第四章 无穷级数

- 复数项级数与复函数项级数
- 解析函数的泰勒展开
- 罗朗级数

§ 4.1复数项级数

1. 复数列的极限

设 $\{c_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是复数列, 其中, $c_n=a_n+ib_n$ $(a_n, b_n\in R)$ $(n=1,2,\cdots)$, $c=a+ib$ 为一确定的复数。

若对 $\forall\varepsilon>0$, 总存在自然数N 使当 $n>N$ 时,

成立 $$|c_n-c|<\varepsilon$$

则称 复数列$\{c_n\}$收敛，并称c为 数列$\{a_n\}$ 当$n\to\infty$时的极限。

记为 $$\lim_{n\to\infty}c_n=c$$

若数列$\{c_n\}$不收敛, 则称 $\{c_n\}$ 发散。

和实数列极限的关系：

由于 $$|c_n - c| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}$$

所以， $$|a_n - a| \le |c_n - c| \le |a_n - a| + |b_n - b|$$

$$|b_n - b| \le |c_n - c| \le |a_n - a| + |b_n - b|$$

于是有：

定理1　复数列$\{c_n\} = \{a_n + ib_n\}\ (n = 1, 2, \cdots)$收敛于$c = a + ib$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b。$$

例1　讨论数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}\right\}$ 的敛散性,若收敛,求出极限。

解: $c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}+i\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}=1,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}=0$

所以数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}\right\}$ 收敛,且极限为1。

例2　判别数列 $c_n = e^{-\frac{n\pi}{2}i}\ (n = 1,2,\cdots)$ 的敛散性。

解：$c_n = \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ 不存在

所以数列 $\{c_n\}$ 发散。

2. 复数项级数

设 $\{c_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是复数列, 则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$$

为复数项级数。 其前 n 项和

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = S_n$$

称为级数的部分和.

若部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛,

并且 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 称为级数的和;

若数列 $\{S_n\}$ 不收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散。

定理2 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛的充要条件是

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛$(c_n = a_n + b_n, n = 1,2,\cdots)$。

定理3 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$。

例3 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$的敛散性。

解:因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数发散。

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 为**绝对收敛**；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 为**条件收敛**。

定理4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 必收敛。

定理5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛的**充要条件**是 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 都收敛。

例4 判别下列级数是否收敛？是否是绝对收敛？

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right] \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$$

解：(1) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 都收敛，所以原级数收敛。

但因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛，所以原级数为条件收敛。

(2) 因为 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!}$，

由正项级数比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 绝对收敛。

§4.2 复变函数项级数

一、复变函数项级数

设 $\{f_n(z)\}\ (n=1,2,\cdots)$ 是定义在区域 D 上的复变函数列，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

为复函数项级数.

其前 n 项和

$$S_n(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z)$$

称为级数的部分和.

若 $z_0 \in D$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0) = S(z_0)$, 称 z_0 为复函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收敛点, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = S(z_0)$。

收敛点的集合称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收敛域。

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 发散, z_0 称为级数的发散点。

发散点的集合称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的发散域。

若 $\forall z \in D$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, 称级数在 D 内处处收敛, 称 $S(z)$ 为级数的和函数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$$

二、幂级数

1. 定义

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (1)$$

称为幂级数 ($a_i, i=1,2,\cdots$ 为复常数)。

令 $z_0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots \quad (2)$$

定理(*Abel* 定理) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = z_0 \ (\neq 0)$ 处收敛, 则此级数在 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛; 若在 $z = z_0$ 处发散, 则级数在 $|z| > |z_0|$ 内发散。

2. 幂级数的收敛半径及收敛圆

幂级数的收敛情况：

(1) 对 $\forall x>0$, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在复平面上处处绝对收敛;

(2) 除 $z=0$ 外, 对 $\forall z=x>0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在复平面上除原点外处处发散;

(3) 既存在 $x_1>0$ 使 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=x_1$ 处收敛, 又存在 $x_2>0$ 使 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=x_2$ 处发散, 显然有, $x_1<x_2$, 且在 $|z|\le x_1$ 内级数处处收敛, 在 $|z|\ge x_2$ 内级数发散。

存在 $R>0$, $x_1<R<x_2$, 使得当 $|z|<R$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 绝对收敛; 当 $|z|>R$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 发散。

R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径, $|z|<R$ 称为收敛圆。

注意: 在 $|z|=R$ 上, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 可能收敛, 也可能发散。

3. 收敛半径的求法

(1) 比值法

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, 则收敛半径 $R = \dfrac{1}{L}$。

(2) 根值法

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$, 则收敛半径 $R = \dfrac{1}{L}$。

特别, 当 $L = 0$ 时, $R = +\infty$; $L = \infty$ 时, $R = 0$。

注:(1) 上述方法适应于不缺项的幂级数。对于缺项的情况, 可用正项级数的比值法或转化为不缺项级数求;

(2) 一般幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 的收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$,

收敛圆为 $|z-z_0|=R$。

例1　求下列幂级数的收敛半径:

① $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

解: (1) $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 $z=0$、2 的情形)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

当 $z=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛;

当 $z=2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数, 发散。

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n$

$$a_n=\cos(in)=\frac{1}{2}(e^n+e^{-n})$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{e^{n+1}+e^{-(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n(1+e^{-2n})}{e^n(e+e^{-2n-1})}=\frac{1}{e}$$

例2 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$ 的收敛范围与和函数.

解：级数实际上是等比级数，部分和为

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, (z \neq 1)$$

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \quad (|z| < 1)$$

即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 内的和函数为 $\dfrac{1}{1-z}$。

当 $|z| \geq 1$ 时，级数发散。

所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 绝对收敛，并有

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$$

4. 幂级数的性质

(1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = f(z)$, 收敛半径为 R_1　$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = g(z)$, 收敛半径为 R_2

则在 $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ 内:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n) z^n = \lambda_1 f(z) + \lambda_2 g(z)$$

λ_1, λ_2 为复常数

(2) 幂级数的和函数在其收敛圆内是解析函数;

(3) 幂级数在其收敛圆内可逐项求导或逐项积分,即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{m=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$\int_0^z \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z a_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

且逐项求导或逐项积分后,收敛半径不变。

§4.3 解析函数的泰勒展开

问题：幂级数的和函数在其收敛圆内解析，那么，解析函数能否用一个幂级数表示？

1. 解析函数的泰勒展开

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则对 $\forall z_0 \in D$ 及 $U(z_0,\delta) \in D$，都有

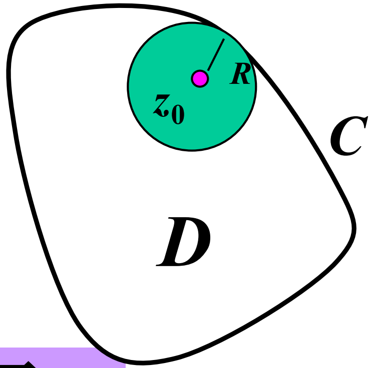
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad (|z-z_0|<\delta)$$

且展开式唯一。

上式称为 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒展开式，该幂级数称为泰勒级数。

推论1 设 $f(z)$ 在 D 内解析, $z_0 \in D$, $C = \partial D$, $R = \min\limits_{z \in C} |z - z_0|$,

则当 $|z - z_0| < R$ 时



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

即 $f(z)$ 在 z_0 处所展开的幂级数的收敛半径等于 z_0 到 ∂D 的最短距离。

推论2 $f(z)$ 在 D 内解析的充要条件是

$f(z)$ 在 $\forall z_0 (\in D)$的邻域内均可展开为 $(z - z_0)$的幂级数。

注： 函数$f(z)$在区域D解析的**充要条件**：

(1)函数$f(z)$在区域D内可导；

(2)u,v在区域D内可微，且满足$C-R$条件；

(3) $f(z)$ 在 $\forall z_0 \in D$均可展开幂级数。

2. 将函数展开成泰勒级数的方法

(1) 直接法 利用定理求 $f^{(n)}(z_0)$ 代入即可。

一些初等函数的泰勒展式

例 求 e^z、$\sin z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展式。

解： $f(z)=e^z$ 在 C 解析, $f^{(n)}(z)=e^z$, $f^{(n)}(0)=1$

于是 $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad (|z|<\infty)$$

$f(z)=\sin z$ 在 C 内解析, $f^{(n)}(z)=\sin(z+\frac{n\pi}{2})$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \quad (|z|<+\infty)$$

例　求 $f(z)=(1+z)^{\alpha}$ (α 为复数)的主值支：

$$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)},\quad f(0)=1$$

在 $z=0$ 处的泰勒展式。

解：由于 $f(z)$ 在从 -1 起向左沿负实轴剪开的复平面内解析，因此必能在 $|z|<1$ 内展开成 z 的幂级数

$$f'(z)=\alpha e^{\alpha\ln(1+z)}\frac{1}{1+z}=\alpha e^{(\alpha-1)\ln(1+z)}$$

$$f''(z)=\alpha(\alpha-1)e^{(\alpha-2)\ln(1+z)}$$

$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\ln(1+z)}$$

于是有

$$f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^{n}+\cdots\quad(|z|<1)$$

(2) 间接展开

利用基本展开公式及幂级数的代数运算、代换逐项求导或逐项积分等将函数展开成幂级数。

常用的基本展开式：

(i) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (|z| < +\infty)$

(ii) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (|z| < +\infty)$

(iii) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < +\infty)$

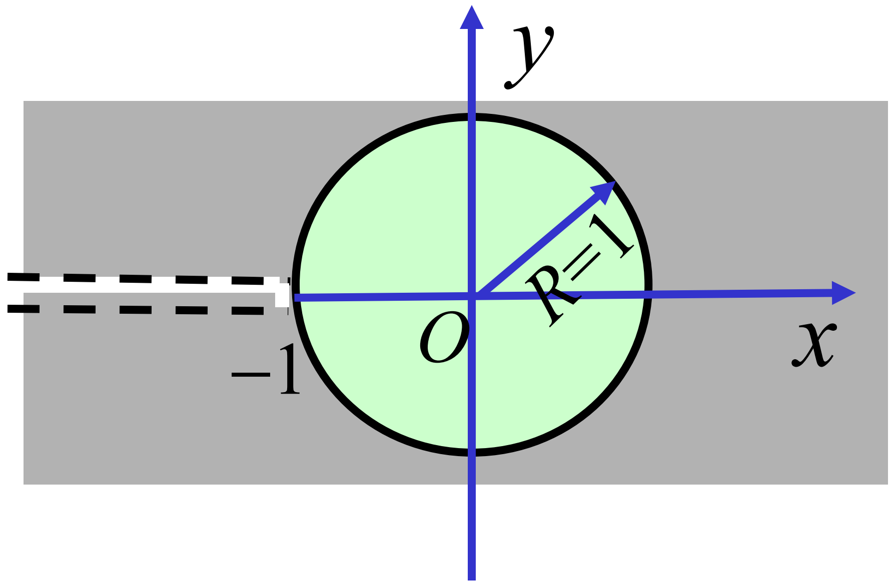
(iv) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$

(v) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$

(vi) $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \quad (|z| < 1)$

例　将 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 展开成幂级数。

解：　因为



ln(1+z)在从−1向左沿负实轴剪开的平面内是解析的，−1是它的奇点，所以可在|z|<1展开为z的幂级数.

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad (|z|<1)$$

所以　$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+z}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z (-1)^n z^n dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} z^{n+1} \quad (|z|<1)$$

常用的基本展开式：

(i) $$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad (|z|<+\infty)$$

(ii) $$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \quad (|z|<+\infty)$$

(iii) $$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} \quad (|z|<+\infty)$$

(iv) $$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (|z|<1)$$

(v) $$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad (|z|<1)$$

(vi) $$(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n \quad (|z|<1)$$

例　将函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $z=0$ 展开成幂级数。

解：由于函数有一奇点 $z=-1$, 而在 $|z|<1$ 内处处解析, 所以可在 $|z|<1$ 内展开成 z 的幂级数.

因为 $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,\quad |z|<1.$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}\quad(|z|<1)$$

例　将 $f(z)=\dfrac{1}{2z-3}$ 分别展开为 z 和 $z-1$ 的幂级数，

并求其收敛半径。

解：(1) $$\frac{1}{2z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}z^n$$

$\because\ \left|\dfrac{2z}{3}\right|<1\quad\therefore\ |z|<\dfrac{3}{2}$　收敛半径 $R=\dfrac{3}{2}$

(2) $$\frac{1}{2z-3}=-\frac{1}{1-2(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-1)^n$$

$\because\ |2(z-1)|<1\quad\therefore\ |z-1|<\dfrac{1}{2}$　收敛半径 $R=\dfrac{1}{2}$

例　将 $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^2}$ 展开为 $z-1$ 的幂级数。

解：$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}=\frac{1}{[3+(z-1)]^2}=\frac{1}{9}\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^{-2}$$

利用公式

$$(1+z)^{\alpha}$$

$$=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)z^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots \quad (|z|<1)$$

$$\frac{1}{(z+2)^2}=\frac{1}{9}(1-2\frac{z-1}{3}+2\cdot3\cdot\frac{(z-1)^2}{2!\cdot3^2}-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{(z-1)^3}{3!\cdot3^2}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{9}(1-\frac{2}{3}(z-1)+\frac{(z-1)^2}{3}-\frac{4(z-1)^3}{27}+\cdots)$$

$$\left|\frac{z-1}{3}\right|<1 \quad 即 \quad |z-1|<3$$

例　将 $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$ 展开为 z 的幂级数。

解：　因 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, 故展开后的幂级数在 $|z|<1$ 内收敛。

已知　$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad (|z|<+\infty) \qquad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (|z|<1)$$

则　$$\frac{e^z}{1-z}=1+\left(1+\frac{1}{1!}\right)z+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)z^2+\cdots$$

$$+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)z^n+\cdots \quad (|z|<1)$$

思考练习：　将 $e^z\cos z$ 展开为 z 的幂级数。

§4.4 洛朗级数

问题：当 $f(z)$ 在 z_0 不解析时，$f(z)$ 在解析区域 $0<|z-z_0|<R$ 或在 $r<|z-z_0|<R$ 内是否可以展开成幂级数？

1. 洛朗(*Laurent*)级数

例 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，当 $0<|z-1|<1$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-(z-1)^{-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

洛朗级数:既有正方幂项同时又有负方幂项的级数

一般形式:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$= \cdots + a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

正方幂项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

负方幂项级数 $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$

标准形式：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

规定：

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 均收敛。

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域为 $|z| < R$,

以下求 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ 的收敛域：

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \overset{\text{令}\xi = z^{-1}}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\xi^n$$

$$= a_{-1}\xi + a_{-2}\xi^2 + \cdots + a_{-n}\xi^n + \cdots$$

设其收敛半径为 r_1，即级数在 $|\xi| < r_1$ 收敛，亦即

$|\frac{1}{z}| < r_1$，$|z| > \frac{1}{r_1} \overset{\Delta}{=} r$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ 收敛。

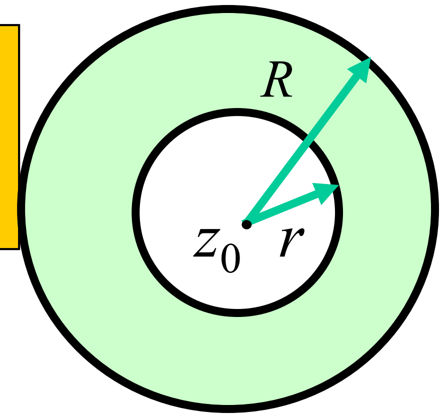
当 $r < R$ 时，两级数的公共收敛范围是 $r < |z| < R$，

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 在 $r < |z| < R$ 上收敛。

当 $r > R$ 时，两级数无公共收敛范围，

此时 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 处处发散；

洛朗级数的收敛域为圆环域：$r<|z|<R$
或 $r<\left|z-z_0\right|<R$



特殊情形：$r=0,\ R=+\infty$

洛朗级数在其收敛圆环内可逐项求导、逐项积分，且其和函数在收敛圆环内解析。

2. 解析函数的洛朗展开

定理　设 $f(z)$ 在 $r<|z-z_0|<R$ 内处处解析，则 $f(z)$ 在 $r<|z-z_0|<R$ 内可以展开成洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

并且展式唯一，其中, $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n = 0,\pm 1,\cdots$

C 为圆环内绕 z_0 的任一条简单正向闭曲线。

说明: 若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 则当 $n \le -1$ 时, $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析, 从而在 C 所包含的区域内解析, 由柯西积分公式有: $a_n = 0\ (n \le -1)$, 洛朗级数变为泰勒级数。

展开方法:

利用基本展开公式以及逐项求导、逐项积分、代换将函数展开为洛朗级数。

例 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

$(1)\ 0<|z|<1,\quad (2)\ 1<|z|<2$

$(3)\ 2<|z|<+\infty,\quad (4)\ 0<|z-1|<1$

解：(1) $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$

由于 $|z|<1$, 从而 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

于是 $f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots\quad (0<|z|<1)$$

(2) 由于 $1<|z|<2$, 从而 $\left|\frac{1}{z}\right|<1,\ \left|\frac{z}{2}\right|<1$

所以 $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\quad(1<|z|<2)$$

(3) 当 $2<|z|<\infty$ 时, 从而 $\left|\frac{2}{z}\right|<1,\ \left|\frac{1}{z}\right|<1$

所以 $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}\quad(|z|>2)$$

(4) 由 $0<|z-1|<1$ 知, 展开的级数形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-1)^n$

所以 $$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

说明:

利用 $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (|z|<1)$ 将函数 $f(z)=\frac{c}{az+b}$ 展开,关键是将 $f(z)$ 变形使之出现 $\frac{1}{1-w}$ (w是关于z的因式 $|w|<1$)因式,且 w 与圆环域的中心与半径有关。

例 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)^2}$ 在 $0<|z-2|<1$ 内展开成洛朗级数。

解：由于

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{1-(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n \quad (|z-2|<1)$$

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\frac{1}{z-3}\right)'=-\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-1}$$

所以 $$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-2}$$

例 将 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}e^{z}$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

解： 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内

$$\frac{1}{1-z}e^{z}=-\frac{e}{z-1}e^{z-1}$$

$$=-e\frac{1}{z-1}\left[1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z-1)^n}{n!}+\cdots\right]$$

$$=-e\left[\frac{1}{z-1}+1+\frac{z-1}{2!}+\cdots+\frac{(z-1)^{n-1}}{n!}+\cdots\right]$$

$$=-\frac{e}{z-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-1}\quad(0<|z-1|<+\infty)$$

例 求 $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1}$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内的洛朗级数。

解：在 $0<|z-1|<+\infty$ 内

$$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$$

注意：

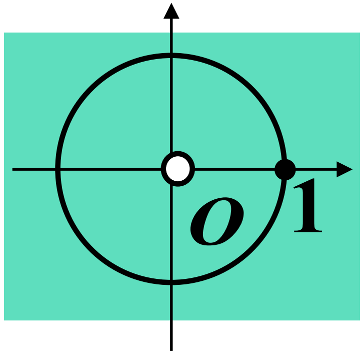
给定函数 $f(z)$ 与复平面内一点 z_0 后，由于这个函数可以在以 z_0 为中心的（由奇点隔开）不同圆环内解析，所以各不同圆环内有不同的展开式，但在同一圆环内，展开式唯一。

例 计算积分 $\oint_C ze^{\frac{1}{z}}dz$ 其中C: $|z|=1$ 正向

解 $ze^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 不解析 在 $|z|>0$ 洛朗级数

$$ze^{\frac{1}{z}} = z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\ldots\right) = z+1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\ldots$$

因此 $$\oint_C ze^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2} = 2\pi i\cdot a_{-1} = \pi i$$



例 计算 $\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}}dz$

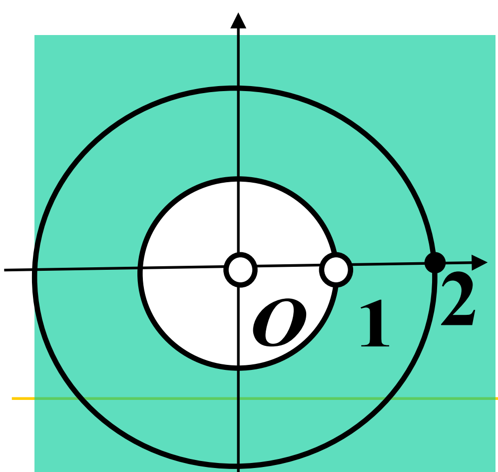
解 被积函数在 $z=0, z=1$ 不解析　在 $|z|>1$ 洛朗级数

$$\frac{1}{|z|}<1 \qquad \frac{z}{1-z}=-\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots$$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots$$

$$\frac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}}=-1-\frac{2}{z}+\cdots \qquad a_{-1}=-2$$

$$\oint_{|z|=2}\frac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\,a_{-1}=-4\pi i$$



例　求积分$\mathrm{I}=\oint_{|z|=2}\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)dz$.

解:$\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^{-n}\quad\left(1<|z|<+\infty\right)$

$$\Rightarrow a_{-1}=1\quad\Rightarrow \mathrm{I}=2\pi i.$$

本章主要题型及方法

(1) 讨论复数列的敛散性

讨论其实部数列和虚部数列的敛散性

(2) 讨论复级数的敛散性

(a) 讨论其实部级数和虚部级数的敛散性

(b) 有些级数，若通项 c_n 不趋于0 $(n \to \infty)$，则该级数发散

(c) 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 的收敛性判别 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性

(3) 将函数展开成幂级数

采用间接展开法，熟记 e^z、$\dfrac{1}{1+z}$、$\dfrac{1}{1-z}$、$\sin z$、$\cos z$ 等一些常用函数的幂级数展开式

(4) 将函数展开成洛朗级数

思考练习：

将$f(z)=\dfrac{1}{z-5}$展开为洛朗级数，圆环域为

（1）$0<|z-3|<2$;　(2) $2<|z-3|<+\infty$;

(3)$0<|z-1|<4$;　(4) $4<|z-1|<+\infty$.