Математическое программирование, лекция 11

Тема 4. Методы нелинейного программирования.

1. Постановка задачи с ограничениями равенствами
2. Метод множителей Лагранжа
3. Постановка задачи с ограничениями неравенствами
4. Условия Куна-Таккера
5. Достаточность условий Куна-Таккера

1. Постановка задачи с ограничениями равенствами

Минимизировать целевую функцию f(x), где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ - вектор переменных при ограничениях $h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. $k = 1, \ldots, K$.

Эта задачи может быть решена как задача безусловной оптимизации (при K <= n), если исключить из целевой функции K независимых переменных с помощью заданных равенств. Наличие ограничений в виде равенств фактически позволяет уменьшить *размерность* исходной задачи с n до n-K и свести к задаче безусловной минимизации.

Однако данный *метод исключения переменных* применим лишь в тех случаях, когда уравнения, представляющие ограничения можно разрешить относительно некоторого конкретного набора независимых переменных. При наличии большого числа ограничений в виде равенств или ограничений, представляющих сложные аналитические выражения, процесс исключения переменных становится весьма трудоемкой процедурой.

2. Метод множителей Лагранжа

Поясним этот метод на задаче с двумя переменными $z = f(x_1, x_2)$ и единственным ограничением $h(x_1, x_2) = 0$
Предположим, что рассматриваемые функции $z = f(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируемы, а из функции $h(x_1, x_2)$ x_2 выражается в явном виде через x_1
, т.е. $x_2 = \phi(x_1)$. Требуется получить необходимые условия, которым должна удовлетворять точка локального минимума.
Функцию $z = f(x_1, x_2)$ можно записать как функцию одной независимой переменной x_1 : $z = f[x_1, \phi(x_1)]$.
необходимым условием минимума функции z будет равенство нулю первой производной:

$dz/dx_1 = 0$, => $dz/dx_1 = df/dx_1 + df/d\phi * d\phi/dx_1 = 0$

Функция Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, lamda) = f(x_1, x_2) + lamda * h(x_1, x_2)$$

Отсюда **необходимые условия существования минимума (экстремума) 1-ого порядка** z = f(x_1, x_2) и записать следующим образом

$\{dL/dx_1 = df/dx_1 + lamda * dh/dx_1 = 0$
$\{dL/dx_2 = df/dx_2 + lamdadh/dx_2 = 0$
$\{dL/dlambda = h(x_1, x_2) = 0$

1. Составление функции Лагранжа
2. Получение системы уравнений
3. Отыскание решения этой системы, т.е. нахождение стационарных точек функции Лагранжа
4. Проверка достаточности условий минимума.

Метод множителей Лагранжа можно распространить на случай функций n переменных при наличии K ограничений в виде равенств ($K < n$), Т.е. если рассмотреть общую задачу оптимизации, содержащую несколько ограничений в виде равенств: минимизировать целевую функцию $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при ограничениях $h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = 0, k = 1,...,K,

Достоинства: Задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации

Недостатки:

1. Необходимость решения системы безусловной системы уравнений
2. Возможны случаи, когда экстремальные точки существуют, а система уравнений неразрешима. В

этом случае для нахождения всех возможных решений данной системы можно использовать численные методы поиска.

3. Постановка задачи с ограничениями неравенствами