华东理工大学

复变函数与积分变换作业本（第4册）

第七次作业

教学内容：4.1 复数项级数 4.2 幂级数

1. 判别下列复数列的收敛性，若收敛，求其极限，其中 $n\to\infty$.

(1) $z_n=\dfrac{1+ni}{1+n}$；

解：$z_n=\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{n}{1+n}i$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1+n}=1$ 故 z_n 收敛于 $\boldsymbol{i}$

(2) $z_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$；

解：由于 z_n 的实部 $(-1)^n$ 发散，故 z_n 发散

(3) $z_n=(1+\dfrac{i}{2})^{-n}$.

解：$z_n=(1+\dfrac{i}{2})^{-n}=(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}),\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta})^n=0,$ 故收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$

2. 判别下列级数的收敛情况:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$；

解：由 $i^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}+i\sin\dfrac{n\pi}{2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$ 为收敛的交错项实级数，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 收敛，但 $\left|\dfrac{i^n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 发散，原级数条件收敛。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$；

解：因 $\left|\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}\right|=(\dfrac{\sqrt{61}}{8})^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{\sqrt{61}}{8})^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$ 绝对收敛。

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$ 。

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{2^{n+1}}$，

因级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{2^{n+1}}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$发散。

3. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$；

解：

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=e$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln in)^n}z^n$；

解：$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}|\ln in|=\infty$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$；

解：$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|1+i|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

（4） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n+i3^n}$；；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^n+i3^n}{2^{n+1}+i3^{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2^{2n}+3^{2n}}{2^{2n+2}+3^{2n+2}}}=\frac{1}{3}$，收敛半径为$3$；

（5） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(z-i)^n$．

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\right|=\frac{1}{2}$，收敛半径为 2；

4. 把下列函数展开成z的幂级数，并指出它的收敛半径：

(1) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$；

解：$\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}=\left(-\frac{1}{1+z^2}\right)'\cdot\frac{1}{2z}=\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right)'\cdot\frac{1}{2z}$

$$=\frac{1}{2z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2n\cdot z^{2n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{2n-2}$$

$\left|z^2\right|<1$，即收敛半径为 1；

(2) $\sinh z$

解：$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n!}z^n$$

$|z|<+\infty$；

(3) $\sin\left(1+z^2\right)$；

解：$$\sin\left(1+z^2\right)=\sin 1\cdot\cos z^2+\cos 1\cdot\sin z^2$$

$$=\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n}}{(2n)!}+\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$|z|<+\infty$；

第八次作业

教学内容：4.3 解析函数的泰勒展开　4.4 洛朗级数

1．求下列各函数在指定点处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\frac{z-1}{z+1}, z_0=1$；

解：$$\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=1-\frac{2}{2+(z-1)}=1-\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

$$=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

其中$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$，即$|z-1|<2$

(2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$；

解：$\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{2}{z+2}-\dfrac{1}{z+1}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{4^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{3^n}\quad\left(\left|\frac{z-2}{4}\right|<1,\left|\frac{z-2}{3}\right|<1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n\quad(|z-2|<3)$$

(3) $\dfrac{1}{z^2},z_0=-1$；

解：$\dfrac{1}{z^2}=\left(-\dfrac{1}{z}\right)'=\left(-\dfrac{1}{z+1-1}\right)'=\left(\dfrac{1}{1-(z+1)}\right)'$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}$$

其中$|z+1|<1$

(4) $\dfrac{1}{4-3z},z=1+i$；

解：$\dfrac{1}{4-3z}=\dfrac{1}{-3(z-1-i)+1-3i}=\dfrac{1}{1-3i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{3(z-1-i)}{1-3i}}$

$$=\frac{1}{1-3i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(z-1-i)}{1-3i}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z-1-i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$$

其中$\left|\dfrac{3(z-1-i)}{1-3i}\right|<1$，即$|z-(1+i)|<\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

(5) $\sin^2 z$， $z_0=0$；

解：$\sin^2 z=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

其中$|z|<+\infty$

(6) $\cos z^{2}, z_{0}=0$

解：$\cos z^{2}=1-\frac{1}{2!}z^{4}+\frac{1}{4!}z^{8}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}z^{4n};|z|<+\infty$$

2．把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

（1）$\frac{1}{z(1-z)^{2}}, 0<|z|<1, 0<|z-1|<1$

解：在$0<|z|<1$内，

$$\frac{1}{z(1-z)^{2}}=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{z}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2};$$

在$0<|z-1|<1$内，

$$\frac{1}{z(1-z)^{2}}=\frac{1}{(z-1)^{2}}\cdot\frac{1}{z-1+1}=\frac{1}{(z-1)^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(z-1)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(z-1)^{n-2}$$

（2）$\frac{1}{(z^{2}+1)(z-2)}, 1<|z|<2$；

解：$$\frac{1}{(z^{2}+1)(z-2)}=\frac{-\frac{1}{5}z}{z^{2}+1}+\frac{-\frac{2}{5}}{z^{2}+1}+\frac{\frac{1}{5}}{z-2}$$

$$=-\frac{1}{5}z\frac{1}{z^{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{z^{2}}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{z^{2}}}-\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{z^{2n}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{z^{2n+2}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}$$

（3）$\frac{1}{z^{2}(z-i)}$, 以 i 为中心的圆环;

解：$\dfrac{1}{z^2(z-i)}$ 有两个奇点，$z_1=0$，$z_2=i$，所以以 $z=i$ 为中心的圆环域有：

$$0<|z-i|<1 \text{和} 1<|z-i|<+\infty,$$

在 $0<|z-i|<1$ 内，因 $\dfrac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}, |z|<1$，

$$\text{故} \frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{i^2(z-i)(1+\frac{z-i}{i})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}}$$

在 $1<|z-i|<+\infty$ 内展开，得：

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{(z-i)^3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}}$$

3. 把下列各函数在指定圆环域内展成 Laurent 级数,且计算其沿正向圆周 $|z|=6$ 的积分值：

(1) $\sin\dfrac{1}{1-z}, z=1$ 的去心邻域；

解：由于 $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (|z|<+\infty)$

所以 $\sin\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n-1}$

于是 $\oint_{|z|=6}\sin\dfrac{1}{1-z}dz=-\oint_{|z|=6}\dfrac{1}{z-1}dz=-2\pi i$；

(2) $\dfrac{1}{z(z+1)^6}, 1<|z+1|<\infty$；

解：$\dfrac{1}{z(z+1)^6}=\dfrac{1}{(z+1)^6}\dfrac{1}{(z+1)-1}=\dfrac{1}{(z+1)^6}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z+1)^{-n-7}$

$$\int_{|z|=6}\frac{1}{z(z+1)^6}dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\oint_{|z|=6}\frac{1}{(z+1)^{n+7}}=0$$

(3) $\ln(\dfrac{z-i}{z+i}), 2<|z+i|<\infty$.

解：$\ln(\dfrac{z-i}{z+i})=\ln(1-\dfrac{2i}{z+i})=-\dfrac{2i}{z+i}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2i}{z+i}\right)^2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2i}{z+i}\right)^3-\cdots-\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2i}{z+i}\right)^n+\cdots$

$$\oint_{|z|=}\ln(\frac{z-i}{z+i})dz=-\int_{|z|=6}\frac{2i}{z+i}dz=4\pi$$

4. 求函数 $e^{\frac{1-z^2}{z^2}}\sin\frac{1}{z^2}$ 在 $|z|>0$ 上的洛朗展开式。

解:

$$e^{\frac{1-z^2}{z^2}}\sin\frac{1}{z^2}=e^{-1}e^{\frac{1}{z^2}}\sin\frac{1}{z^2}$$

$$=\frac{1}{2ei}\left(e^{\frac{1+i}{z^2}}-e^{\frac{1-i}{z^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2ei}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!z^{2n}}$$

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{n\frac{\pi}{4}i}$$

$$(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$(1+i)^n-(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}\cdot 2i\sin\frac{n\pi}{4}$$

故 $e^{\frac{1-z^2}{z^2}}\sin\frac{1}{z^2}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)\Big/ n!z^{2n}$

5. 设 $\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(z\xi-\xi)^2}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}$，求 a_n？

解: $\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(z-1)^2\xi^2}d\xi=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{z^2}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi i}{z^{n+1}}$

因此 $a_0=a_1=0, a_n=2(n-1)\pi i,(n=2,3\cdots)$