华 东 理 工 大 学

复变函数与积分变换作业（第2册）

第三次作业

教学内容：2.1.2 柯西—黎曼方程

1．填空：

(1) 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 的导数 $f'(z)=$ $\begin{cases}\text{不存在} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$

(2) 函数 $f(z)=z^n$ 的导数 $f'(z)=$ nz^{n-1}

（3）函数 $\dfrac{z-3}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为 $-1,\pm i$

2．下列函数何处可导？何处解析？

（1）$f(z)=x^2-yi$；（2）$f(z)=2x^3+3y^3i$；（3）$f(z)=z^2\overline{z}$

解：（1）$f(z)=x^2-yi$，则 u=x^2，v=-y，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial v}{\partial y}=-1,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0，令\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}得，x=-\frac{1}{2}$$

即：在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上可导，复平面内处处不解析。

（2）$f(z)=2x^3+3y^3i$，则 u=$2x^3$，v=3y，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\frac{\partial v}{\partial y}=9y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0，令\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}得，\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$$

即：在直线 $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 上可导，在复平面内处处不解析。

（3）$f(z)=z^2\overline{z}$，$f(z)=\left(x^3+xy^2\right)+i\left(x^2y+y^3\right)$，则 $u=x^3+xy^2$，$v=x^2y+y^3$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\frac{\partial v}{\partial x}=2xy，令\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}，\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}得，$$

$y=\pm x$，x=0，y=0，即：函数仅在(0,0)上满足 C-R 方程，该函数在(0,0)可导，在复平面内处处不解析。

3．验证函数 $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ 在复平面上解析，并求其导数。

解：$u=\sin x\cosh y$，$v=\cos x\sinh y$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cosh y,\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\cosh y,\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\sinh y,\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\sinh y,$$

即：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，所以函数在复平面上解析。

$$f'(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

4．设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i\left(x^3+Lxy^2\right)$ 是复平面内解析函数，求 L，m，n 的值。

解：$u=my^3+nx^2y$，$v=x^3+Lxy^2$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy,\frac{\partial v}{\partial y}=2Lxy,\frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2,\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+Ly^2$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 得，

$L=-3$，$m=1$，$n=-3$

5．设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数.

（1）$\overline{f(z)}$ 解析；(2) $2u+3v=1$；(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数.

证明：关键证明 u,v 的一阶偏导数皆为 0。

（1）$\overline{f(z)}=u-iv$，因其解析，故由柯西-黎曼方程得

$$u_x=-v_y,u_y=v_x--------(1)$$

而由 $f(z)$ 的解析性，又有 $u_x=v_y,u_y=-v_x--------(2)$

由（1）、（2）知，$u_x=u_y=v_y=v_x=0$，因此 $u\equiv c_1,v\equiv c_2$，即

$f(z)\equiv c_1+ic_2$ 为常数

(2)同前面一样，$2u+3v=1$ 两端分别对 x,y 求偏导数，得 $2u_x+3v_x=0$，$2u_y+3v_y=0$

考虑到柯西-黎曼方程 $u_x=v_y,u_y=-v_x$，仍有 $u_x=u_y=v_y=v_x=0$，证毕。

（3）由已知，$|f(z)|^2=u^2+v^2\equiv c_0$ 为常数，等式两端分别对 x,y 求偏导数，得

$$2uu_x + 2vv_x = 0,$$

$$2uu_y + 2vv_y = 0, \text{------------------------------}（1）$$

因 $f(z)$ 解析，所以又有 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ------------------------（2）

说明 u,v 皆与 x,y 无关，因而为常数，从而 $f(z)$ 也为常数。

6. 证明：若$f(z)$解析，则有$(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|)^2 + (\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|)^2 = |f'(z)|^2$

证明：由柯西-黎曼方程知，左端 $(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2+v^2})^2 + (\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{u^2+v^2})^2$

$$= (\frac{uu_x + vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}})^2 + (\frac{uu_y + vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}})^2 = \frac{(uu_x + vv_x)^2 + (uv_x - vu_x)^2}{u^2+v^2}$$

$=\frac{u^2(u_x{}^2 + v_x{}^2) + v^2(u_x{}^2 + v_x{}^2)}{u^2+v^2} = (u_x{}^2 + v_x{}^2) = |u_x + iv_x|^2 = |f'(z)|^2 =$ 右端，证毕。

7. 试证下列函数在平面上任何点都不解析：

（1） $f(z) = x + 2iy$

由于 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$，可见 $C-R$ 条件在 z 平面上处处不成立，故

$f(z)$ 在 z 平面上任何点都不解析。

（2） $f(z) = x + y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 可见 $C-R$ 条件在 z 平面上处处不成立，故

$f(z)$ 在 z 平面上任何点都不解析。

（3） $f(z) = \mathrm{Re}\, z$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 可见 $C-R$ 条件在 z 平面上处处不成立，故

$f(z)$ 在 z 平面上任何点都不解析。

（4） $f(z) = \frac{1}{|z|}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 可见 $C-R$ 条件在 $z\neq 0$ 处处不成立，$f(z)$ 在 $z=0$ 处无定义，故 $f(z)$ 在 z 平面上任何点都不解析。

第四次作业

教学内容：2.2 初等函数及其解析性　2.3 解析函数与调和函数的关系

1.填空题

（1）$\exp\left(\frac{2-\pi i}{3}\right)=$__________

（2）$\left(e^i\right)^i=$__________；

（3）$Ln\left(-3+4i\right)=$__________；

（4）$\ln\left(ie\right)=$__________；

(5) $\ln e^i=$____________.

解：（1）$\exp\left(\frac{2-\pi i}{3}\right)=e^{\frac{2}{3}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=e^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（2）$Lne^i=i\left(1+2k\pi\right)\quad k=0,\pm1,$等，

$$\left(e^i\right)^i=e^{iLne^i}=e^{-(1+2k\pi)}\quad k=0,\pm1,\text{等}$$

(3) $Ln\left(-3+4i\right)=\ln\left|-3+4i\right|+i\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)$

$=\ln 5+i\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)\quad k=0,\pm1,$等（2）$\ln\left(ie\right)=\ln\left|ie\right|+i\frac{\pi}{2}=1+i\frac{\pi}{2}$

（4）$\ln\left(ie\right)=\ln\left|ie\right|+i\frac{\pi}{2}=1+i\frac{\pi}{2}$

（5）$e^i=\cos 1+i\sin 1$，$\ln\left(e^i\right)=\ln\left|e^i\right|+i=i$

2　求下列各式的值

（1）3^i；（2）$\left(1+i\right)^i$；（3）$\sin\left(1+2i\right)$；（4）$\left|\cos z\right|^2$

解：（1）$3^i=e^{iLn3}=e^{i(\ln 3+i2k\pi)}=e^{-2k\pi-i\ln 3}\quad k=0,\pm1,$等

（2）$\left(1+i\right)^{i}=e^{iLn(1+i)}=e^{i\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}=e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\ln\sqrt{2}}\qquad k=0,\pm1,\text{等}$

（3）$\sin\left(1+2i\right)=\dfrac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}=\dfrac{e^{-2+i}-e^{2-i}}{2i}$

$$=\frac{\left(e^{-2}-e^{2}\right)\cos1+i\left(e^{-2}+e^{2}\right)\sin1}{2i}$$

$$=\frac{\left(e^{-2}+e^{2}\right)\sin1-i\left(e^{-2}-e^{2}\right)\cos1}{2}$$

（4）$\cos z=\cos\left(x+iy\right)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$，

$$\begin{aligned}&\left|\cos z\right|^{2}=\left(\cos x\cosh y\right)^{2}+\left(\sin x\sinh y\right)^{2}\\&=\cos^{2}x\left(1+\sinh^{2}y\right)+\left(1-\cos^{2}x\right)\sinh^{2}y\\&=\cos^{2}x+\sinh^{2}y\end{aligned}$$

3. 设 $z=re^{i\theta}$ 求 $\mathrm{Re}[Ln(z-1)]$

解：$Ln(z-1)=\ln|z-1|+i[\arg(z-1)+2k\pi i]$ 因此

$$\mathrm{Re}[Ln(z-1)]=\ln|z-1|=\ln\sqrt{(r\cos\theta-1)^{2}+(r\sin\theta)^{2}}=\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^{2})$$

4. 解下列方程：

（1）$e^{x}-1-\sqrt{3}i=0$；（2）$\ln z=2-\dfrac{\pi}{6}i$；（3）$\cos z=0$；（4）$\sin z+\cos z=0$

解：（1）$e^{x}=1+\sqrt{3}i$，

$$z=Ln\left(1+\sqrt{3}i\right)=\ln2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\quad k=0,\pm1,\text{等}$$

（2）$z=e^{2-\frac{\pi}{6}i}=e^{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=e^{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)$

（3）$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0$，$e^{i2z}=-1$，

$$i2z=Ln\left(-1\right)=i\left(\pi+2k\pi\right)$$

$$z=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad\left(k=0,\pm1,\text{等}\right)$$

（4）由于$\sin z=-\cos z, \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\dfrac{-1}{2}(e^{iz}-e^{-iz})$ 故

$$e^{2iz}-1=-i(e^{2iz}+1) \qquad e^{2iz}=\frac{1-i}{1+i}$$

$$z=\frac{1}{2i}Ln(\frac{1-i}{1+i})=\frac{1}{2i}Ln(-i)=\frac{1}{2i}\left[\ln|-i|+i(\arg(-i)+2k\pi i)\right]=(k-\frac{1}{4})\pi, k=0,\pm1,\cdots$$

5.证明下列各式：

(1) $\cos iz=\cosh z$

证明：$\cos iz=\dfrac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2}=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\cosh z$。

(2) $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$;

证明：$\cosh^2 z-\sinh^2 z=(\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2})^2-(\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2})^2=1$。

6．由下列各已知调和函数求解析函数$f(z)=u+iv$：

（1）$u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$；

解：则

$$u_x=3x^2+6xy-3y^2, u_y=3x^2-6xy-3y^2,$$

$$f'(z)=u_x-iu_y=3x^2+6xy-3y^2-i(3x^2-6xy-3y^2)=3(1-i)z^2,$$

故$f(z)=(1-i)z^3+ic, c\in R$

（2） $v=\arctan\dfrac{y}{x}, x>0$；

$$f'(z)=v_y+iv_x=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\bar z}{z\bar z}=\frac{1}{z},\text{故} f(z)=\ln z+c, c\in R$$

（3）$v=\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$。

$$f'(z)=u_x+iv_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=(\frac{\bar z}{z\bar z})^2=\frac{1}{z^2},\text{故} f(z)=\frac{-1}{z}+c, c\in R$$

由$f(2)=0$得，$c=\dfrac{1}{2}$故$f(z)=\dfrac{-1}{z}+\dfrac{1}{2}, c\in R$

7.设$u(x,y)=e^{px}\sin y$，求p的值使$v(x,y)$为调和函数，并求出解析函数$f(z)=u+iv$。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=pe^{px}\sin y,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{px}\cos y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=p^2e^{px}\sin y,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{px}\sin y,$

由拉普拉斯方程知 $p=\pm 1$

当 $p=1$时，

$$u(x,y)=e^x\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y$$
$$v=\int e^x\sin ydy=-e^x\cos y+g(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow g(x)=C$$
$$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)$$

当 $p=-1$时，

$$u(x,y)=e^{-x}\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin y$$
$$v=\int -e^{-x}\sin ydy=e^{-x}\cos y+g(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow g(x)=C$$
$$f(z)=e^{-x}\sin y+i(e^{-x}\cos y+C)$$

8．已知，$u+v=x^2-y^2+2xy-5x-5y$ 试确定解析函数 $f(z)=u+iv$

解：首先，等式两边分别对 x,y 求偏导数，得

$$u_x+v_x=2x+2y-5$$

$$u_y+v_y=2x-2y-5$$

联立 C-R 方程解得

$$u_{\mathrm{x}}=2x-5,u_y=-2y;$$

对 μ_x 积分，得 $u=x^2-5x+c(y)$，带入 u_y 中，

得 $c'(y)=-2y,c(y)=-y^2+c_0$

$$u=x^2-5x+c_0-y^2$$

$$v=2yx-5y-c_0$$

故 $f(z)=u+iv=z^2-5z+c_0-c_0i$

$f(z)=u+iv=z^2-5z+c_0-c_0 i$

9. 设函数$f(z)=u+iv$解析，且u-$v=$（$x-y$）（$x^2+4xy+y^2$），求$f(z)$。

解： u_x-$v_x=$（$x-y$)$(2x+4y)+$（$x^2+4xy+y^2$)

u_y-$v_y=$（$x-y$)$(2y+4x)-$（$x^2+4xy+y^2$)

以上两式相加

$$u_y=3(x^2-y^2)$$

以上两式相减

$$u_x=6xy$$

故$f'(z)=u_x-iu_y=-3iz^2$

$$f(z)=-iz^3+C$$