

אוניברסיטת בן-גוריון, סמסטר ב' 2010

מרצה: ד"ר אפרים גורביץ'

חדו"א א 1

רשם: אביעד רייך

20 במרץ 2010

לתיקונים והצעות: reichavi@bgu.ac.il

עותק עדכני: <http://github.com/lxmonk/lnfi-bgu-2010b.git>

תוכן עניינים

5	I סדרות
6	1 גבול של סדרה
6	1.1 המספרים הממשיים
6	1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים
7	1.1.2 עקרון ההתלכדות
8	2 התכנסות
9	2.1 סדרות אפסיות
9	2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר"
9	2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים
12	2.3 המספר e (2.718281828459045...)
12	2.3.1 גבולות הקשורים למספר e
13	2.3.2 אירציונליות e
14	3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים
14	3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$
16	4 ביטויים בלתי מסוימים
17	5 גבולות חלקיים
17	5.1 דוגמאות לגבולות חלקיים
17	5.1.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת):
17	5.1.2 שתי סדרות
18	5.1.3 סדרה חסומה ולא מתכנסת
18	5.2 הלמה של בולצנו-וירשטרס
18	5.2.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים

20	קריטריון ההתכנסות	6
20	קריטריון קושי	6.1
21	טורים מספריים	II
23	התכנסות והתבדרות	7

תזכורת

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q} \quad |q| < 1$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

חלק I

סדרות

1 גבול של סדרה

1.1 המספרים הממשיים

1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים

• חיבור

$$1. a + b = b + a$$

$$2. (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$3. a + 0 = a$$

$$4. a + (-a) = 0$$

• כפל

$$1. a \cdot b = b \cdot a$$

$$2. (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$3. a \cdot 1 = a$$

$$4. a \neq 0, a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

• <

$$1. a < b, b < a, b = a \text{ - אחד מהשלושה תמיד יתקיים.}$$

$$2. a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

• ?

$$1. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$2. a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

$$3. a > b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

$$4. (אקסיומת ארכימדס) \frac{1}{n} < r \Rightarrow a \in \mathbb{N}, r > 0, r \in \mathbb{Q}$$

1.1.2 עקרון ההתלכדות

אם נתונים שני מספרים a, b וידוע שההפרש $|a - b|$ קטן מכל מס' חיובי $\varepsilon > 0$, אז מכאן $a = b$.

הוכחה נניח שזה לא כך. כלומר: $b > a$ מכאן, קיים $\varepsilon > 0$ כזה שעבורו $b - a > \varepsilon$. (?!). **סתירה**.

2 התכנסות

הגדרה מספר ממשי A יקרא גבול של סדרה a_n אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ יתקיים

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\lim a_n = A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

$$a_n \rightarrow A$$

$$C, C, C, C, \dots, C$$

$$\lim C = C$$

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

נתבונן בסדרה $a_n = (-1)^n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים

$$|(-1)^n - C| < \varepsilon$$

נתבונן בסדרה $a_n = n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים $|n - C| < \varepsilon$.

משפט אם סדרה מתכנסת, אז היא חסומה.

משפט אם סדרה a_n מתכנסת, אז כל תת-סדרה של a_n מתכנסת.

משפט אם סדרה מונוטונית וחסומה היא בהכרח מתכנסת.

משפט $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B \Rightarrow a_n \pm b_n = A \pm B$

משפט $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B \Rightarrow a_n \cdot b_n = A \cdot B$

משפט $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, B \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

משפט שני השוטרים $a_n \leq C_n \leq b_n, \lim a_n = \lim b_n = A \Rightarrow \lim C_n = A$

2.1 סדרות אפסיות

$a_n \rightarrow 0$ נקראת סדרה אפסית

שים לב:

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, b_n = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (0/0)$$

$$c_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{c_n}{b_n} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2 \cdot n}$$

הסדרה c_n שואפת לאפס מהר יותר מהסדרה b_n .

2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר"

הגדרה נאמר ש a_n שואפת לאפס מהר יותר מ b_n אם מתקיים $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$.

משפט מכפלה של סדרה חסומה בסדרה אפסית היא סדרה אפסית. יהיו a_n סדרה אפסית, ו c_n

$$\text{סדרה חסומה. אזי: } 0 \leq |c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| \leq M \cdot |a_n| = 0$$

2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{1 + (-1)^n}{n} \right) = 0$$

$$\frac{1+(-1)^n}{n} : 0, \frac{2}{2}, 0, \frac{2}{4}, \dots \quad (\text{א})$$

2.

$$a_n = \frac{n^2 + 5n - 2}{3n^2 - 4n + 1} = \frac{\cancel{n}^2 \left(1 + \frac{5}{\cancel{n}} - \frac{2}{\cancel{n}^2} \right)}{\cancel{n}^2 \left(3 - \frac{4}{\cancel{n}} - \frac{1}{\cancel{n}^2} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

3. יהי P פולינום ממעלה m ו Q פולינום ממעלה n . אזי:

$$a_n = \frac{P_m}{Q_n} \rightarrow \begin{cases} 0 & m < n \\ \frac{\alpha}{\beta} & m = n \\ \text{No limit} & m > n \end{cases}$$

$$\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \left(\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \right) = \lim \left(\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \right) = 0 \quad .4$$

.5

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim \left(\frac{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) = \\ &= \lim \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) = \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = 1/2 \end{aligned}$$

$$\lim \left(\frac{A \cos n + B \sin n}{\sqrt{n}} \right) = 0 \quad .6$$

.7 אי־שיויון ברנולי

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)\dots 2 \cdot 1}{n!}x^n > 1 + nx$$

משפט אם $a > 1$, אז $\sqrt[n]{a} = 1$

הוכחה $\sqrt[n]{a} - 1 = t > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + t \Rightarrow a = (1+t)^n$

וכעת, ע"פ אי־שיויון ברנולי נקבל

$$(1+t)^n > 1 + nt \Rightarrow a > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$$

שני צידי המשוואה ($0 < \frac{a-1}{n}$) שואפים לאפס, ולכן ע"פ חוק הסנדוויץ',

$$\sqrt[n]{a} - 1 \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \text{מש"ל.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{משפט}$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 = x, (x > 0) \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + x \Rightarrow n = (1 + x)^n \quad \text{הוכחה}$$

ושוב, נשתמש באי־שוויון ברנולי (במהדורה מורחבת)

$$n = (1 + x)^n > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > 1 + nx + \frac{n^2}{4}x^2$$

$$\frac{n(n-1)}{2} > \frac{n^2}{4} \quad \text{הדבר אפשרי משום ש}$$

$$\begin{aligned} n &> 1 + nx + \frac{n^2}{4}x^2 = \left(1 + \frac{nx}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(1 + \frac{nx}{2}\right)^2 < n \Rightarrow \\ &\sqrt{\left(1 + \frac{nx}{2}\right)^2} < \sqrt{n} \Rightarrow \left|1 + \frac{nx}{2}\right| < \sqrt{n} \Rightarrow \\ (-\sqrt{n}) &< 1 + \frac{nx}{2} < \sqrt{n} \Rightarrow -\sqrt{n} - 1 < \frac{nx}{2} < \sqrt{n} - 1 \Rightarrow \\ \frac{-2\sqrt{n} - 2}{n} &< x < \frac{2\sqrt{n} - 2}{n} \Rightarrow \\ 0 < x < 0 &\Rightarrow \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

מש"ל.

$$\lim \frac{10^n}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{משפט}$$

חישוב

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}n!}{(n+1)!10^n} = \frac{10}{n+1} \Rightarrow$$

נזכור, כי כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{10}{n+1}\right) \Rightarrow A = A \cdot 0$$

$$\lim \frac{n^a}{b^n} = 0, b > 1 \quad \text{למשל או} \quad \lim \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0) \quad \text{משפט}$$

הוכחה

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{10} \cdot 10}{10^{n+1}n^{10}} = \frac{1}{10} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}$$

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n \cdot \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \Rightarrow A - A \cdot \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow A \cdot \frac{9}{10} = 0 \Rightarrow A = 0$$

(2.718281828459045...) e **המספר 2.3**

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$x_{n+1} > x_n$$

כלומר: מדובר בסדרה עולה.

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{< 1} < 2 + 1 < 3$$

כלומר: הסדרה חסומה (גם) ע"י המספר 3.

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$\text{logarithmus naturalis} \longleftrightarrow \log_e x \equiv \ln x$$

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

2.3.1 גבולות הקשורים למספר e

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = [n = 2k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^2 = e^2$$

ובאופן כללי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

2.3.2 אירציונליות e

נוכיח שהמספר e אירציונלי:

$$\begin{aligned}
 y_n &= \lim \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \Rightarrow \\
 y_{n+m} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} = \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+m)} \right] \\
 &< e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\
 &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} =
 \end{aligned}$$

המעבר האחרון על פי סכום סדרה הנדסית אינסופית $1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}$

ניתן לבדוק ולהגיע לסתירה אם ההנחה ההפוכה, ולכן אי השיויון נכון. $\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n!n}$

קיבלנו: $y_{n+m} - y_n < \frac{1}{n!n}$. מכאן, נעבור לגבול כאשר $n \rightarrow \infty$: $\lim_{m \rightarrow \infty} (y_{n+m} - y_n) \leq$

$$\frac{1}{n!n} \Rightarrow e - y_n \leq \frac{1}{n!n}$$

הצבנו את e במקום y_{n+m} משום שכך הוגדר.

בכדי להחליף את הסימן \leq בסימן השיויון (=), החלפנו את 1 ב θ . $e - y_n = \frac{\theta}{n!n}$, $0 < \theta < 1$

$e = y_n + \frac{\theta}{n!n}$ מכאן, ברור כי e אירציונלי, משום שאם נניח כי e רציונלי נקבל סתירה:

משום שהביטוי הנ"ל נכון עבור כל n , ובפרט עבור $n = q$, נקבל: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \Rightarrow$

אם נכפיל את שני האגפים ב $q!$ נקבל סתירה: $e = \frac{p}{q} \Rightarrow e = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta}{q!q} = \frac{p}{q}$

$n_1 + \frac{\theta}{q} = n_2$ כאשר n_1, n_2 שלמים, ואילו $\frac{\theta}{q}$ שבר.

3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים

3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

הוכחה

הסדרה שואפת ל- e בעלייה. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$

הסדרה שואפת ל- e בירידה. (למשל $y_1 = 4, y_2 = 3.375$) $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$

$$\begin{aligned} \frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1} (n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2} n^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n} \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1} (n+2)^{n+2}} = \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{[(n+1)^2]^{n+2}}{n^{n+2} (n+2)^{n+2}} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} = \\ &= \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

כעת, ע"פ אי-שוויון ברנולי $(1 + \alpha)^n > 1 + \alpha n$ **נקבל:**

סיום ההוכחה חסר! $\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n} = 1$

$\alpha_n \rightarrow 0$, **כאשר** C **קבוע,** $H_n = \ln n + C + \alpha_n$

הסדרה ההרמונית. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

נתבונן בסדרה $C_n = H_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

$$\begin{aligned} C_{n+1} - C_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \ln n = \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= H_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot n} = \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \end{aligned}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C \Rightarrow \lim C_n = C \Rightarrow C_n - C \rightarrow 0 \Rightarrow H_n - \ln n - C = \alpha_n \Rightarrow H_n = \ln n + C + \alpha_n$$

$C = 0.577\dots$ קבוע אוילר. לא ידוע האם הוא רציונלי או אירציונלי

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n$ הסכום ההרמוני שואף לאינסוף במהירות של הלוגריתם הטבעי.

$$H_{1000} = 7.48\dots \quad H_{1000000} = 14.39\dots$$

4 ביטויים בלתי מסוימים

$$a_n = n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ חשוב! סדרה זו לא מתכנסת (לא לאינסוף ולא לשום ערך אחר). הסדרה

שואפת (מתבדרת).

$$\lim b_n = -\infty$$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$ זה הוא ביטוי בלתי־מסוים.

גם זה ביטוי בתלי־מסוים. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \left[\frac{0}{0} \right] = \dots$

נוספים: $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

5 גבולות חלקיים

5.1 דוגמאות לגבולות חלקיים

לסדרה $a_n = (-1)^n$ יש תת־סדרות מתכנסות (היא עצמה לא...):

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$-1, -1, -1, -1, -1, \dots$$

אם לסדרה a_n קיימת תת־סדרה $a_{n_k} \rightarrow A$ אזי A יקרא גבול חלקי של הסדרה a_n .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$$

נתבונן בסדרה $x_n = \cos \frac{\pi n}{4}$:

$$\cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{4}, \cos \pi, \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$$

חמשת הגבולות החלקיים (האפשריים) לסדרה זו הם: $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1$.

5.1.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת):

נתבונן בסדרה $x_{\alpha\beta\gamma\dots} = 0. \alpha\beta\dots\gamma$

$$x_1 = 0.1 \quad x_2 = 0.2 \quad x_3 = 0.3 \quad x_{14} = 0.14$$

נשים לב ש $x_1 = x_{10} = x_{100} \dots = 0.1$ ולכן 0.1 הוא גבול חלקי. אבל גם (למשל)

$$x_{358} = x_{3580} = 0.358$$

הוא גבול חלקי. למעשה, כל מספר רציונלי ב $[0.1, 1]$ הוא גבול חלקי של הסדרה! אבל מכך

נובע שגם כל מספר אי־רציונלי ב $[0.1, 1]$ הוא גבול חלקי של הסדרה.

5.1.2 שתי סדרות

נוכיח כי עבור שתי הסדרות $x_n, y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ אם $x_n \rightarrow A$ אז $y_n \rightarrow A$. אולם,

צ"ל: כל הגבולות החלקיים של שתי סדרות אלו הם אותם המספרים.

משפט לשתי סדרות אלו אותם גבולות חלקיים.

הוכחה נניח כי A הוא גבול חלקי של x_n , צ"ל $y_n \rightarrow A$.

$$\text{נתון } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A \text{ צ"ל } \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}$$

נזכור כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ולכן, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = A \cdot 1 = A$

כעת, יש להראות כי

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = B \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow x_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\sqrt[n_k]{n_k}} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow \frac{B}{1} = B$$

5.1.3 סדרה חסומה ולא מתכנסת

נתון כי x_n חסומה - $\lim (x_{n+1} - x_n) = 0$. האם הסדרה מתכנסת?

תשובה: הסדרה לא תמיד מתכנסת. יתכן כי היא מתבדרת. למה? (לא הוכחה מלאה)

די לתת דוגמא בכדי לסתור את הטענה:

הסדרה $0, 0.5, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1, \dots$ עונה על ההגדרה אבל אינה מתכנסת.

5.2 הלמה של בולצנו-וירשטרס

משפט כל סדרה חסומה כוללת תת-סדרה מתכנסת (אחת לפחות)

הוכחה נתבונן בסדרה החסומה $x_n \in [a_0, b_0]$ צ"ל: קיימת תת-סדרה של x_n המתכנסת. נוכיח בעזרת שיטת בולצנו (Bolzano):

נתבונן בנקודה האמצעית בקטע הנתון. לפחות אחת המחציות כוללת מספר אינסופי של איברים בסדרה. נקרא לקטע הנבחר (מחצית הקטע הראשון) $[a_1, b_1]$. שוב, נחלק את הקטע לשני חלקים באמצעו, ונקבל את הקטע $[a_2, b_2]$ שבו מספר אינסופי של איברים. נמשיך כך מספר אינסופי של פעמים. נקבל כי $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ ואז נקבל כי $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. על פי הלמה של קנטור, קיימת נקודה c_0 המשותפת לכל הקטעים.

נבחר x_{n_1} השייך לקטע $[a_1, b_1]$, ולאחריו x_{n_2} השייך לקטע $[a_2, b_2]$ וכך הלאה. משום שבקטעים שבחרנו תמיד ימצאו אינסוף איברים, תמיד נוכל לבנות סדרה אינסופית השואפת לנקודה/מספר c_0 המורכבת מאיברים שונים של הסדרה המקורית. באופן כללי נאמר, $x_{n_k} \in [a_{n_k}, b_{n_k}] \rightarrow [c_0, c_0]$ ולפי משפט הסנדוויץ', נקבל $x_{n_k} \rightarrow c_0$. מש"ל.

הערה אם הסדרה המקורית לא חסומה, לא בהכרח ניתן לבחור את הקטע הראשון, ולכן לא ניתן להשתמש בשיטה ועל כן נאמר כי הסדרה שואפת ל $+\infty$.

5.2.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים

נסמן באות X את קבוצת כל הגבולות החלקיים. האם קיים גבול חלקי מקסימלי ומינימלי?

גבולות אלו יקראו הגבול העליון והגבול התחתון.

נסמן: $\lim x_n$ לגבול התחתון, ו $\overline{\lim} x_n$ לגבול העליון.

X לא כוללת נקודות בודדות. בכל קבוצה חסומה קיימים הסופרמום והאינפימום: $\sup X, \inf X$

שגם הם גבולות חלקיים של הסדרה. הסופרמום הוא הגבול המקסימלי.

כלומר: ב X תמיד ימצא איבר מקסימלי ואיבר מקסימלי.

אם הסדרה x_n חסומה, אזי $\lim x_n = \inf x_n$ ו $\overline{\lim} x_n = \sup x_n$.

אם הסדרה x_n לא חסומה, $\overline{\lim} x_n = \infty$ ו $\lim x_n = -\infty$.

6 קריטריון ההתכנסות

נשוב ונעסוק בסדרות מתכנסות. כלומר: $x_n \rightarrow A$. מכאן, לכל $\epsilon > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > n_0$ קיים A כך ש $|x_n - A| < \epsilon$.

6.1 קריטריון קושי

קושי היה הראשון לקבוע את "קריטריון קושי" המאפשר לנו להיפטר מ A בהגדרה, ועדיין לברר האם קיים גבול לסדרה אם לאו.

המשפט נתונה סדרה x_n . סדרה זו מתכנסת אם"ם עבור כל $\epsilon > 0$ קיים מספר $N \in \mathbb{N}$ כך שקיימים

$$\text{שני מספרים } n, n' > N \text{ עבורם } |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

הוכחה נניח x_n מתכנסת. מכאן, $|x_n - A| < \epsilon$, ובדומה, $|x_{n'} - A| < \epsilon$. כעת, נרצה לחשב את $|x_n - x_{n'}|$:

$|x_n - x_{n'}| = |x_n - x_{n'} - A + A| = |(x_n - A) + (A - x_{n'})| \leq 2 \cdot \epsilon$. המעבר האחרון על פי אי-שוויון המשולש.

כעת, נוכיח את הכיוון ההפוך: נניח שעבור כל $\epsilon > 0$ קיים N : $|x_n - x_{n'}| < \epsilon \Leftrightarrow n, n' > N$.

מכאן, $x_{n'} - \epsilon < x_n < x_{n'} + \epsilon$. מסקנה: $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$.

חלק II

טורים מספריים

טור הוא סכום של סדרה אינסופית.

7 התכנסות והתבדלות