Математическое программирование, лекция 10

ДФП

Для определения матрицы пользуются следующим рекуррентным соотношением $A_{k+1} = A_k + A_k^c$
где A_k^c - корректирующая матрица

Наиболее предпочтительным является определение матрицы A_k с помощью конечно-разностной аппроксимации вторых производных
$x^{(k+1)} - x^{(k)} = A_k(G_{k+1} - G_k)$ или $\blacktriangle x^{(k)} = A_k \blacktriangle G_k$

Однако такую аппроксимацию построить невозможно, поскольку на k-той итерации надо уже знать $x^{(k+1)}$ и G_{k+1}

Подставляя в выражение рекурентное соотношение получим
$\blacktriangle x^{(k)} = Betta(A_k + A_k^c) \blacktriangle G_k => A_k^c \blacktriangle G_k = 1/Betta$
$\blacktriangle x^{(k)} - A_k \blacktriangle G_k$

Отсюда
$A_k^c = 1/Betta((\blacktriangle x^{(k)})Y^T)/(Y^T \blacktriangle G_k)) - (A_k \blacktriangle G_k Z^T)/(Z^T \blacktriangle G_k)$

Алгоритм ДФП
Шаг 1. Задаем $x^{(0)}, k = 0$. Определяем значение градиента нв точке $x^{(0)} G_0 = \blacktriangledown f(x^0)$

Полагаем A_0 = I = [1 0]
[0 1]

В качестве направления поиска из точки $x^{(0)}$ выбирается вектор $d_0 = -G_0$

Шаг 2. Находим значение шага $alpha_k^*$ минимизирующего функцию $f(x^{(k)} + alpha_k d_k)$. Т.е. проводим одномерный поиск вдоль направления d_k

Шаг 3. вычисляем $x^{(k+1)} = x^{(k)} + alpha_k^* d_k$.

Шаг 4. Проверяем является ли точка $x^{(k+1)}$ точкой минимума функции, например по условию малости градиента $||G_k + 1|| <= Eps$, если оно выполняется, то поиск закончен $x^* = x^{(k+1)}$
Иначе переходим к шагу 5

Шаг 5. Вычисляем
$A_k^c = (\blacktriangle x^{(k)} \blacktriangle x^{(k)^T})/(\blacktriangle x^{(k)^T} \blacktriangle G_k) - (A_k \blacktriangle G_k \blacktriangle G_k^T A_k)/(\blacktriangle G + k$

Шаг 6. Обновляем матрицу $A + k + 1 = A_k + A_k^c$

Шаг 7. Определяем новое направление поиска

Конечно-разностная аппроксимация производных

Точность аппроксимации можно повысить путем использования центральной конечной разности:

$df(x)/dx_i = f(X + he_i) - f(X - he_i)/2h$
x = X

Три вида погрешности:

1. **Погрешность отбрасывания**
   $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + 1/2h^2f''(x) + \dots$

Отсюда ошибка отбрасывания равна остаточному числу тейлоровского разложения

$\blacktriangle_1 = (f(x+h) - f(x))/h - f'(x) = \phi(f,h) - f'(x) \ = 1/2hf''(x)$, где ф(f,h) - приближение (аппроксимация производной правой разностью)

2. **Абсолютная ошибка вычисления функции**
   Эта ошибка вычисления функции в точках x и x+h.
   Это означает что вместо f(x) и f(x+h) в формулу войдут некоторые величины F(x) , F(x+h)
   Тогда F(x) = f(x) + Gamma
   $F(x+h) = f(x+h) + Gamma_h$
   $\phi(F,h)$ = $(F(x+h) - F(x))/h$ =
   $(f(x+h) - f(x))/h + (gamma_h - gamma)/h + (gamma_h -$
   = $\phi(f,h) + \blacktriangle_2$
3. **Ошибка округления**
   При машинных арифметических операциях. Эти ошибки малы по сравнению с предыдущими ошибками и их, как правило, не учитывают.

6. Сравнение методов и рекомендации по их выбору