Curs 1

Diferenţe finite. Diferenţe divizate

Dacā E este o mulţime nevidă atunci

$$B(E) = \{F : E \to \mathbb{R} : f \text{ este mărginită}\}$$

este un spaţiu vectorial normal în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a funcţiilor. Mai mult, este spaţiu normat în raport cu norma

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|\,.$$

Fie acum $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Notăm cu $C[a,b]$ mulţimea funcţiilor reale continue definite pe $[a,b]$. Atunci $(C[a,b], +, \cdot, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach în raport cu norma uniformă (numită şi Cebîşev)

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} \cdot |f(x)|\,.$$

Apoi, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $C^n[a,b]$ clasa funcţiilor reale de n ori derivabile pe $[a,b]$ şi cu derivata de ordinul n continuă.

Pentru un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $C > 0$ şi $\alpha \in (0,1]$ noăm cu $Lip_{C,\alpha}(I)$ clasa funcţiilor α-Lipschitz de constantă C pe I. Asta înseamnă că

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}\,,\ (\forall)\, x, y \in I.$$

Pentru $\alpha = 1$ spunem simplu funcţie Lipschitz (de constantă C) şi notăm cu $Lip_C(I)$ această clasă.

Dacă $I = [a,b]$ atunci $Lip_{C,\alpha}([a,b]) \subseteq C[a,b]$, $(\forall)$ $\alpha \in (0,1]$. Apoi, se demonstrează uşor că $C^1[a,b] \subseteq Lip_{\|f'\|}([a,b])$.

Pentru $p \geq 1$ considerăm mulţimea $L_p[a,b]$ conţinând funcţiile p-integrabile. Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este $p-$integrabilă dacă există în $\mathbb{R}$ integrala Lebesgue $\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx$. $\left(L_p[a,b], +, \cdot, \|\cdot\|_p\right)$ este spaţiu Banach în raport cu norma

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Diferenţe finite

Pentru $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ şi $r \geq 1$ natural, considerăm mulţimea

$$M_x := \left\{x + kh : k = \overline{0, r}\right\}$$

şi funcţia $f : E \to \mathbb{R}$ astfel încât $M_x \subseteq E$.

Diferenţa finită de ordinul 1 cu pasul h a funcţiei f pe punctul x este

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Uneori, se poate folosi şi un indice superior pentru a sublinia faptul că diferenţa finită este de ordinul 1 şi atunci notăm $\Delta_h^1 f(x)$.

Diferenţa finită de ordinul k $(2 \leq k \leq r)$ cu pasul h a funcţiei f pe punctul x este

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h \left(\Delta_h^{k-1} f\right)(x). \tag{1}$$

Propoziţia 1.

(i) Pentru $p, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p+k \leq r$, avem

$$\Delta_h^p \left(\Delta_h^k f\right)(x) = \Delta_h^k \left(\Delta_h^p f\right)(x) = \Delta_h^{k+p} f(x).$$

(ii) Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq r$, avem

$$\begin{aligned} \Delta_h^k f(x) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f\left(x+(k-i)h\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f\left(x+jh\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Ambele proprietăţi se demonstrează uşor prin inducţie matematică.

Diferenţe divizate

Definiţia 2. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, ..., x_n \in I$, distincte două câte două (numite noduri distincte în continuare) şi $f : I \to \mathbb{R}$. Diferenţa divizată de ordinul p a funcţiei f pe nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$, se defineşte astfel:

pentru $p = 0$, $[x_0; f] := f(x_0)$;

pentru $p = 1$, $[x_0, x_1; f] := f(x_1) - f(x_0)$;

pentru $p = 2$,

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] := \frac{[x_1, ..., x_p; f] - [x_0, x_1, ..., x_{p-1}; f]}{x_p - x_0}.$$

Propoziţia 2.

(i) Avem

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] = \sum_{i=0}^{p} \frac{f(x_i)}{u'(x_i)},$$

unde

$$u(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),\ x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Avem

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] = \frac{W\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)}{V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)},$$

unde $V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ este determinantul Vandermonde corespunzător numerelor $x_0, .., x_p$ şi $W\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ se obţine din $V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ înlocuind în $V\left(x_0, x_1, ..., x_p; f\right)$ elementele ultimei coloane cu valorile $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_p)$.

(iii) Dacă $f \in C^p\left([a, b]\right)$ atunci există ξ cuprins între nodul cel mai mic şi nodul cel mai mare astfel încât

$$[x_0, x_1, ..., x_p; f] = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}.$$

(iv)
$$\Delta_h^p f(x) = p!h^p \left[x, x+h, ..., x+ph; f\right].$$

Din proprietatea (i) rezultă uşor că $[x_0, x_1, ..., x_p; f]$ nu depinde de ordinea nodurilor iar din (iii) rezultă imediat că $[x_0, x_1, ..., x_p; f]$ este o valoare constantă indiferent de noduri dacă $f \in \mathbb{R}_n[x]$.

Definiţia 3. (T. Popoviciu) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $p \in \mathbb{N}^*$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Spunem că f este convexă (concavă) de ordinul p dacă

$$[x_0, x_1, ..., x_p, x_{p+1}; f] \geq 0 \ (\leq 0), \ (\forall)\, x_0, ..., x_{p+1} \in I.$$

Pentru $p = 0$ obţinem funcţiile crescătoare (descrescătoare) pe I iar pentru $p = 1$ obţinem funcţiile convexe (concave) pe I.

Temă

1. Pentru $x = 1$, $h = 1$ ş i$f(x) = x^2$ să se calculeze $\Delta_h^3 f(x)$ aplicănd iterativ formula (1) iar apoi prin aplicarea directă a formulei (2). Încercaţi apoi să scrieţi un program în care datele de intrare să fie x,h şi k iar data de ieşire (afişare) să fie $\Delta_h^3 f(x)$ unde $f(x) = x^2$. Puteţi încerca şi cu alte funcţii dar să ţineţi cont de faptul că trebuie ca domeniul lor de definiţie să conţină toate valorille în care calculaţi valorile funcţiei.

2. Aplicănd Definiţia 2 calculaţi $\left[1, \frac{3}{2}, 2, 3; f\right]$ pentru $f(x) = \frac{1}{x}$.

   Indicaţie: Scrieţi un program care să aplice iterativ Definiţia 2.

3. Fie $a_0, a_1, a_2 \in [0, 1]$. Să se demonstreze că $\left[a_0, a_1, a_2; x^3\right] \leq 3$ (deci, $f(x) = x^3$ pentru această diferenţă divizată).

4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$. Demonstraţi că f este convexă pe I dacă şi numai dacă $[x_0, x_1, x_2; f] \geq 0$, pentru orice noduri distincte x_0, x_1, x_2 din I.

   Indicaţie: Vă reaminstesc că f este convexă dacă

   $$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \ (\forall)\, x, y \in I, \alpha \in [0, 1].$$

   Secretul este să alegeţi nodurile x_0, x_1, x_2, astfel încât din calculul diferenţei divizate să ajungem la relaţia de mai sus.

Curs 2
Interpolare polinomială

Polinomul de interpolare Lagrange

Fie numerele reale $x_0, x_1, ..., x_n$, distincte două câte două şi să le asociem numerele reale $y_0, y_1, ..., y_n$. Căutăm un polinom P de gradul n astfel încât $P(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Se observă uşor că un astfel de polinom este

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \right) \cdot y_i.$$

Dacă există $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, atunci notăm $P = L_n(f, x_0, ..., x_n)$ sau, cînd nu este pericol de confuzie $P = L_n(f)$ şi numim acest polinom ca fiind polinomul de intrpolare Lagrange a funcţiei f pe nodurile $x_0, ..., x_n$. Astfel, avem

$$\begin{aligned} L_n f(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \cdot f(x_i), \\ (\forall) \, x &\in [a, b]. \end{aligned}$$

Dacă notăm $u(x) = (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ şi $u_i(x) = \frac{u(x)}{x - x_i}$, $i = \overline{0, n}$, obţinem

$$L_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} \cdot f(x_i), \ (\forall) \, x \in [a, b].$$

De exemplu, dacă $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ şi $f(x_0) = y_0 = 2$, $f(x_1) = y_1 = 0$, $f(x_2) = y_2 = 1$, avem

$u(x) = (x + 1) (x - 1)(x - 2)$,
$u_0(x) = (x - 1)(x - 2)$,
$u_1(x) = (x + 1)(x - 2)$,
$u_2(x) = (x + 1)(x - 1)$.

Astfel

$$\begin{aligned} L_2 f(x) &= \frac{u_0(x)}{u_0(x_0)} \cdot y_0 + \frac{u_1(x)}{u_1(x_1)} \cdot y_1 + \frac{u(x)}{u_2(x_2)} \cdot y_2 \\ &= \frac{(x - 1)(x - 2)}{6} \cdot 2 - \frac{(x + 1)(x - 2)}{2} \cdot 0 + \frac{(x + 1)(x - 1)}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{2x^2}{3} - x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Polinomul lui Lagrange se poate scrie şi cu ajutorul diferenţelor divizate. Considerând nodurile distincte $x_0, ..., x_n$, pentru $i, i + k \in \{0, ..., n\}$ notăm

$$[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}; f] = D^k f(x_i).$$

Atunci, are loc formula

$$\begin{aligned} L_n f(x) &= f(x_0) + D^1 f(x_0)(x - x_0) + D^2 f(x_0)(x - a_0)(x - x_1) + \cdots + \\ &\quad + D^n f(x_0)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Formula de mai sus se numeşte formula lui Newton pentru polinomul de interpolare Lagrange. De obicei în acest caz polinomul Lagrange se notează $N_n f(x)$.

Estimarea erorii în interpolarea Lagrange

Desigur putem scrie

$$f(x) = L_n f(x) + R_n f(x),\ x \in [a, b].$$

iar expresia $R_n f(x)$ se numeşte restul în formula de interpolare Lagrange pentru $x \in [a, b]$.

Teorema 1. Dacă $f \in C^{n+1}[a, b]$ şi $x \in [a, b]$ atunci există $\eta \in (a, b)$ astfel încât

$$|R_n f(x)| = \frac{|u(x)|}{(n+1)!} \cdot \left| f^{(n+1)}(\eta) \right|. \tag{3}$$

Polinomul Cebîşev de speţa întâi

Pornind de la estimarea din relaţia (3), în cazul particular $a = -1$, $b = 1$ se pune problema să determinăm nodurile $x_1, ..., x_n$, astfel încât $\|u\| \leq \|v\|$ pentru orice polinom

$$\begin{aligned} v(x) &= (x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_n), \\ & \quad t_1, ..., t_n \in [-1, 1], \end{aligned}$$

unde

$$u(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Cebîşev a demonstrat că aceste noduri sunt

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right),\ i = \overline{1, n}.$$

Se observă imediat că $T_n(x_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$, unde

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ n \in \mathbb{N}^*, x \in [-1, 1].$$

Folosind substituţia $x = \cos\theta$, obţinem $\theta = \arccos x$ şi apoi $T_n(x) = \cos(n\theta)$. Tinând cont de binecunoscutele formule

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta, \\ \cos((n-1)\theta) &= \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta, \end{aligned}$$

prin însumare obţinem

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos n\theta \cos\theta$$

ceea ce implică faptul că

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x),\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*, x \in [-1,1]\,,$$

şi apoi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*, x \in [-1,1]\,,$$

unde $T_0(x) = 1$, $(\forall)\, x \in [-1,1]$.

Aplicând această relaţie de recurenţă pentru $n = 2, 3, ...$, obţinem

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Luînd

$$\overline{T_n} = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

se obţine polinomul căutat şsi numit polinomul lui Cebîşev de speţa întâi. În plus, se verifică uşor că

$$\left\| \overline{T_n} \right\| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

iar de aici, folosind acest rezultat în (3), rezultă că

$$|R_n f(x)| \le \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left\| f^{(n+1)} \right\|.$$

Polinomul de interpolare Hermite

Fie nodurile distincte $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$ pentru care se cunosc valorile
$f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(r_0)}(x_0)$
$f(x_1), f'(x_1), ..., f^{(r_1)}(x_1)$
.
.
.
$f(x_m), f'(x_m), ..., f^{(r_m)}(x_1)$
$n + 1 = \sum\limits_{i=0}^{m} (r_i + 1)\,.$

Căutăm un polinom $H_n f : [x_0, x_m] \to \mathbb{R}$, de grad n astfel încât

$$H_n^{(j)} f(x_k) = f^{(j)}(x_k), (\forall)\, j = \overline{0, r_k}, k = \overline{0, m}.$$

Considerăm

$$\begin{aligned} u(x) &= (x - x_0)^{r_0+1} (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_m)^{r_m+1}, \\ u_k(x) &= \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k+1}}, k = \overline{0, m}. \end{aligned}$$

Polinomul

$$H_n f(x) = \sum_{k=0}^{m} \left[u_k(x) \cdot \left(\sum_{j=0}^{r_k} \frac{(x - x_k)^j}{j!} \cdot \left(\frac{f(t)}{u_k(t)} \right)^{(j)}_{|t=x_k} \right) \right]$$

este polnomul căutat şi se numeşte polinomul de interpolare Hermite.

Notăm restul cu $R_n f(x)$, ceea ce înseamnă că $f(x) = H_n f(x) + R_n f(x)$, $(\forall)\, x \in [a,b]$. Mai mult, avem

$$|R_n f(x)| \leq \frac{|u(x)|}{(n+1)!} \cdot \left\| f^{(n+1)} \right\|, \ \ (\forall)\, x \in [a,b]\,.$$

Cazuri particulare

Dacă $m = 0$ şi $r_0 = n$ se obţine polinomul lui Taylor în jurul lui x_0 (dacă $x_0 = 0$ se numeşte polinomul Maclaurin) notat $T_n f(x)$, unde

$$T_n f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0).$$

Dacă $r_0 = \cdots = r_m = 1$, $n = 2m+1$ se obţine polinomul de interpolare hermite pe nodurile duble $x_0, ..., x_m$, şi anume

$$H_{2m+1} f(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(u_k(x) \cdot \frac{f(x_k)}{u_k(x_k)} + (x - x_k) \left(\frac{f(t)}{u_k(t)} \right)'_{|t=x_k} \right).$$

Seminar 2

Funcţii spline

Fie diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$, $\Delta = (x_0, ..., x_n)$, unde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

şi fie valorile reale $y_0, y_1, ..., y_n$.

Definiţia 1. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ funcţia $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ este funcţie spline polinomială de grad k dacă

i) $S \in C^{k-1}[a,b]$;

ii) $S\big|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ este polinom de grad cel mult k, $i = 1, ..., n$.

iii) $S(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$.

Dacă $f \in C[a,b]$ astfel încât $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$ atunci S se numeşte spline de interpolare a funcţiei f pe diviziunea Δ.

Cazuri particulare

Dacă $k = 1$ şi $\operatorname{grad} S_i \leq 1$, $i = 1, ..., n$, se obţine interpolarea spline poligonală pe porţiuni. În acest caz, dacă $f \in C^2[a,b]$, avem

$$|S(x) - f(x)| \leq \left| \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2} \right| \|f''\|, \ (\forall)\, x \in [x_{i-1}, x_i], \ i = \overline{1,n}.$$

De aici rezultă uşor că

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot \|f''\|, (\forall)\, x \in [a,b],$$

unde

$$h = \|\Delta\| = \max\left\{x_i - x_{i-1} : i = \overline{1,n}\right\}.$$

Pentru $k = 3$ şi $S \in C^2[a,b]$ se obţine interpolarea spline cubică.

În final, prezentăm un rezultat interesant de interplare al lui Passaw.

Teorema 2 (Passaw). Fie diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$, $\Delta = (x_0, ..., x_n)$, unde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

şi fie valorile reale $y_0, y_1, ..., y_n$. Atunci pentru orice $l \in \mathbb{N}$ există o funcţie $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) $S \in C^l[a,b]$;

ii) $S\big|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ este polinom de grad cel mult m, unde $m \geq 2l + 1$, $i = 1, ..., n$;

iii) $S(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$;

iv) Pentru orice $i \in \{0, ..., n-1\}$, dacă $y_i \leq y_{i+1}$ atunci S este crescătoare pe $[x_i, x_{i+1}]$ iar dacă $y_i \geq y_{i+1}$ atunci S este descrescătoare pe $[x_i, x_{i+1}]$.

Temă

1. Folosind formula lui Newton să se se determine polinomul lui Lagrange asociat funcţiei f pe nodurile $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, ştiind că $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 2$.

2. Folosind polinomul Maclaurin asociat funcţiei $f(x) = e^x$ calculaţi $\int_0^1 e^{x^2} dx$ cu două zecimale exacte.

3. Cu ce eroare se poate calcula $\sqrt{115}$ cu ajutorul formulei de interpolare Lagrange considerând funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ şi nodurile de interpolare $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$.

4. Considerând funcţia f şi nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$ să se demonstreze că polinomul de interpolare Lagrange verifică relaţia de recurenţă

$$\begin{aligned} & (x_n - x_0)\, L_n(f, x_0, ..., x_n)(x) \\ = \; & (x - x_0) L_n(f, x_1, ..., x_n)(x) - (x - x_n) L_n(f, x_0, ..., x_{n-1})(x). \end{aligned}$$

Curs 3
Modulul de continuitate

Fie I un interval din $\mathbb{R}$. Noăm cu $B(I)$ mulţimea funcţiilor mărginite pe I, cu $C(I)$, mulţimea funcţiilor continue pe I şi cu $C_B(I)$ mulţime funcţiilor continue şi mărginite pe I. Dacă I este un interval compact reamintim că $C_B(I) = C(I)$.

Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte uniform continuă pe I dacă $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, (\forall)\, x_1, x_2 \in I, \text{ astfel încât } \ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon).$$

Orice funcţie uniform continuă pe I este continuă pe I. Reciproca este în general valabilă doar dacă I este interval compact.

Definiţia 1 Fie $f \in C_B(I)$ unde I este interval din $\mathbb{R}$. Funcţia $\omega_f : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$\omega_f(\delta) = \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, \ |x_1 - x_2| \le \delta\}$$

se numeşte modulul de continuitate al lui f. Pentru $\omega_f(\delta)$ se mai folseşte şi notaţia $\omega(f; \delta)$.

Se observă uşor că

$$\omega_f(h) = \sup \{|f(x + h) - f(x)| : x, x + h \in I, \, 0 \le h \le \delta\}.$$

Dacă I este interval compact atunci în formula lui $\omega_f(\delta)$ (în ambele) se poate scrie "max" în loc de "sup".

Teorema 2 Dacă $f \in C_B(I)$ atunci au loc proprietăţile:

1) $\omega_f \ge 0$;

2) $\omega_f(0) = 0$;

3) ω_f este crescătoare;

4) $\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \le \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$, $(\forall)\,\delta_1, \delta_2 \in [0, \infty)$ (adică ω_f este subaditivă);

5) ω_f este uniform continuă pe I;

6) $\omega_f(n\delta) \le n\omega_f(\delta)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, $\delta \ge 0$;

7) $\omega_f(\lambda\delta) \le (\lambda + 1)\,\omega_f(\delta)$, $(\forall)\,\lambda$, $\delta \ge 0$;

8)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le \left(1 + \delta^{-1} |x - y|\right) \omega_f(\delta), \\ (\forall)\, x, y &\in I, \delta > 0; \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le \left(1 + \delta^{-2} |x - y|^2\right) \omega_f(\delta), \\ (\forall)\, x, y &\in I, \delta > 0; \end{aligned}$$

10)

$$f \in Lip_{M,\alpha}(I) \Longleftrightarrow \omega_f(\delta) \le M\delta^\alpha.$$

Demonstrăm o parte din aceaste proprietăţi

3) Fie $\delta_1, \delta_2 \geq 0$, $\delta_1 \leq \delta_2$ şi mulţimile

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x_1, x_2) \in I \times I,\ |x_1 - x_2| \leq \delta_1\}, \\ D_2 &= \{(x_1, x_2) \in I \times I,\ |x_1 - x_2| \leq \delta_2\}. \end{aligned}$$

Evident $D_1 \subseteq D_2$ ceea ce înseamnă că

$$\sup_{(x_1,x_2)\in D_1} |f(x_1) - f(x_2)| \leq \sup_{(x_1,x_2)\in D_2} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

de unde rezultă imediat că $\omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_2)$, adică ω_f este crescătoare.

4) Fie $x_1, x_2 \in I$, astfel încât $|x_1 - x_2| \leq \delta_1 + \delta_2$. Dacă $|x_1 - x_2| \leq \delta_1$ atunci evident avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2).$$

Dacă $|x_1 - x_2| > \delta_1$ fie atunci y cuprins între x_1 şi x_2 astfel încât $|x_1 - y| = \delta_1$. Rezultă uşor atunci că $|x_2 - y| \leq \delta_2$, şi astfel obţinem

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - f(y)| + |f(y) - f(x_2)| \\ &\leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2). \end{aligned}$$

Deci, în general avem $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$ şi deoarece $x_1, x_2 \in I$, cu $|x_1 - x_2| \leq \delta_1 + \delta_2$, au fost alese arbitrar, prin trecerea la supremum rezultă imediat că

$$\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2).$$

6) Ţinând cont de 4), avem

$$\omega_f(2\delta) = \omega_f(\delta + \delta) \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta) = 2\omega_f(\delta).$$

Din aproape în aproape (sau folosind inducţia matematică) obţinem uşor inegalitatea dorită.

7) Ţinând cont de monotonia lui ω_f şi de proprietatea 6) rezultă că

$$\begin{aligned} \omega_f(\lambda\delta) &\leq \omega_f(([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1)\,\omega_f(\delta) \\ &\leq (\lambda + 1)\,\omega_f(\delta). \end{aligned}$$

8) Avem

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|) = \omega_f\left(\delta^{-1}|x - y|\,\delta\right)$$

şi aplicând 7) cu $\lambda = \delta^{-1}|x - y|$ rezultă că

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(1 + \delta^{-1}|x - y|\right)\omega_f(\delta).$$

Lema 3. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ convexă. Atunci f are derivate laterale finite în fiecare punct $x_0 \in \mathrm{int}(I)$ şi avem

$$f'_s(x_1) \leq f'_d(x_1) \leq f'_s(x_2) \leq f'_d(x_2),\ (\forall)\, x_1, x_2 \in \mathrm{int}(I), x_1 < x_2.$$

Teorema 4. **(Sorin G. Gal)** Fie $f \in C[a,b]$ convexă pe $[a,b]$ şi $\delta \in [0, b-a]$.

(i) Dacă f este crescătoare pe $[a,b]$ atunci

$$\omega_f(\delta) = f(b) - f(b-\delta).$$

(ii) Dacă f este decrescătoare pe $[a,b]$ atunci

$$\omega_f(\delta) = f(a) - f(a+\delta).$$

Temă

Deduceţi valorile lui $\omega_f(\delta)$ pentru cazul când f este concavă.

Teorema 5. Pentru orice funcţie $f \in C[a,b]$ şi $\delta \in [0, b-a]$ monotonă şi convexă (sau concavă), modulul de continuitate ω_f este concav pe $[0, b-a]$.

Demonstraţie. Considerăm cazul cănd f este crescătoare şi convexă pe $[a,b]$ (celelalte cazuri le las ca temă). Din Teorema 4, (i), rezultă că $\omega_f(\delta) = f(b) - f(b-\delta)$, $(\forall)\, \delta \in [0, b-a]$. Fie $\alpha \in [0,1]$ şi $\delta_1, \delta_2 \in [0, b-a]$ aleşi arbitrar. Aplicând egalitatea anterioară pentru $\delta := \delta_1$, respectiv $\delta := \delta_2$, obţinem

$$\begin{aligned} & \alpha\omega_f(\delta_1) + (1-\alpha)\,\omega_f(\delta_2) \\ = \; & f(b) - \alpha f(b-\delta_1) - (1-\alpha)\, f(b-\delta_2). \end{aligned} \tag{4}$$

Aplicând acum aceeaşi egalitate pentru $\delta := \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\,\delta_2$, rezultă

$$\omega_f(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\,\delta_2) = f(b) - f(b - \alpha\delta_1 - (1-\alpha)\,\delta_2). \tag{5}$$

Din convexitatea lui f rezultă că

$$\begin{aligned} f(b - \alpha\delta_1 - (1-\alpha)\,\delta_2) &= f(\alpha(b-\delta_1) + (1-\alpha)(b-\delta_2)) \\ &\le \alpha f(b-\delta_1) + (1-\alpha)\, f(b-\delta_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Combinând relaţiile (4), (5), (6), se obţine

$$\alpha\omega_f(\delta_1) + (1-\alpha)\,\omega_f(\delta_2) \le \omega_f(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\,\delta_2),$$

ceea ce înseamnă că ω_f este concavă pe $[0, b-a]$.

Curs 4
Module de netezime

Pentru $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ şi $r \geq 1$ natural, considerăm din nou mulţimea

$$M_x := \left\{x + kh : k = \overline{0, r}\right\}.$$

Fie $f : E \to \mathbb{R}$ astfel încât $M_x \subseteq E$.

Definiţia 1. Fie $f \in C_B(I)$, unde I este un interval real. Fie $k \in \mathbb{N}$ şi $\delta > 0$. Modulul de netezime de ordinul k şi argument δ al lui f notat $\omega_k(f;\delta)$ este definit prin

$$\omega_k(f;\delta) = \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x, x+kh\in I}} \left|\Delta_h^k f(x)\right|. \tag{7}$$

Se verifică uşor faptul că $\omega_1(f;\cdot) = \omega_f(\cdot)$. Cu alte cuvinte, modulul de continuitate este egal cu modul de netezime de ordinul 1.

Dacă I este interval compact atunci în (7) putem pune "max" în loc de "sup".

Teorema 2. (Proprietăţile modulului de netezime) Fie $f \in C_B(I)$ şi $\omega_k(f;\cdot) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definit în (7). Au loc proprietăţile:

1) $\omega_k(f;\cdot)$ este crescătoare;

2) $\omega_{k+1}(f;\cdot) \leq \omega_k(f;\cdot)$;

3) Dacă f este uniform continuă atunci

$$\lim_{\delta\searrow 0} \omega_k(f;\delta) = 0.$$

4) Dacă f este derivabilă şi $f' \in C_B(I)$ atunci

$$\omega_{k+1}(f;\delta) \leq \delta\omega_k(f';\delta), \delta > 0.$$

5) Dacă $f \in C^r(I)$ şi $f^{(r)}$ este mărginită pe I atunci

$$\omega_r(f;\delta) \leq \delta^r \sup_{t\in I}\left|f^{(r)}(t)\right|.$$

6) Pentru orice $\delta > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega_k(f;n\delta) \leq n^k\omega_k(f';\delta).$$

7) Pentru orice $\delta > 0$ şi $\lambda > 0$,

$$\omega_k(f;\lambda\delta) \leq (1 + [\lambda])^k \omega_k(f';\delta).$$

Demonstraţie.

1) Demonstraţia este asem[n[toare cu cea din cazul modulului de continuitate ($k = 1$).

2) Folosind proprietăţile diferenţelor finite avem

$$\Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h\left(\Delta_h^k f\right)(x) = \Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x)$$

de unde rezultă

$$\left|\Delta_h^{k+1} f(x)\right| = \left|\Delta_h^k f(x+h)\right| + \left|\Delta_h^k f(x)\right| \leq 2\omega_k\left(f';\delta\right).$$

Prin trecerea la supremum după $\sup\limits_{|h|\leq\delta}$ se obţine concluzia dorită.

3) Se obţine din 2) prin inducţie matematică.

4) Pentru $h \in \mathbb{R}^*$ şi $x \in I$ astfel încât $|h| \leq \delta$, $x + kh \in I$, avem

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_h^{k+1} f(x)\right| &= \left|\Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x)\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \left[f\left(x + (j+1)h\right) - f\left(x + jh\right)\right]\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \int_{jh}^{(j+1)h} f'\left(x+t\right) dt\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \int_{0}^{h} f'\left(x+jh+u\right) du\right| \\
&= \left|\int_0^h \Delta_h^k f(x+u) du\right| \leq \int_0^h \left|\Delta_h^k f(x+u)\right| du \\
&\leq h \cdot \omega_k\left(f';\delta\right) \leq \delta\omega_k\left(f';\delta\right).
\end{aligned}$$

5) Folosind succesiv Proprietatea 2), rezultă

$$\omega_r\left(f;\delta\right) \leq \delta\omega_{r-1}\left(f';\delta\right) \leq \cdots \leq \delta^{r-1}\omega_1\left(f^{(r-1)};\delta\right).$$

Pe de altă parte, folosind Teorema lui Lagrange pentru $f^{(r-1)}$, se poate demonstra uşor că $(\forall)\, x, x+h \in I$, există $\xi\left(x,h\right)$ cuprins între x şi $x+h$, astfel încât

$$\begin{aligned}
\omega_1\left(f^{(r-1)};\delta\right) &= \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x,x+h\in I}} \left|f^{(r-1)}\left(x+h\right) - f^{(r-1)}\left(x\right)\right| \\
&= \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x,x+h\in I}} |h| \left|f^{(r)}\left(\xi\left(x,h\right)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$\sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x,x+h\in I}} |h| \left|f^{(r)}\left(\xi\left(x,h\right)\right)\right| \leq \delta \sup_{t\in I}\left|f^{(r)}(t)\right|,$$

se ajunge uşor la concluzia dorită.

Demonstraţiile Proprietăţilor 6)-7) se găsesc la paginile 31-32, în: O. Agratini, Aproximare prin operatori liniari, Presa Universitară Clujeană, 2000.

Din Teorema 2 rezultă uşor următoarele proprietăţi.

Corolarul 3. Considerăm aceleaşi ipoteze ca şi în Teorema 2. Avem în plus următoarele proprietăţi?

1) Pentru orice $\delta > 0$, avem

$$\omega_{k+r}(f;\delta) \leq 2^r \omega_k(f;\delta), (\forall)\, k, r \in \mathbb{N}.$$

2) Pentru orice $0 < \delta \leq 1$, avem

$$\omega_k\left(f;\delta^k\right) \leq \omega_k(f;\delta).$$

Ponderi

În cursul 1 am reamintit normele L_p pentru cazul particular al intervalelor compacte. Acestea se pot generaliza pentru orice tip de intervale din $\mathbb{R}$. Astfel, dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval oarecare, $p \geq 1$ şi $f : I \to \mathbb{R}$, spunem că f este p-integrabilă pe I dacă există şi este finită integrala Lebesgue $\int\limits_I |f(x)|^p\, dx$.

Spunem că f şi g sunt egale aproape peste tot pe I şi scriem $f = g$ a.p.t. dacă mulţimea $\{x \in I : f(x) \neq g(x)\}$ este de măsură Lebesgue 0. Notăm cu $\widetilde{f}$ clasa de echivalenţă a tuturor funcţiilor egale cu f a.p.t.. şi cu $L_p(I)$ mulţimea tuturor acestor clase. Atunci $\left(L_p(I), \|\cdot\|_p, +, \cdot\right)$ este spaţiu Banach, unde

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_I |f(x)|^p\, dx\right)^p$$

iar operaţiile internă şi externă pe $L_p(I)$ sunt cele clasice pe spaţii de funţii folosind reprezentanţi pentru clasele de echivalenţă. În cazul $p = 2$, $(L_2(I), \|\cdot\|_2, +, \cdot)$ este spaţiu Hilbert iar produsul scalar care generează această normă este

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_I f(x)g(x)dx.$$

Obsevaţie.

Definiţia 4. O aplicaţie $\varphi \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$, strict pozitivă pe $\operatorname{int}(I)$ se numeşte funcţie pondere.

Exemple. Dacă $I = (0,1)$ se poate lua $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ sau $\varphi(x) = \sqrt{x}\,(1-x)$.

Dacă $I = (0,\infty)$ se poate lua $\varphi(x) = \sqrt{x}$ sau $\varphi(x) = \sqrt{x(1+x)}$ sau $\varphi(x) = x$.

Dacă $I = (-1,1)$ se poate lua $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Definiţia 5. Funcţiile $\psi_1, \psi_2 : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, se numesc de acelaşi ordin pe I dacă există o constantă reală $M > 0$ independentă de $x \in I$, astfel încât

$$M^{-1}\psi_1 \leq \psi_2 \leq M\psi_1.$$

Notăm $\psi_1 \sim \psi_2$.

Modulelel de netezime ponderate au fost introduse de Ditzian şi Totik şi pentru a le putea defini avem nevoie de condiţii suplimentare pentru o pondere φ şi anume:

C1) Există constantele strict pozitive M_0 şi h_0 astfel încât pentru orice $h \in (0, h_0]$ şi orice interval mărginit $E \subseteq I$, avem

$$m\left(\{x \in I : x \pm h\varphi(x) \in E\}\right) \leq M_0 m\left(E\right),$$

unde $m(H)$ reprezintă măsura Lebesgue a mulţimii H.

C2) Dacă $I = (0, 1)$ atunci

$$\varphi(x) \sim \left\{ \begin{array}{c} x^{\beta_1},\ x \searrow 0, \\ (1-x)^{\beta_2},\ x \nearrow 1 \end{array} \right., \text{ unde } \beta_1 \geq 0 \text{ şi } \beta_2 \geq 0.$$

Dacă $I = (0, \infty)$ atunci

$$\varphi(x) \sim \left\{ \begin{array}{l} x^{\beta_1},\ x \searrow 0, \\ x^{\beta_2},\ x \to \infty \end{array} \right., \text{ unde } \beta_1 \geq 0 \text{ şi } \beta_2 \leq 1.$$

Dacă $I = \mathbb{R}$ atunci

$$\varphi(x) \sim |x|^{\beta},\ |x| \to \infty, \text{ unde } \beta \leq 1.$$

Definiţia 6. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ şi $h > 0$, astfel încât $x \pm \frac{kh}{2} \in I$. Diferenţa finită simetrică (sau centrată) de ordinul k cu pasul h a lui f pe x se defineşte astfel:

$$\begin{aligned} \delta_h f(x) &= f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right), \text{ pentru } k = 1, \\ \delta_h^k f(x) &= \delta_h\left(\delta_h^{k-1} f(x)\right), \text{ pentru } k \geq 2. \end{aligned}$$

Similar formulei pentru diferenţe finite se poate demonstra că

$$\delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f\left(x + \left(\frac{k}{2} - i\right) h\right).$$

Mai mult, avem

$$\begin{aligned} \delta_h^{2n+1} f(x) &= \Delta_h^{2n+1} f\left(x - \frac{2n+1}{2} h\right), \\ \delta_h^{2n} f(x) &= \Delta_h^{2n} f\left(x - nh\right). \end{aligned}$$

Definiţia 7. (Ditzian-Totik) Fie $I = (0, 1)$ sau $I = (0, \infty)$ sau $I = \mathbb{R}$ şi $\varphi \in C(I)$ o funcţie pondere care satisface condiţiile C1)-C2) de mai sus (în funcţie de intervalul ales pentru I). Modulul de netezime de ordinul $r \in \mathbb{N}$ asociat ponderii φ şi funcţiei $f \in L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$, este definit prin relaţia

$$\omega_{r,\varphi}\left(f; t\right)_p = \sup_{0<h\leq t} \left\|\delta_{h\varphi}^r f\right\|_p.$$

Proprietăţile modulului ponderat de netezime $\omega_{r,\varphi}$ precum şi ale k-funcţionalelor se găsesc în cartea lui O. Agratini menţionată deja mai sus la paragrafele 1.4 şi 1.5..