

概率论与数理统计

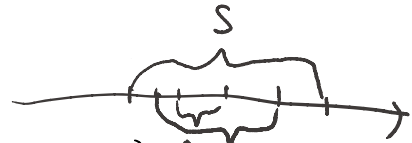
作业簿 (第一册)

学 院 _____ 专 业 _____ 班 级 _____
学 号 _____ 姓 名 _____ 任课教师 _____

第一次作业

一. 填空题:

1. 设 $S = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $A = \{x | \frac{1}{2} < x \leq 1\}$, $B = \{x | \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{2}\}$, 具体写出下列各事件: $\bar{A}B = \{x | \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 < x < \frac{3}{2}\}$, $A \cup B = B$, $\overline{\bar{A}B} = B$, $AB = A$ 。



2. 设 A 、 B 、 C 表示三个随机事件, 试将下列事件用 A 、 B 、 C 表示出来:

- (1) 事件 ABC 表示 A 、 B 、 C 都发生;
(2) 事件 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 表示 A 、 B 、 C 都不发生;
(3) 事件 \overline{ABC} 表示 A 、 B 、 C 不都发生;
(4) 事件 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ 表示 A 、 B 、 C 中至少有一事件发生;
(5) 事件 $AB \cup AC \cup BC$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ 表示 A 、 B 、 C 中最多有一事件发生。

3. 化简事件算式 $\overline{(A \cup B)} \cap (A - \bar{B}) = \emptyset$ 。



二. 选择题:

1. 设 $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 4, 7\}$, 则事件 $\bar{A} - BC =$ (A)。
A. $\{1, 6, 8, 9, 10\}$ B. $\{2, 5\}$ C. $\{2, 6, 8, 9, 10\}$ D. $\{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$

2. 对飞机进行两次射击, 每次射一弹, 设事件 $A =$ “恰有一弹击中飞机”, 事件 $B =$ “至少有一弹击中飞机”, 事件 $C =$ “两弹都击中飞机”, 事件 $D =$ “两弹都没击中飞机”, 又设随机变量 ξ 为击中飞机的次数, 则下列事件中 (C)

不表示 $\{\xi = 1\}$ 。

- ~~A.~~ 事件 A ~~B.~~ 事件 $B - C$ C. 事件 $B - \bar{C}$ D. 事件 $\bar{D} - C$

3. 设 A 、 B 是两个事件，且 $A \neq \emptyset$ ， $B \neq \emptyset$ ，则 $(A+B)(\overline{A+B})$ 表示 (D)。

A. 必然事件

B. 不可能事件

C. A 与 B 不能同时发生

D. A 与 B 中恰有一个发生

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$$



三. 计算题:

1. 写出下列随机试验的样本空间，并把指定的事件表示为样本点的集合:

(1) 随机试验: 考察某个班级的某次数学考试的平均成绩 (以百分制记分, 只取整数);

设事件 A 表示: 平均得分在 80 分以上。

(2) 随机试验: 同时掷三颗骰子, 记录三颗骰子点数之和;

设事件 A 表示: 第一颗掷得 5 点;

设事件 B 表示: 三颗骰子点数之和不超过 8 点。

(3) 随机试验: 某篮球运动员投篮练习, 直至投中十次, 考虑累计投篮的次数; 设事件 A 表示: 至多只要投 50 次。

$$(1) \Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq 100, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{x \mid x > 80, x \in \Omega\}$$

$$(2) \Omega = \{x \mid 3 \leq x \leq 18, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{x \mid 7 \leq x \leq 17, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{x \mid x \leq 8, x \in \Omega\}$$

$$(3) \Omega = \{x \mid x \geq 10, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{x \mid x \leq 50, x \in \Omega\}$$

设女士：①②③

男士：④⑤

2. 某电视台招聘播音员，现有三位符合条件的女士和两位符合条件的男士前来应聘：

(1) 写出招聘男女播音员各一名的样本空间；

(2) 写出招聘两名播音员的样本空间。设事件 A 表示“招聘到两名女士”，把该事件表示为样本点的集合。

$$(1) \Omega = \{①④, ①⑤, ②④, ②⑤, ③④, ③⑤\}$$

$$(2) \Omega = \{①②, ①③, ①④, ①⑤, ②③, ②④, ②⑤, ③④, ③⑤, ④⑤\}$$

$$A = \{①②, ①③, ②③\}$$

3. 如果事件 A 与事件 B 互为对立事件，证明：事件 \bar{A} 与事件 \bar{B} 也互为对立事件。

由对立事件定义，

$$\bar{A} = B, \quad \bar{B} = A.$$

$\therefore A, B$ 对立.

$\therefore \bar{A}, \bar{B}$ 对立.

☆ 4. 化简事件算式 $(AB) \cup (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B) \cup (\bar{A}\bar{B})$ 。

$$= (AB) \cup (A - AB) \cup (B - AB) \cup \overline{(A \cup B)}$$

5. 证明下列等式 $(A - AB) \cup B = \overline{\overline{A}B}$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{左式} &= (A \cap \overline{AB}) \cup B = [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup B \\
 &= [(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})] \cup B \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup B \\
 &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = A \cup B \\
 &= \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \text{右式}
 \end{aligned}$$

6. 设 A 、 B 为两个事件，若 $AB = \overline{A} \cap \overline{B}$ ，问 A 和 B 有什么关系？

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

$$\text{即 } AB \cup (A \cup B) = \Omega$$

$$[A \cup (A \cup B)] \cap [\overline{B} \cup (A \cup B)] = \Omega$$

$$\text{即 } A \cup B = \Omega$$

$\therefore A$ 与 B 是对立关系

第二次作业

$$C_8^4 = 15$$

一. 填空题:

$$C_{10}^4 = 210$$

- 10 个螺丝钉有 3 个是坏的, 随机抽取 4 个。则恰好有两个是坏的概率是 $\frac{1}{70}$, 4 个全是好的概率是 $\frac{1}{14}$ 。
- 把 12 本书任意地放在书架上, 则其中指定的 4 本书放在一起的概率 $9 \times \frac{4!}{12!}$ 。
- 袋中装有编号为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 个球, 每次从中任意摸一球。若按照有放回方式摸球, 则第 k 次摸球时, 首次摸到 1 号球的概率为 $\frac{1}{n}$ 。若按照无放回方式摸球, 则第 k 次摸球时, 首次摸到 1 号球的概率为 $\frac{1}{n}$ 。

$$\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{n-2}$$

二. 选择题:

- 为了减少比赛场次, 把 20 个球队任意分成两组 (每组 10 队) 进行比赛, 则最强的两个队被分在不同组内的概率为 (B)。

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{10}{19}$ C. $\frac{5}{19}$ D. $\frac{1}{10}$

$$n = \frac{C_{20}^{10}}{2} \quad A = C_{18}^9$$

- 从一副扑克牌 (52 张) 中任取 4 张, 4 张牌的花色各不相同的概率 (C)。

A. $\frac{1}{13}$ B. $\frac{13}{C_{52}^4}$ C. $\frac{13^4}{C_{52}^4}$ D. $\frac{13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$

- 进行一系列独立的实验, 每次试验成功的概率为 p , 则在第二次成功之前已经失败了 3 次的概率为 (B)。

A. $4p^2(1-p)^3$ B. $4p(1-p)^3$ C. $10p^2(1-p)^3$ D. $p^2(1-p)^3$

三. 计算题:

- 将长为 a 的细棒折成三段, 求这三段能构成三角形的概率。

先折成长与短两段, 从中选择一段, 0.5 长, 0.5 短。
若短, 则无法构成 \triangle 。若长: 则有 $\frac{1}{4}$ 余下 $> \frac{a}{2}$ 长度。

\therefore 形成三角形概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$



2. 同时掷五颗骰子，求下列事件的概率：

(1) A = “点数各不相同”；

(2) B = “至少出现两个 6 点”；

(3) C = “恰有两个点数相同”；

(4) D = “某两个点数相同，另三个同是另一个点数”；

$$(1) P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} = \frac{5}{54}$$

$$(2) P(B) = \frac{{}_5^3 C_5^2 + {}_5^2 C_5^3 + {}_5^1 C_5^4 + C_5^5}{6^5} = \frac{1250 + 250 + 25 + 1}{6^5} \\ = 0.196$$

$$(3) P(C) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times C_5^2}{6^5} = \frac{25}{54}$$

$$(4) P(D) = \frac{6 \times 5 \times C_5^2}{6^5} = \frac{25}{648} = 0.039$$

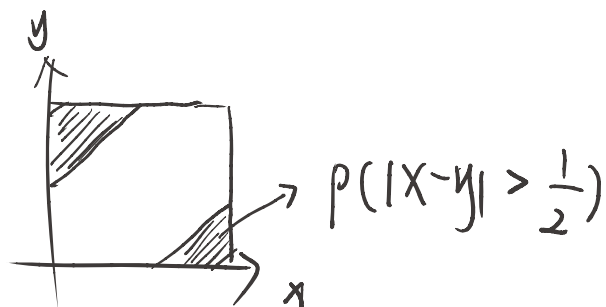
3. 将 10 根绳的 20 个头任意两两相接，求事件 A = {恰结成 10 个圈} 的概率。

$$P(A) = \frac{20 \times 18 \times 16 \times \dots \times 2}{20!} = \frac{1}{19 \times 17 \times 15 \times \dots \times 1} \\ = \frac{1}{\prod_{k=1}^{10} (2k-1)}$$

4. 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 求两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率。

由图.

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \right) = \frac{3}{4}$$

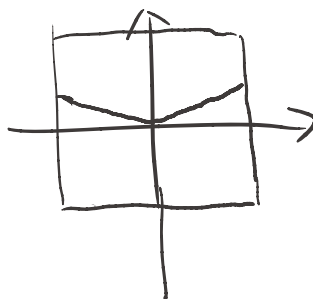


5. 在正方形 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ 中任取一点, 求使得关于 u 的方程

$u^2 + xu + y = 0$ 有 (1) 两个实根的概率 ; (2) 有两个正根的概率。

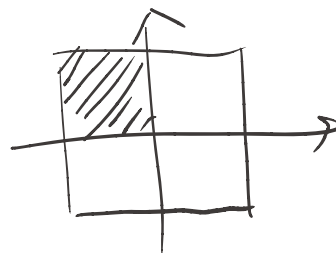
(1) $x^2 - 4y > 0, y < \frac{1}{4}x^2$

$$P = \frac{\int_{-1}^1 \frac{1}{4}x^2 dx + 2}{4} = \frac{13}{24}$$



(2) $-x > 0, y > 0, (x_1 + x_2 > 0, x_1 x_2 > 0)$

$$P = \frac{1}{4}$$



6. n 个人随机地围绕圆桌就座，试问其中 A 、 B 两人的座位相邻的概率是多少？

令其中一人入座，

此时有 $n-1$ 个座位，只有 2 个满足。



$$\therefore p = \begin{cases} \frac{2}{n-1}, & n > 3 \\ 1, & n \leq 3 \end{cases}$$

7. 一部五卷的选集，按任意顺序放在书架上，求：

- (1) 各卷自左至右或者自右至左的卷号顺序恰为 1,2,3,4,5 的概率；
- (2) 第一卷及第五卷分别在两端的概率；
- (3) 第一卷及第五卷都不在两端的概率。

$$(1) \frac{2}{A_5^5} = \frac{1}{60}$$

$$(2) \frac{2 \times A_3^3}{A_5^5} = \frac{1}{10}$$

$$(3) \frac{A_3^2 C_3^1 \times 2}{A_5^5} = \frac{3}{10}$$