华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第三册）

学　院 ____________ 专　业 ____________ 班　级 ____________
学　号 ____________ 姓　名 ____________ 任课教师 ____________

第 5 次作业

一．填空题：

1．设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，则 $P\{\xi \geq a\} = \underline{1-F(a-0)}$，

$P\{\xi = a\} = \underline{F(a)-F(a-0)}$

2. 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Ax^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

则常数 $A = \underline{\quad 1 \quad}$，$P\{0.5 \leq \xi \leq 0.8\} = \underline{\quad 0.39 \quad}$

二．选择题：

1. 下列表述为错误的有（C）
   A．分布函数一定是有界函数　B. 分布函数一定是单调函数
   C．分布函数一定是连续函数　D. 不同的随机变量也可能有相同的分布函数

2. 设概率 $\boldsymbol{P(X > x_1) \geq \beta}$，$\boldsymbol{P(X \leq x_2) \geq \alpha}$，且 $\boldsymbol{x_1 < x_2}$，则 $\boldsymbol{P(x_1 < X \leq x_2)}$（ C ）

(A) $\leq \alpha + \beta - 1$；　　(B) $\leq 1 - (\alpha + \beta)$；

(C) $\geq \alpha + \beta - 1$；　　(D) $\geq 1 - (\alpha + \beta)$。

三．计算题：

1．设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \leq x < 1 \\ 1/3, & 1 \leq x < 3 \\ 1/2, & 3 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

试求 $P(\xi<3)$， $P(\xi\le 3)$， $P(\xi>1)$， $P(\xi\ge 1)$

解：由公式 $P(\xi=x)=F(x)-F(x-0)$,得

$$P(\xi<3)=F(3-0)=\frac{1}{3},$$

$$P(\xi\le 3)=F(3)=\frac{1}{2},$$

$$P(\xi>1)=1-F(1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

$$P(\xi\ge 1)=1-F(1-0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

3．已知随机变量 $\boldsymbol{\xi}$ 只能取-2，0，2，4 四个值，概率依次为 $\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{c}}{3},\frac{\boldsymbol{c}}{4},\frac{\boldsymbol{c}}{6}$,求常数 $\boldsymbol{c}$，并计算 $P(\xi<1|\xi>-1)$

解：利用规范性，有 $\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{c}}{3}+\frac{\boldsymbol{c}}{4}+\frac{\boldsymbol{c}}{6}=\mathbf{1}\Rightarrow \boldsymbol{c}=\frac{4}{5}$.

因此 $\boldsymbol{P(\xi}=-2\boldsymbol{)}=\frac{2}{5},\boldsymbol{P(\xi}=0\boldsymbol{)}=\frac{4}{15},\boldsymbol{P(\xi}=2\boldsymbol{)}=\frac{1}{5},\boldsymbol{P(\xi}=4\boldsymbol{)}=\frac{2}{15},$

$$P(\xi<1|\xi>-1)=\frac{P\{(\xi>-1)\bigcap(\xi<1)\}}{P(\xi>-1)}=\frac{P(\xi=0)}{P(\xi=0)+P(\xi=2)+P(\xi=4)}=\frac{4}{9}.$$

4．一批产品，其中有 9 件正品，3 件次品。现逐一取出使用，直到取出正品为止，求在取到正品以前已取出次品数的分布律、分布函数。

解：分布律：

X	0	1	2	3
p_k	3/4	9/44	9/220	1/220

分布函数：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 3/4, & 0\le x<1\\ 21/22, & 1\le x<2\\ 219/220, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$.

5. 设连续随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}ax, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 (1) 常数a;

(2) X 的分布函数;

(3) $P(0.5 \le X \le 1.5)$.

（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^1 axdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$ **得** $a = 1$.

（2）当 $x < 0$**时，** $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt = 0$;

当 $0 \le x < 1$**时，** $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x tdt = 0.5x^2$;

当 $1 \le x < 2$**时，** $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = 2x - 0.5x^2 - 1$;

当 $x \ge 2$**时，** $F(x) = 1$.

所以 X **的分布函数为**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5x^2, & 0 \le x < 1, \\ 2x - 0.5x^2 - 1, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

（3） $P(0.5 \le X \le 1.5) = F(1.5) - F(0.5) = 0.75$

第 6 次作业

一. 填空题：

1. 若随机变量$\xi \sim U[1,6]$,则方程$x^2 + \xi x + 1 = 0$有实根的概率为<u>**0.8**</u>

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} Ax^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，则 A =__3__

3. 设离散型随机变量ξ的分布函数为

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{x} < -10 \\ 0.7 & -10 \le \boldsymbol{x} < 0 \\ 1 & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{cases}$$

则ξ的分布律为<u>$P(\xi = -10) = 0.7$, $P(\xi = 0) = 0.3$</u>

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$$

则分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^{3/2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

二. 选择题：

1．在下列函数中，可以作为随机变量的概率密度函数的是（A ）

A. $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}2e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

2．下列表述中不正确有（A，D）

A. $F(x)$为离散型随机变量的分布函数的充要条件是$F(x)$为阶梯型函数

B. 连续型随机变量的分布函数一定是连续函数

C. 连续型随机变量取任一单点值的概率为零

D. 密度函数就是分布函数的导数

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}K(4x-2x^2), & 1<x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

则 K=（ **C** ）。

A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

三. 计算题

1. （柯西分布）设连续随机变量ξ的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x \qquad -\infty<x<+\infty$$

求：（1）系数A及B；

(2) 随机变量ξ落在区间$(-1,1)$内的概率；

（3）随机变量ξ的概率密度。

解: (1) 按照分布函数的定义,有

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}A+B\arctan x=A-\frac{\pi}{2}B=0,$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}A+B\arctan x=A+\frac{\pi}{2}B=1,$$

得 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$.

(2) $P(-1<\xi<1)=P(-1<\xi\le 1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$.

(3) $p(x)=F'(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x\right)'=\frac{1}{\pi(x^2+1)},-\infty<x<+\infty$

2．学生完成一道作业的时间X是一个随机变量，单位为小时，它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}cx^2+x & 0\le x\le 0.5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（1） 确定常数c；

（2） 写出X的分布函数；

（3） 试求在20 min 内完成一道作业的概率；

（4） 试求10 min 以上完成一道作业的概率。

解:

(1)利用规范性,有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^{0.5}(cx^2+x)dx=\frac{c}{24}+\frac{1}{8}\Rightarrow c=21.$$

(2)当$x<0$时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$,

当$0\le x<0.5$时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_0^x(21t^2+t)dt=7x^3+\frac{1}{2}x^2$,

当$x\ge 0.5$时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_0^{0.5}(21t^2+t)dt=1$,

综上所述,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 7x^3+\frac{1}{2}x^2, & 0\le x<0.5,\\ 1, & x\ge 0.5.\end{cases}$$

(3) $P\left(0<\xi\le\frac{1}{3}\right)=F(\frac{1}{3})-F(0)=\frac{17}{54}$.

(4) $P\left(\xi>\frac{1}{6}\right)=1-F(\frac{1}{6})=\frac{103}{108}\quad(or\int_{1/6}^{1/2}(21x^2+x)dx=\frac{103}{108})$

3. 袋内有 5 个黑球 3 个白球,每次抽取一个不放回,直到取得黑球为至。记 Y 为抽取次数，求 Y 的概率分布及至少抽取 3 次的概率。

解： (1) Y 的可能取值为 1，2，3，4

P(Y=1)=5/8，

P(Y=2)=3/8×5/7=15/56，

P(Y=3)= 3/8×2/7×5/6=5/56，

P(Y=4)= 3/8×2/7×1/6=1/56。

所以 Y 的概率分布为

Y	1	2	3	4
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

(2) P(Y⩾3)=P(Y=3)+P(Y=4)=6/56=3/28

4. 某种灯具的寿命ξ具有概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{x^2}, & x>10\\ 0, & x\le 10\end{cases}$$

任取三只这种灯具，问 150 小时内，三只灯具全部完好的概率是多少？又问 150 小时内，至少有两只损坏的概率又是多少？

解： 设 $\boldsymbol{p}$ 表示 150 小时内，一只灯具完好的概率，$\boldsymbol{\eta}$ 表示损坏灯具的个数，

$$p=P\{\xi<150\}=\int_{10}^{150}\frac{10}{x^2}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{10}{x}\bigg|_{10}^{150}=\frac{14}{15}$$

$$P\{\eta=0\}=\left(\frac{1}{15}\right)^3\approx 0.0003$$

$$P\{\eta\ge 2\}=C_3^2\left(\frac{14}{15}\right)^2\cdot\frac{1}{15}+\left(\frac{14}{15}\right)^3\approx 0.987$$

5. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ae^{-\lambda|x|}$， $\lambda>0$， $-\infty<x<+\infty$。

求系数a和分布函数$F(x)$。

解：由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}ae^{-\lambda|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty}ae^{-\lambda x}dx=\dfrac{2a}{\lambda}$ 可得 $a=\dfrac{\lambda}{2}$。

故 $f(x)=\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$， $\lambda>0$， $-\infty<x<+\infty$。

由于 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$，

当 $x<0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda t}dt=\frac{1}{2}e^{\lambda x}$；

当 $x\geq 0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda t}dt+\int_{0}^{x}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}$。

所以，

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$