אוניברסיטת בן־גוריון, סמסטר ב׳ 2010

מרצה: ד״ר אפרים גורביץ׳

חדו"א א 1

רשם: אביעד רייך

20 במרץ 2010

לתיקונים והצעות: reichavi@bgu.ac.il

תוכן עניינים

I סדרות 5

1 גבול של סדרה 6

1.1 המספרים הממשיים 6

1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים 6

1.1.2 עקרון ההתלכדות 7

2 התכנסות 8

2.1 סדרות אפסיות 9

2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר" 9

2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים 9

2.3 המספר e $(2.718281828459045...)$ 12

2.3.1 גבולות הקשורים למספר e 12

2.3.2 אירציונליות e 13

3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים 14

3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 14

4 ביטויים בלתי מסוימים 16

5 גבולות חלקיים 17

5.1 דוגמאות לגבולות חלקיים 17

5.1.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת): 17

5.1.2 שתי סדרות 17

5.1.3 סדרה חסומה ולא מתכנסת 18

5.2 הלמה של בולצנו־ויירשטרס 18

5.2.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים 18

6 קריטריון ההתכנסות **20**

6.1 קריטריון קושי 20

II טורים מספריים **21**

7 התכנסות והתבדרות **23**

תזכורת

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \quad |q| < 1$$

$$(1+x)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

חלק I

סדרות

1 גבול של סדרה

1.1 המספרים הממשיים

1.1.1 14 תכונות המספרים הרציונליים

- חיבור

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$
4. $a + (-a) = 0$

- כפל

1. $a \cdot b = b \cdot a$
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. $a \cdot 1 = a$
4. $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1, \quad a \neq 0$

- $<$

1. $a < b,\, b < a,\, b = a$ – אחד מהשלושה תמיד יתקיים.
2. $a < b,\, b < c \Rightarrow a < c$

- ?

1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
2. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
3. $a > b,\, c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
4. $a \in \mathbb{N},\, r > 0,\, r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{n} < r$ (אקסיומת ארכימדס)

1.1.2 עקרון ההתלכדות

אם נתונים שני מספרים a, b וידוע שההפרש $|a-b|$ קטן מכל מס' חיובי $\varepsilon > 0$, אז מכאן $a = b$.

הוכחה נניח שזה לא כך. כלומר: $a < b$ מכאן, קיים $\varepsilon > 0$ כזה שעבורו $\varepsilon < b - a$. (!?) *סתירה*.

2 התכנסות

הגדרה מספר ממשי A יקרא גבול של סדרה a_n אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ יתקיים $|a_n - A| < \varepsilon$.

$$\lim a_n = A$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$a_n \to A$$

$$C, C, C, C, \ldots, C$$

$$\lim C = C$$

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

נתבונן בסדרה $a_n = (-1)^n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים

$$|(-1)^n - C| < \varepsilon$$

נתבונן בסדרה $a_n = n$: היא אינה מתכנסת. כלומר: לא קיים C עבורו מתקיים $|n - C| < \varepsilon$.

משפט אם סדרה מתכנסת, אז היא חסומה.

משפט אם סדרה a_n מתכנסת, אז כל תת־סדרה של a_n מתכנסות.

משפט אם סדרה מונוטונית וחסומה היא בהכרח מתכנסת.

משפט $a_n \to A,\ b_n \to B\ \Rightarrow\ a_n \pm b_n = A \pm B$.

משפט $a_n \to A,\ b_n \to B\ \Rightarrow\ a_n \cdot b_n = A \cdot B$.

משפט $a_n \to A,\ b_n \to B, B \neq 0\ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

משפט שני השוטרים $a_n \leq C_n \leq b_n,\ \lim a_n = \lim b_n = A \Rightarrow \lim C_n = A$

2.1 סדרות אפסיות

$a_n \to 0$ נקראת סדרה אפסית

שים לב:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0,\, b_n = \frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n} = \frac{1}{2} \neq 0 \ (0/0)$$

$$c_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{c_n}{b_n} = \frac{1 \cdot n}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2 \cdot n}$$

הסדרה c_n שואפת לאפס **מהר יותר** מהסדרה b_n.

2.1.1 סדרה השואפת לאפס "מהר יותר"

הגדרה נאמר שa_n שואפת לאפס מהר יותר מb_n אם מתקיים $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

משפט מכפלה של סדרה חסומה בסדרה אפסית היא סדרה אפסית. יהיו a_n סדרה אפסית, ו c_n סדרה חסומה. אזי: $0 \leq |c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| \leq M \cdot |a_n| = 0$

2.2 דוגמאות חישוב של גבולות אחדים

.1

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{1+(-1)^n}{n} \right) = 0$$

(א) $\frac{1+(-1)^n}{n}\ :\ 0,\ \frac{2}{2},\ 0,\ \frac{2}{4},\ \dots$

.2

$$a_n = \frac{n^2+5n-2}{3n^2-4n+1} = \frac{\cancel{n}^2\left(1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n}^2\left(3-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1}{3}$$

.3 יהי P פולינום ממעלה m וQ פולינום ממעלה n. אזי:

$$a_n = \frac{P_m}{Q_n} \to \begin{cases} 0 & m < n \\ \frac{\alpha}{\beta} & m = n \\ No\, limit & m > n \end{cases}$$

.4 $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=\lim\left(\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=0$

.5

$$\begin{aligned}\lim\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)= \\ & \lim\left(\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)= \\ & \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}={}^1\!/\!_2\end{aligned}$$

.6 $\lim\left(\frac{A\cos n+B\sin n}{\sqrt{n}}\right)=0$

.7 **<u>אי־שיויון ברנולי</u>**

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n\left(n+1\right)}{2!}x^2+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\ldots2\cdot1}{n!}x^n>1+nx$$

משפט אם $a>1$, אז $\lim\sqrt[n]{a}=1$

הוכחה $\sqrt[n]{a}-1=t>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}=1+t\Rightarrow a=(1+t)^n$

וכעת, ע"פ אי־שיוון ברנולי נקבל

$(1+t)^n>1+nt\Rightarrow a>1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\Rightarrow0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$

שני צידי המשוואה (0 ו $\frac{a-1}{n}$) שואפים לאפס, ולכן ע"פ חוק הסנדוויץ',

$\sqrt[n]{a}-1\to0\Rightarrow\sqrt[n]{a}\to1$ מש"ל.

משפט $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

הוכחה $\sqrt[n]{n}-1=x,\ (x>0)\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{n}=1+x\Rightarrow n=(1+x)^n$

ושוב, נשתמש באי־שיוויון ברנולי (במהדורה מורחבת)

$$n=(1+x)^n>1+nx+\underline{\frac{n(n-1)}{2}x^2}>1+nx+\underline{\frac{n^2}{4}x^2}$$

הדבר אפשרי משום ש $\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{4}$

$$\begin{aligned} n\quad > \quad & 1+nx+\frac{n^2}{4}x^2=\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2\Rightarrow\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2<n\Rightarrow \\ & \sqrt{\left(1+\frac{nx}{2}\right)^2}<\sqrt{n}\Rightarrow\left|1+\frac{nx}{2}\right|<\sqrt{n}\Rightarrow \\ & \left(-\sqrt{n}\right)<1+\frac{nx}{2}<\sqrt{n}\Rightarrow-\sqrt{n}-1<\frac{nx}{2}<\sqrt{n}-1\Rightarrow \\ & \frac{-2\sqrt{n}-2}{n}<x<\frac{2\sqrt{n}-2}{n}\Rightarrow \\ & 0<x<0\Rightarrow\sqrt[n]{n}\to 1 \end{aligned}$$

מש"ל.

משפט $\lim\frac{10^n}{n!}\to 0$

חישוב

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10^{n+1}n!}{(n+1)!10^n}=\frac{10}{n+1}\Rightarrow$$

נזכור, כי כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

$$a_{n+1}=a_n\cdot\left(\tfrac{10}{n+1}\right)\Rightarrow A=A\cdot 0$$

משפט $\lim\frac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$ **או למשל** $\lim\frac{n^a}{b^n}=0,b>1$

הוכחה

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{10}\cdot 10}{10^{n+1}n^{10}}=\frac{1}{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}$$

$$\lim a_{n+1}=\lim a_n\cdot\tfrac{1}{10}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{10}\Rightarrow A-A\cdot\tfrac{1}{10}=0\Rightarrow A\cdot\tfrac{9}{10}=0\Rightarrow A=0$$

2.3 המספר e (2.718281828459045...)

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\
&1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots \\
&+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=
\end{aligned}
$$

$$x_{n+1} > x_n$$

כלומר: מדובר בסדרה עולה.

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} < 2+\underbrace{1} < 3$$

כלומר: הסדרה חסומה (גם) ע"י המספר 3.

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$

$$\mathbf{l}\text{ogarithmus }\mathbf{n}\text{aturalis} \longleftrightarrow \log_e x \equiv \ln x$$

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

2.3.1 גבולות הקשורים למספר e

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = [n=2k] = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^2 = e^2$$

ובאופן כללי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

2.3.2 אירציונליות e

נוכיח שהמספר e אירציונלי:

$$
\begin{aligned}
y_n &= \lim\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \Rightarrow \\
y_{n+m}-y_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+m)!} = \\
& \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right] \\
&< e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right] = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n-2}} =
\end{aligned}
$$

המעבר האחרון על פי סכום סדרה הנדסית אינסופית $1+q+q^2+\ldots=\frac{1}{1-q}$

$\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{n!n}$ **ניתן לבדוק ולהגיע לסתירה אם ההנחה ההפוכה, ולכן אי השיוויון נכון.**

קיבלנו: $y_{n+m}-y_n<\frac{1}{n!n}$**. מכאן, נעבור לגבול כאשר** $n\to\infty$**:** $\lim_{m\to\infty}(y_{n+m}-y_n)\leq \frac{1}{n!n}\Rightarrow e-y_n\leq\frac{1}{n!n}$

הצבנו את e **במקום** y_{n+m} **משום שכך הוגדר.**

$e-y_n=\frac{\theta}{n!n},\ 0<\theta<1$ **בכדי להחליף את הסימן** $\leq$ **בסימן השיוויון (=), החלפנו את 1 ב** θ**.**

$e=y_n+\frac{\theta}{n!n}$ **מכאן, ברור כי** e **אירציונלי, משום שאם נניח כי e רציונלי נקבל סתירה:**

משום שהביטוי הנ"ל נכון עבור כל n**, ובפרט עבור** $n=q$**, נקבל:** $e=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}\Rightarrow$

$e=\frac{p}{q}\Rightarrow e=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{\theta}{q!q}=\frac{p}{q}$ **אם נכפיל את שני האגפים ב**$q!$ **נקבל סתירה:**

$n_1+\frac{\theta}{q}=n_2$ **כאשר** n_1,n_2 **שלמים, ואילו** $\frac{\theta}{q}$ **שבר.**

3 סכום הרמוני ולוגריתמים טבעיים

3.1 למה $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

הוכחה

$e \nearrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **הסדרה שואפת ל** e **בעלייה.**

$e \searrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$ **הסדרה שואפת ל** e **בירידה. (למשל** $y_1 = 4,\ y_2 = 3.375$**).**

$$\begin{aligned}\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}n^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n}\frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \\ &\frac{n}{n+1}\frac{\left[(n+1)^2\right]^{n+2}}{n^{n+2}(n+2)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} = \\ &\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\end{aligned}$$

כעת, ע"פ אי־שיוויון ברנולי $(1+\alpha)^n > 1+\alpha n$ **נקבל:**

$\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = 1$ **סיום ההוכחה חסר!**

$H_n = \ln n + C + \alpha_n$ **כאשר C קבוע,** $\alpha_n \to 0$**.**

$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ **הסדרה ההרמונית.**

נתבונן בסדרה $C_n = H_n - \ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$

$$\begin{aligned}C_{n+1}-C_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\ln n = \\ &\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_n &= H_n - \ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n = \\ &\ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot n} = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0\end{aligned}$$

$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C \Rightarrow \lim C_n=C \Rightarrow C_n-C\to 0 \Rightarrow H_n-\ln n-C=$
$\alpha_n \Rightarrow H_n=\ln n+C+\alpha_n$

קבוע אוילר. לא ידוע האם הוא רציונלי או אירציונלי $C=0.577\ldots$

הסכום ההרמוני שואף לאינסוף במהירות של הלוגריתם הטבעי. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx \ln n$

$H_{1000}=7.48\ldots \qquad H_{1000000}=14.39\ldots$

4 ביטויים בלתי מסוימים

$a_n = n$

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ **חשוב!** סדרה זו **<u>לא מתכנסת</u>** (לא לאינסוף ולא לשום ערך אחר). הסדרה **שואפת** (מתבדרת).

$\lim b_n = -\infty$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$ זה הוא ביטוי בלתי־מסוים.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \dots$ גם זה ביטוי בתלי־מסוים.

נוספים: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$

5 גבולות חלקיים

5.1 דוגמאות לגבולות חלקיים

לסדרה $a_n = (-1)^n$ יש תת־סדרות מתכנסות (היא עצמה לא..):

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

$$-1, -1, -1, -1, -1 \ldots$$

אם לסדרה a_n קיימת תת־סדרה $a_{n_k} \to A$ אזי A יקרא גבול חלקי של הסדרה a_n.

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$$

נתבונן בסדרה $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$:

$$\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{4}, \cos\pi \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$$

חמשת הגבולות החלקיים (האפשריים) לסדרה זו הם: $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1$.

5.1.1 דוגמא נוספת (מעט יותר מורכבת):

נתבונן בסדרה $x_{\alpha\beta\ldots\gamma} = 0.\,\alpha\beta\ldots\gamma$

$$x_1 = 0.1 \qquad x_2 = 0.2 \qquad x_3 = 0.\,3 \qquad x_{14} = 0.14$$

נשים לב ש $x_1 = x_{10} = x_{100} \ldots = 0.1$ ולכן 0.1 הוא גבול חלקי. אבל גם (למשל)

$$x_{358} = x_{3580} = 0.358$$

הוא גבול חלקי. למעשה, **כל מספר רציונלי ב $[0.1, 1]$ הוא גבול חלקי של הסדרה!** אבל מכך נובע שגם כל מספר **אי־רציונלי ב $[0.1, 1]$ הוא גבול חלקי של הסדרה.**

5.1.2 שתי סדרות

נוכיח כי עבור שתי הסדרות $x_n,\ y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ אם $x_n \to A$ אז $y_n \to A$. אולם,

צ"ל: כל הגבולות החלקיים של שתי סדרות אלו הם אותם המספרים.

משפט לשתי סדרות אלו אותם גבולות חלקיים.

הוכחה נניח כי A הוא גבול חלקי של x_n, **צ"ל** $y_n \to A$.

נתון $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$. **צ"ל** $y_{n_k} = x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}$

נזכור כי $\lim \sqrt[n]{n} \to 1$ ולכן, $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = A \cdot 1 = A$

כעת, יש להראות כי

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = B \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow x_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\sqrt[n_k]{n_k}} \Rightarrow x_{n_k} \to \frac{B}{1} = B$$

5.1.3 סדרה חסומה ולא מתכנסת

נתון כי x_n חסומה ־ $\lim (x_{n+1} - x_n) = 0$. האם הסדרה מתכנסת?

תשובה: הסדרה לא תמיד מתכנסת. יתכן כי היא מתבדרת. למה? (לא הוכחה מלאה)

די לתת דוגמא בכדי לסתור את הטענה:

הסדרה $0, 0.5, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1 \ldots$ עונה על ההגדרה אבל אינה מתכנסת.

5.2 הלמה של בולצנו־ויירשטרס

משפט כל סדרה חסומה כוללת תת־סדרה מתכנסת (אחת לפחות)

הוכחה נתבונן בסדרה החסומה $x_n \in [a_0, b_0]$ צ״ל: קיימת תת־סדרה של x_n המתכנסת. נוכיח בעזרת שיטת בולצנו (Bolzano):

נתבונן בנקודה האמצעית בקטע הנתון. לפחות אחת המחציות כוללת מספר אינסופי של איברים בסדרה. נקרא לקטע הנבחר (מחצית הקטע הראשון) $[a_1, b_1]$. שוב, נחלק את הקטע לשני חלקים באמצעו, ונקבל את הקטע $[a_2, b_2]$ שבו מספר אינסופי של איברים. נמשיך כך מספר אינסופי של פעמים. נקבל כי $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots$ ואז נקבל כי $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. על פי הלמה של קנטור, קיימת נקודה c_0 המשותפת לכל הקטעים.

נבחר x_{n_1} השייך לקטע $[a_1, b_1]$, ולאחריו x_{n_2} השייך לקטע $[a_2, b_2]$ וכך הלאה. משום שבקטעים שבחרנו תמיד ימצאו אינסוף איברים, תמיד נוכל לבנות סדרה אינסופית השואפת לנקודה/מספר c_0 המורכבת מאיברים שונים של הסדרה המקורית. באופן כללי נאמר, $x_{n_k} \in [a_{n_k}, b_{n_k}] \to [c_0, c_0]$ ולפי משפט הסנדוויץ׳, נקבל $x_{n_k} \to c_0$. מש״ל.

הערה אם הסדרה המקורית לא חסומה, לא בהכרח ניתן לבחור את הקטע הראשון, ולכן לא ניתן להשתמש בשיטה ועל כן נאמר כי הסדרה שואפת ל $+\infty$.

5.2.1 קבוצת כל הגבולות החלקיים

נסמן באות X את קבוצת כל הגבולות החלקיים. האם קיים גבול חלקי מקסימלי ומינימלי?

גבולות אלו יקראו הגבול העליון והגבול התחתון.

נסמן: $\underline{\lim} x_n$ לגבול התחתון, ו $\overline{\lim} x_n$ לגבול העליון.

Xלא כוללת נקודות בודדות. בכל קבוצה חסומה קיימים הסופרמום והאינפימום: $supX, infX$ שגם הם גבולות חלקיים של הסדרה. הסופרמום הוא הגבול המקסימלי.

כלומר: ב X תמיד ימצא איבר מקסימלי ואיבר מקסימלי.

אם הסדרה x_n חסומה, אזי $\overline{\lim} x_n = \sup x_n$, ו $\underline{\lim} x_n = \inf x_n$.

אם הסדרה x_n לא חסומה, $\overline{\lim} x_n = \infty$, ו $\underline{\lim} x_n = -\infty$.

6 קריטריון ההתכנסות

נשוב ונעסוק בסדרות מתכנסות. כלומר: $x_n \to A$. מכאן, לכל $\epsilon > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > n_0$ קיים A כך ש $|x_n - A| < \epsilon$.

6.1 קריטריון קושי

קושי היה הראשון לקבוע את "קריטריון קושי" המאפשר לנו להיפטר מA בהגדרה, ועדיין לברר האם קיים גבול לסדרה אם לאו.

המשפט נתונה סדרה x_n. סדרה זו מתכנסת אמ"ם עבור כל $\epsilon > 0$ קיים מספר $N \in \mathbb{N}$ כך שקיימים שני מספרים $n, n' > N$ עבורם $|x_n - x_{n'}| < \epsilon$

הוכחה נניח x_n מתכנסת. מכאן, $|x_n - A| < \epsilon$, ובדומה, $|x_{n'} - A| < \epsilon$. כעת, נרצה לחשב את $|x_n - x_{n'}|$:

$|x_n - x_{n'}| = |x_n - x_{n'} - A + A| = |(x_n - A) + (A - x_{n'})| \le 2 \cdot \epsilon$. המעבר האחרון על פי אי־שיוויון המשולש.

כעת, נוכיח את הכיוון ההפוך: נניח שעבור כל $\epsilon > 0$ קיים N: $n, n' > N \Leftarrow |x_n - x_{n'}| < \epsilon$.

מכאן, $x_{n'} - \epsilon < x_n < x_{n'} + \epsilon$. מסקנה: $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

חלק II

טורים מספריים

טור הוא סכום של סדרה אינסופית.

7 התכנסות והתבדרות