华东理工大学

复变函数与积分变换作业（第1册）

班级____________学号____________姓名____________任课教师____________

第一次作业

教学内容：1.1 复数及其运算　　1.2 平面点集的一般概念

1．填空题：

$-i-\frac{3i(1+i)}{2}$

$\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

（1）$\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$的实部 $\frac{3}{2}$ 虚部 $-\frac{5}{2}$ 共轭复数 $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$

模 $\frac{\sqrt{34}}{2}$ 辐角 $\arctan\frac{-5}{3}$

（2）$i^8-4i^{21}+i$的实部 1 虚部 -3 共轭复数 $1+3i$

$1-4i+i$

模 $\sqrt{10}$ 辐角 $\arctan 3$

（3）$\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1-i)^8}=$ $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x=$ -1 $,y=$ 13 时，$\frac{x+1+i(y-3)}{5+5i}=1+i$

$10i.$

2．将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

(1) $1+i\sqrt{3}$；

$r\cos\theta=1$ $r\sin\theta=\sqrt{3}$. 可解得 $r=2$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore 1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(2) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi \quad (0\le\varphi\le\pi)$

$=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]$

$=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}$

(3) $\dfrac{(\cos 5\phi+i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi-i\sin 3\phi)^3}$.

$=\dfrac{\cos 10\phi+i\sin 10\phi}{\cos 9\phi-i\sin 9\phi}=\dfrac{\cos 10\phi+i\sin 10\phi}{\cos(-9\phi)+i\sin(-9\phi)}$

$=\cos 19\phi+i\sin 19\phi$

3．求复数 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部

$w=\dfrac{(z-1)(\overline{z+1})}{|z+1|^2}=\dfrac{z\bar{z}+z-\bar{z}-1}{|z+1|^2}=\dfrac{|z|^2-1}{|z+1|^2}+\dfrac{z-\bar{z}}{|z+1|^2}$

$\therefore$ 实部为 $\dfrac{|z|^2-1}{|z+1|^2}$ 虚部为 $\dfrac{z-\bar{z}}{|z+1|^2}$

4. 求方程 $z^3+8=0$ 的所有的根.

$z^3=-8$. $z=\sqrt[3]{-8(\cos 0+i\sin 0)}$

$=-2(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$ $(k=0,1,2)$

$\therefore z_1=z_2=z_3=-2$.

5. 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ 且 $z_1+z_2+z_3=0$，证明：以 z_1,z_2,z_3 为顶点的三角形是正三角形.

$|z_1+z_2|^2=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2r^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$

$z_3=-z_1-z_2$. $|z_3|^2=|z_1+z_2|^2=2r^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=r^2$.

$\therefore z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=r^2$, $|z_1-z_2|^2=2r^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)=3r^2$

同理 $|z_2-z_3|^2$, $|z_1-z_3|^2=\text{const}=3r^2$. $=\text{const}$.

$\therefore$ 为正三角形.

6. 设 z_1,z_2 是两个复数，试证明.

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

并说明此等式的几何意义.

$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$.

$=z_1\bar{z}_1+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_2$

$+z_1\bar{z}_1-\bar{z}_1z_2-z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_2$

$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

7. 求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$;

$= \sqrt{3}^5 - 5\sqrt{3}^4 i + 10\sqrt{3}^3 i^2 - 10\sqrt{3}^2 i^3 + 5\sqrt{3} i^4 - i^5$

$= 9\sqrt{3} - 45i - 30\sqrt{3} + 30i + 5\sqrt{3} - i$

$= -16\sqrt{3} - 16i$

(2) $(1-i)^{\frac{1}{3}}$

$= (\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i})^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[6]{2} e^{\frac{-\frac{\pi}{4}i + 2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.

(3) 求 $\sqrt[6]{-1}$

$= (e^{\pi i})^{\frac{1}{6}}$

$= e^{\frac{\pi + 2k\pi}{6}}$. $k = 0 \ldots 5$

(4) $(1+i)^{100} + (1-i)^{100}$

$= (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{100} + (\sqrt{2} e^{i \cdot -\frac{\pi}{4}})^{100}$

$= 2^{50}(e^{i \cdot 25\pi} + e^{i \cdot -25\pi})$

$= -2^{51}$

8．化简 $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n}{\left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{n-2}}=2e^{i\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{(n-2)\pi}{4}\right)}$$

$$=2e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}}$$

9．设 $\dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{iy}}{x-iy}=a+bi$，其中 a,b,x,y 均为实数，证明： $a^2+b^2=1$

左式 $=\dfrac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))}=\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)^2}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta\, i$

$=\cos 2\theta+\sin 2\theta\, i. =a+bi$，即 $a=\cos 2\theta, b=\sin 2\theta$.

$\therefore a^2+b^2=1$.

10. 设 ω 是 1 的 n 次根，且 $\omega\neq 1$，证明：ω 满足方程：

$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$

$w^n=1.$ $w^n-1=0,$

$(w-1)(1+w+w^2+\cdots+w^{n-1})=0.$

又 $w\neq 1$, $\therefore 1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0.$

第二次作业

教学内容：1.2　平面点集的一般概念　　1.3 复变函数

1. 填空题

(1)连接点$1+i$与$-1-4i$的直线段的参数方程为 $z=1+i+(-2-5i)t$　$t\in[0,1]$.

(2)以原点为中心，焦点在实轴上，长轴为a，短轴为b的椭圆的参数方程为 $z=a\cos t+ib\sin t$. $t\in[0,2\pi]$.

2. 指出下列各题中点 z 的轨迹，并作图.

(1) $|z-2i|\ge 1$;　以(0,2)为圆心，以1为半径的圆外.

(2) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$.

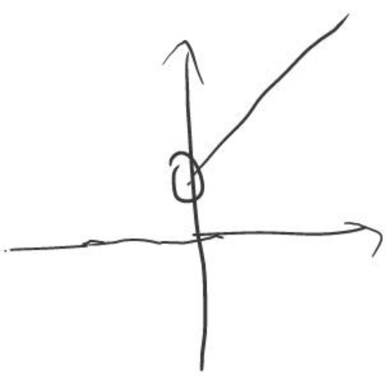
$x=-3$ 直线

(3) $|z+3|+|z+1|=4$

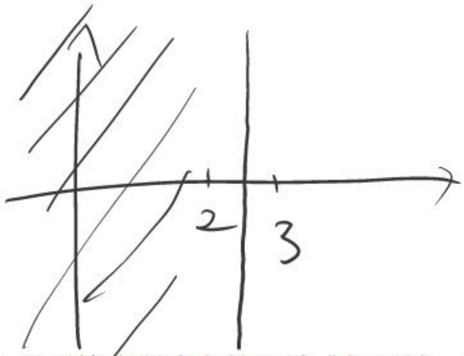
椭圆.

(4) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$

直线 $y=x+1$. $(x>0)$



(5) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right| \geq 1$ $\Rightarrow |z-3| \geq |z-2|$.



$x<2.5$ 半平面.

3.指出下列不等式所确定的区域或闭区域，并指明是有界的还是无界的，是单连通的还是多连通的.

(1) $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$;

$|z-a|^2 < |1-\bar{a}z|^2$.

$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) < (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})$.

$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} < 1 - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}z\bar{z}$

$|z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2$

$|z|^2(1-|a|^2) < (1-|a|^2)$

①当 $|a|=1$ 时 z不存在

②当 $|a|>1$ 时. $|z|^2>1$. 为无界多连通

③当 $0<|a|<1$ 时. $|z|^2<1$. 为有界单连通.

(2) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z} \leq 4$

$|z|^2 - 2(z+\bar{z}) + i(\bar{z}-z) \leq 4$.

令 $z=x+yi$ $x,y \in R$. $(x^2+y^2)-4x-2y \leq 4$.

$(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 9$.

为有界单连通区域(圆).

(3) $|z-1| < 4|z+1|$

$|z-1|^2 < 16|z+1|^2$

$|z|^2 - 2|z| + 1 < 16|z|^2 + 32|z| + 16$.

$(3|z|-5)(5|z|-3) > 0$.

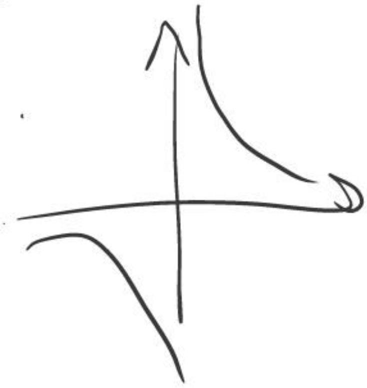
$|z| > \frac{5}{3}$ 或 $|z| < \frac{3}{5}$.

为无界多连通

4．设 t 是实参数，指出下列曲线表示什么图形

(1) $z = t + \frac{i}{t}$;

$x + yi$ $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x = t. \end{cases}$ 双曲线.



(2) $z = ae^{it} + be^{-it}$

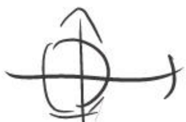
$= (a+b)\cos t + (a-b)\sin t\, i. = x+yi.$

$\cos t = \frac{x}{a+b}$, $\sin t = \frac{y}{a-b}$

$\cos^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{x}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-b}\right)^2 = 1$ ∴椭圆.

5．已知函数 $w = \frac{1}{z}$，求以下曲线的像曲线.

(1) $x^2 + y^2 = 4$;



$z = 2\cos\theta + 2\sin\theta\, i.$

$w = \frac{1}{2\cos\theta + 2\sin\theta i} = \frac{2\cos\theta - 2\sin\theta i}{4}$

即设 $\begin{cases} u = \frac{\cos\theta}{2} \\ v = -\frac{\sin\theta}{2} \end{cases}$ $w = u + vi$ 则 $u^2 + v^2 = 4.$

(2) $x = 1$

$z = x + yi = 1 + yi.$

$w = \frac{1 - yi}{1 + y^2}$, $\begin{cases} u = \frac{1}{1+y^2} \\ v = \frac{-y}{1+y^2} \end{cases}$

(3) $y = x$

$z = x(1+i)$

$w = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2x}$ $\begin{cases} u = \frac{1}{2x} \\ v = \frac{-1}{2x} \end{cases}$ $u + v = 0$.

6. 讨论下列函数的连续性：

（1） $w = |z| = x^2 + y^2$.

x^2+y^2 在复平面上连续

$\therefore$ w 连续.

（2） $f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, z \neq 0 \\ 0, \quad z = 0 \end{cases}$

当 $f(z)$ 沿 $y=kx$ 方向 $\to 0$ 时

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2}$.

$\therefore$ $f(z)$ 在零点之外的点连续.

7. 用导数定义讨论 $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}z$ 的可导性。

只需讨论极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 的存在性 当 $\Delta z \to 0$，认为 $\mathrm{Re}(z_0+\Delta z) = \mathrm{Re}\, z_0$.

$= \lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{(z_0+\Delta z)\mathrm{Re}\, z_0 - z_0 \mathrm{Re}\, z_0}{\Delta z} = \mathrm{Re}\, z_0$.

部分参考答案：

第一次作业

2、（1） $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (2) $2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})}$ (3) $\cos 19\varphi + i\sin 19\varphi$

4. $1+i\sqrt{3}, -2, 1-i\sqrt{3}$

7.(1) $-16\sqrt{3}-16i$

(2) $\sqrt[6]{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)/3}$ $k=0.1,2$

(3) $\sqrt[6]{-1}=\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi+2\mathrm{k}\pi}{6}\right)}\left(\mathrm{k}=0,1,2,3,4,5\right)$

(4) -2^{51}

8. $-2i^{n+1}$

第二次作业

5. (1) $u^2+v^2=\frac{1}{4}$ (2) $(u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}$ (3) $u=-v$