פסקאות המופיעות באדום הן כאלו שעזרה רבה דרושה להשלמתן - אנא כתבו אלי

אוניברסיטת בן־גוריון, סמסטר ב' 2010

מרצה: ד"ר אפרים גורביץ'

חדו"א א 1

רשם: אביעד רייך

13 באפריל 2010

לתיקונים והצעות: reichavi@bgu.ac.il

עותק עדכני: http://github.com/lxmonk/Infi-bgu-2010b

או http://github.com/lxmonk/Infi-bgu-2010b/downloads

תוכן עניינים

I סדרות **5**

1 גבול של סדרה **6**

1.1 המספרים הממשיים 6

1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים 6

1.1.2 עקרון ההתלכדות 7

2 התכנסות **8**

2.1 סדרות אפסיות 9

2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר" 9

2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים 9

2.3 המספר e $(2.718281828459045...)$ 12

2.3.1 גבולות הקשורים למספר e 12

2.3.2 אירציונליות e 13

3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים **14**

3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 14

4 ביטויים בלתי מסוימים **16**

5 גבולות חלקיים **17**

5.1 דוגמאות לגבולות חלקיים 17

5.1.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת): 17

5.1.2 שתי סדרות 17

5.1.3 סדרה חסומה ולא מתכנסת 18

5.2 הלמה של בולצנו־ויירשטרס 18

5.2.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים 19

6 קריטריון ההתכנסות **20**

6.1 קריטריון קושי 20

II טורים מספריים **21**

7 התכנסות והתבדרות **22**

7.0.1 הטור הסטנדרטי 22

7.1 טורים חיוביים 23

7.1.1 מבחן קושי לטורים חיוביים 23

7.1.2 מבחן דלמבר לטורים חיוביים 24

7.2 טורים בעלי סימנים כלשהם (מתחלפים) 25

7.2.1 טורי לייבניץ 25

7.2.2 *הגדרות: התכנסות מוחלטת ובתנאי* 25

7.3 טורים של מכפלת סדרות 26

7.3.1 טרנספורמציית אבל (Abel) 26

7.3.2 משפט עזר 26

תזכורת

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \quad |q| < 1$$

$$(1+x)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

חלק I

סדרות

1 גבול של סדרה

1.1 המספרים הממשיים

1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים

- חיבור

  1. $a+b=b+a$
  2. $(a+b)+c=a+(b+c)$
  3. $a+0=a$
  4. $a+(-a)=0$

- כפל

  1. $a\cdot b=b\cdot a$
  2. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
  3. $a\cdot 1=a$
  4. $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$, $\quad a\neq 0$

- $<$

  1. $a<b,\, b<a,\, b=a$ – אחד מהשלושה תמיד יתקיים.
  2. $a<b,\, b<c\Rightarrow a<c$

- ?

  1. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
  2. $a>b\Rightarrow a+c>b+c$
  3. $a>b,\, c>0\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$
  4. $a\in\mathbb{N},\, r>0,\, r\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{1}{n}<r$ (אקסיומת ארכימדס)

1.1.2 עקרון ההתלכדות

אם נתונים שני מספרים a, b וידוע שההפרש $|a-b|$ קטן מכל מס' חיובי $\varepsilon>0$, אז מכאן $a=b$.

הוכחה נניח שזה לא כך. כלומר: $a<b$ מכאן, קיים $\varepsilon>0$ כזה שעבורו $\varepsilon<b-a$. (?!) *סתירה*.

2 התכנסות

הגדרה מספר ממשי A יקרא גבול של סדרה a_n אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ יתקיים $|a_n - A| < \varepsilon$.

$\lim a_n = A$

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$

$a_n \to A$

$C, C, C, C, \ldots, C$

$\lim C = C$

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

נתבונן בסדרה $a_n = (-1)^n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים

$|(-1)^n - C| < \varepsilon$

נתבונן בסדרה $a_n = n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים $|n - C| < \varepsilon$.

משפט אם סדרה מתכנסת, אז היא חסומה.

משפט אם סדרה a_n מתכנסת, אז כל תת־סדרה של a_n מתכנסות.

משפט אם סדרה מונוטונית וחסומה היא בהכרח מתכנסת.

משפט $a_n \to A,\ b_n \to B\ \Rightarrow\ a_n \pm b_n = A \pm B$.

משפט $a_n \to A,\ b_n \to B\ \Rightarrow\ a_n \cdot b_n = A \cdot B$.

משפט $a_n \to A,\ b_n \to B, B \neq 0\ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

משפט שני השוטרים $a_n \le C_n \le b_n,\ \lim a_n = \lim b_n = A \Rightarrow \lim C_n = A$

2.1 סדרות אפסיות

$a_n \to 0$ נקראת סדרה אפסית

שים לב:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0,\, b_n = \frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n} = \frac{1}{2} \neq 0 \ (0/0)$$

$$c_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{c_n}{b_n} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2 \cdot n}$$

הסדרה c_n שואפת לאפס **מהר יותר** מהסדרה b_n.

2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר"

הגדרה נאמר שa_n שואפת לאפס מהר יותר מb_n אם מתקיים $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

משפט מכפלה של סדרה חסומה בסדרה אפסית היא סדרה אפסית. יהיו a_n סדרה אפסית, ו c_n סדרה חסומה. אזי: $0 \leq |c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| \leq M \cdot |a_n| = 0$

2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים

.1

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{1+(-1)^n}{n} \right) = 0$$

(א) $\frac{1+(-1)^n}{n} \ : \ 0,\ \frac{2}{2},\ 0,\ \frac{2}{4},\ \ldots$

.2

$$a_n = \frac{n^2+5n-2}{3n^2-4n+1} = \frac{\cancel{n}^2\left(1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n}^2\left(3-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1}{3}$$

.3 יהי P פולינום ממעלה m וQ פולינום ממעלה n. אזי:

$$a_n = \frac{P_m}{Q_n} \to \begin{cases} 0 & m < n \\ \frac{\alpha}{\beta} & m = n \\ No\,limit & m > n \end{cases}$$

4. $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=\lim\left(\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=0$

5.

$$\begin{aligned}\lim\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)= \\ & \lim\left(\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)= \\ & \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}={}^1\!/_2\end{aligned}$$

6. $\lim\left(\frac{A\cos n+B\sin n}{\sqrt{n}}\right)=0$

7. **<u>אי־שיוויון ברנולי</u>**

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n\left(n+1\right)}{2!}x^2+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\ldots2\cdot1}{n!}x^n>1+nx$$

משפט אם $a>1$, אז $\lim\sqrt[n]{a}=1$

הוכחה $\sqrt[n]{a}-1=t>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}=1+t\Rightarrow a=(1+t)^n$

וכעת, ע״פ אי־שיוון ברנולי נקבל

$(1+t)^n>1+nt\Rightarrow a>1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\Rightarrow0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$

שני צידי המשוואה (0 ו $\frac{a-1}{n}$) שואפים לאפס, ולכן ע״פ חוק הסנדוויץ׳,

$\sqrt[n]{a}-1\to0\Rightarrow\sqrt[n]{a}\to1$ מש״ל.

משפט $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

הוכחה $\sqrt[n]{n}-1=x,\ (x>0)\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{n}=1+x\Rightarrow n=(1+x)^n$

ושוב, נשתמש באי־שיוויון ברנולי (במהדורה מורחבת)

$$n=(1+x)^n>1+nx+\underline{\frac{n\left(n-1\right)}{2}x^2}>1+nx+\underline{\frac{n^2}{4}x^2}$$

הדבר אפשרי משום ש $\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{4}$

$$\begin{aligned} n\quad &>\quad 1+nx+\frac{n^2}{4}x^2=\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2\Rightarrow\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2<n\Rightarrow\\ &\sqrt{\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2}<\sqrt{n}\Rightarrow\left|1+\frac{nx}{2}\right|<\sqrt{n}\Rightarrow\\ &\left(-\sqrt{n}\right)<1+\frac{nx}{2}<\sqrt{n}\Rightarrow-\sqrt{n}-1<\frac{nx}{2}<\sqrt{n}-1\Rightarrow\\ &\frac{-2\sqrt{n}-2}{n}<x<\frac{2\sqrt{n}-2}{n}\Rightarrow\\ &0<x<0\Rightarrow\sqrt[n]{n}\to 1\end{aligned}$$

מש"ל.

משפט $\lim\frac{10^n}{n!}\to 0$

חישוב

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10^{n+1}n!}{(n+1)!10^n}=\frac{10}{n+1}\Rightarrow$$

נזכור, כי כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

$$a_{n+1}=a_n\cdot\left(\tfrac{10}{n+1}\right)\Rightarrow A=A\cdot 0$$

משפט $\lim\frac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$ **או למשל** $\lim\frac{n^a}{b^n}=0,b>1$

הוכחה

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{10}\cdot 10}{10^{n+1}n^{10}}=\frac{1}{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}$$

$$\lim a_{n+1}=\lim a_n\cdot\tfrac{1}{10}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{10}\Rightarrow A-A\cdot\tfrac{1}{10}=0\Rightarrow A\cdot\tfrac{9}{10}=0\Rightarrow A=0$$

2.3 המספר e (2.718281828459045...)

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ & 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots \\ & +\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \end{aligned}$$

$$x_{n+1} > x_n$$

כלומר: מדובר בסדרה עולה.

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} < 2+\underbrace{1} < 3$$

כלומר: הסדרה חסומה (גם) ע"י המספר 3.

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$

$$\mathbf{l}\text{ogarithmus } \mathbf{n}\text{aturalis} \longleftrightarrow \log_e x \equiv \ln x$$

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

2.3.1 גבולות הקשורים למספר e

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = [n=2k] = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^2 = e^2$$

ובאופן כללי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

2.3.2 אירציונליות e

נוכיח שהמספר e אירציונלי:

$$
\begin{aligned}
y_n &= \lim\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\Rightarrow \\
y_{n+m}-y_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+m)!}= \\
& \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right] \\
&< e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right]=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n-2}}=
\end{aligned}
$$

המעבר האחרון על פי סכום סדרה הנדסית אינסופית $1+q+q^2+\ldots=\frac{1}{1-q}$

$\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{n!n}$ **ניתן לבדוק ולהגיע לסתירה אם ההנחה ההפוכה, ולכן אי השיוויון נכון.**

קיבלנו: $y_{n+m}-y_n<\frac{1}{n!n}$. **מכאן, נעבור לגבול כאשר** $n\to\infty$**:** $\lim_{m\to\infty}(y_{n+m}-y_n)\leq$ $\frac{1}{n!n}\Rightarrow e-y_n\leq\frac{1}{n!n}$

הצבנו את e **במקום** y_{n+m} **משום שכך הוגדר.**

$e-y_n=\frac{\theta}{n!n},\ 0<\theta<1$ **בכדי להחליף את הסימן** $\leq$ **בסימן השיוויון (=), החלפנו את 1 ב** θ.

$e=y_n+\frac{\theta}{n!n}$ **מכאן, ברור כי** e **אירציונלי, משום שאם נניח כי e רציונלי נקבל סתירה:**

משום שהביטוי הנ"ל נכון עבור כל n**, ובפרט עבור** $n=q$**, נקבל:** $e=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}\Rightarrow$

$e=\frac{p}{q}\Rightarrow e=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{\theta}{q!q}=\frac{p}{q}$ **אם נכפיל את שני האגפים ב**$q!$ **נקבל סתירה:**

$n_1+\frac{\theta}{q}=n_2$ **כאשר** n_1,n_2 **שלמים, ואילו** $\frac{\theta}{q}$ **שבר.**

3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים

3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

הוכחה

$e \nearrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ הסדרה שואפת ל-e בעלייה.

$e \searrow y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ הסדרה שואפת ל-e בירידה. (למשל $y_1 = 4,\ y_2 = 3.375$).

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}n^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n}\frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} =$$
$$\frac{n}{n+1}\frac{\left[(n+1)^2\right]^{n+2}}{n^{n+2}(n+2)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} =$$
$$\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}$$

כעת, ע"פ אי־שיוויון ברנולי $(1+\alpha)^n > 1+\alpha n$ נקבל:

$1 = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}$ סיום ההוכחה חסר!

$H_n = \ln n + C + \alpha_n$ כאשר C קבוע, $\alpha_n \to 0$.

$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ הסדרה ההרמונית.

נתבונן בסדרה $C_n = H_n - \ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$

$$C_{n+1}-C_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\ln n =$$
$$\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$$

$$C_n = H_n - \ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n =$$
$$\ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot n} = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C\Rightarrow\lim C_n=C\Rightarrow C_n-C\to 0\Rightarrow H_n-\ln n-C=\alpha_n\Rightarrow H_n=\ln n+C+\alpha_n$$

קבוע אוילר. לא ידוע האם הוא רציונלי או אירציונלי $C=0.577\ldots$

הסכום ההרמוני שואף לאינסוף במהירות של הלוגריתם הטבעי. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln n$

$H_{1000}=7.48\ldots\qquad H_{1000000}=14.39\ldots$

4 ביטויים בלתי מסוימים

$a_n = n$

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ **חשוב!** סדרה זו **<u>לא מתכנסת</u>** (לא לאינסוף ולא לשום ערך אחר). הסדרה **שואפת** (מתבדרת).

$\lim b_n = -\infty$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$ זה הוא ביטוי בלתי־מסוים.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \ldots$ גם זה ביטוי בתלי־מסוים.

נוספים: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

5 גבולות חלקיים

הגדרה

תהי $\{x_n\}_1^\infty$ סדרה. המספר l נקרא גבול חלקי אם קיימת תת־סדרה x_{n_k} המתכנסת לl. הגבול החלקי הקטן (גדול) ביותר נקרא גבול תחתון (עליון) ומסומן $\underline{\lim} x_n$ $(\overline{\lim} x_n)$ בהתאמה.

5.1 דוגמאות לגבולות חלקיים

לסדרה $a_n = (-1)^n$ יש תת־סדרות מתכנסות (היא עצמה לא..):

$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

$-1, -1, -1, -1, -1 \ldots$

אם לסדרה a_n קיימת תת־סדרה $a_{n_k} \to A$ אזי A יקרא גבול חלקי של הסדרה a_n.

$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$

נתבונן בסדרה $x_n = \cos \frac{\pi n}{4}$:

$\cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{4}, \cos \pi \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$

חמשת הגבולות החלקיים (האפשריים) לסדרה זו הם: $-1, 1$, $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.1.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת):

נתבונן בסדרה $x_{\alpha\beta\ldots\gamma} = 0.\,\alpha\beta\ldots\gamma$

$x_1 = 0.1 \qquad x_2 = 0.2 \qquad x_3 = 0.\,3 \qquad x_{14} = 0.14$

נשים לב ש $x_1 = x_{10} = x_{100} \ldots = 0.1$ ולכן 0.1 הוא גבול חלקי. אבל גם (למשל)

$x_{358} = x_{3580} = 0.358$

הוא גבול חלקי. למעשה, **כל מספר רציונלי ב $[0.1, 1]$ הוא גבול חלקי של הסדרה!** אבל מכך נובע שגם כל מספר **אי־רציונלי ב $[0.1, 1]$ הוא גבול חלקי של הסדרה.**

5.1.2 שתי סדרות

נוכיח כי עבור שתי הסדרות $x_n, y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ אם $x_n \to A$ אז $y_n \to A$. אולם,

צ"ל: כל הגבולות החלקיים של שתי סדרות אלו הם אותם המספרים.

משפט לשתי סדרות אלו אותם גבולות חלקיים.

הוכחה נניח כי A הוא גבול חלקי של x_n, **צ"ל** $y_n \to A$.

נתון $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$. **צ"ל** $y_{n_k} = x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}$

נזכור כי $\lim \sqrt[n]{n} \to 1$ **ולכן,** $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = A \cdot 1 = A$

כעת, יש להראות כי

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = B \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow x_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\sqrt[n_k]{n_k}} \Rightarrow x_{n_k} \to \frac{B}{1} = B$$

5.1.3 סדרה חסומה ולא מתכנסת

נתון כי x_n **חסומה -** $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$. **האם הסדרה מתכנסת?**

תשובה: הסדרה לא תמיד מתכנסת. יתכן כי היא מתבדרת. למה? (לא הוכחה מלאה)

די לתת דוגמא בכדי לסתור את הטענה:

הסדרה $0, 0.5, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1\ldots$ **עונה על ההגדרה אבל אינה מתכנסת.**

5.2 הלמה של בולצנו־ויירשטרס

משפט כל סדרה חסומה כוללת תת־סדרה מתכנסת (אחת לפחות)

הוכחה נתבונן בסדרה החסומה $x_n \in [a_0, b_0]$ **צ"ל:** קיימת תת־סדרה של x_n המתכנסת. נוכיח בעזרת שיטת בולצנו (Bolzano):

נתבונן בנקודה האמצעית בקטע הנתון. לפחות אחת המחציות כוללת מספר אינסופי של איברים בסדרה. נקרא לקטע הנבחר (מחצית הקטע הראשון) $[a_1, b_1]$. שוב, נחלק את הקטע לשני חלקים באמצעו, ונקבל את הקטע $[a_2, b_2]$ שבו מספר אינסופי של איברים. נמשיך כך מספר אינסופי של פעמים. נקבל כי $\ldots \supset [a_1, b_1] \supset [a_1, b_1] \supset [a_0, b_0]$ ואז נקבל כי $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. על פי הלמה של קנטור, קיימת נקודה c_0 המשותפת לכל הקטעים.

נבחר x_{n_1} השייך לקטע $[a_1, b_1]$, ולאחריו x_{n_2} השייך לקטע $[a_2, b_2]$ וכך הלאה. משום שבקטעים שבחרנו תמיד ימצאו אינסוף איברים, תמיד נוכל לבנות סדרה אינסופית השואפת לנקודה/מספר c_0 המורכבת מאיברים שונים של הסדרה המקורית. באופן כללי נאמר, $x_{n_k} \in [a_{n_k}, b_{n_k}] \to [c_0, c_0]$ ולפי משפט הסנדוויץ', נקבל $x_{n_k} \to c_0$. מש"ל.

הערה אם הסדרה המקורית לא חסומה, לא בהכרח ניתן לבחור את הקטע הראשון, ולכן לא ניתן להשתמש בשיטה ועל כן נאמר כי הסדרה שואפת ל $+\infty$.

5.2.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים

נסמן באות X את קבוצת כל הגבולות החלקיים. האם קיים גבול חלקי מקסימלי ומינימלי?

גבולות אלו יקראו הגבול העליון והגבול התחתון.

נסמן: $\underline{\lim} x_n$ לגבול התחתון, ו $\overline{\lim} x_n$ לגבול העליון.

Xלא כוללת נקודות בודדות. בכל קבוצה חסומה קיימים הסופרמום והאינפימום: $supX,\ infX$ שגם הם גבולות חלקיים של הסדרה. הסופרמום הוא הגבול המקסימלי.

כלומר: ב X תמיד ימצא איבר מקסימלי ואיבר מקסימלי.

אם הסדרה x_n חסומה, אזי $\overline{\lim} x_n = \sup x_n$, ו $\underline{\lim} x_n = \inf x_n$.

אם הסדרה x_n לא חסומה, $\overline{\lim} x_n = \infty$, ו $\underline{\lim} x_n = -\infty$.

6 קריטריון ההתכנסות

נשוב ונעסוק בסדרות מתכנסות. כלומר: $A \to x_n$. מכאן, לכל $\epsilon > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > n_0$ קיים A כך ש $|x_n - A| < \epsilon$.

6.1 קריטריון קושי

קושי היה הראשון לקבוע את "קריטריון קושי" המאפשר לנו להיפטר מA בהגדרה, ועדיין לברר האם קיים גבול לסדרה אם לאו.

המשפט נתונה סדרה x_n. סדרה זו מתכנסת אמ"ם עבור כל $\epsilon > 0$ קיים מספר $N \in \mathbb{N}$ כך שקיימים שני מספרים $n, n' > N$ עבורם $|x_n - x_{n'}| < \epsilon$

(בנוסח דומה)

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ converges} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0(\varepsilon)} \forall_{n>n_0} \forall_{p\in\mathbb{N}} |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

הוכחה נניח x_n מתכנסת. מכאן, $|x_n - A| < \epsilon$, ובדומה, $|x_{n'} - A| < \epsilon$. כעת, נרצה לחשב את $|x_n - x_{n'}|$:

$|x_n - x_{n'}| = |x_n - x_{n'} - A + A| = |(x_n - A) + (A - x_{n'})| \le 2 \cdot \epsilon$. המעבר האחרון על פי אי־שיוויון המשולש.

כעת, נוכיח את הכיוון ההפוך: נניח שעבור כל $\epsilon > 0$ קיים N: $n, n' > N \Leftarrow |x_n - x_{n'}| < \epsilon$.

מכאן, $x_{n'} - \epsilon < x_n < x_{n'} + \epsilon$. מסקנה: $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

חלק II

טורים מספריים

7 התכנסות והתבדרות

טור הוא סכום של סדרה אינסופית.

תהי סדרה a_n אזי סכום j האיברים הראשונים, נקרא S_j

$(A) = \sum a_k,\ (B) = \sum b_k$

משפט תנאי הכרחי להתכנסות טור: $\{a_n\}^{\infty} \to 0$ כלומר: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow a_n$ diverges

משפט אם הטור B מתכנס, ואיברי A לא עולים על איברי B, אזי גם A מתכנס.

משפט אם

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ 0 < k < \infty \tag{7.1}$$

אז A ו B מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

הוכחה

<u>מתכנסים ביחד:</u>

נניח כי b_n מתכנס, וכי **7.1** מתקיימת. מכאן,

$\frac{a_n}{b_n} \to k \Leftarrow \frac{a_n}{b_n} < k_1 \Leftarrow a_n < k_1 b_n \Leftarrow (A)$ מתכנס.

<u>מתבדרים ביחד:</u>

נניח כי b_n מתבדר וכי **7.1** מתקיימת. מכאן,

$\frac{a_n}{b_n} \to k \Leftarrow \frac{a_n}{b_n} > k_2 \Leftarrow a_n < k_2 b_n \Leftarrow (A)$ מתבדר.

7.0.1 הטור הסטנדרטי

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} p > 1 & \text{converges} \\ p < 1 & \text{diverges} \end{cases}$

דוגמא לשימוש: $\overbrace{\underbrace{\frac{1}{n^{\frac{2009}{2010}}}}_{b_n}}^{a_n} = \frac{n^{2\frac{1}{2010}}}{n^3} \sim \sum_{10}^{\infty} \frac{n^2\cdot\sqrt[2010]{n+3}+2n+1}{3n^3-4n+2}$. **עפ"י הטור הסטנדרטי, ברור כי b_n מתבדר. משום ש $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3}$ נסיק כי גם $\sum a_n$ מתבדר.**

דוגמאות:

- נתבונן דוגמא הבאה: $\Sigma\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, ונראה שמתקיים $\sum\frac{1}{n+1}=\sum\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}>\sum\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ קיבלנו טור הרמוני, שידוע שאינו מתכנס. טור הגדול מטור שאינו מתכנס - אינו מתכנס בעצמו.

- דוגמא נוספת: $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. נחלק בטור (המתבדר) ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ ונקבל $1\leftarrow\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\sum\frac{1\cdot n}{n\sqrt[n]{n}}=\frac{\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\sum\frac{1}{n}}$ משום שהמנה מתכנסת, נאמר שהטור הנתון והטור ההרמוני מתבדרים ביחד, ולכן הטור מתבדר.

- *דוגמא לא מלאה:*

$$\sum\frac{n!^2}{(2n)!}=\sum\frac{n!n!}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}=\sum\frac{n!n!}{\underbrace{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots2n}\cdot\underbrace{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot(2n-1)}}=$$
$$\sum\frac{\cancel{n}!n!}{2^n\ \cancel{(}n!)\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot(2n-1)}=$$
$$\sum\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{8}+\frac{6}{9}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

7.1 טורים חיוביים

7.1.1 מבחן קושי לטורים חיוביים (מבחן השורש של קושי)

יהי Σa_n טור חיובי אינסופי. נסמן $C_n=\sqrt[n]{a_n}$ ו $\lim C_n=q$.

1. אם $1>q\geq C_n$ אז הטור מתכנס.
2. אם $C_n\geq1$ אז הטור מתבדר.

לרוב נעשה שימוש בגרסא חלשה: $\lim C_n=q<1\Leftarrow a_n$ converges.

הוכחה: $\sqrt[n]{a_n}\leq q<1\Rightarrow a_n\leq q^n<1\Rightarrow a_n\leq1$

- דוגמא לשימוש: $\sum\frac{1}{(\ln n)^n}\Rightarrow C_n=\frac{1}{\ln n}\Rightarrow\lim C_n=0<1$ מכאן, שהטור מתכנס.

- דוגמא נוספת: $\Sigma q^n\Rightarrow\lim C_n=q$ הטור מתכנס אם"ם $q<1$.

- דוגמא נוספת: $\sum\frac{1}{n}\Rightarrow C_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ ולכן המבחן לא עוזר...

- דוגמא נוספת: $\sum\left(\frac{x}{n}\right)^n\Rightarrow\lim\frac{x}{n}\to0<1$ ולכן טור זה מתכנס.

7.1.2 מבחן דלמבר לטורים חיוביים

מבחן ד'אלמבר חלש יותר ממבחן השורש של קושי. כלומר - מבחן השורש מכריע עבור כל טור שעבורו מבחן המנה מכריע, אבל מבחן המנה לא בהכרח מכריע עבור כל טור שעבורו מבחן השורש מכריע. עם זאת, במקרים רבים נוח יותר להשתמש במבחן המנה מאשר במבחן השורש.

מבחני התכנסות לטורים. (20 בינואר, 2010). *ויקיפדיה, האנציקלופדיה החופשית.* **אוחזר** 19:09, מרץ 26, 2010.

יהי $\sum a_n$ **טור חיובי אינסופי. נגדיר** $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- **אם** $D_n \le q < 1$ **אז הטור מתכנס.**
- **אם** $D_n \ge 1$ **הטור מתבדר.**
- **אולם כאשר מדובר בגבול, המצב מעט שונה:**
  - **אם** $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow q < 1$ **אזי הטור מתכנס.**
  - **אם** $q > 1$ **אז הטור מתבדר.**
  - **אך כאשר** $q = 1$ **לא ניתן לדעת.** (כשמדובר בגבול)

כלומר:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} > 1 & \text{diverges} \\ < 1 & \text{converges} \\ = 1 & ??? \end{cases}$$

דוגמאות:

- $\sum q^n \Rightarrow D_n = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q \to q$ ולכן ההתכנסות תלויה בערכו של q (כמו שהראה מבחן קושי)
- $\sum \frac{1}{n} \Rightarrow D_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$ ולכן ידוע שהטור לא מתכנס (טור הרמוני - לא מפתיע)
- $\sum \frac{x^n}{n!} \Rightarrow D_n = \frac{x^{\cancel{n}+1}\cancel{n!}}{(n+1)!\cancel{x^n}} = \frac{x}{n+1} \to 0$ (דוגמא יותר מעניינת) הטור מתכנס (לערך e).
-

$$\begin{aligned} \sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow D_n &= \frac{(n+1)!x^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!x^n} = \frac{(n+1)\,xn^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{xn^n}{(n+1)^n} = \\ &x\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = x\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \\ &x\cdot\frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to x\cdot\frac{1^n}{e} \to x\frac{1}{e} = \frac{x}{e} \end{aligned}$$

הטור מתכנס אם $x < e$ **ומתבדר אם** $x > e$.

- $\sum \frac{(nx)^n}{n!} \Rightarrow D_n = \frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}n!}{(n+1)!n^n x^n} = \frac{x(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = x\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = x\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to xe$

  הטור מתכנס אם $xe < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{e}$ מתבדר הפוך, ולא ברור אם $x = \frac{1}{e}$.

7.2 טורים בעלי סימנים כלשהם (מתחלפים)

נתעסק רק במקרים בהם ישנם אינסוף איברים בעלי סימן חיובי ואינסוף איברים בעלי סימן שלילי, משום שכל מקרה אחר יכול להיות מוכלל על ידי התייחסות אל הטור כבעל מס' אינסופי של איברים מסוג אחד בלבד.

נחפש תנאי כללי להתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A). הדבר דומה לתנאי התכנסות של הסדרה S_n של הסכומים החלקיים. נקבע זאת על פי קריטריון קושי. $\lim S_n = A \Leftrightarrow |S_{n'} - S_n| < \epsilon$ לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ שכאשר $n > N$ כלומר: $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon$

7.2.1 טורי לייבניץ G. Leibnitz

משפט אם סימני הטור מתחלפים, ובנוסף $|a_n| \to 0$ **באופן מונוטוני**, אז הטור מתכנס. לדוגמא, הסדרה $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנסת.

7.2.2 *הגדרות: התכנסות מוחלטת ובתנאי*

הגדרה אם טור $\sum a_n$ מתכנס, וגם $\sum |a_n|$ מתכנס, אזי $\sum a_n$ יקרא **מתכנס בהחלט**.

מהגדרה זו נובע כי אם טור חיובי מתכנס, אזי הוא מתכנס בהחלט.

הגדרה אם טור $\sum a_n$ מתכנס, אבל $\sum |a_n|$ מתבדר, אזי $\sum a_n$ יקרא **מתכנס בתנאי**.

$\sum \|a_n\|$	$\sum a_n$	סוג ההתכנסות
מתכנס $\Leftarrow$	מתכנס	התכנסות בהחלט
מתבדר	מתכנס	התכנסות בתנאי

כמה דוגמאות:

- $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

  מבחן קושי יביא ל $C_n \to 1$. גם מבחן דלמבר לא מועיל - $D_n \to 1$. אבל:

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots<\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{2}^{\infty}\frac{n-(n-1)}{n(n-1)}=$$
$$\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{\cancelto{1}{n}}{\cancel{n}(n-1)}-\frac{\cancelto{1}{n-1}}{n\cancel{(n-1)}}\right)=$$
$$\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\underbrace{1-\cancel{\frac{1}{2}}}_{n=2}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}}_{n=3}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}}_{n=4}\cdots\approx 1$$

ולכן, ידוע כי הטור מתכנס (לערך $\frac{\pi^2}{6}$ שמצא לראשונה אוילר).

7.3 טורים של מכפלת סדרות

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n$:

7.3.1 למה 1 – טרנספורמציית אבל (Abel)

נתונות שתי סדרות סופיות של מספרים ממשיים: $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$, $\{\beta_i\}_{i=1}^m$.

נסמן את הסכומים החלקיים של β כך: $B_k=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k$. אזי:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_mB_m-\sum_{i=1}^{m-1}\left(\alpha_{i+1}-\alpha_i\right)\beta_i \tag{7.2}$$

הוכחה נסמן $B_0=0$. כעת,

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\sum\alpha_i\left(\overbrace{B_i-B_{i-1}}^{\beta_i}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_iB_i-\alpha_iB_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_iB_i-\overbrace{\sum_{i=1}^{m}\alpha_iB_{i-1}}^{*}\\ &= \sharp\sum_{i=1}^{m}\alpha_iB_i-\sum_{i=\mathbf{0}}^{\mathbf{m-1}}\alpha_{i+1}B_i=\alpha_mB_m+\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_iB_i-\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_{i+1}B_i=\alpha_mB_m+\sum_{i=1}^{m-1}B_i\left(\alpha_i-\alpha_{i+1}\right)=\\ &= \alpha_mB_m-\sum_{i=1}^{m-1}\left(\alpha_{i+1}-\alpha_i\right)B_i\end{aligned}$$

$\sharp$ – *'s indices changed to [0, m-1].

7.3.2 משפט עזר

אם $|B_i|_{1\le i\le m}\le L$ (סדרה של סכומים חלקיים של $\{\beta_i\}$) חסומה ו־ $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ מונוטונית, אזי:

$$|S|=\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\le L\left(2\left|\alpha_m\right|+\left|\alpha_1\right|\right) \tag{7.3}$$

הוכחה

$|S| \leq$