Математическое программирование, лекция 7

Алгоритм метода Хука-Дживса

Шаг 1. Задаем начальную точку x^{0}, вектор шага h = (h1, ... ,h_n), коэффициент уменьшения шага a-1, коэффициент усиления (ускоряющий множитель) Betta и критерий остановки E, k=0. Обозначим через e_1, ..., e_n координатные направления.

Шаг 2. i = 1, j = 1, $x^{(k)j} = x^{(k)}$

Шаг 3. Последующий поиск по i-му выбранному координатному направлению:
а) Если $f(x^{(k)j}) + he_i) < f(x^{(k)j}))$, то шаг считается удачным. В этом случае полагаем:
$x^{(k)j+1} = x^{(k)j}$ + he_i , j = j+1. Переходим к шагу 4
б) Если в шаг является неудачным, то делаем шаг в противоположном направлении. Если
$f(x^(k)j - he_i < f(k)j)$.
т.е.
$f(x_1^{(k)j}), \ldots, x_i^{(k)j} - h_i, \ldots, x_n^{(k)j} < f(x_1^{(k)j}), \ldots, x_i^{(k)j}), \ldots, x_n^{(k)j}))$
, то шаг удачный, тогда
$x^{(k)j+1} = x^{(k)j} - he_i,$
$j+ = 1.$
Переходим к шагу

Шаг 4. Проверка не была ли координата последней:
а) Если i < n, То i = i+1 и переходим к шагу 3
б) Если i = n, то проверяем успешность исследующего поиска:
b1) если $f(x^{(k)j})$ < $f(x^{(k)})$, то определяем новую базисную точку $x^{(k+1)} = x^{(k)j}$, $f(x^{(k+1)})$ < $f(x^{(k)})$, принимаем k = k+1 и переходим к шагу 6
b2) если $f(x^{(k)})$ >= $f(x^{(k)})$ -> переходим к шагу 5
Вто
Шаг 5. Если каждая $h_i <= E$, То поиск закончен $x*$ = $x^{(k)}$, иначе для тех i, Для которых $h_i > e$ уменьшаем величину шага $h_i = h_i/a$ и переходим к шагу 2

Шаг 6. Проверяем поиск по образцу:
$x_p^{k+1} = x^{(k)} + Betta(x^{(k)} - x(k-1))$

Шаг 7. Назначаем точку образца *временной базисной точкой*
$x^{(k)j} = x_p^{(k+1)}$, $i = 1$, $j = 1$ и переходим к шагу 3

Метод Нелдера-Мида

Создан в 1964 г. Является развитием симплекс метода (многогранника). Симплекс - N-мерный многогранник, ребра которого прямые линии, пересекающиеся в N+1 вершине, если N = 2.
Суть метода - деформировать симплексы. Метод получился удачным. Считается, что если размерность задачи не больше 6, то этот метод является самым надежным.
Строим симплекс. Определяется значение функции во

всех вершинах. Вторую по худшести величину обозначаем g. Среди всех вершин, кроме самой худшей определяется центральная точка - центр тяжести.

При поиске новой вершины может происходить три вида отражений исходного регулярного симплекса:
1) Нормальное отражение (или просто отражение), когда новая вершина, располагается на том же расстоянии от центра тяжести остальных вершин, что и точка. В этом случае новый симплекс будет также регулярным.
2) Растянутое отражение (вне симплекса)
3) Сжатое отражение (в симплексе)

Алгоритм

Шаг 1. k = 1. Выбираем исходный регулярный симплекс.
$f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2) \dots f_{n+1} = f(x_{n+1})$
Здесь i - номер точки, а j - номер координаты.

Обычно для этого задают начальную точку x_1 и масштабный множетель Lambda а затем определяют координаты остальных вершин исходного регулярного симплекса по формуле:

x_i (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n) = x_j + б_1, если j != i - 1
x_j + б_2, если J = i - 1
Для всех i = 2, ..., n + 1 и j = 1, ..., n
Приращения б_1 и б_2 зависят только от размерности задачи n и выбранного множителя Lambda:

$б_1 = (sqrt(n+1) + n - 1)/(n * sqrt(2)) * Lambda$;
$б_2$ = $(sqrt(n+1) - 1)/(n * sqrt(2)) * Lambda$;

Шаг 2. Находим наибольшее значение функции функции f_h следующее за наибольшим значением функции f_g, наименьшее значения функции f_i и соответствующие им точки x_h, x_g, x_i)

Шаг 3. Находим центр тяжести всех точек за исключением x_h

Центр тяжести:

$x_c = 1/n * Summ(x_i)$, вычисляем $f(x_c) = f_c$

Шаг 4. Отражение. Первоначально перемещение начинается в точке

Положение пробной точки x_i определяется вследуюим образом, нде a>0 - коэффицент отражения:

$x_r - x_c = a(x_c - x_h)$

$x_r = (1 + a)x_c - a * x_h$

Здесь: $a = |x_r - x_c|/|x_c - x_h|$

Шаг 5. Растяжение. Сравниваем значение функций f_r и f_1 (отражение и самая хорошая). Возможно 3 случая:

1. Если f_r < f_1, то мы получаем значение функции и направление отражения точки x_h в точку x_r признается удачным и делается попытка растянуть многогранник в этом направлении

Положение продвинутой точки можно найти из

$x_e - x_c = Gamma(x_r - x_c)$

$x_e = Gamma * x_r + (1 - Gamma)x_c$

Здесь $Gamma = |x_e - x_c|/|x_r - x_c|$

Далее возможно 2 варианта:
а) Если $f_e < f_r$, т.е. растяжение увенчалось успехом, то заменяем старый многогранник новым: худшая вершина многогранника (с наибольшим значением функции) отбрасывается, а вместо нее вводится новая, т.е. меняем точку x_h на точку x_e, k+=1

Проверяем условие остановки:
вычисляем

б) Если $f_e >= f_r$, то отбрасываем точку x_e. Очевидно, мы переместились слишком далеко от точки x_r, Поэтому меняем точку x_h на точку x_r , в которой было получено улучшение (на шаге 4) k+=1. Проверяем условие остановки
Если условие выполнено, то поиск завершен $x^*=x_h$
Если условие не выполнено, то возвращаемся к шагу 2

2. Если $f_1 <= f_r <= f_g$, то x_1 является лучшей точкой по сравнению с другими двумя точками симплекса, мы также заменяем точку x_h на точку x_1, k+=1. Проверяем условие остановки. Если условие выполнено, то поиск завершен $x^* = x_1$
Если условие не выполнено, то возвращаемся к шагу 2
3. Если $f_g < f_r$ то делается заключение что многогранник слишком велик и его следует сжать. Переходим к шагу 6.

Шаг 6. Сжатие.
2 случая:

1. Если f_h < f_r , то пробная точка оказалась самой худшей. Значит мы переместились слишком далеко от точки x_h к точке x_c. Попытаемся исправить это, найдя точку x_c (а затем f_s) с помощью шага сжатия
   Находим точек x_S из соотношения
   $x_c - x_S = Betta(x_c - x_h)$, где Betta (0 < Betta < 1) - коэффициент сжатия. Тогда
   $x_S = Betta * X_h + (1 - Betta)x_c$
   Переходим к шагу 7
2. Если все-таки f_h > f_r т.е. пробная точка не самая худшая, то сжатие осуществляем.
   Тогда $x_S = x_c = Betta(x_r - x_c)$
   $x_S = Betta * x_r + (1 - Betta)x_c$
   Переходим к шагу 7

Шаг 7. Сравниваем значения функций f_S и min(f_h, f_r). Опять возможно 2 случая:
1) Если f_S < min(f_h, f_r), то цель сжатия достигнута и тогда меняем x_h на x_s, k+=1. Проверяем условие остановки.
Если условие выполнено, то поиск завершен.
Если нет, то возвращаемся к шагу 2
2) Если f_S > f_h, то очевидно, что все наши попытки найти значение функции существенно меньшее, чем f_h закончились неудачей, переходим к шагу 8.

Шаг 8. Редукция - уменьшаем размерность симплекса