אוניברסיטת בן־גוריון, סמסטר ב׳ 2010
מרצה: ד״ר אפרים גורביץ׳

# חדו"א א 1

אביעד רייך

18 במרץ 2010

לתיקונים: reichavi@bgu.ac.il

# תוכן עניינים


**1 גבול של סדרה 4**

1.1 המספרים הממשיים 4

1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים 4

1.1.2 עקרון ההתלכדות 5

**2 התכנסות 6**

2.1 סדרות אפסיות 7

2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר" 7

2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים 7

2.3 המספר $e$ $(2.718281828459045...)$ 10

2.3.1 גבולות הקשורים למספר $e$ 10

2.3.2 אירציונליות $e$ 11

**3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים 12**

3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 12

**4 ביטויים בלתי מסוימים 14**

**5 גבולות חלקיים 15**

5.0.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת): 15

5.0.2 דוגמא נוספת: 15

5.0.3 דוגמא נוספת: 16

5.1 הלמה של בולצנו־ויירשטרס 16

5.1.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים 16

**6 קריטריון ההתכנסות 18**

6.1 A. Cauchy ־ א. קושי 18

# תזכורת

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$(1+x)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

# 1 גבול של סדרה

## 1.1 המספרים הממשיים

### 1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים

- חיבור
  1. $a+b=b+a$
  2. $(a+b)+c=a+(b+c)$
  3. $a+0=a$
  4. $a+(-a)=0$
- כפל
  1. $a\cdot b=b\cdot a$
  2. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
  3. $a\cdot 1=a$
  4. $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1\quad, a\neq 0$
- $<$
  1. $a<b,\, b<a,\, b=a$ – אחד מהשלושה תמיד יתקיים.
  2. $a<b,\, b<c\Rightarrow a<c$
- ?
  1. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
  2. $a>b\Rightarrow a+c>b+c$
  3. $a>b,\, c>0\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$
  4. (אקסיומת ארכימדס) $a\in\mathbb{N},\, r>0,\, r\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{1}{n}<r$

### 1.1.2 עקרון ההתלכדות

אם נתונים שני מספרים $a, b$ וידוע שההפרש $|a-b|$ קטן מכל מס' חיובי $\varepsilon > 0$, אז מכאן $a = b$.

**הוכחה** נניח שזה לא כך. כלומר: $a < b$ מכאן, קיים $\varepsilon > 0$ כזה שעבורו $\varepsilon < b - a$. (?!) *סתירה*.

# 2 התכנסות

**הגדרה** מספר ממשי $A$ יקרא גבול של סדרה $a_n$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0$ כך שלכל $n > n_0$ יתקיים $|a_n - A| < \varepsilon$.

$$\lim a_n = A$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$a_n \to A$$

$C, C, C, C, \ldots, C$

$\lim C = C$

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

נתבונן בסדרה $a_n = (-1)^n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים $|(-1)^n - C| < \varepsilon$

נתבונן בסדרה $a_n = n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים $|n - C| < \varepsilon$.

**משפט** אם סדרה מתכנסת, אז היא חסומה.

**משפט** אם סדרה $a_n$ מתכנסת, אז כל תת־סדרה של $a_n$ מתכנסת.

**משפט** אם סדרה מונוטונית וחסומה היא בהכרח מתכנסת.

**משפט** $a_n \to A,\ b_n \to B\ \Rightarrow\ a_n \pm b_n = A \pm B$.

**משפט** $a_n \to A,\ b_n \to B\ \Rightarrow\ a_n \cdot b_n = A \cdot B$.

**משפט** $a_n \to A,\ b_n \to B\ \Rightarrow\ a_n \cdot b_n = AB$.

**משפט** $a_n \to A,\ b_n \to B, B \neq 0\ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

**משפט שני השוטרים** $a_n \leq C_n \leq b_n,\ \lim a_n = \lim b_n = A \Rightarrow \lim C_n = A$

## 2.1 סדרות אפסיות

$a_n \to 0$ נקראת סדרה אפסית

**שים לב:**

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0,\ b_n = \frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n} = \frac{1}{2} \neq 0\ (0 \cdot 0)$$

$$c_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{c_n}{b_n} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2 \cdot n}$$

הסדרה $c_n$ שואפת לאפס **מהר יותר** מהסדרה $b_n$.

### 2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר"

**הגדרה** נאמר ש$a_n$ שואפת לאפס מהר יותר מ$b_n$ אם מתקיים $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

**משפט** מכפלה של סדרה חסומה בסדרה אפסית היא סדרה אפסית. יהיו $a_n$ סדרה אפסית, ו $c_n$ סדרה חסומה. **אזי:** $0 \leq |c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| \leq M \cdot |a_n| = 0$

## 2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים

**.1**

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{1+(-1)^n}{n}\right) = 0$$

**(א)** $\frac{1+(-1)^n}{n}\ :\ 0,\ \frac{2}{2},\ 0,\ \frac{2}{4},\ \ldots$

.2

$$a_n=\frac{n^2+5n-2}{3n^2-4n+1}=\frac{\cancel{n}^2\left(1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n}^2\left(3-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\to\frac{1}{3}$$

**.3 יהי $P$ פולינום ממעלה $m$ ו־$Q$ פולינום ממעלה $n$. אזי:**

$$a_n=\frac{P_m}{Q_n}\to\begin{cases}0 & m<n\\ \frac{\alpha}{\beta} & m=n\\ No\,limit & m>n\end{cases}$$

**.4** $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=\lim\left(\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=0$

**.5**

$$\begin{aligned}\lim\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=\\ &\lim\left(\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=\\ &\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}={}^1\!/_2\end{aligned}$$

**.6** $\lim\left(\frac{A\cos n+B\sin n}{\sqrt{n}}\right)=0$

**.7 <u>אי־שיוויון ברנולי</u>**

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots2\cdot1}{n!}x^n>1+nx$$

**משפט** אם $a>1$, אז $\lim\sqrt[n]{a}=1$

**הוכחה** $\sqrt[n]{a}-1=t>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}=1+t\Rightarrow a=(1+t)^n$

**וכעת, ע"פ אי־שיוון ברנולי נקבל**

$$(1+t)^n>1+nt\Rightarrow a>1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\Rightarrow 0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$$

**שני צידי המשוואה ($0$ ו $\frac{a-1}{n}$) שואפים לאפס, ולכן ע"פ חוק הסנדוויץ',**

$\sqrt[n]{a}-1\to0\Rightarrow\sqrt[n]{a}\to1$ **מש"ל.**

**משפט** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

**הוכחה** $\sqrt[n]{n}-1=x,\ (x>0)\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{n}=1+x\Rightarrow n=(1+x)^n$

**ושוב, נשתמש באי־שיוויון ברנולי (במהדורה מורחבת)**

$$n=(1+x)^n>1+nx+\underline{\frac{n\left(n-1\right)}{2}x^2}>1+nx+\underline{\frac{n^2}{4}x^2}$$

**הדבר אפשרי משום ש** $\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{4}$

$$\begin{aligned} n\quad>\quad & 1+nx+\frac{n^2}{4}x^2=\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2\Rightarrow\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2<n\Rightarrow\\ & \sqrt{\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2}<\sqrt{n}\Rightarrow\left|1+\frac{nx}{2}\right|<\sqrt{n}\Rightarrow\\ & \left(-\sqrt{n}\right)<1+\frac{nx}{2}<\sqrt{n}\Rightarrow-\sqrt{n}-1<\frac{nx}{2}<\sqrt{n}-1\Rightarrow\\ & \frac{-2\sqrt{n}-2}{n}<x<\frac{2\sqrt{n}-2}{n}\Rightarrow\\ & 0<x<0\Rightarrow\sqrt[n]{n}\to 1\end{aligned}$$

מש"ל.

**משפט** $\lim\frac{10^n}{n!}\to 0$

**חישוב**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10^{n+1}n!}{(n+1)!10^n}=\frac{10}{n+1}\Rightarrow$$

**נזכור, כי כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.**

$$a_{n+1}=a_n\cdot\left(\tfrac{10}{n+1}\right)\Rightarrow A=A\cdot 0$$

**משפט** $\lim\frac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$ **או למשל** $\lim\frac{n^a}{b^n}=0, b>1$

**הוכחה**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{10}\cdot 10}{10^{n+1}n^{10}}=\frac{1}{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}$$

$$\lim a_{n+1}=\lim a_n\cdot\tfrac{1}{10}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{10}\Rightarrow A-A\cdot\tfrac{1}{10}=0\Rightarrow A\cdot\tfrac{9}{10}=0\Rightarrow A=0$$

## 2.3 המספר $e$ (2.718281828459045...)

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ & 1+1+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots\left(n-k+1\right)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots \\ & +\frac{n\left(n-1\right)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \end{aligned}$$

$$x_{n+1} > x_n$$

כלומר: מדובר בסדרה עולה.

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} < 2+\underbrace{1} < 3$$

כלומר: הסדרה חסומה (גם) ע"י המספר 3.

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$

**l**ogarithmus **n**aturalis – $\log_e x \equiv \ln x$

$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$

### 2.3.1 גבולות הקשורים למספר $e$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = [n=2k] = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^2 = e^2$$

ובאופן כללי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

### 2.3.2 אירציונליות $e$

נוכיח שהמספר $e$ אירציונלי:

$$
\begin{aligned}
y_n &= \lim\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \Rightarrow \\
y_{n+m}-y_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+m)!}= \\
& \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right] \\
&< e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right]=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n-2}}=
\end{aligned}
$$

**המעבר האחרון על פי סכום סדרה הנדסית אינסופית** $1+q+q^2+\ldots=\frac{1}{1-q}$

$\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{n!n}$ **ניתן לבדוק ולהגיע לסתירה אם ההנחה ההפוכה, ולכן אי השיוויון נכון.**

**קיבלנו:** $y_{n+m}-y_n<\frac{1}{n!n}$. **מכאן, נעבור לגבול כאשר** $n\to\infty$: $\lim_{m\to\infty}(y_{n+m}-y_n)\leq\frac{1}{n!n}\Rightarrow e-y_n\leq\frac{1}{n!n}$

**הצבנו את** $e$ **במקום** $y_{n+m}$ **משום שכך הוגדר.**

$e-y_n=\frac{\theta}{n!n},\ 0<\theta<1$ **בכדי להחליף את הסימן** $\leq$ **בסימן השיוויון (=), החלפנו את 1 ב** $\theta$.

$e=y_n+\frac{\theta}{n!n}$ **מכאן, ברור כי** $e$ **אירציונלי, משום שאם נניח כי e רציונלי נקבל סתירה:**

**משום שהביטוי הנ"ל נכון עבור כל** $n$, **ובפרט עבור** $n=q$, **נקבל:** $e=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}\Rightarrow$

$e=\frac{p}{q}\Rightarrow e=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{\theta}{q!q}=\frac{p}{q}$ **אם נכפיל את שני האגפים ב**$q!$ **נקבל סתירה:**

$n_1+\frac{\theta}{q}=n_2$ **כאשר** $n_1,n_2$ **שלמים, ואילו** $\frac{\theta}{q}$ **שבר.**

# 3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים

## 3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

**הוכחה**

**הסדרה** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$ **שואפת ל־**$e$ **בעלייה.**

**הסדרה** $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$ **שואפת ל־**$e$ **בירידה. (למשל** $y_1 = 4,\ y_2 = 3.375$**).**

$$\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}n^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n}\frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\frac{\left[(n+1)^2\right]^{n+2}}{n^{n+2}(n+2)^{n+2}} = \\
&= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}
\end{aligned}$$

**כעת, ע"פ אי־שיוויון ברנולי** $(1+\alpha)^n > 1+\alpha n$ **נקבל:**

$\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = 1$ **סיום ההוכחה חסר!**

$H_n = \ln n + C + \alpha_n$ **כאשר C קבוע,** $\alpha_n \to 0$.

$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ **הסדרה ההרמונית.**

**נתבונן בסדרה** $C_n = H_n - \ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$

$$\begin{aligned}
C_{n+1}-C_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\ln n = \\
&\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_n &= H_n - \ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n = \\
&\ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot n} = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0
\end{aligned}$$

$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C \Rightarrow \lim C_n=C \Rightarrow C_n-C\to 0 \Rightarrow H_n-\ln n-C=$
$\alpha_n \Rightarrow H_n=\ln n+C+\alpha_n$

$C=0.577\ldots$ **קבוע אוילר. לא ידוע האם הוא רציונלי או אירציונלי**

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln n$ **הסכום ההרמוני שואף לאינסוף במהירות של הלוגריתם הטבעי.**

$H_{1000}=7.48\ldots \qquad H_{1000000}=14.39\ldots$

# 4 ביטויים בלתי מסוימים

$a_n = n$

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ **חשוב!** סדרה זו **<u>לא מתכנסת</u>** (לא לאינסוף ולא לשום ערך אחר). הסדרה **שואפת** (מתבדרת).

$\lim b_n = -\infty$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$ זה הוא ביטוי בלתי־מסוים.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \dots$ גם זה ביטוי בתלי־מסוים.

**נוספים:** $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

# 5 גבולות חלקיים

לסדרה $a_n = (-1)^n$ יש תת־סדרות מתכנסות (היא עצמה לא..):

$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

$-1, -1, -1, -1, -1 \dots$

אם לסדרה $a_n$ קיימת תת־סדרה $a_{n_k} \to A$ אזי A יקרא גבול חלקי של הסדרה $a_n$.

$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$

נתבונן בסדרה $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$:

$\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{4}, \cos\pi \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$

חמשת הגבולות החלקיים (האפשריים) לסדרה זו הם: $-1, 1$ $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2},$.

### 5.0.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת):

נתבונן בסדרה $x_{\alpha\beta\dots\gamma} = 0.\,\alpha\beta\dots\gamma$

$x_1 = 0.1 \qquad x_2 = 0.2 \qquad x_3 = 0.3 \qquad x_{14} = 0.14$

נשים לב ש $x_1 = x_{10} = x_{100} \dots = 0.1$ ולכן **0.1** הוא גבול חלקי. אבל גם (למשל) $x_{358} = x_{3580} = 0.358$ הוא גבול חלקי. למעשה, **כל מספר רציונלי ב** $[0.1, 1]$ **הוא גבול חלקי של הסדרה!** אבל מכך נובע שגם כל מספר **אי־רציונלי ב** $[0.1, 1]$ **הוא גבול חלקי של הסדרה.**

### 5.0.2 דוגמא נוספת:

נוכיח כי לשתי הסדרות $x_n, y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ אם $x_n \to A$ אז $y_n \to A$. אולם, צ"ל כל הגבולות החלקיים של שתי סדרות אלו הם אותם המספרים.

**משפט** לשתי סדרות אלו אותם גבולות חלקיים.

**הוכחה** נניח כי A הוא גבול חלקי של $x_n$, **צ"ל** $y_n \to A$.

נתון $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$. **צ"ל** $y_{n_k} = x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}$

נזכור כי $\lim \sqrt[n]{n} \to 1$ ולכן, $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = A \cdot 1 = A$

כעת, יש להראות כי

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = B \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow x_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\sqrt[n_k]{n_k}} \Rightarrow x_{n_k} \to \frac{B}{1} = B$$

### 5.0.3 דוגמא נוספת:

נתון כי $x_n$ חסומה ־ $\lim\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$. האם הסדרה מתכנסת?

תשובה: הסדרה לא תמיד מתכנסת. יתכן כי היא מתבדרת. למה? (לא הוכחה מלאה)

די לתת דוגמא בכדי לסתור את הטענה:

הסדרה $0, 0.5, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1\ldots$ עונה על ההגדרה אבל אינה מתכנסת.

## 5.1 הלמה של בולצנו־ויירשטרס

**משפט** כל סדרה חסומה כוללת תת־סדרה מתכנסת.

**הוכחה** נתבונן בסדרה החסומה $x_n\in[a_0,b_0]$ צ"ל: קיימת תת־סדרה של $x_n$ המתכנסת. נוכיח בעזרת שיטת בולצנו (Bolzano):

נתבונן בנקודה האמצעית בקטע הנתון. לפחות אחת המחציות כוללת מספר אינסופי של איברים בסדרה. נקרא לקטע הנבחר (מחצית הקטע הראשון) $[a_1,b_1]$. שוב, נחלק את הקטע לשני חלקים באמצעו, ונקבל את הקטע $[a_2,b_2]$ שבו מספר אינסופי של איברים. נמשיך כך מספר אינסופי של פעמים. נקבל כי $\ldots\subset[a_1,b_1]\subset[a_1,b_1]\subset[a_0,b_0]$ ואז נקבל כי $b_n-a_n=\frac{b_0-a_0}{2^n}$. על פי הלמה של קנטור, קיימת נקודה $c_0$ המשותפת לכל הקטעים.

נבחר $x_{n_1}$ השייך לקטע $[a_1,b_1]$, ולאחריו $x_{n_2}$ השייך לקטע $[a_2,b_2]$ וכך הלאה. משום שבקטעים שבחרנו תמיד ימצאו אינסוף איברים, תמיד נוכל לבנות סדרה אינסופית השואפת לנקודה/מספר $c_0$ המורכבת מאיברים שונים של הסדרה המקורית. באופן כללי נאמר, $x_{n_k}\in[a_{n_k},b_{n_k}]\to[c_0,c_0]$ ולפי משפט הסנדוויץ', נקבל $x_{n_k}\to c_0$. מש"ל.

**הערה** אם הסדרה המקורית לא חסומה, לא בהכרח ניתן לבחור את הקטע הראשון, ולכן לא ניתן להשתמש בשיטה ועל כן נאמר כי הסדרה שואפת ל $+\infty$.

### 5.1.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים

נסמן באות $X$ את קבוצת כל הגבולות החלקיים. האם קיים גבול חלקי מקסימלי ומינימלי?

גבולות אלו יקראו הגבול העליון והגבול התחתון.

נסמן: $\underline{\lim}x_n$ לגבול התחתון, ו $\overline{\lim}x_n$ לגבול העליון.

$X$לא כוללת נקודות בודדות. בכל קבוצה חסומה קיימים הסופרמום והאינפימום: $supX,\ infX$ שגם הם גבולות חלקיים של הסדרה. הסופרמום הוא הגבול המקסימלי.

**כלומר: ב $X$ תמיד ימצא איבר מקסימלי ואיבר מקסימלי.**

**אם הסדרה $x_n$ חסומה, אזי** $\overline{\lim}x_n = \sup x_n$**, ו** $\underline{\lim}x_n = \inf x_n$.

**אם הסדרה $x_n$ לא חסומה,** $\overline{\lim}x_n = \infty$**, ו** $\underline{\lim}x_n = -\infty$.

# 6 קריטריון ההתכנסות

נשוב ונעסוק בסדרות מתכנסות. כלומר: $x_n \to A$. מכאן, לכל $\epsilon > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > n_0$ קיים $A$ כך ש $|x_n - A| < \epsilon$.

## 6.1 A. Cauchy - א. קושי

קושי היה הראשון לקבוע את "קריטריון קושי" המאפשר לנו להיפטר מ$A$ בהגדרה, ועדיין לברר האם קיים גבול לסדרה אם לאו.

**המשפט** נתונה סדרה $x_n$. סדרה זו מתכנסת אמ"ם עבור כל $\epsilon > 0$ קיים מספר $N \in \mathbb{N}$ כך שקיימים שני מספרים $n, n' > N$ עבורם $|x_n - x_{n'}| < \epsilon$

**הוכחה** נניח $x_n$ מתכנסת. מכאן, $|x_n - A| < \epsilon$, ובדומה, $|x_{n'} - A| < \epsilon$. כעת, נרצה לחשב את $|x_n - x_{n'}|$:

$|x_n - x_{n'}| = |x_n - x_{n'} - A + A| = |(x_n - A) + (A - x_{n'})| \le 2 \cdot \epsilon$. המעבר האחרון על פי אי־שיוויון המשולש.

כעת, נוכיח את הכיוון ההפוך: נניח שעבור כל $\epsilon > 0$ קיים $N$: $n, n' > N \Leftarrow |x_n - x_{n'}| < \epsilon$.

מכאן, $x_{n'} - \epsilon < x_n < x_{n'} + \epsilon$. מסקנה: $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$