

一、填空题（每题 3 分，共 18 分，在以下各小题中画有\_\_\_\_\_处填上答案）

1. 当  $x \rightarrow 0$  时， $1 - \cos x$  是  $x$  的\_\_\_\_\_阶无穷小；
2. 设  $y = x^x$ ，则  $dy =$ \_\_\_\_\_；
3. 设  $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ ，则  $f'(x) = 0$  有\_\_\_\_\_个实根；
4. 曲线  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  在点  $(1, 1)$  处的曲率是\_\_\_\_\_；
5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ ，则  $\int_0^2 f(x) dx =$ \_\_\_\_\_；
6.  $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^4 + x^2 \cos x + 2} dx =$ \_\_\_\_\_.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分，选择正确答案的编号，填在各题的括号内）

1. 设  $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$ ，则  $x = 0$  为  $f(x)$  的（ ）；  
A). 可去间断点；      B) 跳跃间断点；      C) 第二类间断点；      D) 连续点.
2. 设  $f'(x_0) = -2$ ，则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} =$ （ ）；  
A)  $\frac{1}{2}$ ；      B)  $-\frac{1}{2}$ ；      C) 2；      D) -2 .
3. 设  $f'(x_0) = 0$ ， $f''(x_0) = 0$ ， $f'''(x_0) > 0$ ，则（ ）；  
A)  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极大值；      B)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值；  
C)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值；      D)  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极小值.
4. 若  $\int f(x) dx = F(x) + C$ ，则  $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx =$ （ ）；  
A)  $F(e^x) + C$ ；      B)  $-F(\bar{e}^x) + C$       C)  $F(\bar{e}^x) + C$       D)  $x^{-1} F(\bar{e}^x) + C$
5. 设  $f(x)$  是以  $T$  为周期的连续函数，则定积分  $\int_a^{a+T} f(x) dx$  的值（ ）  
A) 与  $T$  无关；      B) 与  $a$  无关但与  $T$  有关；      C) 与  $T, a$  无关；      D) 与  $T, a$  有关.

三、计算题（每小题 7 分，共 42 分）

1、设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{x-1}{t-1} \right)^{\frac{1}{x-t}}$ ，求  $f(x)$  的间断点并判断其类型.

2. 设  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t, \end{cases}$  求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

3、计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x 2xe^{t^2} dt}{e^{x^2}}$

4、已知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

5、求  $\int \sqrt{e^x - 1} dx$ .

6. 求  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$

四、证明题（第 1 题 6 分，第 2 题 7 分，共 13 分）

1. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  都在  $[a, b]$  上连续，且  $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$ , 证明在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = g(\xi)$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，且  $f(a) = 0$ ,  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加，

证明  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x-a}$  在  $(a, b)$  内单调增加.

五、应用题（12 分）

设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  通过点(0,0)，且当  $x \in [0,1]$  时， $y \geq 0$ ，试确定  $a, b, c$  的值，使得抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $x = 1, y=0$  所围成的面积为  $4/9$ ，且使得该图形绕成的旋转体的体积最小。