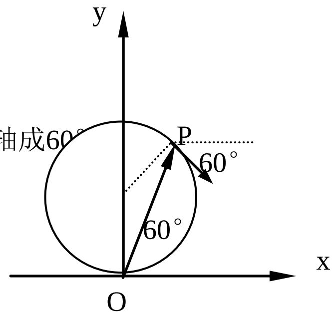
第一章 质点的运动规律

1、电子受到磁力后，在半径为R的圆形轨道上，以速率v从O点开始作顺时针方向的匀速率圆周运动，当它经过$\overline{OP}=\left|\overrightarrow{OP}\right|=2R\cos 30^0=\sqrt{3}R$圆周时，求：

（1）电子的位移；
（2）电子经过的路程等于多少；
（3）在这段时间内的平均速度；
（4）在该点的瞬时速度



解：（1）位移大小 $\overline{OP}=\left|\overrightarrow{OP}\right|=2R\cos 30^0=\sqrt{3}R$　方向与x轴成60°

（2） 路程 $S=\dfrac{2}{3}\times 2\pi R=\dfrac{4}{3}\pi R$

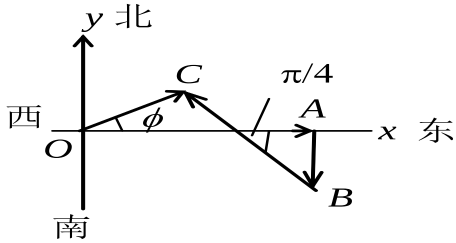
（3）$\because\quad \Delta t=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2\pi R}{v}=\dfrac{4\pi R}{3v}$

平均速度的大小 $\therefore\quad \bar{v}=\dfrac{\left|\overrightarrow{OP}\right|}{\Delta t}=\dfrac{\sqrt{3}R}{\dfrac{4\pi R}{3v}}=\dfrac{3\sqrt{3}v}{4\pi}$　方向与 x 轴成 60°

（4）速度的大小为 v，方向与 x 轴成-60^0。

2、一人自原点出发，25 s 内向东走 30 m，又 10 s 内向南走 10 m，再用 15 s 向正西北走 18 m．求在这 50 s 内，

(1) 平均速度的大小和方向;
(2) 平均速率的大小．



答：解：(1) 位移 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$$=30\vec{i}+(-10\vec{j})+18(-\cos 45°\vec{i})+\sin 45°\vec{j})$$
$$=17.27\vec{i}+2.73\vec{j}$$

位移大小为：$|\overline{OC}|$=17.48 m，方向ϕ=8.98° (东偏北)

平均速度大小为$\left|\bar{\vec{v}}\right|=\left|\Delta\vec{r}/\Delta t\right|=\left|\overrightarrow{OC}/\Delta t\right|=$ 0.35 m/s　方向东偏北 8.98°

(2) (路程)$\Delta S=(30+10+18)$m=58m, 平均速率为：$\bar{v}=\Delta S/\Delta t=1.16$ m/s

3、已知质点的位矢随时间的函数形式为$\vec{r}=R(\cos\omega t\,\vec{i}+\sin\omega t\,\vec{j})$，式中 R，ω为常量求：

（1）质点的轨迹；

（2）速度和加速度，并证明其加速度总指向一点。

解:（1）质点位置的坐标为：$x=R\cos\omega t$　　$y=R\sin\omega t$

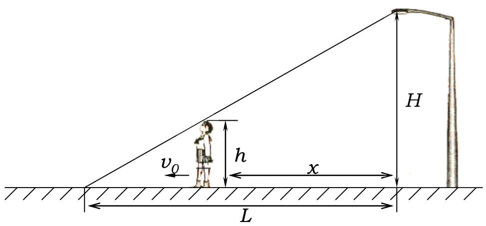
质点的运动轨迹：$x^2+y^2=R^2$

（2）质点的速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-R\omega\sin\omega t\vec{i}+R\omega\cos\omega t\vec{j}$

质点的加速度：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-R\omega^2\cos\omega t\vec{i}-R\omega^2\sin\omega t\vec{j}=-\omega^2\vec{r}$

由上式可知加速度总是指向圆心。

4、路灯距地面高度为 H，行人身高为h，若人以匀速度v_0背离路灯行走，问人头影的移动速度为多大？



解：设 t 时间人的位置坐标为x，人影的坐标为L

由几何关系 $\dfrac{L-x}{h}=\dfrac{L}{H}$ 得：

$$L=\frac{H}{H-h}x$$

$$\therefore\quad v=\frac{dL}{dt}=\frac{H}{H-h}\frac{dx}{dt}=\frac{H}{H-h}v_0$$

5、一质点以初速度v_0作直线运动，所受阻力与其速度的三次方成正比，即 $a=-kv^3$，试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律。

解：由题意有：$a=-kv^3=\dfrac{dv}{dt}$

则：$\dfrac{dv}{v^3}=-kdt$；积分得到：$\Rightarrow v=v_0(\dfrac{1}{1+2kv_0^2t})^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{dx}{dt}=v_0(\dfrac{1}{1+2kv_0^2t})^{\frac{1}{2}}$；积分得到：$\Rightarrow x=\dfrac{1}{kv_0}(\sqrt{1+2kv_0^2t}-1)$

可通过简单推倒得到$\Rightarrow v=\dfrac{v_0}{1+kv_0x}$

或使用变量转换：$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dv}{dx}v=-kv^3$；积分得到：$\Rightarrow v=\dfrac{v_0}{1+kv_0x}$

6、某质点的运动方程为$\vec{r}=2bt\,\vec{i}+bt^2\,\vec{j}$（b为常数），求：

（1）轨道方程；

（2）质点的速度和加速度的矢量表示式；

（3）质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解：（1）由 $x=2bt \quad y=bt^2$ 得轨迹方程 $\quad y=\dfrac{x^2}{4b}$

（2）质点的速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left[2bt\vec{i}+bt^2\vec{j}\right]=2b\vec{i}+2bt\vec{j}$

质点的加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left[2b\vec{i}+2bt\vec{j}\right]=2b\vec{j}$

（3）点的速率：$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(2b)^2+(2bt)^2}$

质点的切向加速度 $a_t=\dfrac{d}{dt}\left[\sqrt{(2b)^2+(2bt)^2}\right]=\dfrac{2bt}{\sqrt{1+t^2}}$

质点的法向加速度 $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{(2b)^2+(\dfrac{2bt}{\sqrt{1+t^2}})^2}=\dfrac{2b}{\sqrt{1+t^2}}$

7、质点沿半径为0.1m的圆周运动，其角位移用下式表示 $\theta=2+4t^3$ 式中 θ 为弧度(rad)，t 的单位为s，求：

（1）t=2s时，质点所在位置的切向加速度和法向加速度的大小；

（2）当 θ 为何值时，其加速度和半径成45^0角。

解：（1）由题意得到圆周运动的角位移、角速度、角加速度：

$$\theta=2+4t^3 \quad \omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2 \quad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=24t$$

则圆周运动质点的法向加速度大小为：$\therefore \quad a_n=R\omega^2=R(12t^2)^2\big|_{t=2}=230.4\,m/s^2$

质点圆周运动的切向加速度大小为：$a_t=R\alpha=24Rt\big|_{t=2}=4.8\,m/s^2$

（2）当 $\vec{a}$ 与半径成 45^0 角时，$\vec{a}$ 与 a_n 也成 45^0。所以 $|\vec{a}_n|=|\vec{a}_t|$

即 $\quad 144Rt^4=24Rt$

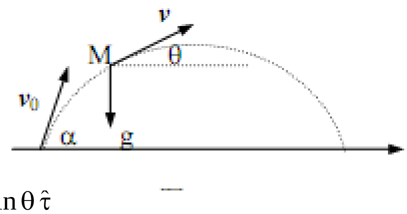
$$\theta=2+4t^3\Big|_{t=\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}=2+4\times\frac{1}{6}=2\frac{2}{3}\,\text{rad}$$

8、手球运动员以初速度v_0与水平方向成 α 的角度抛出一球，当球运动到M点处，它的速度与水平方向成 θ 角，若忽略空气阻力，求：

（1）球在M点处速度的大小；

（2）球在M点处的切向加速度和法向加速度的大小 ；

（3）抛物线在该点处的曲率半径。



解：（1）质点水平速度分量为 $v_0\cos\alpha=v\cos\theta$

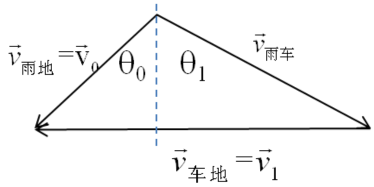
有球在M点处速度的大小：$\Rightarrow v=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}v_0$

（2）球在 M 点处的切向加速度的大小 $\vec{a}_t=-g\sin\theta\,\hat{\tau}$

球在 M 点处法向加速度的大小 $\vec{a}_n=g\cos\theta\,\hat{n}$

（3）由 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$；得到抛物线在该点处的曲率半径$\Rightarrow \rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g\cos^3\theta}$

9、火车静止时，车窗上雨痕向前倾斜θ_0角，火车以某一速度匀速前进时，火车车窗上雨痕向后倾斜θ_1角。火车加快以另一速度匀速前进时，车窗上雨痕向后倾斜θ_2角，求火车加快前后的速度之比。



解：由相对运动$\vec{V}_{车地}=\vec{V}_{车雨}+\vec{V}_{雨地}=\vec{V}_{雨地}+(-\vec{V}_{雨车})$

由矢量合成图得：

相对地面静止时：$0=V_0\cos\theta_0-V_{雨车1}\cos\theta_1$

相对地面速率为V_1时：$V_1=V_0\sin\theta_0+V_{雨车1}\sin\theta_1=V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_1$

相对地面速率为V_2时：$V_2=V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_2$

所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_1}{V_0\sin\theta_0+V_0\cos\theta_0\mathrm{tg}\theta_2}$

10、一升降机以加速度1.22m/s^{2}上升，当上升速度为2.44m/s 时，有一螺帽自升降机的顶板上落下，升降机顶板与升降机的底面相距2.74m ，问：

（1）螺帽相对于升降机作什么运动？其加速度为多少？螺帽相对于地面作什么运动?其加速度为多少？

（2）螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间？

（3）螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离？

解：（1）螺帽相对升降机作向下的匀加速直线运动

$$\vec{a}_{m升}=\vec{a}_{m地}+\vec{a}_{地升}=\vec{a}_{m地}-\vec{a}_{升地}\qquad a_{m升}=-g-a=-11.02\,\mathrm{m/s^2}$$

螺帽对地作竖直上抛运动 $\vec{a}_{m地}=\vec{g}$

（2）取升降机为参照系，参照系内坐标系选竖直向下为正

$$h=\frac{1}{2}(g+a)t^2$$

螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多少时间 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g+a}}=\sqrt{\dfrac{2\times2.74}{9.8+1.22}}=0.71\mathrm{s}$

（3）螺帽相对于升降机外固定柱子下降多少距离

$$s_{螺地}=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=2.44\times0.71-\frac{1}{2}\times9.8\times(0.71)^2=-0.74\mathrm{m}$$

11、一男孩乘坐一铁路平板车，在平直铁路上匀加速行驶，其加速度为 a，他向车前进的斜上方抛出一球，设抛球过程对车的加速度 a 的影响可忽略，如果他不必移动在车中的位置就能接住球，则抛出的方向与竖直方向的夹角θ应为多大？

解：设抛出时刻车的速度为$\bar{\upsilon}_0$，球相对于车的速度为$\bar{\upsilon}_0'$，与竖直方向成θ角．抛射过程中，在地面参照系中，车的位移水平分量:

$$\Delta x_1 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad ①$$

球的位移水平分量: $\Delta x_2 = \left(\upsilon_0 + \upsilon_0' \sin\theta\right)t$ ②

球的位移竖直分量: $\Delta y_2 = \left(\upsilon_0' \cos\theta\right)t - \frac{1}{2}gt^2$ ③

小孩接住球的条件 $\Delta x_1 = \Delta x_2$, $\Delta y_2 = 0$

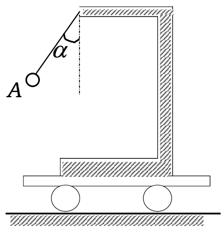
即 锐 $\frac{1}{2}at_2 = \left(\upsilon_0' \sin\theta\right)t$ ， $\frac{1}{2}gt_2 = \left(\upsilon_0' \cos\theta\right)t$

两式相比得 $a/g = \mathrm{tg}\theta$ ，∴ $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(a/g\right)$

12、如图所示，质量为 m 的摆球 A 悬挂在车架上．求在下述各种情况下，摆线与竖直方向的夹角α和线中的张力 T.

(1)小车沿水平方向作匀速运动；

(2)小车沿水平方向作加速度为 a 的运动.



解：(1) 由题意小车沿水平方向作匀速运动得: $\alpha = 0$

$T = mg$

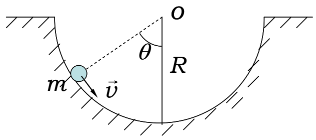
(2) 小车沿水平方向作加速度为 a 的运动,由牛顿定律得:

$$T\sin\alpha = ma, \qquad T\cos\alpha = mg$$

$$\mathrm{tg}\alpha = a/g \quad [\text{或}\ \alpha = \mathrm{tg}^{-1}(a/g)]$$

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

13、如图所示，质量为 m 的钢球 A 沿着中心在 O、半径为 R 的光滑半圆形槽下滑．当 A 滑到图示的位置时，其速率为 υ，钢球中心与 O 的连线 OA 和竖直方向成 θ 角，求这时钢球对槽的压力和钢球的切向加速度．



解：球 A 受法向支持力 $\vec{N}$ 和重力 $m\vec{g}$，根据牛顿第二定律

法向合力：　$N - mg\cos\theta = m\upsilon^2/R$　　　①

切向合力：戕 $mg\sin\theta = ma_t$　　　②

当 A 滑到图示的位置时，由①式可得: $N = m(g\cos\theta + \upsilon^2/R)$

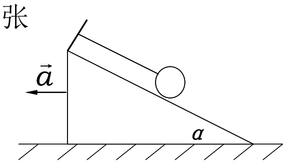
根据牛顿第三定律，球对槽压力大小同上，方向沿半径向外．

当 A 滑到图示的位置时，由②式得：　$a_t = g\sin\theta$

14、将质量为10Kg的小球挂在倾角 $\alpha = 30^0$ 的光滑斜面上（如图所示）。

（1）当斜面以加速度 $a = \frac{1}{3}g$ 沿图示的方向运动时，求绳中的张力及小球对斜面的正压力；

（2）当斜面的加速度至少为多大时，小球对斜面的正压力为零？

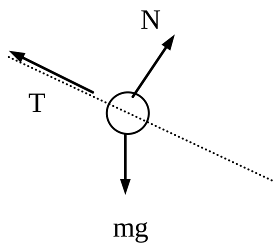


解：（1）当斜面以加速度 $a = \frac{1}{3}g$ 沿图示的方向运动时（小球未离开斜面）：

水平方向合力：$T\cos\alpha - N\sin\alpha = ma$

竖直方向合力：$T\sin\alpha + N\cos\alpha = mg$

解得当 $a = \frac{1}{3}g$ 时，N=68.4（N）　T=77.3（N）



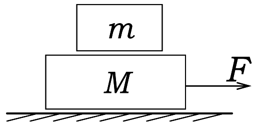
（2）若N=0，则有

水平方向合力：$T\cos\alpha = ma'$

竖直方向合力：$T\sin\alpha = mg$

$a' = g\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{3}g = 17(m/s)$

15、桌上有一质量为M的板，板上放一质量为m的物体，如图所示。设物体与板，板与桌面之间的动摩擦系数为μ_k，静摩擦系数为μ_s，（1）今以水平力F拉板，使两者一起以加速度a运动，试计算板与桌面间的相互作用力；（2）要将板从物体下面抽出，至少需用多大的力？



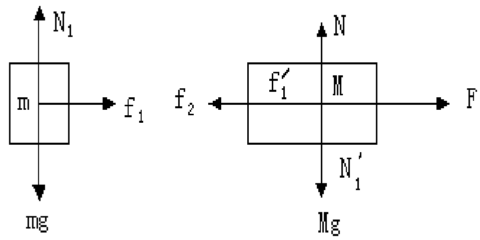
解：(1) 设板和桌面间的相互作用力N和f_2

物体 m 与板竖直方向合力为：$\because\ N_1 = mg$

$\therefore\ N = N_1 + Mg = (m+M)g$

板和桌面间的滑动摩擦力f_2为：$f_2 = \mu_k N = \mu_k (M+m)g$

（2）设抽出板所需的力为F，且抽出时$a_M > a_m$



物体 m 水平方向合力：$f_1 = ma_m$

板水平方向合力为：M：　$F - f_1 - f_2 = Ma_M$

即　　$f_1 < \dfrac{m(F-f_2)}{m+M}$

$$\therefore\quad F \ge \frac{f_1(m+M)+mf_2}{m} = f_1 + f_2 + \frac{M}{m}f_1$$

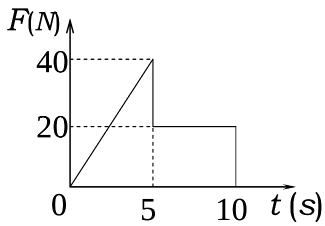
$\because\quad f_1 \le \mu_s mg$

代入 f_1 得到 F $\therefore\quad F \ge (\mu_k + \mu_s)(M+m)g$

16、有一质量为m=5kg的物体，在0到10s内受到如图所示的变力F作用，由静止开始作直线运动。假定物体的初始位置为坐标的原点，求：

（1）第5秒末和第10秒末的速度；

（2）0到5秒内和5到10秒内物体所通过的路程。



解：（1）由F-t图可知：$F = \begin{cases} 8t & 0 \le t \le 5 \\ 20 & 5 \le t \le 10 \end{cases}$

根据牛顿定律可得 a 与时间关系为

$$a = \frac{F}{m} = \begin{cases} \dfrac{8}{5}t & 0 \le t \le 5 \\ 4 & 5 \le t \le 10 \end{cases} \quad （a = \frac{dv}{dt}$$

直线运动：　$\therefore\quad v_5 = \int_0^5 a dt = \int_0^5 \frac{8}{5} t dt = 20\,m/s$；　$v_{10} = v_5 + \int_5^{10} a dt = 20 + \int_5^{10} 4 dt = 40\,m/s$

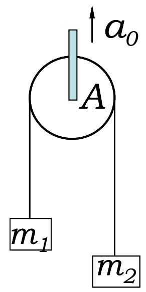
（2）速度随时间变化关系

$$v = \begin{cases} \int_0^t \dfrac{8}{5} t dt = \dfrac{4}{5} t^2 & 0 \le t \le 5 \\ \int_5^t 4 dt = 4t & 5 \le t \le 10 \end{cases} \quad （v = \frac{dx}{dt}）$$

$$x_5 = \int v dt = \int_0^5 \frac{4}{5} t^2 dt = \frac{4}{15} t^3 \Big|_0^5 = 33.3m$$

$$x_{10} - x_5 = \int_5^{10} v dt = \int_5^{10} 4t dt = 150m$$

17、如图所示，有一轻滑轮A，两边分别挂着质量为m_1和m_2的两物体，当滑轮A在外力作用下以加速度a_0上升时，求两物体m_1和m_2的加速度a_1和a_2（设 $m_2>m_1$ ）。



解：m_1对地加速度为 $\vec{a}_1=\vec{a}_{1A}+\vec{a}_{A地}$　　$a_1=a'+a_0$

m_2对地加速度为$\vec{a}_2=\vec{a}_{2A}+\vec{a}_{A地}$　　$a_2=a'-a_0$

m_1　　$T-m_1g=m_1a_1=m_1(a'+a_0)$　　(1)

m_2　　$m_2g-T=m_2a_2=m_2(a'-a_0)$　　(2)

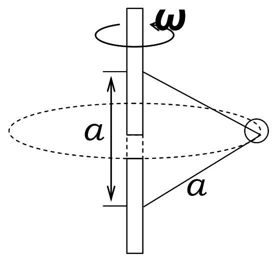
由（1）+（2）得

相对滑轮的加速度为：　$a'=\dfrac{(m_2-m_1)g-(m_1-m_2)a_0}{m_1+m_2}$

物体 m_1相对地面的加速度：　$\therefore a_1=a'+a_0=\dfrac{2m_2}{m_2+m_1}a_0-\dfrac{(m_1-m_2)g}{m_2+m_1}$

物体m_2相对地面的加速度：　$a_2=a'-a_0=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}a_0+\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$

18、用两根长为a的绳子连住一质量为m的小球，两绳的另一端分别固定在相距为a的棒的两点上，今使小球在水平面内作匀速圆周运动，如图所示。当转速为ω时，下面一根绳子刚刚伸直，求转速为2ω时，上下绳子的拉力各为多大？

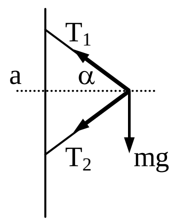


解　由几何条件知$\alpha=30^0$,且当角速度为ω时，

此时，T_2=0，水平与竖直方向的合力为：

$$T_1\cos\alpha=m\omega^2(a\cos\alpha)$$
$$T_1\sin\alpha=mg$$

$$\omega^2=\frac{g}{a\sin\alpha}$$



当 $T_2\neq 0$；水平与竖直方向的合力为：

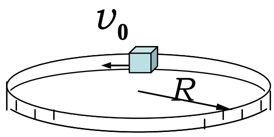
$$T_1'\cos\alpha+T_2'\cos\alpha=m(2\omega)^2a\cos\alpha \qquad (1)$$
$$T_1'\sin\alpha=T_2'\sin\alpha+mg \qquad (2)$$

$$\therefore\quad T_1'=5mg$$
$$T_2'=T_1'-2mg=3mg$$

19、在光滑水平桌面上平放一固定的圆环，其半径为R，物体与环内侧的摩擦系数为μ，当 $t_0=0$，物体的速率为v_0，求：

（1）t时刻物体的速率；

（2）在时间t内物体经过的路程。



解：（1） 法向合力为：$F_n = m\dfrac{v^2}{R}$

切向合力为：$F_t = m\dfrac{dv}{dt} = -\mu F_n = -\mu\dfrac{mv^2}{R}$

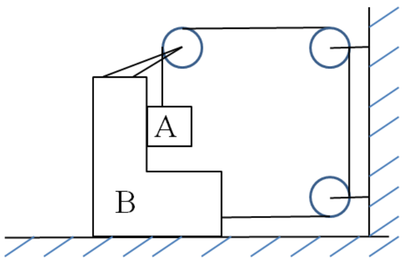
有：∴ $\dfrac{dv}{dt} = -\mu\dfrac{v^2}{R}$

积分 $\int_{v_0}^{v}\dfrac{dv}{v^2} = \int_0^t -\dfrac{\mu}{R}dt$ ；得到：$v = \dfrac{v_0 R}{R+\mu v_0 t} = \dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}$

（2） 速率：$v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}$

积分 $\int_0^s ds = \int_0^t \dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}dt$ ；得到：$s = \dfrac{R}{\mu}\ln(1+\dfrac{\mu v_0 t}{R})$

20、图示为一力学装置，滑块B的质量为m_B，悬块A的质量为m_A，两者用无伸长的细绳相连，所有接触面皆为光滑。试求：滑块B和滑块A的加速度各为多少？

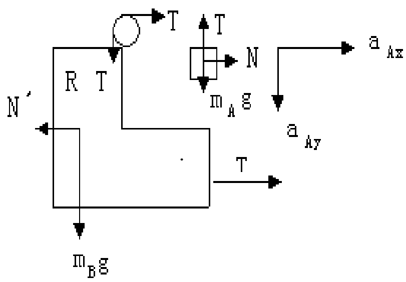


解：对悬块 A 水平合力：$N = m_A a_{Ax}$ (1)

对悬块 A 竖直合力：$m_A g - T = m_A a_{Ay}$ (2)

对滑块 B 水平合力为：$B: 2T - N' = m_B a_{Bx}$ (3)

牵连关系：$a_{Ay} = 2a_{Bx} = 2a_{Ax}$ (4)



由（1）—（4）联解得

$$\vec{a}_A = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B}\vec{i} + \frac{4m_A g}{5m_A + m_B}\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \frac{2m_A g}{5m_A + m_B}\vec{i}$$