华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第八册）

学　院 ____________ 专　业 ____________ 班　级 ____________
学　号 ____________ 姓　名 ____________ 任课教师 ____________

第十五次作业

一. 选择题：

1. 设随机变量ξ的概率分布律为

ξ	-1　0	0　-1	1　0	2　3
P	0.2	0.1	0.3	0.4

则$\eta=\xi^2-1$的分布函数$F(y)$为（C）。

A、$F(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ 0.1, & -1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$　　B、$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 0.1, & 1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<3,\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$

C、$F(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ 0.1, & -1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<3,\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$　　D、$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 0.1, & 1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<4,\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$

$x=\frac{y+1}{3}$

2. 设随机变量ξ密度函数为$p(x)$，则$\eta=3\xi-1$的密度函数$p_\eta(y)$为（A）。

A、$\frac{1}{3}p(\frac{y+1}{3})$　　B、$3p(\frac{y+1}{3})$　　C、$\frac{1}{3}p(3(y+1))$　　D、$3p(\frac{y-1}{3})$

3. 设随机变量ξ密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases},$$

$(0,2)$

则$\eta=\xi^2$的密度函数$p_\eta(y)$为（D）。

A、 $p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}y, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　B、 $p_\eta(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

C、 $p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{y}}, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　D、 $p_\eta(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立，且 $\xi\sim P(\lambda)$ ，$\eta\sim P(\lambda)$ ，则下列（ B ）不成立。

A． $P\{\xi+\eta=1\}=2\lambda e^{-2\lambda}$　　B． $P\{\xi+\eta=0\}=e^{-\lambda}$

C． $E(\xi+\eta)=2\lambda$　　D． $D(\xi+\eta)=2\lambda$

$\frac{1}{6}$ · --- $\xi=2(y-1)$

二. 填空题：

1. 已知随机变量 $\xi\sim U(-2,4)$,设 $\eta=\frac{\xi}{2}+1$，则 η 的概率密度为 $p_\eta(y)=$ $\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\le y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$。

2. 已知随机变量 $\xi\sim N(0,1)$, $\eta=2\xi-5$，则 η 的概率密度为 $p_\eta(y)=$ $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+5)^2}{8}}$。

$\frac{y+5}{2}$

3. 已知随机变量 $\xi\sim N(0,1)$, $\eta=e^{\xi}$，则 η 的概率密度为 $p_\eta(y)=$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,y}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$。

$\ln y$

4. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立，且 $\xi\sim B(2,0.4)$ ，$\eta\sim B(3,0.4)$ ，　则 $\xi+\eta$ 服从参数为 (5,0.4) 的二项分布。

$np=2$

$np(1-p)=1.2$

三. 计算题

1. 已知随机变量 $\xi\sim U[0,2]$，求 $\eta=\xi^2$ 的概率密度。

$p(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le\xi\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　　$\xi=\sqrt{\eta}$.

$p(\eta)=\frac{1}{2}\frac{d\sqrt{\eta}}{d\eta}=\frac{1}{4\sqrt{\eta}}$.

$\because \xi\in[0,2]$.

$\therefore \eta\in[0,4]$.

$\therefore p(\eta)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{\eta}}, & 0\le\eta\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

2. 设随机变量 X 的概率分布为：

X	1	2	3	…	n	…
P	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

求 $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$ 的概率分布。

当 $x=2k$ 时，$Y=\sin(k\pi)=0$.

当 $x=4k+1$ 时 $Y=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$.

当 $x=4k-1$ 时 $Y=-1$

$\therefore p(Y=0)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\frac{1}{3}$

$p(Y=1)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{k}=\frac{8}{15}$

$p(Y=-1)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{16}\right)^{k}=\frac{2}{15}$.

$\therefore$

Y	-1	0	1
p(Y)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

3. 已知随机变量$\xi \sim N(0,1)$，求$\eta = |\xi|$的概率密度。

~~由$p(\xi)$为偶函数，~~

~~则$p(\eta) = p(\xi)$~~ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$y<0$时，$F_\eta(y) = P\{|\xi| < y\} = 0$.

$y>0$时，$F_\eta(y) = P\{-y \le \xi \le y\} = 2\Phi(y) - 1$.

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, & y \ge 0 \end{cases}$$

4. 设$\xi \sim U(0,1)$，求$\eta = \xi^{\ln \xi}$的分布。

$$p(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \le \xi \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$\ln \eta = \ln^2 \xi$. $y = e^{\ln^2 x}$.

$y' = e^{\ln^2 x} \frac{2\ln x}{x}$.

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y\sqrt{\ln y}} e^{-\sqrt{\ln y}} & y \in (1, +\infty) \\ 0. & 其它 \end{cases}$$

5. 已知随机变量 $\xi \sim U(-2,4)$，求 $\eta=\xi^2$ 的分布函数。

$$p(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & -2\le\xi\le4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\xi=\sqrt{\eta}$ ，

$4\le\eta\le16$

$$p(\eta)=\begin{cases}\frac{1}{6}\frac{d\sqrt{\eta}}{d\eta}, & \cdots\\ 0 & \cdots\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{12\sqrt{\eta}}, & 4\le\eta\le16\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_\eta=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{3}\sqrt{y}. & 0\le y<4.\\ \frac{1}{6}(\sqrt{y}+2) & ,4\le y<16\\ 1. & y\ge16\end{cases}$$

6. 已知随机变量ξ、η的概率分布分别为

ξ	-1	0	1
$P\{\xi = x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
$P\{\eta = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且$P\{\xi\eta = 0\} = 1$。

(1)求ξ、η的联合概率分布；(2)问ξ、η是否独立？

(3)求$\zeta = \max(\xi, \eta)$的概率分布。

(1)

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2) 不独立.

(3) $p(\zeta=0) = \frac{1}{4}$.

$p(\zeta=1) = \frac{3}{4}$.

第十六次作业

一．选择题：

1. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi \sim N(-2,4)$ $\eta \sim N(2,8)$ ，则$\xi+2\eta$的密度函数$p(z)$ 为（ B ）。

A、$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{72}}$　　B、$\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{24}}$　　C、$\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{72}}$　　D、$\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{24}}$

2. 设随机变量(ξ,η)的联合密度函数为$p(x,y)$ ，则$\xi+\eta$的分布函数$F(z)$ =（ B ）。

A、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}p(z-x,y)dx$　　B、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-x,y)dy$

C、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}p(z-x,y)dy$　　D、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)dy$

3. 设随机变量ξ和η相互独立，其密度函数分别为$p_1(x)$ 与$p_2(y)$，则$\frac{\eta}{\xi}$的密度函数$p(z)$ 为（ A ）。

A、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p_1(x)p_2(zx)dx$　　B、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x)p_2(z-x)dx$

C、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p_1(zx)p_2(x)dx$　　D、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(z-x)p_2(x)dx$

4. 设随机变量ξ和η相互独立，其分布函数分别为$F_\xi(x)$ 与$F_\eta(y)$，则

$\zeta=\max(\xi,\eta)$ 的分布函数$F_\zeta(z)$ 等于（ D ）

A．$\max\{F_\xi(z),F_\eta(z)\}$　　B. $F_\xi(z)F_\eta(z)$

C．$\frac{1}{2}[F_\xi(z)+F_\eta(z)]$　　D. $F_\xi(z)+F_\eta(z)-F_\xi(z)F_\eta(z)$

二．填空题：

1. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi \sim N(-2,4)$ $\eta \sim N(-2,12)$ ，则$\xi-\eta$的密度函数$p(z)=$ $\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{z^2}{16}}$。　　$\sim N(0,+8)$

2. 设随机变量ξ和η独立同分布，均服从(0,1) 上的均匀分布，则$\max(\xi,\eta)$的密度函数$p(z)=$ $\begin{cases}1, & 0\le z\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

3. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi \sim E(1)$ ，$\eta \sim E(2)$ ，则

$P\{\min(\xi,\eta) \le 1\} =$ ___1___

三．计算题

1. 设随机变量ξ、η相互独立，其密度函数分别为

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad p_\eta(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

求$\xi + \eta$的概率密度函数。

$z = \xi + \eta$.

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\, p_\eta(z-x)\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{x-z}\, dx$$

$$= e^{1-z} - e^{-z}$$

2. 设随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$\xi+\eta$的概率密度函数。

$z=$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(z-y,y)\,dy = \int_0^1 (2-z)\,dy$$

$$= 2-z, \quad (z\in(0,1))$$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}2-z, & z\in(0,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3. 设ξ,η是两个相互独立的随机变量，且均服从均匀分布$U(0,1)$的随机变量，求$\xi-\eta$的概率密度函数。

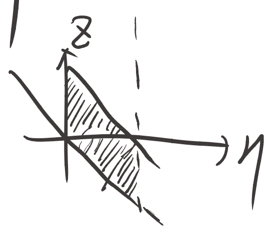
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$z=$

$$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)f(z+\eta)\,d\eta$$

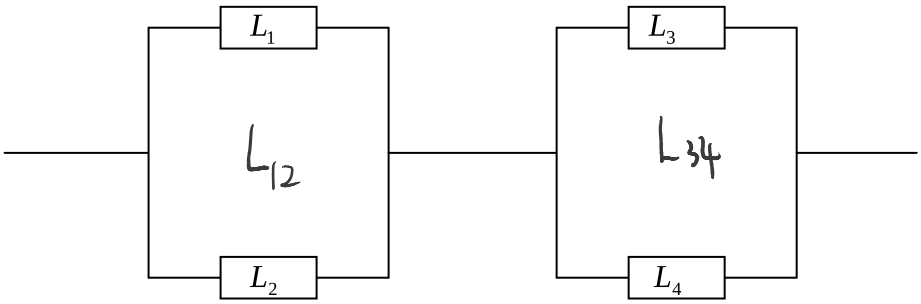
$$=\int_0^1 f(z+\eta)\,d\eta$$

$$=\begin{cases}1-|z|, & |z|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$0<z+\eta<1$

4. 电子仪器由 4 个相互独立的部件 $L_i\,(i=1,2,3,4)$ 组成，连接方式如图所示。设各个部件的使用寿命 ξ_i 服从指数分布 $E(1)$，求仪器使用寿命 ζ 的概率密度。



$L_{12} = \max(L_1 + L_2)$, $\quad L_{34} = \max(L_3 + L_4)$.

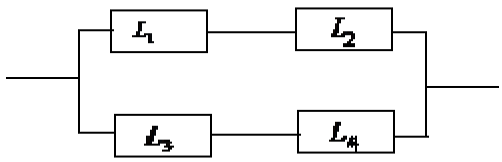
$F_{L_i}(x) = 1 - e^{-x} \qquad F_{L_{12}}(x) = F_{L_{34}}(x) = F_{L_i}^2(x) = (1-e^{-x})^2.$

$L = \min(L_{12}, L_{34})$.

$F_L(x) = 1 - [1 - (1-e^{-x})^2]^2$.

即 $p_L(x) = F_L'(x) = 4[1-(1-e^{-x})^2]\cdot(1-e^{-x})\cdot e^{-x}$

5．将上题中的电子部件 $L_i\,(i=1,2,3,4)$ 组成，按下列方式联接，求仪器使用寿命 ζ 的概率密度。



$L_{12}=\min\{L_1, L_2\}$.　　$L_{34}=\min\{L_3, L_4\}$.

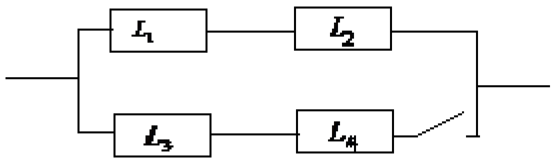
$F_{34}=F_{12}=1-e^{-2x}$

$L=\max\{L_{12}, L_{34}\}$.

$F_L=(1-e^{-2x})^2$

即 $\zeta=p_L(x)=F_L'=4(1-e^{-2x})e^{-2x}$

6．将上题中的串联部分加上一个开关，先用上面部分，如果坏了，合上开关再用下面部分，求仪器使用寿命ζ的概率密度。



$L_{12} = \min\{L_{12}, L_{34}\}$. $\quad L_{34} = \min\{L_3, L_4\}$.

$F_{12} = F_{34} = 1 - e^{-2x}$. $\quad L = L_{12} + L_{34}$.

$f_{12} = f_{34} = F_{12}' = 2e^{-2x}$, $(x > 0)$

$\zeta = p(z) = 4\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e^{-2(z-x)} dx$