第六章 Fourier 变换

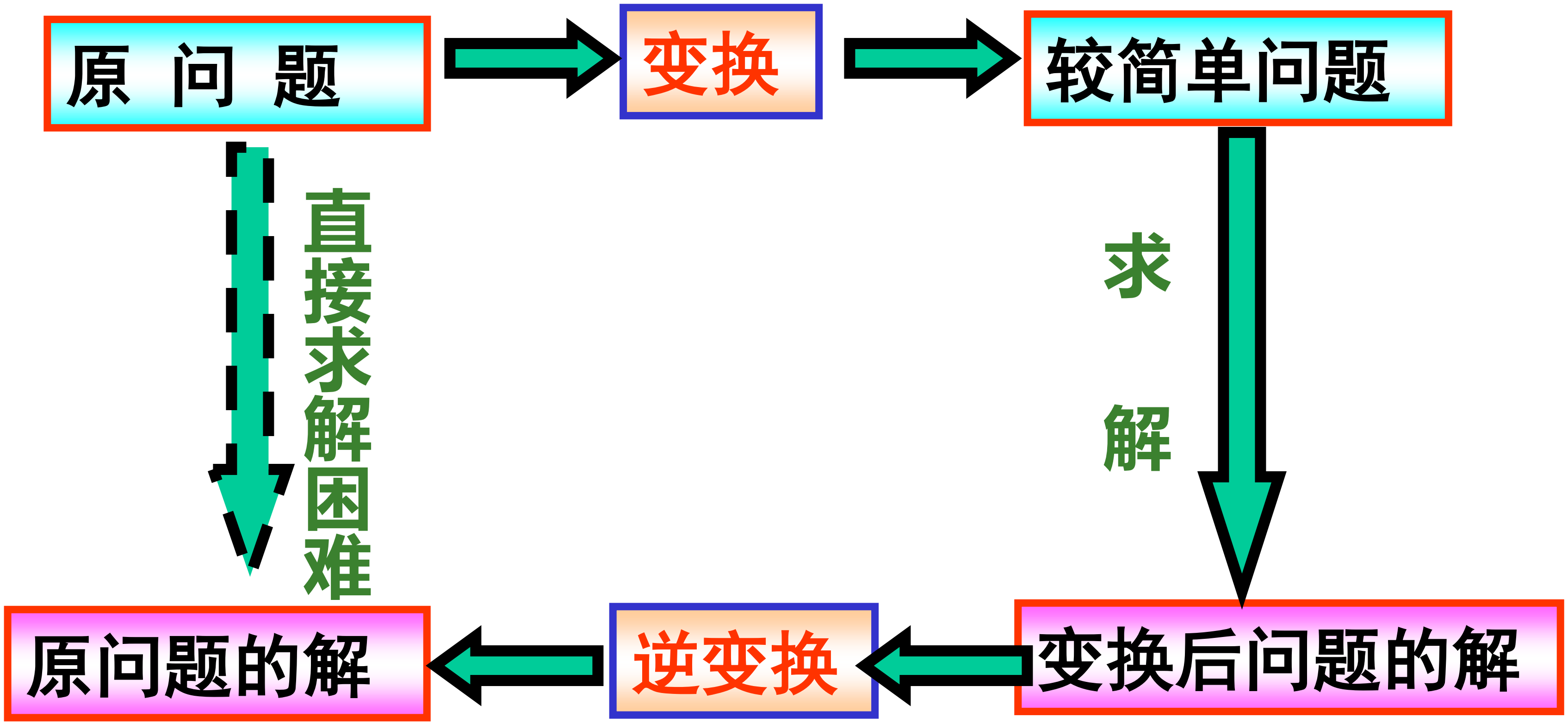
1. 积分变换简介

2. Fourier积分与Fourier 积分变换

3. 单位 脉冲函数

4. Fourier积分变换的性质,卷积

一、积分变换简介



例如，初等数学中，曾经利用取对数将数的积、商运算化为较简单的和、差运算；

在解析几何中的坐标变换，复变函数中的保角变换，其解决问题的思路都属于这种情况.

基于这种思想，便产生了积分变换.

积分变换：就是通过积分计算，把一个函数变成另一个函数的一种变换.

这类积分一般要含有参变量，具体形式可写为：

$$\int_a^b k(t,\tau)f(t)dt \overset{\text{记为}}{=} F(\tau).$$

$$\int_a^b k(t,\tau)f(t)dt \overset{\text{记为}}{=} F(\tau).$$

其中，$f(t)$是要变换的函数,−−像原函数;

$F(\tau)$是变换后的函数,−−−−像函数;

$K(t,\tau)$是一个二元函数,−−积分变换核.

其主要应用:

数学上：求解方程的重要工具； 能实现卷积与普通乘积之间的互相转化.

工程上：是频谱分析、信号分析、线性系统分析的重要工具.

§6.1 Fourier积分公式

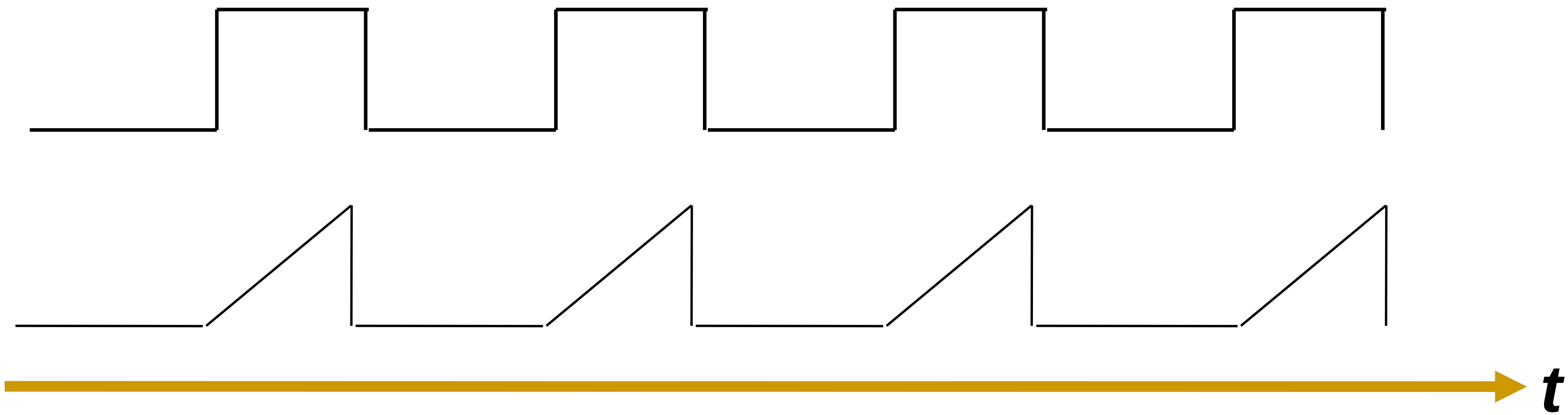
周期函数在一定条件下可以展开为Fourier级数；

但全直线上的非周期函数不能有Fourier表示；

引进类似于Fourier级数的Fourier积分

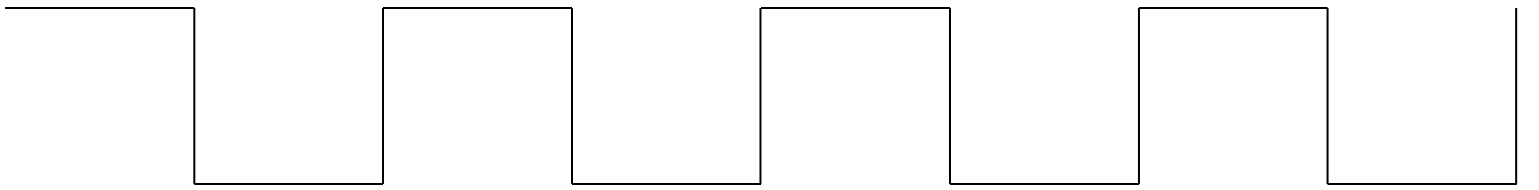
(周期趋于无穷时的极限形式)

在工程计算中, 无论是电学还是力学, 经常要和随时间而变的周期函数$f_T(t)$打交道. 例如:

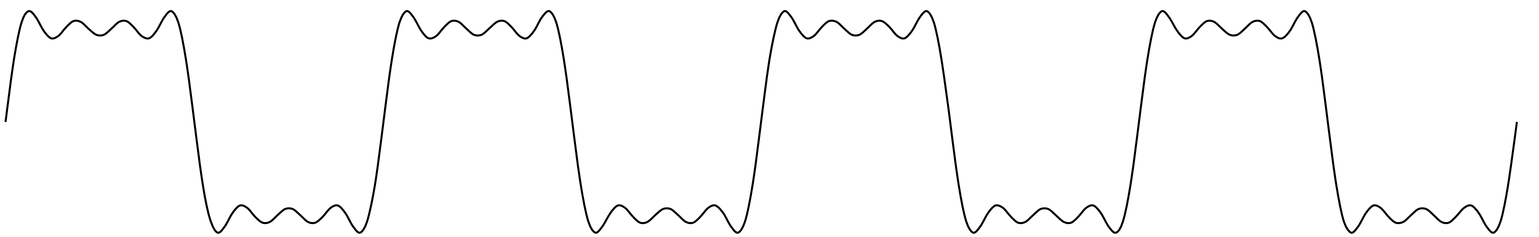


具有性质$f_T(t+T)=f_T(t)$, 其中T称作周期, 而$1/T$代表单位时间振动的次数, 单位时间通常取秒, 即每秒重复多少次, 单位是赫兹(Herz, 或Hz).

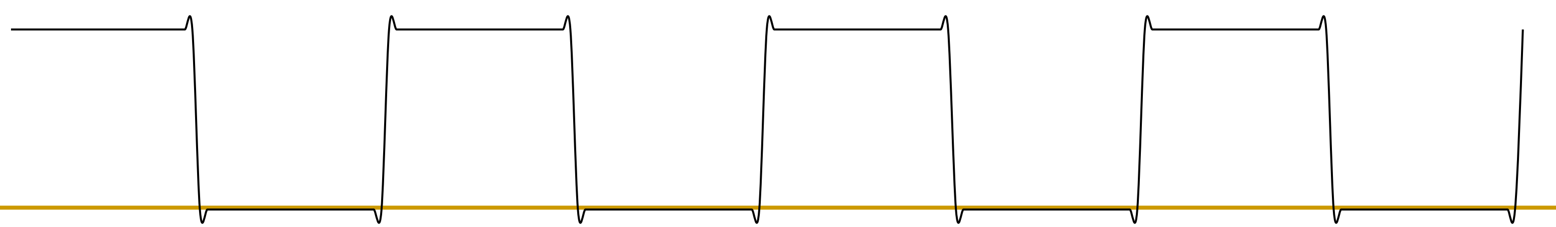
最常用的一种周期函数是三角函数。人们发现, 所有的工程中使用的周期函数都可以用一系列的三角函数的线性组合来逼近.---- Fourier级数



方波



4个正弦波的逼近



100个正弦波的逼近

研究周期函数实际上只须研究其中的一个周期内的情况即可，通常研究在闭区间[–*T*/2,*T*/2]内函数变化的情况.

定理1 设$f_T(t)$是以T为周期的实函数，且在

$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$上满足狄氏条件，即在一个周期上满足：

（1）连续或只有有限个第一类间断点；

（2）只有有限个极值点.

则在连续点处，有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \qquad (1)$$

其中 $\quad a_0 = \dfrac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{d}\,t, \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T},$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,dt \ \ (n = 1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,dt \ \ (n = 1,2,\cdots).$$

在间断点t_0处,(1)式右端级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f_T(t_0+0)+f_T(t_0-0)].$$

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

由 $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}-ib_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2}\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega t}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega t}\right].$$

注意： (也有的课本上把“i”写为“j”)

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

$$\boxed{c_0=\frac{a_0}{2},}\ \boxed{c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}}\ \boxed{c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}}\quad n=1,2,\cdots$$

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt\right]e^{i\frac{2\pi}{T}nt}\qquad(2)$$

傅氏级数的复数形式

其中，

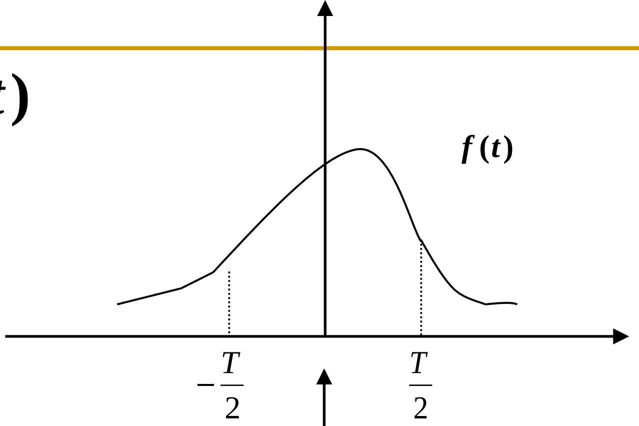
$c_n = F(n\omega)$—$f_T(t)$的离散频谱；

$|c_n|$—$f_T(t)$的离散振幅频谱；

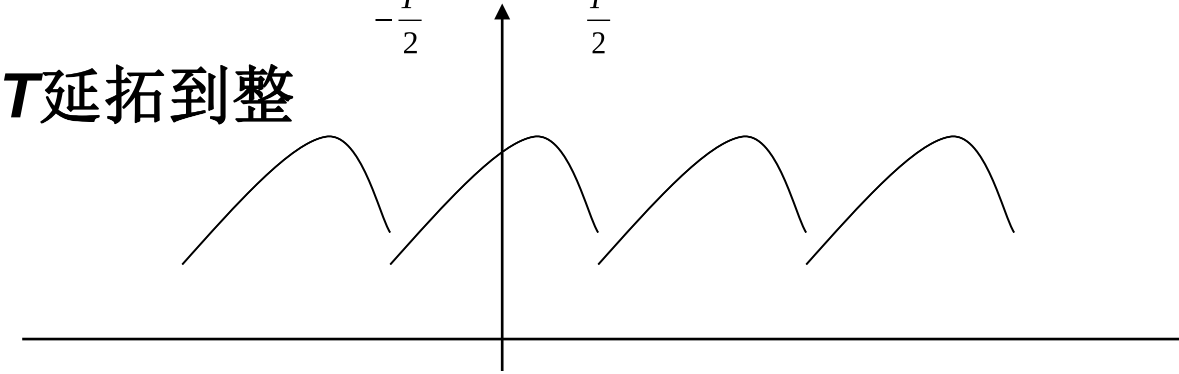
$\arg c_n$—$f_T(t)$的离散相位频谱； $n \in \mathbb{Z}$.

若以$f_T(t)$描述某种信号，则c_n可以刻画$f_T(t)$的频率特征。

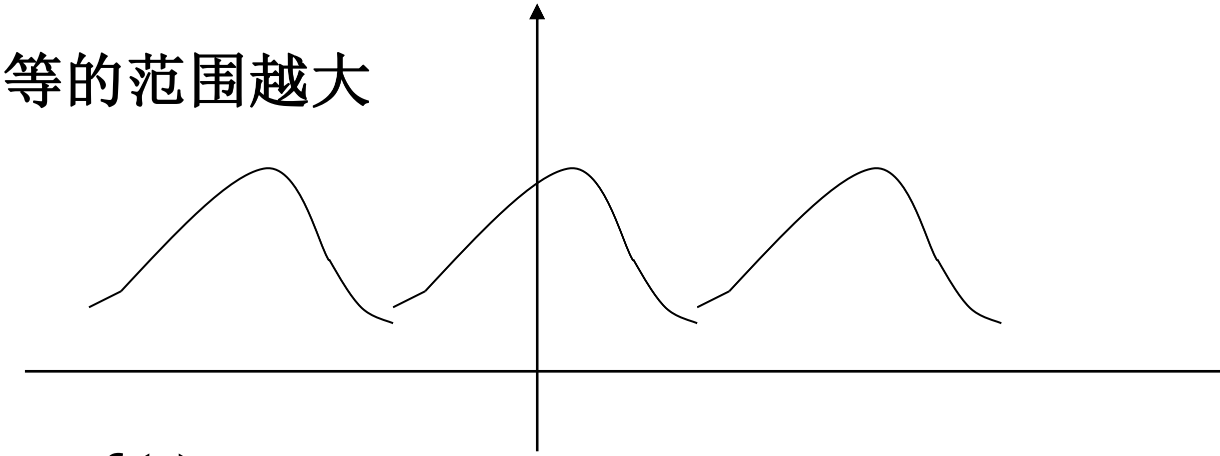
在 $[-T/2, T/2]$ 上作 $f_T(t) = f(t)$



在[-*T*/2,*T*/2]之外按周期*T*延拓到整个数轴上



T 越大, $f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围越大



当 $T \to +\infty$ 时, $f_T(t) \to f(t)$

所以定义在$(-\infty,+\infty)$上的非周期函数$f(t)$可看作周期为T的函数$f_T(t)$当$T\to+\infty$时的极限形式,即

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=f(t)$$

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}$$

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega}$$

称为$f(t)$的Fourier积分公式。

定理 (*Fourier* 积分定理)

若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足：

(1) $f(t)$ 在任何有限区间上满足 *Dirichlet* 条件

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty$

则有 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\begin{cases} f(t), & t\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & t\text{ 为间断点} \end{cases}$$

§ 6.2 Fourier变换

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]}e^{i\omega t}d\omega}$$

设 $\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (3)$

则在 $f(t)$ 的连续点: $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (4)$

称（3）式为 $f(t)$ 的 ***Fourier* 变换**,

(4) 式为 $F(\omega)$ 的 ***Fourier* 逆变换**。

记为 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega), \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)$

(3)式和(4)式，定义了一个变换对 $F(\omega)$ 和 $f(t)$.

称 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的**像函数**, $f(t)$ 为 $F(\omega)$ 的**像原函数**。

例1　求 $f(t)=\begin{cases}1,0<t\le 1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$ 的 *Fourier* 变换,并求

积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$

解：由 *Fourier* 变换定义,得

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^1 e^{-i\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^1=\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\quad=\frac{1-\cos\omega+i\sin\omega}{i\omega}$$

$$=\frac{\sin\omega}{\omega}-i\frac{1-\cos\omega}{\omega}=F(\omega)$$

由于 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}-i\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\begin{cases}1,\ 0<t<1\\ 1/2,\ t=0、1\\ 0,\ \text{其它}\end{cases}$$

当 $t=0$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}-i\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}$$

于是 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}}$$ ——Dirichlet积分

Fourier变换的物理意义

在频谱分析中，傅氏变换$F(\omega)$又称为$f(t)$的**频谱函数**

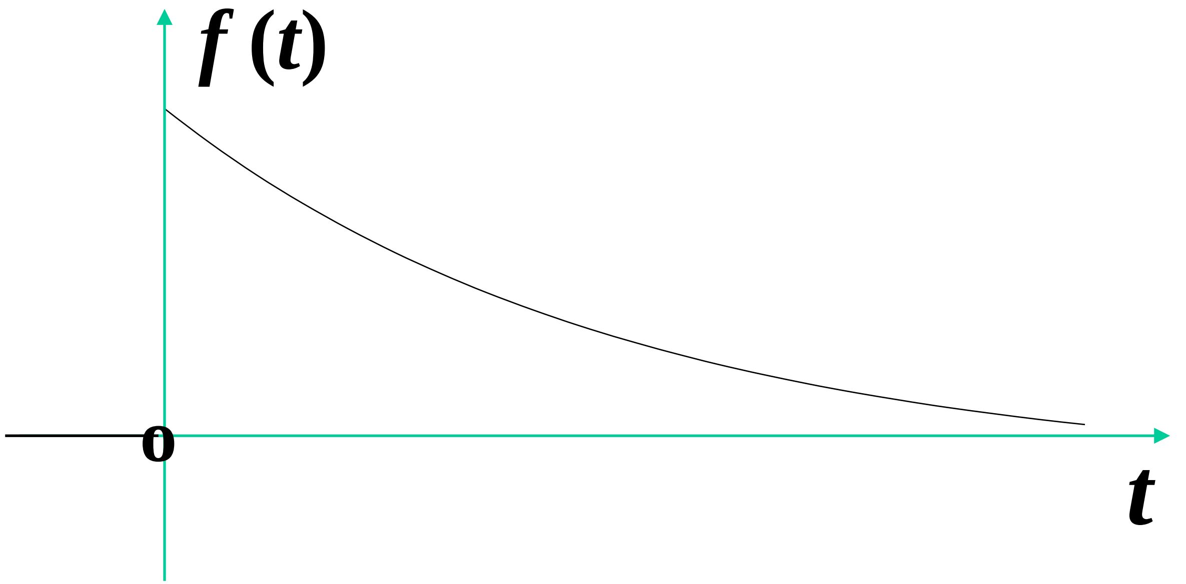
频谱函数的模$|F(\omega)|$称为$f(t)$的振幅频谱（**简称频谱**）

由于ω是连续变化的，所以称之为**连续频谱**

频谱图是连续曲线　$\arg F(\omega)$—$f(t)$的相位频谱。

例4　求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}, t \geq 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$ $(\beta > 0)$的频谱,并作图.

这个函数称为指数衰减函数,在工程中常遇到.

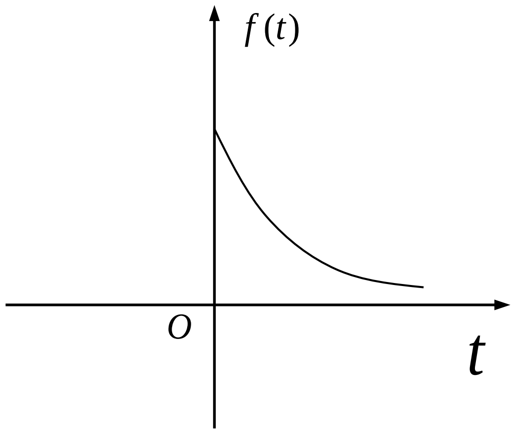


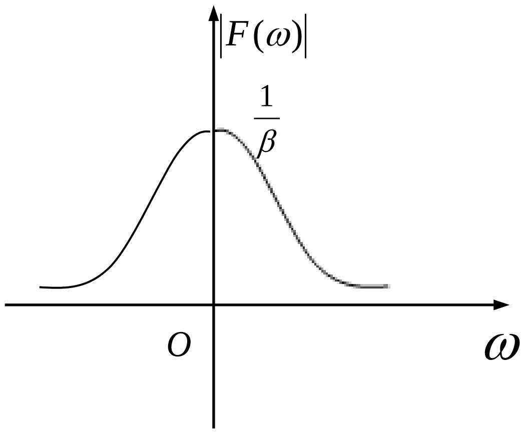
$$\text{解}: F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(\beta+i\omega)t}dt \quad =\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}$$

频谱:

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}$$





§6.3 单位脉冲函数及其Fourier变换

一、单位脉冲函数的定义和性质

例：在原来电流为零的电路中, 某一瞬时(设为$t=0$)进入一单位电量的脉冲, 现在要确定电路上的电流 $i(t)$.

解： 若以$q(t)$表示上述电路中的电荷函数，则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

由于电流强度是电荷函数对时间的变化率，即

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

所以, 当$t\neq 0$时, $i(t)=0$;当 $t=0$ 时，由于$q(t)$不连续, 从而在普通导数意义下, $q(t)$在这一点是不能求导数的.

如果我们形式地计算这个导数，得

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty.$$

$$i(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ \infty, & t=0.\end{cases}$$

广义函数，
没有普通意义下的函数值.

这表明在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够表示这样的电流强度. 为此, 引进一称为狄拉克(Dirac)的函数.

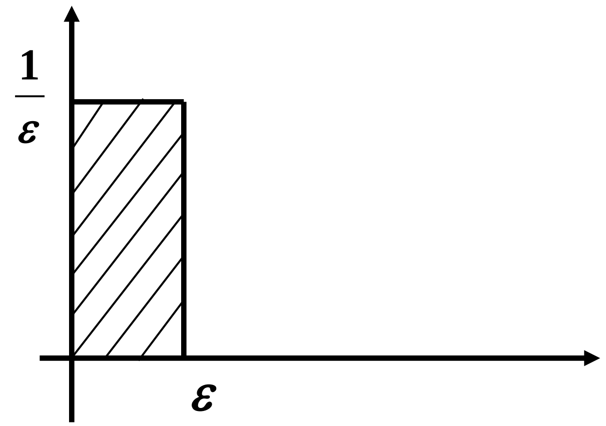
$$\boxed{\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}}$$

有了这种函数, 对于许多集中于一点或一瞬时的量, 例如点电荷， 点源, 集中于一点的质量及脉冲技术中的非常窄的脉冲等, 就能够象处理连续分布的量那样, 以统一的方式加以解决.

称$\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_{\varepsilon}(t)$

$$\delta_{\varepsilon}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\le t\le\varepsilon\\ 0, & t>\varepsilon\end{cases}$$

$\delta_{\varepsilon}(t)$ 图形为：



为狄拉克(Dirac)函数，简称δ函数。

注：δ函数是一个广义函数，它没有通常意义下的函数值，也不能用通常意义下“值”的对应关系来定义，可看成是普通函数序列的极限：

显然 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)dt=\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt=1$$

所以 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

因此，$\delta-$函数还可定义为满足下列条件的函数：

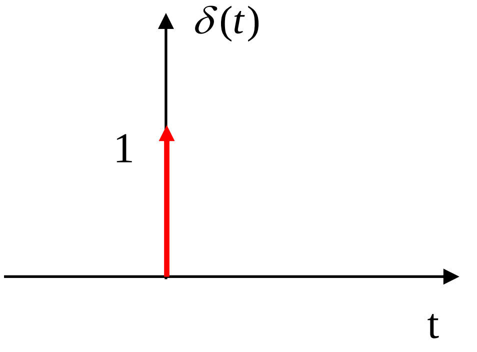
(1) 当$t\neq 0$时，$\delta(t)=0$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

δ函数可以理解为：

δ 函数在t=0的非常狭小的邻域内取非常大的值，这个邻域外，函数值处处为零。

因此，工程上，δ-函数常用一个长度为1的有向线段来表示：



其中有向线段长度代表函数的积分值，称为冲激强度。

工程上将δ-函数称为*单位脉冲函数*。

δ 函数的性质：

(1) 对任意连续函数$f(t)$，有

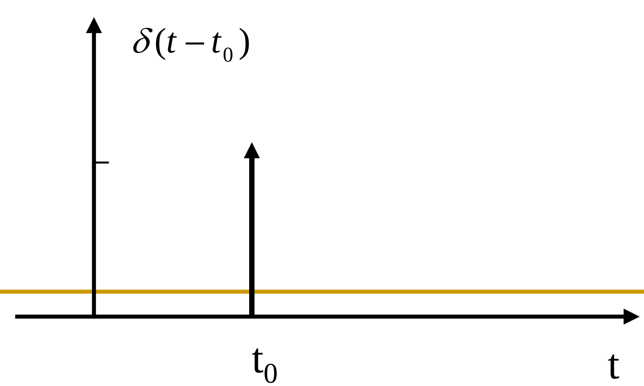
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt = f(0)$$

一般地，若$f(t)$在$t=t_0$点连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

称为 筛选性质

$\delta(t-t_0)$ 表示单位脉冲发生在 t_0 时刻的δ函数



(2) $\delta(t)=\delta(-t)$

(3) 设$u(t)$为单位阶跃函数, 即 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$

则有 $$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=u(t)$$

$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

二、δ函数的Fourier变换：

$$F(\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega t}\Big|_{t=0}=1$$

$$\delta(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}d\omega$$

可见，单位脉冲函数与常数1构成了一傅氏变换对；

即 $\mathscr{F}[\delta(t)]=1$

$\mathscr{F}^{-1}[1]=\delta(t)$

例5. 证明$f(t)=1$的Fourier变换为$F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$

证：$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=e^{i\omega t}\Big|_{\omega=0}=1$$

所以

$$\mathscr{F}[1]=F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)]=1$$

常数1与 $2\pi\delta(\omega)$ 构成了一傅氏变换对;

例6 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ **称为单位跃阶函数.**

证明$u(t)$的傅氏变换为$\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$.

证： 首先注意，这里的变换显然指的是广义变换.

我们用考察逆变换的方法证明.

事实上，设$F(\omega)=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega+\frac{1}{2}. \qquad (*)$$

由于 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$, 所以

当 $t<0$ 时,有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega \overset{\omega t=u}{\underset{t<0\text{时}}{=}} \int_{0}^{-\infty}\frac{\sin u}{u}du=-\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}.$$

同理当 $t>0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega \overset{\omega t=u}{\underset{t>0\text{时}}{=}} \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}.$$

综上所述，根据(*), 有

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, & t>0\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0, & t<0\end{cases}=u(t).$$

证毕！

例7　求 $\delta(\omega-\omega_0)$和 $\delta(\omega)$ 的傅氏逆变换.

解：由定义，有

$$\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{i\omega_0 t}.$$

特别地 $\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}$

故此,有 $\mathscr{F}[e^{i\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

即 $e^{i\omega_0 t}$ 和 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 构成了一个傅氏变换对

$$\mathscr{F}\left[e^{i\omega_0 t}\right]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]=e^{i\omega_0 t}.$$

于是，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0). \quad (**)$$

特别的，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\,dt=2\pi\delta(\omega)$$

例8 求函数$f(t)=\cos\omega_0 t$的Fourier变换

解：$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0 t e^{-i\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t})e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-i(\omega-\omega_0)t}+e^{-i(\omega+\omega_0)t})dt$$

$$=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

同理可求得:

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=i\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

常用函数傅里叶变换公式

(1) $\mathscr{F}\left[e^{-\beta t}u(t)\right]=\dfrac{1}{i\omega+\beta}$

(2) $\mathscr{F}\left[\delta(t)\right]=1$

(3) $\mathscr{F}\left[\cos at\right]=\pi\left[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)\right]$

(4) $\mathscr{F}\left[\sin at\right]=\pi i\left[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)\right]$

(5) $\mathscr{F}\left[u(t)\right]=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$

(6) $\mathscr{F}\left[1\right]=2\pi\delta(\omega)$

(7) $\mathscr{F}\left[e^{i\omega_0 t}\right]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

§ 6.4 Fourier变换的性质

假定 $f(t)$、$f_1(t)$、$f_2(t)$ 均满足 *Fourier* 变换存在的条件

1. 线性性质

设 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, k_1、k_2 为常数,

则 $\mathscr{F}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 F_1(\omega) + k_2 F_2(\omega)$

$$\mathscr{F}^{-1}[k_1 F_1(\omega) + k_2 F_2(\omega)] = k_1 \mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)] + k_2 \mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)]$$

2. 位移性质

设 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则

(1) $\mathscr{F}[f(t \pm a)] = e^{\pm i\omega a} F(\omega)$

(2) $\mathscr{F}[e^{\pm i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega \mp \omega_0)$

显而易见，**位移公式的作用**是：知道了一个函数的变换，便可由此求出其位移函数的变换！

(1)式在无线电技术中也称为时移性质。

(2)式在无线电技术中也称为频移性质。

例9 已知$F(\omega)=\dfrac{1}{\beta+i(\omega+\omega_0)}$ ($\beta>0$, ω_0为实数)

求 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

解： 由于$F(\omega-\omega_0)=\dfrac{1}{\beta+i\omega}$ $\mathscr{F}[e^{\pm i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega\mp\omega_0)$

由位移性质 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{i\omega_0 t}\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

$$=\begin{cases} e^{-\beta t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

从而得到

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\begin{cases} e^{-(\beta+i\omega_0)t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

3. 微分性质

若 $f'(t)$ 满足 *Fourier* 存在条件且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)=0$

则 $\mathscr{F}[f'(t)]=i\omega\mathscr{F}[f(t)]=i\omega F(\omega)$

像函数的微分性质

设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$, 则$F'(\omega)=\mathscr{F}[-itf(t)]$

或 $\mathscr{F}[tf(t)]=iF'(\omega)$

一般地，$\mathscr{F}[t^n f(t)]=i^n F^{(n)}(\omega)$

例10. 已知 $f(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}, t \geq 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases} \ (\beta > 0)$

求 $\mathscr{F}[tf(t)]$, $\mathscr{F}[t^2 f(t)]$

解： $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

$$= \frac{1}{\beta + i\omega}$$

$$\mathscr{F}[tf(t)] = i \cdot \frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{1}{(\beta + i\omega)^2}$$

$$\mathscr{F}[t^2 f(t)] = i^2 \cdot \frac{d^2}{d\omega^2} F(\omega) = \frac{2}{(\beta + i\omega)^3}$$

4. 积分性质

设 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$, 且当$t \to +\infty$时, $\int_{-\infty}^{t} f(t)dt \to 0$, 则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right] = \frac{1}{i\omega}\mathscr{F}[f(t)]$$

注：运用傅氏变换的线性性质, 微分性质以及积分性质, 可以把线性常系数微分方程转化为代数方程, 通过解代数方程与求傅氏逆变换, 就可以得到此微分方程的解. 另外, 傅氏变换还是求解数学物理方程的方法之一.

例11 求解微分积分方程

$$ax'(t)+bx(t)+c\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau = f(t),$$

其中$-\infty< t<+\infty$, a, b, c均为常数.

解：设$X(\omega)=\mathscr{F}[x(t)]$, $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$则

$$ai\omega X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{i\omega}X(\omega)=F(\omega),$$

故 $X(\omega)=\dfrac{F(\omega)}{b+i\left(a\omega-\dfrac{c}{\omega}\right)}$.

从而 $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

5、对称性质

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则 $\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$.

6 相似性质

设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则

则 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{\omega}{a})$

7 翻转 性质

设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则

则 $\mathscr{F}[f(-t)]=F(-\omega)$

性质小结: 若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$, $\mathscr{F}[g(t)]=G(\omega)$

线性: $\alpha f(t)+\beta g(t) \quad \leftrightarrow \quad \alpha F(\omega)+\beta G(\omega)$

位移: $f(t-t_0) \quad \leftrightarrow \quad F(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t_0}$

$f(t)e^{j\omega_0 t} \quad \leftrightarrow \quad F(\omega-\omega_0)$

导数: $f'(t) \quad \leftrightarrow \quad i\omega F(\omega)$

积分: $\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leftrightarrow \quad \dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$

对称: $F(t) \quad \leftrightarrow \quad 2\pi f(-\omega)$

相似: $f(at)\ (a\neq 0) \quad \leftrightarrow \quad \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

翻转: $f(-t) \quad \leftrightarrow \quad F(-\omega)$

例12 计算 $\mathscr{F}[u(5t-2)]$

解：（先用相似性，再用位移性质）

令$g(t)=u(t-2)$，则$g(5t)=u(5t-2)$

$$\mathscr{F}[u(5t-2)]=\mathscr{F}[g(5t)]=\frac{1}{5}\mathscr{F}[g(t)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\mathscr{F}[u(t-2)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\left[\frac{1}{5}e^{-i2\omega}\mathscr{F}[u(t)]\right]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\left[\frac{1}{5}e^{-i2\omega}[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)]\right]\Big|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\left[\frac{1}{5}e^{-i2\frac{\omega}{5}}[\frac{5}{i\omega}+\pi\delta(\frac{\omega}{5})]\right]$$

$$\mathscr{F}[u(5t-2)]$$

方法2： （先用位移性，再用相似性）

令$g(t)=u(5t)$, 则$g(t-\frac{2}{5})=u(5t-2)$

$$\mathscr{F}[u(5t-2)]=\mathscr{F}[g(t-\frac{2}{5})]$$

$$=e^{-i\omega\frac{2}{5}}\mathscr{F}[g(t)]=e^{-i\omega\frac{2}{5}}\left(\mathscr{F}[u(5t)]\right)$$

$$=e^{-i\omega\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{5}\mathscr{F}[u(t)]\right)\bigg|_{\frac{\omega}{5}}\quad=\frac{1}{5}e^{-i\omega\frac{2}{5}}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\bigg|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\frac{1}{5}e^{-i\omega\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{i\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right).$$

乘积定理 若$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F(\omega)}G(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

能量积分 若$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

- 这一等式又称为帕塞瓦尔(Parserval)等式

§ 6.5 Fourier变换的卷积性质

1. 卷积定义

设$f_1(t), f_2(t)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

对任何实数 t 收敛,则称之为函数 $f_1(t)$与 $f_2(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$上的卷积，记为$f_1(t) * f_2(t)$, 即

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

运算规律：

(1) $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ （交换律）

(2) $f_1(t) * \left[f_2(t) + f_3(t)\right] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$ （分配律）

例13. 求下列函数的卷积

$$f_1(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases},\ f_2(t)=\begin{cases}e^{-\beta t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\quad (\alpha>0\beta>0,\alpha\neq\beta)$$

解：由定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

当t<0时，$f_1(t)*f_2(t)=0$

当$t\geq 0$时，$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$=\int_0^t e^{-a\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau$$

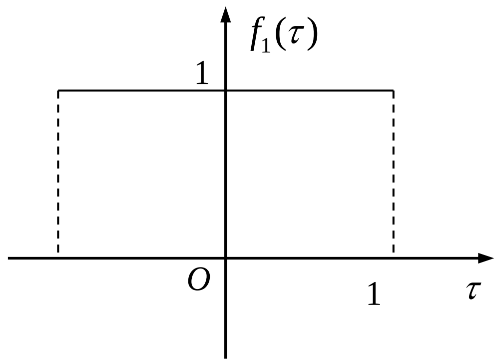
$$=e^{-\beta t}\int_0^t e^{-(\alpha-\beta)\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha-\beta}[e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}]$$

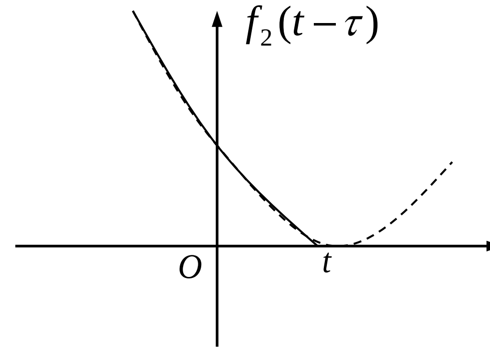
综合得:

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\alpha - \beta}[e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}] & t \geq 0 \end{cases}$$

例14. 已知 $f_1(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ $\quad f_2(t)=t^2u(t)$

求 $f_1(t)*f_2(t)$.





解： **由卷积定义**

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

当$t<-1$时， $f_1(t)*f_2(t)=0$

$-1\le t\le 1$ $\quad f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{t}1\cdot(t-\tau)^2d\tau=\dfrac{1}{3}(t+1)^3$

当$t>1$时， $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{1}1\cdot(t-\tau)^2d\tau=\dfrac{1}{3}(6t^2+2)$

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \dfrac{(t+1)^3}{3}, & -1 \le t \le 1 \\ \dfrac{(6t^2+2)}{3}, & t > 1 \end{cases}$$

2.卷积定理

设 $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(\omega),\mathcal{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,则

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

或 $$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t)$$

$$\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

可以将不太容易计算的卷积运算化为普通乘法，这就使得卷积在线性系统分析中成为特别有用的方法.

Fourier积分变换内容小结

一、基本概念

Fourier积分变换（变换，逆变换）；

原象函数，象函数；δ函数（单位脉冲函数）；

卷积；　频谱函数；

二、公式、定理

Fourier积分公式；δ函数的性质；

Fourier积分变换性质（线性性质，微分性质，

积分性质，位移性质，相似性质等）

卷积与卷积定理；

三、基本运算

用定义直接求简单函数的Fourier变换

用积分变换的性质、卷积定理并结合变换表间接求稍复杂些函数的变换

Fourier变换求解微积分方程