§3.2 非周期信号的傅立叶变换

则指数形式付氏级数：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

傅立叶级数的复系数Fn

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$F_n=\left|F_n\right|e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$tg\,\phi_n=-\frac{b_n}{a_n}$$

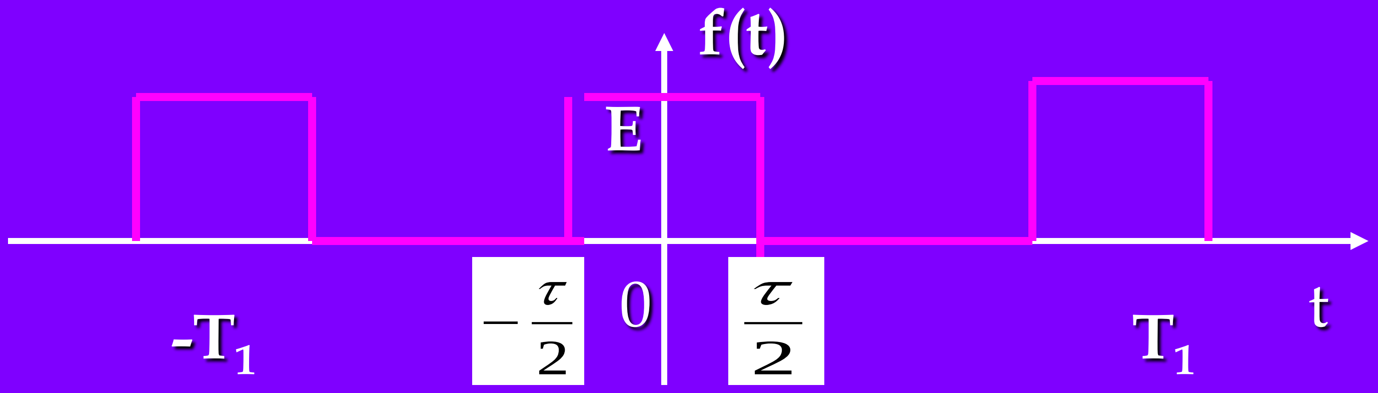
傅立叶级数的复系数Fn与频率的关系称为周期信号的 复数**频谱**（频谱特性）

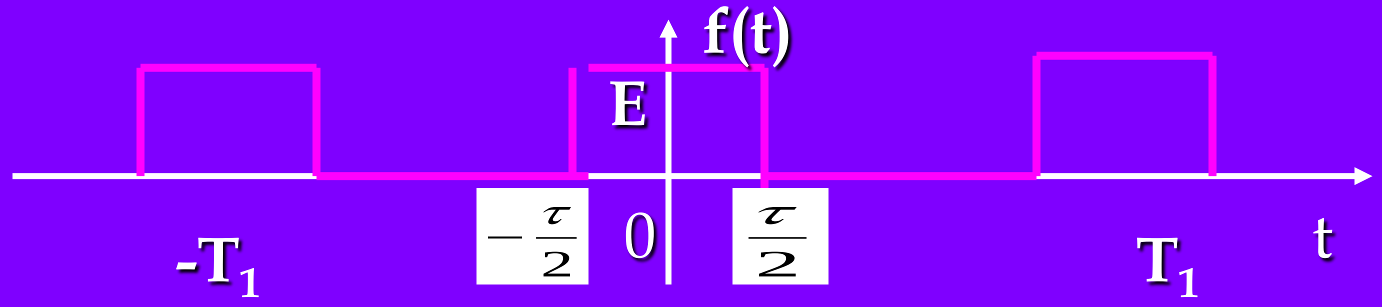
一、周期矩形脉冲信号的频谱

frequency spectrum

$$f(t)=\begin{cases} E & (|t|\le \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (|t|>\frac{\tau}{2}) \end{cases}$$

此周期矩形脉冲信号：
脉宽为τ，周期为T_1，
幅度为E；
求Fn





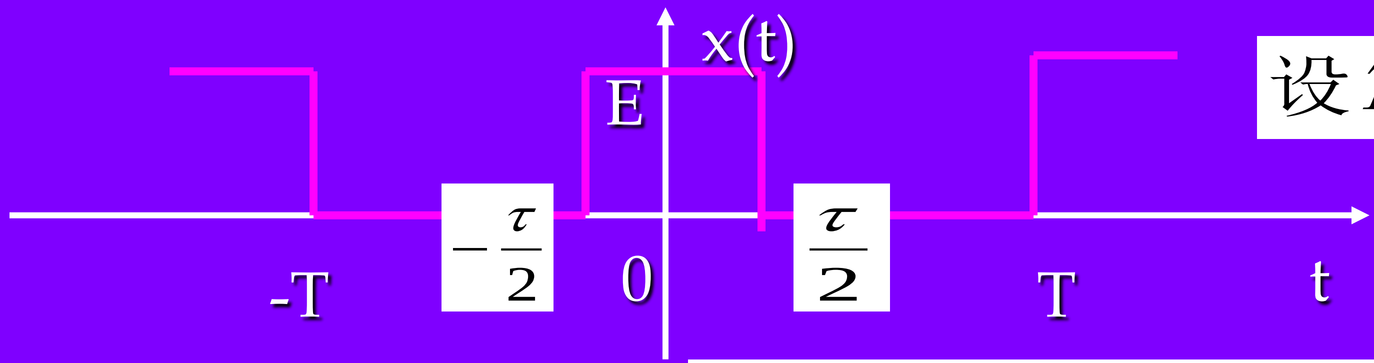
$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$= \frac{E}{T_1(-jn\omega_1)}(e^{-jn\omega_1\tau/2} - e^{jn\omega_1\tau/2})$$

$$= \frac{E\tau}{T_1}\frac{\sin(\frac{n\omega_1\tau}{2})}{\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)}$$

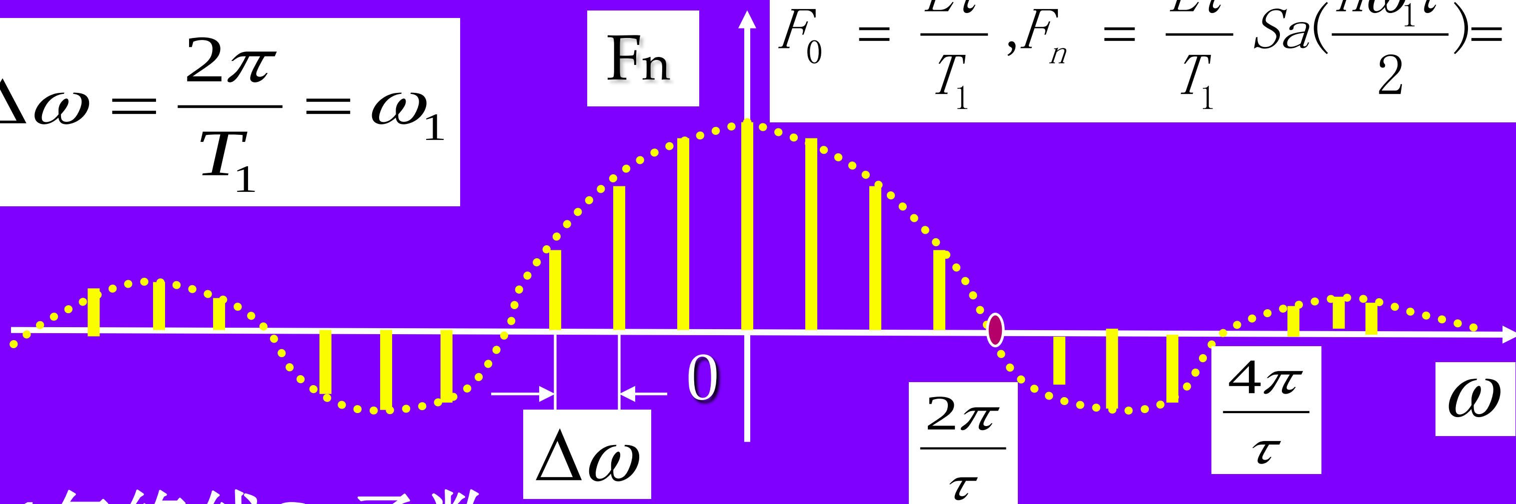
$$= \frac{E\tau}{T_1}Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$$



设 $T_1 = 4\tau$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_1} = \omega_1$$

$$F_0 = \frac{E\tau}{T_1}, F_n = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$$



1包络线Sa函数

2 谱线是离散的，谱线间隔ω_1

3 谱线呈谐波关系

4 第一个过零点

$$\frac{n\omega_1\tau}{2} = \pi \Rightarrow n\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\Rightarrow n = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{1}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{T_1}{2\pi} = \frac{T_1}{\tau}$$

4 脉宽 为 τ（s）

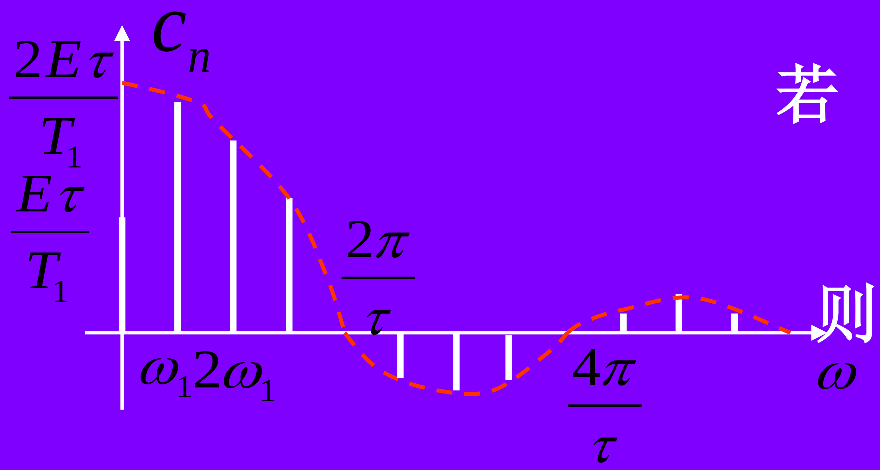
带宽 $B_w = \frac{1}{\tau} \quad Hz$

频谱分析表明—周期信号频谱的特点

- 离散频谱，谱线间隔为基波频率，脉冲周期越大，谱线越密。
- 一般具有收敛性，总趋势减小。
- 各分量的大小与脉幅成正比，与脉宽成正比，与周期成反比。
- 各谱线的幅度按 $Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$ 包络线变化。过

零点为 $\omega=\frac{2m\pi}{\tau}$

- 主要能量在第一过零点内。带宽 $B_\omega = \frac{1}{\tau}\ Hz$



若

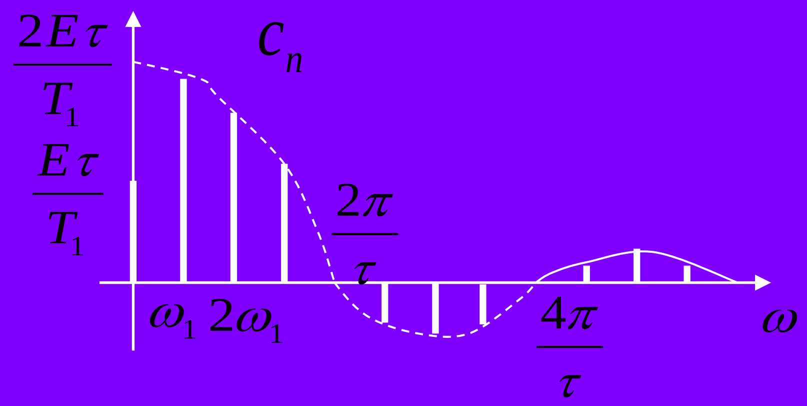
则

因此，第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有 3 根谱线。

一般情况，　若 $\boxed{\dfrac{\tau}{T_1}=\dfrac{1}{n},}$ 　则

第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有***n*-1**根谱线。

3.3 典型周期信号的傅立叶级数



周期矩形信号可以包含无穷多条谱线，也就是说可分解成无穷多个频率分量。但信号的能量主要集中在第一个零点内。

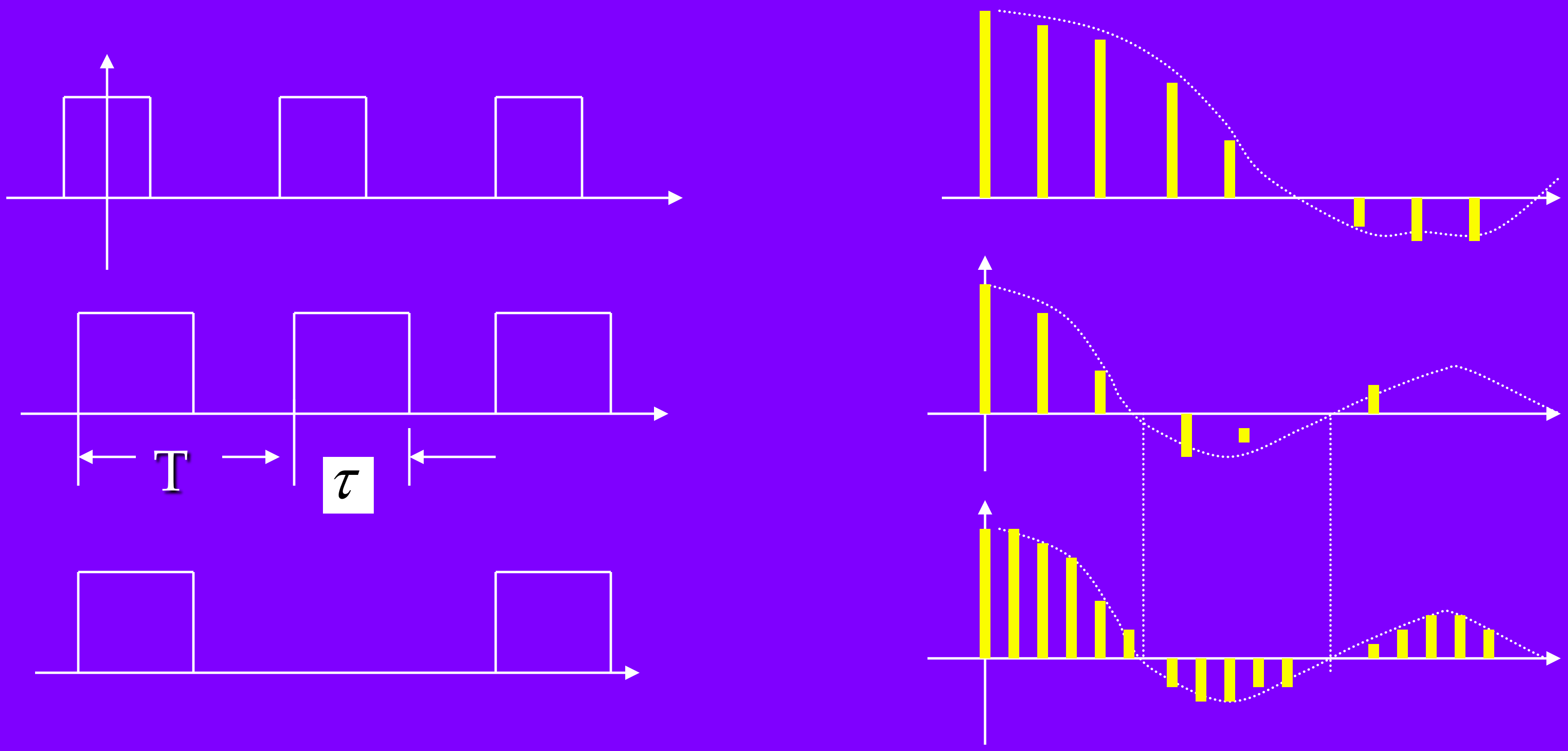
在允许一定失真的情况下，可以舍弃第一个零点以外的分量。

定义频带宽度：$\boxed{B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}}$ 或 $\boxed{B_f = \frac{1}{\tau}}$

结论：矩形脉冲的频带宽度与脉冲宽度成反比。

周期矩形的频谱变化规律：

- If T is constant, change τ
- If τ is constant, change T



- 由以上分析可知，若脉冲宽度为 τ ，幅度**E=1**，周期为 T_1 则其傅立叶系数为

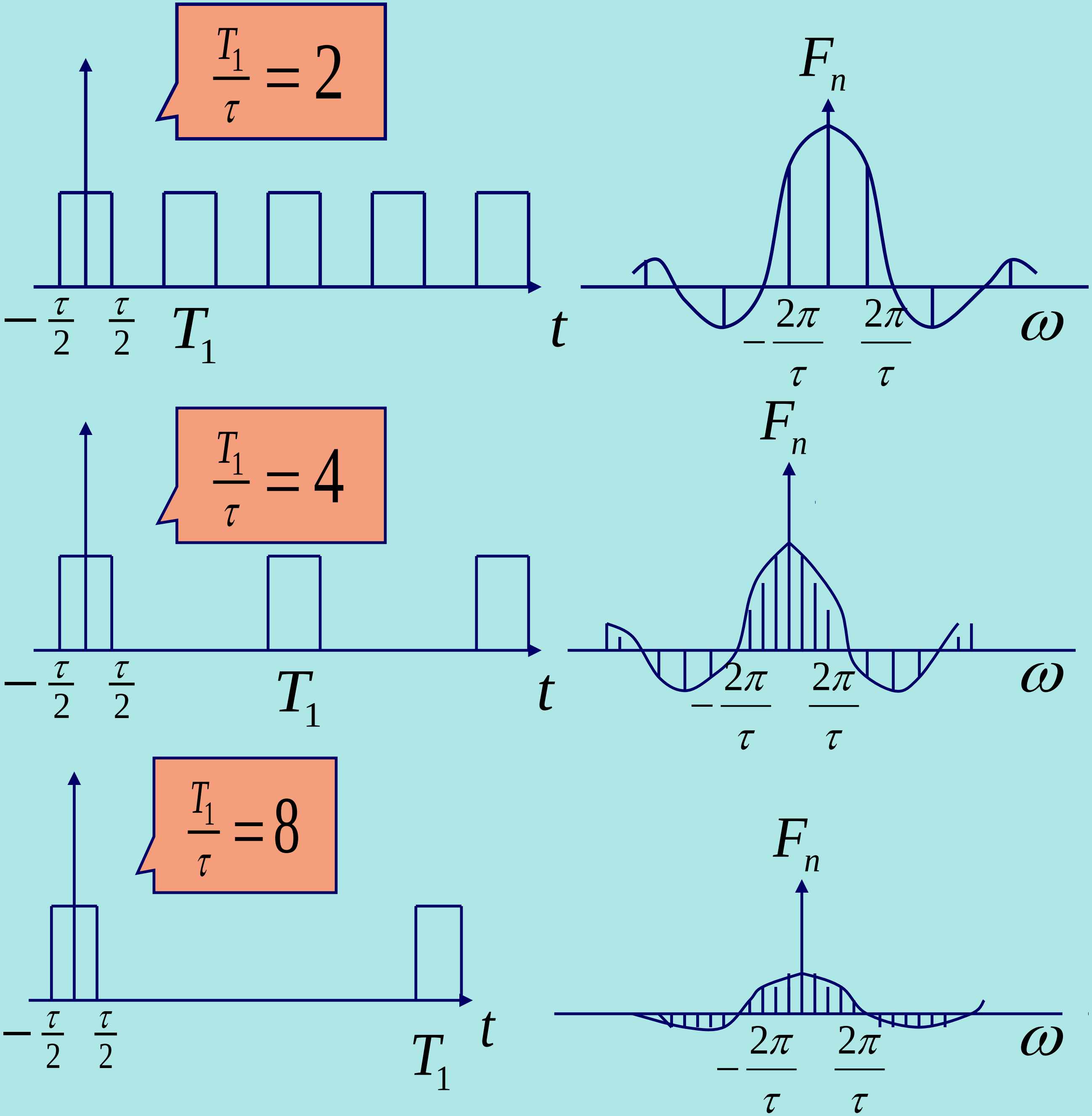
$$F_n = \frac{\tau}{T_1} \frac{\sin(\frac{n\omega_1\tau}{2})}{\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)}$$

$$= \frac{\tau}{T_1} Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \qquad \omega = n\omega_1$$

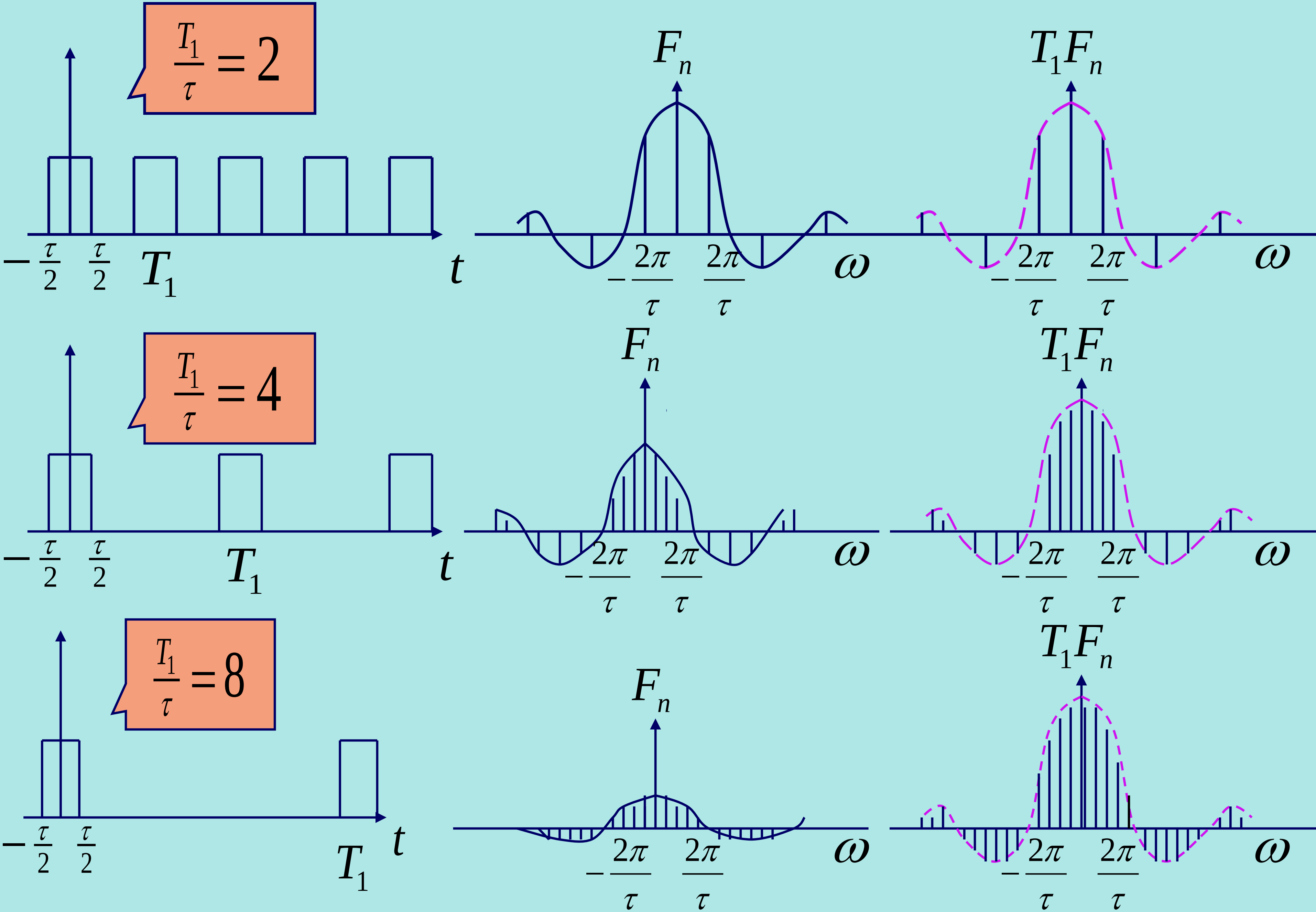
- 当脉宽 τ 保持不变，T_1增大时，相应的频谱图上的谱线间隔变小，相应的频谱包络线 $\dfrac{2}{T_1}\dfrac{\sin\omega\tau/2}{\omega}$ 的幅度变小。

- $T_1 \to \infty$时，周期矩形波变成了非周期的矩形脉冲，相应的 $F_n \to 0$。因此，无法再用傅立叶级数描述非周期信号的频域特性。

- 用T_1乘上F_n，得$T_1F_n = \tau S_a(\omega\tau/2)\Big|_{\omega=n\omega_1}$，
式中T_1F_n为一有限值。



$\frac{T_1}{\tau}=2$
$-\frac{\tau}{2}$ $\frac{\tau}{2}$ T_1
t
F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$
ω
$\frac{T_1}{\tau}=4$
$-\frac{\tau}{2}$ $\frac{\tau}{2}$ T_1
t
F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$
ω
$\frac{T_1}{\tau}=8$
$-\frac{\tau}{2}$ $\frac{\tau}{2}$ T_1
t
F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$
ω



$\frac{T_1}{\tau} = 2$
$-\frac{\tau}{2}$ $\frac{\tau}{2}$ T_1 t
F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$ ω
T_1F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$ ω
$\frac{T_1}{\tau} = 4$
$-\frac{\tau}{2}$ $\frac{\tau}{2}$ T_1 t
F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$ ω
T_1F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$ ω
$\frac{T_1}{\tau} = 8$
$-\frac{\tau}{2}$ $\frac{\tau}{2}$ T_1 t
F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$ ω
T_1F_n
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$ ω

非周期信号的频谱分析
Frequency spectrum analysis of aperiodic signals

当周期信号的周期T_1无限大时,就演变成了非周期信号的单脉冲信号

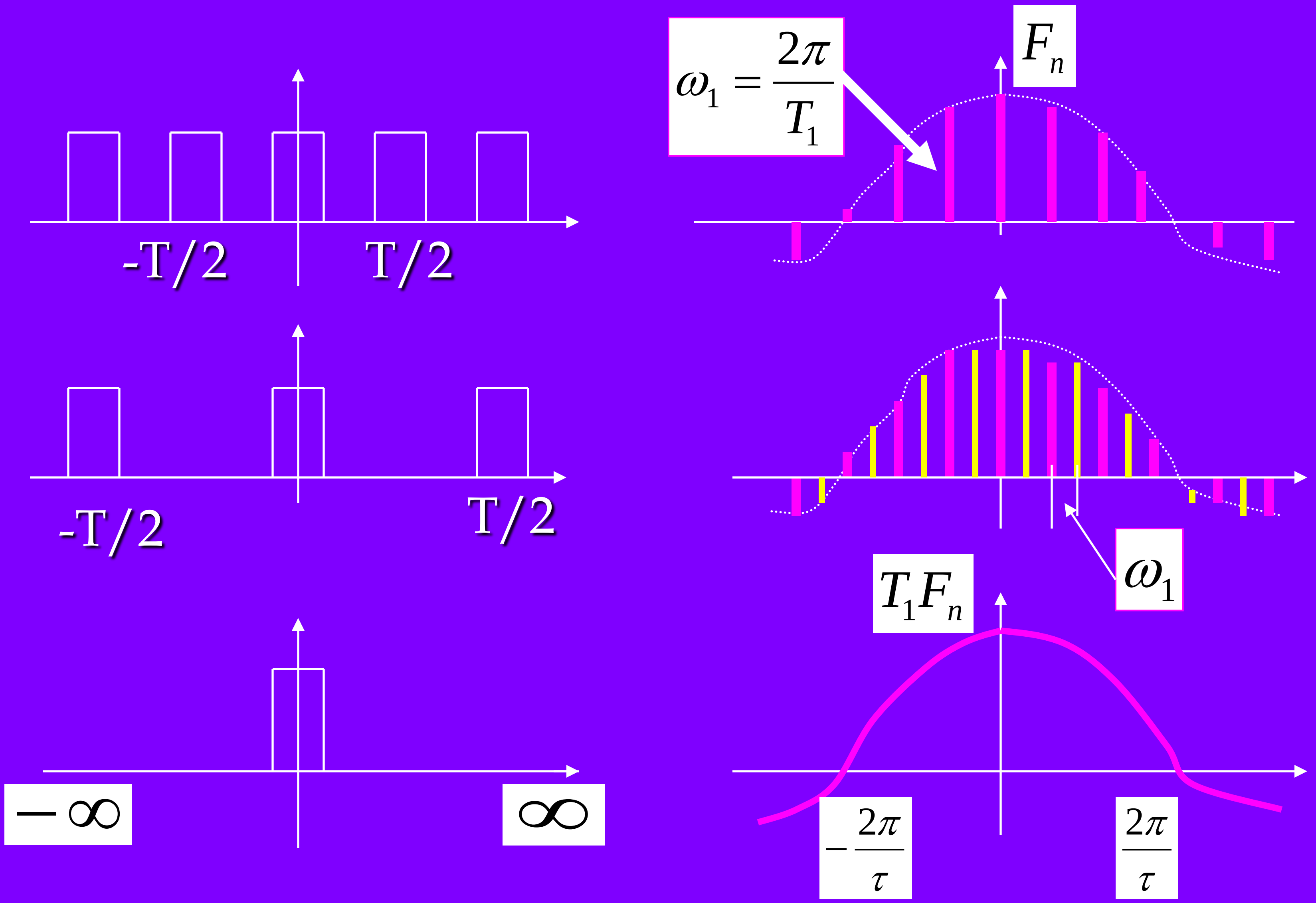
$$T_1 \to \infty$$

频率也变成连续变量

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to 0 \to d\omega$$

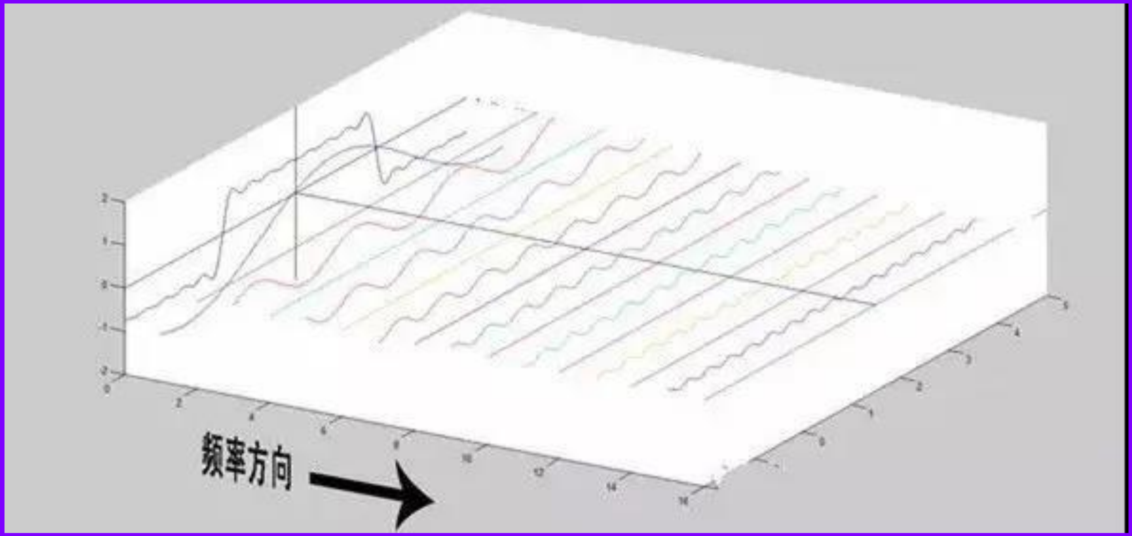
$$n\omega_1 \to \omega$$

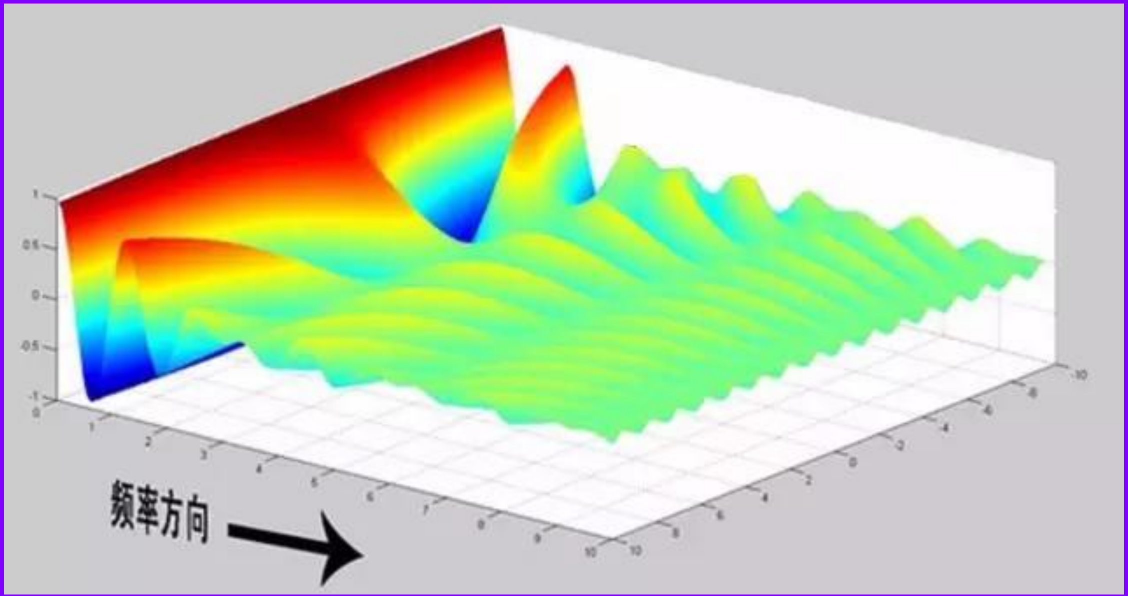
频谱演变的定性观察



$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$
F_n
-T/2
T/2
-T/2
T/2
ω_1
$T_1 F_n$
$-\infty$
∞
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$

更形象地





- 由以上三个时域周期信号的T_1F_n的图形可见,T_1F_n的包络线为$\tau S_a(\omega\tau/2)$，它与 T_1 无关。
- 定义非周期信号的频率密度函数为

$$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}F_nT_1=\lim_{\omega_1\to 0}\frac{2\pi F_n}{\omega_1}$$

- 上式表明,T_1F_n 是$2\pi F_n$与基波频率ω_1 之比。

且当 $T_1\to\infty$ 时，谱线间隔$\omega_1\to 0$,$F(\omega)$

成为变量**ω**的连续函数。

傅立叶正变换公式

$$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}\int_{T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

- 由于 $\omega_1 \to 0$，则 $\omega = n\omega_1$，上式变为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

- 该式即为非周期信号傅立叶正变换公式

傅立叶反变换公式

指数形式的傅立叶级数展开公式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

其中谱线间隔 $\Delta(n\omega_1)=\omega_1$，上式可写为：

$$f(t)=\sum_{n\omega_1=-\infty}^{\infty}\frac{F_n}{\omega_1}e^{jn\omega_1 t}\cdot\Delta(n\omega_1)$$

当 $T_1\to\infty$ ，即周期函数变成非周期函数时，

$$n\omega_1\to\omega,\qquad \Delta(n\omega_1)\to d\omega,\qquad \frac{F_n}{\omega_1}\to\frac{F(\omega)}{2\pi}$$

傅立叶级数变为积分公式

$$f(t)=FT^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Fourier transform pair

Fourier transform equation / Fourier integral

$$F(\omega)=FT[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Inverse Fourier transform equation

$$f(t)=FT^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$F(\omega)$称为$f(t)$的频谱密度函数或频谱或象函数，

$f(t)$称为$F(\omega)$的原函数。

傅立叶变换一般为复数

FT一般为复函数

$$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=R(\omega)+jX(\omega)$$

$|F(\omega)|\sim\omega$曲线为幅度频谱，

表示各频率间谱密度的相对大小。

$\varphi(\omega)\sim\omega$曲线为相位频谱，

表示各频率间的相位关系。

R(ω)频谱的实部，X（ω）频谱的虚部。

三从物理意义来讨论FT

(a) F(ω)是一个密度函数的概念

(b) F(ω)是一个连续谱

(c) F(ω)包含了从零到无限高频的所有频率分量,分量的频率不成谐波关系

傅立叶变换存在的充分条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

用冲激函数的概念，允许奇异函数也能满足上述条件，因而象阶跃、冲激一类函数也存在傅立叶变换