华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第五册）

学　院 ____________ 专　业 ____________ 班　级 ____________
学　号 ____________ 姓　名 ____________ 任课教师 ____________

第 8 次作业

一．填空题：

1．设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(x+y)}, & 0<x,y<+\infty \\ 0\quad, & 其他 \end{cases}$，则 $a=$ 1，$P(X\le 2,Y\le 1)=\underline{1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}}$。

2．若二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

则随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\ or\ y<0 \\ 1/6, & 0\le x<1, 0\le y<1 \\ 5/12, & 0\le x<1, y\ge 1 \\ 1/2, & x\ge 1, 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$

3. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，$i=1,2$，且满足 $P(X_1X_2=0)=1$，

则 $P(X_1=X_2)=$ ___0___.

二. 选择题

（1）设 (X,Y) 服从二维均匀的分布，联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1, |y|<x \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$ 则常数 $\boldsymbol{A}$ =（ B ）.

（A）$\frac{1}{2}$　(B) 1　(C) 2　(D) 4.

（2）设（X，Y）的分布函数为 $F(x,y)$，则 $P\{X\geq a, Y>b\}$ =（ C ）

A. $F(a,b)$　B. $1-F(a,b)$

C. $1+F(a-0,b)-F(+\infty,b)-F(a-0,+\infty)$

D. $1+F(a,b)-F(+\infty,b)-F(a,+\infty)$

（3）设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度为 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数，则可以作为某个连续随机变量的概率密度函数的是（ D ）

A. $f_1(x)f_2(x)$　B. $2f_1(x)F_2(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$　D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

三. 计算题

1. 设二维随机向量 (ξ,η) 仅取 $(1,1),(2,3),(4,5)$ 三个点，且取它们的概率相同，求 (ξ,η) 的联合分布列。

解：

ξ \ η	1	3	5
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	0
4	0	0	$\frac{1}{3}$

2. 某箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80，10，10 件，现在从中随机抽取一件，记 $X_i=\begin{cases} 1 & \text{抽到}i\text{等品} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，（$i=1,2,3$）

试求随机变量X_1和X_2的联合概率分布。

解：令 $A_i =$"抽到i等品″，$i = 1,2,3$,则 A_1, A_2, A_3 两两不相容.

$$P(A_1) = 0.8, \quad P(A_2) = P(A_3) = 0.1$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(A_3) = 0.1$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(A_2) = 0.1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(A_1) = 0.8$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(\phi) = 0$$

3． 将一硬币抛掷 3 次，X 表示 3 次中出现正面的次数，Y 表示 3 次中出现正面次数与反面次数之差的绝对值，求 X 和 Y 的联合分布率。

解：当连抛三次出现三次反面时，(X,Y) 的取值为 $(0,3)$；

出现一次正面两次反面时，(X,Y) 的取值为 $(1,1)$；

出现两次正面一次反面时，(X,Y) 的取值为 $(2,1)$；

出现三次正面时，(X,Y) 的取值为 $(3,3)$。

并且 $P\{X = 0, Y = 3\} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$； $P\{X = 1, Y = 1\} = \binom{3}{1}(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$；

$$P\{X = 2, Y = 1\} = \binom{3}{1}(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}；\quad P\{X = 3, Y = 3\} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

所以，(X,Y) 的联合概率分布为：

X \ Y	1	3
0	0	$1/8$
1	$3/8$	0
2	$3/8$	0
3	0	$1/8$

4．设随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}A(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）确定常数A;（2）求$P\{X<1,Y<3\},P\{X+Y<4\}$

解：（1）根据规范性有$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1\ \therefore A=\frac{1}{8}$

（2）$P\{X<1,Y<3\}=\frac{1}{8}\int_0^1\int_2^3(6-x-y)dxdy=\frac{3}{8}$

$$P(X+Y\le 4)=\frac{1}{8}\int_0^2\int_2^{4-x}(6-x-y)dydx=\frac{2}{3}$$

5. 若随机变量X, Y的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且满足$P(X^2=Y^2)=1$。求二维随机变量(X, Y)的联合概率分布。

解：由于$P(X^2=Y^2)=1$，故$P(X^2\neq Y^2)=0$。故有

$P(X=0,Y=1)=P(X=1,Y=0)=P(X=0,Y=-1)=0$，

易得(X, Y)的联合概率分布如下：

Y \ X	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

第 9 次作业

一. 填空题：

1. 如果随机向量(ξ,η)的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	0.1	b
1	a	0.4

并且$P(\xi=1|\eta=1)=\dfrac{2}{3}$，则 a=__0.3__, b=__0.2__.

2. (ξ,η)的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
−1	$\frac{1}{15}$	t	$\frac{1}{5}$
1	s	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若ξ,η相互独立，则（s, t）= （0.1，$\dfrac{2}{15}$）。

3. 设(X,Y)在以原点为中心，r为半径的圆域R上服从均匀分布，求X的边缘概率密度为 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r\\ 0, & |x|>r\end{cases}$.

二. 选择题

（1）设随机变量X服从正态分布$N\left(\mu,4^2\right)$，随机变量Y服从正态分布$N\left(\mu,5^2\right)$，

记$p_1=P\left\{X\le\mu-4\right\}$，$p_2=P\left\{Y\ge\mu+5\right\}$，则__(A)__

(A)对任何实数μ，都有$p_1=p_2$

(B)对任何实数μ，都有$p_1<p_2$

(C)仅对μ的个别值，有$p_1=p_2$

(D)对任何实数μ，都有$p_1>p_2$

（2）设随机变量 X 的可能取值为 x_1,x_2， Y 的可能取值为 y_1,y_2,y_3，若

$P(X=x_1,Y=y_1)=P(X=x_1)P(Y=y_1)$，则随机变量 X 和 Y（　C　）

A．一定独立　B．一定不独立　C．不一定独立　　D．以上答案都不对

（3）．设随机变量 X，Y 相互独立，服从相同的两点分布 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$，则（A）

A．$P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　B．$P\{X=Y\}=\frac{1}{3}$　C．$P\{X=Y\}=0$　D．$P\{X=Y\}=\frac{1}{4}$

三. 计算题

1．设随机变量 ξ,η 的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	0

（1）　求边缘分布列；

（2）　在 $\eta=1$ 的条件下，ξ 的条件分布列；

（3）　问 ξ 和 η 是否独立？

解：（1）

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

η	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$

（2）$P(\xi=0\mid\eta=1)=\dfrac{P(\xi=0,\eta=1)}{P(\eta=1)}=\dfrac{4}{7}$

$$P(\xi=1\mid\eta=1)=\frac{P(\xi=1,\eta=1)}{P(\eta=1)}=\frac{3}{7}$$

$$P(\xi=2\mid\eta=1)=\frac{P(\xi=0,\eta=1)}{P(\eta=1)}=0$$

（3）$\because P(\xi=0,\eta=0)\neq P(\xi=0)P(\eta=0)$

$\therefore \xi$ 和 η 不独立

2．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0<y\le x\}$，

（1） 求系数 A；

（2） X 和 Y 的边缘密度函数；

（3） $f_{X|Y}(x\mid y)$；

（4） X 和 Y 是否独立，为什么？

解：（1）根据规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \quad \therefore A=\dfrac{1}{2}$

（2）$$f_X(x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x \frac{1}{2}xydy=\frac{x^3}{4}, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^2 \frac{1}{2}xydx=y-\frac{y^3}{4}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（3）$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases} \dfrac{2x}{4-y^2} & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

（4）$\because G$ 不是矩形区间，$\therefore$ X 和 Y 不独立

3．设随机变量（X，Y）的联合密度为：$\phi(x,y)=\begin{cases} C & |x|<1, |y|<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

试求：①常数 C；② $P\{X+Y>\frac{1}{2}\}$ 及 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$；③ X 和 Y 的边缘密度函数

解：① $\because \int\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,y)dxdy=1$，$\therefore 4C=1$，得常数 $C=\dfrac{1}{4}$；

② $P\{X+Y>\dfrac{1}{2}\}=\iint\limits_{x+y>\frac{1}{2}}\phi(x,y)dxdy=\dfrac{9}{32}$；

$P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\phi(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\dfrac{1}{4}dxdy=\dfrac{\pi}{4}$；

③ X 和 Y 的边缘密度函数分别为： $\varphi_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |y|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

第 10 次作业

一．选择题：

1. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立，且 $\xi\sim N(-2,4)$ ，$\eta\sim N(1,8)$，则 $\xi+2\eta$ 的密度函数 $p(z)$ 为（ C）。

A、$\dfrac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{72}}$　　B、$\dfrac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{24}}$　　C、$\dfrac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{72}}$　　D、$\dfrac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{24}}$

2. 设随机变量 (ξ,η) 的联合密度函数为 $p(x,y)$ ，则 $\xi+\eta$ 的分布函数 $F(z)$ =（ D）。

A、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}p(z-x,y)dx$　　B、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-x,y)dy$

C、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}p(z-x,y)dy$　　D、$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)dy$

3. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立，其密度函数分别为 $p_1(x)$ 与 $p_2(y)$，则 $\dfrac{\eta}{\xi}$ 的密度函数 $p(z)$ 为（ A）。

A、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p_1(x)p_2(zx)dx$　　B、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x)p_2(z-x)dx$

C、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p_1(zx)p_2(x)dx$　　D、$p(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(z-x)p_2(x)dx$

4. 设随机变量ξ和η相互独立，其分布函数分别为$F_\xi(x)$ 与$F_\eta(y)$，则

$\zeta=\max(\xi,\eta)$ 的分布函数$F_\zeta(z)$ 等于 （ B ）

A． $\max\{F_\xi(z),F_\eta(z)\}$ B. $F_\xi(z)F_\eta(z)$

C． $\frac{1}{2}[F_\xi(z)+F_\eta(z)]$ D. $F_\xi(z)+F_\eta(z)-F_\xi(z)F_\eta(z)$

5. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi\sim P(\lambda)$ ，$\eta\sim P(\lambda)$ ，则下列（ B ）不成立。

A． $P\{\xi+\eta=1\}=2\lambda e^{-2\lambda}$ B. $P\{\xi+\eta=0\}=e^{-\lambda}$

C． $E(\xi+\eta)=2\lambda$ D. $D(\xi+\eta)=2\lambda$

二．填空题：

1. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi\sim N(-2,4)$ $\eta\sim N(-2,12)$ ，则$\xi-\eta$的密度函数$p(z)=\underline{\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{32}}}$

2. 设随机变量ξ和η独立同分布，均服从$(0,1)$ 上的均匀分布，则$\max(\xi,\eta)$的密度函数$p(z)=\underline{\begin{cases}2z, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}}$

3. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi\sim E(1)$ ， $\eta\sim E(2)$ ， 则$P\{\min(\xi,\eta)\le 1\}=$ $\underline{1-e^{-3}}$

4. 设随机变量ξ和η相互独立，且$\xi\sim B(2,0.4)$ ， $\eta\sim B(3,0.4)$ ， 则$\xi+\eta$服从参数为__$\underline{(5,0.4)}$___的二项分布

三．计算题

1. 设随机变量ξ、η相互独立，其密度函数分别为

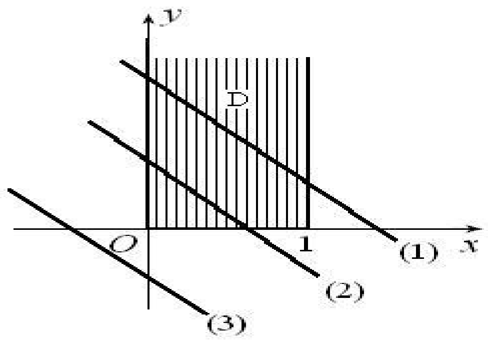
$$p_\xi(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\ ,\quad p_\eta(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

求$\xi+\eta$的概率密度函数。

解:　由ξ,η相互独立得联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

密度函数中非零部分对应的(x,y)落在区域 D 中,利用卷积公式,



当$z\ge 1$时, $p_\zeta(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=(e-1)e^{-z}$,

当$0<z<1$时, $p_\zeta(z)=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}$,

当$z\le 0$时, $p_\zeta(z)=0$,

故 $$p_\zeta(z)=\begin{cases}(e-1)e^{-z}, & z\ge 1,\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

2. 设随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$\xi+\eta$的概率密度函数。

解:　利用卷积公式,　当$z\le 0$或$z\ge 2$时, $p_\zeta(z)=0$,

当 $0 < z < 1$ 时, $p_\zeta(z) = \int_0^z (2-z)dx = 2z - z^2$,

当 $1 \le z < 2$ 时, $p_\zeta(z) = \int_{z-1}^1 (2-z)dx = (2-z)^2$,

故 $p_\zeta(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1, \\ (2-z)^2, & 1 \le z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

3. 设 ξ, η 是两个相互独立的随机变量，且均服从均匀分布 $U(0,1)$ 的随机变量，求 $\xi - \eta$ 的概率密度函数。

解: 由 ξ, η 相互独立得联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

先求分布函数　当 $z \le -1$ 时, $F_\zeta(z) = 0$，

当 $-1 < z < 0$ 时, $F_\zeta(z) = \int_0^{z+1} dx \int_{x-z}^1 1dy = \frac{1}{2}(z+1)^2$,

当 $0 \le z < 1$ 时, $F_\xi(z) = 1 - \int_z^1 dx \int_0^{x-z} 1dy = 1 - \frac{1}{2}(1-z)^2$,

当 $z \ge 1$ 时, $F_\zeta(z) = 1$，

故 $\xi - \eta$ 的概率密度函数为 $p_\xi(z) = \begin{cases} 1+z & -1 \le z < 0 \\ 1-z & 0 \le z < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

4. 已知随机变量 ξ、η 的概率分布分别为

ξ	-1	0	1
$P\{\xi = x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
$P\{\eta = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{\xi\eta = 0\} = 1$。

(1)求 ξ、η 的联合概率分布;

(2)问 ξ、η 是否独立?

(3)求 $\zeta = \max(\xi, \eta)$ 的概率分布。

解: 由于$P(\xi\eta=0)=1$,可以得到$P(\xi=-1,\eta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=0$,

从而

$P(\xi=0,\eta=1)=P(\eta=1)=\frac{1}{2}$,

$P(\xi=-1,\eta=0)=P(\xi=-1)=\frac{1}{4}$,

$P(\xi=1,\eta=0)=P(\xi=1)=\frac{1}{4}$,

$P(\xi=0,\eta=0)=P(\xi=0)-P(\xi=0,\eta=1)=0$,

汇总到联合分布列,即

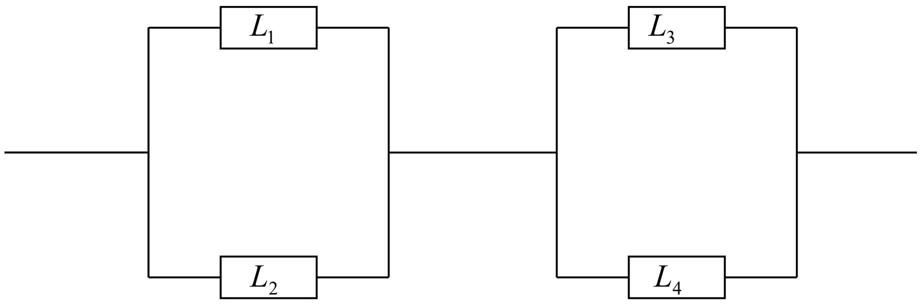
$\xi \backslash \eta$	0	1
−1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2)由于$P(\xi=i,\eta=j)\neq P(\xi=i)\cdot P(\eta=j)$,故$\xi,\eta$不独立.

(3) $P(\zeta=0)=P(\xi=-1,\eta=0)+P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{4}$,

$$P(\zeta=1)=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=0,\eta=1)+P(\xi=1,\eta=0)+P(\xi=1,\eta=1)=\frac{3}{4}$$

5. 电子仪器由 4 个相互独立的部件$L_i\,(i=1,2,3,4)$组成，连接方式如图所示。设各个部件的使用寿命ξ_i服从指数分布$E(1)$，求仪器使用寿命ζ的概率密度。



解: 设各并联组的使用寿命为$\eta_j\,(j=1,2)$，则

$$\zeta=\min\{\eta_1,\eta_2\},\quad \eta_1=\max\{\xi_1,\xi_2\},\quad \eta_2=\max\{\xi_3,\xi_4\}$$

由ξ_i独立同分布知η_1,η_2也独立同分布。现

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

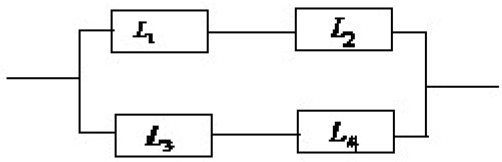
所以 $$F_\eta(y)=F_\xi^2(y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-y})^2 & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

从而

$$F_\zeta(z)=1-\left[1-F_\eta(z)\right]^2=\begin{cases}1-\left[1-(1-\mathrm{e}^{-z})^2\right]^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2z}(2-\mathrm{e}^{-z})^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore p_\zeta(z)==\begin{cases}4\,\mathrm{e}^{-2z}(1-\mathrm{e}^{-z})(2-\mathrm{e}^{-z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}。$$

6. 上题中的电子部件$L_i\,(i=1,2,3,4)$组成，按下列方式联接，求仪器使用寿命ζ的概率密度。



解:　设各串联组的使用寿命为$\eta_j\,(j=1,2)$，则

$$\zeta=\max\{\eta_1,\eta_2\},\quad \eta_1=\min\{\xi_1,\xi_2\},\quad \eta_2=\min\{\xi_3,\xi_4\}$$

由ξ_i独立同分布知η_1,η_2也独立同分布。现

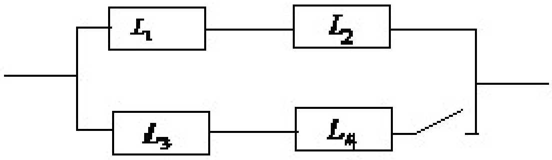
$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

所以 $$F_{\eta_i}(y)=1-(1-F_\xi(y))^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

从而 $$F_\zeta(z)=\left[F_\eta(z)\right]^2=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2z})^2 & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore p_\zeta(z) == \begin{cases} 4\,\mathrm{e}^{-2z}(1-\mathrm{e}^{-2z}) & z>0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}。$$

7．将上题中的串联部分加上一个开关，先用上面部分，如果坏了，合上开关再用下面部分，求仪器使用寿命ζ的概率密度。



解:　设各串联组的使用寿命为$\eta_j\,(j=1,2)$，则

$$\zeta=\eta_1+\eta_2,\quad \eta_1=\min\{\xi_1,\xi_2\},\quad \eta_2=\min\{\xi_3,\xi_4\}$$

由ξ_i独立同分布知η_1,η_2也独立同分布。现

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

所以　$$F_{\eta_i}(y)=1-(1-F_\xi(y))^2=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-2y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$

从而η_i的概率密度为

$$\therefore p_{\eta_i}(y) == \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-2y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}。$$

由(η_1,η_2)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} 4e^{-2(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

$\zeta=\eta_1+\eta_2$利用卷积公式,

当$z\le 0$时, $p_\zeta(z)=0$,

当$z>0$时, $p_\zeta(z)=\int_0^z 4e^{-2z}dx=4ze^{-2z}$