海南大学试卷

海南大学2019 -2020学年度第 1 学期试卷

《高等数学A》（上）试题(A卷)参考答案和评分标准

一、选择题：（每小题3分，共18分）

1、已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}$ =（　D　）

(A) $3/2$　(B) $-3/2$　$(C)\ 1$　$(D)\ -1$

考点：导数的定义 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，本题 $\Delta x=-h$

于是 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[3+(-h)]-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-\dfrac{1}{2}\times 2=-1$

2、当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中与 x^2 为同阶无穷小的是（　C　）

(A) $1-e^x$　$(B)\ \ln(1-x^3)$　$(C)\ \arcsin(3x^2)$　$(D)\ \sqrt{1+x^4}-1$

考点：无穷小的阶的比较：高阶、低阶、同阶、等价及 k 阶等概念。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$，故 $\arcsin(3x^2)$与x^2同阶

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x^2}=\infty$，故 $1-e^x$比x^2低阶的无穷小量

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^3)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{x^2}=0$，故 $\ln(1-x^3)$是比x^2高阶的无穷小量

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x^2}=0$，故 $\sqrt{1+x^4}-1$是比x^2高阶的无穷小量

3、如果 $f(x)$ 的导数为 $\cos x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为（　D　）

(A) $1+\sin x$　$(B)\ 1-\sin x$　$(C)\ 1+\cos x$　$(D)\ 1-\cos x$

考点：原函数的概念。如果 $f'(x)=g(x)$，则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的一个原函数，$g(x)$ 的所有原函数为 $f(x)+C$，记作 $\int g(x)dx=f(x)+C$

本题 $f'(x)=\cos x \Rightarrow f(x)=\sin x+C$，求 $f(x)$的所有原函数即求$\int f(x)dx$，

故 $\int f(x)dx=\int(\sin x+C)dx=-\cos x+Cx+C_1$，其中

C及C_1任意取值，可取$C=0, C_1=1$

4、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}, & x<0\\ a & ,x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b & ,x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数a,b的值为（ A ）

（A）$a=1,b=1$　$(B)a=0,b=1$　$(C)a=1,b=0$　$(D)a=0,b=-1$

考点：函数在一点连续的充分必要条件是既要左连续又要右连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

本题　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{e^x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\dfrac{1}{x}+b)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\dfrac{1}{x}+b=b$，

$f(0)=a$，

故 $a=b=1$

5、曲线 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ 有（ A ）

（A）一条水平渐进线，一条铅直渐近线

(B)　一条水平渐进线，两条铅直渐近线

(C)　两条水平渐进线，一条铅直渐近线

(D)　没有水平渐进线，两条铅直渐近线

考点：1. 水平渐近线的定义；2. 铅直渐近线的定义.

定义：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则称$y=A$为$f(x)$的水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称$x=x_0$为$f(x)$的铅直渐近线.

本题 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}=1$，故$y=1$为曲线的水平渐近线

$\lim\limits_{x\to -1}y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{2}\neq\infty$，故$x=-1$不是曲线的铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to 3}y=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)}{(x-3)}=\infty$，故$x=3$是曲线的铅直渐近线

6、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点附近有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1$，则（ C ）

（A）$f''(0)\neq 0$，但（0，$f(0)$）是曲线$y=f(x)$的拐点。

(B)　$f''(0)=0$，且$f(0)$是$f(x)$的极小值。

(C)　$f''(0)=0$，且（0，$f(0)$）是曲线$f(x)$的拐点。

(D)　$f''(0)\neq 0$，且$f(0)$是$f(x)$的极小值。

考点：拐点的判别方法。$f''(x_0)=0$,而$f'''(x_0)\neq 0$，则点$(x_0,f(x_0))$为曲线的拐点

与极值的第二判别方法类似 $f'(x_0)=0$,而$f''(x_0)\neq 0$，则点$(x_0,f(x_0))$为极值点

由$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=0$（?）

再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 点附近有二阶连续导数，得 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=0$，从而

$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=2f'''(0)$，

即 $f'''(0)=\dfrac{1}{2}\neq 0$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分） 在以下各小题中画有_______处填上答案。

1、若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{n}\right)^{kn}=e^{-10}$，则 $k=$____________.

考点：第二个重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\Delta)^{1/\Delta}=e$,其中$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta=0$

$e^{-10}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{n}\right)^{kn}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{-5}{n}\right)^{\frac{n}{-5}}\right\}^{-5k}=e^{-5k}$，故 $k=2$

2、$\int_{-2}^{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2}+|x|\right)dx=$____________.

考点：定积分的奇零偶倍性质

$\int_{-2}^{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2}+|x|\right)dx=\int_{-2}^{2}\dfrac{x}{1+x^2}dx+\int_{-2}^{2}|x|dx=0+2\int_0^2 xdx=x^2\Big|_0^2=4$

3、设 $F(x)=\int_0^{x^2}e^{-u^2}du$，则 $dF(x)=$________________.

考点：变上限函数的求导公式

若$F(x)=\int_0^{\varphi(x)}f(t)dt$,则$F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)\Rightarrow dF(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

本题 $dF(x)=2xe^{-x^4}\,dx$

4、已知函数 $f(x)=\sin^2 x$,则 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{\quad 2^{n-1}\sin(2x+\dfrac{n-1}{2}\pi)\quad}$.

考点：数学归纳法求函数的 n 阶导数

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$， $f''(x)=2\cos 2x=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})$，

$f^{(3)}(x)=2^2\cos(2x+\frac{\pi}{2})=2^2\sin(2x+2\times\frac{\pi}{2})$，

$f^{(4)}(x)=2^3\cos(2x+2\times\frac{\pi}{2})=2^3\sin(2x+3\times\frac{\pi}{2})$，

归纳法得 $f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin(2x+\frac{n-1}{2}\pi)$

5、若 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$ $\underline{\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x}+c\qquad\qquad}$.

考点：原函数的概念及分部积分法。

本题由已知得 $\int f(x)dx=\frac{\ln x}{x}+C\Rightarrow f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}+C\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\int xf'(x)dx=\int xd[f(x)]=xf(x)-\int f(x)dx$

$=x\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{\ln x}{x}+C=\frac{1-\ln x}{x}-\frac{\ln x}{x}+C=\frac{1-2\ln x}{x}+C$

6、 $y=f(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-\sin x+6y=0$ 所确定，则 $y'|_{x=0}=$ $\underline{\qquad 1/6 \qquad}$.

考点：隐函数方程求导方法

方程 $x^3+y^3-\sin x+6y=0$ 两边关于 x 求导得，

$3x^2+3y^2y'-\cos x+6y'=0$，于是 $y'=\frac{-3x^2+\cos x}{3y^2+6}$，

把 $x=0$代入方程 $x^3+y^3-\sin x+6y=0$，得 $y(y^2+6)=0\Rightarrow y=0$，

将 $x=0,y=0$代入y',得 $y'|_{x=0}=\frac{1}{6}$（很多同学没有求出 $y=0$，且代入所得的导数）

三、计算题（每小题 7 分，共 42 分）

1、计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$　　错误较多：用极限差的运算法则

解：

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)\cdots\cdots(2分)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\quad\left(\frac{0}{0}\right)\cdots\cdots(3分)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\cdots\cdots(5分)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2/2}{3x^2}=1/6\cdots\cdots(7分)$

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解题关键 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 要去掉绝对值符号，故要用左、右极限求解

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-1)=1\cdots\cdots(3分)$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}(0+1)=1\cdots\cdots(3分)$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1\cdots\cdots(7分)$

3、求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$

解：

令 $x=2\sin t, dx=2\cos t dt;$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx=\int\frac{4\sin^2 t}{(2\cos t)^3}2\cos t dt\cdots\cdots(3分)$$

$$=\int\tan^2 t dt=\int(\sec^2 t-1)dt$$

$$=\tan t-t+c\cdots\cdots(6分)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\arcsin\frac{x}{2}+c\cdots\cdots(7分)$$

4、计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}}dx$

解：

令 $\sqrt{3x+1}=t, x=\dfrac{1}{3}(t^2-1), dx=\dfrac{2}{3}tdt;$

当 $x=0$ 时，$t=1$; 当 $x=1$ 时，$t=2;\cdots\cdots(2分)$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}}dx=\int_1^2 e^t\cdot\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{3}(te^t\big|_1^2-\int_1^2 e^t dt)\cdots\cdots(5分)$$

$$=\frac{2}{3}(2e^2-e)-\frac{2}{3}(e^2-e)=\frac{2}{3}e^2\cdots\cdots(7分)$$

5、已知函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t;\frac{dx}{dt}=3a\cos^2 t(-\sin t)\cdots\cdots(2分)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t\cdots(4分)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(-\tan t)}{dt}\cdot\frac{1}{dx/dt}=-\sec^2 t\cdot\frac{1}{3a\cos^2 t(-\sin t)}$$

$$=3a^2\sec^4 t\csc t\cdots\cdots(7分)$$

6、求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺（peano）余项的 n 阶麦克劳林公式。

解：因为

$$(e^x)'=(e^x)''=\cdots=(e^x)^{(n)}=e^x\cdots(2分)$$

$$因而(e^x)^{(n)}\Big|_{x=0}=1,$$

所以带有佩亚诺余项的麦克劳林公式为：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+0(x^2)\cdots\cdots(5分)$$

$$有f(x)=xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+0(x^n)\cdots\cdots(7分)$$

四、应用题（第 1,2 题各 7 分，第 3 题 8 分共 22 分）

1、根据函数极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

证明：

$\forall\varepsilon>0,取\delta=\varepsilon,\cdots\cdots(2分)$

$当0<|x-2|<\delta时$

$能有\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x-2|<\delta=\varepsilon\cdots\cdots(6分)$

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4\cdots\cdots(7分)$

2、证明当 $x>0时,1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

$$令f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}\cdots\cdots(1分)$$

证明：$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdots\cdots(4分)$$

当 $x>0$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$为单调增加函数……(6分)；

因此，当 $x>0,$有$f(x)>f(0)=0$

所以$x>0$时,$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$……(7分)

3、D_1 是由 $y=2x^2,x=2,x=a,y=0$ 所围成的平面图形；D_2 是由 $y=2x^2,x=a,y=0$ 所围成的平面图形，其中 $0<a<2,$

（1）分别求D_1绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积V_1和D_2绕 y 轴旋转一周所生成的旋转体体积v_2；

（2）问a为何值时，v_1+v_2 最大，并求最大值。

解：由题意可知

（1）

$$v_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2dx=\frac{4}{5}\pi x^5\Big|_a^2=\frac{4}{5}\pi(32-a^5)\cdots(2分)$$

$$v_2=2\pi\int_0^a x\cdot 2x^2dx=\pi a^4\cdots(4分)$$

（2）

$$v=v_1+v_2=\frac{4}{5}\pi(32-a^5)+\pi a^4$$

$$v'=-4\pi a^4+4\pi a^3,\quad v''=4\pi a^2(3-4a)\cdots\cdots(6分)$$

令$v'=0,$解得$a=0,a=1,$但$v''(1)=-4\pi<0,$

所以当$a=1$时取得最大值，最大值为$v(1)=\dfrac{129}{5}\pi\cdots$(8分）