

Липецкий государственный технический университет

Факультет автоматизации и информатики

Кафедра автоматизированных систем управления

ДОМАШНЯЯ РАБОТА № 4

по дисциплине «Математическое программирование»

Студент

Группа ПИ 21-1

подпись, дата

Стебенов П.В.

Руководитель

Доцент

подпись, дата

Качановский Ю.П.

Липецк 2023 г.

Задание кафедры

Вариант 5.

Функция: $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^4$.

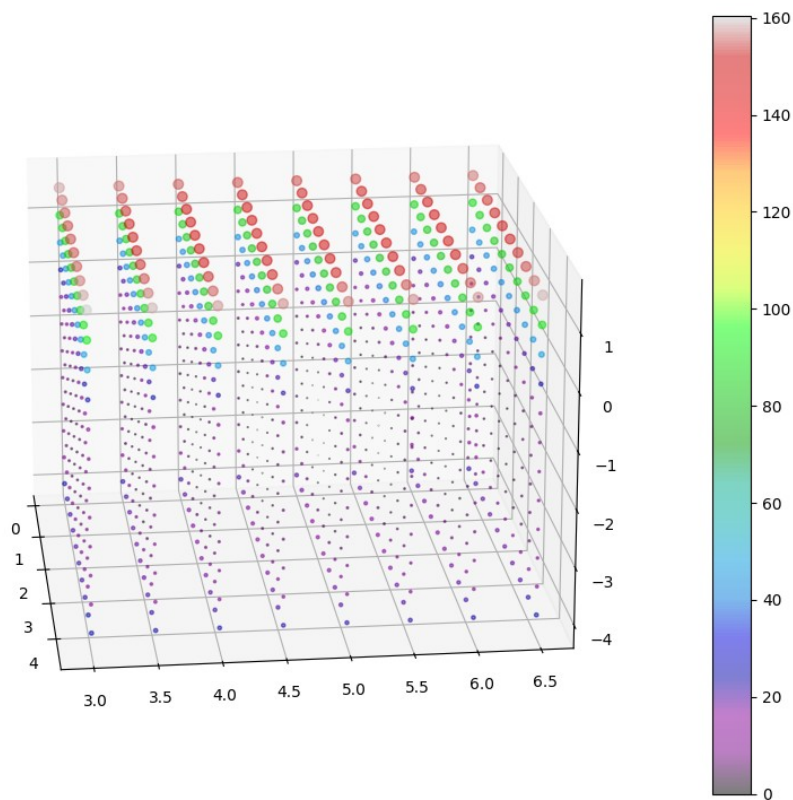
Необходимо определить минимум функции методом Нелдера-Мида, сделав не менее 4 отражений.

$$x^{(0)} = (+4, -2, +3)^T$$

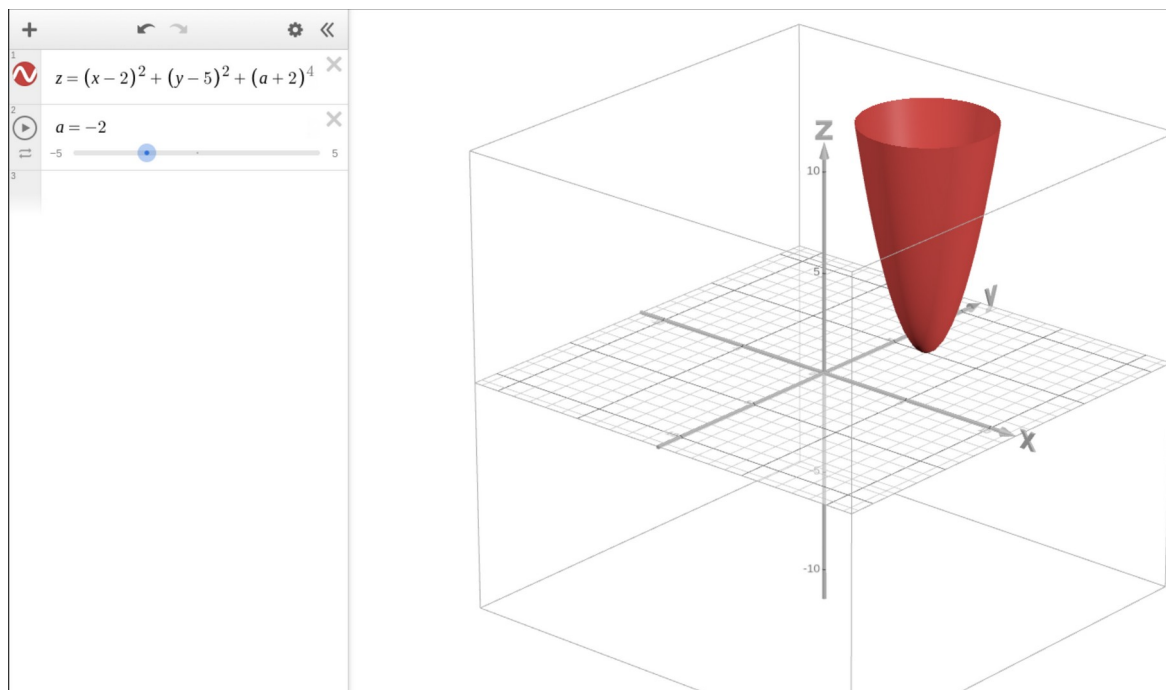
$$\lambda = 2 \quad \alpha = 2 \quad \beta = 0.5 \quad \gamma = 2$$

Ход решения

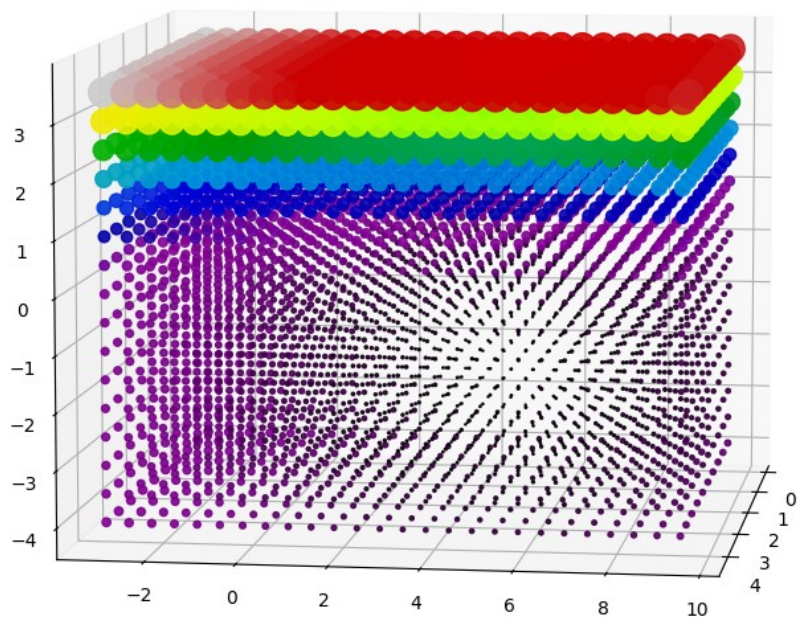
Построим график функции, минимум которой необходимо найти. На графике ниже цветной шкалой представлены значения функции, а x , y и z , соответственно x_1 , x_2 , x_3 . Также точки в которых функция больше — больше.



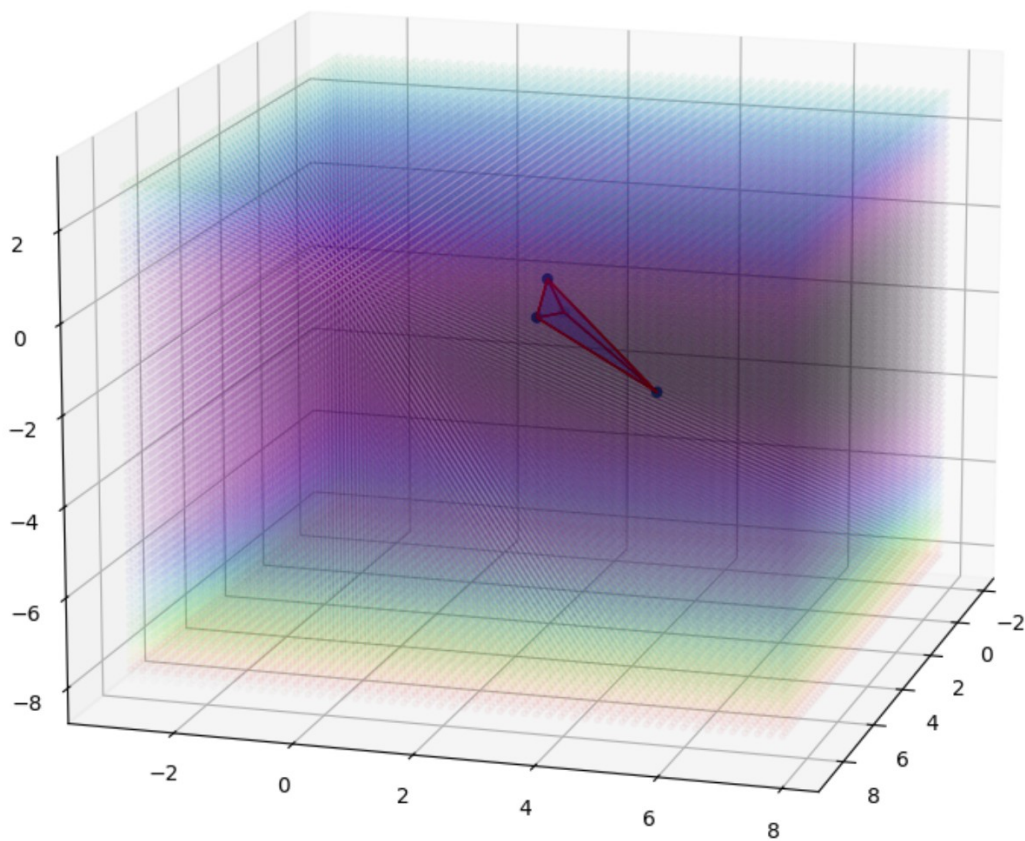
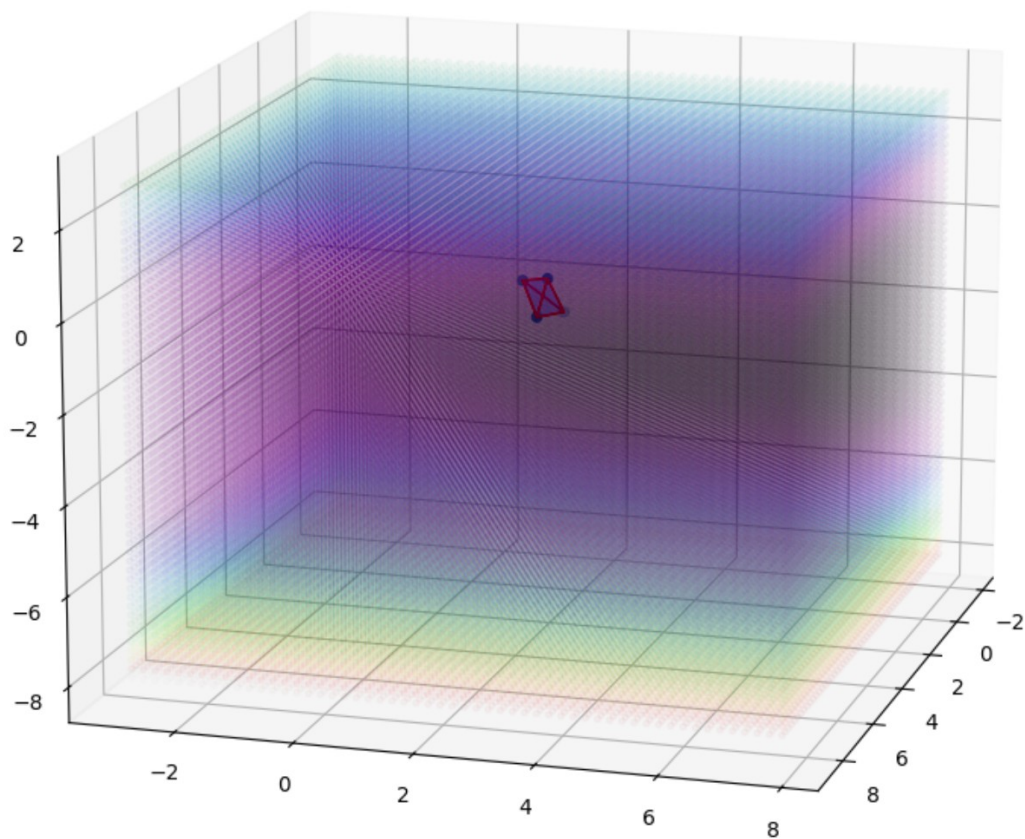
На следующем графике представлен график функции с x_3 — параметром.

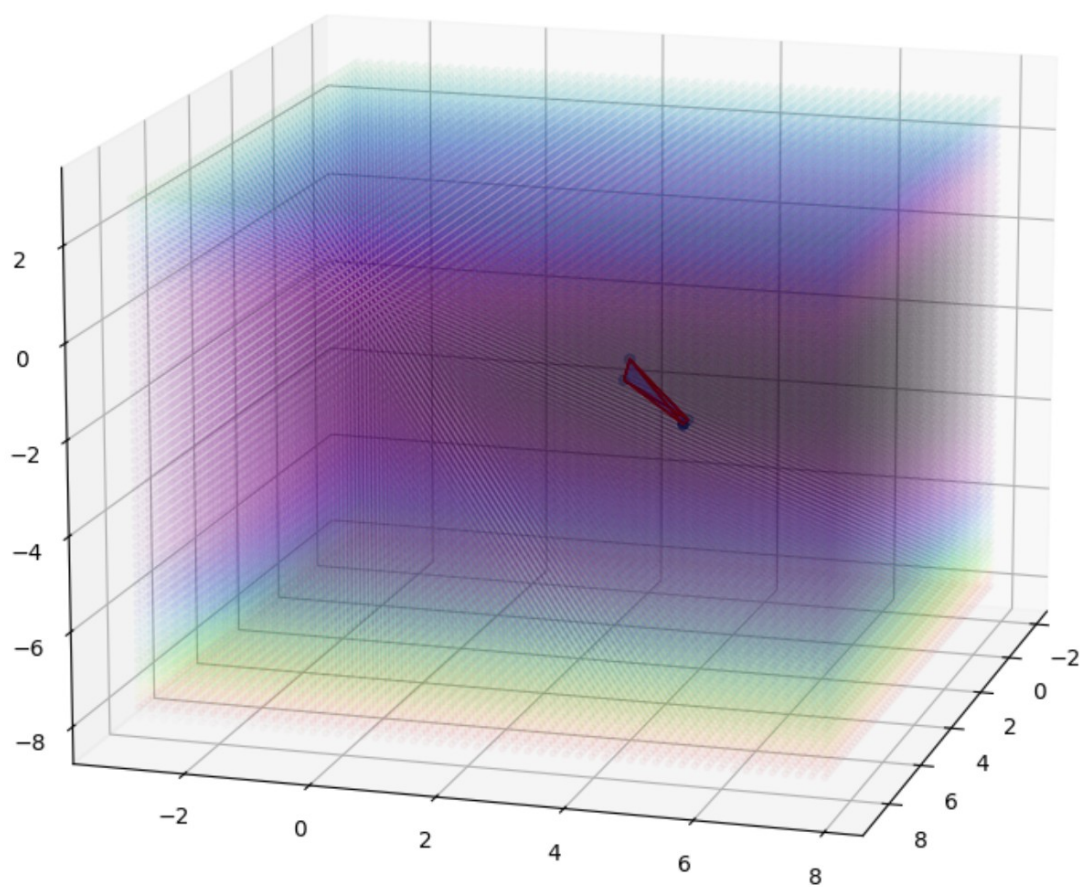
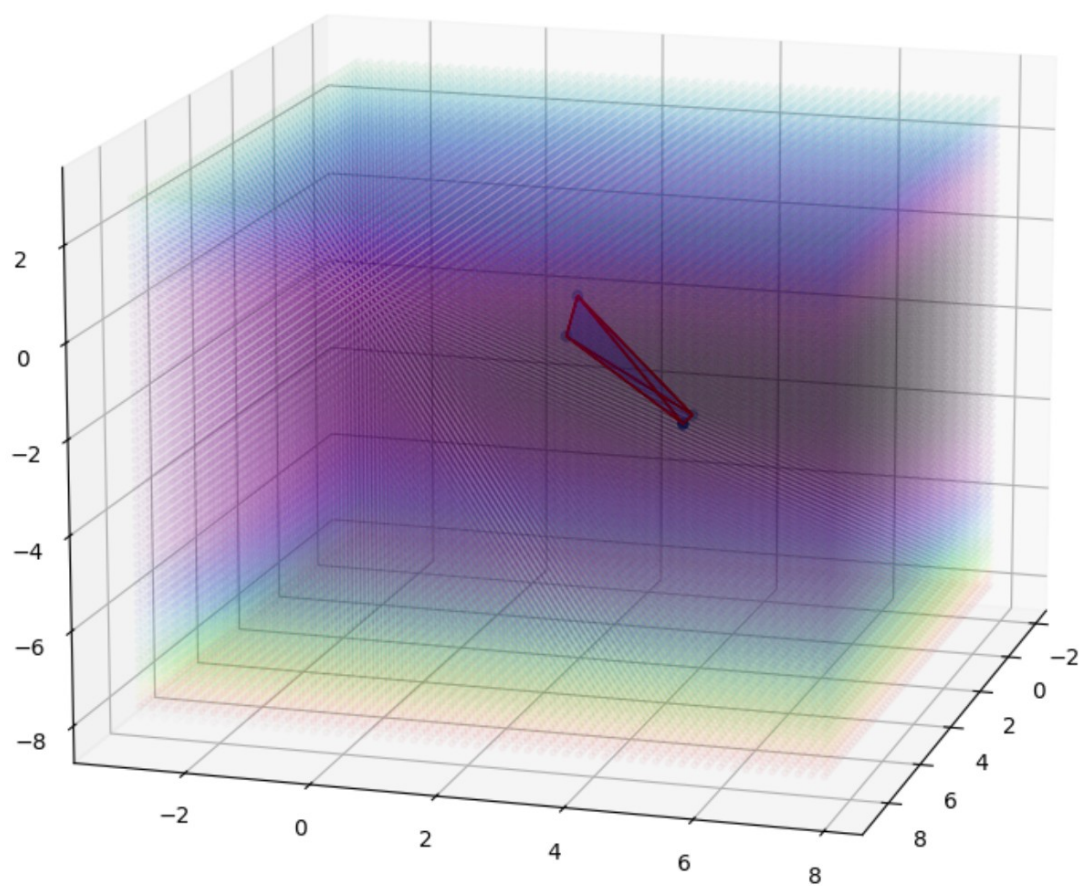


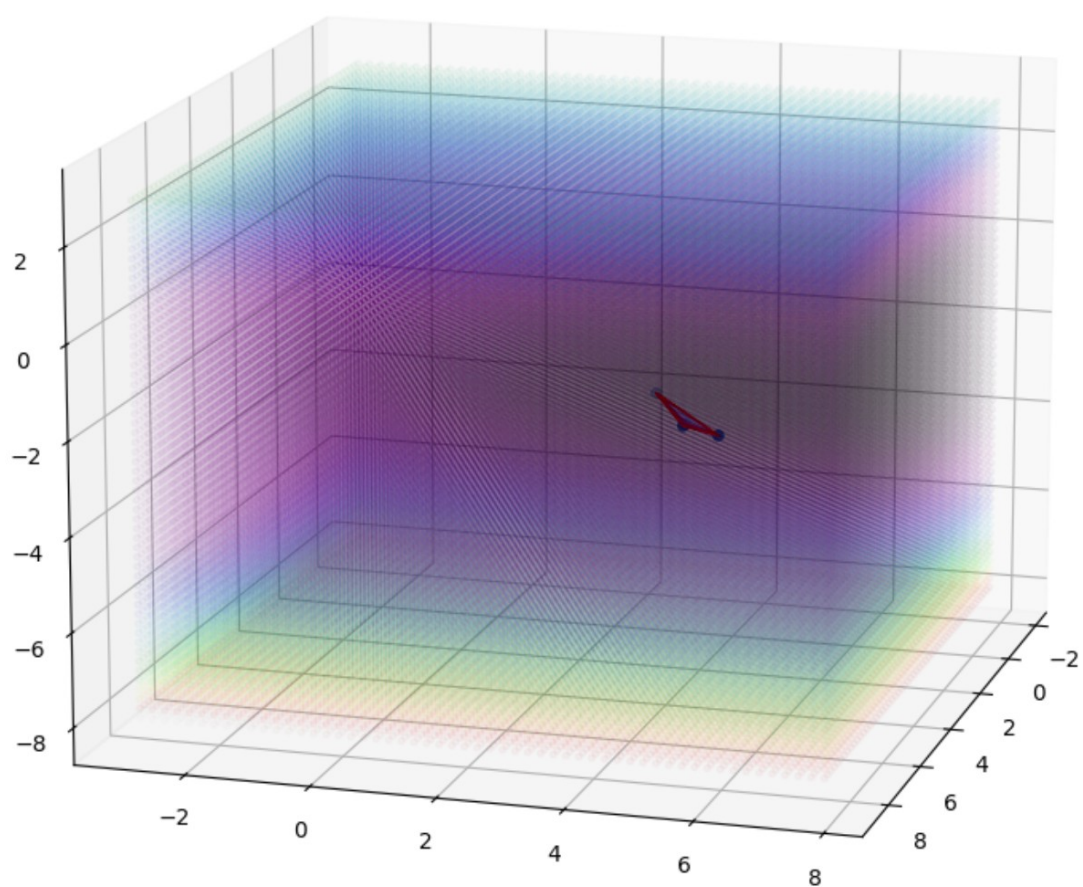
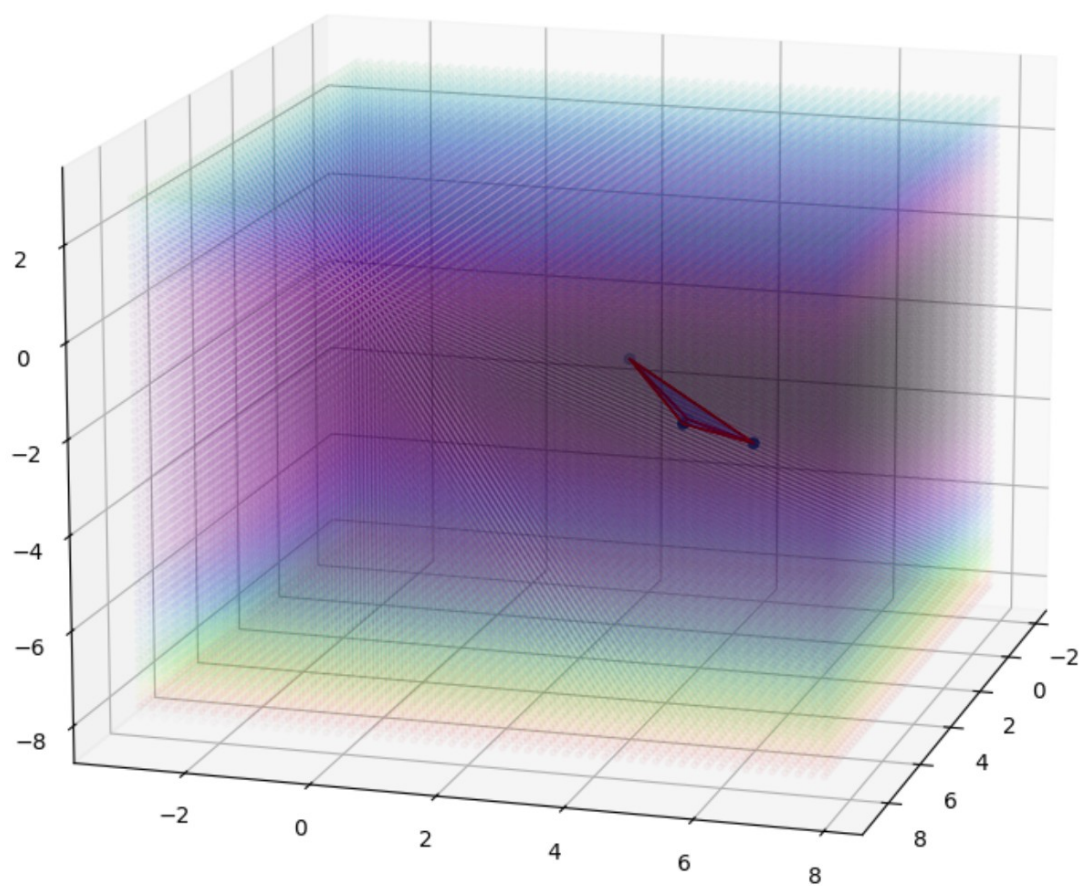
Ниже приведен еще один график, на котором кроме цвета точки, в которых функция имеет большие значения большего размера.

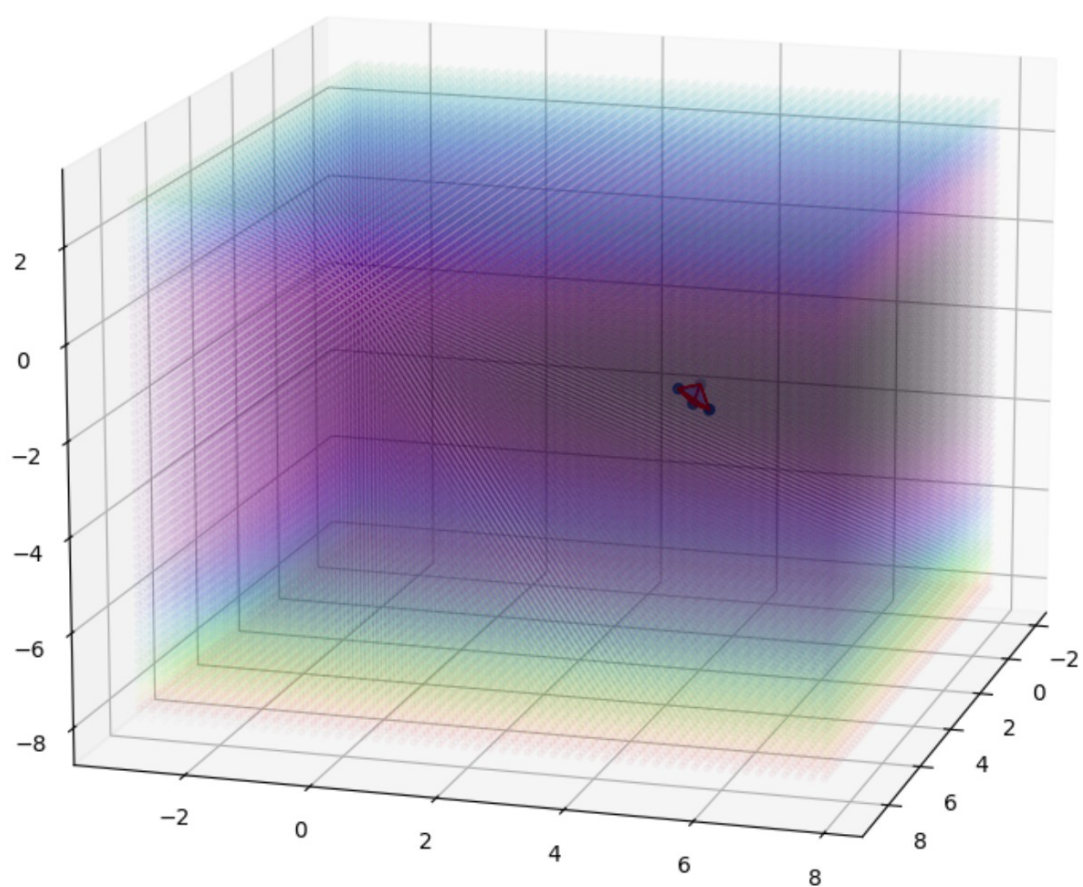
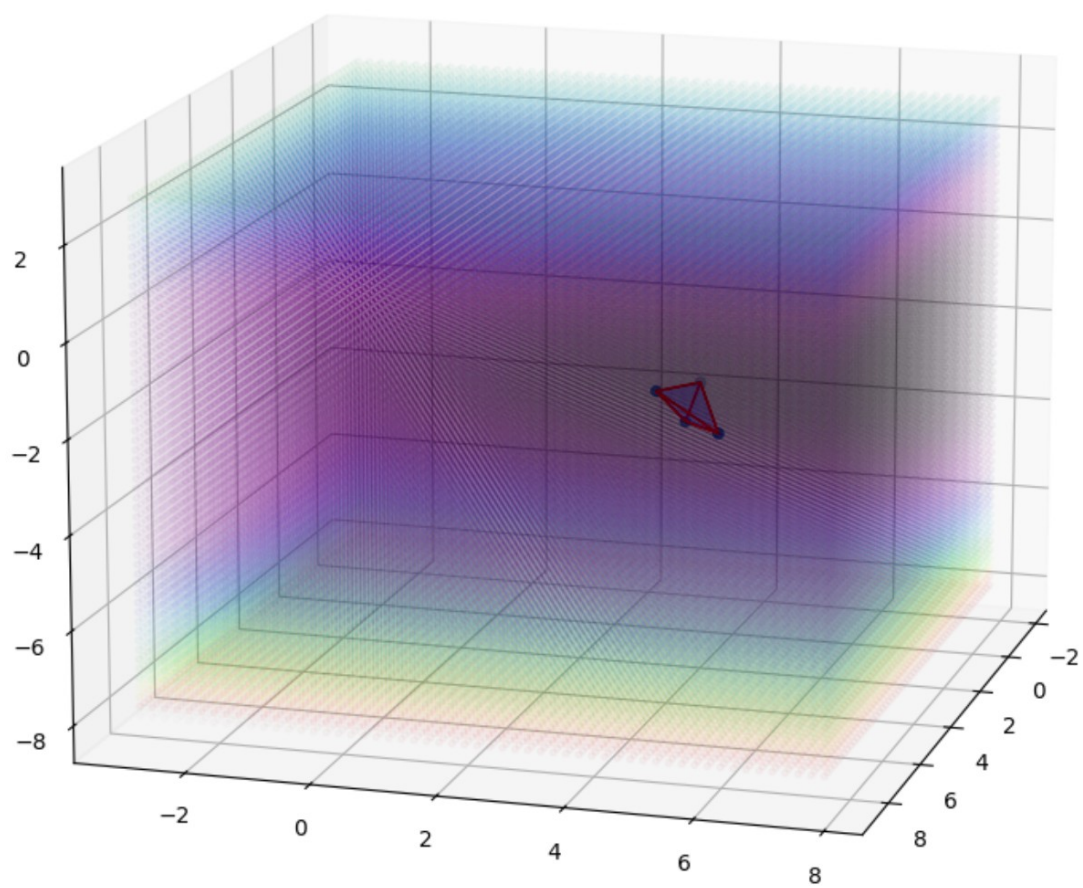


На рисунках ниже представлены несколько итераций метода Нелдера-Мида (минимальное значение функция принимает в черной области):









Ход работы и результаты приведены в таблице ниже ($\epsilon=0.00000001$, сторона тетраэдра 4):

Точки тетраэдра:
[(0, 0, 0),
[1.8856180831641265, 0.4714045207910316, 0.4714045207910316],
[0.4714045207910316, 1.8856180831641265, 0.4714045207910316],
[0.4714045207910316, 0.4714045207910316, 1.8856180831641265]]
Итерация 1
Отражение
Точки тетраэдра:
[(0, 0, 0),
[1.8856180831641265, 0.4714045207910316, 0.4714045207910316],
[0.4714045207910316, 1.8856180831641265, 0.4714045207910316],
[1.414213562373095, 1.414213562373095, -2.82842712474619]]
Sigma: 16.69358477913162
Итерация 2
Отражение
Точки тетраэдра:
[(0, 0, 0),
[-1.8856180831641263, 2.357022603955158, -3.299831645537221],
[0.4714045207910316, 1.8856180831641265, 0.4714045207910316],
[1.414213562373095, 1.414213562373095, -2.82842712474619]]
Sigma: 14.572165412221855
Итерация 3
Редукция
Точки тетраэдра:
[[0.7071067811865475, 0.7071067811865475, -1.414213562373095],
[-0.23570226039551567, 1.8856180831641265, -3.0641293851417055],
[0.9428090415820632, 1.6499158227686106, -1.178511301977579],
[1.414213562373095, 1.414213562373095, -2.82842712474619]]
Sigma: 2.8737508380739314
Итерация 4
Редукция
Точки тетраэдра:
[[0.8249579113843053, 1.178511301977579, -1.296362432175337],
[0.35355339059327384, 1.7677669529663684, -2.1213203435596424],
[0.9428090415820632, 1.6499158227686106, -1.178511301977579],
[1.178511301977579, 1.5320646925708528, -2.0034692133618845]]
Sigma: 1.4581447024783964
Итерация 5
Растяжение
Точки тетраэдра:
[[0.8249579113843053, 3.535533905932737, -3.6533850361304943],
[0.35355339059327384, 1.7677669529663684, -2.1213203435596424],
[0.9428090415820632, 1.6499158227686106, -1.178511301977579],
[1.178511301977579, 1.5320646925708528, -2.0034692133618845]]
Sigma: 0.8346528282487122
Итерация 6
Растяжение
Точки тетраэдра:
[[0.8249579113843053, 3.535533905932737, -3.6533850361304943],
[3.4962501958668164, 4.124789556921527, -2.906994544878027],
[0.9428090415820632, 1.6499158227686106, -1.178511301977579],
[1.178511301977579, 1.5320646925708528, -2.0034692133618845]]
Sigma: 3.7426086252575392
Итерация 7
Редукция
Точки тетраэдра:
[[2.160604053625561, 3.830161731427132, -3.2801897905042607],
[3.4962501958668164, 4.124789556921527, -2.906994544878027],
[2.2195296187244398, 2.887352689845069, -2.0427529234278032],
[2.3373807489221976, 2.82842712474619, -2.455231879119956]]
Sigma: 0.4479338091554593

Итерация 8
 Отражение
 Точки тетраэдра:
 [[2.160604053625561, 3.830161731427132, -3.2801897905042607],
 [3.4962501958668164, 4.124789556921527, -2.906994544878027],
 [2.2195296187244398, 2.887352689845069, -2.0427529234278032],
 [3.201622370372423, 5.18544972870135, -3.3194735005701794]]
 Sigma: 0.3449128110276347
 Итерация 9
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[2.828427124746189, 3.97747564417433, -3.0935921676911438],
 [3.4962501958668164, 4.124789556921527, -2.906994544878027],
 [2.857889907295628, 3.506071123383298, -2.474873734152915],
 [3.3489362831196194, 4.655119642811439, -3.1132340227241033]]
 Sigma: 0.259543405752491
 Итерация 10
 Растяжение
 Точки тетраэдра:
 [[2.828427124746189, 3.97747564417433, -3.0935921676911438],
 [1.0737547418017965, 3.731952456262336, -2.841521694768162],
 [2.857889907295628, 3.506071123383298, -2.474873734152915],
 [3.3489362831196194, 4.655119642811439, -3.1132340227241033]]
 Sigma: 0.19740259312079364
 Итерация 11
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[1.9510909332739927, 3.854714050218333, -2.9675569312296526],
 [1.0737547418017965, 3.731952456262336, -2.841521694768162],
 [1.9658223245487123, 3.6190117898228173, -2.658197714460538],
 [2.211345512460708, 4.193536049536887, -2.9773778587461326]]
 Sigma: 0.48728027138342184
 Итерация 12
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[2.0812182228673506, 4.02412504987761, -2.9724673949878926],
 [1.6425501271312524, 3.9627442528996117, -2.909449776757147],
 [2.0885839185047104, 3.9062739196798524, -2.8177877866033354],
 [2.211345512460708, 4.193536049536887, -2.9773778587461326]]
 Sigma: 0.12212269589970931
 Итерация 13
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[2.1462818676640296, 4.108830549707249, -2.974922626867013],
 [1.9269478197959802, 4.07814015121825, -2.94341381775164],
 [2.1499647154827093, 4.04990498460837, -2.897582822674734],
 [2.211345512460708, 4.193536049536887, -2.9773778587461326]]
 Sigma: 0.05392176351691403
 Итерация 14
 Растяжение
 Точки тетраэдра:
 [[1.8953026089095437, 4.100646443443515, -2.797600324486126],
 [1.9269478197959802, 4.07814015121825, -2.94341381775164],
 [2.1499647154827093, 4.04990498460837, -2.897582822674734],
 [2.211345512460708, 4.193536049536887, -2.9773778587461326]]
 Sigma: 0.16879492209820723
 Итерация 15
 Отражение
 Точки тетраэдра:
 [[1.8953026089095437, 4.100646443443515, -2.797600324486126],
 [2.4027171972610004, 4.1878071751522725, -2.7857333704037126],
 [2.1499647154827093, 4.04990498460837, -2.897582822674734],
 [2.211345512460708, 4.193536049536887, -2.9773778587461326]]
 Sigma: 0.18910556735038883
 Итерация 16

Отражение
Точки тетраэдра:
[[1.8953026089095437, 4.100646443443515, -2.797600324486126],
[2.4027171972610004, 4.1878071751522725, -2.7857333704037126],
[2.1499647154827093, 4.04990498460837, -2.897582822674734],
[2.0252934967318366, 3.9512865041303833, -2.526160800072308]]
Sigma: 0.16226468409467107
Итерация 17
Растяжение
Точки тетраэдра:
[[1.8953026089095437, 4.100646443443515, -2.797600324486126],
[2.4027171972610004, 4.1878071751522725, -2.7857333704037126],
[1.938996642906465, 4.1999469327768075, -1.925492867571307],
[2.0252934967318366, 3.9512865041303833, -2.526160800072308]]
Sigma: 0.24206988438914154
Итерация 18
Отражение
Точки тетраэдра:
[[2.576402119080213, 4.137747725172433, -1.642186389075075],
[2.4027171972610004, 4.1878071751522725, -2.7857333704037126],
[1.938996642906465, 4.1999469327768075, -1.925492867571307],
[2.0252934967318366, 3.9512865041303833, -2.526160800072308]]
Sigma: 0.22612791416241643
Итерация 19
Редукция
Точки тетраэдра:
[[2.257699380993339, 4.16884732897462, -1.783839628323191],
[2.1708569200837324, 4.19387705396454, -2.3556131189875096],
[1.938996642906465, 4.1999469327768075, -1.925492867571307],
[1.9821450698191507, 4.075616718453595, -2.2258268338218077]]
Sigma: 0.07972807514487112
Итерация 20
Отражение
Точки тетраэдра:
[[2.257699380993339, 4.16884732897462, -1.783839628323191],
[2.1708569200837324, 4.19387705396454, -2.3556131189875096],
[1.938996642906465, 4.1999469327768075, -1.925492867571307],
[2.403262804345235, 4.411437878808776, -1.6132919472383929]]
Sigma: 0.08349132484613926
Итерация 21
Растяжение
Точки тетраэдра:
[[1.8243964215857003, 4.666713793351728, -2.688638043035919],
[2.1708569200837324, 4.19387705396454, -2.3556131189875096],
[1.938996642906465, 4.1999469327768075, -1.925492867571307],
[2.403262804345235, 4.411437878808776, -1.6132919472383929]]
Sigma: 0.12589687914642855
Итерация 22
Отражение
Точки тетраэдра:
[[1.8243964215857003, 4.666713793351728, -2.688638043035919],
[1.8249420286699358, 4.890344497008233, -1.5161966198706],
[1.938996642906465, 4.1999469327768075, -1.925492867571307],
[2.403262804345235, 4.411437878808776, -1.6132919472383929]]
Sigma: 0.20552652520504244
Итерация 23
Отражение
Точки тетраэдра:
[[1.8243964215857003, 4.666713793351728, -2.688638043035919],
[1.8249420286699358, 4.890344497008233, -1.5161966198706],
[2.1746079687879414, 5.568602303615123, -1.9671408750022978],
[2.403262804345235, 4.411437878808776, -1.6132919472383929]]
Sigma: 0.15519202106732732
Итерация 24
Редукция

Точки тетраэдра:
[[1.824669225127818, 4.778529145179981, -2.1024173314532595],
[1.8249420286699358, 4.890344497008233, -1.5161966198706],
[1.9997749987289386, 5.229473400311678, -1.741668747436449],
[2.1141024165075857, 4.650891187908504, -1.5647442835544965]]
Sigma: 0.04258442332859234
Итерация 25
Редукция
Точки тетраэдра:
[[1.9122221119283784, 5.004001272745829, -1.9220430394448542],
[1.9123585136994372, 5.059908948659955, -1.6289326836535245],
[1.9997749987289386, 5.229473400311678, -1.741668747436449],
[2.0569387076182624, 4.940182294110091, -1.6532065154954727]]
Sigma: 0.01804509664315164
Итерация 26
Редукция
Точки тетраэдра:
[[1.9122221119283784, 5.004001272745829, -1.9220430394448542],
[1.9122903128139077, 5.031955110702892, -1.7754878615491894],
[1.9559985553286585, 5.116737336528754, -1.8318558934406517],
[1.9845804097733204, 4.97209178342796, -1.7876247774701635]]
Sigma: 0.004867262640202811
Итерация 27
Редукция
Точки тетраэдра:
[[1.9484012608508494, 4.988046528086894, -1.854833908457509],
[1.948435361293614, 5.002023447065426, -1.7815563195096764],
[1.9702894825509896, 5.044414559978357, -1.8097403354554076],
[1.9845804097733204, 4.97209178342796, -1.7876247774701635]]
Sigma: 0.0007561343009705469
Итерация 28
Растяжение
Точки тетраэдра:
[[1.9484012608508494, 4.988046528086894, -1.854833908457509],
[2.045043810117477, 4.999494330893647, -1.9607730909330952],
[1.9702894825509896, 5.044414559978357, -1.8097403354554076],
[1.9845804097733204, 4.97209178342796, -1.7876247774701635]]
Sigma: 0.0007582286441126058
Итерация 29
Редукция
Точки тетраэдра:
[[1.9967225354841631, 4.9937704294902705, -1.907803499695302],
[2.045043810117477, 4.999494330893647, -1.9607730909330952],
[2.007666646334233, 5.021954445436002, -1.8852567131942513],
[2.0148121099453986, 4.985793057160803, -1.8741989342016292]]
Sigma: 0.0007021018533080047
Итерация 30
Редукция
Точки тетраэдра:
[[1.9967225354841631, 4.9937704294902705, -1.907803499695302],
[2.02088317280082, 4.996632380191959, -1.9342882953141984],
[2.0021945909091983, 5.007862437463136, -1.8965301064447766],
[2.0057673227147808, 4.989781743325537, -1.8910012169484656]]
Sigma: 0.000130491882141686
Итерация 31
Редукция
Точки тетраэдра:
[[1.9967225354841631, 4.9937704294902705, -1.907803499695302],
[2.0088028541424916, 4.995201404841115, -1.9210458975047502],
[1.9994585631966806, 5.000816433476704, -1.9021668030700392],
[2.001244929099472, 4.991776086407904, -1.8994023583218838]]
Sigma: 2.863164890837336e-05
Итерация 32
Отражение
Точки тетраэдра:

[[1.9967225354841631, 4.9937704294902705, -1.907803499695302],
[2.0088028541424916, 4.995201404841115, -1.9210458975047502],
[1.9994585631966806, 5.000816433476704, -1.9021668030700392],
[2.0024940946243923, 5.00623609499228, -1.932211483626324]]

Sigma: 2.7937376461175927e-05

Итерация 33

Редукция

Точки тетраэдра:

[[1.9996083150542776, 5.000003262241275, -1.920007491660813],
[2.0056484743834417, 5.000718749916698, -1.9266286905655372],
[2.0009763289105367, 5.003526264234492, -1.9171891433481816],
[2.0024940946243923, 5.00623609499228, -1.932211483626324]]

Sigma: 9.600869301077641e-06

Итерация 34

Редукция

Точки тетраэдра:

[[1.9996083150542776, 5.000003262241275, -1.920007491660813],
[2.00262839471886, 5.000361006078986, -1.923318091113175],
[2.000292321982407, 5.001764763237883, -1.9185983175044972],
[2.001051204839335, 5.003119678616778, -1.9261094876435685]]

Sigma: 2.6149411928560243e-06

Итерация 35

Растяжение

Точки тетраэдра:

[[1.9996083150542776, 5.000003262241275, -1.920007491660813],
[2.00262839471886, 5.000361006078986, -1.923318091113175],
[2.0043105697578274, 4.9987475252768645, -1.941331847344606],
[2.001051204839335, 5.003119678616778, -1.9261094876435685]]

Sigma: 3.965230895475641e-06

Итерация 36

Растяжение

Точки тетраэдра:

[[1.9996083150542776, 5.000003262241275, -1.920007491660813],
[1.9977699038769607, 5.001673419242252, -1.952475679962278],
[2.0043105697578274, 4.9987475252768645, -1.941331847344606],
[2.001051204839335, 5.003119678616778, -1.9261094876435685]]

Sigma: 1.1432857366803965e-05

Итерация 37

Отражение

Точки тетраэдра:

[[2.0039150483655677, 5.003534098653343, -1.9799020316288267],
[1.9977699038769607, 5.001673419242252, -1.952475679962278],
[2.0043105697578274, 4.9987475252768645, -1.941331847344606],
[2.001051204839335, 5.003119678616778, -1.9261094876435685]]

Sigma: 1.0051495290244972e-05

Итерация 38

Отражение

Точки тетраэдра:

[[2.0039150483655677, 5.003534098653343, -1.9799020316288267],
[1.9977699038769607, 5.001673419242252, -1.952475679962278],
[2.0043105697578274, 4.9987475252768645, -1.941331847344606],
[2.003893112321686, 4.997715685938905, -2.021490583648574]]

Sigma: 7.307003470043746e-06

Итерация 39

Редукция

Точки тетраэдра:

[[2.000842476121264, 5.002603758947798, -1.9661888557955525],
[1.9977699038769607, 5.001673419242252, -1.952475679962278],
[2.001040236817394, 5.000210472259559, -1.946903763653442],
[2.0008315080993233, 4.9996945525905785, -1.986983131805426]]

Sigma: 4.391747440113655e-06

Итерация 40

Редукция

Точки тетраэдра:

[[2.000836992110294, 5.001149155769188, -1.9765859938004893],

[1.999300705988142, 5.000683985916416, -1.969729405883852],
 [2.0009358724583586, 4.999952512425068, -1.966943447729434],
 [2.0008315080993233, 4.9996945525905785, -1.986983131805426]]
 Sigma: 5.722635973551171e-07
 Итерация 41
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[2.0008342501048086, 5.0004218541798835, -1.9817845628029578],
 [2.0000661070437324, 5.000189269253497, -1.978356268844639],
 [2.000883690278841, 4.999823532507824, -1.97696328976743],
 [2.0008315080993233, 4.9996945525905785, -1.986983131805426]]
 Sigma: 3.2081063973164e-07
 Итерация 42
 Отражение
 Точки тетраэдра:
 [[2.0008342501048086, 5.0004218541798835, -1.9817845628029578],
 [2.0000661070437324, 5.000189269253497, -1.978356268844639],
 [1.9999644846901825, 5.000658611008312, -1.9931973839181634],
 [2.0008315080993233, 4.9996945525905785, -1.986983131805426]]
 Sigma: 2.8859990239552245e-07
 Итерация 43
 Отражение
 Точки тетраэдра:
 [[1.999193599623621, 4.999698724492621, -1.9949676589623122],
 [2.0000661070437324, 5.000189269253497, -1.978356268844639],
 [1.9999644846901825, 5.000658611008312, -1.9931973839181634],
 [2.0008315080993233, 4.9996945525905785, -1.986983131805426]]
 Sigma: 2.2499856975984675e-07
 Итерация 44
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[1.9996298533336767, 4.999943996873059, -1.9866619639034755],
 [2.0000661070437324, 5.000189269253497, -1.978356268844639],
 [2.0000152958669575, 5.000423940130904, -1.985776826381401],
 [2.000448807571528, 4.999941910922038, -1.9826697003250326]]
 Sigma: 4.579477607701769e-08
 Итерация 45
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[1.9996298533336767, 4.999943996873059, -1.9866619639034755],
 [1.9998479801887046, 5.000066633063278, -1.9825091163740574],
 [1.999822574600317, 5.0001839685019815, -1.9862193951424383],
 [2.0000393304526023, 4.999942953897548, -1.984665832114254]]
 Sigma: 4.0174336183890536e-08
 Итерация 46
 Редукция
 Точки тетраэдра:
 [[1.9998345918931395, 4.999943475385304, -1.9856638980088648],
 [1.9999436553206533, 5.000004793480413, -1.9835874742441557],
 [1.9999309525264597, 5.000063461199765, -1.9854426136283463],
 [2.0000393304526023, 4.999942953897548, -1.984665832114254]]
 Sigma: 9.039256365966909e-09
 Точка найдена!!!!
 Найденная точка: [2.0000393304526023, 4.999942953897548, -1.984665832114254]
 Значение функции в этой точке: 6.00904122266824e-08

В результате работы метода Нелдера-Мида была найдена точка [2.0000393304526023, 4.999942953897548, -1.984665832114254]. Она очень близка к точке (2, 5, -2), которая является минимумом функции.

Код программы:

```
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection, Line3DCollection
from pprint import pprint

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

f = lambda x, y, z: (x-2)**2+(y-5)**2+(z+2)**4
start_point = (4, -2, 3)
start_point = (0,0,0)
alpha = 2
beta = 0.5
gamma = 2
lambd = 2
n=3

def get_h_g_l(points, func):
    points = sorted(enumerate(points), key=lambda x: func(*x[1]))
    return points[-1][0], points[-2][0], points[0][0]

def get_tetr_in(point):
    b_1 = (np.sqrt(n+1)+n-1)/(n*np.sqrt(2))*lambd
    b_2 = (np.sqrt(n+1)-1)/(n*np.sqrt(2))*lambd
    points = [point,]
    for i in range(1, n + 1):
        cur_point = [0] * n
        for j in range(n):
            if j == i - 1:
                cur_point[j] = point[j] + b_1
            else:
                cur_point[j] = point[j] + b_2
        points.append(cur_point)
    return points

def make_data():
    x = np.arange(-2, 9, 0.3)
    y = np.arange(-3, 8, 0.3)
    z = np.arange(-8, 3, 0.3)
    xgrid, ygrid, zgrid = np.meshgrid(x, y, z)
    z = np.log(f(xgrid, ygrid, zgrid))
    return xgrid, ygrid, zgrid

def diff_sqad(els):
    return (els[0] - els[1])**2

if __name__ == "__main__":
    X, Y, Z = make_data()
    U = f(X,Y,Z)

    color_map = plt.get_cmap('nipy_spectral')

    plt.ion()
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")

    verts = get_tetr_in(start_point)

    print("Точки тетраэдра:")
    pprint(verts)
    for iter in range(1000):
        print("Итерация", iter+1)
        faces = [[0, 2, 3], [0, 1, 2], [1, 2, 3], [0, 1, 3]]
```

```

poly3d = [[verts[vert_id] for vert_id in face] for face in faces]
x, y, z = zip(*verts)
ax.scatter(x, y, z)
collection = Poly3DCollection(poly3d, edgecolors='r', facecolor=[0.5, 0.5, 1], linewidths=1, alpha=0.3)
ax.add_collection3d(collection)

scatter_plot = ax.scatter(X, Y, Z, c=U, s=30, alpha=0.1, marker='.', cmap=color_map)

fig.canvas.draw()
fig.canvas.flush_events()
ax.clear()

#####
h, g, l = get_h_g_l(verts, f)
o = [ 0, 0, 0 ]
#####
for j in range(4):
    if j == h:
        continue
    o = list(map(sum, zip(o, verts[j])))
o = [i/3 for i in o]
#####
if alpha > 0:
    r = [(1+alpha)*o[i]-alpha*verts[h][i] for i in range(3)]
else:
    break
#####
if f(*r) < f(*verts[l]):
    e = [gamma*r[i]+(1-gamma)*o[i] for i in range(3)]
    if f(*e) < f(*verts[l]):
        verts[h] = e
        print("Растяжение")
    else:
        verts[h] = r
        print("Отражение")
elif f(*verts[g]) < f(*r) <= f(*verts[h]):
    c = [beta*verts[h][i]+(1-beta)*o[i] for i in range(3)]
    verts[h] = c
    print(iter, "Сжатие")
elif f(*verts[l]) < f(*r) <= f(*verts[g]):
    verts[h] = r
    print("Отражение")
elif f(*r) > f(*verts[h]):
    for j in range(4):
        if j == l:
            continue
        verts[j] = [verts[l][i]+0.5*(verts[j][i]-verts[l][i]) for i in range(3)]
    print("Редукция")
print("Точки тетраэдра:")
pprint(verts)
#####
sigma = np.sqrt(1/(n+1)*sum([(f(*x_j)-1/(n+1)*sum([f(*vert) for vert in verts]))**2 for x_j in verts]))
print("Sigma:", sigma)
if sigma < 0.00000001:
    print("Точка найдена!!!!")
    print("Найденная точка:", verts[l])
    print("Значение функции в этой точке:", f(*verts[l]))
    break

```