线性代数练习题

周英告

为湖南三书礼文化发展有限公司而作

2018 年 8 月 28 日

目录

第1章　行列式

1.1　选择题

1.1.1　二阶与三阶行列式

习题1.1 (易). $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = (\ )$

(A) 2; *(B)* -2; *(C)* 4; *(D)* -4.

(D)

习题1.2 (易). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (\ )$

(A) $(a-b)(b-c)(c-a)$; *(B)* 0; *(C)* $(a+b)(b+c)(c+a)$; *(D)* $a+b+c$.

(A)

习题1.3 (中). 设有方程 $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$, 则其单根是

(A) 0; *(B)* 1; *(C)* 2; *(D)* 3.

(D)

习题1.4 (中). 设有方程 $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & -2 \\ -1 & x & 1 \\ -2 & 2 & 1+x \end{vmatrix} = 0$, 则其所有的解为

(A) $0, 1, -3$; *(B)* $0, 1, 3$; *(C)* $0, 0, -3$; *(D)* $1, 1, 3$.

(A)

习题1.5 (中). 设 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$，则 $\lambda =(\quad)$

(A) $-1, -1, -1$; *(B)* $1, 1, 1$; *(C)* $1, -1, 1$; *(D)* $1, -1, -1$.

(D)

习题1.6. 设 a，b，c 互不相同，$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$，则 $\mathbf{D} = 0$ 的充要条件是$(\quad)$

(A) $a+b+c=0$; *(B)* $a+b+c=1$; *(C)* $a+b+c\neq 0$; *(D)* 无法确定.

(A)

习题1.7. 行列式$\mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$，$\mathbf{D}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$，若$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$，则$\lambda$ =(　　)

(A) $2, -1$　　*(B)* $1, -1$　　*(C)* $0, 2$　　*(D)* $0, 1$.

(B)

习题1.8 (易). 行列式$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$的条件是(　　)

(A) $a = 0$，$b = 1$; *(B)* $a = 1$，$b = 0$; *(C)* $a = 1$，$b = 1$; *(D)* $a = 0$，$b = 0$.

(D)

习题1.9 (易). 欲使$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$，则(　　)

(A) $x \neq 0$; *(B)* $x \neq 2$; *(C)* $x \neq 0$，且$x \neq 2$; *(D)* $x = 0$, 或$x = 2$.

(C)

习题1.10 (易). 若行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$，则$x =$ (　　).

(A) 2;　　*(B)* -2;　　*(C)* 3;　　*(D)* -3

(C)

习题1.11 (易). 方程$\begin{vmatrix} 1 & x & 5x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$ 根的个数是(　　)

(A) 0；　　*(B)* 1；　　*(C)* 2；　　*(D)* 3

(C)

习题1.12 (易). 设$f(x) = ax^2 + bx + c$，欲使$f(1) = 0$，$f(2) = 3$，$f(-3) = 28$，则a, b, c的值是(　　)

(A) $a = 2, b = -3, c = 1$; *(B)* $a = -2, b = -3, c = 1$; *(C)* $a = -2, b = -3, c = -1$; *(D)* $a = -2, b = 3, c = 1$.

(A)

1.1.2 n阶行列式

习题1.13 (易). 下列$n(n > 2)$阶行列式的值必为零的是(　　)

*(A)*行列式主对角线上的元素全为零　　*(B)* 三角形行列式主对角线上有一个元素为零

*(C)*行列式零的元素的个数多于n个　　*(D)*行列式非零元素的个数小于等于n个

(B)

习题1.14 (易). 行列式$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$第4行各元素余子式之和是(　　)

(A) 0; *(B)* 1; *(C)* 28; *(D)* -28

(D)

习题1.15 (易)**.** 选择k,l欲使$a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$成为五阶行列式$|a_{ij}|$中带有负号的项，则(　　)

(A) $k=5, l=1$; *(B)* $k=1$，$l=5$; *(C)* $k=3, l=4$; *(D)* 无法确定

(B)

习题1.16 (易)**.** 行列式$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$中元素3和4的代数余子式分别为(　　).

(A) 4, 10; *(B)* $-4, 10$; *(C)* $-4, -10$; *(D)* $4, -10$.

(C)

习题1.17 (中)**.** 已知四阶行列式

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

则$\mathbf{A}_{14}+\mathbf{A}_{24}+\mathbf{A}_{34}+\mathbf{A}_{44}$与$\mathbf{M}_{41}+\mathbf{M}_{42}+\mathbf{M}_{43}+\mathbf{M}_{44}$的值分别为(　　)，其中$\mathbf{M}_{ij}$，$\mathbf{A}_{ij}$分别为行列式$\mathbf{D}$中元素$a_{ij}$的余子式和代数余子式.

(A) 0, 0; *(B)* $0, -68$; *(C)* 68, 0; *(D)* $-68, 0$.

(B)

习题1.18 (易)**.** 在下面的排列中，是奇排列的为(　　).

(A) 1 3 5 2 4 8 6 7　*(B) 1 5 3 2 4 8 6 7*　*(C) 1 3 8 2 4 5 6 7*　*(D) 1 6 5 2 4 8 3 7*

A

习题1.19 (易)**.** 要使由1，2，3，4，5，6，7，8，9这9个自然数组成的排列$(3729i14k5)$为偶排列，则$i=$(　　)，$k=$(　　).

(A) 6,8; *(B) 8,6*; *(C) 8,8*; *(D)* 以上都不对

(B)

习题1.20. 记$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 3x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$, 则方程$f(x)=0$根的个数为(　　)

(A) 0; *(B)* 1; *(C)* 2; *(D)* 3.

(C)

习题1.21. 方程$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0$的根为(　　).

(A) a_1+a_2，a_3+a_4;　*(B)* 0, $a_1+a_2+a_3+a_4$;　*(C)* $a_1a_2a_3a_4$，0;　*(D)* 0, $-a_1-a_2-a_3-a_4$

(D)

1.1.3 行列式的性质

习题1.22 (中). 已知255，459，527都能被17整除，则行列式$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 7 \end{vmatrix}$(　　)

(A) 能被13整除； *(B)* 能被15整除; *(C)* 能被17整除; *(D)* 能被27整除.

(C)

习题1.23 (易). 如果$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\mathbf{D_1} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$，则$\mathbf{D_1} = ($　　$)$.

(A) $2\mathbf{D}$　　*(B)* $-2\mathbf{D}$　　*(C)* $8\mathbf{D}$　　*(D)* $-8\mathbf{D}$

C

习题1.24 (中). 设四阶行列式D的第二行元素分别为$2, x, 1, 0$，它们的余子式分别为$2, 6, -2, y$，第三行的各元素的代数余子式分别为$3, 6, 1, 5$，行列式$D =$(　　).

(A) 5; *(B)* 0; *(C)* 9; *(D)* -9.

(D)

习题1.25 (易). 已知四阶行列式$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -7 & -1 \\ -1 & -5 & 3 & -9 \\ -2 & 6 & -8 & 0 \end{vmatrix}$，则$-2A_{11} + 7A_{21} - 3A_{31} + 8A_{41}$ 的值为(　　)，其中A_{ij} 为$\mathbf{D}$的第i 行第j 列元素的代数余子式.

(A) -1; *(B)* 0; *(C)* 1; *(D)* 10.

(B)

习题1.26 (中). $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = ($　　$)$;

(A) 0; *(B)* $a+b+c+d$; *(C)* $a^2+b^2+c^2+d^2$; *(D)* $a^3+b^3+c^3+d^3$

(A)

习题1.27 (易). 多项式$f(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 2+x & 3+x \\ 4+x & 5+x & 6+x \\ 7+x & 8+x & 9+x \end{vmatrix}$的次数是(　　)

(A) 0; *(B)* 1; *(C)* 2; *(D)* 3.

(A)

习题1.28 (易). 多项式$f(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 2+x & 3+x \\ 3+x & 5+x & 7+x \\ 4+x & 6+x & 9+x \end{vmatrix}$的次数是(　　)

(A) 0; *(B)* 1; *(C)* 2; *(D)* 3.

(B)

习题1.29 (中). 设α、β、γ 是方程$x^3-1=0$的根，则行列式$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$=(　　)

(A) 3;　(B) −3;　(C) 0;　(D) 无法确定.

(C)

习题1.30 (中). 如果在行列式中，偶数号码各行的和等于奇数号码各行的和，则行列式值等于(　　).

(A) 1;　(B) −1;　(C) 0;　(D) 无法确定.

(C)

习题1.31 (中). 已知$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，那么$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=(\quad)$.

(A) −24;　(B) −12;　(C) −6;　(D) 12

(B)

1.1.4 Cramer法则

习题1.32 (中). 方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=-1, \\ x_1+x_2+3x_3+x_4=7, \\ x_1+x_2+x_3+4x_4=-2. \end{cases}$ 的解为(　　)

(A) $(-1,-2,3,1)^T$;　*(B)* $(1,2,3,-1)^T$;　*(C)* $(1,-2,3,-1)^T$;　*(D)* $(1,2,3,4)^T$

(C)

习题1.33 (中). 方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=3, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=-4. \end{cases}$ 的解为(　　)

(A) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-2)^T$;　*(B)* $(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2)^T$;　*(C)* $(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\frac{1}{2})^T$;　*(D)* $(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-2)^T$

(D)

习题1.34 (中). 方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$ 的解为(　　)

(A) $(3,-4,-1,1)^T$；　*(B)* $(-3,4,1,-1)^T$;　*(C)* $(3,4,1,1)^T$;　*(D)* 无解

(A)

习题1.35 (中). 方程组$\begin{cases} x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_3+x_4=2, \\ x_1+x_2+x_4=3, \\ x_1+x_2+x_3=4. \end{cases}$ 的解为(　　)

(A) $(\frac{7}{3},\frac{-4}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3})^T$；　*(B)* $(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3})^T$;　*(C)* $(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$;　*(D)* 无解

(B)

习题1.36 (易). 方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 4x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$ 的解为(　　)

(A) $(0,0,0)^T$； *(B)* $(1,1,3)^T$; *(C)* 无穷多解; *(D)* 无解

(A)

习题1.37 (中). 方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=1, \\ x_1+x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2-5x_4=10. \end{cases}$ 的解为(　　)

(A) $(1,2,0,1)^T$； *(B)* $(-1,2,0,-1)^T$; *(C)* $(1,2,0,-1)^T$; *(D)* 无解

(C)

习题1.38 (易). 设有方程组$\begin{cases} bx-ay+2ab=0, \\ -2cy+3bz-bc=0, \\ cx+az=0, \end{cases}$ 其中, $abc\neq 0$, 则该方程的解为(　　)

(A) $(a,-b,c)^T$; *(B)* $(-a,b,c)^T$; *(C)* $(-a,-b,-c)^T$; *(D)* 无解

(B)

习题1.39 (中). 设方程组$\begin{cases} x_1-x_2=\lambda x_1, \\ -x_1+2x_2-x_3=\lambda x_2, \\ -x_2+x_3=\lambda x_3. \end{cases}$ 有非零解，则参数$\lambda=$(　　)

(A) $0,1,2$; *(B)* $0,1,3$; *(C)* $1,1,3$; *(D)* $1,2,3$.

(B)

习题1.40 (难). 方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=a, \\ x_1+x_2+ax_3=a^2. \end{cases}$ 有解的条件是(　　)

(A) $a=-2$; *(B)* $a\neq -2$; *(C)* $a\neq 1$; *(D)* $a\neq 1$.

(B)

1.2 填空题

1.2.1 二阶与三阶行列式

习题1.41 (中). $\frac{d^2}{dx^2}\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix}=$____________

$2(a_{11}+a_{22}+a_{33})+6x$

习题1.42 (易). 已知$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$, 则$f(x)=$____________

$-2x^3-3x^2+2x$

1.2.2 n阶行列式

习题1.43 (易). $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$中$x^4$与$x^3$的系数分别为__________和__________.

2; −1

习题1.44 (中). 设$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$中代数余子式$\mathbf{A_{12}}=-1$，则$\mathbf{A_{21}}=$__________.

2

习题1.45 (易). 元素为a_{ij}的5阶行列式的项$a_{53}a_{21}a_{32}a_{45}a_{14}$应取的符号为__________号.

正

1.2.3 行列式的性质

习题1.46 (易). 已知四阶行列式$\mathbf{D}$的第一行元素分别为1，2，3，4. 而它们的余子式依次为$-1,2,-2,1$，则行列式$\mathbf{D}=$__________.

13.

习题1.47 (难). 已知四阶行列式中第三行元素依次为$-1,0,2,4$，第四行的余子式依次为$10,5,a,2$，则$a=$__________.

9

习题1.48 (中). 按第三行展开并计算行列式.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=$__________.

−24

习题1.49 (中). 按第三列展开并计算行列式.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=$__________.

−192

习题1.50 (中). 已知$\mathbf{D}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$，则$\mathbf{A}_{14}+\mathbf{A}_{24}+\mathbf{A}_{34}+\mathbf{A}_{44}=$__________, 其中, 其中$A_{ij}$为$\mathbf{D}$的第$i$行第$j$列元素的代数余子式.

−1.

习题1.51 (中). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =________________

-3

习题1.52 (中). $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ =________________

x^4

习题1.53 (中). $\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$ =________________

312

习题1.54 (中). $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$ = ________________

$b^2(b^2 - 4a^2)$

习题1.55 (中). $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ =________________

x^2y^2

习题1.56 (中). $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ =________________

16

习题1.57 (中). $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ =________________

160

习题1.58 (中). $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =________________

5

习题1.59 (中). $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$________________

-306

习题1.60 (中). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$________________

-8

习题1.61 (中). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 & \cos\theta_4 \\ \cos 2\theta_1 & \cos 2\theta_2 & \cos 2\theta_3 & \cos 2\theta_4 \\ \cos 3\theta_1 & \cos 3\theta_2 & \cos 3\theta_3 & \cos 3\theta_4 \end{vmatrix} =$________________

$\prod_{1\le j<i\le 4}(\cos\theta_i - \cos\theta_j)$

习题1.62 (中). *若*$abcd = 1$，则 $\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & a & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & a & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & a & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} =$________________

0

习题1.63 (中). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$________________

-306

习题1.64 (中). $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & -0 & a_4 \end{vmatrix} =$________________

$a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3$

习题1.65 (中). $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$________________

40

习题1.66 (中). $\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} =$________________

−312

习题1.67 (中). $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} =$________________

a^4

习题1.68 (中). $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$________________

−145

习题1.69 (中). $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$________________

30

习题1.70 (中). $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$________________

9375

习题1.71 (中). $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix} =$________________

$a^5 - 4a^3bc + 3ab^2c^2$

习题1.72 (难). 设$D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$, 其中，对角线上的元素都是$a$, 未写出的元素都是$0$，则$D_n =$________________

$a^{n-2}(a^2-1)$

习题1.73 (中). $D_n = \begin{vmatrix} 2018 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2018 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2018 \\ 0 & 2018 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$________________

$(-1)^n 2018^n$

习题1.74 (难). $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \ldots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ =____________

$\prod_{1\le j<i\le n+1}(i-j)$

习题1.75 (中). $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$ =____________

$(n-1)!$

习题1.76 (易). $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 0 & 2 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix}$ =____________

$n!$

习题1.77 (易). 设$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \neq 0$，则$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ =____________

$-a$

习题1.78 (易). 设$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \neq 0$，则$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ =____________

$5a$

习题1.79 (中). 若行列式$\begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}-\lambda & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6}-\lambda & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, 则$\lambda$ =____________

1.

1.2.4 Cramer法则

习题1.80 (难). 已知方程组$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y-z=b \\ x-y+z=c \end{cases}$有唯一解，且$x=1$，那么$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ =____________

4.

习题1.81 (中). 若方程组$\begin{cases} (3-\lambda)x_1+x_2+x_3=0, \\ (2-\lambda)x_2-x_3=0, \\ 4x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3=0, \end{cases}$ 有非零解，则$\lambda=$________________

$3, 4, -1.$

习题1.82 (中). 方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=b, \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+a_4^2x_4=b^2, \\ a_1^3x_1+a_2^3x_2+a_3^3x_3+a_4^3x_4=b^3 \end{cases}$ 有唯一解的条件是________________

$a_i \neq a_j, 1 \leq i < j \leq 4$. (提示：$x_1=\frac{(a_4-b)(a_3-b)(a_2-b)}{(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_2-a_1)}, x_2=\frac{(a_4-b)(a_3-b)(b-a_1)}{(a_4-a_2)(a_3-a_2)(a_2-a_1)}, x_3=\frac{(a_4-b)(b-a_1)(b-a_2)}{(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}, x_4=\frac{(b-a_1)(b-a_2)(b-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}$.)

习题1.83 (中). 方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\mu x_2+x_3=0 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解的充分条件是________________

$\lambda=1$或$\mu=0$.

习题1.84. 方程组$\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解的充分条件是________________

$\lambda=0$，$\lambda=2$或$\lambda=3$.

1.3 主观题

1.3.1 行列式及其性质

习题1.85 (难). 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2n & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 2n & n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & 2n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 2n \end{vmatrix}$.

解：$D_n=n^n\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}:=n^nK_n$.

对K_n, 按第一列展开得$K_n=2K_{n-1}-K_{n-2}$, 从而，

$$K_n-K_{n-1}=K_{n-1}-K_{n-2}=\cdots=K_2-K_1=3-2=1,$$

进而，$K_n=K_1+(n-1)d=n+1$, 故$D_n=(n+1)n^n$.

习题1.86 (难). 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$其中, $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解：加边得

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\\
&\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}\\
&\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+\frac{1}{a_i}c_{i+1}} \begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}\\
&= \prod_{i=1}^{n} a_i\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right).
\end{aligned}$$

习题1.87 (难(2015数学I)). 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}2 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}$.

解：将行列式按第一行展开得

$$\begin{aligned}
D_n &= 2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2\\
&= 2(2D_{n-2}+2)+2\\
&= 2^2D_{n-2}+2^2+2\\
&= 2^{n-1}D_1+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2\\
&= 2^n+2^{n-1}+\cdots+2\\
&= 2^{n+1}-2.
\end{aligned}$$

1.3.2 Cramer法则

习题1.88 (中). 已知$a^2 \neq b^2$,

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ ax_2 + bx_{2n-1} = 1, \\ \cdots \\ ax_n + bx_{n+1} = 1, \\ bx_n + ax_{n+1} = 1, \\ bx_{n-1} + ax_{n+2} = 1, \\ \cdots \\ bx_1 + ax_{2n} = 1. \end{cases}$$

试证该方程组有唯一解，并求解.

解：运用分块性质，易知方程组的系数行列式值为$(a^2 - b^2)^n$. 由于$a^2 \neq b^2$，故$D \neq 0$. 由克莱姆法则知该方程组有唯一解. 将此方程组改写成

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1, \\ ax_2 + bx_{2n-1} = 1, \\ bx_2 + ax_{2n-1} = 1, \\ \cdots, \\ ax_{n-1} + bx_{n+1} = 1, \\ bx_{n-1} + ax_{n+1} = 1, \end{cases}$$

从而原方程组的解为

$x_i = \frac{1}{a+b}(i = 1，2，\cdots，2n)$.

第2章　矩阵

2.1　选择题

2.1.1　矩阵的概念与运算

习题2.1 ((中)2015数学II). 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且$A^3=O$. 则$a=(\quad)$

(A) -1; *(B)* 0; *(C)* 1; *(D)* 2.

(B)

习题2.2 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$均为n阶方阵，且$\mathbf{AB}=\mathbf{BC}=\mathbf{CA}=\mathbf{E}$，则$\mathbf{A^2}+\mathbf{B^2}+\mathbf{C^2}=(\quad)$.

(A) $3E$;　*(B)* $2E$;　*(C)* E;　*(D)* O.

(A)

习题2.3 (中). 已知$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$均为n阶方阵，则必有$(\quad)$

(A)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$　*(B)*$(\mathbf{AB})^T=A^TB^T$

(C)$\mathbf{AB}=0$时，$\mathbf{A}=0$ 或$\mathbf{B}=0$　*(D)* $|\mathbf{A}+\mathbf{AB}|=0 \Leftrightarrow |\mathbf{A}|=0$ 或$|\mathbf{E}+\mathbf{B}|=0$

(D)

习题2.4 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n阶方阵，且满足$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，$\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$及$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=\mathbf{A}+\mathbf{B}$，则$(\quad)$

(A) $\mathbf{AB}=\mathbf{AB}=0$; *(B)* $\mathbf{AB}\neq\mathbf{AB}$; *(C)* $\mathbf{AB}=\mathbf{AB}\neq 0$; *(D)* $A=0$; 或$B=0$.

(A)

习题2.5 (中). 设$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$，矩阵$\mathbf{A}=\alpha\alpha^T$，$n$为正整数，则$|a\mathbf{E}-\mathbf{A}^n|=(\quad)$

(A) $a^2(a+2^n)$; *(B)* $a-2^n$; *(C)* -2^n; *(D)* $a^2(a-2^n)$.

(D)

习题2.6 (中). 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，而$n\geq 2$为正整数，则$\mathbf{A}^n-2\mathbf{A}^{n-1}=(\quad)$

(A) O; *(B)* E; *(C)* A; *(D)* $2A$

(A)

习题2.7 (中). 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, 若$AB=BA$, 则必有$(\quad)$

(A) $b_{11}=b_{22}$; *(B)* $b_{12}=b_{21}$; *(C)* $b_{12}=0$; *(D)* $a_{11}+a_{22}=0$.

(A)

习题2.8 (中). 设$\mathbf{A}$是四阶方阵，$\mathbf{B}$是五阶方阵，且$|\mathbf{A}| = 2$，$|\mathbf{B}| = -2$，则$|-|\mathbf{A}|\,\mathbf{B}| = ($　　$)$

(A) 64; *(B)* -64; *(C)* 4; *(D)* -4.

(A)

习题2.9 (中). 设$\mathbf{A}$是四阶方阵，$\mathbf{B}$是五阶方阵，且$|\mathbf{A}| = 2$，$|\mathbf{B}| = -2$，则$|-|\mathbf{B}|\,\mathbf{A}| = ($　　$)$

(A) -32; *(B)* 32; *(C)* 4; *(D)* -4.

(B)

习题2.10 (中). 设四阶矩阵$\mathbf{A} = (\alpha，\gamma_2，\gamma_3，\gamma_4)$，$\mathbf{B} = (\beta，\gamma_2，\gamma_3，\gamma_4)$，其中$\alpha$，$\beta$，$\gamma_2$，$\gamma_3$，$\gamma_4$均为四维列向量.且已知$|\mathbf{A}| = 4$，$|\mathbf{B}| = 1$，则$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = ($　　$)$

(A) 0; *(B)* 5; *(C)* -5; *(D)* 40.

(D)

习题2.11 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n 阶方阵，满足等式$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 为n阶矩阵，则必有(　　).

(A)$\mathbf{A} = \mathbf{0}$或$\mathbf{B} = \mathbf{0}$　　*(B)*$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$　　(*C*) $|\mathbf{A}| = \mathbf{0}$ 或$|\mathbf{B}| = \mathbf{0}$　　(*D*) $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = \mathbf{0}$

(C)

2.1.2 逆矩阵

习题2.12 (中). 设$\mathbf{A}$为n阶非奇异方阵，其伴随矩阵为$\mathbf{A}^\star$，则$(\mathbf{A}^\star)^\star($　　$)$.

(*A*) $|\mathbf{A}|^{n-1}\,\mathbf{A}$　　(*B*) $|\mathbf{A}|^{n+1}\,\mathbf{A}$　　(*C*) $|\mathbf{A}|^{n-2}\,\mathbf{A}$　　(*D*) $|\mathbf{A}|^{n+2}\,\mathbf{A}$

(C)

习题2.13 (中). 设$\mathbf{A} = (a_{ij})$是$s \times r$ 矩阵，$\mathbf{B} = (b_{ij})$是$r \times s$矩阵，如果$\mathbf{BA} = \mathbf{E}$，则必有(　　).

(*A*)$r > s$　　(*B*)$r < s$　　(*C*)$r \le s$　　(*D*)$r \ge s$

(C)

习题2.14 (中). $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$同为n 阶方阵，则(　　)成立.

(*A*) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$　　(*B*)$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$　　(*C*) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$　　(*D*)$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}$

(C)

习题2.15 (中). 设A满足$A^2 - A - 2E = 0$. 则A与$A + 2E$(　　)

(A) A可逆，但$A + 2E$不可逆；　*(B)* A不可逆，但$A + 2E$可逆; *(C)* A可逆，且$A + 2E$可逆; *(D)* 无法判断

(C)

习题2.16 (中). 设$P^{-1}AP = \Lambda$, 其中$P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则$A^{11} =$(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$; *(B)* $\begin{pmatrix} -2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$; *(C)* $\begin{pmatrix} 2731 & -2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$; *(D)* $\begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ 683 & -684 \end{pmatrix}$.

(A)

习题2.17 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}$满足$\mathbf{BA} = \mathbf{B} + 2\mathbf{E}$，则$|\mathbf{B}| =$

(A) -3; *(B)* 3; *(C)* 2; *(D)* -2.

(C)

习题2.18 (难). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$是三阶方阵，且满足$\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{E}$，若$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，则$|\mathbf{B}|=$

(A) 0; *(B)* 1; *(C)* 2; *(D)* 0.5.

(D)

习题2.19 (难). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n 阶方阵，$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}, \mathbf{B}\mathbf{B}^T=\mathbf{E}$, 且$|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=0$，则$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=($ $)$

(A) -1; *(B) 0; (C) 1; (D) 2.*

(B)

习题2.20 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$均为n 阶方阵，$\mathbf{E}$为n阶单位矩阵，若$\mathbf{B}=\mathbf{E}+\mathbf{A}\mathbf{B}$，$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{A}$，则$\mathbf{B}-\mathbf{C}$为$($ $)$

(A) $\mathbf{E}$; *(B)* $-\mathbf{E}$; *(C)* $\mathbf{A}$; *(D)* $-\mathbf{A}$

(A)

习题2.21 (中). 设三阶方阵$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$满足$|\mathbf{A}|=3$，且$\mathbf{B}=2(\mathbf{A}^{-1})^2-(2\mathbf{A}^2)^{-1}$，则$|\mathbf{B}|=($ $)$

(A) $\frac{8}{3}$; *(B)* $\frac{3}{8}$; *(C) 0; (D)* $\frac{5}{8}$.

(B)

习题2.22 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$均为n阶方阵，且$\mathbf{E}+\mathbf{A}\mathbf{B}$可逆，将$(\mathbf{E}+\mathbf{B}\mathbf{A})\left[\mathbf{E}-\mathbf{B}(\mathbf{E}+\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}\right]$化简得$($ $)$

(A) O; (B) E; (C) A (D) B.

(B)

习题2.23 (中). 设矩阵$\mathbf{A}$满足设$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{0}$，其中$\mathbf{E}$为单位矩阵，则$(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=($ $)$

(A) $A+E$; *(B)* $A+2E$; *(C)* $A-2E$; *(D)*$\frac{1}{2}(A+2E)$.

(D)

习题2.24 (中). 设$\mathbf{A}$满足$ax^2+bx+c=0(c\neq 0)$，则$($ $)$

(A) A可逆，且$A^{-1}=aA+bE$; *(B)* A可逆，且$A^{-1}=-\frac{1}{c}(aA+bE)$; *(C)* A可逆，且$A^{-1}=\frac{1}{c}(aA+bE)$; *(D)* A的可逆性不确定.

(B)

习题2.25 (中). 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵$\mathbf{B}$满足：$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^\star=2\mathbf{B}\mathbf{A}^\star+\mathbf{E}$，则$|\mathbf{B}|=($ $)$

(A) 9; (B) 0; ; (C) $\frac{1}{9}$; *(D)* $\frac{3}{9}$.

(C)

习题2.26 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n 阶矩阵，已知$|\mathbf{B}|\neq 0$，且满足$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}^2=\mathbf{0}$，则$($ $)$

(A) A可逆，但$A+B$不可逆； *(B)* 证明：$A+B$可逆，但A不可逆; *(C)* A与$A+B$都可逆； *(D)* A与$A+B$的可逆性不确定

(C)

2.1.3 分块矩阵

习题2.27 (中). 设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$是3阶方阵，已知$|\mathbf{A}| = -1$，$|\mathbf{B}| = 2$，则$\begin{vmatrix} 2\mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B} \end{vmatrix} = (\quad)$

(A) 0; (B) −16; (C) 16; (D) 32.

(C)

2.1.4 矩阵的秩与初等变换

习题2.28 (难). 矩阵$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$的秩不可能是$(\quad)$

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

(C)

习题2.29 (中). 设$\mathbf{A}$为三阶矩阵，将$\mathbf{A}$的第二行加到第一行得$\mathbf{B}$，再将$\mathbf{B}$的第一列的-1倍加到第二列得$\mathbf{C}$，记$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则$(\quad)$

(A) $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$; *(B)* $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$; *(C)* $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$; *(D)* $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$.

(B)

习题2.30 (中). 设n阶矩阵$\mathbf{A}$可逆，将$\mathbf{A}$的第i行与第j行交换后得到矩阵$\mathbf{B}$, 则$\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} =$__________

$E(i, j)$

习题2.31 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中$a_i \neq 0$，$b_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则$r(\mathbf{A}) = (\quad)$

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) n.

(B)

习题2.32 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ (a_1+1)^2 & (a_2+1)^2 & (a_3+1)^2 & (a_4+1)^2 & (a_5+1)^2 \end{bmatrix}$，其中$a_i \neq b_i$，$i \neq j$，则$\mathbf{A}$的秩是$(\quad)$

(A) 4; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

(A)

习题2.33 (易). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的秩是$(\quad)$

(A) 1; (B) 3; (C) 5; (D) 4.

(C)

习题2.34. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\1&11&3&6&16\\1&-19&-7&-14&-34\end{bmatrix}$的秩是(　　)

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

(C)

习题2.35 (中). 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}$，且$r(\mathbf{A})=3$，则$k=($　　$)$

(A) 1;　(B) 3;　(C) −3;　(D) −1.

(C)

习题2.36 (中). 设$n(n\geq 3)$阶矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&a&a&\dots&a\\a&1&a&\dots&a\\a&a&1&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a&a&a&\dots&1\end{bmatrix}$，且$r(\mathbf{A})=n-1$，则$a=($　　$)$

(A) $\frac{1}{n}$; *(B)* $\frac{1}{n-1}$; *(C)* $\frac{1}{1-n}$; *(D)* $-\frac{1}{n}$.

(C)

习题2.37 (易). 设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$r(\mathbf{A})=r<m<n$，则(　　) 成立.

(A)$\mathbf{A}$的所有r阶子式都不为0　　(B)$\mathbf{A}$的所有$r-1$阶子式都不为0

(C)$\mathbf{A}$经初等行变化可以化为$\begin{bmatrix}\mathbf{E_r}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$　　(D)$\mathbf{A}$ 不可能是满秩矩阵

(D)

习题2.38 (中). 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}$的伴随矩阵的秩为1，则有(　　).

(A) $a=b$或$a+2b=0$;　*(B)* $a=b$或$a+2b\neq 0$;　*(C)* $a\neq b$且$a+2b=0$　*(D)* $a=b$且$a+2b\neq 0$

(C)

习题2.39 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为四阶矩阵，$r(\mathbf{A})=3$，$r(\mathbf{B})=4$，它们的伴随矩阵分别$\mathbf{A}^\star$，$\mathbf{B}^\star$，则$r(\mathbf{A}^\star\mathbf{B}^\star)=($　　$)$

(A) 0;　(B) 1;　(C) 3;　(D) 4.

(B)

2.2 填空题

2.2.1 矩阵的概念与运算

习题2.40 (易). 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&-5&1\end{pmatrix}$, 则$A-2B+3C=$________________

$$\begin{pmatrix} -10 & -1 & -1 \\ -1 & -13 & 3 \end{pmatrix}$$

习题2.41 (易). 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, 则$AB^T =$________________

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

习题2.42 (易). 欲使$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 & 2 \\ -7 & 1 & 9 & 4 \\ 6 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. 则$X =$________________

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2.43 (易). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$________________

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$$

习题2.44 (易). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$________________

(10)

习题2.45 (易). $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} =$________________

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

习题2.46 (易). 设$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, 则$f(A) =$________________

$$f(A) = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}.$$

习题2.47 (中). 设$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 则$A^k =$________________

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

习题2.48 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 且$(2\mathbf{A}-\mathbf{X})+2(\mathbf{B}-\mathbf{X}) = 0$, 则$\mathbf{X} =$__________

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{10}{3} & 2 & 2 \\ 0 & \frac{14}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

习题2.49 (易). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$. 则$\mathbf{AB} =$__________

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 \\ a_{31}b_1 & a_{32}b_2 \end{bmatrix}$$

习题2.50 (易). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$. 则$\mathbf{CA} =$__________

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} c_1a_{11} & c_1a_{12} \\ c_2a_{21} & c_2a_{22} \\ c_3a_{31} & c_3a_{32} \end{bmatrix}$$

习题2.51 (易). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, 则$\mathbf{AB} =$__________; $\mathbf{BA} =$__________

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

习题2.52 (易). $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}^n =$__________

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \lambda_3^n \end{bmatrix}$$

习题2.53 (易). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则$\mathbf{A}^n =$__________

$$\begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习题2.54 (中). 已知$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，$\mathbf{A} = \alpha^T\beta$，其中$\alpha^T$是$\alpha$的转置，则$\mathbf{A}^n =$__________

$$3^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 逆矩阵

习题2.55 (易). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$的逆矩阵是__________

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2.56 (中). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵是__________

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

习题2.57 (中). 设$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 则$X =$__________

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

习题2.58 (中). 设$A^{-1}XA = 6A + XA$, 其中，$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$. 则$X =$__________

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2.59 (中). 设$A^2 + AX - X = E$, 其中, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则$X =$__________

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

习题2.60 (中). 设A为3阶方阵，其逆矩阵为$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则$A^{-1}$的伴随矩阵是__________

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2.61 ((难)2015数学II)**.** 设$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且$A^3 = O$，若矩阵$X$满足$X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 则$X =$________________

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

习题2.62 (中)**.** 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则$(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{E}) =$__________

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2.3 分块矩阵

习题2.63 (中)**.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵是________________

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

习题2.64 (中)**.** 设$\mathbf{A}$是四阶方阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且$(2\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{-1}$，则$\mathbf{A} =$__________

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.4 矩阵的秩与初等变换

习题2.65 (易)**.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$的标准形为________________

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

习题2.66 (易). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$的标准形为________________

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2.67 (中). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$的逆矩阵是________________

$$\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -3 & 23 & 22 \\ 6 & -32 & -37 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

习题2.68 (中). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$的逆矩阵是________________

$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & -2 & 9 \\ -2 & -6 & -1 & 7 \\ \frac{4}{5} & 3 & \frac{4}{5} & -\frac{18}{5} \\ 1 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

习题2.69 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$(E+A)^{-1} =$____________

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 主观题

2.3.1 矩阵的概念与运算

习题2.70 (中). 设A为任意的n阶方阵，证明$A + A^T$为对称矩阵，$A - A^T$为反对称矩阵.

证明：(1) $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A + A^T$; (2) $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$. 因此，结论成立.

习题2.71 (中). 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$，其中$a_i \neq a_j (i \neq j)$. 证明与$\mathbf{A}$可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证明：设$B=(b_{ij}), i, j=1,2,\cdots,n$与$A$可交换，则

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}, \qquad BA=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_1b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix},$$

由$AB=BA$，可知$a_ib_{ij}=a_jb_{ij}, i, j=1,2,\cdots,n,$ 因此，由题设有$b_{ij}=0, i\neq j, i, j=1,2,\cdots,n,$ 即，B为对角矩阵.

习题2.72. 设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$是两个n 阶对称方阵.证明：乘积$\mathbf{AB}$也是对称的当且仅当$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$乘法可交换.

证明：必要性. 若$()^T=AB,$ 则$B^TA^T=AB,$ 即，$BA=AB,$ 亦即，A与B可交换；

充分性. 若$BA=AB$，则$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB,$ 所以，AB对称.

2.3.2 逆矩阵

习题2.73 (中). 设$\mathbf{A}$是一个指数为k的幂零矩阵，则$\mathbf{E}-\mathbf{A}$可逆，并求$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$.

证明：因为，$E=E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$，所以，$E-A$可逆，且其逆矩阵就是$\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}$.

习题2.74 (中). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n 阶方阵，且$\mathbf{AB}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

*(1)*证明：$\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 为可逆矩阵，其中$\mathbf{E}$为n 阶单位矩阵；

*(2)*证明：$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

证明：(1) 由题设，$AB-A-B+E=E,$ 则$(A-E)(B-E)=E$，因而，$A-E$可逆，其逆矩阵就是$B-E$;

(2) 由逆矩阵的概念及(1)的结果，有$(B-E)(A-E)=E,$ 因此，$AB=A+B=B+A=BA$.

2.3.3 分块矩阵

习题2.75 (中). 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，α为$n\times 1$矩阵，β 为$1\times n$矩阵，且$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix}=0$，求证：$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \alpha \\ \beta & c \end{vmatrix}=(c-b)|\mathbf{A}|$.

证明：

$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0+\alpha \\ \beta & (c-b)+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta & c-b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix}=(c-b)|\mathbf{A}|.$$

习题2.76 (难). 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$分别为$m\times n$，$n\times p$，$p\times q$矩阵，则$r(\mathbf{AB})+r(\mathbf{BC})\leq r(\mathbf{ABC})+r(\mathbf{B})$.

证明：因为$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{ABC} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

所以$r(\mathbf{AB})+r(\mathbf{BC})=r\begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{BC} \end{pmatrix}\leq r\begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BC} \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{ABC} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}=r(\mathbf{ABC})+r(\mathbf{B})$.

2.3.4 矩阵的秩与初等变换

习题2.77 (中). 设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n \times m$矩阵，证明：当$m>n$时，方阵$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$不可逆.

证明：$r(\mathbf{C}) = r(\mathbf{AB}) \le min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \le min\{m, n\} = n < m$，所以对$m$阶方阵$\mathbf{C}$来说，有$r(\mathbf{C}) < m$，即证.

习题2.78 (中). 设$\mathbf{A}$为二阶方阵，且$\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$，但$\mathbf{A} \neq \pm\mathbf{E}$. 证明：$\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 与$\mathbf{A} - \mathbf{E}$的秩都是1.

证明：由$\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$可得$(\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 0$，故二阶方阵$\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 与$\mathbf{A} - \mathbf{E}$的秩只能是0或1，但由于$\mathbf{A} \neq \pm\mathbf{E}$，即$\mathbf{A} + \mathbf{E}$与$\mathbf{A} - \mathbf{E}$的秩都不是0，从而它们的秩都只能是1.

第3章　向量

3.1　选择题

3.1.1　向量的概念与运算

习题3.1 (易). 设β_1 =(1，a，0)，β_2 =(−1，2，b)，欲使$\beta_1 + \beta_2 = 0$，则(　　)

(A) $a = 2, b = 0$; *(B)* $a = -2, b = 1$; *(C)* $a = -2, b = 0$; *(D)* $a = 0, b = -2$.

(C)

习题3.2 (中). 设α为三维列向量，若$\alpha\alpha^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则$\alpha^{\mathbf{T}}\alpha = (\quad)$

(A) 0; *(B)* -3; *(C)* 2; *(D)* 3.

(D)

习题3.3 (易). 设$\alpha = (20-1)\beta = (-124)$，则$3\alpha - 2\beta =$(　　)

(A) $(8, -4, -11)$; *(B)* $(8, -4, 11)$; *(C)* $(8, 4, -11)$; *(D)* $(-8, -4, -11)$.

(A)

习题3.4 (难). 设$\mathbf{V}_1 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T | x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$，$\mathbf{V}_2 = \{x = (x_1，x_2, \cdots, x_n)^T | x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$, 则(　　)

(A) V_1是向量空间，V_2不是向量空间； *(B)* V_2是向量空间，V_1不是向量空间；

(B) V_1和V_2都是向量空间； *(D)* V_1和V_2都不是向量空间；

(A)

习题3.5 (中). 由α_1=(1，1，0，0)^T，α_2=(1，0，1，1)^T，所生成的向量空间记作$\mathbf{V}_1$，由β_1=(2，-1，3，3)^T，β_2=(0，1，-1，-1)^T，所生成的向量空间记作$\mathbf{V}_2$，则(　　)

(A) $V_1 = V_2$; *(B)* $V_1 \subset V_2$, 但$V_1 \neq V_2$; *(C)* $V_2 \subset V_1$, 但$V_1 \neq V_2$; *(D)* 无法确定V_1与V_2的关系.

(A)

3.1.2　向量的相关性

习题3.6 (难). 设矩阵$\mathbf{A}_{m\times n}$的秩为$r(\mathbf{A}) = m < n$，$\mathbf{E}_m$ 为m阶单位矩阵，下列结论正确的是(　　).

(A)$\mathbf{A}$的任意m个列向量必线性无关　　*(B)*$\mathbf{A}$的任意一个m阶子式不等于零

*(C)*若矩阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{BA} = 0$，则$\mathbf{B} = 0$　　*(D)*$\mathbf{A}$ 通过行初等变换，必可以化为($\mathbf{E}_m$，0)的形式

(C)

习题3.7 (中). 设向量组I：$\alpha_1=(a_{11}，a_{21}，a_{31})^T$，$\alpha_2=(a_{12}，a_{22}，a_{32})^T$，$\alpha_3=(a_{13}，a_{23}，a_{33})^T$；向量组$II$：$\beta_1=(a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41})^T$，$\beta_2=(a_{12}，a_{22}，a_{32}，a_{42})^T$，$\beta_3=(a_{13}，a_{23}，a_{33}，a_{43})^T$，则(　　).

(A) I相关⇒II相关;　　*(B) I无关⇒II 无关;*

(C) II无关⇒I无关;　　*(D) I无关⇔II无关.*

(B)

习题3.8 (中). n维向量组α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_s(3 \le s \le n)$线性无关的充要条件是(　　).
(A)存在一组不全为零的数k_1，k_2，$\cdots$，k_s，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$
(B)α_1，α_2，$\cdots$，α_s中任意两个向量都线性无关
(C)α_1，α_2，$\cdots$，α_s中存在一个向量，它不能由其余向量线性表示
(D)α_1，α_2，$\cdots$，α_s中任意一个向量都不能由其余向量线性表示

(D)

习题3.9 (中). 设$\mathbf{A}$是四阶矩阵，且$|\mathbf{A}| = 0$，则$\mathbf{A}$中(　　).
(A)必有一列元素全为0
(B)必有两列元素对应成比例
(C)必有一列向量是其余列向量的线性组合
(D)任意一列向量是其余列向量的线性组合

(C)

习题3.10 (中). 设α_1，α_2，α_3，α_4线性无关，则向量组(I) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3$，$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1$，$\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2$和(II) $\alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_2 - \alpha_3$，$\alpha_3 - \alpha_1$具有如下特性(　　)

(A) (I)组线性无关，(II) 组线性相关；　(B) (I)、(II)组都线性无关；　(C) (II)组线性无关，(I)组线性相关；　(D) (I)、(II)组都线性相关.

(A)

习题3.11 (中). 设α_1，α_2，α_3，α_4线性无关，则向量组(I) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1$，$\alpha_4+\alpha_1+\alpha_2$和(II)$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1 + \alpha_3$，$\alpha_1 + \alpha_4$，$\alpha_2 + \alpha_3$，$\alpha_2 + \alpha_4$具有如下性质(　　)

(A) (I)、(II)组都线性相关；　(B) (I)、(II)组都线性无关；　(C) (II)组线性无关，(I)组线性相关；　(D) (I)组线性无关，(II) 组线性相关.

(D)

习题3.12 (中). 若向量组α，β，γ线性无关，α，β，δ线性相关，则(　　).
(A)α必可由β，γ，δ线性表示
(B)β必不可由α，γ，δ线性表示
(C)δ必可由α，β，γ线性表示
(D)δ必不可由α，β，γ线性表示

(C)

习题3.13 (易). 设有两个任意维向量组α_1，$\cdots$，α_m和β_1，$\cdots$，β_m，若存在两组不全为零的数λ_1，$\cdots$，λ_m和k_1，$\cdots$，k_m，使

$$(\lambda_1 + k_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda_m + k_m)\alpha_m + (\lambda_1 - k_1)\beta_1 + \cdots + (\lambda_m - k_m)\beta_m = 0,$$

则(　　).
(A)α_1，$\cdots$，α_m和β_1，$\cdots$，β_m都线性相关

(B)α_1，$\cdots$，α_m和β_1，$\cdots$，β_m都线性无关
(C)$\alpha_1+\beta_1$，$\cdots$，$\alpha_m+\beta_m$，$\alpha_1-\beta_1$，$\cdots$，$\alpha_m-\beta_m$线性无关
(D)$\alpha_1+\beta_1$，$\cdots$，$\alpha_m+\beta_m$，$\alpha_1-\beta_1$，$\cdots$，$\alpha_m-\beta_m$线性相关

(D)

习题3.14 (中). 已知m个向量α_1，α_2，$\cdots$，α_m线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关. 如果存在等式$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，，则( )

(A) 至少存在一个$k_i=0, i=1,2,\cdots,m$; (B) 至少存在一个$k_i\neq 0, i=1,2,\cdots,m$;
(C) $k_1,\cdots,k_m$全为零，或者全不为零； (D) 必有一个$k_i=0, i=1,2,\cdots,m$.

(C)

习题3.15 (中). 若$\beta=(0，k，k^2)$能由$\alpha_1=(1+k，1，1)$，$\alpha_2=(1，1+k，1)$，$\alpha_3=(1，1，1+k)$唯一线性表示，则k( )

(A) $k=0$, 或$k=3$; (B) $k\neq 0, k\neq 3$; (C) $k=0$, 或$k=-3$; (B) $k\neq 0, k\neq -3$.

(D)

习题3.16 (中). 向量组$\alpha_1=(1，1，a)^T$，$\alpha_2=(1，a，1)^T$，$\alpha_3=(a，1，1)^T$可由向量组$\beta_1=(1，1，a)^T$，$\beta_2=(-2，a，4)^T$，$\beta_3=(-2，a，a)^T$线性表示，但反过来，向量组β_1，β_2，β_3不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表示，则$a=$( )

(A) -1; (B) 0; (C) 1; (D) 2.

(C)

习题3.17 (中). 已知向量组$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$与向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表出，则( )

(A) $a=15$，$b=5$; (B) $a=-15$，$b=-5$; (C) $a=-15$，$b=5$; (D) $a=15$，$b=-5$.

(A)

习题3.18 (中). 若向量组α_1，α_2，α_3线性无关，当常数l,m满足( )时，向量组$l\alpha_2-\alpha_1$，$m\alpha_3-\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_3$是线性无关的.

(A) $l=m$; (B) $lm=1$; (C) $lm\neq 1$; (D) $l\neq m$.

(C)

习题3.19 (中). 向量组$\alpha_1=(1，-2，0，3)^T$，$\alpha_2=(2，-5，-3，6)^T$，$\alpha_3=(0，1，3，0)^T$，$\alpha_4=(2，-1，4，-7)^T$，$\alpha_5=(5，-8，1，2)^T$的秩是

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(C)

习题3.20 (中). 设有向量组$\alpha_1=(1，-2，0，3)^T$，$\alpha_2=(2，-5，-3，6)^T$，$\alpha_3=(0，1，3，0)^T$，$\alpha_4=(2，-1，4，-7)^T$，$\alpha_5=(5，-8，1，2)^T$，则( )

(A) α_1，α_2是极大线性无关组； (B) α_1，α_2，α_4是极大线性无关组;
(C) α_1，α_2，α_3，α_4是极大线性无关组; (D) α_1，α_2，α_3，α_4,α_5是极大线性无关组.

(B)

习题3.21 (中). 设有向量组$A:\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\k\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\k\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$, 则其秩$r(A)$(　　)

(A) 当$k=1$时，$r(A)=2$; 当$k\neq1$时，$r(A)=3$; (B) 当$k=1$时，$r(A)=3$; 当$k\neq1$时，$r(A)=2$;
(C) 当$k=1$时，$r(A)=1$; 当$k\neq1$时，$r(A)=2$; (D) 当$k=1$时，$r(A)=2$; 当$k\neq1$时，$r(A)=1$.

(A)

习题3.22 (中). 设有向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$, 则(　　)

(A) α_1，α_2为极大无关组; (B) α_1，α_3为极大无关组;
(C) α_2，α_3为极大无关组; (D) α_1，α_2，α_3为极大无关组.

(D)

习题3.23 (中). 已知$\alpha_1=(a，b，0)$，$\alpha_2=(a，2b，1)$，$\alpha_3=(1，2，3)$，$\alpha_4=(2，4，6)$. 若$r(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3，\alpha_4)=3$，则$a,b$应满足(　　)

(A) $b-2a+3ab=0$; (B) $b-2a+3ab\neq0$; (C) $b-2a-3ab\neq0$; (D) $b-2a-3ab=0$.

(B)

习题3.24 (中). 如果向量$\beta=(1，0，k，2)^T$能由向量组$\alpha_1=(1，3，0，5)^T$，$\alpha_2=(1，2，1，4)^T$，$\alpha_3=(1，1，2，3)^T$，$\alpha_4=(1，-3，6，-1)^T$线性表示，则$k=$(　　)

(A) -2; (B) -3; (C) 2; (D) 3.

(D)

习题3.25 (中). 已知向量α_1，α_2，α_3分别可由β_1，β_2，β_3线性表示：$\begin{cases}\alpha_1=\beta_1-\beta_2+\beta_3\\ \alpha_2=\beta_1+\beta_2-\beta_3\\ \alpha_3=-\beta_1+\beta_2+\beta_3\end{cases}$ 将β_1，β_2，β_3分别用α_1，α_2，α_3线性表示，则其表示式为(　　)

(A) $\beta_1=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2,\beta_2=\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3,\beta_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$; (B) $\beta_1=-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2,\beta_2=\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3,\beta_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$;
(C) $\beta_1=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2,\beta_2=-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3,\beta_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$; (D) $\beta_1=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2,\beta_2=\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3,\beta_3=-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$.

(A)

习题3.26 (中). 设$\alpha_1=(\lambda-5，1，-3)$，$\alpha_2=(1，\lambda-5，3)$, $\alpha_3=(-3，3，\lambda-3)$, 则当$\lambda=$(　　)时，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性相关.

(A) $\lambda=1$, 或$\lambda=4$, 或$\lambda=9$; (B) $\lambda=0$, 或$\lambda=4$, 或$\lambda=7$; (C) $\lambda=1$, 或$\lambda=4$, 或$\lambda=7$; (D) $\lambda=0$, 或$\lambda=4$, 或$\lambda=9$.

(D)

习题3.27 (中). 设$\alpha_1=(\lambda-5，1，-3)$，$\alpha_2=(1，\lambda-5，3)$, $\alpha_3=(-3，3，\lambda-3)$, 则当$\lambda=$(　　)时，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性无关.

(A) $\lambda\neq0,4,9$; (B) $\lambda\neq0,-4,9$; (C) $\lambda\neq0,4,-9$; (D) $\lambda\neq1,4,9$.

(A)

习题3.28 (难). 设$\mathbf{A}$是$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$是$n\times m$矩阵，$\mathbf{E}$是n阶单位矩阵($m>n$). 已知$\mathbf{BA}=\mathbf{E}$，则(　　)

(A) $\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关; *(B)* $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关; *(C)* $|BA|=0$; *(D)* $\mathbf{A}$ 的列向量组相关性不定.

(A)

习题3.29 (中). 已知向量组α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_s(s\geq 2)$线性无关，设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$.
则向量组β_1，β_2，$\cdots$，β_s(　　)

(A) 当s为偶数时线性无关；s为奇数时线性相关; *(B)* 当s为奇数时线性无关；s为偶数时线性相关; *(C)* 一定线性无关； *(D)* 一定线性相关

(B)

习题3.30 (中). 设有向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}a\\2\\10\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\b\\c\end{bmatrix}$，则$\beta$不能由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表出的条件是(　　)

(A) $a=-4$ 但$3b-c\neq 1$; *(B)* $a=-4$ 但$3b-c\neq -1$; *(C)* $a=4$ 且$3b+c=1$; *(D)* $a=-4$ 且$3b-c=1$.

(A)

习题3.31 (中). 设有向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}a\\2\\10\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\b\\c\end{bmatrix}$，则$\beta$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表出，但表示不唯一的条件是(　　)

(A) $a=4$ 且$3b-c=1$; *(B)* $a=-4$ 且$3b-c=-1$; *(C)* $a=4$ 且$3b+c=1$; *(D)* $a=-4$ 且$3b-c=1$.

(D)

习题3.32 (易). 矩阵$\begin{bmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{bmatrix}$的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组可以是(　　)

(A) α_1,α_2; *(B)* α_2,α_4; *(C)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; *(D)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(C)

习题3.33 (易). 矩阵$\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}$的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一个极大无关组可以是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$; *(B)* α_2,α_4; *(C)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; *(D)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(C)

习题3.34 (易). 向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$的极大无关组可以是(　　)

(A) α_1; *(B)* α_3; *(C)* α_1,α_2; *(D)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

(C)

习题3.35 (易). 向量组$\alpha_1=(1,2,1,3)^T,\alpha_2=(4,-1,-5,-6)^T,\alpha_3=(1,-3,-4,-7)^T$的极大无关组可以是(　　)

(A) α_1; *(B)* α_3; *(C)* α_1,α_2; *(D)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

(C)

习题3.36 (难). 若$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，则(　　)

(A) α_1能由α_2,α_3线性表示, 但α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

(B) α_1能由α_2,α_3线性表示, 且α_4能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

(C) α_1不能由α_2,α_3线性表示, 但α_4能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

(D) α_1不能由α_2,α_3线性表示, 且α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

(A)

习题3.37 (易). 欲使向量组$\alpha_1=(a，1，1)^T$，$\alpha_2=(1，a，-1)^T$，$\alpha_3=(1，-1，a)^T$线性相关，则$a=$(　　)

(A) $a=1$或$a=2$; *(B)* $a=-1$或$a=-2$; *(C)* $a\neq-1$且$a\neq2$; *(D)* $a=-1$或$a=2$.

(D)

3.1.3 向量空间

习题3.38 (中). 设有向量组α_1=(1，-1，0)^T，α_2=(2，1，3)^T，α_3=(3，1，2)^T，则下列解论不成立的是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbb{R}^3$的一个基; *(B)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不是$\mathbb{R}^3$的一个基;

(B) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$; *(D)* 矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为非奇异矩阵.

(B)

习题3.39 (易). 由向量组α_1=(1，3，1，-1)^T，α_2=(2，-1，-1，4)^T，α_3=(5，1，-1，7)^T，α_4=(2，6，2，-3)^{T}生成的向量空间的维数是(　　)

(A) 1; *(B)* 2; *(C)* 3; *(D)* 4.

(C)

习题3.40 (中). 已知$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T,\alpha_3=(3,1,2)^T$为$\mathbb{R}^3$的一个基，则$\beta_1=(5,0,7)^T,\beta_2=(-9,-8,-13)^T$用这个基线性表出的式子是(　　)

(A) $\beta_1=2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3$; *(B)* $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3$;

(C) $\beta_1=2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\beta_2=2\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3$; *(D)* $\beta_1=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3$

(A)

3.2 填空题

3.2.1 向量的概念与运算

习题3.41 (易). 设v_1=(1，1，0)^T，v_2=(0，1，1)^T，v_3=(3，4，0)^T，则$v_1-v_2=$____________

v_1-v_2=(1，0，-1)^T.

习题3.42 (易). 设v_1=(1，1，0)^T，v_2=(0，1，1)^T，v_3=(3，4，0)^T，则$3v_1+2v_2-v_3=$____________

$3v_1+2v_2-v_3$=(0，1，2)^T.

习题3.43 (易). 设$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$，其中$\alpha_1$=(2，5，1，3)^T，$\alpha_2$=(10，1，5，10)^T，$\alpha_3$=(4，1，-1，1)^T，则$\alpha=$____________

$(1,2,3,4)^T$.

习题3.44 (中). 设向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件$\alpha^{\mathbf{T}}\beta=0$，记$\mathbf{A}=\alpha\beta^{\mathbf{T}}$，则$\mathbf{A}^2=$____________

O (零矩阵)

3.2.2 向量的相关性

习题3.45 (中). 设有向量组α_1，α_2，α_3线性无关，欲使$a\alpha_1-\alpha_2$，$b\alpha_2-\alpha_3$，$c\alpha_3-\alpha_1$线性相关，则a,b,c 应满足条件____________

$abc=1$.

习题3.46 (中). 设有向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}a\\2\\10\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\b\\c\end{bmatrix}$，则$\beta$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$唯一地线性表出的条件是____________

$a\neq-4$

习题3.47 (中). 设三维向量组α_1，α_2，α_3线性无关，$\gamma_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\gamma_2=3\alpha_1-\alpha_2$，$\gamma_3=4\alpha_1-\alpha_3$，$\gamma_4=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$. 则向量组$\gamma_1$，$\gamma_2$，$\gamma_3$，$\gamma_4$的秩为____________

2.

习题3.48 (中). 已知向量组α_1 =(1，1，2)^T，α_2 =(3，t，1)^T，α_3 =(0，2，$-t$)^{T}线性相关，则$t=$____________

5, 或−2.

习题3.49 (中). 已知向量组α_1 =(1，1，2，1)^T，α_2 =(1，0，0，2)^T，α_3 =(−1，−4，−8，k)^{T}线性相关，则$k=$____________

2

习题3.50 (中). 已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，向量$\alpha=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$，若$\mathbf{A}\alpha$与$\alpha$ 线性相关，则$a=$____________

-1

习题3.51 (易). 向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$的秩是____________

2.

习题3.52 (易). 向量组$\alpha_1=(1,2,1,3)^T,\alpha_2=(4,-1,-5,-6)^T,\alpha_3=(1,-3,-4,-7)^T$的秩是____________

2.

习题3.53 (中). 已知向量组T_2：β_1，β_2，β_3由向量组T_1：α_1，α_2，α_3的线性表示为$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2-5\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=-\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，向量组$T_3$：$\gamma_1$，$\gamma_2$由向量组$T_2$的线性表示为$\gamma_1=3\beta_1-\beta_2+\beta_3$，$\gamma_2=\beta_1+2\beta_2+4\beta_3$，则向量组$T_3$由向量组$T_1$的线性表示式为____________

$\gamma_1 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 - 17\alpha_3$，$\gamma_2 = 23\alpha_2 - 7\alpha_3$.

习题3.54 (中). 设有向量组α_1=(*a*，2，1)，α_2=(2，*a*，0)，α_3=(1，-1，1)，欲使向量组α_1，α_2，α_3线性相关，则a应该满足条件__________

$a = 3$,或, $a = -2$

习题3.55 (中). 设有向量组α_1=(*a*，2，1)，α_2=(2，*a*，0)，α_3=(1，-1，1)，欲使向量组α_1，α_2，α_3线性无关，则a应该满足条件__________

$a \neq -2$.

习题3.56 (中). 设α_1=(2，-1，0，5)，α_2=(-4，-2，3，0)，α_3=(-1，0，1，*k*)，α_4=(-1，0，2，1)，欲使α_1，α_2，α_3，α_4线性相关, 则$k =$__________

$-\frac{5}{13}$

习题3.57 (中). 已知向量α_1=(1，2，3，4)，α_2=(2，3，4，5)，α_3=(3，4，5，6)，α_4=(4，5，6，*t*)，且$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$，则$t =$__________

$t = 7$.

3.2.3 向量空间

习题3.58 (中). 已知$\mathbf{R}^3$的向量γ=(1，0，-1)^{T}及$\mathbf{R}^3$的一组基ϵ_1=(1，0，1)^T，ϵ_2=(1，1，1)^T，ϵ_3=(1，0，0)^T.$\mathbf{A}$是一个三阶矩阵，已知

$$\mathbf{A}\epsilon_1 = \epsilon_1 + \epsilon_3，\mathbf{A}\epsilon_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3，\mathbf{A}\epsilon_3 = 2\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3，$$

则$\mathbf{A}\gamma$在ϵ_1，ϵ_2，ϵ_3下的坐标为__________

$(3, -2, 1)^T$.

习题3.59 (易). 从$\mathbf{R}^2$的基$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$到基$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$的过渡矩阵为__________

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

习题3.60 (中). 设α_1，α_2，α_3和β_1，β_2，β_3是向量空间$\mathbf{R}^3$的两组基，其中α_1 =(1，1，0)^T，α_2 =(0，1，1)^T，α_3 =(0，0，1)^T. 由基α_1，α_2，α_r到基β_1，β_2，β_3的过渡矩阵为$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$. 则基向量$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$是__________

β_1 =(1，−1，2)^T，β_2 =(1，1，−1)^T，β_3 =(−2，1，−3)^T.

3.3 主观题

3.3.1 向量的相关性

习题3.61 (中). 设β可由α_1，α_2，$\cdots$，α_m线性表示，试证表达式唯一的充分必要条件是α_1，α_2，$\cdots$，α_m线性无关.

证明：充分性：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，且$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$, 及$\beta=l_1\alpha_1+l_m\alpha_m$, 则$(k_1-l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=0$, 因而, $k_i=l_i, i=1,2,\cdots,m$;

必要性：若$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$，且表达式唯一，又若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则存在一组不全为0的数$l_i, i=1,2,\cdots,m$使得：$l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m=0$, 于是，$\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m+l_m)\alpha_m$, 再由唯一性，知$l_i=0, i=1,2,\cdots,m$, 矛盾.

习题3.62 (中). 已知n维列向量组α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_s(2\le s\le n)$线性无关，k_1，k_2，$\cdots k_{s-1}$是任意$s-1$个数，证明向量组$\alpha_1+k_1\alpha_2$，$\alpha_2+k_2\alpha_3$，$\cdots$，$\alpha_{s-1}+k_{s-1}\alpha_s$，$\alpha_s$也线性无关.

证明：设存在数l_i使得$l_1(\alpha_1+k_1\alpha_2)+l_2(\alpha_2+k_2\alpha_3)+\cdots+l_{s-1}(\alpha_{s-1}+k_{s-1}\alpha_s)+l_s\alpha_s=0$, 即，$l_1\alpha_1+(l_1k_1+l_2)\alpha_2+\cdots+(l_{s-2}k_{s-2}+l_{s-1})\alpha_{s-1}+(l_{s-1}k_{s-1}+l_s)\alpha_s=0$, 于是有

$$\begin{cases} l_1=0, \\ l_1k_1+l_2=0, \\ \vdots, \\ l_{s-2}k_{s-2}+l_{s-1}, \\ l_{s-1}k_{s-1}+l_s=0. \end{cases}$$

因而, $l_i=0, i=1,2,\cdots,s$.

习题3.63 (中). 设α_1，α_2，$\cdots$，α_r，β都是n维向量，β可由α_1，α_2，$\cdots$，α_r线性表示，但β不能由α_1，α_2，$\cdots$，α_{r-1}线性表示，证明：α_r可由α_1，α_2，$\cdots$，α_{r-1}，β线性表示.

证明：设$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}+k_r\alpha_r$. 若$k_r=0$, 则$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}$，矛盾. 因此，总有$k_r\neq 0$, 因而，$\alpha_r$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_{r-1}$，$\beta$线性表示.

习题3.64 (中). 已知α_1，α_2，α_3线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2$，$3\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$线性无关.

证明：设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_2+2\alpha_3)+k_3(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=$, 即, $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+3k_2-2k_3)\alpha_2+(2k_2+k_3)\alpha_3=0$, 这导致

$$\begin{cases} k_1+k_3=0, \\ k_1+3k_2-2k_3=0, \\ 2k_2+k_3=0, \end{cases}$$

这个方程只有0解，即$k_i=0, i=1,2,3$.

习题3.65 (中). 设向量组$\alpha_1=(1，1，1，3)^T$，$\alpha_2=(-1，-3，5，1)^T$，$\alpha_3=(3，2，-1，p+2)^T$，$\alpha_4=(-2，-6，10，p)^T$，问：

(1)p为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量$\alpha=(4，1，6，10)^T$用α_1，α_2，α_3，α_4线性表出。

(2)p为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

解：(1) 矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$经行初等变换后变为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 \end{pmatrix}$, 因此，当$p\neq 2$时, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关；若设$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)x, x\in\mathbb{R}^4$，则关于$x$的方程组，其增广矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)$经行初等变换后变为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3p-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{pmatrix}$, 即，$\alpha=2\alpha_1+\frac{3p-4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\frac{1-p}{p-2}\alpha_4$;

(2) 由(1), 知，当$p=2$时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，其一个极大线性无关组为$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$.

习题3.66 (中). 已知向量组(A)：α_1，α_2，α_3；(B)：α_1，α_2，α_3，α_4；(C): α_1，α_2，α_3，α_5。如果各向量组的秩分别为$r(A)=r(B)=3$，$r(C)=4$. 证明：向量组(D): α_1，α_2，α_3，$\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

证明：$r(A)=r(B)=3$意味着$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，从而存在$l_i,i=1,2,3$使得：$\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$; 现在，设存在数$k_j,j=1,2,3,4$使得：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$, 则有$(k_1-k_4l_1)\alpha_1+(k_2-k_4l_2)\alpha_2+(k_3-k_4l_3)\alpha_3+k_4\alpha_5=0$, 结合$r(C)=4$的条件，必有$\begin{cases} k_1-k_4l_1=0, \\ k_2-k_4l_2=0, \\ k_3-k_4l_3=0, \\ k_4=0, \end{cases}$, 解得：$k_j=0,j=1,2,3,4$, 说明向量组(D)线性无关，故$r(D)=4$.

3.3.2 向量空间

习题3.67 (中). 已知4维实向量空间$\mathbb{R}^4$有两组基(I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$; (II)$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4$, (1) 写出由基(I)到基(II)的过渡矩阵；(2) 已知向量α在基(I)下的坐标为$(1,2,3,4)^T$, 求α在基(II)下的坐标.

解：(1) $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$由定义知，由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$;

(2) 设α在基(II)下的坐标为$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 则由坐标变换公式，有

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, 即，$\alpha$在基(II)下的坐标为$(1,1,2,2)^T$.

习题3.68 (难). [2015数学I] 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbb{R}^3$的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3,\beta_2=2\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$. (1) 证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$\mathbb{R}^3$的一个基；(2) 当$k$为何值时，存在非0向量$\xi$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标相同, 并求所有的$\xi$.

解：(1) $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+(k+1)\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$, 由于$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$, 说明$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$\mathbb{R}^3$的一个基；

(2) 设$\xi=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\neq0$, 则，$k_1(\beta_1-\alpha_1)+k_2(\beta_2-\alpha_2)+k_3(\beta_3-\alpha_3)=0,k_i,i=1,2,3$不全为0, 即，$k_1(\alpha_1+2k\alpha_3)+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_1-k\alpha_3)=0$ 有非0解，于是，行列式$|\alpha_1+2k\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1-k\alpha_3|=0$,亦即$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$, 解得：$k=0$, 这使得$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_1=0$, 从而，$k_2=0,k_1+k_3=0$, 因此, $\xi=c(\alpha_1-\alpha_3),c\neq0$.

第4章 线性方程组

4.1 选择题

4.1.1 齐次线性方程组

习题4.1 (易). 设3阶非零方阵$\mathbf{B}$的每一列向量都是方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解，则$\lambda =$

(A) $\lambda = -1$; *(B)* $\lambda = 1$; *(C)* $\lambda \neq -1$; *(D)* $\lambda \neq 1$.

(B)

习题4.2 (中). 设$\mathbf{A}$为n阶方阵($n \geq 2$), 对任意n维向量α，均有$\mathbf{A}^{\star}\alpha = 0$，则齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = 0$的基础解系中所含向量个数$k$ 应满足(　　)

(A) $k \leq 1$; *(B)* $k > 1$; *(C)* $k < n$; *(D)* $k = n$.

(B)

习题4.3 (中). 已知向量组$\alpha_1 = (1,2,0,-2)^T$，$\alpha_2 = (0,3,1,0)^T$，$\alpha_3 = (-1,4,2,a)^T$ 和向量组$\beta_1 = (1,8,2,-2)^T$，$\beta_2 = (1,5,1,-a)^T$，$\beta_3 = (-5,2,b,10)^T$ 都是齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = 0$的基础解系，则(　　)

(A) $a \neq 2, b \neq 4$; *(B)* $a \neq 2, b = -4$; *(C)* $a \neq 2, b = 4$; *(D)* $a = 2, b \neq 4$.

(C)

习题4.4 (中). 已知α_1，α_2，α_3，α_4是齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = 0$ 的一个基础解系，$\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3$ $\beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4$，$\beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$. 欲使$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$，$\beta_4$成为$\mathbf{Ax} = 0$的一个基础解系，$t$满足的条件是(　　)

(A) $t = \pm 1$; *(B)* $t \neq \pm 1$; *(C)* $t \neq \pm 2$; *(D)* $t \neq 0$.

(B)

习题4.5 (易). 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间的维数是(　　)

(A) 1; *(B)* 2; *(C)* 3; *(D)* 4.

(B)

习题4.6 (中). 齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解的充要条件是$\lambda = ($　　$)$

(A) $\lambda = 1$,或$\lambda = -2$; *(B)* $\lambda = -1$,或$\lambda = -2$; *(C)* $\lambda = -1$,或$\lambda = 2$; *(D)* $\lambda = 1$,或$\lambda = 2$.

(A)

习题4.7 (易). 设齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = 0$ 有非零解，$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，则$t = ($　　$)$

(A) $t = 1$; *(B)* $t = 0$; *(C)* $t = -1$; *(D)* $t = -1$, 或$t = 0$.

(C)

习题4.8 (中). 设$\mathbf{A}$是n阶方阵，$r(\mathbf{A}) = n - 3$且α_1，α_2，α_3是$\mathbf{Ax} = 0$的三个线性无关的解向量，则$\mathbf{Ax} = 0$的基础解系为(　　).

(A)$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$　　*(B)*$\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$

(C)$2\alpha_2 - \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$　　*(D)*$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2, -\alpha_1 - 2\alpha_3$

(A)

习题4.9 (中). 已知α_1，α_2，α_3是齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = 0$ 的一个基础解系，则$\mathbf{Ax} = 0$的基础解系还可以表示为(　　).

*(A)*一个与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的向量组　　*(B)*一个与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等秩的向量组

(C)$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$　　*(D)*$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(C)

习题4.10 (易). 设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$，且$|\mathbf{A}| = 0$，但$\mathbf{A}$中某元素的代数余子式$\mathbf{A}_{kl} \neq 0$，则齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = 0$的每个基础解系中向量的个数都是(　　).

(A) 1;　　*(B) k;*　　*(C) l;*　　*(D) n*

(A)

习题4.11 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & t \end{bmatrix}$，若齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = 0$ 的基础解系含有3 个解向量，则$t = ($　　$)$

(A) $t = 1$; *(B)* $t = 2$; *(C)* $t = 5$; *(D)* $t = 2$, 或$t = 5$.

(C)

习题4.12 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且方程组$\mathbf{Ax} = 0$的基础解系中含有两个解向量，则(　　)

(A) $t = 0$; *(B)* $t = 1$; *(C)* $t = 0$, 或$t = 1$; *(D)* $t \neq 0$且$t \neq 1$.

(B)

习题4.13 (易). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且方程组$\mathbf{Ax} = 0$的基础解系中含有两个解向量，则$r(A) =$(　　)

(A) $r(A) = 1$; *(B)* $r(A) = 2$; *(C)* $r(A) = 3$; *(D)* $r(A) = 4$.

(B)

习题4.14 (中). 设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，秩$r(\mathbf{A})=n-1$. 若矩阵$\mathbf{A}$各行元素之和均为0，则方程组$\mathbf{Ax}=0$的通解是(　　)

(A) $k(1,1,\cdots,1)^T\in\mathbb{R}^n,k$为任意常数; *(B)* $k(1,2,\cdots,n)^T\in\mathbb{R}^n,k$ 为任意常数;

(C) $k(1,0,\cdots,0)^T\in\mathbb{R}^n,k$为任意常数; *(D)* 无法确定.

(A)

习题4.15 (难). 设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，秩$r(\mathbf{A})=n-1$. 若行列式$|\mathbf{A}|$ 的代数余子式$A_{11}\neq 0$，则方程组$\mathbf{Ax}=0$ 的通解是(　　)

(A) $k(A_{11},A_{21},\cdots,A_{n1})^T\in\mathbb{R}^n,k$为任意常数; *(B)* $k(A_{11},A_{22},\cdots,A_{nn})^T\in\mathbb{R}^n,k$为任意常数;

(C) $k(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^T\in\mathbb{R}^n,k$为任意常数; *(D)* 无法确定.

(C)

习题4.16 (易). 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}$为三阶非零矩阵，且$\mathbf{AB}=0$，则$t=$(　　)

(A) $t=0$; *(B)* $t=3$; *(C)* $t=-3$; *(D)* $t\neq-3$.

(C)

习题4.17 (易). 如果五元线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的同解方程组是$\begin{cases}x_1=-3x_2,\\x_2=0\end{cases}$，则$r(\mathbf{A})=$(　　)

(A) 1; *(B)* 2; *(C)* 3; *(D)* 4.

(B)

习题4.18 (易). 如果五元线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的同解方程组是$\begin{cases}x_1=-3x_2,\\x_2=0\end{cases}$，则自由未知量的个数为(　　)

(A) 1; *(B)* 2; *(C)* 3; *(D)* 4.

(C)

习题4.19 (易). 如果五元线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的同解方程组是$\begin{cases}x_1=-3x_2,\\x_2=0\end{cases}$，则$\mathbf{Ax}=0$ 的基础解系有(　　)个解向量.

(A) 1; *(B)* 2; *(C)* 3; *(D)* 4.

(C)

习题4.20 (中). 方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$ 的基础解系是____________

$\eta_1=(-1,1,0,0,0)^T$，$\eta_2=(1,0,1,0,-1)^T$

习题4.21 (难). 设向量α_1，α_2，$\cdots$，α_t是齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的一个基础解系，向量β不是方程组$\mathbf{Ax}=0$ 的解，即$\mathbf{A}\beta\neq 0$. 则下列结论不正确的是(　　)

(A) β，α_1，$\cdots$，α_t线性无关; *(B)* β，$\beta+\alpha_1$，$\cdots$，$\beta+\alpha_t$线性无关;

(C) β，$\beta+\alpha_1$，$\cdots$，$\beta+\alpha_t$线性相关; *(D)* β线性无关.

(B)

习题4.22 (中). 设α_1，α_2，$\cdots$，α_s为线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$，$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中$t_1$、$t_2$为实常数，则当$t_1$、$t_2$ 满足　　)时，β_1，β_2，$\cdots$，β_s也为$\mathbf{Ax}=0$的一个基础解系.

(A) s为偶数时，$t_1\neq t_2$，s为奇数时，$t_1\neq -t_2$; *(B)* $t_1\neq t_2$;

(C) s为偶数时，$t_1\neq\pm t_2$，s为奇数时，$t_1\neq -t_2$; *(D)* $t_1\neq -t_2$.

(C)

习题4.23 (中). 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，且$r(\mathbf{A})=n-1$，α_1，α_2是$\mathbf{Ax}=0$的两个不同的解向量，则$\mathbf{Ax}=0$的通解为( ).

(A)$k\alpha_1$ (B)$k\alpha_2$ (C)$k(\alpha_1-\alpha_2)$ (D)$k\alpha_1+\alpha_2$

(C)

习题4.24 (中). 设$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$\mathbf{P}$为3阶非零矩阵且$\mathbf{PQ}=\mathbf{0}$，则( ).

(A)$t=6$时，$r(\mathbf{P})=1$ (B)$t=6$ 时，$r(\mathbf{P})=2$

(C)$t\neq 6$时，$r(\mathbf{P})=1$ (D)$t\neq 6$ 时，$r(\mathbf{P})=2$

(C)

习题4.25 (中). 设$\mathbf{A}$是n阶实矩阵，$\mathbf{A}^T$是$\mathbf{A}$的转置矩阵，则对于线性方程组(1)：$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$和(2)：$\mathbf{A^TAx}=\mathbf{0}$，必有( )。

(A).(2)的解是(1)的解，(1)的解也是(2) 的解

(B).(2)的解是(1)的解，但(1)的解不是(2)的解

(C).(1)的解不是(2)的解，(2)的解也不是(1)的解

(D).(1)的解是(2)的解，但(2)的解不是(1)的解

(A)

习题4.26 (中). 设n阶矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^\star\neq 0$.若α_1，α_2，α_3，α_4是非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=b$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的基础解系是( ).

(A)不存在； (B)仅含一个非零解向量；

(C)含有两个线性无关的解向量； (D)含有三个线性无关的解向量.

(B)

4.1.2 非齐次线性方程组

习题4.27 (中). 设线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有n个未知量，m个方程组，且$r(\mathbf{A})=r$，则此方程组( ).

(A)r=m时，有解； (B)r=n 时，有唯一解；

(C)m=n时，有唯一解； (D)r<n时，有无穷多解.

(A)

习题4.28 (中). 当$\lambda=$( )时，方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\\lambda x_1-x_2+x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解.

(A) $\lambda=-\frac{4}{5}$; (B) $\lambda\neq 1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$； (C) $\lambda=1$； (D) $\lambda=1$, 或$\lambda=-\frac{4}{5}$.

(A)

习题4.29 (中). 设有方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\\lambda x_1-x_2+x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$. 当$\lambda=$( )时，方程组有唯一解.

(A) $\lambda=-\frac{4}{5}$; (B) $\lambda\neq 1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$； (C) $\lambda=1$； (D) $\lambda=1$, 或$\lambda=-\frac{4}{5}$.

(B)

习题4.30 (中). 已知$\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$ 及$\beta=(1,1,b+3,5)$. 则当a,b为( )值时，β不能表示成α_1，α_2，α_3，α_4的线性组合.

(A) $a\neq-1$，$b\neq 1$; *(B)* $a\neq-1$，$b\neq 0$; *(C)* $a=-1$，$b\neq 0$; *(D)* $a\neq-1$，$b=0$.

(B)

习题4.31 (中). 已知$\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(-3,2,2)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的两个解，则a,b,c,d满足的条件是( )

(A) $b=d,a=b+2c$; *(B)* $b=d,2a=b+2c$; *(C)* $b=d,3a=b+c$; *(D)* $b=d,3a=b+2c$.

(D)

习题4.32 (中). 方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ x_1+2x_2-8x_3=-3, \\ 4x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-13x_3=-6 \end{cases}$ ( )

(A) 有唯一解； *(B)* 有无穷多解； *(C)* 无解; *(D)* 只有零解.

(A)

习题4.33 (中). 方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3. \end{cases}$ ( )

(A) 有唯一解； *(B)* 有无穷多解； *(C)* 无解; *(D)* 只有零解.

(B)

习题4.34 (中). 方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-1. \end{cases}$ ( )

(A) 有唯一解； *(B)* 有无穷多解； *(C)* 无解; *(D)* 只有零解.

(C)

习题4.35 (中). 方程组$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 11x_1+3x_2=8. \end{cases}$ ( )

(A) 有唯一解； *(B)* 有无穷多解； *(C)* 无解; *(D)* 只有零解.

(C)

习题4.36 ((中)2015数学II). 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合$\Omega=\{1,2\}$, 则线性方程组$Ax=b$有无穷多解的充要条件是( )

(A) $a\in\Omega,d\notin\Omega$; *(B)* $a\notin\Omega,d\in\Omega$; *(C)* $a\notin\Omega,d\notin\Omega$; *(D)* $a\in\Omega,d\in\Omega$.

(D)

习题4.37 (易). 已知$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}=b$有无穷多解，$r(\mathbf{A})=r<n$，则该方程组线性无关解向量的个数最多应有(　　) 个.

(A) $n-r$; *(B)* r; *(C)* $n-r+1$; *(D)* $r+1$.

(C)

习题4.38 (易). 已知方程组$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$无解，则$a=$(　　)

(A) 0; *(B)* -1; *(C)* 1; *(D)* 2.

(B)

习题4.39 (易). 设方程组$\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$有无穷多个解，则$a=$(　　)

(A) $a=-3$; *(B)* $a\neq-3$; *(C)* $a=-2$; *(D)* $a\neq-2$.

(C)

习题4.40 (难). 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{3\times3}$是实正交矩阵，且$a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^T$，则线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=b$的解是(　　)

(A) $(c,0,0)^T,c\in\mathbb{R}$; *(B)* $(1,c,c)^T,c\in\mathbb{R}$; *(C)* $(1,c_1,c_2)^T,c_1,c_2\in\mathbb{R}$; *(D)* $(1,0,0)^T$.

(D)

习题4.41 (中). 设$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\mathbf{x}_3$是四元非齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=b$的三个解向量，且$r(\mathbf{A})=3$若$\mathbf{x}_1=(1,1,1,1)^T$，$\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3=(2,3,4,5)^T$，则方程组通解为(　　)

(A) $(1,1,1,1)^T+c(0,1,2,3)^T,c$为任意常数; *(B)* $(1,1,1,1)^T+c(1,2,3,4)^T,c$为任意常数;

(C) $(1,1,1,1)^T+c_1(0,1,2,3)^T+c_2(1,2,3,4)^T,c_1,c_2$ 为任意常数; *(D)* $(2,3,4,5)^T+c(1,1,1,1)^T,c$为任意常数.

(A)

习题4.42 (中). 设方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=l,\\3x_1+mx_2+3x_3+2x_4=-11,\\2x_1+2x_2+nx_3+x_4=-4\end{cases}$ 与方程组$\begin{cases}x_1+3x_3=-3,\\x_2-2x_3=5,\\x_4=-10\end{cases}$ 是同解方程组，则(　　)

(A) $l=-2,m=3,n=2$; *(B)* $l=2,m=3,n=2$; *(C)* $l=-2,m=-3,n=2$; *(D)* $l=-2,m=3,n=-2$.

(A)

习题4.43 (易). 设η_1，η_2，$\cdots$，η_s是齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=b$ 的一组解向量，如果$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$ 也是该方程组的一个解，则(　　)

(A) $c_1=c_2=\cdots=c_s$ *(B)* $c_1,c_2,\cdots,c_s$至少有1个为0; *(C)* $c_1+c_2+\cdots+c_s=0$ *(D)* $c_1+c_2+\cdots+c_s=1$.

(D)

习题4.44 (中). 方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\x_2-x_3=a_2,\\x_3-x_4=a_3,\\x_4-x_5=a_4,\\x_5-x_1=a_5\end{cases}$$

有解的充分必要条件是(　　)

(A) $\sum_{i=1}^5 a_i=1$； *(B)* $a_i=0,i=1,2,3,4,5$； *(C)* $\sum_{i=1}^s a_i=0$； *(D)* $a_i=1,i=1,2,3,4,5$.

(C)

习题4.45 (中). 设$\eta^\star$是非齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=b$的一个解，ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r}是其导出组的一个基础解系，则下列结论不正确的是(　　)

(A) $\eta^\star$，ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r}线性无关;　(B) $\eta^\star$，ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r}线性相关；
(C) ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r}线性无关；　(D) $\eta^\star$，ξ_1 线性无关.

(B)

习题4.46 (中). 设$\eta^\star$是非齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=b$的一个解，ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r}是其导出组的一个基础解系，则下列结论不正确的是(　　)

(A) $\eta^\star$，ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r}线性无关;
(B) $\eta^\star$，$\eta^\star+\xi_1$，$\eta^\star+\xi_2$，$\cdots$，$\eta^\star+\xi_{n-r}$ 线性相关;
(C) ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_{n-r}线性无关;
(D) $\eta^\star$，$\eta^\star+\xi_1$，$\eta^\star+\xi_2$，$\cdots$，$\eta^\star+\xi_{n-r}$ 线性无关.

(B)

习题4.47 (中). 设有方程组(a)$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$; (b)$\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1 \end{cases}$，欲使方程组(a) 与(b)同解，则参数$m,n,t$应满足(　　)

(A) $m=2$，$n=4$，$t=6$;　(B) $m=-2$，$n=4$，$t=6$;　(C) $m=2$，$n=-4$，$t=6$;　(D) $m=2$，$n=4$，$t=-6$.

(A)

4.2 填空题

4.2.1 齐次线性方程组

习题4.48 (中). 方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0. \end{cases}$ 的通解是____________

$c(\frac{4}{3},-3,\frac{4}{3},1)^T$.

习题4.49 (中). 方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=0, \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=0, \\ 2x_3+5x_4-2x_5=0. \end{cases}$ 的通解是____________

$c_1(-2,1,0,0,0)^T+c_2(-2,0,1,0,1)^T$.

习题4.50 (中). 齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0, \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系为____________

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\qquad \xi_2=\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \xi_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

习题4.51 (中). 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{bmatrix}$，且方程组$\mathbf{Ax}=0$的基础解系中含有两个解向量，则$\mathbf{Ax}=0$的通解为__________

$k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$其中$k_1$，$k_2$为任意常数.

习题4.52 (易). 齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=0$以$\eta_1=(1,0,1)^T$，$\eta_2=(0,1,-1)^T$为基础解系，则系数矩阵$\mathbf{A}=$__________

$(-1,1,1)$

习题4.53 (易). 若n元齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=0$有n个线性无关的解向量，则$\mathbf{A}=$__________

O

习题4.54 (易). 方程组$\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0\\8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0\end{cases}$的基础解系为__________

$(-20，-17，5，83)^T$.

习题4.55 (易). 方程组$\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0\\3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$的基础解系为__________

$(2，14，-21，4)^T$.

4.2.2 非齐次线性方程组

习题4.56 (中). 方程组$\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\\9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\end{cases}$

(2)$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12\end{cases}$的通解为__________

$(-\frac{2}{11}，\frac{10}{11}，0，0)^T+c_1(\frac{21}{11}，\frac{5}{11}，1，0)^T+c_2(-\frac{9}{11}，\frac{1}{11}，0，1)^T$，$c_1$，$c_2$为任意常数.

习题4.57 (中). 方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12\end{cases}$的通解为__________

$(-16,23,0,0,0)^T+c_1(5,-6,0,0,1)^T+c_2(1,-2,0,1,0)^T+c_3(1,-2,1,0,0)^T$，$c_1$，$c_2$，$c_3$为任意常数

习题4.58 (中). 方程组$\begin{cases}2x+3y+z=4,\\x-2y+4z=-5,\\3x+8y-2z=13,\\4x-y+9z=-6.\end{cases}$ 的通解为____________

$c(-2,1,1)^T+(-1,2,0)^T$.

习题4.59 (中). 线性方程组$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=-1,\\x_1-2x_2+x_3+3x_4=3,\\3x_1+8x_2-x_3+x_4=1,\\x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7.\end{cases}$ 的通解是____________

通解$=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中k_1，k_2 为任意常数，$\eta=(\frac{13}{7},-\frac{4}{7},0,0)^T$，$\xi_1=(-\frac{3}{7},\frac{2}{7},1,0)^T$，$\xi_2=(-\frac{13}{7},\frac{4}{7},0,1)^T$.

习题4.60 (中). 已知$\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$ 及$\beta=(1,1,b+3,5)$. 则当a,b为____________值时，β能由α_1，α_2，α_3，α_4唯一地线性表示，其表达式为____________

$a\neq-1,b$为任意值;　　$\beta=\frac{-2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3$. (提示：问题等价于方程$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)x=\beta$是否有解)

习题4.61 (中). 已知4阶方阵$\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$均为4 维列向量，其中$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$。如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则线性方程组$\mathbf{Ax}=\beta$的通解为____________

通解$=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$　(c 为任意值).

习题4.62 (中). 设有方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=1\\x_2+ax_3-ax_4=-1\\x_1+2x_2+3x_4=3\end{cases}$. 当$a$为____________值时，方程组有解？其解为____________

$a\neq2;\begin{bmatrix}\frac{7a-10}{a-2}\\\frac{2-2a}{a-2}\\\frac{1}{a-2}\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\1\end{bmatrix}$　(c 为任意值)

习题4.63 (中). λ为____________值时，方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\\lambda x_1-x_2+x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 有无穷多解？其通解为____________

当$\lambda=1$时，方程组有无穷多解，通解为$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$　(c 为任意常数)

习题4.64 (易). 方程组$\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}$ 的通解为____________

通解为$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c 为任意常数).

习题4.65 (易). 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 + k^2x_3 = k^3, \\ x_1 + kx_2 + k^2x_3 = -k^3, \\ 2x_1 + 2k^2x_3 = 0, \\ x_1 + 3kx_2 + k^2x_3 = -3k^3. \end{cases} \quad (k \neq 0)$$

有两个解为$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，则方程组的通解为____________

通解=$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (c 为任意常数)

习题4.66 (易). 设三元非齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = b$有3个特解α_1，α_2，α_3，且$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1,1,1)^T$，$\alpha_3 - \alpha_2 = (1,0,0)^T$，而$r(\mathbf{A}) = 2$，则$\mathbf{Ax} = b$的通解为____________

通解=$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c 为任意常数)

习题4.67. 已知n元非齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = b$有解，其中$\mathbf{A}$为$(n+1) \times n$矩阵，则行列式$|\mathbf{A} \vdots b| =$____________

0.

4.3 主观题

4.3.1 齐次线性方程组

习题4.68 (中). 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0. \end{cases}$$

试问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解：系数矩阵A经行初等变换后变为(将第四个方程的系数交换到第一行)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\frac{a}{4} \\ 0 & a & 0 & -\frac{a}{2} \\ 0 & 0 & a & -\frac{3}{4}a \end{pmatrix}$, 因而，

(i) 当$a = 0$时，同解方程组为$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, 其基础解系为$\eta_1 = (-1,1,0,0)^T$,$\eta_2 = (-1,0,1,0)^T$,$\eta_3 = (-1,0,0,1)^T$. 通解为$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$，其中$k_1$，$k_2$，$k_3$为任意常数.

(ii) 当$a\neq 0$时，系数矩阵A进一步变为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9+a}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, 方程的通解=$\begin{pmatrix} x_1 = -\frac{9+a}{4}k, \\ x_2 = \frac{1}{2}k, \\ x_3 = \frac{3}{4}k, \\ x_4 = k, \end{pmatrix}$, k为常数.

习题4.69 (难). 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0. \end{cases}$$

问：(1)a，b，c满足何种关系时，方程组仅有零解？(2)a，b，c满足何种关系时，方程组有无穷多组解，并用基础解系表示全部解.

解：(1)$a\neq b, b\neq c, c\neq a$;

(2)(i)当$a=b\neq c$时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为$k_1(1,-1,0)^T$，其中k_1为任意常数.

(ii)当$a=c\neq b$时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为$k_2(1,0,-1)^T$，其中k_2为任意常数.

(iii)当$b=c\neq a$时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为$k_3(0,1,-1)^T$，其中k_3为任意常数.

(iv)当$a=b=c$时，同解方程组为

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

方程组有无穷多组解，全部解为$k_4(-1,1,0)^T + k_5(-1,0,1)^T$，其中$k_4$，$k_5$为任意常数.

4.3.2 非齐次线性方程组

习题4.70 (中). 已知$\alpha_1 = (0,1,0)^T$，$\alpha_2 = (-3,2,2)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$$

的两个解，求此方程组的全部解.

解：由α_1是方程组的解可得$b=d$, 结合这个条件，方程组的系数矩阵经行初等变换可变为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & c-\frac{3}{2}a+\frac{b}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

由于方程组有多解，则其系数矩阵的秩一定小于3，这使得$c-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b=0$, 解等价方程可得全部解为$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c 为任意值)

习题4.71. 问a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2-x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解，无解或有无穷多解，有解时并求出其解.

解：方程组的增广矩阵经行初等变换后变为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-a)^2}{2} & b+1 \end{pmatrix}$, 因此,

(i) 当$a\neq 1$时，有唯一解：$(\frac{b-a+2}{a-1},\frac{a-2b-3}{a-1},\frac{b+1}{a-1},0)^T$;

(ii) 当$a=1,b\neq -1$时，无解；

(iii) 当$a=1,b=-1$时: 有无穷多解，此时，增广矩阵进一步变换为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其通解为$x_1=-1k, x_2=1-2k, x_3=0, x_4=k, k$为常数.

习题4.72 (中). 设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=1,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=1 \end{cases}$$

有三个解$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(-1,2,0)^T$，$\alpha_3=(-1,1,1)^T$.记$\mathbf{A}$ 为方程组的系数矩阵，求$\mathbf{A}$.

解：由题设，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta,\beta,\beta):=B$, 显然，矩阵$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆，因此，$A=BC^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

注：在求A时，最简单的方法是将B,C上下对齐，然后只通过列初等变换集中将B变为单位矩阵，同时对C施以同样的列初等变换，C变换后的最后结果就是所求.

第5章　矩阵对角化

5.1　选择题

5.1.1　特征值与特征向量

习题5.1 (中). 设α是一个单位向量，$Q = E - 2\alpha\alpha^T$则下列结论不正确的是(　　)

(A) Q是一个正交矩阵; *(B)* Q是一个满秩矩阵; *(C)* Q的列向量组线性无关； *(D)* Q的行列式为1.

(D)

习题5.2 (易). 下列矩阵不是正交矩阵的是(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ *(B)* $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$ *(C)* $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ *(D)* $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(A)

习题5.3 (易). 设$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$为正交矩阵，则

(A) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *(B)* $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *(C)* $a = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; *(D)* $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, b = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D)

习题5.4 (易). 已知3阶矩阵A的3个特征值为$1, 2, 3$, 则A^{-1}的特征值为(　　)

(A) $-1, -2, -3$; *(B)* $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$; *(C)* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; *(D)* $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$.

(C)

习题5.5 (易). 设$\lambda = 4$是n阶矩阵A的一个特征根，则秩(　　)

(A) $r(4E - A) \leq n$； *(B)* $r(4E - A) < n$; *(C)* $r(4E - A) = n$; *(D)* $r(4E - A) = 0$.

(B)

习题5.6 (难). A, B都是n阶方阵，且A与B有相同的特征值，以及都有n个线性无关的特征向量，则(　　)

(A) $A \sim B$; *(B)* $A = B$; *(C)* $A \neq B$, 但$|A - B| = 0$; *(D)* A, B不一定相似，但$|A| = |B|$.

(A).

习题5.7 (中). 设$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 若向量$\alpha = (1, k, 1)^T$是$X^{-1}$的特征向量，则$k = $(　　)

(A) -1; *(B)* 1; *(C)* 2; *(D)* -2.

(D)

习题5.8 (中). 设$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$的特征值为$3,3,12$, 则$x=$ (　　)

(A) 4; (B) 3; (C) 2; (D) 1.

(A)

习题5.9 (中). 设A为n阶方阵，且$A^k=0,k$为正整数，则(　　)

(A) $A=0$; *(B)* A有一个不为0的特征值；

(C) A的特征值全为0； *(D)* A有n个线性无关的特征向量.

(C)

习题5.10 (中). 设0是矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$的特征值，则$a=$ (　　)

(A) −1; (B) 0; (C) 1; (D) 2.

(C)

习题5.11 (中). 设α_1,α_2是矩阵A属于不同特征值λ_1,λ_2的特征向量，则下列结论正确的是

(A) $\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量; *(B)* α_1,α_2线性相关； *(C)* α_1,α_2正交； *(D)* $\alpha_1+\alpha_2$是A的特征向量.

(A)

习题5.12 (易). 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, 若$A$有特征值1，则$x=$(　　)

(A) $x=3$,或$x=\frac{1}{3}$; *(B)* $x=-3$,或$x=-\frac{1}{3}$; *(C)* $x=2$,或$x=\frac{1}{2}$; *(D)* $x=-2$,或$x=-\frac{1}{2}$.

(C)

习题5.13 (中). 设A为3阶矩阵，α_1,α_2为A的分别属于特征值$-1,1$的特征向量，向量α_3 满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$, 则下列结论正确的是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关； *(B)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关； *(C)* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交； *(D)* α_3 是A的一个特征向量.

(A)

习题5.14 ((易)2015数学II). 若3阶矩阵A的特征值为$2,-2,1$, $B=A^2-A+E$, 则$|B|=$(　　)

(A) −4; (B) 4; (C) −21; (D) 21.

(D)

习题5.15 (易). 已知$\lambda_1=0$是三阶矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$的特征值，则$a=$ (　　)

(A) 0； (B) 1; (C) −1; (D) 2.

(B)

习题5.16 (中). 矩阵$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$的特征值是(　　)

(A) $1,1,-2$; *(B)* $-1,1,-2$; *(C)* $1,1,2$; *(D)* $-1,-1,-2$.

(A)

习题5.17 (中). 矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的特征值是( )

(A) $1, 0, 0$; *(B)* $0, 1, 1$; *(C)* $0, 0, 0$; *(D)* $1, 1, 1$.

(C)

习题5.18 (中). 矩阵$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$的特征值是( )

(A) $-1, -1, -1$; *(B)* $-1, -1, 0$; *(C)* $-1, 0, 0$; *(D)* $-1, 0, 1$.

(D)

习题5.19 (易). 已知$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}$的特征值为( )

(A) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$; *(B)* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; *(C)* $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$; *(D)* $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

(C)

习题5.20 (中). 已知三阶矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}$有特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 12$，则$x =$( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(D)

习题5.21 (中). 设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b \end{bmatrix}$的特征值$\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = 4$，则参数( )

(A) $a = -5, b = 4$; *(B)* $a = 5, b = 4$; *(C)* $a = 5, b = -4$; *(D)* $a = -5, b = -4$.

(A)

习题5.22 (难). 设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，其行列式$|\mathbf{A}| = -1$，又$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^\star$有一个特征值$\lambda_0$，属于$\lambda_0$的一个特征向量为$\alpha = (-1, -1, 1)^T$，则参数( )

(A) $a = 2, b = 3, c = 2, \lambda_0 = 1$; *(B)* $a = 2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 1$; *(C)* $a = -2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 0$; *(D)* $a = 2, b = 3, c = 2, \lambda_0 = 0$.

(B)

习题5.23 (难). 设$\mathbf{A}$是三阶方阵，且$|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = |\mathbf{A} + 2\mathbf{E}| = |2\mathbf{A} + 3\mathbf{E}| = 0$，则$|2\mathbf{A}^\star - 3\mathbf{E}| =$( )

(A) 120; (B) 122; (C) 124; (D) 126.

(C)

习题5.24 (易). 已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值分别为1，-1，2，则$|\mathbf{A}^5 - 3\mathbf{A}^3| =$( )

(A) -16; *(B)* -32; *(C)* 16; *(D)* 32.

(B)

习题5.25 (易). 已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值分别为1，−1，2，则$|\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=$(　　)

(A) -2; *(B)* 2; *(C)* 0; *(D)* -4.

(C)

习题5.26 (易). 已知$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$有特征值$\pm 1$, 则(　　)

(A) $a=-1, b=-3$; *(B)* $a=-3, b=-1$; *(C)* $a=3, b=1$; *(D)* $a=1, b=3$.

(A)

5.1.2 相似矩阵

习题5.27 (中). 若$\begin{bmatrix} 22 & 31 \\ y & x \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$相似，则(　　)

(A) $x=-17, y=-12$; *(B)* $x=17, y=12$; *(C)* $x=-12, y=-17$; *(D)* $x=12, y=17$.

(A)

习题5.28 (中). 已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$和矩阵$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & b \end{bmatrix}$相似，则参数(　　)

(A) $a=0, b=0$; *(B)* $a=0, b=-3$; *(C)* $a=-3, b=0$; *(D)* $a=1, b=-3$.

(B)

习题5.29 (难). 若4阶方阵A与B相似，方阵A的特征值为$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式$|B^{-1}-E|=$(　　)

(A) 24; *(B)* $\frac{1}{5}$; *(C)* $\frac{1}{24}$; *(D)* $\frac{1}{120}$.

(A)

习题5.30 (中). 已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 且$A$与$B$相似，则(　　)

(A) $a=-1$; *(B)* $a=0$; *(C)* $a=1$; *(D)* $a=2$.

(C)

习题5.31 (难). 设$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与$X$相似的矩阵是(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; *(B)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; *(C)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *(D)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(B)

习题5.32 (中). 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & \alpha \end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$相似. 则(　　)

(A) $\alpha=6, \beta=5$; *(B)* $\alpha=5, \beta=6$; *(C)* $\alpha=-5, \beta=-6$; *(D)* $\alpha=-6, \beta=-5$.

(B)

习题5.33 ((中)2015数学II). 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&\alpha\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&\beta&0\\0&3&1\end{pmatrix}$相似. 则(　　)

(A) $\alpha=5,\beta=4$; *(B)* $\alpha=5,\beta=6$; *(C)* $\alpha=4,\beta=5$; *(D)* $\alpha=6,\beta=5$.

(C)

5.2 填空题

5.2.1 特征值与特征向量

习题5.34 (易). 已知$\xi=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$是矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$的一个特征向量，则参数$a$，$b$及特征向量$\xi$所对应的特征值分别为____________

$a=-3,b=0,\lambda=-1.$

习题5.35 (易). 已知$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}$的特征向量是____________

当特征值为i时，对应的特征向量为$k_1\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$，$k_1$为任意非零常数；当特征值为$-i$时，对应的特征向量为$k_2\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}$，$k_2$为任意非零常数.

习题5.36 (易). 已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值为1，-1，2，则矩阵$\mathbf{B}=2\mathbf{A}+\mathbf{E}$($\mathbf{E}$ 为三阶单位阵)的特征值为____________

$-1,3,5.$

习题5.37 (中). 设向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件$\alpha^{\mathbf{T}}\beta=0$. 记$n$阶矩阵$\mathbf{A}=\alpha\beta^{\mathbf{T}}$，则矩阵$\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量是____________

特征值全为0，对应的特征向量为$c_1(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0)^T+c_2(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0)^T+\cdots+c_{n-1}(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1)^T$ 　　(c_1，c_2，$\cdots$，c_{n-1}是不全为零的任意常数).

习题5.38 (中). 已知三阶对称矩阵$\mathbf{A}$的一个特征值$\lambda=2$，对应的特征向量$\alpha=(1,2,-1)^T$，且$\mathbf{A}$的主对角线上元素全为零，则$\mathbf{A}=$____________

$$\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$$

习题5.39 (中). 设三阶矩阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$，其中列向量$\alpha_1=(1,2,2)^T$，$\alpha_2=(2,-2,1)^T$，$\alpha_1=(-2,-1,2)^T$，则矩阵$\mathbf{A}=$____________

$$\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{bmatrix}$$

习题5.40 (中). 已知$\lambda_1=0$是三阶矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{bmatrix}$的特征值，则其它的特征值为____________

$\lambda_2=2$，$\lambda_3=2$.

习题5.41 (中). 矩阵$\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$的特征向量是____________

当$\lambda=1$时，特征向量为$k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$，$k_1$，$k_2$为不全为零的任意常数；当$\lambda=-2$时，特征向量为$k(1,1,1)^T$，$k$为非零常数.

习题5.42 (中). 矩阵$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$的特征向量是____________

特征向量为$k(1,0,0)^T$，k为非零常数.

习题5.43 (中). 矩阵$\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$的特征向量是____________

当$\lambda=0$时，特征向量为$k(-1,-1,1)^T$，k为非零常数；当$\lambda=-1$时，特征向量为$k(-2,2,2)^T$，k为非零常数当$\lambda=1$时，特征向量为$k(1,1,1)^T$，k为非零常数.

习题5.44 (易). 矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$的非零特征值是____________

4.

习题5.45 (易). 若A是n阶实方阵，则A为正交矩阵的充要条件是____________, 或者____________，或者____________.

A的行(列)向量组是正交的单位向量组；$A^{-1}=A^T$; A^T(或A^{-1})为正交矩阵.

习题5.46 (易). 设$\lambda=4$是n阶矩阵A的一个特征根，则行列式$|4E-A|=$____________.

0.

习题5.47 (易). 设$\lambda=4$是n阶矩阵A的一个特征根，则方程组$(4E-A)x=0$一定有____________解.

非0解.

习题5.48 (易). 设A为n阶方阵, $Ax=0$有非0解，则A必有一个特征值为____________

0.

习题5.49 (易). 已知3阶矩阵A的3个特征值为$1,2,3$, 则$A^2+2A+3E$的特征值为____________

$6,11,18$.

习题5.50 (中). 设n阶方阵A的元素全为1, 则A的n个特征值是____________

$n, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}$个

习题5.51 (中). 设A为n阶方阵，$|A| \neq 0, A^*$为A的伴随矩阵. 若A有特征值λ, 则$(A^*)^2 + E$必有特征值____________

$(\frac{|A|}{\lambda})^2 + 1$.

习题5.52 (中). 若n阶方阵A满足$A^2 - 2A + E = 0$, 则A的特征值为____________

1.

习题5.53 (易). 已知3阶矩阵A的特征值为$1, -1, 2$, 则矩阵$A^2 - 2A + E$的特征值为____________

0，4，1.

习题5.54 (中). 已知3阶矩阵A的特征值为$1, 2, 4$, 则伴随矩阵A^*的特征值为____________

8,4,2.

习题5.55. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, 若$A$有特征值1，则$A$的其它特征值为____________

$x = 2$时，:$\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$；$x = \frac{1}{2}$时，$\lambda_2 = -1, \lambda_3 = \frac{5}{2}$.

习题5.56 (难). 设A为3阶矩阵，α_1, α_2为A的分别属于特征值$-1, 1$的特征向量，向量α_3 满足$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$. 令$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则$P^{-1}AP =$____________

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2.2 相似矩阵

习题5.57 (中). 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & \alpha \end{pmatrix}$与矩阵$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$相似. 则当$P =$____________时，能使$P^{-1}AP = B$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

习题5.58 (中). 设$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, 则$A^{100} =$____________

3阶单位矩阵E.

习题5.59 (易). n阶矩阵A可对角化的充要条件是A有____________个线性无关的特征向量.

n.

习题5.60 (易). 设A, B为n阶矩阵，如果有n阶可逆矩阵P, 使得____________，则称A与B相似.

$P^{-1}AP = B$.

习题5.61 (难). 设$\alpha = (1,0,-1)^T$, $A = \alpha\alpha^T$, n为正整数，则$|6E - A^n| =$____________

$36(6-2^n)$.

习题5.62 ((中)2015数学II). 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$与矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$相似. 当$P =$____________时，能使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题5.63 (中). 设3阶实对称矩阵A的特征值分别为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于$\lambda_1$的特征向量为$\alpha_1 = (0,1,1)^T$, 则矩阵$A =$____________

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题5.64 (难). 3阶矩阵A的特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量依次是$\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,2,4)^T, \alpha_3 = (1,3,9)^T$，$\beta = (1,1,3)^T$, 则$A^n\beta =$____________，其中，$n$为自然数.

$(2-2^{n+1}+3^n, 2-2^{n+2}+3^{n1}, 2-2^{n+3}+3^{n+2})^T$.

5.3 主观题

5.3.1 特征值与特征向量

习题5.65. 若A为正交矩阵，则其伴随矩阵A^*也是正交矩阵。

证明：$A^{-1} = A^T$, 且$|A| = \pm 1$. 由$AA^* = |A|E$知，$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$; 另一方面，$(A^*)^TA^T = |A|E$, 这意味着$(A^*)^T = |A|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^{-1} = |A|A$, 从而，$|A|(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T$, 进而，$|A|^2(A^*)^{-1} = (A^*)^T$, 即，$(A^*)^{-1} = (A^*)^T$.

习题5.66 (易). 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 的特征值与特征向量, 并判断它们的特征向量是否两两正交.

解：由$A - \lambda E| = 0$解得特征值$\lambda_1 = 2$时，其特征向量$P_1 = (-1,1)^T$; $\lambda_2 = 3$时，$P_2 = (-\frac{1}{2},1)^T$, 易知，P_1与P_2不正交.

习题5.67 (中). 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量, 并判断它们的特征向量是否两两正交.

解. 由$A - \lambda E| = 0$解得特征值$\lambda_1 = 0$时，其特征向量$P_1 = (-1,-1,1)^T$; $\lambda_2 = -1$时，$P_2 = (-1,1,0)^T$; $\lambda_3 = 9$时，$P_3 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T$, 易知，$P_1, P_2, P_3$两两正交.

5.3.2 相似矩阵

习题5.68 (易). 设$\mathbf{A}$为三阶矩阵，且$\mathbf{A}-\mathbf{E}$，$\mathbf{A}+2\mathbf{E}$，$5\mathbf{A}-3\mathbf{E}$不可逆，试证$\mathbf{A}$可相似于对角矩阵.

证明：且$\mathbf{A}-\mathbf{E}$，$\mathbf{A}+2\mathbf{E}$，$5\mathbf{A}-3\mathbf{E}$不可逆，说明A有3个不同的特征值$1,-2,\frac{3}{5}$, 因此，$\mathbf{A}$必相似于对角矩阵.

习题5.69 (易)**.** 设$\mathbf{A}$为n阶可逆方阵，若$\mathbf{A}$相似于对角阵，则$\mathbf{A}^{-1}$也相似于对角阵.

证明：设可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则$A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1}$, 因此, $A^{-1} = P\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})P^{-1}$.

习题5.70 (易)**.** 已知$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$有特征值$\pm 1$.问$\mathbf{A}$能否对角化？并说明理由.

解：由$|A - E| = 0$可得$a = -1$; 由$A + E| = 0$可得$b = -3$; 计算$|A - \lambda E| = 0$, 可得$(\lambda + 2)(\lambda^2 - 1) = 0$, 于是可求得$A$的最后一个特征值为$-2$. 由于$A$具有阶数个不同的特征值，因此，$A$必可对角化.

第6章　二次型

6.1　选择题

6.1.1　二次型及其矩阵表示

习题6.1 (易). 设$f(x_1，x_2，x_3，x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3$，则二次型的秩为(　　)

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

(C)

习题6.2 (易). 二次型$f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + kx - 3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩为2，则$k =$(　　)

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

(C)

习题6.3 (易). 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩为2. 则参数$c =$(　　)

(A) $c = 2$;　*(B)* $c = -2$;　*(C)* $c = 3$;　*(D)* $c = -3$.

(C)

习题6.4 (易). 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩为2. 则此二次型对应方阵的特征值为(　　)

(A) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0$;　*(B)* $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0$;　*(C)* $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 0$;　*(D)* $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0$.

(B)

习题6.5 (易). 二次型$f(x_1，x_2，x_3) = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ 的秩为(　　)

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

(A)

习题6.6 (中). 二次型$f(x_1，x_2，x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + tx_3^2$，若其秩为2，则$t$值应为(　　).

$(A)0$　　　$(B)2$　　　$(C)\frac{7}{8}$　　　$(D)1$

(C)

习题6.7 (中). 设二次型$f(x_1，x_2，x_3) = ax_1^2 + 2bx_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_3^2 (b > 0)$，其中二次型的矩阵$\mathbf{A}$ 的特征值之和为1，特征值之乘积为-12，则(　　)

(A) $a = 1, b = -2$;　*(B)* $a = -1, b = 2$;　*(C)* $a = -1, b = -2$;　*(D)* $a = 1, b = 2$.

(D)

习题6.8 (中). 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + 2(1+a)x_1x_2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2$的秩为2，则( )

(A) $a = 0$; *(B)* $a = -1$; *(C)* $a = 1$; *(D)* $a = 2$.

(A)

6.1.2 二次型的标准形

习题6.9 (中). 欲使二次曲面$x^2 + (\lambda+2)y^2 + \lambda z^2 + 2xy = 5$成为一个椭球面，则$\lambda$满足条件( )

(A) $\lambda \geq 0$; *(B)* $\lambda > 0$; *(C)* $\lambda < 0$; *(D)* $\lambda \leq 0$.

(B)

习题6.10 (中). 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2ax_2x_3 + 3x_3^2 (a > 0)$ 通过正交变换化成标准形$f = z_1^2 + 2z_2^2 + 5z_3^2$，则参数( )

(A) $a = 3$; *(B)* $a = -3$; *(C)* $a = 2$; *(D)* $a = -2$.

(C)

习题6.11 (中). 已知二次曲面方程

$$x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$$

可以经过正交变换$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$化为椭圆柱面方程$\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$，则( )

(A) $a = 3$，$b = 1$; *(B)* $a = 1$，$b = 3$; *(C)* $a = 3$，$b = 4$; *(D)* $a = 4$，$b = 3$.

(A)

习题6.12 (易). 设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 - 2x_2x_3 + (a-1)x_3^2$, 若二次型$f$的规范形为$y_1^2 + y_2^2$，则( )

(A) $a = -1$; *(B)* $a = 1$; *(C)* $a = -2$; *(D)* $a = 2$.

(D)

习题6.13 (中). 设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$( )

*(A)*合同，且相似 *(B)*合同，但不相似 *(C)* 不合同，但相似 *(D)* 既不合同，也不相似

(B)

习题6.14 (中). 已知实对称矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & a & b \\ -\frac{1}{2} & b & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$与$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$既相似又相合，则( )

(A) $a = 2$，$b = 3$; *(B)* $a = 3$，$b = 2$; *(C)* $a = 3$，$b = 3$; *(D)* $a = 2$，$b = 2$.

(D)

6.1.3 正定二次型

习题6.15 (难). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_s \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_s^2 \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_s^{n-1} \end{bmatrix}$，$i \neq j$ 时，$x_i \neq x_j$，，则矩阵$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$是( )

(A) 半正定的； *(B)* 正定的； *(C)* 半负定的； *(D)* 负定的.

(B)

习题6.16 (易). $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$是正定的，则$t$满足( )

(A) $0 < t < \frac{4}{5}$; *(B)* $0 < t < \frac{5}{4}$; *(C)* $t = \frac{4}{5}$; *(D)* $t < \frac{4}{5}$.

(A)

习题6.17 (易). 设方阵A为正定矩阵，则下列结论不正确的是( )

(A) A可逆； *(B)* A^{-1}也是正定矩阵； *(C)* $|A| > 0$; *(D)* A的所有元素全为正.

(D)

习题6.18 (中). 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda E + A$是正定的实对称矩阵，则λ( )

(A) $\lambda = 1$; *(B)* $\lambda > 1$; *(C)* $\lambda \geq 1$; *(D)* $\lambda \leq 1$.

(B)

习题6.19 (易). 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$, 则( )

(A) $k > -1$; *(B)* $k > 0$; *(C)* $k > 1$; *(D)* $k > 2$.

(C)

习题6.20 (中). 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩为2. 则方程$f(x_1, x_2, x_3) = 1$表示的二次曲面是( )

(A) 椭圆柱面; *(B)* 椭圆抛物面; *(C)* 椭球面； *(D)* 双曲面.

(A)

习题6.21 (易). 二次型$f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$是( )

(A) 正定的； *(B)* 负定的； *(C)* 半正定的; *(D)* 半负定的.

(B)

习题6.22 (易). 二次型$f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4$是( )

(A) 正定的； *(B)* 负定的； *(C)* 半正定的; *(D)* 半负定的.

(A)

习题6.23 (中). 已知某二次型的矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & k \end{pmatrix}$, 且此二次型的正惯性指数为3，则$k$的取值范围为( )

(A) $k < 8$； *(B)* $k \leq 8$; *(C)* $k \geq 8$; *(D)* $k > 8$.

(D)

习题6.24 (易). 对正定矩阵**A**，下列结论不正确的是( )

(A) 合同于一个同阶单位矩阵； *(B)* 所有特征值都大于零；

(C) 顺序主子式都大于零； *(D)* 不能对角化.

(D)

习题6.25 (易). 以下命题正确的是( ).

(A) 若n阶方阵$\mathbf{A}$的顺序主子式都大于零，则$\mathbf{A}$是正定的；

(B) 若n阶方阵$\mathbf{A}$的特征值都大于零，则$\mathbf{A}$是正定的；

(C) 若n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$不是负定的，则$\mathbf{A}$是正定的；

(D) 若n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$主对角线元素全为零，则$\mathbf{A}$一定不是正定的.

(D)

习题6.26 (中). 设A是n阶正定矩阵，令二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax + x_n^2$的矩阵为$B$，则$A, B$的行列式有关系( )

(A) $|A|<|B|$; *(B)* $|A| > |B|$; *(C)* $|A| = |B|$; *(D)* 无法确定.

(A)

6.2 填空题

6.2.1 二次型及其矩阵表示

习题6.27 (易). 设二次型$f(x_1，x_2，x_3) = ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 - 2x_2x_3 + (a-1)x_3^2$, 则$f$的矩阵的特征值为____________

$a, a+1, a-2.$

习题6.28 (易). 二次型$f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$的矩阵为____________

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题6.29 (易). 二次型$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4$的矩阵为____________

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题6.30 (易). 二次型$f = x_1x_3 - x_2x_4$的矩阵形式为____________

$$f = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

习题6.31 (易). 设$f(x_1，x_2，x_3，x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3$，则二次型的矩阵是____________

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

习题6.32 (中). 二次型$f(x_1，x_2，x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$的矩阵表达式____________

$$f = (x_1，x_2，x_3)\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

习题6.33 (易). 已知二次型$f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩是2，则参数$a =$____________

$a = 3$.

习题6.34 (易). 二次型$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$的秩是____________

3.

6.2.2 二次型的标准形

习题6.35 (中). 已知二次型$f(x_1，x_2，x_3) = (1-a)x_1^2 + 2(1+a)x_1x_2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2$的秩为2. 欲通过正交变换$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$，把$f(x_1，x_2，x_3)$ 化成标准形, 则$Q =$____________

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

习题6.36 (中). 已知实对称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$合同，则二次型$f = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的规范形$f =$____________

$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$。

习题6.37 (中). 设$\mathbf{A}$为3阶实对称矩阵，且满足$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \mathbf{0}$，又$|\mathbf{A}| = 2$，则二次型$f = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$经正交变换化为标准形$f =$____________

$y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$.

习题6.38 (中). 已知二次曲面方程

$$x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$$

可以经过正交变换$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$化为椭圆柱面方程$\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$，则正交矩阵$\mathbf{P} =$____________

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

习题6.39 (中). 已知二次型$f(x_1，x_2，x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2ax_2x_3 + 3x_3^2 (a > 0)$ 通过正交变换化成标准形$f = z_1^2 + 2z_2^2 + 5z_3^2$，则所用的正交变换矩阵为____________

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

习题6.40 (中). 设二次型$f(x_1，x_2，x_3) = ax_1^2 + 2bx_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_3^2 (b > 0)$，其中二次型的矩阵$\mathbf{A}$ 的特征值之和为1，特征值之乘积为-12. 欲利用正交变换将二次型f化为标准形，则所用的正交变换和对应的正交矩阵分别为____________

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}，\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

习题6.41 (中). 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -2 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$的规范形为____________

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

习题6.42 (中). 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$的规范形为____________

$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$.

习题6.43 (中). 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + ax_3^2$的秩为2，则$f$的规范形为____________

$z_1^2 - z_2^2$

习题6.44 (中). 用正交变换把二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$化为标准形，则使用的正交变换是____________

$$x = Qy, \text{其中}, Q = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{3\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

习题6.45 (中). 运用正交变换法化二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -2 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$为标准形____________

$2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$.

习题6.46 (中). 运用正交变换法化二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.为标准形____________

$-4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2$.

习题6.47 (中). 经过正交变换后，二次型$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$的标准形成为____________

$f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2$

习题6.48 (中). 经过正交变换后，二次型$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$的标准形成为____________

$f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$

习题6.49 ((中)2015数学II). 设二次型$f(x_1, x_2, x_3)$在正交变换$x = Py$下的标准形为$2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中$P = (e_1, e_2, e_3)$, 若$Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则f在正交变换$x = Qy$下的标准形为____________

$2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

习题6.50 (易). 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 5x_3^2$$

为标准形. 则其标准形与所用非退化线性变换分别为____________与____________

$$f = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2; \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

习题6.51 (中). 求一个正交变换化二次型$f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 4x_3^2$ 成标准形, 则这个正交变换为____________

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}，其中\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

6.2.3 正定二次型

习题6.52 (易). 二次型$f(x_1，x_2，x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$ 的秩、正惯性指数、负惯性指数分别为____________

$3, 2, 1.$

习题6.53 (中). 若二次型$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3 + x_3^2$ 是正定的，则t的取值范围是____________

$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$。

习题6.54 (中). 若二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3+x_4^2$是正定的，则$t$的取值范围是____________

$t > 2.$

习题6.55 (中). 欲使$Q(x，y，z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$正定，则$\lambda$满足条件____________

$\lambda > 2.$

习题6.56. 欲使$Q(x，y，z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$负定，则$\lambda$满足条件____________

$\lambda < -1.$

习题6.57 (中). 设A是n阶正定矩阵，令二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx+x_n^2$的矩阵为$B$，则$B$是否是正定矩阵？____________

是.

习题6.58 (中). 已知二次型$f = x_1^2 + 2x_2^2 + tx_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$的正惯性指数为2，负惯性指数为1，则参数$t$的取值范围为____________

$t < 5.$

6.3 主观题

6.3.1 二次型及其矩阵表示

习题6.59 (易). 设$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$, 写出二次型$f$的矩阵表示，并求二次型的秩.

解: 二次型f的矩阵表示为$f = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

对二次型的矩阵施以行初等变换可得

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} - & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 即，$r(A) = 3$, 因此，二次型的秩为3.

6.3.2 二次型的标准形

习题6.60 (中). 设二次型$f = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$. *(1)* 用正交变换法把二次型$f$化为标准形，并写出相应的正交变换；*(2)* 把二次型f化为规范形.

解：二次型的矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,
A的特征多项式$\lambda E - A| = (\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6)$, 于是得$A$的特征值为$1, 6, -6$.

当$\lambda = 1$时，解方程组$(E-A)x = 0$, 得A对应于$\lambda_1 = 1$的特征向量为$\alpha_1 = (-2, 0, 1)^T$, 单位化后得$p_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})^T$;

当$\lambda = 6$时，解方程组$(6E-A)x = 0$, 得A对应于$\lambda_2 = 6$的特征向量为$\alpha_2 = (1, 5, 2)^T$, 单位化后得$p_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})^T$;

当$\lambda = -6$时，解方程组$(-6E-A)x = 0$, 得A对应于$\lambda_3 = -6$的特征向量为$\alpha_3 = (-1, 1, 2)^T$, 单位化后得$p_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$.

以p_1, p_2, p_3为列构成矩阵$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}})^T \end{pmatrix}$,
易验证P为正交矩阵，且$P^TAP = \mathrm{diag}(1, 6, -6)$, 于是得到正交变换$x = Py$, 即，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

则二次型f在正交变换下化成标准形$f = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$.

(2) 令$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, 则二次型$f$化为规范形$f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

习题6.61 (易). 用配方法化二次型$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$为标准形，并求出相应的可逆线性变换.

解：

$$\begin{aligned} f &= 2(x_1^2 + 2(x_2 + x_3)) + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_2 - x_3, \end{cases}$

得可逆线性变换$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_2 - y_3. \end{cases}$ 则二次型f在可逆线性变换下化成标准形$f = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

习题6.62 (中). 已知二次曲面方程为$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz = 4$可经正交变换$X = PY$化为椭圆柱面方程$4u^2+v^2 = 4$, 其中, $X = (x, y, z)^T, Y = (u, v, r)^T$. 求参数$a, b$及正交矩阵$P$.

解：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, A的特征多项式为$|\lambda E-A|=\lambda^3-(a+2)\lambda^2+(2a-1-b^2)\lambda+(1-2b+b^2)$.

已知此二次型经正交变换化为标准形$4u^2+v^2$，则它的矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix}4&0&0\\b&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, Λ的特征多项式为$|\lambda E-\Lambda|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-1)=\lambda^3-5\lambda^2+4\lambda$.

比较$|\lambda E-A|$与$|\lambda E-\Lambda|$同次幂的系数得

$$a+2=5,2a-b^2=5,1-2b+b^2=0,$$

解得$a=3,b=1$, 所以，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

A的特征值为$0,4,1$. 通过解相应的特征方程，可得如下结果：A的对应于特征值0的一个特征向量$\alpha_1=(-1,0,1)^T$, 单位化得$p_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$; A 的对应于特征值4的一个特征向量$\alpha_1=(1,2,1)^T$, 单位化得$p_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$; A的对应于特征值1的一个特征向量$\alpha_1=(1,-1,1)^T$, 单位化得$p_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$.

令$P=(p_1,p_2,p_3)$, 则$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$就是所求的正交矩阵.

6.3.3 正定二次型

习题6.63 (易). *设A为实可逆矩阵，证明：A^TA是正定矩阵.*

证明：对$x\neq 0$, 由于A可逆，则$Ax\neq 0$, 于是，$x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)>0$, 故，A^TA正定.

习题6.64 (易). *若$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$都是n阶正定矩阵，则$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 也是正定矩阵.*

证明：对$x\neq 0,x\in\mathbb{R}^n$, $x^T(A+B)x=x^TAx+x^TBx>0$.

习题6.65 (中). *设$\mathbf{A}$是实反对称矩阵，证明是设$\mathbf{E}-\mathbf{A}^2$是正定矩阵.*

证明：由于$A^T=-A$, 因而, $E-A^2=E+(-A)A=E+A^TA$, 因此, 对$x\neq 0$, 有$x^T(E-A^2)x=x^Tx+(Ax)^T(Ax)>0$.

习题6.66 (易). *设$\mathbf{A}$为$m\times n$实矩阵，$\mathbf{B}=\lambda\mathbf{E}+\mathbf{A}^T\mathbf{A}$，试证当$\lambda>0$时，矩阵$\mathbf{B}$ 为正定矩阵.*

证明：对$x\neq 0,x\in\mathbb{R}^n$, $x^TBx=\lambda x^Tx+(Ax)^T(Ax)>0$.

习题6.67 (难). *设A为n阶实对称矩阵，证明A正定的充要条件是存在n阶正定矩阵B, 使得$A=B^2$.*

证明：必要性. 因A正定，因而存在正交矩阵P使得

$$p^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n.$$

令$B=P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P^T$, 则$B$为$n$阶正定矩阵，且满足

$$A=P\Lambda P^T=P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P^TP\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P^T=B^2.$$

充分性. 由$A=B^2$, 且B正定，则$B^T=B$, 于是，对$\forall\ x\neq 0$, 有$Bx\neq 0$, 从而, 二次型

$$f = x^T Ax = (Bx)^T(Bx) > 0,$$

即，f正定，亦即，A正定.

习题6.68 (易). 设A, B都是实对称矩阵，A正定，B半正定，证明$A + B$正定.

证明：对$\forall\ x \neq 0, x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0.$

习题6.69 (难). 设A, B都是实对称矩阵，A正定，B半正定，证明$|A + B| > |A|$.

证明：因A正定，从而，A^{-1}也正定，加之B半正定，则$A^{-1}B$的特征值为非负实数，因此，$E + A^{-1}B$的特征值全大于1，进而，$|E + A^{-1}B| > 1$, 即，$|A^{-1}||A + B| > 1$, 故，$|A + B| > |A|$.

习题6.70 (中). 已知二次型$f = mx_1^2 + mx_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 问当$m$为何值时，$f$是正定的，当$m$为何值时，$f$是负定的.

解：二次型的矩阵为$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$, 矩阵$A$的顺序主子式依次是$|A_1| = m, |A_2| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1), |A_3| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = (m+1)^2(m-2),$

因此, 欲使f正定，当且仅当$\begin{cases} m > 0, \\ (m-1)(m+1) > 0, \\ (m+1)^2(m-2) > 0, \end{cases}$ 解得$m > 2$.

欲使f负定，当且仅当$\begin{cases} m < 0, \\ (m-1)(m+1) < 0, \\ (m+1)^2(m-2) < 0, \end{cases}$ 解得$m < -1$.

第7章　线性空间

7.1　选择题

7.1.1　线性空间的概念

习题7.1 (易). 已知1，$x-1$，$(x-2)(x-1)$是所有不超过二次的实多项式全体构成的线性空间$\mathbf{P}[x]_2$ 的一组基，则向量$1+x+x^2$在该基下的坐标是(　　)

(A) $(3,4,1)^T$; *(B)* $(1,4,3)^T$; *(C)* $(3,2,1)^T$; *(D)* $(-3,4,1)^T$.

(A)

习题7.2 (中). 已知$e:\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$是$\mathbf{R}^3$的一个基，则向量$\alpha=-\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$在由基$e$通过过渡矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$所得到的新基下的坐标是(　　)

(A) $(0,3,0)$; *(B)* $(2,3,5)$; *(C)* $(-1,-2,5)$; *(D)* $(-2,-3,5)$.

(B)

习题7.3 (易). 在所有2维向量构成的线性空间$\mathbf{V}_2$中，下列向量集合构成子空间的是(　　)　*(A)* $(0,0)^T,(0,1)^T,(1,0)^T$组成的集合； *(B)* $(0,0)^T$组成的集合；

(C) 所有形如$(x,1)^T$的向量组成的集合； *(D)* 满足$x+y=1$的所有(x,y)组成的集合.

(B)

习题7.4 (中). 已知n阶实方阵的全体$\mathbf{M}_n$在矩阵的加法与数乘运算下构成一个线性空间，则它的维数是(　　)

(A) $n!$; *(B)* n; *(C)* $2n$; *(D)* n^2.

(D)

习题7.5 (中). 设$\mathbf{V}$是所有2阶矩阵在矩阵的线性运算下所构成的线性空间，$\mathbf{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$是$V$的一个基，则矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&0\\2&-1\end{pmatrix}$在该基下的坐标是(　　)

(A) $(4,0,2,1)^T$; *(B)* $(4,0,2,-1)^T$; *(C)* $(4,2,2,-1)^T$; *(D)* $(4,0,-2,-1)^T$.

(B)

习题7.6 (中). 设$\mathbf{V}$是所有2阶矩阵在矩阵的线性运算下所构成的线性空间，$\mathbf{F}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{F}_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{F}_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{F}_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$是$V$的一个基，则矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&0\\2&-1\end{pmatrix}$在该基下的坐标为(　　)

(A) $(1,-\frac{1}{3},2,-\frac{4}{3})^T$; *(B)* $(1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3})^T$; *(C)* $(1,\frac{1}{3},2,-\frac{4}{3})^T$; *(D)* $(1,\frac{1}{3},2,\frac{4}{3})^T$.

(C)

习题7.7 (中). 由$\mathbf{P}[x]_3$中的元素$f_1(x)=x^3-2x^2+4x+1$，$f_2(x)=2x^3-3x^2+9x-1$，$f_3(x)=x^3+6x-5$，$f_4(x)=2x^3-5x^2+7x+5$生成的子空间的维数是(　　)

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(B)

习题7.8 (中). 已知齐次线性方程组(I)的基础解系为α_1=(1，2，1，0)^T，α_2=(-1，2，1，1)^T，齐次线性方程组(II) 的基础解系为β_1=(2，-1，0，1)^T，β_2=(1，-1，3，7)^T，方程组(I)和(II)的解空间分别为$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$.则$\mathbf{V}_1\cap\mathbf{V}_2$ 的维数是(　　)

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(A)

习题7.9 (中). 已知齐次线性方程组(I)的基础解系为α_1=(1，2，1，0)^T，α_2=(-1，2，1，1)^T，齐次线性方程组(II) 的基础解系为β_1=(2，-1，0，1)^T，β_2=(1，-1，3，7)^T，方程组(I)和(II)的解空间分别为$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$.则$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$的维数是(　　)

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(C)

习题7.10 (易). 由所有2阶实的上三角阵构成的全体$V=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix} | a_{11}，a_{12}，a_{22}\in\mathbf{R}\right\}$在矩阵的线性运算下构成一个线性空间，则它的维数是

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(C)

习题7.11 (易). 已知$1,x,x^2$是实线性空间$\mathbf{P}[x]_2=\{p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0|a_2，a_1，a_0\in\mathbf{R}\}$ 的一组基，则多项式$p(x)=(x-2)(x-3)$在该基下的坐标为

(A) $(6,-5,1)^T$; *(B)* $(6,0,1)^T$; *(C)* $(6,5,1)^T$; *(D)* $(-6,-5,1)^T$.

(A)

习题7.12 (中). 已知$1,x,x^2$；(II)：$1,1+x,(1+x)^2$是$\mathbf{P}[x]_2$的一个基，则该基经过渡矩阵$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$得到的新基为(　　)

(A) $1,1+x,2-x+x^2$; *(B)* $1,-1+x,2+x+x^2$; *(C)* $1,-1+x,2-x+x^2$; *(D)* $1,-1-x,2-x+x^2$.

(C)

习题7.13 (中). 已知向量空间的一个基为α_1=(1，1，0)^T，α_2=(1，0，1)^T，α_3=(0，1，1)^T，则向量μ=(2，0，0)^{T}在上述基下的坐标为(　　)

(A) $(1,0,-1)^T$; *(B)* $(0,1,-1)^T$; *(C)* $(-1,-1,-1)^T$; *(D)* $(1,1,-1)^T$.

(D)

习题7.14 (难). 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，线性空间$V=\{B\in\mathbf{M}_{3\times3}|AB=0\}$，其中，$\mathbf{M}_{3\times3}$表示所有3阶实矩阵集合，则$V$的维数(　　)

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(C)

习题7.15 (易). 在$\mathbf{R}^3$中，向量α=(3，7，1)^{T}关于基α_1=(1，3，5)^T，α_2=(6，3，2)^T，α_3=(3，1，0)^{T}的坐标是(　　)

(A) $(33,-82,154)^T$; *(B)* $(33,-62,15)^T$; *(C)* $(33,-82,15)^T$; *(D)* $(31,-82,151)^T$.

(A)

习题7.16 (难). 已知四维线性空间中的两个基为α_1，α_2，α_3，α_4和β_1，β_2，β_3，β_4，且$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \\ \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4, \\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ \beta_4 = \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4. \end{cases}$ 则α_4关于基β_1，β_2，β_3，β_4的坐标是(　　)

(A) $0,0,1,0)^T$; *(B)* $(1,0,1,0)^T$; *(C)* $(1,0,-1,0)^T$; *(D)* $(-1,0,0,1)^T$.

(C)

习题7.17 (中). 已知$1+x$，$1+x^2$，$x+x^3$，x^3是线性空间$\mathbf{P}[x]_3$中的一个基, 则$3+2x+x^2$关于基$1+x$，$1+x^2$，$x+x^3$，x^3的坐标是(　　)

(A) $(2,1,0,0)^T$; *(B)* $(0,1,0,1)^T$; *(C)* $(1,1,0,0)^T$; *(D)* $(2,1,0,1)^T$.

(A)

习题7.18 (中). 下列说法中正确的是(　　)　　　*(A)*任何线性空间中一定含有零向量； *(B)*由r个向量生成的子空间一定是r维的；

*(C)*次数为n的全体多项式对于多项式的加法和数乘构成线性空间；

*(D)*在n维向量空间$\mathbf{V}$中，所有分量等于*1*的全体向量的集合构成$\mathbf{V}$的子空间.

(A)

习题7.19 (中). 向量组$(1,1,0,-1)^T,(1,2,3,0)^T,(2,3,3,-1)^T$ 生成的向量空间的维数是(　　)

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(B)

习题7.20 (中). 下列说法中错误的是(　　)

*(A)*若向量空间$\mathbf{V}$中任何向量都可以由向量组α_1，α_2，$\cdots$，α_n线性表示，则α_1，α_2，$\cdots$，α_n是$\mathbf{V}$的一个基；

*(B)*若n维向量空间$\mathbf{V}$中任何向量都可以由向量组α_1，α_2，$\cdots$，α_n线性表示，则α_1，α_2，$\cdots$，α_n是$\mathbf{V}$的一个基；

*(C)*若$n-1$维向量空间$\mathbf{V}$中任何向量都可以由向量组α_1，α_2，$\cdots$，α_n线性表示，则α_1，α_2，$\cdots$，α_n不是$\mathbf{V}$的一个基；

(D)n维向量空间$\mathbf{V}$的任一个基必定含有n个向量.

(A)

7.1.2 线性变换

习题7.21 (中). 在线性空间$\mathbf{V}$中，定义变换$\sigma(\alpha)=\alpha+\eta$，其中$\alpha$ 是$\mathbf{V}$中任意向量，η 是$\mathbf{V}$中一个固定的向量，则(　　)

(A) 当$\eta=0$时，σ是线性变换，当$\eta\neq 0$时，σ不是线性变换；

(B) 当$\eta=0$时，σ不是线性变换，当$\eta\neq 0$时，σ是线性变换；

(C) σ是线性变换；

(D) 无法确定.

(A)

习题7.22 (难). 已知$\mathbf{R}^3$中线性变换$\mathbf{T}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+3z \\ x+5y-z \\ 3x+9y+3z \end{bmatrix}$, 则$\mathbf{T}$的像空间$Ran(T)$的维数是( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(B)

习题7.23 (难). 已知$\mathbf{R}^3$中线性变换$\mathbf{T}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+3z \\ x+5y-z \\ 3x+9y+3z \end{bmatrix}$, 则$\mathbf{T}$的核$Ker(T)$的维数是( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(A)

习题7.24 (难). 设$\mathbf{V}$是所有2阶矩阵在矩阵的线性运算下所构成的线性空间，已知变换$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A \in V$是定义在$V$上的线性变换, 则$\mathbf{T}$的秩是( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(B)

习题7.25 (中). 已知线性空间$\mathbf{R}^n$中的线性变换$\mathbf{T}$满足$\mathbf{T}(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T=(0, x_1, \cdots, x_{n-1})^T$, 则$\mathbf{T}$的核是( )

(A) $Ker(T) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T | x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$; *(B)* $Ker(T) = \{(0, 0, \cdots, 0)^T\}$;

(C) $Ker(T) = \{(x, x, \cdots, x)^T | x \in \mathbf{R}\}$; *(D)* $Ker(T) = \{(x, 0, \cdots, 0)^T | x \in \mathbf{R}\}$.

(D)

习题7.26 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$, 则线性变换$\mathbf{T}\alpha = \mathbf{A}\alpha, \alpha \in \mathbf{R}^4$的核的维数是( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(B)

习题7.27 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$, 则线性变换$\mathbf{T}\alpha = \mathbf{A}\alpha, \alpha \in \mathbf{R}^4$的像空间的维数是( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(B)

7.2 填空题

7.2.1 线性空间的概念

习题7.28 (易). 设微分方程$y''' + 3y'' + 3y' + y = 5$的全体解所成之集合记为$S$，则$S$关于函数的加法和数乘运算能否构成实数域上的线性空间？________

否.

习题7.29 (中). 已知$\mathbf{R}^3$中的两个基为$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$，$\beta_1=(1,0,1)^T$，$\beta_2=(1,1,0)^T$，$\beta_3=(0,1,1)^T$，则向量$\alpha=2\alpha_1+4\alpha_2$ 关于基β_1，β_2，β_3 的坐标是____________

$(1,1,5)^T$.

习题7.30 (中). 在$\mathbf{R}^4$中取两个基，一个为标准基ϵ_1，ϵ_2，ϵ_3，ϵ_4，另一个为α_1=$(2,1,-1,1)^T$，α_2=$(0,3,1,0)^T$，α_3=$(5,3,2,1)^T$，α_4=$(6,6,1,3)^T$. 则由基ϵ_1，ϵ_2，ϵ_3，ϵ_4到基α_1，α_2，α_3，α_4的过渡矩阵是____________

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

习题7.31 (中). 已知(I):1，x，x^2，x^3, (II): $1+x$，$1+x^2$，$x+x^3$，x^3是线性空间$\mathbf{P}[x]_3$中的两个基, 则由基(I)到基(II)的过渡矩阵是____________

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

习题7.32 (难). 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，线性空间$V=\{B\in\mathbf{M}_{3\times3}|AB=0\}$，其中，$\mathbf{M}_{3\times3}$表示所有3阶实矩阵集合，则$V$的一个基是____________

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

习题7.33 (中). 已知α_1=$(1,-1,0)^T$，α_2=$(2,1,3)^T$，α_3=$(3,1,2)^T$为$\mathbf{R}^3$的一个基，则向量α=$(5,0,7)^T$，β=$(-9,-8,-13)^T$在这个基下的线性表示是____________

$\alpha=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，$\beta=3\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3$.

习题7.34 (中). 在$\mathbf{P}[x]_2$中，设有两组基(I)：$1,x,x^2$；(II)：$1,1+x,(1+x)^2$. 则(I)到(II)的过渡矩阵是____________

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

习题7.35 (易). 已知由所有2阶实上三角阵构成的全体$V=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{11}，a_{12}，a_{22}\in\mathbf{R}\right\}$是实数域$\mathbf{R}$上的一个线性空间，则它的一个基是____________

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题7.36 (中). 已知齐次线性方程组(I)的基础解系为α_1=$(1,2,1,0)^T$，$\alpha_2=(-1,2,1,1)^T$，齐次线性方程组(II) 的基础解系为β_1=$(2,-1,0,1)^T$，β_2=$(1,-1,3,7)^T$，方程组(I)和(II)的解空间分别为$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$. 则$\mathbf{V}_1\cap\mathbf{V}_2$的基是____________

$(5,-2,-3,-4)^T$.

习题7.37 (中). 已知齐次线性方程组(I)的基础解系为α_1=(1，2，1，0)^T，α_2=(-1，2，1，1)^T，齐次线性方程组(II) 的基础解系为β_1=(2，-1，0，1)^T，β_2=(1，-1，3，7)^T，方程组(I)和(II)的解空间分别为$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$. 则$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$的基是________

α_1，α_2，β_1.

习题7.38 (中). 已知2阶矩阵的全体V对于矩阵的加法和乘法构成线性空间，则这个空间的一组基为________

$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\epsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\epsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\epsilon_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

习题7.39 (难). 已知主对角线上的元素之和等于0的2阶矩阵的全体V对于矩阵的加法和乘法构成线性空间，则这个空间的一组基为________

$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\epsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\epsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

习题7.40 (难). 已知2阶对称矩阵的全体V 对于矩阵的加法和乘法构成线性空间，则这个空间的一组基为________

$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\epsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\epsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

习题7.41 (中). 判断与向量$(0,0,1)^T$不平行的全体3维数组向量，对于数组向量的加法和乘法运算能否构成线性空间：________

否.

习题7.42 (中). 在$\mathbf{R}^3$中，由基α_1=(1，0，0)^T，α_2=(1，1，0)^T，α_3=(1，1，1)^{T}通过过渡矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$所得到的新基是________

β_1=(1，0，0)^T，β_2=(0，1，0)^T，β_3=(0，0，1)^T.

习题7.43 (中). 在$\mathbf{R}^3$中，向量$\alpha=(7，3，1)^T$在基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$下的坐标是________

$(1,-2,6)^T$.

习题7.44 (中). 已知$\mathbf{R}^3$的两个基$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$和$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 则由基$e_1$，$e_2$，$e_3$到基$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$的过渡矩阵是________

$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

习题7.45 (中). 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是$\mathbf{R}^3$的一个基. 若由基$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$到基$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$的过渡矩阵为$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$分别为________

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

习题7.46 (中). 设$\mathbf{V}$是所有2阶矩阵在矩阵的线性运算下所构成的线性空间，它的两个基为(I)：$\mathbf{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；(II)：$\mathbf{F}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{F}_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{F}_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{F}_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$，则从基(I)到基(II)的过渡矩阵为__________

$$\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

习题7.47 (中). 设α_1，α_2，α_3是$\mathbf{R}^3$的一组基，则从基α_1，$\frac{1}{2}\alpha_2$，$\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为__________

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}.$$

习题7.48 (中). 由$\mathbf{P}[x]_3$中的元素$f_1(x)=x^3-2x^2+4x+1$，$f_2(x)=2x^3-3x^2+9x-1$，$f_3(x)=x^3+6x-5$，$f_4(x)=2x^3-5x^2+7x+5$生成的子空间的基是__________

$f_1(x)$，$f_2(x)$.

习题7.49 (中). 在$\mathbf{R}^4$中, 向量$\alpha=(0，0，0，1)^T$在基$\alpha_1=(1，1，0，1)^T$，$\alpha_2=(2，1，3，1)^T$，$\alpha_3=(1，1，0，0)^T$，$\alpha_4=(0，1，-1，-1)^T$下的坐标是__________

$(1,0,-1,0)^T$.

7.2.2 线性变换

习题7.50 (中). 在$\mathbf{R}^3$中，定义变换$\sigma(x_1，x_2，x_3)=(x_1^2，x_2+x_3，x_3^2)$，则$\sigma$是否是线性变换？__________

不是.

习题7.51 (难). 已知$\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$是全体二阶实矩阵构成的线性空间$V$的一个基，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$是$V$中一个固定的实数矩阵，变换$\sigma(\mathbf{X})=\mathbf{AX}-\mathbf{XA}$是一个线性变换，则$\sigma$在该基下的矩阵为__________

$$\begin{pmatrix}0&-c&b&0\\-b&a-d&0&b\\c&0&d-a&-c\\0&c&-b&0\end{pmatrix}.$$

习题7.52 (难). 已知$\mathbf{R}^3$中线性变换$\mathbf{T}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y+3z\\x+5y-z\\3x+9y+3z\end{bmatrix}$, 则$\mathbf{T}$的像空间$Ran(T)$的基为__________

$(1,1,3)^T,(1,5,9)^T$.

习题7.53 (难). 已知$\mathbf{R}^3$中线性变换$\mathbf{T}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+3z \\ x+5y-z \\ 3x+9y+3z \end{bmatrix}$，则$\mathbf{T}$的核$Ker(T)$的基为____________

$(-4,1,1)^T$.

习题7.54 (中). 已知$\mathbf{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$为定义在$\mathbb{R}^3$上的线性变换，则$\mathbf{T}$ 在自然基下的矩阵为____________

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题7.55 (中). 已知线性空间$\mathbf{R}^n$中的线性变换$\mathbf{T}$满足$\mathbf{T}(x_1，x_2，\cdots，x_n)^T$=$(0，x_1，\cdots，x_{n-1})^T$, 则$\mathbf{T}$的像空间$Ran(T)$是____________

$\{(0,x_1,\cdots,x_{n-1})^T | x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n-1\}$.

习题7.56 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$，则线性变换$\mathbf{T}\alpha = \mathbf{A}\alpha, \alpha \in \mathbf{R}^4$的核的一个基是____________

α_1=(-3，7，2，0)^T，α_2=(-1，-2，0，1)^T.

习题7.57 (中). 设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$，则线性变换$\mathbf{T}\alpha = \mathbf{A}\alpha, \alpha \in \mathbf{R}^4$的像空间的一个基是____________

β_1=(1，1，3，1)^T，β_2=(-1，1，-1，3)^T.

习题7.58 (中). 三维向量空间中的线性变换$T(x,y,z)^T = (x+y, x-y, z)^T$在标准基$e_1$=(1，0，0)，$e_1$=(0，1，0)，$e_1$=(0，0，1)下对应的矩阵是____________

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3 主观题

7.3.1 线性空间的概念

习题7.59 (中). 设$M_n(R)$为所有n阶实矩阵所组成的线性空间，问：所有n阶实反对称矩阵的集合S是否是$M_n(R)$的子空间？

解：S是$M_n(R)$的子空间. 这是因为，任取$A, B \in S$, 则$A = -A^T, B = -B^T$, 从而，$A + B = -(A + B)^T$, 即，$A + B \in S$; 又对任意的$k \in \mathbb{R}$, 有$kA = -kA^T = -(kA)^T$, 因而，$kA \in S$.

习题7.60 (中). 设$M_n(R)$为所有n阶实矩阵所组成的线性空间，问：所有n阶不可逆矩阵的集合W是否是$M_n(R)$的子空间？

解：W不是$M_n(R)$的子空间. 这是因为，当$A,B\in W$时, 其和$A+B$不一定任然是不可逆矩阵，如$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$皆不可逆，但$A+B=E$可逆，即，$A,B\in W$, 但$A+B\notin W$, 亦即，$W$对矩阵加法不封闭.

习题7.61 (中). *求$M_2(R)$的一个基和维数.*

解：对$M_2(R)$中的任意一个元素$\alpha=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 欲找到一组结构简单的元素线性表示$\alpha$.

由此，可取元素$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则显然有$\alpha=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+d\alpha_4$, 即$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示. 接下来只需证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关即可.

若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$, 则显然有$k_i=0, i=1,2,3,4$. 因此，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$M_2(R)$的一个基，线性空间的维数为4.

习题7.62 (中). *已知$\alpha_1=2x^2,\alpha_2=x+1,\alpha_3=1$是线性空间$P[x]_2=\{ax^2+bx+c,a,b,c\in\mathbb{R}\}$的一个基，求多项式$P=a_0x^2+a_1x+a_2$在该基下的坐标.*

解：设$P=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 通过比较多项式的系数可得：$k_1=\frac{1}{2}a_0, k_2=a_1, k_3=a_2-a_1$, 因此，所求坐标为$(\frac{1}{2}a_0,a_1,a_2-a_1)^T$.

习题7.63 (中). *已知下列两组向量(I) $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;*

(II) $g_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $g_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $g_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 都是$M_2(R)$中的基. (1) 求从基e_1,e_2,e_3,e_4到基g_1,g_2,g_3,g_4的过渡矩阵；(2) 求矩阵$\alpha=\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$在这两个基下的坐标.

解：不难知道，

$$g_1=0e_1+1e_2+1e_3+1e_4,$$

$$g_2=1e_1+0e_2+1e_3+1e_4,$$

$$g_3=1e_1+1e_2+0e_3+1e_4,$$

$$g_4=1e_1+1e_2+1e_3+0e_4,$$

即，

$$(g_1,g_2,g_3,g_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

所以，从基e_1,e_2,e_3,e_4到基g_1,g_2,g_3,g_4的过渡矩阵是$P=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$.

(2) 不难知道，$\alpha=0e_1+1e_2+2e_3-3e_4$, 从而，$\alpha$在基$e_1,e_2,e_3,e_4$下的坐标为$X=(0,1,2,-3)^T$; 又由坐标变换公式知，$\alpha$在基$g_1,g_2,g_3,g_4$下的坐标为$Y=P^{-1}X=(0,-1,-2,3)^T$.

7.3.2 线性变换

习题7.64 (易). 在$\mathbb{R}^3$中，对任意向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, 设$T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$. 验证$T$是$\mathbb{R}^3$中的线性变换.

证明：任取$\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, 由于

$$\begin{aligned}
T(\alpha+\beta) &= T(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\
&= (2(x_1+y_1)-(x_2+y_2),(x_2+y_2)+(x_3+y_3),x_1+y_1)\\
&= ((2x_1-x_2)+(2y_1-y_2),(x_2+x_3)+(y_2+y_3),x_1+y_1)\\
&= (2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)+(2y_1-y_2,y_2+y_3,y_1)\\
&= T\alpha+T\beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\lambda\alpha) &= T(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)\\
&= (2\lambda x_1-\lambda x_2,\lambda x_2+\lambda x_3,\lambda x_1)\\
&= \lambda(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)\\
&= \lambda T\alpha.
\end{aligned}$$

因此，结论得证.

习题7.65 (中). 设T表示将$\mathbb{R}^3$中的向量投影到平面xoy上的线性变换，即$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,0)$. *(1)* 求$T$在标准基$e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$下的矩阵；*(2)* 取新基$\alpha=e_1,\beta=e_2,\gamma=e_1+e_2+e_3$, 求$T$在新基下的矩阵.

解：(1) 易知，

$$Te_1=1e_1+0e_2+0e_3,$$

$$Te_2=0e_1+1e_2+0e_3,$$

$$Te_3=0e_1+0e_2+0e_3,$$

因而，T在标准基下的矩阵就是$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

(2) 由于

$$T\alpha=e_1=1\alpha+0\beta+0\gamma,$$

$$T\beta=e_2=0\alpha+\beta+0\gamma,$$

$$T\gamma=T(e_1+e_2+e_3)=\alpha+\beta=\alpha+\beta+0\gamma,$$

因此，T在新基下的矩阵是$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

习题7.66 (中). 函数集合$\mathbf{V}=\{\alpha=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x|a_2，a_1，a_0\in\mathbf{R}\}$对于函数的线性运算构成3维线性空间，在$\mathbf{V}$中取一个基$\alpha_1=x^2e^x$，$\alpha_2=xe^x$，$\alpha_3=e^x$. 求微分运算$D$在这个基下的矩阵$A$.

解：由微分运算法则，易知D是定义在V中的一个线性变换，直接计算基向量在D下的像，得

$$D\alpha_1 = x^2e^x + 2xe^x = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3,$$

$$D\alpha_2 = xe^x + e^x = 0\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$D\alpha_3 = e^x = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3,$$

因此，所求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.