华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 本 （第3册）

第五次作业

教学内容：3.1 复变函数积分概念　　3.2 柯西积分定理

1．计算积分$\int_C \mathrm{Re}\, z dz$，其中积分路径 C 为：

(1) 从原点到$1+i$的直线段;

(2) 从原点到点1的直线段，以及连接由点 1 到$1+i$的直线段所组成的折线。

解：

（1）直线段的参数方程为

$z=(1+i)t \quad (0\le t\le 1)$

故$\int_C \mathrm{Re}\, z dz=\int_0^1 \mathrm{Re}\left[(1+i)t\right](1+i)dt=\frac{1+i}{2}$

（2）从原点到点1的直线段的参数方程为

$$z=t \quad (0\le t\le 1)$$

连接由点 1 到$1+i$的直线段的参数方程为

$$z=(1+i)t \quad (0\le t\le 1)$$

故

$$\int_C \mathrm{Re}\, z dz=\int_0^1 \mathrm{Re}\left[t\right]\mathrm{d}t+\int_0^1 \mathrm{Re}\left[(1+i)t\right]idt=\frac{1}{2}+\mathrm{i}$$

2.计算积分$\int_C (x-y+ix^2)dz$，其中 C 为从原点到$1+i$的直线段。

解：积分曲线的方程为$x=t, y=t,$即$z=x+iy=t+ti, t:0\to 1$，代入原积分表达式，得

$$\int_C (x-y+ix^2)dz=\int_0^1 (t-t+it^2)(t+it)'dt$$

$$=\int_0^1 it^2(1+i)dt=\frac{-1+i}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{-1+i}{3}$$

3．计算积分$\int_C e^z dz,$其中C为从 0 到1再到$1+i$的折线

解：（1）从0到1的线段C_1方程为：$z=x+iy=x, x:0\to 1,$

从1到$1+i$的线段C_2方程为：$z=x+iy=1+iy, y:0\to 1,$

代入积分表达式中，得

$$\int_C e^z dz=\int_{C_1}e^z dz+\int_{C_2}e^z dz=\int_0^1 e^x dx+\int_0^1 e^{1+iy}(1+iy)'dy$$

$$=e^x\Big|_0^1+ei\int_0^1(\cos y+i\sin y)dy=e-1+ei(\sin y-i\cos y)\Big|_0^1$$

$$=e^{1+i}-1$$ （与路径无关）

4.计算积分 $\oint_C|z|\overline{z}dz$，其中 C 是由直线段 $-1\le x\le 1, y=0$ 及上半单位圆周组成的正向闭曲线。

解：$C=C_1+C_2$，C_1 表示为 $z=x+iy$，$(-1\le x\le 1, y=0)$；

C_2 表示为 $z=x+iy=\cos\theta+i\sin\theta\quad(0\le\theta\le\pi)$，$dz=(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta$，

$$\oint_C|z|\overline{z}dz=\int_{C_1}|z|\overline{z}dz+\int_{C_2}|z|\overline{z}dz$$
$$=\int_{-1}^1|x|xdx+\int_0^\pi(\cos\theta-i\sin\theta)(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta$$
$$=\pi i$$

5．设 $f(z)$ 在单连域D内解析，C 为D内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_c \mathrm{Re}[f(z)]dz=\oint_c \mathrm{Im}[f(z)]dz=0$$

是否成立，如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

证:未必成立。令 $f(z)=z, C:|z|=1,$ 则 $f(z)$ 在全平面上解析，但是

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}[e^{i\theta}]de^{i\theta}=\int_0^{2\pi}\cos\theta(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta=\pi i\ne 0$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz=\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}[e^{i\theta}]de^{i\theta}=\int_0^{2\pi}\sin\theta(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta=-\pi\ne 0$$

6. 观察得出下列积分的值，并说明理由。

（1）$\oint_{|z|=1.5} e^z(z^2+1)dz$；

解：0 由于被积函数在复平面上处处解析，由柯西积分定理知积分为零。

（2）$\oint_{|z|=1.5}\dfrac{3z+5}{z^2+2z+3}dz$；

解：0。由于被积函数在 $|z|\le 1.5$ 内处处解析，由柯西积分定理知积分为零。

（3）$\oint_{|z|=r}\ln(1+z)dz\quad 0<r<1$

解：0 由于被积函数在复平面上除去 $z=-1$ 开始的负实轴外处处解析，由柯西积分定理知

积分为零。

（4）$\oint_{|z|=1}\frac{1}{\cos z}dz$

解：0　由于被积函数在$|z|=1$所围成的区域解析，由柯西积分定理知积分为零。

7.沿下列指定曲线的正向计算积分$\oint_C\frac{dz}{z(z^2+1)}$值：

(1) $C:|z|=\frac{1}{2}$；

解：原式

$$=\oint_C[\frac{1}{z}-\frac{1}{2(z+i)}-\frac{1}{2(z-i)}]dz$$
$$=2\pi i-0-0=2\pi i$$

(2) $C:|z+i|=\frac{1}{2}$；

解：$\oint_C\frac{dz}{z\left(z^2+1\right)}=\oint_C\frac{1}{z}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z-i}dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z+i}dz=0-0-\pi i=-\pi i$

8．设$f(z)$在单连通区域D内解析，且不为零，C为D内任何一条简单光滑闭曲线，判断积分$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$　是否为零？说明理由。

解：等于零。因$f(z)$　在D　内解析，故$f(z)$　具有各阶导数且仍为解析函数，从而$f'(z)$在D　内也解析，又因在D　内$f(z)\neq 0$，故$\frac{f'(z)}{f(z)}$　在D　内解析，从而在C　上及C　的内部也解析，于是由Cauchy-Gourssat　定理，$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$　。

9. 设区域D为右半平面，z为D内的圆周$|z|=1$上的任意一点，用在D内的任意一条曲线C连接原点与z，证明：

$$\mathrm{Re}\left[\int_0^z\frac{d\xi}{1+\xi^2}\right]=\frac{\pi}{4}$$

证明：函数$\frac{1}{1+\xi^2}$在右半平面解析，故从 0 到 z 沿任意曲线 C 的积分与路径无关，积分路径换为先沿实轴从 0 到 1，再沿圆周到 z 点。

$$\int_0^z \frac{d\varepsilon}{1+\xi^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\theta \frac{ie^{i\eta}}{1+e^{2i\eta}} d\eta$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{i}{2\cos\eta} d\eta$$

所以 $\mathrm{Re}[\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}] = \frac{\pi}{4}$

10. 计算下列积分：

（1）$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz$；

解：$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz = \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{1-\cos 2z}{2} dz = (\frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4})\Big|_{-\pi i}^{\pi i} = (\pi - \frac{1}{2} sh 2\pi) i$

(2) $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{(z+1)} dz$.

解：由于被积函数在复平面上除去 $z < -1$ 上的点外处处解析，因此积分与路径无关。所以

$$\text{原式} = \int_1^i \ln(z+1) d\ln(z+1) = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i = \frac{-1}{8}(\frac{\pi^2}{4} + 3\ln^2 2) + \frac{i\pi}{8}\ln 2$$

（3）$\int_L (z+1)e^z dz$，L 为 $|z|=1$ 的上半圆周.

解：由于被积函数为解析函数，所以积分与路径无关

$$\int_L (z+1)e^z dz = \int_{-1}^1 (z+1)e^z dz = -2\cos \mathrm{h}1$$

(4) $\int_L (z^2+7z+1)dz$, L 为 $z_1 = 1$ 到 $z_1 = 1-i$ 的直线段

解：由于被积函数为解析函数，所以积分与路径无关

$$\int_L (z^2+7z+1)dz = \int_1^{1-i} (z^2+7z+1)dz = -\frac{9}{2} - \frac{26}{3} i$$

第六次作业

教学内容：3.3 复合闭路定理　3.4 柯西积分公式

1. 设 C 为正向椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$，定义 $f(z) = \oint_C \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon + 2}{\varepsilon - z} d\varepsilon$，z 不在 C 上，求 $f(1), f'(i), f''(-i)$。

解：　z 在 C 内部时，$\frac{\varepsilon^2-\varepsilon+2}{\varepsilon - z}$ 在 ε=z 处不解析，

$$f\left(z\right)=\oint_C \frac{\varepsilon^2-\varepsilon+2}{\varepsilon-z}d\varepsilon=2\pi i\left(z^2-z+2\right),$$

$$f\left(1\right)=2\pi i\left(z^2-z+2\right)\Big|_{z=1}=4\pi i;$$

$$f'\left(i\right)=2\pi i\left(2z-1\right)\Big|_{z=i}=-2\pi\left(2+i\right);$$

$$f''\left(-i\right)=4\pi i$$

2．沿指定曲线的正向计算下列各积分。

（1）$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, \quad C:\left|z-2\right|=1$；

解：由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz=2\pi ie^z\Big|_{z-2}=2\pi ie^2$

（2）$\oint_C \frac{\cos\pi z}{\left(z-1\right)^5}dz, C:\left|z\right|=r>1$；

解：（1）$\cos\pi z$ 在由 $C:\left|z\right|=r>1$ 围成的区域内解析，

$$\oint_C \frac{\cos\pi z}{\left(z-1\right)^5}dz=\frac{2\pi i}{4!}\left(\cos\pi z\right)^{(4)}\Big|_{z=1}=-\frac{\pi^5 i}{12}$$

（3）$\oint_C \frac{\text{sinz}}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz, \quad C:\left|z\right|=2$。

解：由高阶求导公式，$\oint_C \frac{\text{sinz}}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

3．计算积分

（1）$\oint_C \frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi}{4}zdz, \quad C:\left|z\right|=2$

在积分曲线内被积函数有两个奇点 ±1，围绕 $1,-1$ 分别做两条相互外离的小闭合曲线

C_1,C_2，则由复合闭路定理

$$\oint_C \frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi}{4}zdz=\oint_{C_1}\frac{\frac{1}{z+1}\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{1}{z-1}\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{z+1}\sin\frac{\pi z}{4}\Big|_{z=1}+\frac{1}{z-1}\sin\frac{\pi z}{4}\Big|_{z=-1}\right]=\sqrt{2}\pi i$$

（2）$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz,\quad C:|z-2i|=\frac{3}{2}$；

解：由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz=\oint_C \frac{e^{iz}dz/(z+i)}{z^2-i}=2\pi i\frac{e^{iz}}{z+i}\Big|_{z=i}=\pi/e$

（3）$\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2},\quad C:|z-a|=a$；

解 1：$\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}=\oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz=2\pi i\frac{1}{z+a}\Big|_{z=a}=\frac{\pi}{a}i$

解 2：$\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}=\frac{1}{2a}(\oint_C \frac{1}{z-a}dz-\oint_C \frac{1}{z+a}dz)=\frac{\pi}{a}i$

（4）$\oint_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)}dz,\quad C:|z|=\frac{3}{2}$；

解：因被积函数的奇点 $z=\pm i$ 在C 的内部， $z=\pm 2i$ 在C 的外部，故由复合闭路定理及Cauchy积分公式有：

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)}=\oint_{|z-i|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)}+\oint_{|z+i|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)}$$

$$=\oint_{|z-i|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z^2+4)(z+i)}}{z-i}dz+\oint_{|z+i|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z^2+4)(z+i)}}{z+i}dz$$

$$=2\pi i\frac{1}{(z^2+4)(z+i)}\Big|_{z=i}+2\pi i\frac{1}{(z^2+4)(z-i)}\Big|_{z=-i}=0$$

4. 设$f(z)$在区域D内解析，C 为D内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在D 内但不在C 上的任意一点z_0，等式：$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ 成立。

证明：利用Cauchy积分公式，有$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f'(z)\Big|_{z=z_0}=2\pi i f'(z_0)$；

又由高阶导数公式$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(z)\Big|_{z=z_0}=2\pi i f'(z_0)$

故所证等式成立。

5．设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析且 $f(0)=1$，试求：$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right]\dfrac{f(z)}{z}dz$ 。

解：
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[\frac{2f(z)}{z}\pm\frac{\left(z^2+1\right)f(z)}{z^2}\right]dz$$
$$=2f(0)\pm\left[\left(z^2+1\right)f(z)\right]'\Big|_{z=0}$$
$$=2\pm\left[2z\cdot f(z)+\left(z^2+1\right)f'(z)\right]\Big|_{z=0}$$
$$=2\pm f'(0)$$