华 东 理 工 大 学

复变函数与积分变换作业（第4册）

班级__________学号__________姓名__________任课教师__________

第七次作业

教学内容：4.1 复数项级数 4.2 幂级数

1. 判别下列复数列的收敛性，若收敛，求其极限，其中 $n \to \infty$.

(1) $z_n = \dfrac{1+ni}{1+n}$; $= \dfrac{1}{1+n} + \dfrac{n}{1+n} i$.

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 + i. = i.$ 收敛.

(2) $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n+1}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在. ∴ 发散.

(3) $z_n = \left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^{n} e^{i\theta n} = 0.$

∴ 收敛于 0.

$\frac{i}{1}$ $\frac{-1}{2}$ $\frac{-i}{3}$ $\frac{1}{4}$

2.判别下列级数的收敛情况:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$; $=\sum(-1)^n\frac{1}{2n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$

由实部，虚部均为交错级数，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

条件

$\therefore$ 原级数收敛. $\left|\frac{i^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$ 发散,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$; $=\sum\frac{\sqrt{61}^n e^{i\theta n}}{8^n}$.

由 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n=0$ 且 $\lim_{n\to\infty}e^{i\theta n}$ 为有限量.

$\therefore$ 原级数收敛 绝对. $|e^{i\theta n}|=1$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$ $=\sum\frac{e^{i\cdot in}+e^{-i\cdot in}}{2^{n+1}}=\sum\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}\neq 0$.

$\therefore$ 原级数发散

省略 $\lim\limits_{n\to\infty}$.

3. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$；

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{e}\qquad\therefore R=\frac{1}{\lambda}=e.$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln in)^n}z^n$；

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{C_n}\right|=\frac{1}{|\ln in|}=0$$

$$\therefore R=\frac{1}{\lambda}=\infty$$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$；

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=|1+i|=\sqrt{2}.\quad\therefore R=\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n+i3^n}$；；

；

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\left|\frac{2^n+i3^n}{2^{n+1}+i3^{n+1}}\right|=\sqrt{\frac{2^{2n}+3^{2n}}{2^{2n+2}+3^{2n+2}}}=\frac{1}{3}.$$

$$R=\frac{1}{\lambda}=3.$$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(z-i)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

$$R=\frac{1}{\lambda}=2.$$

4. 把下列函数展开成 z 的幂级数，并指出它的收敛半径:

(1) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$；

$$=\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'\cdot\frac{1}{2z}=-\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right]'\cdot\frac{1}{2z}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, n\cdot z^{2n-2}$$

$$|z^2|<1.\quad R=1$$

(2) $\sinh z$ $=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$

$$\sinh^{n}(0)=\begin{cases}1, & n=\text{odd}\\ 0, & n=\text{even}\end{cases}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sinh^{(n)}0.\ z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}\qquad \lambda=\lim_{n\to\infty}\text{———}$$

$$\sum\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{1}{2}\sum\frac{z^n}{n!}-\sum(-1)^n\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{2}\sum\frac{1+(-1)^{n+1}}{n!}z^n.$$

(3) $\sin\left(1+z^2\right)$；

$$=\sin 1\cos z^2+\cos 1\sin z^2.$$

$$=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n}}{(2n)!}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$|z|<+\infty$$

第八次作业

教学内容：4.3 解析函数的泰勒展开　　4.4 洛朗级数

1．求下列各函数在指定点处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\frac{z-1}{z+1}, z_0=1$；

$$\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=1-\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

$$=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(z-1)^n.$$

$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$. 即 $|z-1|<2$. $R=2$

(2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$；

$\frac{A}{z+1}-\frac{B}{z+2}$. $\begin{cases}A-B=1\\2A-B=0\end{cases}$ $\begin{cases}A=-1\\B=-2\end{cases}$

$$=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4^n}(z-2)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{3^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{4^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n.$$

$R=3$.

(3) $\frac{1}{z^2}, z_0=-1$；

$=z^{-2}$. $f(z)=z^{-2}$. $f^{(n)}(z)=(-1)^n(n+1)!\,z^{-n-2}$.

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(-1)^{-n-2}(z+1)^n.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n.$$

$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$. $\therefore R=\frac{1}{\lambda}=1$.

(4) $\frac{1}{4-3z}, z=1+i$;

$$= \frac{1}{-3(z-1-i)+1-3i} = \frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1}{1-\frac{3(z-1-i)}{1-3i}}$$

$$= \frac{1}{1-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{1-3i}\right)^n (z-1-i)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}} (z-1-i)^n.$$

(5) $\sin^2 z$, $z_0 = 0$;

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right)^2$$

$$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}$$

$\times$ $(\Sigma)^2 \neq \Sigma()^2$!

(6). $\cos z^2, z_0 = 0$

直接展开!

$$= \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (2z)^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n!} z^{2n}, \quad |z| < +\infty.$$

2．把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

（1）$\dfrac{1}{z(1-z)^2}, 0<|z|<1, 0<|z-1|<1$；

在 $0<|z|<1$ 上，$\dfrac{1}{z(1-z)^2}=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n z^{n-2}$.

在 $0<|z-1|<1$ 上，$\dfrac{1}{z(1-z)^2}=\dfrac{1}{1+z-1}\cdot\dfrac{1}{(z-1)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^{n-2}$

（2）$\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1<|z|<2$；

$\dfrac{Az+B}{z^2+1}+\dfrac{C}{z-2}$ $\quad Az^2-2Az+Bz-2B+Cz^2+C=1$

$\begin{cases} A+C=0 \\ B=2A \\ C=2B+1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} A=-\frac{1}{5} \\ B=-\frac{2}{5} \\ C=\frac{1}{5} \end{cases}$

$=\dfrac{-\frac{1}{5}z-\frac{2}{5}}{z^2+1}+\dfrac{\frac{1}{5}}{z-2}$

$=-\frac{1}{5}z\cancel{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}}$

$|z^2|>1$，不在域内.

$=\frac{1}{5}z\,\dfrac{1}{z^2+\frac{1}{z^2}}\ \cdots$

（3）$\dfrac{1}{z^2(z-i)}$，以 i 为中心的圆环；两个圆环域

$0<|z-i|<1$ 内：$=\dfrac{1}{z-i}\left(-\dfrac{1}{z}\right)'=\dfrac{1}{z-i}\left(-\dfrac{1}{i}\,\dfrac{1}{1+\frac{z-i}{i}}\right)'$

$=-\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1}{z-i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{i^n}(z-i)^{n-1}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$

$1<|z-i|<+\infty$ 内，$\dfrac{1}{z^2(z-i)}=\dfrac{1}{(z-i)^3}\,\dfrac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}}$

3. 把下列各函数在指定圆环域内展成 Laurent 级数,且计算其沿正向圆周 $|z|=6$ 的积分值：

(1) $\sin\frac{1}{1-z}, z=1$ 的去心邻域；

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^{2n+1}}{2n+1!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}\cdot(z-1)^{-2n-1}$$

$$\oint_{|z|=6}\sin\frac{1}{1-z}dz=2\pi i\, a_0=-2\pi i.$$

(2) $\frac{1}{z(z+1)^6}, 1<|z+1|<\infty$；

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{-n-7}$$

$$=\frac{-1}{(z+1)^6}\frac{1}{1-(z+1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{n-6}\qquad |z_0|=1$$

$$\oint_{|z|=6}\frac{1}{z(z+1)^6}dz=2\pi i\, a_5=-2\pi i.$$

$0.$

(3) $\ln(\frac{z-i}{z+i}), 2<|z+i|<\infty$.

$$-\ln(1-x)=\int\sum x^n=\sum\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$=\ln\left(1-\frac{2i}{z+i}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2i}{z+i}\right)^n}{n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n}(z+i)^{-n},$$

$$\oint_{|z|=6}\ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=2\pi i\cdot a_{-1}=2\pi i\cdot -2i=4\pi.$$

4. 求函数 $f(z)=e^{\frac{1-z^2}{z^2}}\cdot\sin\frac{1}{z^2}$ 在 $|z|>0$ 上的洛朗展开式.

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\quad z^{-4n-2}$$

$$=\frac{1}{2ei}\left(e^{\frac{1+i}{z^2}}-e^{\frac{1-i}{z^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2ei}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!\,z^{2n}}.$$

5. 设 $\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(z\xi-\xi)^2}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$，求 a_n.

$$\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(z\xi-\xi)^2}d\xi=\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{(z-1)^2}$$ 由 $\frac{e^{\xi}}{\xi^2}$ 在 $\xi=0$ 外~~处~~处解析.

$$=\frac{2\pi i}{(z-1)^2}=2\pi i z^{-2}\cdot\cancel{\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2}}=-2\pi i\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)'.$$

$$=-2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}.\qquad =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi i}{z^{n+1}}.\quad ?$$

$\therefore a_n=-\cancel{2}\pi i.$

部分题目参考答案

第七次作业

1. (1) z_n 收敛于 $\boldsymbol{i}$；(2) z_n 发散 ；(3). z_n 收敛于 0.

2. (1)条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 发散。

3. (1) e； (2) ∞； (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$； (4)3； （5）2.

4.(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{2n-2}$,收敛半径为 1； (2) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n!}z^n$； $|z|<+\infty$.

(3) $\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n}}{(2n)!}+\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$;$|z|<+\infty$；

第八次作业

1．(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{z-1}{2})^n$;($|z-1|<2$); (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(z-2)^n$;$|z-2|<3$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}$;$|z+1|<1$; (4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z-1-i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$;$|z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$

(5) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$; $|z|<+\infty$; (6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{4n}$;$|z|<+\infty$

2.（1）在 $0<|z|<1$ 内，$\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}$;在 $0<|z-1|<1$ 内，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$

（2） $-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$

（3） $0<|z-i|<1$ 内 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}}$； $1<|z-i|<+\infty$ 内 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}}$

3. (1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n-1}$； $-2\pi i$; (2). $\sum_{n=0}^{+\infty}(z+1)^{-n-7}$； 0

(3). $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2i}{z+i}\right)^n$； 4π

4. $\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4})\Big/n!z^{2n}$ **5.** $a_0=a_1=0,a_n=2(n-1)\pi i,(n=2,3\cdots)$