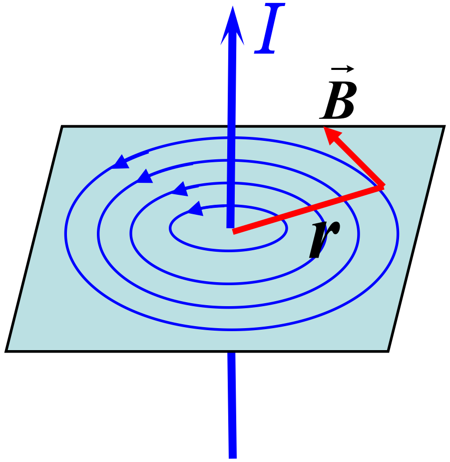
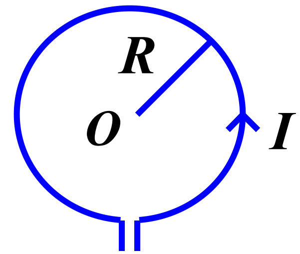


$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{r}$$



$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

相互作用　　描述　　计算

运动电荷 → 磁场 → $B=\frac{F_m}{q\upsilon}$ → $\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

运动电荷在磁场中受力

$$\vec{F}=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$$

载流直导线有限长 $$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

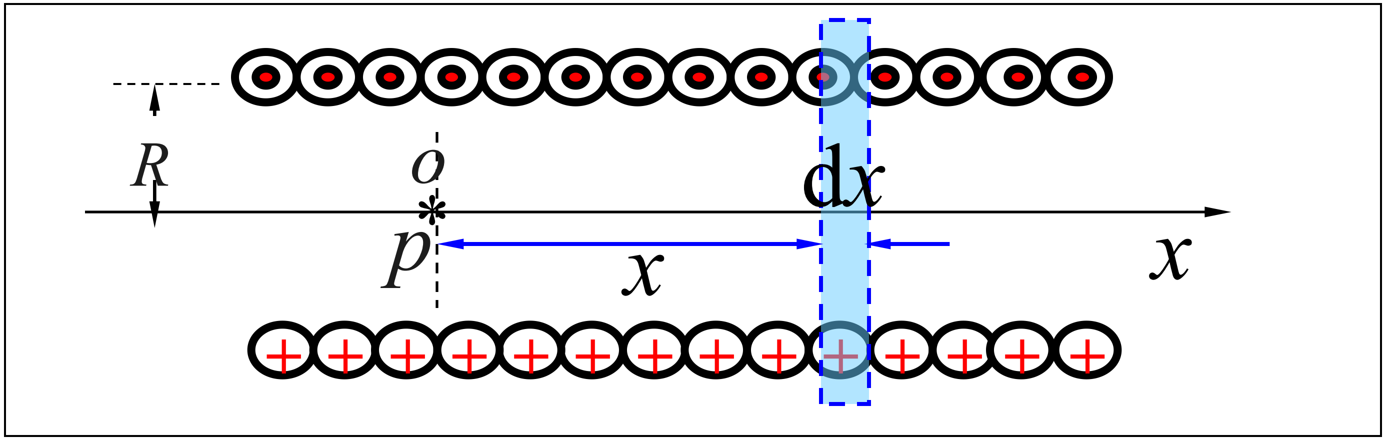
无限长 $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi \mathrm{a}}$$ 半无限长 $$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

圆电流中心 $$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$,圆弧 $$B=\frac{\theta}{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2R}$$

圆线圈轴线上 $$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

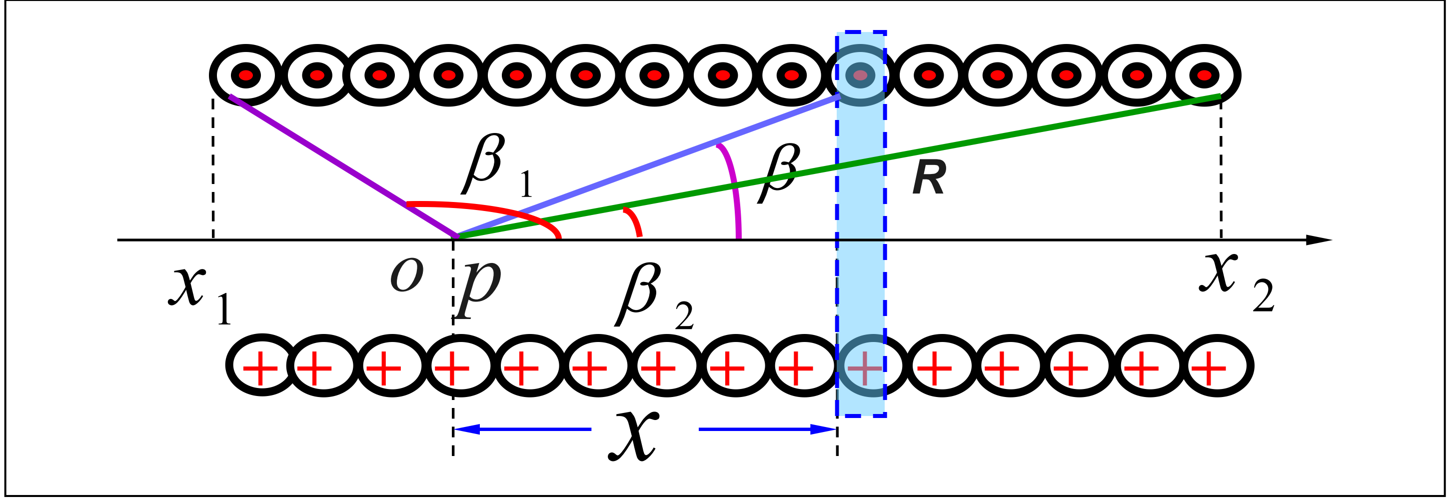
例5　载流直螺线管的磁场

如图所示，有一长为l，半径为R的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为N，通有电流I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度.



解　由圆形电流磁场公式　$B=\dfrac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 In\,\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$



$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 In \boxed{\mathrm{d}x}}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$x = R\cot\beta$$

$$\mathrm{d}x = -R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

$$R^2 + x^2 = R^2\csc^2\beta$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{R^2\mathrm{d}x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta} = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$\boxed{= \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2 - \cos\beta_1\right)}$$

讨　论

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$

（1）P点位于管内轴线中点　　$\beta_1=\pi-\beta_2$

$$\cos\beta_1=-\cos\beta_2 \qquad \cos\beta_2=\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+R^2}}$$

$$B=\mu_0 nI\cos\beta_2=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{\left(l^2/4+R^2\right)^{1/2}}$$

若　$l>>R$　$\boxed{B=\mu_0 nI}$

(2) 无限长的螺线管

$$\boxed{B=\mu_0 nI}$$

或由 $\beta_1=\pi,\beta_2=0$ 代入

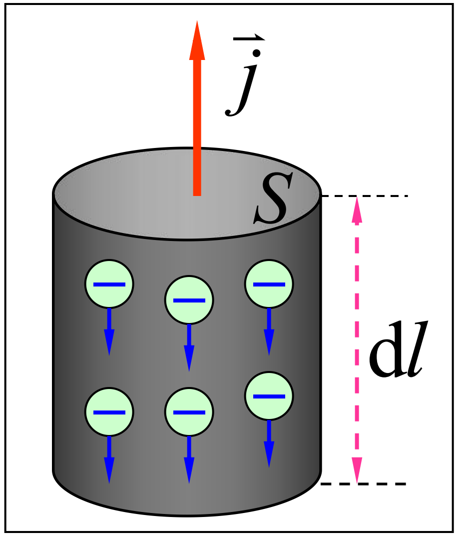
（3）半无限长螺线管

$$\beta_1=\frac{\pi}{2},\beta_2=0$$

$$\boxed{B=\frac{1}{2}\mu_0 nI}$$

四、 运动电荷的磁场

毕— 萨定律 $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$



$$I\mathrm{d}\vec{l} = \vec{j}S\mathrm{d}l = nS\mathrm{d}lq\vec{v}$$

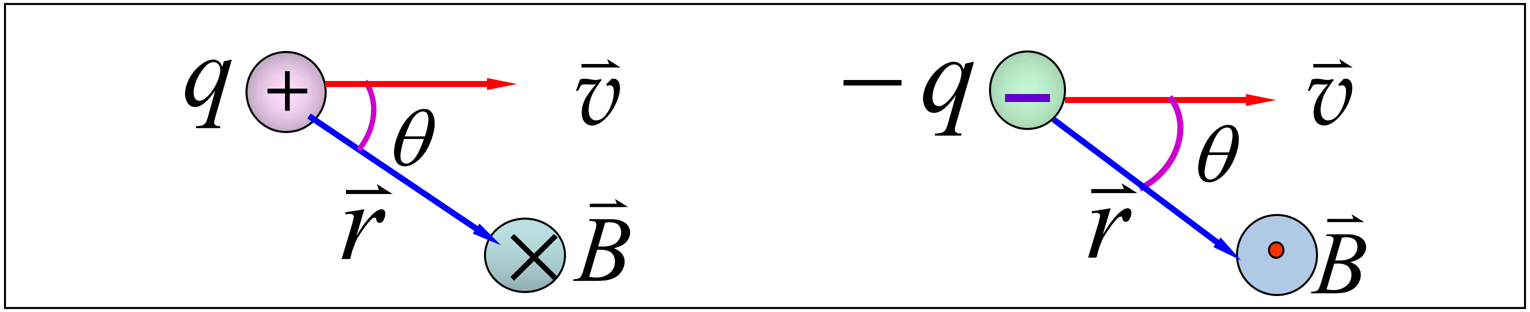
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nS\mathrm{d}lq\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\mathrm{d}N = nS\,\mathrm{d}l$$

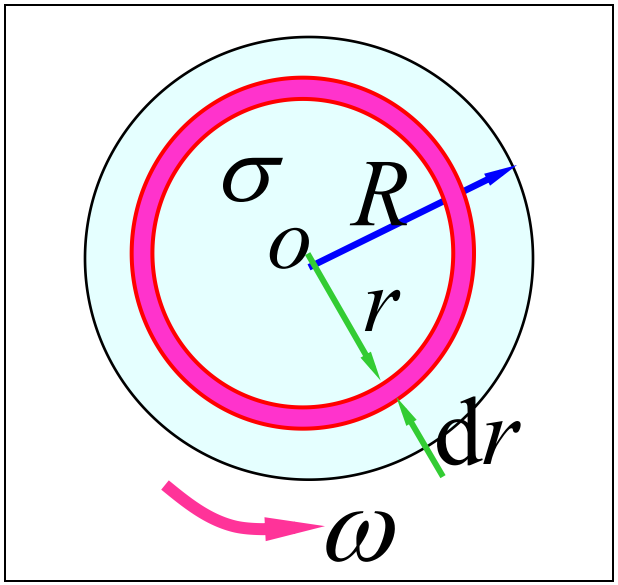
运动电荷的磁场

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}}$$

应用条件： $v << c$



例6 半径 为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 σ ，并以角速度 ω 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度.



解法一 圆电流的磁场

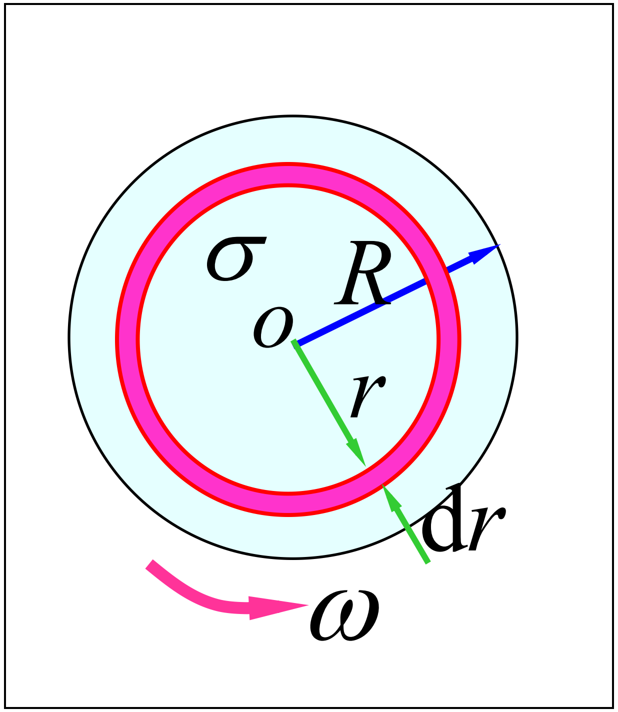
$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi\ r\mathrm{d}r = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$\begin{cases} \sigma > 0, & \vec{B}\ \text{向外} \\ \sigma < 0, & \vec{B}\ \text{向内} \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

解法二　　运动电荷的磁场



$$\mathrm{d}B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}qv}{r^2}$$

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi\ r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

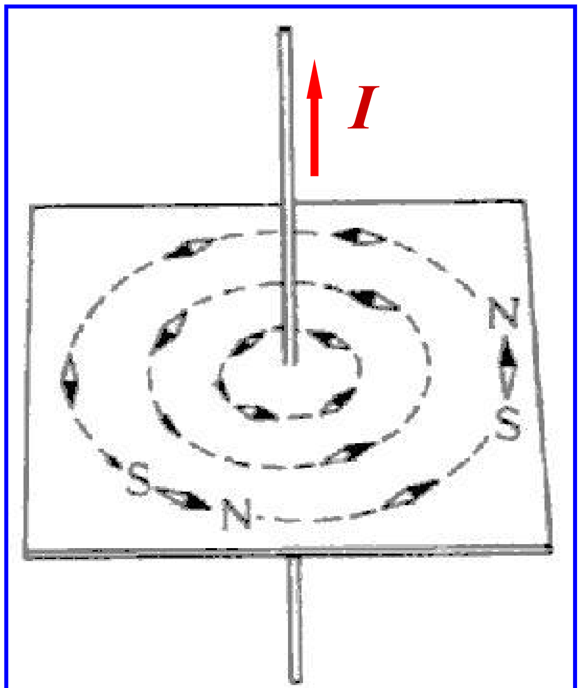
$$v = \omega r$$

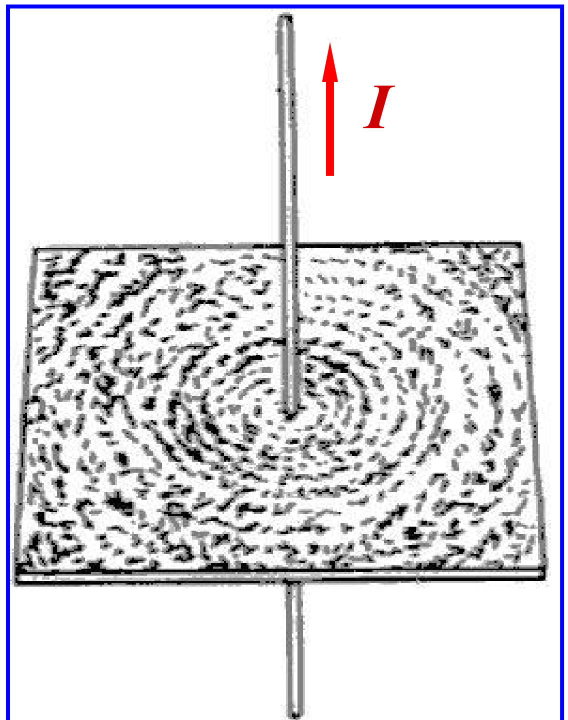
$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

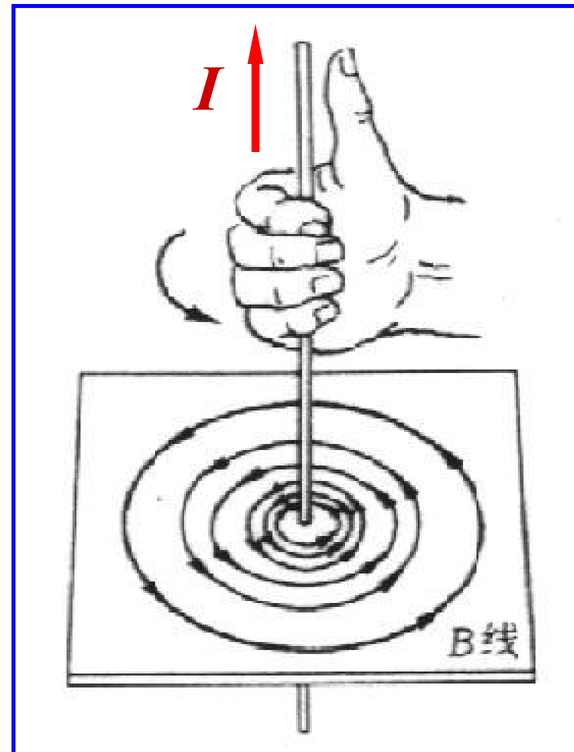
8-4 磁场的高斯定理和安培环路定理

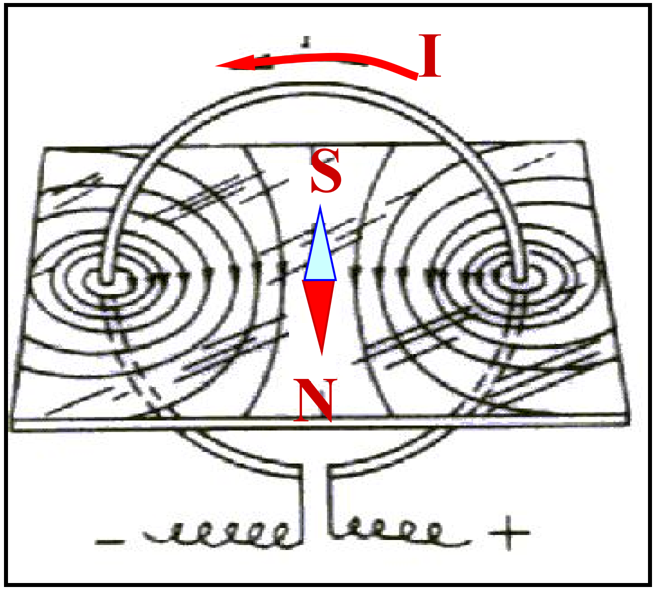
一 、磁 感 线

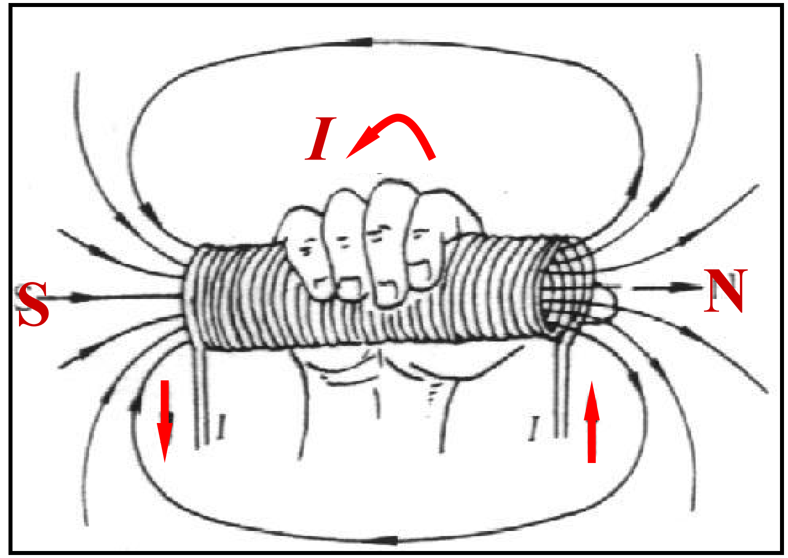
规定：曲线上每一点的切线方向就是该点的磁感强度 B 的方向，曲线的疏密程度表示该点的磁感强度 B 的大小.





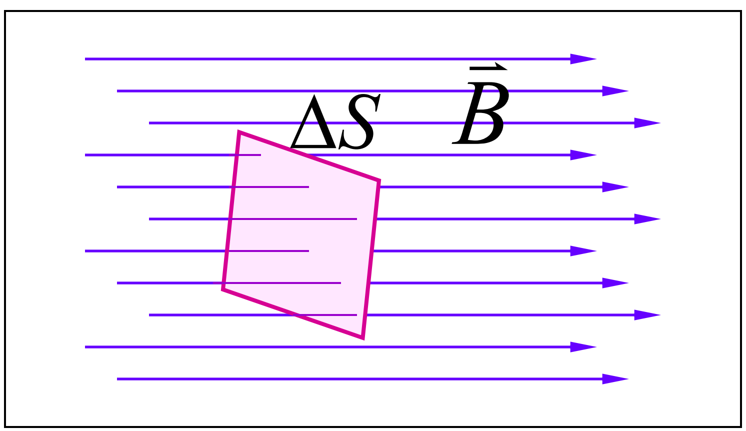




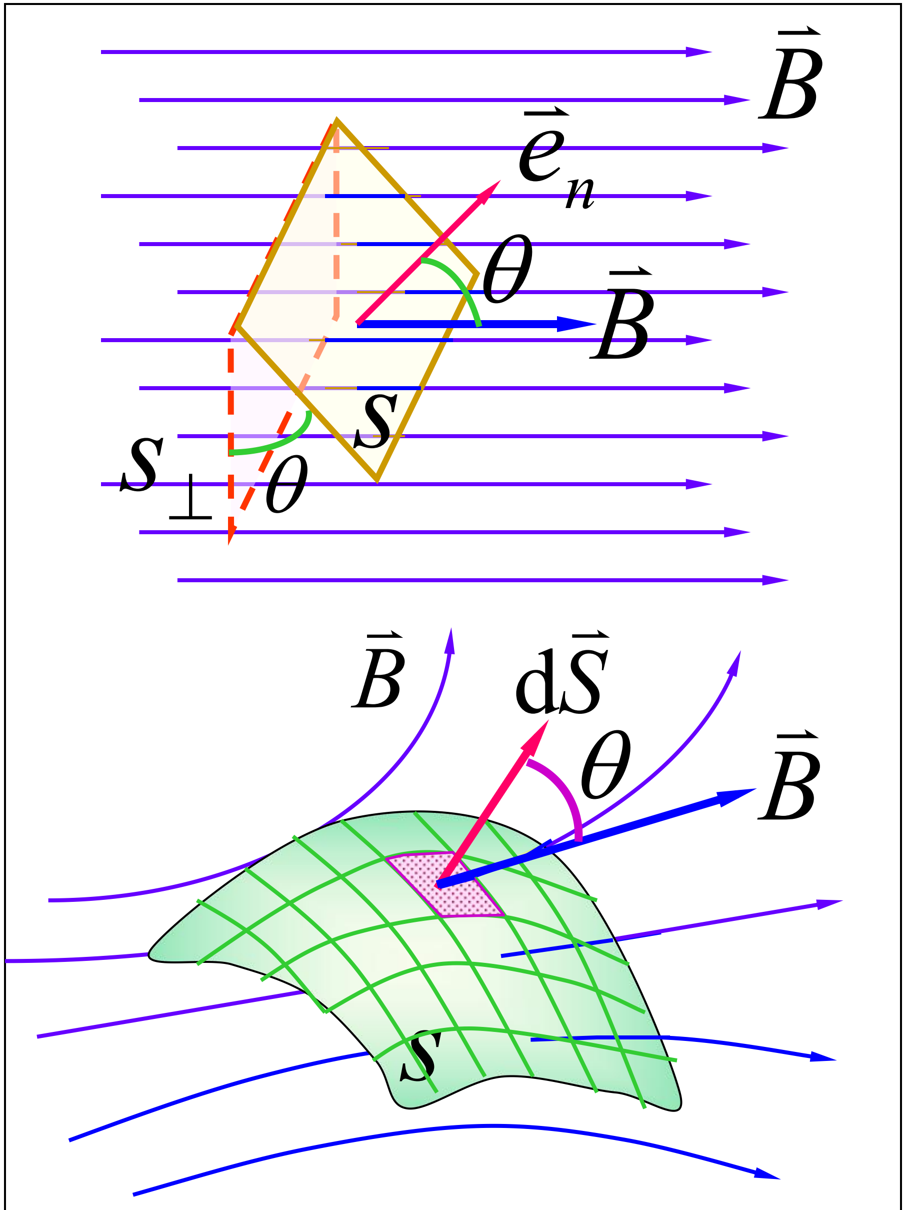


二 、磁通量　磁场的高斯定理

$$B = \frac{\Delta N}{\Delta S}$$



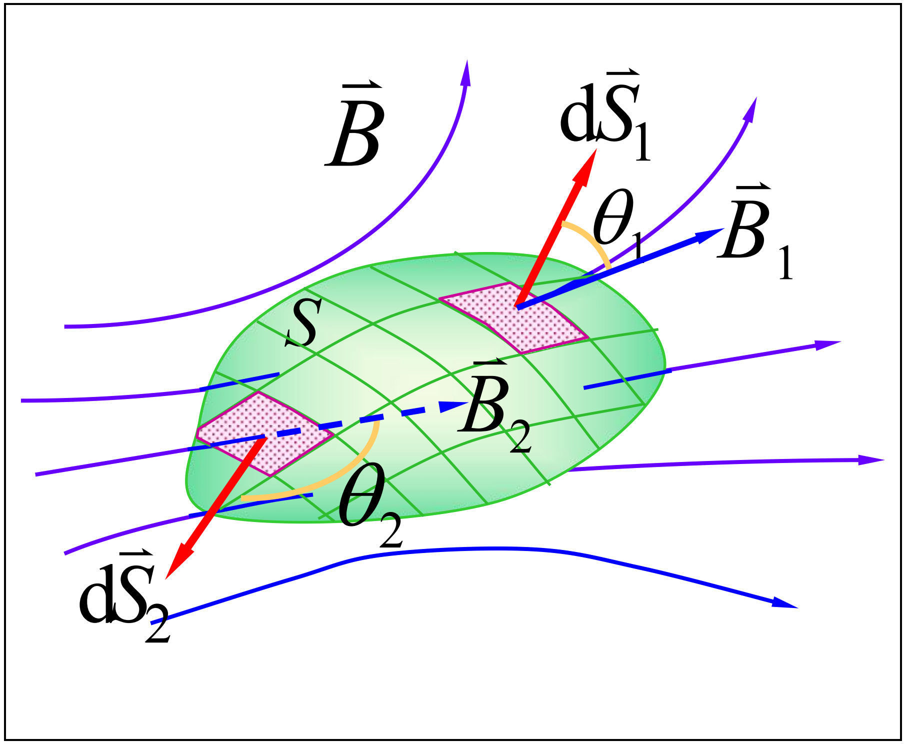
磁场中某点处垂直 $\vec{B}$ 矢量的单位面积上通过的磁感线数目等于该点 $\vec{B}$ 的数值.



磁通量：通过某一曲面的磁感线数为通过此曲面的磁通量.

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

单位 $1\mathrm{Wb} = 1\mathrm{T} \times 1\mathrm{m}^2$



$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\oint_S B\cos\theta \mathrm{d}S = 0$$

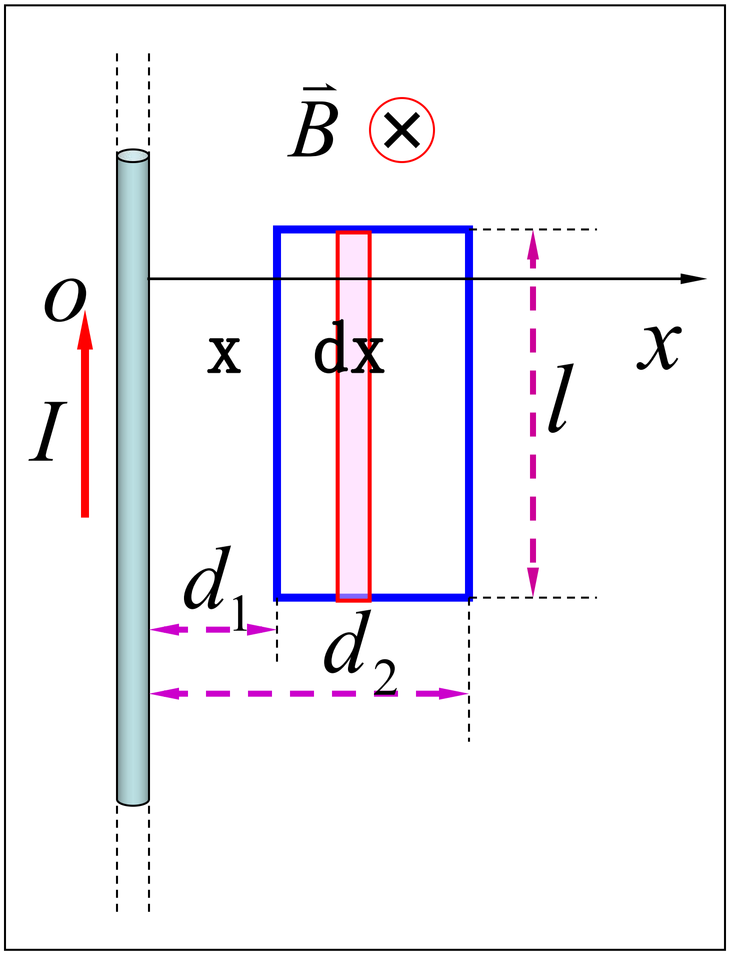
- 磁场高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

- 物理意义：通过任意闭合曲面的磁通量必等于零

（故磁场是无源的.）

例7 如图载流长直导线的电流为 I ， 试求通过矩形面积的磁通量.



解 先求 $\vec{B}$ ，对变磁场给出 $\mathrm{d}\Phi$ 后积分求 Φ

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \vec{B} // \vec{S}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

三、安培环路定理

载流长直导线的磁感强度为$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$

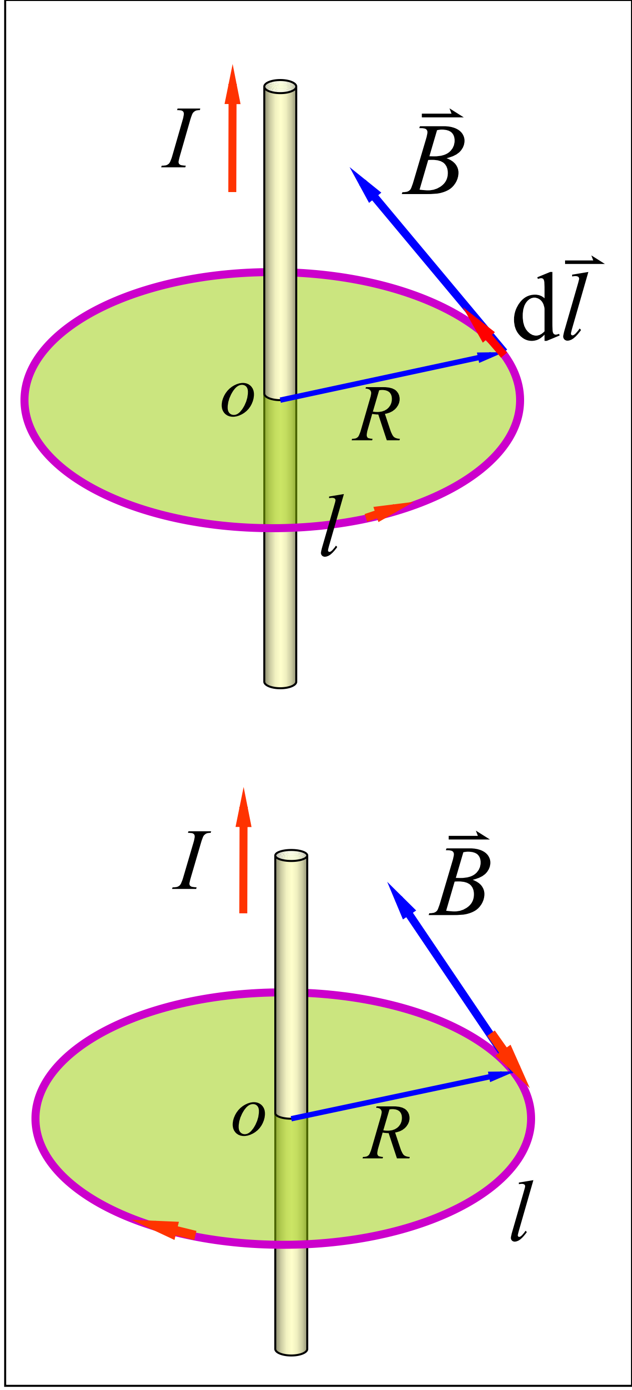
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

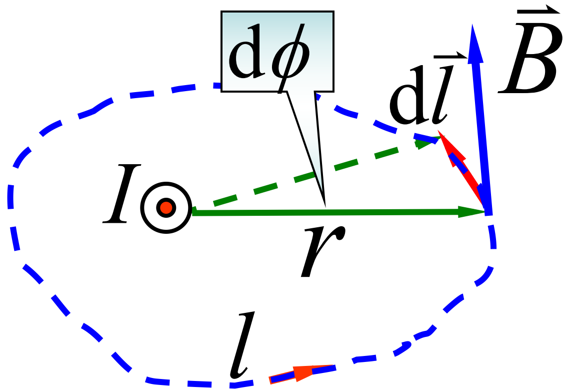
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_l \mathrm{d}l=\boldsymbol{\mu_0 I}$$

设闭合回路 l 为圆形回路（l 与 I 成右螺旋）

若回路绕向化为逆时针时，则

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\mu_0 I$$



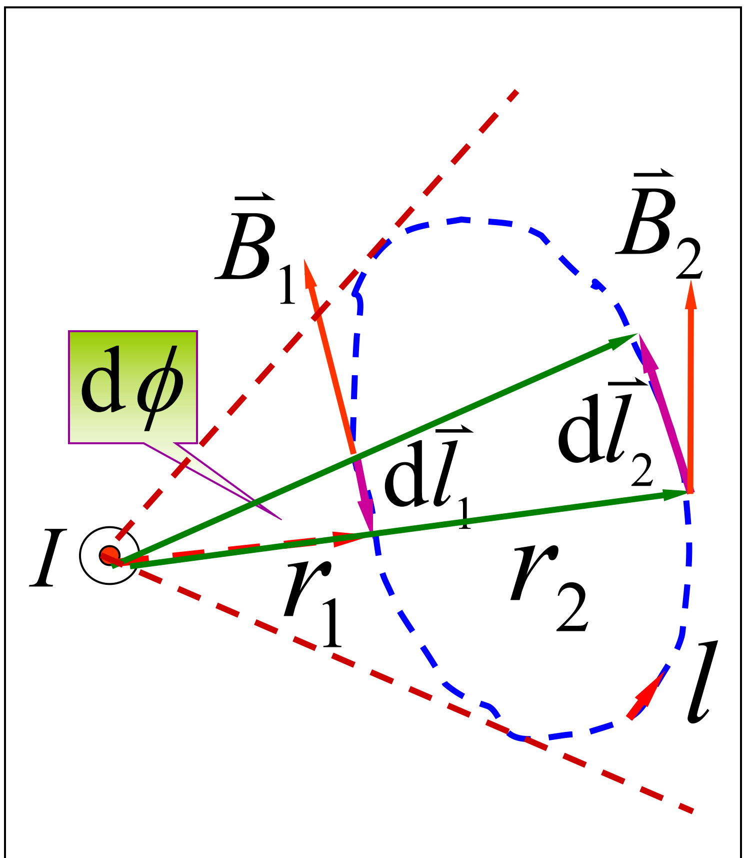


l 与 I 成右螺旋

对任意形状的回路

$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$



电流在回路之外

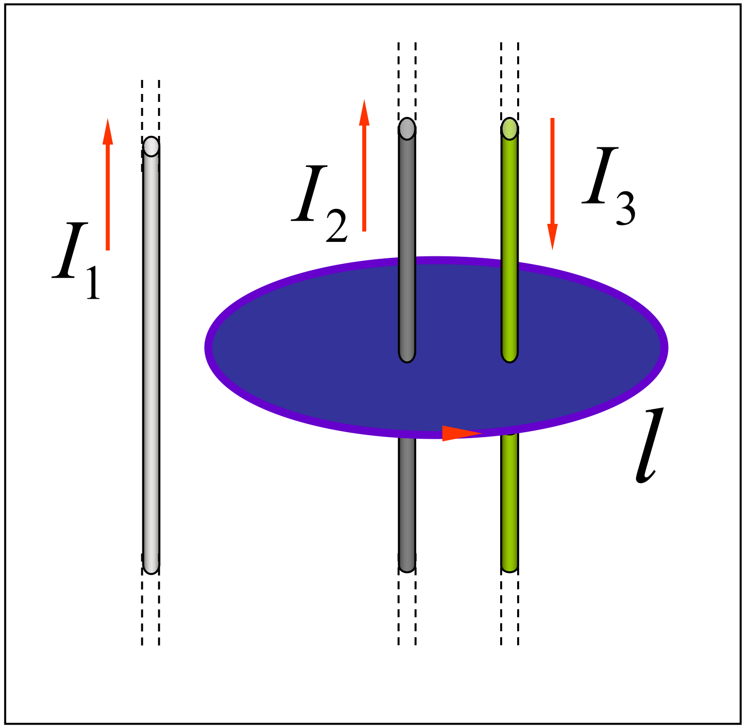
$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1},\quad B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

$$\vec{B}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_1=-\vec{B}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$\vec{B}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_1+\vec{B}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2=0$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

多电流情况



$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0(I_2-I_3)$$

以上结果对**任意**形状的闭合电流（伸向无限远的电流）均成立.

➢ **安培环路定理**

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_{i=1}^{n} I_i$$

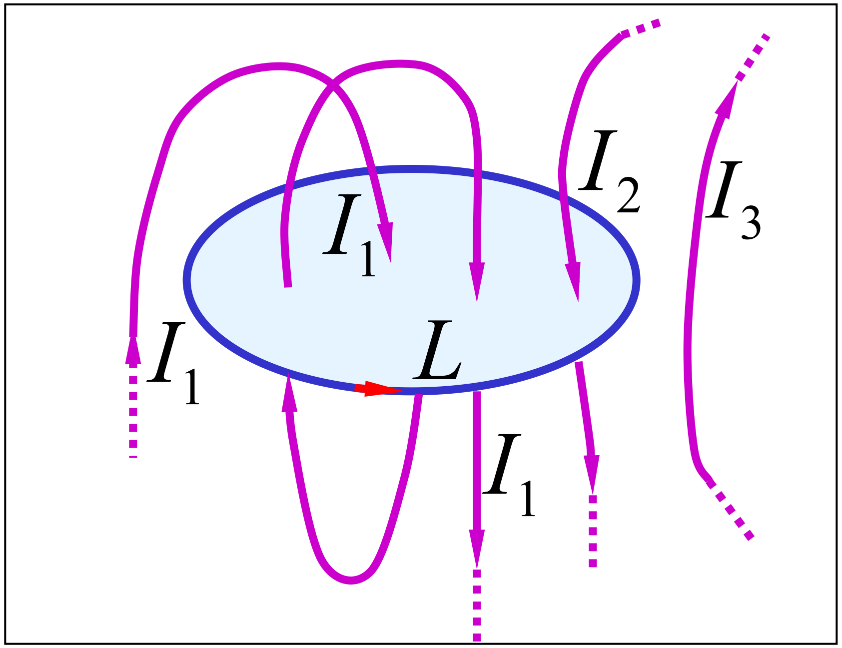
即在真空的稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任一闭合路径的积分的值，等于 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和.

注意

电流 I 正负的规定 ：I 与 L 成右螺旋时，I 为正；反之为负.

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(-I_1 + I_1 - I_1 - I_2)$$

$$= -\mu_0(I_1 + I_2)$$



问 1）$\vec{B}$ 是否与回路 L 外电流有关？ 有关

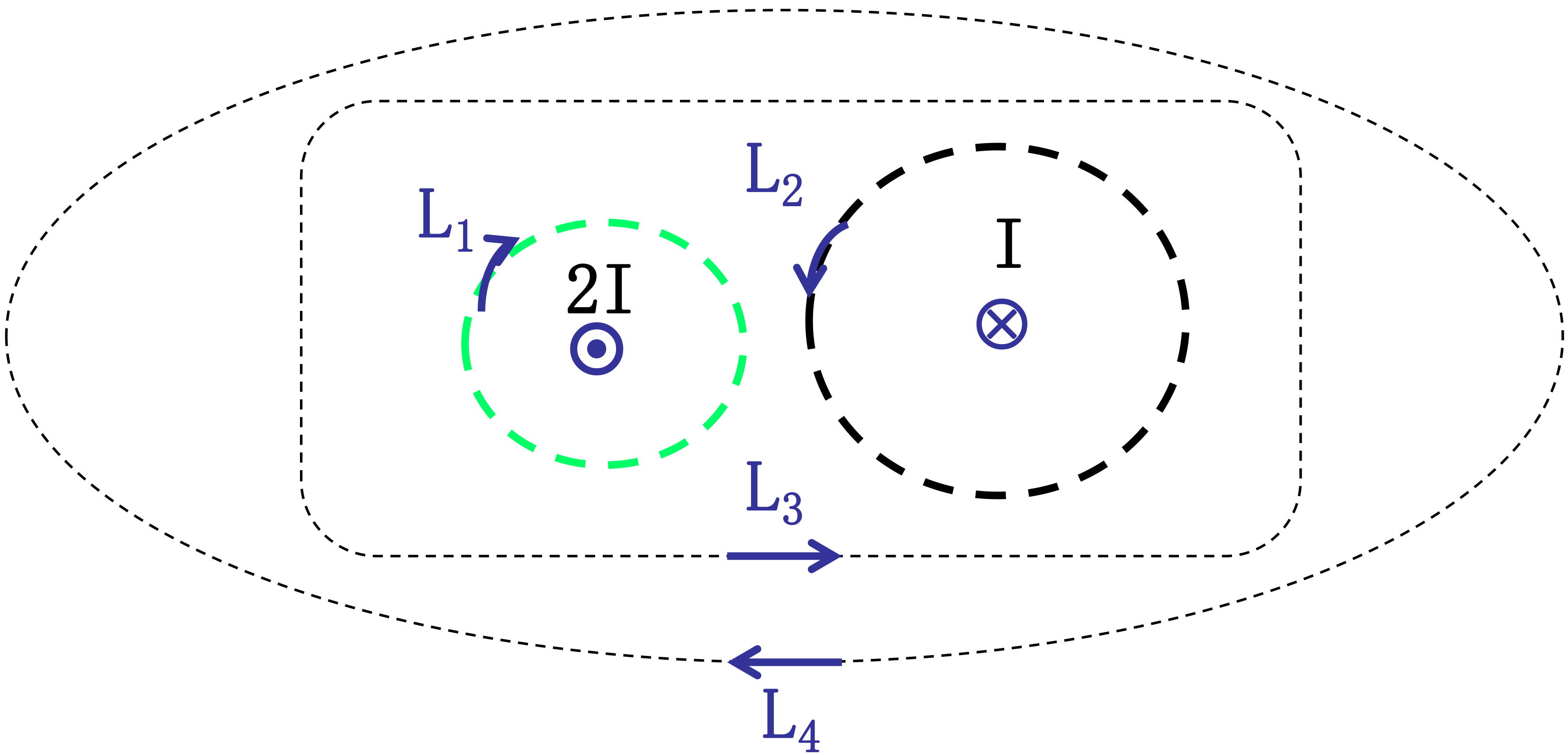
2）若 $\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$，是否回路 L 上各处 $\vec{B} = 0$？
是否回路 L 内无电流穿过？ NO

例1：下列各式正确的是

$$(A)\oint_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 2I \qquad (B)\oint_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$$

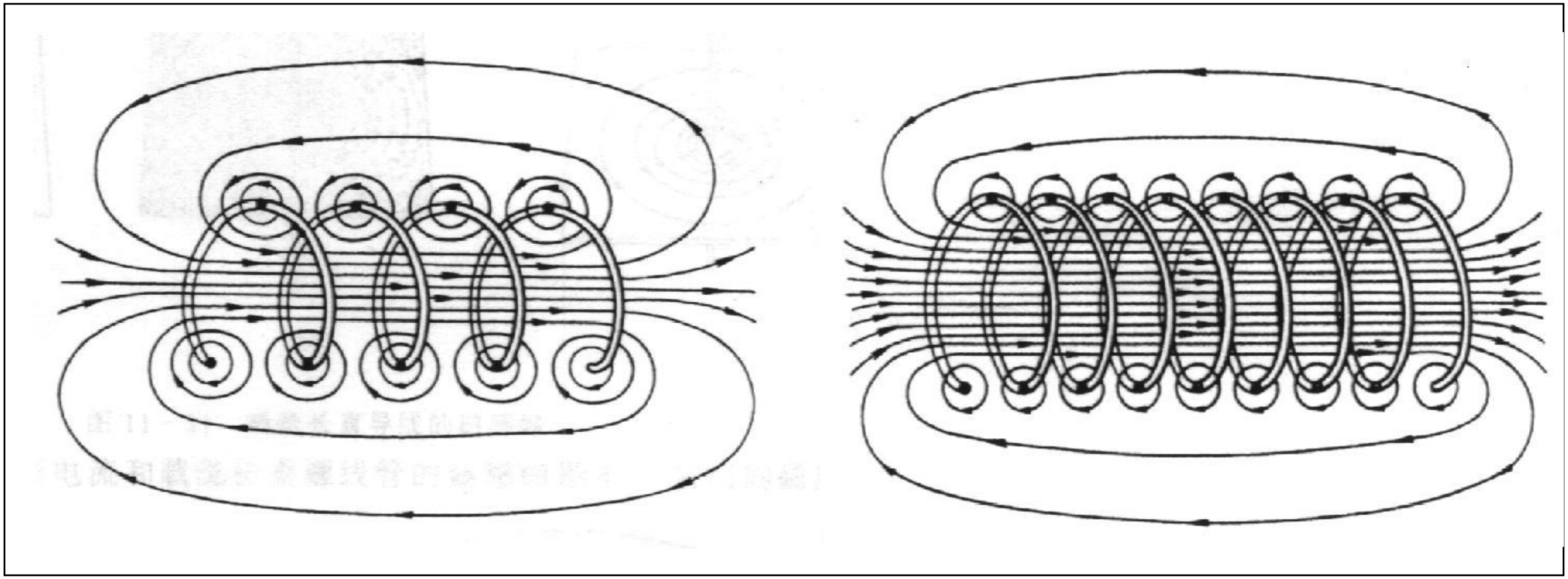
$$(C)\oint_{L_3}\vec{B}\cdot d\vec{l}=-\mu_0 I \qquad (D)\oint_{L_4}\vec{B}\cdot d\vec{l}=-\mu_0 I$$

√



四、 安培环路定理的应用举例

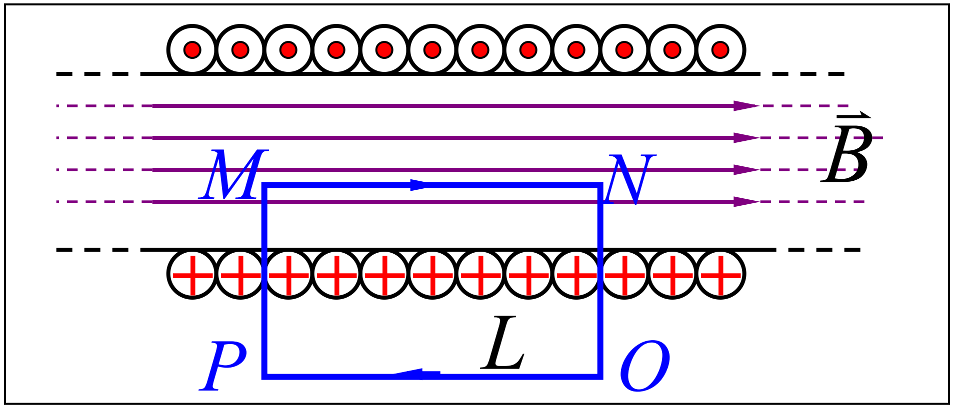
例2 求长直密绕螺线管内磁场



解 （1）对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零，即 $B \cong 0$.

2）选回路 L .

磁场 $\vec{B}$ 的方向与电流 I 成右螺旋.



$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_{NO}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{OP}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{PM}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

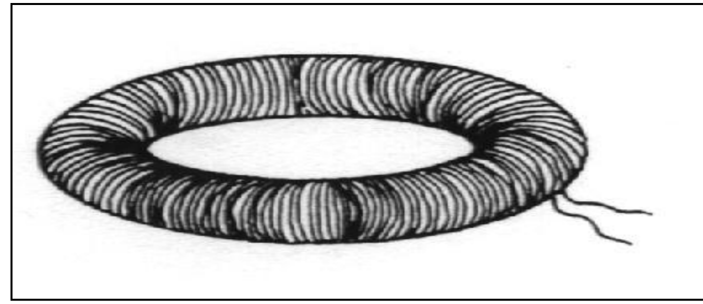
$$B\cdot \overline{MN} = \mu_0 n \overline{MN} I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

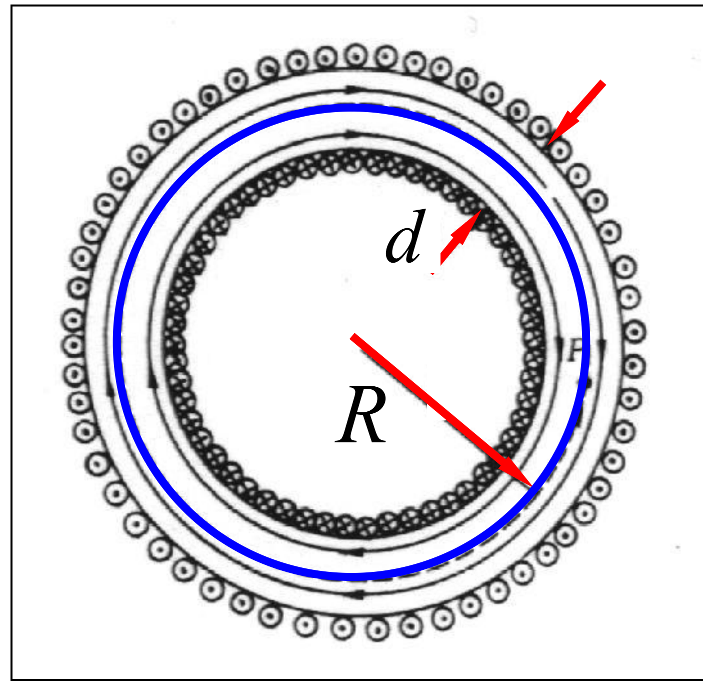
无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零.

例3　求载流螺绕环内的磁场

解　1）对称性分析；环内 $\vec{B}$ 线为同心圆，环外 $\vec{B}$ 为零.



2）选回路 .



$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi RB = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

令 $L = 2\pi R$

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{NI}{L} = \mu_0 nI}$$

当 $2R >> d$ 时，螺绕环内可视为均匀场 .

例4 无限长载流圆柱体的磁场

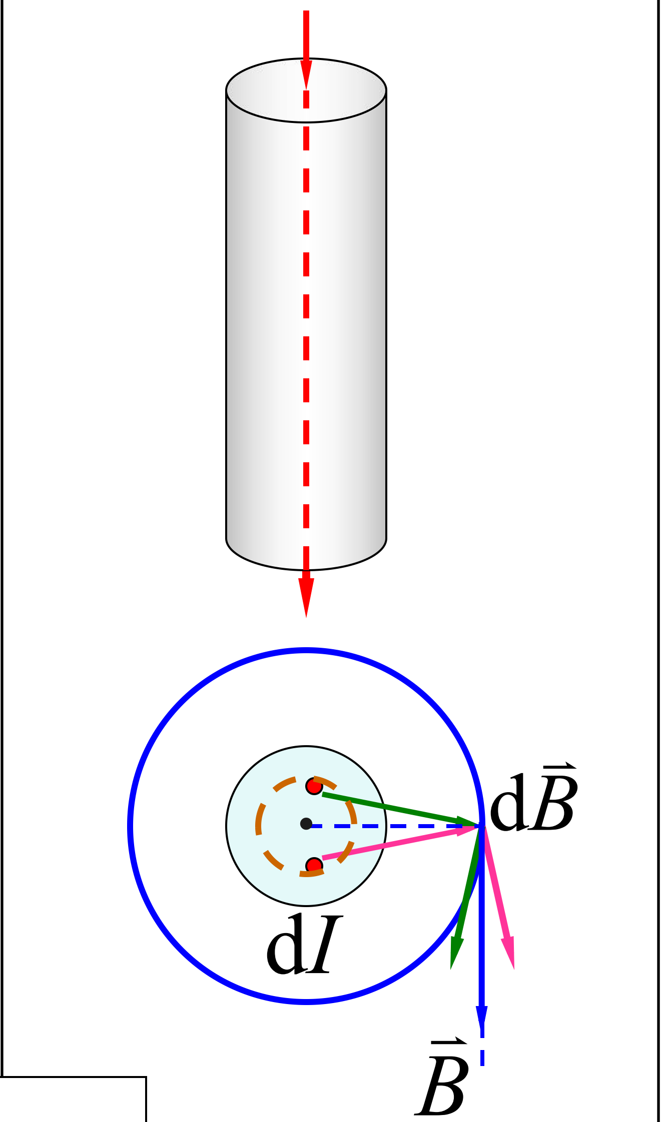
解 1）对称性分析 2）选取回路

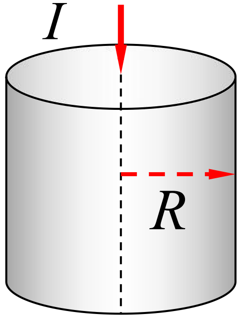
$0<r<R$ $\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\frac{\pi r^2}{\pi R^2}I$

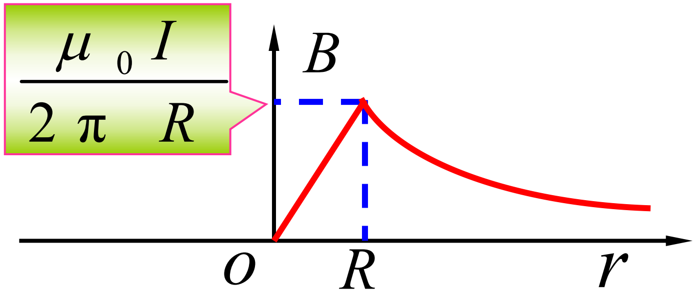
$2\pi rB=\frac{\mu_0 r^2}{R^2}I$ $B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$

$r>R$ $\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$

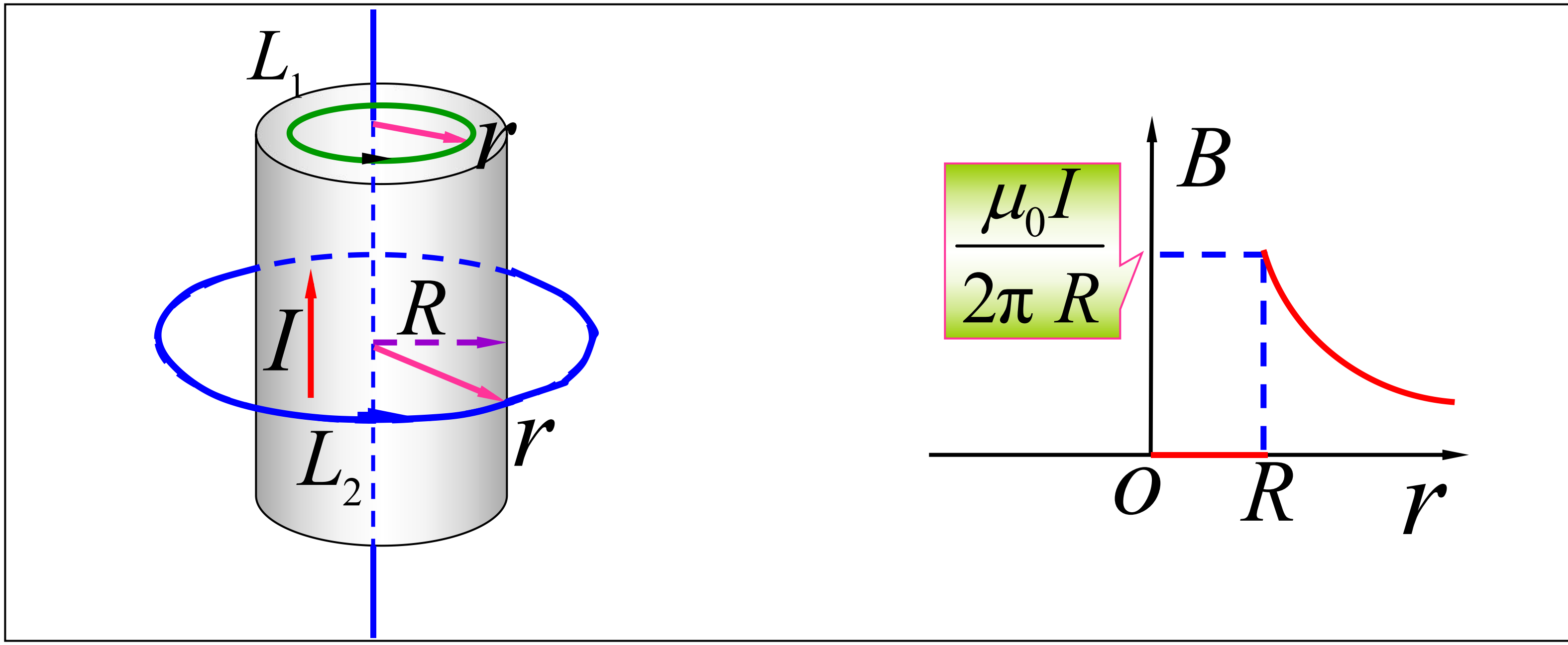
$2\pi rB=\mu_0 I$ $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$







例5 无限长载流圆柱面的磁场



解 $0<r<R,\quad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad B = 0$

$r>R,\quad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

思考：无限大载流平面？ $B = \dfrac{\mu_0 i}{2}$