华东理工大学

概率论与数理统计

第一次作业

一． 填空题：

1．设样本空间$\Omega=\{x|0\le x\le 2\}$，事件$\boldsymbol{A}=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x\le 1\right\}$，$\boldsymbol{B}=\left\{x\middle|\frac{1}{4}\le x<\frac{3}{2}\right\}$，

具体写出下列各事件：$\overline{A}B=\underline{\left\{x\middle|\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\text{或者}1<x<\frac{3}{2}\right\}}$，$\overline{A}\cup B=\underline{\Omega}$，

$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\underline{B}$，$AB=\underline{A}$。

2．设A、B、C表示三个随机事件，试将下列事件用A、B、C表示出来：

（1）事件$\underline{ABC}$表示A、B、C都发生；

(2) 事件$\underline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$表示$A$、$B$、$C$都不发生；

（3）事件$\underline{\overline{ABC}}$表示$A$、$B$、$C$不都发生；

（4）事件$\underline{A\cup B\cup C}$表示$A$、$B$、$C$中至少有一件事件发生；

（5）事件$\underline{\overline{AB\cup AC\cup BC}}$或$\underline{\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{B}\overline{C}}$表示$A$、$B$、$C$中最多有一事件发生。

3．化简事件算式$\overline{(A\cup B)}\cap(A-\overline{B})=\underline{\quad\varnothing\quad}$。

二． 选择题：

1．设$\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$，$A=\{2,3,5\}$，$B=\{3,4,5,7\}$，$C=\{1,3,4,7\}$，则事件

$\overline{A}-BC=$(A)。

A. $\{1,6,8,9,10\}$　　B. $\{2,5\}$　　C. $\{2,6,8,9,10\}$　　D. $\{1,2,5,6,8,9,10\}$

2．对飞机进行两次射击，每次射一弹，设事件$A=$“恰有一弹击中飞机”，事件$B=$“至少有一弹击中飞机”，事件$C=$“两弹都击中飞机”，事件$D=$“两弹都没击中飞机”，又设随机变量ξ为击中飞机的次数，则下列事件中(C)不表示$\{\xi=1\}$。

A. 事件A　　B. 事件$B-C$　　C. 事件$B-\overline{C}$　　D. 事件$\overline{D}-C$

3．设A、B是两个事件，且$A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，则$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$表示（ D ）。

A. 必然事件　　B. 不可能事件

C. A与B不能同时发生　　D. A与B中恰有一个发生

三． 计算题：

1．写出下列随机试验的样本空间，并把指定的事件表示为样本点的集合：

（1）随机试验：考察某个班级的某次数学考试的平均成绩（以百分制记分，只取整数）;

设事件A表示：平均得分在 80 分以上。

（2）随机试验：同时掷三颗骰子，记录三颗骰子点数之和；

设事件A表示：第一颗掷得 5 点；

设事件B表示：三颗骰子点数之和不超过 8 点。

（3）随机试验：某篮球运动员投篮练习，直至投中十次，考虑累计投篮的次数；设事件A表示：至多只要投 50 次。

解：

（1）样本空间可以表示为$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots,100\}$；事件$A=\{81,82,\cdots,100\}$。

（2）样本空间可以表示为$\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$；事件$A=\{7,8,\cdots,17\}$，$B=\{3,4,\cdots,8\}$。

（3）样本空间可以表示为$\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$；事件$A=\{10,11,12,\cdots,50\}$。

2． 某电视台招聘播音员，现有三位符合条件的女士和两位符合条件的男士前来应聘：

（1）写出招聘男女播音员各一名的样本空间；

（2）写出招聘两名播音员的样本空间。设事件A表示“招聘到两名女士”，把该事件表示为样本点的集合。

解：用W_i表示招聘了的第$i\ (i=1,2,3)$位女士，用M_j表示招聘了第$j\ (j=1,2)$位男士。

（1）$\Omega=\{W_1M_1,W_1M_2,W_2M_1,W_2M_2,W_3M_1,W_3M_2\}$。

（2）$\Omega=\{W_1M_1,W_1M_2,W_1W_2,W_1W_3,W_2M_1,W_2M_2,W_2W_3,W_3M_1,W_3M_2,M_1M_2\}$

$A=\{W_1W_2,W_1W_3,W_2W_3\}$。

3． 如果事件A与事件B互为对立事件，证明：事件$\overline{A}$与事件$\overline{B}$也互为对立事

件。

证:

由于 A 与 B 互为对立事件，故 $AB=\varnothing, A\cup B=\Omega$，因此就有 $\bar{A}\cup\bar{B}=\Omega, \bar{A}\bar{B}=\varnothing$，

所以 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也互为对立事件。

4. 化简事件算式 $(AB)\cup(A\bar{B})\cup(\bar{A}B)\cup(\bar{A}\bar{B})$。

解：$(AB)\cup(A\bar{B})\cup(\bar{A}B)\cup(\bar{A}\bar{B})=(AB\cup A\bar{B})\cup(\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B})=A\cup\bar{A}=\Omega$。

5. 证明下列等式 $(A-AB)\cup B=\overline{\bar{A}\bar{B}}$。

证明：因为

$$\overline{(A-AB)\cup B}=\overline{(A-AB)}\bar{B}=\left(\overline{A\overline{AB}}\right)\bar{B}=\left(\bar{A}\cup AB\right)\bar{B}$$
$$=\left(\bar{A}\bar{B}\right)\cup\left(AB\bar{B}\right)=\left(\bar{A}\bar{B}\right)\cup\varnothing=\bar{A}\bar{B}$$

所以：$(A-AB)\cup B=\overline{\bar{A}\bar{B}}$。

6．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为两个事件，若 $\boldsymbol{AB}=\bar{\boldsymbol{A}}\cap\bar{\boldsymbol{B}}$，问 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有什么关系？

解： $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为对立事件。

第二次作业

一．填空题：

1. 10 个螺丝钉有 3 个是坏的，随机抽取 4 个。则恰好有两个是坏的概率是 0.3 ，4 个全是好的概率是 0.1667 。
2. 把 12 本书任意地放在书架上，则其中指定的 4 本书放在一起的概率 $\frac{9!4!}{12!}=\frac{1}{55}$。
3. 袋中装有编号为 $\mathbf{1,2,\cdots,n}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 个球，每次从中任意摸一球。若按照有放回方式摸球，则第 $\boldsymbol{k}$ 次摸球时，首次摸到 1 号球的概率为 $\frac{(\boldsymbol{n}-1)^{k-1}}{\boldsymbol{n}^k}$。若按照无放回方式摸球，则第 $\boldsymbol{k}$ 次摸球时，首次摸到 1 号球的概率为 $\frac{1}{\boldsymbol{n}}$。

二． 选择题：

1. 为了减少比赛场次，把 20 个球队任意分成两组（每组 10 队）进行比赛，则

最强的两个队被分在不同组内的概率为(B)。

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{10}{19}$　C. $\frac{5}{19}$　D. $\frac{1}{10}$

2. 从一副扑克牌(52 张)中任取 4 张,4 张牌的花色各不相同的概率(C)。

A. $\frac{1}{13}$　B. $\frac{13}{C_{52}^4}$　C. $\frac{13^4}{C_{52}^4}$　D. $\frac{13^4}{52\times51\times50\times49}$

3. 进行一系列独立的实验，每次试验成功的概率为 p, 则在第二次成功之前已经失败了 3 次的概率为（ A ）。

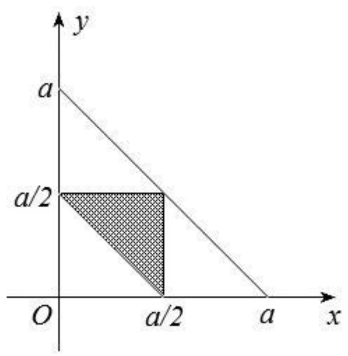
A. $4p^2(1-p)^3$　B. $4p(1-p)^3$　C. $10p^2(1-p)^3$　D. $p^2(1-p)^3$

三. 计算题：

1. 将长为 a 的细棒折成三段，求这三段能构成三角形的概率。

解：设三段分别为 $x, y, a-x-y$，样本空间 $\Omega:(0<x<a)\bigcap(0<y<a)\bigcap(x+y\le a)$ 能构成三角形须满足(图中阴影部分)

$$\begin{cases} x+y>a-x-y \\ y+a-x-y>x \\ a-x-y+x>y \\ 0<x<a, 0<y<a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y>\frac{a}{2} \\ 0<x<\frac{a}{2} \\ 0<y<\frac{a}{2} \end{cases}$$



故这三段能够成三角形的概率为 $\frac{1}{4}$.

2. 同时掷五颗骰子，求下列事件的概率：

（1） A=“点数各不相同”;

（2） B=“至少出现两个 6 点 ”;

（3） C=“恰有两个点数相同”;

（4） D=“某两个点数相同，另三个同是另一个点数”;

解：（1）　$P(A)=\frac{P_6^5}{6^5}$；

（2）$P(B)=1-\frac{5^5}{6^5}-5\times\frac{5^4}{6^5}$；

（3）$P(C)=\frac{C_5^2\times 6\times 5\times 4\times 3}{6^5}=\frac{25}{54}$；

（4）$P(D)=\frac{C_5^2\times 6\times 5}{6^5}=\frac{25}{648}$；

3. 将 10 根绳的 20 个头任意两两相接，求事件 A={恰结成 10 个圈}的概率。

解:

$$P(A)=\frac{20!!}{20!}=\frac{1}{19!!}$$

4. 在区间（0，1）中随机地取两个数，求两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率。

解：样本空间为$\Omega=\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$，

记$A=\left\{(x,y)\middle|(x,y)\in\Omega,|x-y|<\frac{1}{2}\right\}$，

$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{3}{4}$。

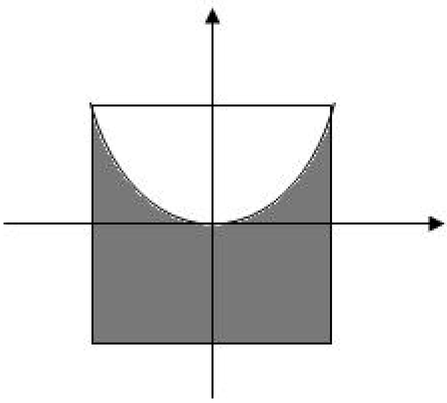
5. 在正方形$D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$中任取一点，求使得关于$u$的方程

$u^2+xu+y=0$有（1）两个实根的概率 ；（2）有两个正根的概率。

解：（1）方程有两个实根，要求$x^2-4y\ge 0$，即点的坐标满足：

$\{(x,y)|(x,y)\in D,x^2-4y\ge 0\}$，见如图阴影部分。因此概率为：

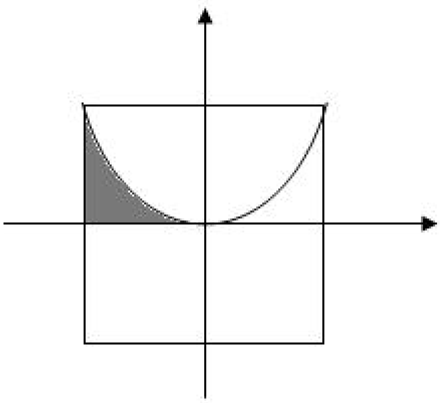
$$P=\frac{S_{阴}}{S_D}=\frac{2+2\times\int_0^1\frac{x^2}{4}dx}{4}=\frac{13}{24}$$



（2）方程有正根，要求 $\dfrac{-x\pm\sqrt{x^2-4y}}{2}>0$，也就是要求 $x<0, y>0$。

因此点的坐标满足 $\{(x,y)|(x,y)\in D, x^2-4y\ge 0,\ x<0, y>0\}$，见图阴影部分。因此概率为：

$$P=\frac{S_{阴}}{S_D}=\frac{\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{4}dx}{4}=\frac{1}{48}。$$



6. n 个人随机地围绕圆桌就座，试问其中 A 、B 两人的座位相邻的概率是多少？

解：$P\{\text{A, B两人座位相邻}\}=\begin{cases}\dfrac{2}{n-1} & n\ge 3\\ 1 & n=2\end{cases}$。

7. 一部五卷的选集，按任意顺序放在书架上，求：
(1) 各卷自左至右或者自右至左的卷号顺序恰为 1,2,3,4,5 的概率；
(2) 第一卷及第五卷分别在两端的概率；
(3) 第一卷及第五卷都不在两端的概率。

解： （1） $P=\frac{2}{5!}=\frac{1}{60}$；

（2） $P=\frac{2!3!}{5!}=\frac{1}{10}$；

（3） $P=\frac{P_3^2 3!}{5!}=\frac{3}{10}$。