Curs 1

Diferenţe finite. Diferenţe divizate

Dacā E este o mulţime nevidă atunci

$$B(E) = \{F : E \to \mathbb{R} : f \text{ este mărginită}\}$$

este un spaţiu vectorial normal în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a funcţiilor. Mai mult, este spaţiu normat în raport cu norma

$$\|f\| = \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

Fie acum $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Notăm cu $C[a, b]$ mulţimea funcţiilor reale continue definite pe $[a, b]$. Atunci $(C[a, b], +, \cdot, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach în raport cu norma uniformă (numită şi Cebîşev)

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} . |f(x)|.$$

Apoi, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $C^n[a, b]$ clasa funcţiilor reale de n ori derivabile pe $[a, b]$ şi cu derivata de ordinul n continuă.

Pentru un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $C > 0$ şi $\alpha \in (0, 1]$ noăm cu $Lip_{C,\alpha}(I)$ clasa funcţiilor α-Lipschitz de constantă C pe I. Asta înseamnă că

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^{\alpha}, \ (\forall)\, x, y \in I.$$

Pentru $\alpha = 1$ spunem simplu funcţie Lipschitz (de constantă C) şi notăm cu $Lip_C(I)$ această clasă.

Dacă $I = [a, b]$ atunci $Lip_{C,\alpha}([a, b]) \subseteq C[a, b]$, $(\forall)$ $\alpha \in (0, 1]$. Apoi, se demonstrează uşor că $C^1[a, b] \subseteq Lip_{\|f'\|}([a, b])$.

Pentru $p \geq 1$ considerăm mulţimea $L_p[a, b]$ conţinând funcţiile p-integrabile. Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este $p-$integrabilă dacă există în $\mathbb{R}$ integrala Lebesgue $\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx$. $\left(L_p[a, b], +, \cdot, \|\cdot\|_p\right)$ este spaţiu Banach în raport cu norma

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Diferenţe finite

Pentru $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ şi $r \geq 1$ natural, considerăm mulţimea

$$M_x := \left\{x + kh : k = \overline{0, r}\right\}$$

şi funcţia $f : E \to \mathbb{R}$ astfel încât $M_x \subseteq E$.

Diferenţa finită de ordinul 1 cu pasul h a funcţiei f pe punctul x este

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Uneori, se poate folosi şi un indice superior pentru a sublinia faptul că diferenţa finită este de ordinul 1 şi atunci notăm $\Delta_h^1 f(x)$.

Diferenţa finită de ordinul k $(2 \le k \le r)$ cu pasul h a funcţiei f pe punctul x este

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h \left(\Delta_h^{k-1} f\right)(x). \tag{1}$$

Propoziţia 1.

(i) Pentru $p, k \in \mathbb{N}$, $1 \le p + k \le r$, avem

$$\Delta_h^p \left(\Delta_h^k f\right)(x) = \Delta_h^k \left(\Delta_h^p f\right)(x) = \Delta_h^{k+p} f(x).$$

(ii) Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \le k \le r$, avem

$$\begin{aligned} \Delta_h^k f(x) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f\left(x + (k-i)h\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} f\left(x + jh\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Ambele proprietăţi se demonstrează uşor prin inducţie matematică.

Diferenţe divizate

Definiţia 2. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, ..., x_n \in I$, distincte două câte două (numite noduri distincte în continuare) şi $f : I \to \mathbb{R}$. Diferenţa divizată de ordinul p a funcţiei f pe nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$, se defineşte astfel:

pentru $p = 0$, $[x_0; f] := f(x_0)$;

pentru $p = 1$, $[x_0, x_1; f] := f(x_1) - f(x_0)$;

pentru $p = 2$,

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] := \frac{[x_1, ..., x_p; f] - [x_0, x_1, ..., x_{p-1}; f]}{x_p - x_0}.$$

Propoziţia 2.

(i) Avem

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] = \sum_{i=0}^{p} \frac{f(x_i)}{u'(x_i)},$$

unde

$$u(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),\ x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Avem

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] = \frac{W\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)}{V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)},$$

unde $V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ este determinantul Vandermonde corespunzător numerelor $x_0, .., x_p$ şi $W\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ se obţine din $V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ înlocuind în $V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ elementele ultimei coloane cu valorile $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_p)$.

(iii) Dacă $f \in C^p\left([a, b]\right)$ atunci există ξ cuprins între nodul cel mai mic şi nodul cel mai mare astfel încât

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}.$$

(iv)
$$\Delta_h^p f(x) = p!h^p \left[x, x+h, ..., x+ph; f\right].$$

Din proprietatea (i) rezultă uşor că $[x_0, x_1, ..., x_p; f]$ nu depinde de ordinea nodurilor iar din (iii) rezultă imediat că $[x_0, x_1, ..., x_p; f]$ este o valoare constantă indiferent de noduri dacă $f \in \mathbb{R}_n[x]$.

Definiţia 3. (T. Popoviciu) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $p \in \mathbb{N}^*$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Spunem că f este convexă (concavă) de ordinul p dacă

$$[x_0, x_1, ..., x_p, x_{p+1}; f] \geq 0 \ (\leq 0), \ (\forall)\, x_0, ..., x_{p+1} \in I.$$

Pentru $p = 0$ obţinem funcţiile crescătoare (descrescătoare) pe I iar pentru $p = 1$ obţinem funcţiile convexe (concave) pe I.

Temă

1. Pentru $x = 1$, $h = 1$ ş i$f(x) = x^2$ să se calculeze $\Delta_h^3 f(x)$ aplicǎnd iterativ formula (1) iar apoi prin aplicarea directă a formulei (2). Încercaţi apoi să scrieţi un program în care datele de intrare să fie x,h şi k iar data de ieşire (afişare) să fie $\Delta_h^3 f(x)$ unde $f(x) = x^2$. Puteţi încerca şi cu alte funcţii dar să ţineţi cont de faptul că trebuie ca domeniul lor de definiţie să conţină toate valorille în care calculaţi valorile funcţiei.

2. Aplicǎnd Definiţia 2 calculaţi $\left[1, \frac{3}{2}, 2, 3; f\right]$ pentru $f(x) = \frac{1}{x}$.

   Indicaţie: Scrieţi un program care să aplice iterativ Definiţia 2.

3. Fie $a_0, a_1, a_2 \in [0, 1]$. Să se demonstreze că $\left[a_0, a_1, a_2; x^3\right] \leq 3$ (deci, $f(x) = x^3$ pentru această diferenţă divizată).

4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$. Demonstraţi că f este convexă pe I dacă şi numai dacă $[x_0, x_1, x_2; f] \geq 0$, pentru orice noduri distincte x_0, x_1, x_2 din I.

   Indicaţie: Vă reaminstesc că f este convexă dacă

   $$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \ (\forall)\, x, y \in I, \alpha \in [0, 1].$$

   Secretul este să alegeţi nodurile x_0, x_1, x_2, astfel încât din calculul diferenţei divizate să ajungem la relaţia de mai sus.

Curs 2
Interpolare polinomială

Polinomul de interpolare Lagrange

Fie numerele reale $x_0, x_1, ..., x_n$, distincte două câte două şi să le asociem numerele reale $y_0, y_1, ..., y_n$. Căutăm un polinom P de gradul n astfel încât $P(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Se observă uşor că un astfel de polinom este

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \right) \cdot y_i.$$

Dacă există $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, atunci notăm $P = L_n(f, x_0, ..., x_n)$ sau, cînd nu este pericol de confuzie $P = L_n(f)$ şi numim acest polinom ca fiind polinomul de intrpolare Lagrange a funcţiei f pe nodurile $x_0, ..., x_n$. Astfel, avem

$$\begin{aligned} L_n f(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \cdot f(x_i), \\ (\forall) \, x &\in [a, b]. \end{aligned}$$

Dacă notăm $u(x) = (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ şi $u_i(x) = \frac{u(x)}{x - x_i}$, $i = \overline{0, n}$, obţinem

$$L_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} \cdot f(x_i), \;\; (\forall) \, x \in [a, b].$$

De exemplu, dacă $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ şi $f(x_0) = y_0 = 2$, $f(x_1) = y_1 = 0$, $f(x_2) = y_2 = 1$, avem

$u(x) = (x + 1) (x - 1)(x - 2)$,

$u_0(x) = (x - 1)(x - 2)$,

$u_1(x) = (x + 1)(x - 2)$,

$u_2(x) = (x + 1)(x - 1)$.

Astfel

$$\begin{aligned} L_2 f(x) &= \frac{u_0(x)}{u_0(x_0)} \cdot y_0 + \frac{u_1(x)}{u_1(x_1)} \cdot y_1 + \frac{u(x)}{u_2(x_2)} \cdot y_2 \\ &= \frac{(x - 1)(x - 2)}{6} \cdot 2 - \frac{(x + 1)(x - 2)}{2} \cdot 0 + \frac{(x + 1)(x - 1)}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{2x^2}{3} - x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Polinomul lui Lagrange se poate scrie şi cu ajutorul diferenţelor divizate. Considerând nodurile distincte $x_0, ..., x_n$, pentru $i, i + k \in \{0, ..., n\}$ notăm

$$[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}; f] = D^k f(x_i).$$

Atunci, are loc formula

$$\begin{aligned} L_n f(x) &= f(x_0) + D^1 f(x_0)\,(x - x_0) + D^2 f(x_0)\,(x - a_0)\,(x - x_1) + \cdots + \\ &\quad + D^n f(x_0)\,(x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Formula de mai sus se numeşte formula lui Newton pentru polinomul de interpolare Lagrange. De obicei în acest caz polinomul Lagrange se notează $N_n f(x)$.

Estimarea erorii în interpolarea Lagrange

Desigur putem scrie

$$f(x) = L_n f(x) + R_n f(x),\ x \in [a,b].$$

iar expresia $R_n f(x)$ se numeşte restul în formula de interpolare Lagrange pentru $x \in [a,b]$.

Teorema 1. Dacă $f \in C^{n+1}[a,b]$ şi $x \in [a,b]$ atunci există $\eta \in (a,b)$ astfel încât

$$|R_n f(x)| = \frac{|u(x)|}{(n+1)!} \cdot \left| f^{(n+1)}(\eta) \right|. \tag{3}$$

Polinomul Cebîşev de speţa întâi

Pornind de la estimarea din relaţia (3), în cazul particular $a = -1$, $b = 1$ se pune problema să determinăm nodurile $x_1, ..., x_n$, astfel încât $\|u\| \le \|v\|$ pentru orice polinom

$$\begin{aligned} v(x) &= (x - t_1)\,(x - t_2) \cdots (x - t_n), \\ & \quad t_1, ..., t_n \in [-1, 1]\,, \end{aligned}$$

unde

$$u(x) = (x - x_1)\,(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Cebîşev a demonstrat că aceste noduri sunt

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\,\pi}{2n} \right),\ i = \overline{1,n}.$$

Se observă imediat că $T_n(x_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$, unde

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right),\ n \in \mathbb{N}^*, x \in [-1,1]\,.$$

Folosind substituţia $x = \cos\theta$, obţinem $\theta = \arccos x$ şi apoi $T_n(x) = \cos(n\theta)$. Tinând cont de binecunoscutele formule

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\,\theta) &= \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta, \\ \cos((n-1)\,\theta) &= \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta, \end{aligned}$$

prin însumare obţinem

$$\cos((n+1)\,\theta) + \cos((n-1)\,\theta) = 2\cos n\theta \cos\theta$$

ceea ce implică faptul că

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x),\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*, x \in [-1, 1]\,,$$

şi apoi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*, x \in [-1, 1]\,,$$

unde $T_0(x) = 1$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$.

Aplicând această relaţie de recurenţă pentru $n = 2, 3, ...$, obţinem

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Luînd

$$\overline{T_n} = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

se obţine polinomul căutat şsi numit polinomul lui Cebîşev de speţa întâi. În plus, se verifică uşor că

$$\left\| \overline{T_n} \right\| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

iar de aici, folosind acest rezultat în (3), rezultă că

$$|R_n f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left\| f^{(n+1)} \right\|.$$

Polinomul de interpolare Hermite

Fie nodurile distincte $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$ pentru care se cunosc valorile
$f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(r_0)}(x_0)$
$f(x_1), f'(x_1), ..., f^{(r_1)}(x_1)$
.
.
.
$f(x_m), f'(x_m), ..., f^{(r_m)}(x_1)$
$n + 1 = \sum\limits_{i=0}^{m} (r_i + 1)\,.$

Căutăm un polinom $H_n f : [x_0, x_m] \to \mathbb{R}$, de grad n astfel încât

$$H_n^{(j)} f(x_k) = f^{(j)}(x_k), (\forall)\, j = \overline{0, r_k}, k = \overline{0, m}.$$

Considerăm

$$\begin{aligned} u(x) &= (x - x_0)^{r_0+1} (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_m)^{r_m+1}, \\ u_k(x) &= \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k+1}}, k = \overline{0, m}. \end{aligned}$$

Polinomul

$$H_n f(x) = \sum_{k=0}^{m} \left[u_k(x) \cdot \left(\sum_{j=0}^{r_k} \frac{(x - x_k)^j}{j!} \cdot \left(\frac{f(t)}{u_k(t)} \right)^{(j)}_{|t=x_k} \right) \right]$$

este polnomul căutat şi se numeşte polinomul de interpolare Hermite.

Notăm restul cu $R_n f(x)$, ceea ce înseamnă că $f(x) = H_n f(x) + R_n f(x)$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. Mai mult, avem

$$|R_n f(x)| \leq \frac{|u(x)|}{(n+1)!} \cdot \left\| f^{(n+1)} \right\|, \ \ (\forall)\, x \in [a, b] \, .$$

Cazuri particulare

Dacă $m = 0$ şi $r_0 = n$ se obţine polinomul lui Taylor în jurul lui x_0 (dacă $x_0 = 0$ se numeşte polinomul Maclaurin) notat $T_n f(x)$, unde

$$T_n f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0).$$

Dacă $r_0 = \cdots = r_m = 1$, $n = 2m + 1$ se obţine polinomul de interpolare hermite pe nodurile duble $x_0, ..., x_m$, şi anume

$$H_{2m+1} f(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(u_k(x) \cdot \frac{f(x_k)}{u_k(x_k)} + (x - x_k) \left(\frac{f(t)}{u_k(t)} \right)'_{|t = x_k} \right).$$

Seminar 2

Funcţii spline

Fie diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$, $\Delta = (x_0, ..., x_n)$, unde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

şi fie valorile reale $y_0, y_1, ..., y_n$.

Definiţia 1. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ funcţia $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ este funcţie spline polinomială de grad k dacă

i) $S \in C^{k-1}[a,b]$;

ii) $S\big|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ este polinom de grad cel mult k, $i = 1, ..., n$.

iii) $S(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$.

Dacă $f \in C[a,b]$ astfel încât $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$ atunci S se numeşte spline de interpolare a funcţiei f pe diviziunea Δ.

Cazuri particulare

Dacă $k = 1$ şi $\operatorname{grad} S_i \leq 1$, $i = 1, ..., n$, se obţine interpolarea spline poligonală pe porţiuni. În acest caz, dacă $f \in C^2[a,b]$, avem

$$|S(x) - f(x)| \leq \left| \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2} \right| \|f''\|, \ (\forall)\, x \in [x_{i-1}, x_i], \ i = \overline{1,n}.$$

De aici rezultă uşor că

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot \|f''\|, (\forall)\, x \in [a,b],$$

unde

$$h = \|\Delta\| = \max\left\{x_i - x_{i-1} : i = \overline{1,n}\right\}.$$

Pentru $k = 3$ şi $S \in C^2[a,b]$ se obţine interpolarea spline cubică.

În final, prezentăm un rezultat interesant de interplare al lui Passaw.

Teorema 2 (Passaw). Fie diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$, $\Delta = (x_0, ..., x_n)$, unde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

şi fie valorile reale $y_0, y_1, ..., y_n$. Atunci pentru orice $l \in \mathbb{N}$ există o funcţie $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) $S \in C^l[a,b]$;

ii) $S\big|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ este polinom de grad cel mult m, unde $m \geq 2l + 1$, $i = 1, ..., n$;

iii) $S(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$;

iv) Pentru orice $i \in \{0, ..., n-1\}$, dacă $y_i \leq y_{i+1}$ atunci S este crescătoare pe $[x_i, x_{i+1}]$ iar dacă $y_i \geq y_{i+1}$ atunci S este descrescătoare pe $[x_i, x_{i+1}]$.

Temă

1. Folosind formula lui Newton să se se determine polinomul lui Lagrange asociat funcţiei f pe nodurile $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, ştiind că $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 2$.

2. Folosind polinomul Maclaurin asociat funcţiei $f(x) = e^x$ calculaţi $\int_0^1 e^{x^2} dx$ cu două zecimale exacte.

3. Cu ce eroare se poate calcula $\sqrt{115}$ cu ajutorul formulei de interpolare Lagrange considerând funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ şi nodurile de interpolare $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$.

4. Considerând funcţia f şi nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$ să se demonstreze că polinomul de interpolare Lagrange verifică relaţia de recurenţă

$$\begin{aligned} & (x_n - x_0)\, L_n(f, x_0, ..., x_n)(x) \\ = \ & (x - x_0) L_n(f, x_1, ..., x_n)(x) - (x - x_n) L_n(f, x_0, ..., x_{n-1})(x). \end{aligned}$$