{-it}dt+\int_{0}^{1}e^{-it}dt$

$$=\frac{1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{i\omega}(1-e^{i\omega}-e^{-i\omega}+1)=\frac{-2i}{\omega}(1-\cos\omega)$$

（2） $f(t)=\begin{cases} e^t & t\le0 \\ 0 & t>0 \end{cases}$

解： $\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^t e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-i\omega)t}dt$

$$=\frac{1}{1-i\omega}\cdot e^{(1-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{1-i\omega}$$

4 求下列函数的 Fourier 变换，并证明所列的积分等式

（1） $f(t)=e^{-|t|}\cos t,$ 证明 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$

解：

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|r|}\cos t e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|r|}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{[1+i(1-\omega)]t}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{[1-i(1+\omega)]t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{[-1+i(1-\omega)]t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{[-1-i(1+\omega)]t}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{[1+i(1-\omega)]t}\Big|_{-\infty}^{0}}{1+i(1-\omega)}+\frac{e^{[1-i(1+\omega)]t}\Big|_{-\infty}^{0}}{1-i(1+\omega)}+\frac{e^{[-1+i(1-\omega)]t}\Big|_{0}^{+\infty}}{-1+i(1-\omega)}+\frac{e^{[-1-i(1+\omega)]t}\Big|_{0}^{+\infty}}{-1-i(1+\omega)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+i(1-\omega)} + \frac{1}{1-i(1+\omega)} + \frac{1}{1-i(1-\omega)} + \frac{1}{1+i(1+\omega)}\right\} = \frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}$$

$f(t)$ 的积分表达式为 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega$

因此有 $\int_0^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega = \frac{\pi}{2}f(t) = \frac{\pi}{2}e^{-|r|}\cos t$

（2） $f(t) = e^{-\beta|t|}\,(\beta>0)$，证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$

解： $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|r|}e^{-i\omega t}dt = 2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t dt = 2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{\omega it}+e^{-i\omega t}}{2}dt$

$$= \int_0^{+\infty}[e^{-(\beta-i\omega)t}+e^{-(\beta+i\omega)t}]dt = \frac{e^{-(\beta-i\omega)t}\big|_0^{+\infty}}{-(\beta-i\omega)} + \frac{e^{-(\beta-i\omega)t}\big|_0^{+\infty}}{-(\beta+i\omega)}$$

$$= \frac{1}{\beta-i\omega} + \frac{1}{\beta+i\omega} = \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

$f(t)$ 的积分表达式为 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega$

即： $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$

第十二次作业

教学内容 ：7.3 δ 函数及其 Fourier 变换；7.4Fourier 变换的性质

1．填空

（1） $f(t) = \frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)$ Fourier 变换为 $\underline{\cos\omega a}$

(2) 函数 $F(\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ 的 Fourier 逆变换为 $\underline{\cos\omega_0 t}$

（3） $f(t) = \sin t\cos t$ Fourier 变换为 $\underline{\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]}$

2． 若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$，证明

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)];$$

$$\mathcal{F}\big[f(t)\sin\omega_0 t\big]=\frac{1}{2i}\big[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\big].$$

证：$\mathcal{F}\big[f(t)\cos\omega_0 t\big]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i(\omega+\omega_0)t}dt]$$

$$=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$$

$\mathcal{F}\big[f(t)\sin\omega_0 t\big]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2i}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(\omega+\omega_0)t}dt]$$

$$=\frac{1}{2i}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]$$

3．求下列函数的 Fourier 变换

（1）$f(t)=e^{2it}\sin t$

解：因为 $\mathcal{F}[\sin t]=i\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)$，由位移性质得

$$\mathcal{F}[e^{2it}\sin t]=i\pi[\delta(\omega-1)-\delta(\omega-3)]$$

（2）$f(t)=\sin^2 t$

解：$\mathcal{F}[\sin^2 t]=\mathcal{F}\ [\frac{1}{2}(1-\cos 2t)]=\ \frac{1}{2}\mathcal{F}[1]-\frac{1}{2}\ \mathcal{F}[\cos 2t]$

$$=\pi\delta(\omega)-\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$$

（3）$f(t)=e^{i\omega_0 t}u(t)$

解：由像函数的位移性质及 $\mathcal{F}[u(t)]=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$ 得

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}u(t)]=\frac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

（4）$f(t)=e^{-\beta t}u(t)\cdot\cos\omega_0 t$

解：$\mathcal{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t}u(t)\cos\omega_0 t e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{-i\omega_0 t}+e^{i\omega_0 t}}{2}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}(e^{-[\beta+i(\omega-\omega_0)]t}+e^{-[\beta+i(\omega+\omega)]t_0})dt=\frac{1}{2}(\frac{1}{\beta+i(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\beta+i(\omega+\omega_0)})$$

$$= \frac{\beta + i\omega}{(\beta + i\omega)^2 + \omega_0^2}$$

4 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，$a$ 为非零常数，试证明

（1）$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \dfrac{1}{|a|} F(\dfrac{\omega}{a}) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

（2）$\mathcal{F}[f(t_0 - at)] = \dfrac{1}{|a|} F(-\dfrac{\omega}{a}) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

证明：（1）由定义有

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at - t_0) e^{-i\omega t} dt$$

$$(\diamondsuit\, at - t_0 = u, \text{且}\, a > 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega \frac{u+t_0}{a}} \frac{1}{a} du$$

$$\text{（u 换为 t）} = \frac{1}{a} e^{-i\frac{\omega}{a}t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} dt$$

$$= \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a}) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

当 $a<0$ 时，$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = -\dfrac{1}{a} F(\dfrac{\omega}{a}) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

因此 $\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \dfrac{1}{|a|} F(\dfrac{\omega}{a}) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

注：也可以由位移性质和相似性质加以证明。例如令 $g(t) = f(at)$ 由位移性质得

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \mathcal{F}\left[f[a(t - \frac{t_0}{a})] \right] = \mathcal{F}\left[g(t - \frac{t_0}{t}) \right] = \mathcal{F}\left[g(t) e^{-i\omega\frac{t_0}{a}} \right]$$

$$= \mathcal{F}\left[f(at) e^{-i\omega\frac{t_0}{a}} \right] = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a}) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0} \quad \text{（相似性质）}$$

（2）在结论（1）中取 a, t_0 分别为 $-a, -t_0$ 即得。

注；此题也可由定义出发证明，或利用位移性质和相似性质证明。

5 已知 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$，利用 Fourier 变换的性质求下列函数的 Fourier 变换

（1）$t f(t)$

解：由像函数的微分性质，有 $\mathcal{F}[tf(t)] = -\dfrac{1}{i}F'(\omega)$

（2） $(t-2)f(t)$

解：由线性性质及像函数的微分性质

$$\mathcal{F}[(t-2)f(t)] = \mathcal{F}[tf(t)] - 2\,\mathcal{F}[f(t)] = -\frac{1}{i}F'(\omega) - 2F(\omega)$$

（3） $tf'(t)$

解：由微分性质

$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$ ，再由像函数的微分性质，有

$$\mathcal{F}[tf'(t)] = -\frac{1}{i}\frac{d}{d\omega}[i\omega F(\omega)] = -F(\omega) - \omega F'(\omega).$$

（4） $f(1-t)$

解：由相似性质 $\mathcal{F}\,[f(-t)] = F(-\omega)$

再由位移性质

$$\mathcal{F}[f(1-t)] = e^{-i\omega}F(-\omega)$$

6. 求函数 $f(t) = \sin(5t + \dfrac{\pi}{3})$ 的 Fourier 变换.

解： $\mathcal{F}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(5t + \frac{\pi}{3})e^{-i\omega t}dt$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(5t + \sqrt{3}\cos 5t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{2}i\pi[\delta(\omega+5) - \delta(\omega-5)] + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5) + \delta(\omega-5)]$$

$$= \frac{1}{2}\pi[(\sqrt{3}+i)\delta(\omega+5) + (\sqrt{3}-i)\delta(\omega-5)]$$

解二：由于 $f(t) = \sin(5t + \dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}\sin 5t + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t$

所以 $\mathcal{F}[f(t)] = \dfrac{i\pi}{2}[\delta(\omega+5) - \delta(\omega-5)] + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5) + \delta(\omega-5)]$