华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 8 册）

第十五次作业

教学内容：8.4 拉普拉斯变换的应用；6.1 共形映射的概念

6.2 分式线性映射

1. 求解下列微分方程

(1) $y''-2y'+y=e^t, y(0)=y'(0)=0;$

解 （1） 令 $Y(s)=\mathrm{L}[y(t)]$，在方程两端取拉氏变换，并代入初始条件，将

$$s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^3}$$

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}[Y(s)]=\mathrm{Re}\,s\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^3},1\right]$$

$$=\frac{1}{2!}(e^{st})''\Big|_{s=1}$$

$$=\frac{1}{2}t^2e^t$$

(2) $y''-2y'+2y=2e^t\cos t, y(0)=y'(0)=0;$

解：同上题，有

$$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=2\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s^2-2s+2)^2}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)$$

由象函数的微分性质：$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=-t\mathrm{L}^{-1}[F(s)]$，于是有

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}[Y(s)]=-\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\right]$$

$$=t\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

$$= te^{t}\sin t$$

(3) $y^{(4)} - y''' = \cos t, y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, y''(0) = 1;$

同上题，有

$$s^4 Y(s) - s - s^3 Y(s) + 1 = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^4 - s^3)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + (s-1)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{s^3}$$

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s-1)(s^2+1)}\right] + \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]$$

$$= \lim_{s\to 6}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s^2+1)}\right]' + \frac{e^{st}}{s^2(s^2+1)}\Big|_{s=-1} + \frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s+i)}\Big|_{s=}$$

$$+ \frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2-i)}\Big|_{s=-i} + \frac{1}{2}t^2$$

$$= t - 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) + \frac{t^2}{2}$$

(4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, y''(0) = 1;$

同上题方法，有

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0) + 2s^2 Y(s) - 2sy(0)$$
$$-2y'(0) + Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

从而方程解为：

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \cos t * \sin t = \frac{1}{2}t\sin t$$

2．求解下列微积分方程

$$y' + 2y = \sin t - \int_0^t y(\tau)d\tau, y(0) = 0$$

解：两端取拉氏变换，并由微分和积分性质，有

$$sY(\mathrm{s}) \quad +2\mathrm{Y}(\mathrm{s})=\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s}Y(s)$$

即 $(s+2+\frac{1}{3})Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$

$$Y(s)=\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}$$

因此 $y(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}te^{-t}$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-te^{-t})$$

3．求解下列方程组

（1） $\begin{cases} x''-x-2y'=e^t & x(0)=-\frac{3}{2}, x'(0)=\frac{1}{2} \\ x'-y''-2y=t^2 & y(0)=1, y'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$

解： 设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$

在方程组两边取 Laplace 变换，并应用初始条件得

$$\begin{cases} s^2X(s)+\frac{3}{2}s-\frac{1}{2}-X(s)-2sY(s)+2=\frac{1}{s-1} \\ sX(s)+\frac{3}{2}-s^2Y(s)+s-\frac{1}{2}-2Y(s)=\frac{2}{s^3} \end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases} X(s)=-\frac{3}{2(s-1)}+\frac{2}{s^2} \\ Y(s)=-\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s^3}+\frac{3}{2s}. \end{cases}$$

求逆变换得

$$\begin{cases} x(t)=-\frac{3}{2}e^t+2t \\ y(t)=-\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2} \end{cases}$$

（2） $\begin{cases} y''-x''+x'-y=e^t-2 & x(0)=x'(0)=0 \\ 2y''-x''-2y'+x=-t & y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

解：设 $L|x| = X(s), L|y| = Y(s)$ 。对方程组的每个方程两边分别取拉氏变换，并考虑到初始条件得：

$$\begin{cases} s^2Y(s) - s^2X(s) + sX(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s) - s^2X(s) - 2sY(s) + X(s) = -\dfrac{1}{s^2}, \end{cases}$$

整理计算得：$\begin{cases} X(s) = \dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2} = \dfrac{2}{s(s-1)^2} - \dfrac{1}{s^2(s-1)^2}, \\ Y(s) = \dfrac{1}{s(s-1)^2} \end{cases}$

以下求 $X(s)$ 的拉氏逆变换：因为

$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = 1$，$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)^2}\right] = te^t$，$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = t$ 故由卷积定理可得

$\mathscr{L}^{-1}\left[X(s)\right] = 2\int_0^t \tau e^\tau d\tau - \int_0^t (t-\tau)\tau e^\tau d\tau = te^t - t$，

同理可求

$\mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = te^t - e^t + 1$ ，

所以方程组的解为$\begin{cases} x = L^{-1}\left[X(s)\right] = te^t - t, \\ y = L^{-1}\left[Y(s)\right] = te^t - e^t + 1, \end{cases}$

（3）$\begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0 \quad x(0) = x'(0) = 1 \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0 \quad y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

解：方程组中每个方程两边取拉氏变换，得

$$\begin{cases} (2s^2 - s + 9)X(s) - (s^2 + s + 3)Y(s) = 1 + 2s \\ (2s^2 + s + 7)X(s) - (s^2 - s + 5)Y(s) = 3 + 2s \end{cases}$$

整理得$\begin{cases} 2X(s) - Y(s) = \dfrac{2s+2}{s^2+4} \\ X(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$

解之得

$$\begin{cases} X(s)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{s^2+4} \\ Y(s)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{s^2+4} \end{cases}$$

再取拉氏逆变换得到其解为：

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3}\cos 2t+\frac{1}{3}\sin 2t \\ y(t)=\frac{2}{3}e^t-\frac{2}{3}\cos 2t-\frac{1}{3}\sin 2t \end{cases}$$

4.填空题

(1) 分式线性映射 $w=\frac{z-i}{z+i}$ 在 $z=i$ 处的旋转角为 $\underline{-\frac{\pi}{2}}$ 伸缩率为 $\underline{\frac{1}{2}}$

（2）在 $w=z^2$ 的映射下，$y=x+1$ 的像曲线为 $\underline{v=\frac{1}{2}(u^2-1)}$，$y^2=x^2+1$ 的像曲线 $\underline{u=-1}$

（3）在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下，区域 $x>1, y>0.$ 映射为 $(u-\frac{1}{2})^2+v^2<(\frac{1}{2})^2, v<0.$

（4）在映射 $w=(1+i)z$ 下， 区域 $\operatorname{Im} z>0$ 像为 $\underline{\operatorname{Im} w>\operatorname{Re} w}$

第十六次作业

教学内容：6.2 分式线性映射（续）;6.3 几种常见的分式线性映射

1．填空

(1)把 $z_1=2, z_2=i, z_3=-2;$ 映射为 $w_1=-1, w_2=i, w_3=1$ 的分式线性映射为__($w=\frac{z-6i}{3iz-2}$)

(2) 由三点 $z_1=\infty, z_2=i, z_3=0$ 到 $w_1=0, w_2=i, w_3=\infty$ 的分式线性映射为__($w=-\frac{1}{z}$)

2 求把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射成单位圆域 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(i)=0, \qquad \arg f'(i)=-\frac{\pi}{2}$

解：$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$，则 $f'(z)=e^{i\theta}\frac{2i}{(z+i)^2}$

$$f'(i)=e^{i\theta}\cdot(-\frac{i}{2})=e^{i\theta}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

由于 $\arg f'(i)=-\frac{\pi}{2}$

所以 $\theta-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$， $\theta=0$

所求映射为 $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$

(2) $f(i)=0, \qquad f(-1)=1$;

解：因为 $f(i)=0$, 则 $f(-i)=\infty$,

$$f(z)=k\frac{z-i}{z+i}$$

又 $f(-1)=k\dfrac{-1-i}{-1+i}=ki=1$

$k=-i$

所求映射为 $f(z)=-i\dfrac{z-i}{z+i}$

(3) $f(2i)=0, \qquad \arg f'(2i)=0$;

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}$$

$$f'(2i)=e^{i\theta}\cdot(-\frac{2i}{9})=e^{i\theta}\cdot\frac{2}{9}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$\theta-\frac{\pi}{2}=0 \qquad \theta=\frac{\pi}{2}$

所求映射为 $f(z)=\mathrm{i}\dfrac{z-2i}{z+2i}$

3. 求把单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(\frac{1}{2})=0, \qquad f(-1)=1$;

解：令 $f(z)=k\dfrac{2z-1}{z-2}$

由 $f(-1)=1$ 得, $k=1$

故 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z-2}$

(2) $f(\dfrac{1}{2})=0, \qquad \arg f'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{2}$.

解：$f(\dfrac{1}{2})=0$ 则 $f(2)=\infty$

令 $f(z)=k\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$

$|f(1)|=\left|\dfrac{k}{2}\right|=1$，$|k|=2$

$$f(z)=2e^{i\theta}\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$$

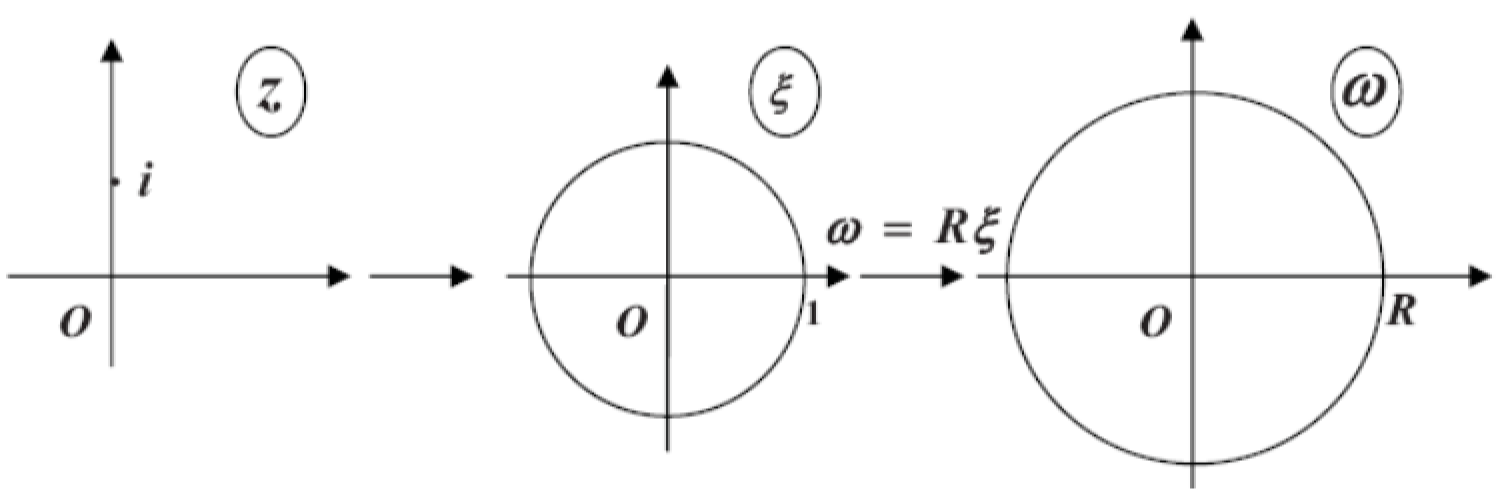
$f'(z)=2e^{i\theta}\dfrac{-3}{2(z-2)^2}$，$f'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{4}{3}e^{i\theta+\pi i}$

$\theta+\pi=\dfrac{\pi}{2}$， 所以 $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$

$$f(z)=-2i\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}=-i\frac{2z-1}{z-2}.$$

4. 求将上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 映射成圆 $|w|<R$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，且满足 $f(i)=0$，$f'(i)=1$.

解：



应用条件 $L(i)=0$ 知 $w=\mathbf{R}\mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$，再应用条件 $L'(i)=1$，则可确定 $R=2, e^{i\theta}=i$，所以

变换为$\omega = 2i\dfrac{z-i}{z+i}$

5.求分式线性映射 $w = f(z)$，它把$|z| = 1$映射为$|w| = 1$，并使$1, 1+i$分别映射为$1, \infty$

解：$1+i$关于$|z| = 1$的对称点是$\dfrac{1+i}{2}$，∞关于$|w| = 1$的对称点是 0.

故分式线形映射$w = f(z)$将单位圆内的点$z = \dfrac{1+i}{2}$映为单位圆内的点$w = 0$

所以$w = f(z) = e^{i\beta}\dfrac{z-\dfrac{1+i}{2}}{1-\dfrac{1-i}{2}z}$，

又$f(1) = 1$，所以$e^{i\beta} = i$即所求变换为$w = i\dfrac{2z-(1+i)}{2-(1-i)z} = \dfrac{(i-1)z+1}{-z+(1+i)}$