华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第四册）

学　院 ____________专　业 ____________班　级 ____________
学　号 ____________姓　名 ____________任课教师____________

第 7 次作业

一. 选择题：

1. 设随机变量ξ的概率分布律为

ξ	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

则$\eta=\xi^2-1$的分布函数$F(y)$为（ B ）。

A、$F(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ 0.1, & -1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$　　B、$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 0.1, & 1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<3,\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$

C、$F(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ 0.1, & -1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<3,\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$　　D、$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 0.1, & 1\le y<0,\\ 0.6, & 0\le y<4,\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$

2. 设随机变量ξ密度函数为$p(x)$，则$\eta=3\xi-1$的密度函数$p_\eta(y)$为（ A ）。

A、$\frac{1}{3}p(\frac{y+1}{3})$　　B、$3p(\frac{y+1}{3})$　　C、$\frac{1}{3}p(3(y+1))$　　D、$3p(\frac{y-1}{3})$

3. 设随机变量ξ密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

则$\eta=\xi^2$的密度函数$p_\eta(y)$为（ D ）。

A、 $p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}y, & 0\le y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　B、 $p_\eta(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

C、 $p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{y}}, & 0\le y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　D、 $p_\eta(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

二．填空题：

1. 已知随机变量$\xi\sim U(-2,4)$,设$\eta=\frac{\xi}{2}+1$，则η的概率密度为$p_\eta(y)=$

$\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\le y\le 3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$。

2. 已知随机变量$\xi\sim N(0,1)$,$\eta=2\xi-5$，则η的概率密度为$p_\eta(y)=$ ____

$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+5)^2}{8}}$

3. 已知随机变量$\xi\sim N(0,1)$,$\eta=e^\xi$，则η的概率密度为$p_\eta(y)=$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$。

三 计算题

1. 已知随机变量$\xi\sim U[0,2]$，求$\eta=\xi^2$的概率密度。

解: $F_\eta(y)=P\{\xi^2\le y\}=\begin{cases}P\{-\sqrt{y}\le\xi\le\sqrt{y}\} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}=\begin{cases}F_\xi(\sqrt{y})-F_\xi(-\sqrt{y}) & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

故 $p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(p_\xi(\sqrt{y})-p_\xi(-\sqrt{y})\right) & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}} & 0\le y\le 4\\ 0 & 其他\end{cases}$

2. 设随机变量 X 的概率分布为：

X	1	2	3	…	n	…
P	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

求$Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$的概率分布。

解：由于 $\sin(\frac{x\pi}{2})=\begin{cases}-1 & x=4k-1\\ 0 & x=2k\\ 1 & x=4k-3\end{cases}$　$k=1,2,\cdots$

故随机变量 Y 的可能取值为：-1，0，1。

随机变量 Y 的 $P\{Y=-1\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=4k-1\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k-1}}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{\frac{1}{2^4}-1}=\frac{2}{15}$；

$P\{Y=0\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{\frac{1}{2^2}-1}=\frac{1}{3}$；

$P\{Y=1\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=4k-3\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k-3}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2^4}-1}=\frac{8}{15}$，

于是随机变量 Y 的分布律为：

Y	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

3. 已知随机变量 $\xi \sim N(0,1)$，求 $\eta=|\xi|$ 的概率密度。

解：先求分布函数 $F_\eta(y)$。

当 $y<0$ 时，$F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P\{|\xi|\le y\}=0$;

当 $y\ge 0$ 时，$F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P\{|\xi|\le y\}=P\{-y\le\xi\le y\}=\Phi(y)-\Phi(-y)=2\Phi(y)-1$;

故：$p_\eta(y)=F'_\eta(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ 2\varphi(y) & y\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y\ge 0\end{cases}$

4. 设 $\xi\sim U(0,1)$，求 $\eta=\xi^{\ln\xi}$ 的分布。

解：对应于 $\eta=\xi^{\ln\xi}$，$y=x^{\ln x}=e^{(\ln x)^2}=f(x)$，

由于 $f'(x)=e^{(\ln x)^2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$

当$x\in(0,1)$时，$f^{'}(x)<0$ ，$x=f^{-1}(y)=e^{-\sqrt{\ln y}}$

$$\varphi_\eta(y)=\varphi_\xi(x)\,|_{x=f^{-1}(y)}|\,(f^{-1}(y))^{'}\,|=\begin{cases}\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln y}}e^{-\sqrt{\ln y}} & ,\quad y\in(1,+\infty)\\ 0 & ,\quad \text{其它}\end{cases}$$

其中当$y\in(-\infty,1]$时，$\varphi_\eta(y)=0$ 是由$x\in(0,1)$时$y\in(1,+\infty)$ 而导出的。

5. 已知随机变量$\xi\sim U(-2,4)$，求$\eta=\xi^2$的分布函数。

解:

$$F_\eta(y)=P\{\xi^2\le y\}=\begin{cases}0 & y<0,\\ P\{-\sqrt{y}\le\xi\le\sqrt{y}\}, & 0\le y<4\\ P\{-2\le\xi\le\sqrt{y}\}, & 4\le y<16\\ 1 & y\ge 16\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y<0,\\ \dfrac{1}{3}\sqrt{y}, & 0\le y<4\\ \dfrac{1}{6}(\sqrt{y}+2), & 4\le y<16\\ 1 & y\ge 16\end{cases}$$