Vol. 16(1996)

No. 4

数 学 杂 志

J. of Math. (PRC)

再论成本加成定价的动力学*

张敦穆　　　　李楚霖

(武汉大学,武汉,430072)　　(华中理工大学,武汉,430074)

摘要　Hanson[3]将成本加成定价作为一个动力学过程进行分析。本文推广了Hanson 的命题 3,纠正了 Hanson 命题 2 的一个错误并得出正确的结果。对 U—形平均成本曲线的成本加成定价导出了这一动力学过程产生混沌的充分条件,并讨论了这些结果的经济含义。

关键词　成本加成定价　动力系统　混沌

MR(1991)**主题分类**　90A60

中图法分类　O29

定价是一种技巧,企业需要有市场经验的人员来做此项工作,但不是所有的企业都具备这种能力。Hall 和 Hitch[2]、Skinner[7]以及 Shipley[5]的研究发现在他们所取的样本中,分别有 80%、70%和 59%有企业使用成本加成定价(最后一组分析中除 59%外,另有 33%的企业使用成本加上产品线上某些值来定价),由此可见这是一种被企业广泛采用的定价方式。

小公司通常缺乏定价技巧,从而对小公司成本加成定价成为主要的定价方法。当从计划经济向市场经济过渡时,他们大多数缺乏市场经济上定价的经验。大多数企业将乐于采用成本加成定价方法。

成本加成定价的一个优点是它是一个便于实际操作的方法,因为任何价格(包括利润最大化的结果)都可以作为动态过程的一个不动点。这些不动点是这一过程的均衡值。

为了成本加成定价能得到实际的结果,动力学过程的稳定性分析就极为重要。对过程的混沌性态的分析也是很重要的。因为搞清了产生混沌的条件,才能控制怎样避免陷入到无规则的运动中去。

宏观经济学中经济增长模型的动力学分析大多具有定性的意义,而成本加成定价方式为非线性系统理论提供了一个可实际进行数据拟合的现实应用。

考虑一个一阶 Markov 定价规则(p_t 表时刻 t 的价格):

$$p_t = (t-1)\text{时刻的平均成本} \times \text{希望的加价。} \tag{1}$$

这是由 Simon[6]分析静态规则的简单变形。企业使用上述定价规则,一般不会立刻选出一

* 收稿日期　1995-6-16　国家自然科学基金资助项目

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.c

个稳定价格，因此价格 p_t 将随时间 t 而变化，直到希望的加价等于如下现实的加价为止：

$$\text{现实的加价} = \frac{\text{需求}(p) \times p}{\text{总成本}(p)}, \tag{2}$$

设 F —固定成本，$V(D(p))$ —产量为 D 时的可变成本，M —成本加成，则成本加成过程为：

$$p_{t+1} = \left[\frac{F + V(D(p_t))}{D(p_t)}\right] \cdot M \equiv f(p_t). \tag{3}$$

这构成一个离散动力系统。

引理 1(Hanson[3]，命题 1) 任何能生成正需求的价格，对一个适当选择的成本加成 M，是一个不动点；且只有一个这样的成本加成使此价格为不动点。

对一个既定的 M，价格的不动点可能不只有一个，因此稳定性分析很重要，因为一个不稳定的均衡价格，在实际上是达不到的。

因为C—P 过程(3)的不动点为稳定的条件为：在不动点 p 处有 $|f'(p)| < 1$. 有如下的定理 1(它纠正了 Hanson 文中命题 2 的错误).

定理 1 令 $\eta \equiv \dfrac{\partial \ln D(p)}{\partial \ln(p)}$ — 需求在 p 处的弹性。

条件(A_1)：在 p 处，$\left|\dfrac{MC - ATC}{ATC}\right| < \dfrac{1}{|\eta|}$；

条件(A_2)：在 p 处，$MC > AVC$ 且 $\left|\dfrac{MC - AVC}{AVC}\right| < \dfrac{1}{|\eta|}$；

条件(B)：在 p 处，$|\eta| > 1$.

同一价格 p 既可通过适当选择一个固定成本 F 和成本加成 M 使之成为吸引不动点，如果条件 (A_1)或(A_2)成立；也可通过适当选择一个固定成本 F 和成本加成 M 使之成为排斥不动点，如果条件(B)成立。条件(A_1)、(A_2)和(B)可以同时成立。

证 设 $\hat{p}$ 为所考察的不动点，为了它是吸引不动点，要求 $\left|\dfrac{\partial p_{t+1}}{\partial p_t}\right|_{\hat{p}} < 1$. 因为 $\hat{p}$ 为不动点，所以

$$M \equiv M(\hat{p}, F) = \frac{\hat{p} D(\hat{p})}{[F + V(D(\hat{p}))]},$$

$$\frac{\partial p_{t+1}}{\partial p_t} = \frac{\partial D(p_t)}{\partial p_t} \frac{M(\hat{p}, F)}{D(p_t)}\left[-\frac{F}{D(p_t)} - \frac{V(D(p_t))}{D(p_t)} + \frac{\partial V}{\partial D}\right].$$

在 $\hat{p} = p_t$ 处计算 $M(\hat{p}, F)$，则

$$\frac{\partial p_{t+1}}{\partial p_t} = \frac{\partial D(p_t)}{\partial p_t} \frac{p_t}{D(p_t)}\left[\frac{D(p_t)}{F + V(D(p_t))} \frac{\partial V}{\partial D} - 1\right] = \eta(p_t)\left[\frac{MC - ATC}{ATC}\right], \tag{4}$$

故若条件(A_1)成立，则有 $\left|\dfrac{\partial p_{t+1}}{\partial p_t}\right| < 1$. (4) 式又可写成

$$\frac{\partial p_{t+1}}{\partial p_t} = \eta(p_t)\left[\frac{(MC - AVC) - \dfrac{F}{D}}{AVC + \dfrac{F}{D}}\right],$$

当 $MC > AVC$ 时，因 $F/D > 0$，故至少对某些 $F > 0$，有

$$\left|\frac{(MC - AVC) - \dfrac{F}{D}}{AVC + \dfrac{F}{D}}\right| \leqslant \left|\frac{MC - AVC}{AVC}\right|, \tag{5}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.c

从而当条件(A_2)成立时，亦得 $\left|\frac{\partial p_{t+1}}{\partial p_t}\right| < 1$. 而条件(B)成立时，由于 $\lim\limits_{F\to\infty}\left|\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{ATC}}-1\right| = 1$，由(4)知，对充分大的 F 有 $\left|\frac{\partial p_{t+1}}{\partial p_t}\right| > 1$. 故为排斥不动点。

注　Hanson[3]的命题 2 的证明中用到即使没有条件 $MC > AVC$ 时(即 $MC \leqslant AVC$)亦可选择某些 F，使(5)式成立。而此时，(5)式可改写成：$\left|\frac{(MC - AVC) + \frac{F}{D}}{AVC + \frac{F}{D}}\right| \leqslant \left|\frac{MC - AVC}{AVC}\right|$，但由于 $AVC > 0$，$AVC \geqslant MC > 0$，$D > 0$，$F > 0$，这是不可能的。

上述定理表明，同一个价格，由于企业采用的政策不同(固定成本与流动成本的不同分摊)而有可能成为吸引不动点或排斥不动点，这将可能使成本加成定价的运作产生完全不同的结果。

下面我们对具体模型：

$$D(p_t) = a p_t^{-\alpha} \quad (\alpha > 1), \qquad V(D) = bD^{\beta} \quad (\beta \geqslant 1)$$

作进一步的研究。为方便，记 $\beta = 1 + \gamma$ $(\gamma \geqslant 0)$. 由 p 的经济含义知 $p \geqslant 0$，以后不再说明。以上 a,b 也均为正数。由

$$p_{t+1} = f(p_t) = \frac{F + V(D(p_t))}{D(p_t)}M = M\left(\frac{F}{D} + bD^{\gamma}\right) = M\left(\frac{F}{a}p_t^{\alpha} + ba^{\gamma}p_t^{-\alpha\gamma}\right) \tag{6}$$

我们称(6)式决定的离散系统为 C—P 过程。

由计算知 $f''(p) \geqslant 0$，所以 $f(p)$ 为一 U--形曲线(图 1)。它有唯一极小值 $f(\hat{p})$. $\hat{p}$ 可由方程

$$f'(p) = 0$$

定出

$$\hat{p} = \left(\frac{b\gamma a^{\beta}}{F}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta}} \tag{7}$$

令

$$\hat{F} = a(1 + \alpha\gamma)\left(\frac{\alpha - 1}{ba^{\gamma}}\right)^{\frac{\alpha-1}{1+\alpha\gamma}}(\alpha\beta M)^{\frac{-\alpha\beta}{1+\alpha\gamma}}, \tag{8}$$

有如下：

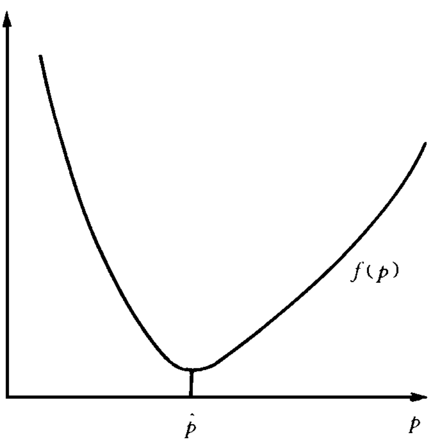

图　1

定理 2　当 $F < \hat{F}$ 时，方程(6)有两个不动点，$0 < \bar{p} < p$，p 为排斥不动点；$\bar{p}$ 当满足

$$(\bar{p})^{\alpha\beta} > \frac{\alpha\gamma - 1}{\alpha + 1}\frac{ba^{\beta}}{F} \tag{9}$$

时为吸引不动点，当满足

$$(\bar{p})^{\alpha\beta} < \frac{\alpha\gamma - 1}{\alpha + 1}\frac{ba^{\beta}}{F} \tag{10}$$

时为排斥不动点。

证　如图 2 所示，$f(p)$ 的图象与第一象限的对角线 Δ 仅有如下三种关系：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.c

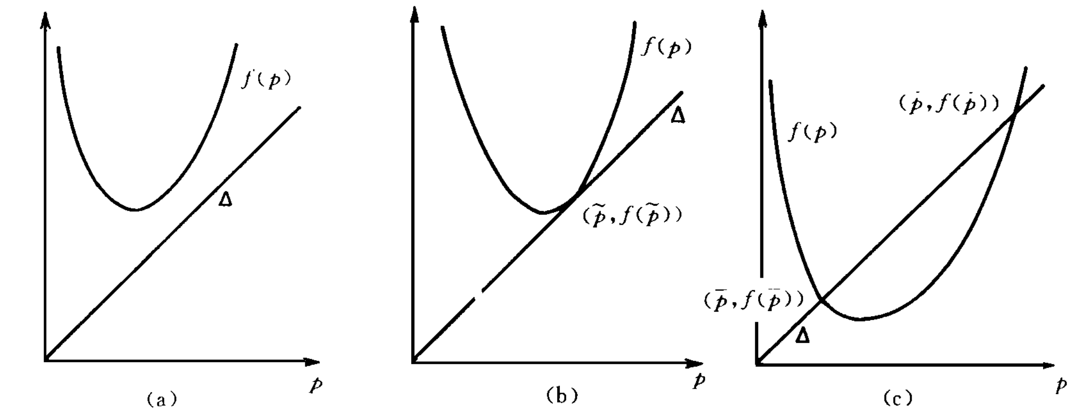

图 2

情形(b)是二曲线相切的情形,切点 $(\tilde{p}, f(\tilde{p}))$ 的横坐标由条件 $f'(p)=1$, $f(p)=p$ 决定,由(6)式即得:

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{\alpha F}{a} p^{\alpha-1} - b\alpha\gamma a^{\gamma} p^{-\alpha\gamma-1}\right) = 1, \\ M\left(\dfrac{F}{a} p^{\alpha} + b a^{\gamma} p^{-\alpha\gamma}\right) = p. \end{cases} \tag{11}$$

由上方程组解得 $\tilde{p}$(显然 $\hat{p} < \tilde{p}$):

$$\tilde{p} = \left[\frac{a(1+\alpha\gamma)}{\alpha\beta MF}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{12}$$

将(12)式代入(11)的第二式求出对应的 F(记作 $\hat{F}$)为:

$$\hat{F} = a(1+\alpha\gamma)\left(\frac{\alpha-1}{ba^{\gamma}}\right)^{\frac{\alpha-1}{1+\alpha\gamma}}(\alpha\beta M)^{\frac{-\alpha\beta}{1+\alpha\gamma}}, \tag{8}$$

由(6)式知,当 F 的值减小时,$f(p)$ 的图象将更向下,从而,当 $F < \hat{F}$ 时,(6) 有二个不动点 $0 < \bar{p} < \tilde{p} < \hat{p}$. 由于 $f'(p)$ 是增函数,所以 $f'(\hat{p}) > f'(\tilde{p}) = 1$, 即 $\hat{p}$ 为排斥不动点。下面讨论保证 $\bar{p}$ 为吸引不动点的条件。首先,当 $\bar{p}$ 满足 $\hat{p} \leqslant \bar{p} < \tilde{p}$ 时,自然有 $0 \leqslant f'(\bar{p}) < 1$. 以下,我们讨论当 $0 < \bar{p} < \hat{p}$, 且 $f'(\bar{p}) > -1$ 的条件,即 $M\left(\dfrac{\alpha F}{a}\bar{p}^{\alpha-1} - b\alpha\gamma a^{\gamma}\bar{p}^{-\alpha\gamma-1}\right) > -1$ 可得

$$(\bar{p})^{\alpha\beta} > \frac{\alpha\gamma-1}{\alpha+1}\,\frac{ba^{\beta}}{F}, \tag{9}$$

综上所述,当(9) 成立时, $-1 < f'(\bar{p}) < 1$, 即 $\bar{p}$ 为吸引不动点,而当(10) 成立时,恒有 $f'(\bar{p}) < -1$, 故为排斥不动点,定理证毕。

注 当 $\beta = 1$, 即($\gamma = 0$) 时,上述模型(6) 即化为 Hanson[3] 的模型(5)(本文与 Hanson 文章中公式所用字母不同),而由 $\gamma = 0$, 不等式(9) 与(10) 的右端为负数,所以(10) 无正解 $\bar{p}$, 而(9) 对任意正的 $\bar{p}$ 均满足,因此,这时 $\bar{p}$ 总是吸引不动点。由此推知 Hanson[3] 命题 3 是上述定理 2 的特例。

由于 $\bar{p}$ 一般不能用已知数据(即 $a, b, \alpha, \beta, M, F$ 等) 表出(当然这些参数给定时,则可用数值方法求 $\bar{p}$),所以条件(9),(10) 的验证不易。下面我们提出一个关于参数 F 的控制条件,当这一条件满足时,保证 $\bar{p}$ 为吸引不动点。这对 C—P 过程的实际操作很重要。先定义一个

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.c

数 $\check{F} \geqslant 0$ 如下：

(i) 若$[Mba]^{(1+\alpha\gamma)^2-1} \geqslant \alpha\gamma$，则令 $\check{F} = 0$；

(ii) 若$[Mba]^{(1+\alpha\gamma)^2-1} < \alpha\gamma$，则令 $\check{F} = \dfrac{\alpha\gamma - [Mba]^{(1+\alpha\gamma)^2-1}}{\dfrac{M}{a} \cdot [Mba]^{\alpha\beta(1+\alpha\gamma)-1}}$.

定理3　对上面定义的$\check{F}$，以及(8)式定义的$\hat{F}$，若参数满足：$\check{F} < F < \hat{F}$，则不动点$\bar{p}$为吸引不动点。

证　定义函数 $G(p) = Mba^{\gamma}p^{-\alpha\gamma}$，$p \geqslant 0$. 则恒有$G(p) < f(p)$，因$G(p)$为单调下降函数，故$p = G(p)$有唯一正不动点$p_1$(图 3)：

$$\check{F} = [Mba^{\gamma}]^{(1+\alpha\gamma)} < \bar{p}$$

因为$f'(p_1) < f'(\bar{p})$，故若p_1满足$f'(p_1) > -1$，则必有 $f'(\bar{p}) > -1$，但条件 $f'(p_1) > -1$ 等价于以下不等式：

$$F\left\{\frac{M}{a}[Mba]^{\alpha\beta(1+\alpha\gamma)-1}\right\} + [Mba]^{(1+\alpha\gamma)^2-1} > \alpha\gamma, \tag{13}$$

而由数$\check{F}$的定义可推知，当$F > \check{F}$时(13)式成立。而前面已证当$F < \hat{F}$时方程(6)有二个不动点，总之，当F满足$\check{F} < F < \hat{F}$时，方程(6)小的不动点$\bar{p}$为吸引不动点。定理证毕。

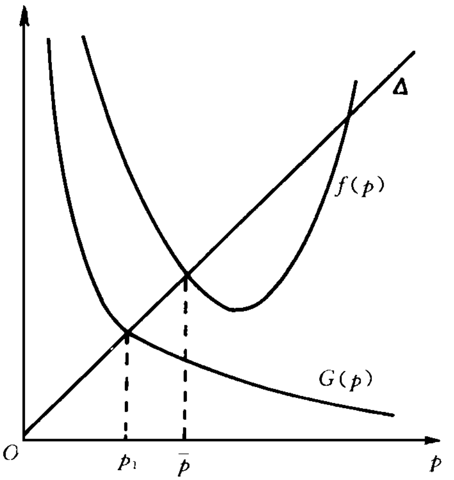

图　3

注　当$\beta = 1$(即$\gamma = 0$)时，必有$\check{F} = 0$，这又表明本定理包括 Hanson[3] 的命题 3 作为特例。

下面我们研究C-P 过程的混沌性态，在下述定理 4 的证明中要用到如下结果(参看 R. H. Day[1]，p. 124 — p. 125)．

引理 2(Li-Yorke)　设$J \subset R$为一区间，$f: J \to J$为连续映射，若存在点$x \in J$，满足$f^3(x) \leqslant x < f(x) < f^2(x)$ 或 $f^3(x) \geqslant x > f(x) > f^2(x)$，($f^m(x)$ 表 $f(x)$ 的 m 次复合：$f^m(x) = f(f(\cdots(f(x))\cdots)))$，则有：

(1) 对每一个正整数k，在J中存在周期为k的周期点；

(2) 存在一个不可数集合$S \subset J$(S不含周期点)和一个不可数集合$S_0 \subset S$，满足如下条件：

(A)　对于所有$p \neq q$的p、$q \in S_0$，　$\limsup\limits_{n\to\infty}|f^n(p) - f^n(q)| > 0$，并且对所有$p \neq q$，$p$、$q \in S_0$，$\liminf\limits_{n\to\infty}|f^n(p) - f^n(q)| = 0$.

(B)　对于每个$p \in S$和周期点$q \in J$，$\limsup\limits_{n\to\infty}|f^n(p) - f^n(q)| > 0$ 即 $x_{t+1} = f(x_t)$ 所决定的动力系统是混沌的。

为了下文叙述简洁，我们先引进几个数：

$$F_0 = b\gamma[a^{-\frac{1}{\alpha}}b\beta M]^{\frac{-\alpha\beta}{1+\alpha\gamma}}, \tag{14}$$

$$F_1 = [a^{-\beta}b^{\alpha-1}\beta^{(\alpha-1)\beta}\gamma^{-(\alpha-1)\gamma}M^{\frac{\alpha\beta+(\alpha^2-1)\beta}{\alpha}}]^{\frac{-1}{1+\alpha\gamma}}, \tag{15}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.c

$$F_2 = \left[a^{\beta(\beta-\alpha\gamma)} b^{(\alpha-1)(\alpha\gamma-\beta)} \beta^{(\alpha-1)\alpha\beta\gamma} \gamma^{-(\alpha-1)\alpha\gamma^2} M^{(\alpha-2)\alpha\beta\gamma}\right]^{\frac{1}{\beta-(\alpha-1)\alpha\gamma^2}} \tag{16}$$

定理 4　对(6)式所定义的离散动力系统，

(A)　若 F 满足

$$F_1 \leqslant F < F_0 . \tag{17}$$

则系统是混沌的；

(B)　当 $\beta > (\alpha - 1)\alpha\gamma^2$ 时，若 F 满足

$$F_2 \leqslant F < F_0, \tag{18}$$

则系统是混沌的；

(C)　当 $\beta < (\alpha - 1)\alpha\gamma^2$ 时，若 F 满足

$$F < F_0 \text{ 且 } F \leqslant F_2 \tag{19}$$

则系统是混沌的。

证　如图 4 所示，U— 型曲线 $f(p)$ 的极小点 $(\hat{p}, f(\hat{p}))$，若在对角线 Δ 下方，则动力系统(6) 有二个不动点 $\bar{p}, p$,

$$\bar{p} < \hat{p} < p$$

而点 $(\hat{p}, f(\hat{p}))$ 在 Δ 下方的充要条件是

$$f(\hat{p}) < \hat{p}. \tag{20}$$

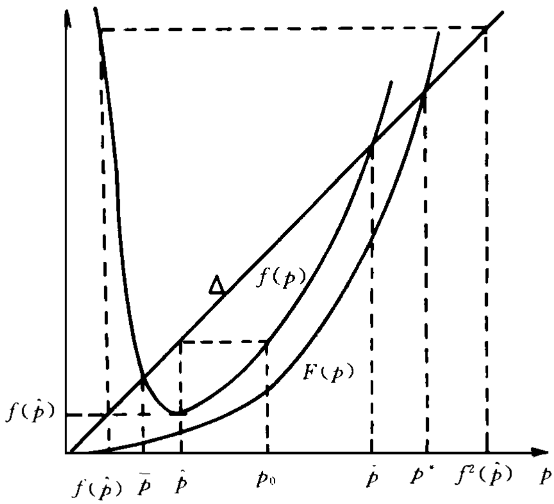

图　1

由于 $f''(p) \geqslant 0$，在区间 $(\bar{p}, p)$ 内存在唯一的 p_0，使得 $f(p_0) = \hat{p}$，若条件

$$f^2(\hat{p}) \geqslant p \tag{21}$$

成立，则有 $f^3(p_0) = f^2(\hat{p}) \geqslant p > p_0 > \hat{p} = f(p_0) > f(\hat{p}) = f^2(p_0)$，即 $f^3(p_0) \geqslant p_0 > f(p_0) > f^2(p_0)$ 成立，由上之引理 2 知动力系统(6) 是混沌的，所以只须选择参数(例如 F 的值) 使得(20)，(21) 二条件均成立，则系统是混沌的。因 $\hat{p}$ 已求出(前面(7) 式)，条件(20) 即 $f(\hat{p}) = Mb\beta\left(\frac{b\gamma}{F}\right)^{-\frac{\gamma}{\beta}} < \left(\frac{b\gamma a^{\beta}}{F}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta}} = \hat{p}$ 解此不等式得 $F < F_0$，条件(21) 的处理比较复杂，这是因为 $\bar{p}$ 的具体表达式不容易求得，为此，我们引进辅助函数 $F(p) = \frac{MF}{a}p^{\alpha}$，$p \geqslant 0$. 显然 $F(p) < f(p)$ 参看图(4)，由于 $\alpha > 1$，$F(p)$ 与对角线 Δ 仅有一个横坐标为正值的交点 $(p^*, F(p^*))$，由于 $p^* = F(p^*)$，可得 $p^* = \left(\frac{a}{MF}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. 显然 $p^* > p$，所以若以下不等式

$$f^2(\hat{p}) \geqslant p^*, \tag{22}$$

成立，则条件(21)一定满足，不等式(22)等价于以下不等式，

$$M\left\{\frac{1}{a} \cdot F^{\frac{\alpha\gamma+\beta}{\beta}} \cdot [Mb\beta(\beta\gamma)^{-\frac{\gamma}{\beta}}]^{\alpha} + ba^{\gamma}F^{-\frac{\alpha\gamma^2}{\beta}} \cdot [Mb\beta(b\gamma)^{-\frac{\gamma}{\beta}}]^{-\alpha\gamma}\right\} \geqslant \left(\frac{a}{MF}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{23}$$

不等式(23)也不容易处理，但若如下二不等式

$$\frac{M}{a}F^{\frac{\alpha\gamma+\beta}{\beta}} \cdot [Mb\beta(b\gamma)^{-\frac{\gamma}{\beta}}]^{\alpha} \geqslant \left(\frac{a}{MF}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{24}$$

$$Mba^{\gamma}F^{-\frac{\alpha\gamma^2}{\beta}}[Mb\beta(b\gamma)^{-\frac{\gamma}{\beta}}]^{-\alpha\gamma} \geqslant \left(\frac{a}{MF}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{25}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.c

之一成立，则(23)必成立，由(24)解得 $F \geqslant F_1$。综上所述，若 F 满足 $F_1 \leqslant F < F_0$，则系统是混沌的，此即结果(A)。

以下讨论不等式(25)的解，分别二种情况：

(i) 若 $\beta > (\alpha - 1)\alpha\gamma^2$，则由(25)解得 $F \geqslant F_2$，故知，若 F 满足 $F_2 \leqslant F < F_0$，则系统是混沌的，此即结果(B)。

(ii) 若 $\beta < (\alpha - 1)\alpha\gamma^2$，则由(25)解得 $F \leqslant F_2$，所以，若满足 $F < F_0$ 且 $F \leqslant F_2$，则系统是混沌的，此即结果(C)。

至此定理证毕。

注　(A)与(B)、(C)并不是互斥，例如当 $\beta > (\alpha - 1)\alpha\gamma^2$ 时，若 F 满足 $\min\{F_1, F_2\} \leqslant F < F_0$，则系统(6)是混沌的。为了使得加成定价过程操作起来有好的结果，F 的选择应该尽量避开这些区域。

参 考 文 献

1 R. H. Day. Complex economic Dynamics. vol. I, Cambridge, Massachusetts, the MIT Press.

2 R. L. Hall et al. Price theory and business behaviour. Oxford Economic Papers 22, May, 12—45.

3 W. Hanson. The Dynamics of Cost-plus Pricing. Managerial and Decision Economics, vol. 13, 149—161.

4 D. D. Shipley. Pricing flexibility in British manaufacturing. Managerial and Decision Economics. 4, 224—233.

5 D. D. Shipley. Dimensions of flexible price management. Quarterly Review of Marketing II, Spring, 1—7.

6 H. Simon. Price Management. Amsterdam, North-Holland.

7 R. C. Skinner. The determination of selling prices. Journal of Industrial Economics 19, July, 201—217.

THE RECONSIDERATION FOR THE DYNAMICS OF COST-PLUS PRICING

Zhang Dunmu(张敦穆)　　*Li Chulin*(李楚霖)

(*Wuhan Univ.*, *Wuhan* 430072)　(*Hauzhong Univ. of Sci. & Tech.*, *Wuhan* 430074)

Abstract

Hanson(1992) analyzed cost-plus pricing as a dynamic process. The paper generalize Hanson's proposition 3, correct Hanson's proposition 2, and give a sufficient condition which cost-plus pricing with a U-shaped average cost curve is subject to chaotic behavior.

Key Words　cost$_p$lus pricing　dynamical　chao

MR(1991) Subject Classification　90A60

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.c