华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 6 册）

班级____________学号_____________姓名_____________任课教师_____________

第十一次作业

教学内容： 5.3 利用留数计算实积分 5.4 辐角原理 6.1 Fourier 积分公式 6.2 Fourier 变换

1. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}, 0<b<a$

$= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(a+b\frac{z^2+1}{2z}\right)iz} = -2i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{2az+b(z^2+1)}$

算错极点，$\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

奇点 $\frac{a}{b}\pm 1$，在 $|z|=1$ 内的为 $\frac{a}{b}-1$ 为一级极点.

原式 $= -2i \cdot 2\pi i \, \mathrm{Res}\left[\frac{1}{2az+b(z^2+1)}, \frac{a}{b}-1\right]$

$= 4\pi \cdot \frac{1}{2a+2b\left(\frac{a}{b}-1\right)} = \frac{2\pi}{2a-b}$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$

令 $f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$. 上半平面奇点为 i，$3i$ 为一级极点.

$\therefore$ 原式 $= 2\pi i \{\mathrm{Res}[f(z), i] + \mathrm{Res}[f(z), 3i]\}$.

$= 2\pi i \left(\frac{1-i}{16i} + \frac{-7-3i}{-48i}\right) = \frac{5}{12}\pi$.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ 为~~偶函数~~，奇点，$e^{\frac{(2k+1)}{4}\pi i}$，

上半平面有一级极点，$e^{\frac{\pi}{4}i}$，$e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

$\therefore = \pi i \left\{ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{\pi}{4}i}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right] \right\}$.

$= \pi i \left(\frac{1}{4} e^{-\frac{3}{4}\pi i} + \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}\pi i} \right) = \cancel{0}\ \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx, (a>0, b>0)$

$f(z) = \frac{z}{z^2+b^2} e^{iaz}$. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$, $= 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), bi]$

$= \pi i e^{-ab}$

$\therefore$ 原式 $= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz\right] = \frac{1}{2}\pi e^{-ab}$.

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+4x+5)^2}$

二级极点.

$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), -2+i]$

$= 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{(z+2+i)^2}\right]' \Big|_{z=i-2}$

?

2 证明：方程 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在圆环域 $1 \le |z| \le 2$ 内.

设 $f(z) = 12$，$\varphi(z) = z^7 - z^3$. 均解析.

在 $|z| = 1$ 上，$|\varphi(z)| \le |z|^7 + |z|^3 = 2 < |f(z)| = 12$.

$\therefore M(z^7 - z^3 + 12, |z| \le 1) = M(12, |z| \le 1) = 0$.

$f_2(z) = z^7$ $\qquad \varphi_2(z) = -z^3 + 12$.

在 $|z| = 2$ 上，$|\varphi_2(z)| \le |z|^3 + 12 = 20 < |f(z)| = 128$

$\therefore M(z^7 - z^3 + 12, |z| \le 2) = M(z^7, |z| \le 2) = 7$.

$\therefore z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在 $1 \le |z| \le 2$ 内.

3 证明：当 $|a| > e$ 时，方程 $e^z - az^n = 0$ 在单位圆 $|z| = 1$ 内有 n 个根.

$f(z) = e^z$，$\varphi(z) = -az^n$.

在 $|z| = 1$ 上. $|\varphi(z)| = |a||z^n| = |a||z|^n = |a| > e = |f(z)|$.

$\therefore M(e^z - az^n, |z| < 1) = M(-az^n, |z| < 1) = n$.

3、 求下列函数的 Fourier 积分变换

（1） $f(t)=\begin{cases}-1 & -1<t<0 \\ 1 & 0<t<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \int_{-1}^{0} -e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} e^{-iwt}dt.$$

$$= \frac{1}{iw}e^{iw} - \frac{1}{iw}e^{-iw}$$

$$= \frac{1}{iw}(e^{iw} - e^{-iw})$$

（2） $f(t)=\begin{cases}e^{t} & t\le 0 \\ 0 & t>0\end{cases}$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-iwt}dt = \frac{1}{1-iw}e^{t(1-iw)}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{1-iw}$$

4 求下列函数的 Fourier 变换，并证明所列的积分等式

（1） $f(t)=e^{-|t|}\cos t,$ 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-iwt}\cos t\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-iw)}\cos t\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{t(-1-iw)}\cos t\,dt.$$

$\cos t \rightarrow \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$

偶函数

（2）$f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$，证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$ $=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos wt\,dt$

$$\mathscr{F}(f(t))=\int_{-\infty}^{0}e^{(\beta-iw)t}dt+\int_0^{+\infty}e^{(-\beta-iw)t}dt$$

$$=\frac{e^{(\beta-iw)t}}{\beta-iw}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{(-\beta-iw)t}}{-\beta-iw}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\beta-iw}+\frac{1}{\beta+iw}$$

$$=\frac{2iw}{\beta^2+w^2}$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{wit}+e^{-wit}}{2}dt$$

第十二次作业

教学内容：6.3 δ 函数及其 Fourier 变换；6.4Fourier 变换的性质

1．填空

（1）$f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)]$ Fourier 变换为 1 $\cos wa$?

$\frac{1}{2}(e^{iw_0t}+e^{i-w_0t})$

(2) 函数 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ 的 Fourier 逆变换为 $\cos w_0t$

（3）$f(t)=\sin t\cos t$ Fourier 变换为 $\frac{\pi i}{2}[\delta(w+2)-\delta(w-2)]$

$\frac{1}{2}\sin 2t$

2. 若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，证明

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)];\quad ①$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2i}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)].\quad ②$$

① 由 $F(w-w_0) \Leftrightarrow f(t)e^{iw_0t}$，有

$\frac{1}{2}[F(w-w_0)+F(w+w_0)] = \mathcal{F}\left[f(t)\cdot\frac{e^{iw_0t}+e^{-iw_0t}}{2}\right]$

$= \mathcal{F}[f(t)\cos w_0 t]$.

同理 ② 可证.

定义出发 拆 $\cos w_0 t$.
$\sin w_0 t$.

3. 求下列函数的 Fourier 变换

（1） $f(t)=e^{2it}\sin t$

$= F(w-2)$. 其中 $F(w) = \mathcal{F}(\sin t)$.

$\mathcal{F}(\sin t) = \pi i[\delta(w+1)-\delta(w-1)]$.

$\therefore$ 原式 $= \pi i[\delta(w-1)-\delta(w-3)]$.

$\frac{1}{2}(1-\cos 2t) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(1) - \frac{1}{2}\mathcal{F}(\cos 2t)$

（2） $f(t)=\sin^2 t$ $= \int_0^t \sin 2t \, dt$

$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{iw} F(w)$，其中 $F(w) = \mathcal{F}(\sin 2t) =$

∴原式 $= \frac{\pi}{w}[\delta(w+2) - \delta(w-2)]$ $\pi i[\delta(w+2) - \delta(w-2)]$

原式 $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(w+1) - \delta(w-1)|^2 dw = \cancel{\frac{1}{\pi}}$?

（3） $f(t)=e^{i\omega_0 t}u(t)$

令 $F(w) = \mathcal{F}(u(t))$. $= \frac{1}{iw} + \pi\delta(w)$

则有 $\mathcal{F}(f(t)) = F(w-w_0)$，$= \frac{1}{i(w-w_0)} + \pi\delta(w-w_0)$.

（4） $f(t)=e^{-\beta t}u(t)\cdot\cos\omega_0 t$

定义. $= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t} u(t) \cos w_0 t \, e^{-iwt} dt$

$= \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{\cdots}{2} e^{-iwt} dt$.

$= \cdots$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta + i(w-w_0)} + \frac{1}{\beta + i(w+w_0)}\right)$.

4 设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，$a$ 为非零常数，试证明

（1）$\mathcal{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

（2）$\mathcal{F}[f(t_0-at)]=\frac{1}{|a|}F(-\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

$\mathcal{F}(f(t-\frac{t_0}{a}))=e^{-\frac{t_0}{a}iw}F(w)$.

$\therefore \mathcal{F}(f(at-t_0))=\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})e^{-\frac{t_0}{a}iw}$

$\mathcal{F}(f(t_0-at))=-\mathcal{F}(f(at-t_0))=\frac{1}{|a|}F(-\frac{w}{a})e^{-t\frac{w}{a}t_0}$.

5 已知 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，利用 Fourier 变换的性质求下列函数的 Fourier 变换

（1）$tf(t)$

由微分性质，

$\mathcal{F}(tf(t))=iF'(w)$

（2）$(t-2)f(t)$

$\mathcal{F}(tf(t))-2\mathcal{F}(f(t))$.

令 $\varphi(t)=f(t-2)$. $\mathcal{F}(\varphi(t))=\phi(w)$.

则有 $\mathcal{F}((t-2)\varphi(t))=i\phi'(w)$.

而 $\phi(w)=e^{-2iw}F(w)$.

则 $i\phi'(w)=2e^{-2iw}F(w)+ie^{-2iw}F'(w)$.

（3）$tf'(t)$

$\mathcal{F}(f'(t)) = i\omega F(\omega)$.

$\mathcal{F}(tf'(t)) = i\frac{d}{d\omega}[i\omega F(\omega)]$

(像~~函数~~的微分性质)

（4）$f(1-t)$

$\mathcal{F}(f(1-t)) = -F(\omega)$ $F(-\omega)$

$\mathcal{F}(f(1-t)) = -e^{2\omega}F(\omega)$.

$e^{-i\omega}F(-\omega)$

6.求函数 $f(t)=\sin(5t+\frac{\pi}{3})$ 的 Fourier 变换.

$\mathcal{F}(\sin(5t)) = 5\mathcal{F}(\sin t) = 5\pi i[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$.

$\mathcal{F}(\sin(5t+\frac{\pi}{3})) = \mathcal{F}(\sin(5(t+\frac{\pi}{15})))$

$= 5\pi i e^{\frac{\pi}{15}\omega i}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$

部分习题参考答案：

第十一次作业

1．（1）$\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$，　（2）$\dfrac{5}{12}\pi$　（3）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi i$　（4）$\dfrac{1}{2}\pi e^{-ab}$　（5）$\dfrac{\pi}{e}\cos 2$

3．（1）$-\dfrac{2i}{\omega}(1-\cos\omega)$ ，（2）$\dfrac{1}{1-i\omega}$

4．（1）$F(\omega)=\dfrac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}$　（2）$F(\omega)=\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

第十二次作业

3．（1）$\mathrm{i}\pi[\delta(\omega-1)-\delta(\omega-3)]$

（2）$2\pi\delta(\omega)-\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$

（3）$\dfrac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$

（4）$\dfrac{\beta+i\omega}{(\beta+i\omega)^2+\omega_0{}^2}$

5．（2）$-\dfrac{1}{i}F'(\omega)-2F(\omega)$

（3）$-F(\omega)-\omega F'(\omega).$

（4）$e^{-i\omega}F(-\omega)$

6．$\dfrac{i\pi}{2}[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]$