ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»

Кафедра АСУ

Системы искусственного интеллекта

Лекция 3
НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА. НЕЧЁТКАЯ ЛОГИКА

д.т.н. Сараев Павел Викторович

Липецк - 2024

ПЛАН ЛЕКЦИИ

Глава 3. Нечёткие системы логического вывода.

3.1. Основные понятия теории нечетких множеств. Нечёткие числа.

3.2. Операции над нечёткими множествами.

3.3. Нечёткие соответствия и отношения.

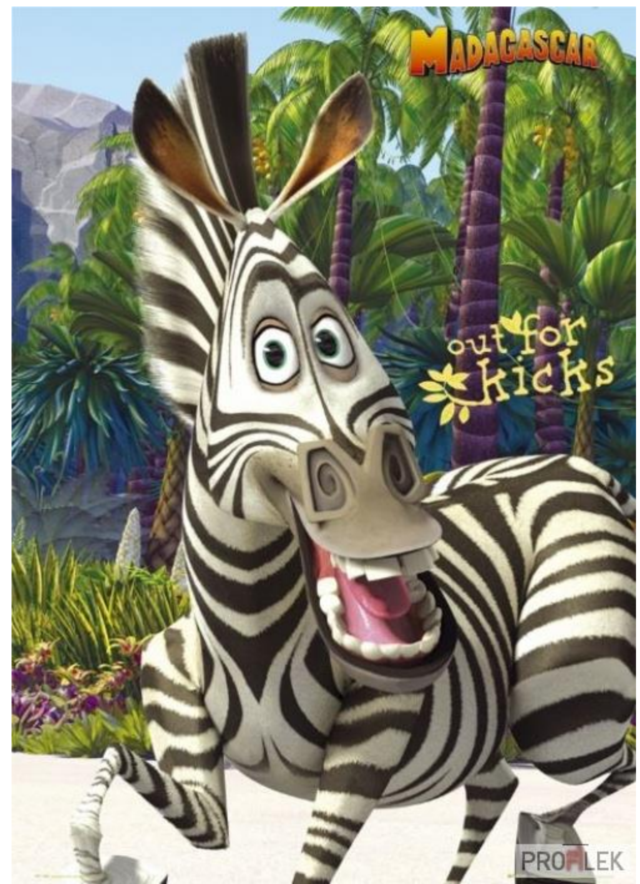
3.4. Основные понятия нечёткой логики.

Глава 3. Нечёткие системы логического вывода

3.1. Основные понятия теории нечетких множеств. Нечёткие числа

Определение. **Множество** (в прикладной математике) – совокупность отличных друг от друга элементов, о которых определённо (чётко) можно сказать, принадлежат они множеству или нет.

Вопрос.
Зебра – белая (принадлежит множеству белых животных) или чёрная (принадлежит множеству черных животных)?



Определение. Пусть *X* – непустое множество. **Нечёткое подмножество** *A* множества *X* характеризуется функцией принадлежности

$$\mu_A : X \to [0;1]$$

где $\mu_A(x)$ интерпретируется как степень принадлежности элемента $x \in X$ нечёткому подмножеству *A*.

Нечёткое подмножество *A* полностью описывается совокупностью упорядоченных пар вида

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

Упрощение записи:

$$A(x) = \mu_A(x)$$

Определение. Нечёткое множество *O* – пустое, если

$$O(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

Определение. Нечёткое множество *O* – универсальное, если

$$X(x) = 1 \quad \forall x \in X$$

3.1. Основные понятия теории нечетких множеств. Нечёткие числа

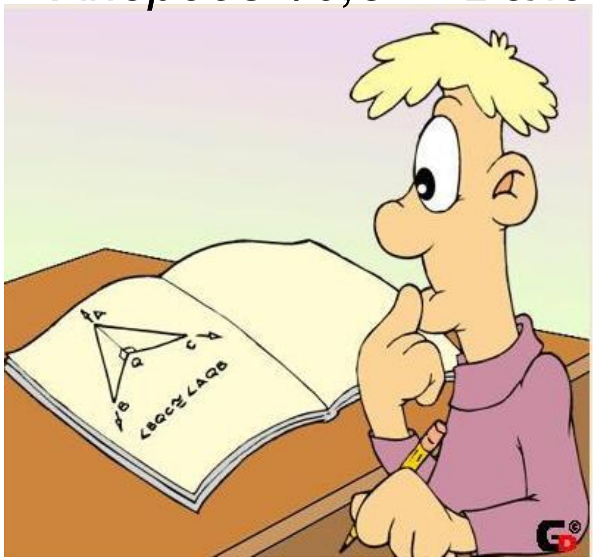
Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – конечное множество.

$$A = x_1/\mu(x_1) + x_2/\mu(x_2) \ldots + x_n/\mu(x_n)$$

Если $\mu(x_i) = 0$, соответствующий элемент можно не указывать. Нечёткие множества часто можно интерпретировать лингвистически.

Пример. *X* = {*“Иванов”*, *“Петров”*, *“Андреев”*, *“Володин”* } – множество студентов. Нечёткое подмножество *A* = “Ответственные студенты”:

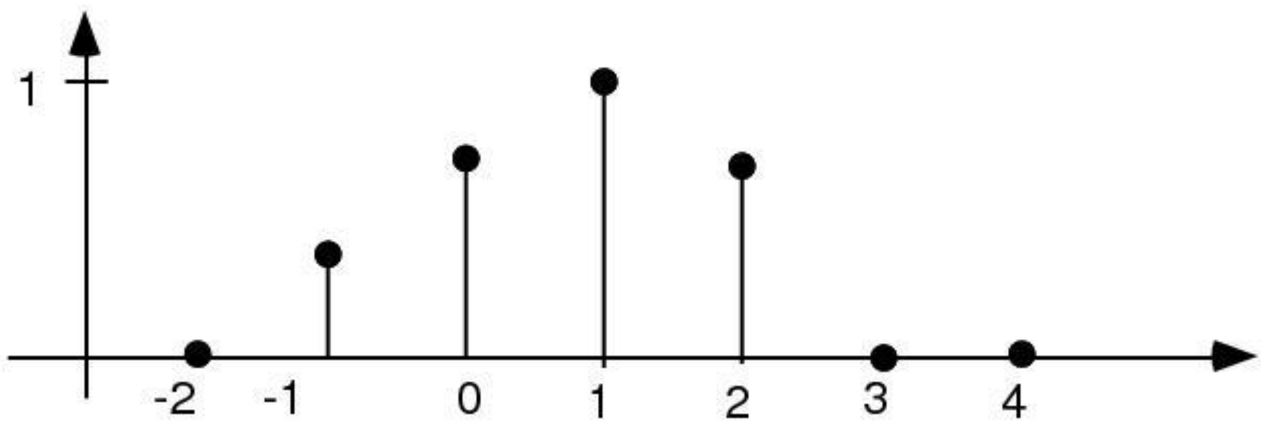
A = *“Иванов”/0,4* +*“Петров” /1* + *“Андреев” /0,8* + *“Володин” /0*



Пример

Пример. $X = Z$ – множество целых чисел.
A = “Целые числа, близкие к 1”.

$$A = (-2)/0{,}0 + (-1)/0{,}3 + 0/0{,}6 + 1/1{,}0 + 2/0{,}6 + 3/0{,}0 + 4/0{,}0$$

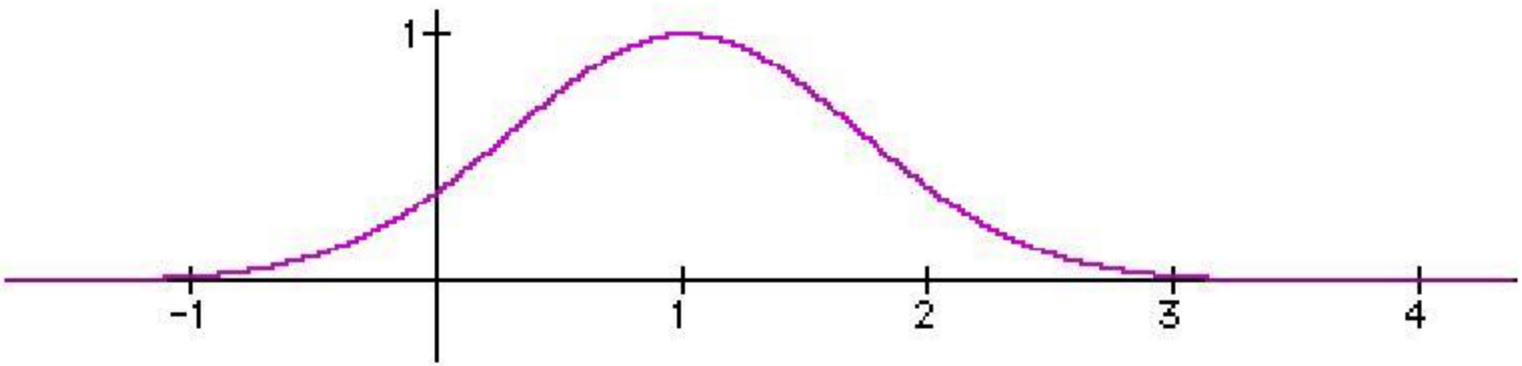


Пример

3.1. Основные понятия теории нечетких множеств. Нечёткие числа

Пример. $X = R$ – множество вещественных чисел.
A = “Вещественные числа, близкие к 1”.

$$A(x) = e^{-\beta(x-1)^2}, \beta > 0$$



Пример

Определение. Носитель нечеткого подмножества *A* множества *X*:

$$\mathrm{supp}(A) = \{x \in X : A(x) > 0\}$$

Носитель – чёткое множество.

Пример.

$$A = (-2)/0{,}0 + (-1)/0{,}3 + 0/0{,}6 + 1/1{,}0 + 2/0{,}6 + 3/0{,}0 + 4/0{,}0$$

$$\mathrm{supp}(A) = \{-1{,}0{,}1{,}2\} \subset X$$

Пример

Определение. Нечёткое подмножество *A* множества *X* – нормальное, если существует $x \in X$, т.ч. *A(x)=1*.

Определение. α-уровень нечёткого подмножества *A:*

$$[A]^{\alpha} = \begin{cases} \{x \in X : A(x) \geq 0\}, \alpha > 0 \\ \overline{\mathrm{supp}(A)}, \alpha = 0 \end{cases}$$

где $\overline{\mathrm{supp}(A)}$ - замыкание носителя.

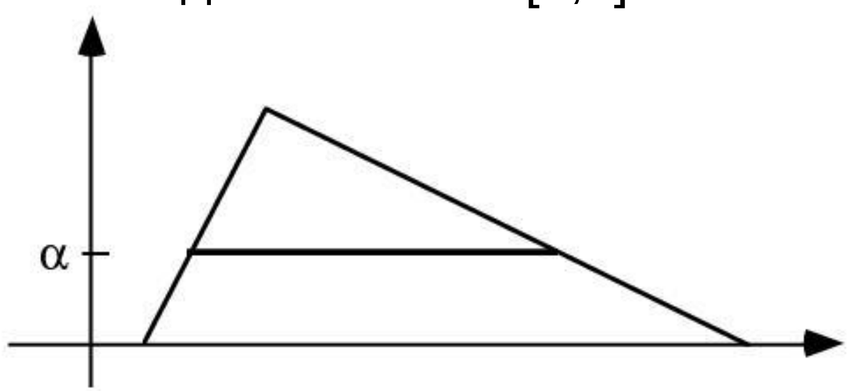
Пример.

$$A = (-2)/0{,}0 + (-1)/0{,}3 + 0/0{,}6 + 1/1{,}0 + 2/0{,}6 + 3/0{,}0 + 4/0{,}0$$

$$[A]^{\alpha} = \begin{cases} \{-1,0,1,2\}, 0 \leq \alpha \leq 0{,}3 \\ \{0,1,2\}, 0{,}3 < \alpha \leq 0{,}6 \\ \{1\}, 0{,}6 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Пример

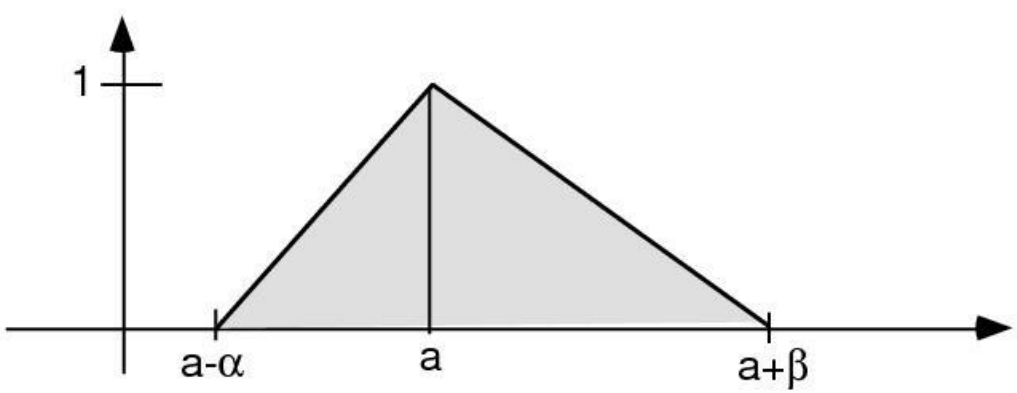
Определение. Нечёткое подмножество *A* – выпуклое, если $[A]^{\alpha}$ выпуклое подмножество для всех α из [0;1].



Определение. **Нечёткое число** – нечёткое подмножество множества вещественных чисел, которое является 1)нормальным, 2) выпуклым, 3) с непрерывной функцией принадлежности, 4) с ограниченным носителем.

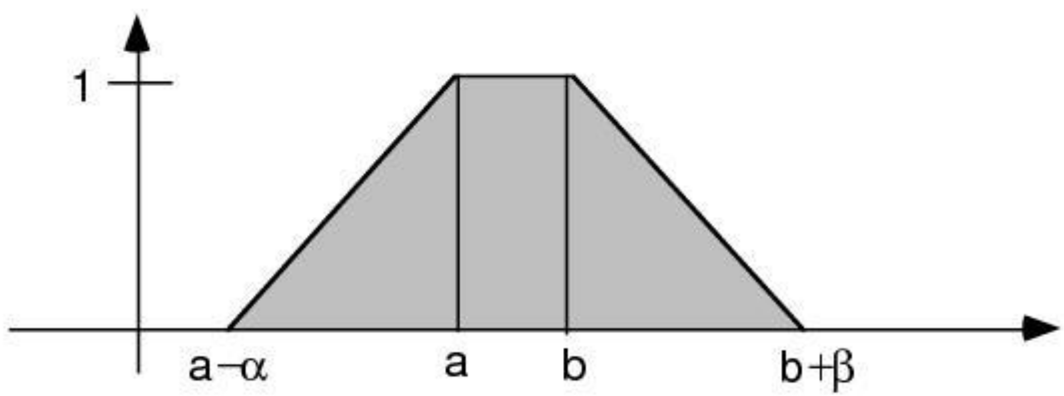
Определение. **Треугольное нечёткое число** с центром *a*, правой шириной *α>0*, левой шириной *β>0* – нечёткое число, функция принадлежности которого имеет вид:

$$A(x)=\begin{cases}1-\dfrac{a-x}{\alpha}, a-\alpha\le x\le a;\\ 1-\dfrac{x-a}{\beta}, a\le x\le a+\beta;\\ 0,\quad \textit{иначе}\end{cases}$$



Определение. **Трапециевидное нечёткое число** с интервалом устойчивости [*a;b*], правой шириной *α>0*, левой шириной *β>0* – нечёткое число, функция принадлежности которого имеет вид:

$$A(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{a-x}{\alpha}, a-\alpha \le x \le a; \\ 1, a \le x \le b; \\ 1-\dfrac{x-b}{\beta}, b \le x \le b+\beta; \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

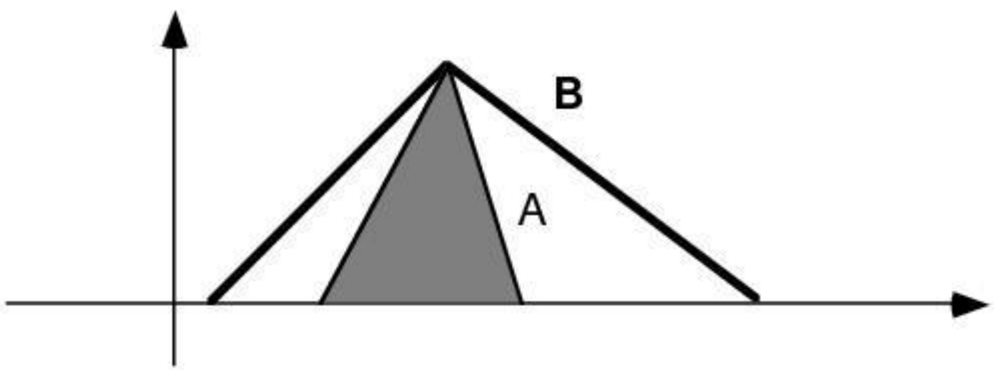


Определение. Пусть заданы нечеткие подмножества *A* и *B* множества *X*. *A* называется подмножеством *B* и обозначается

$$A \subset B$$

если

$$A(x) \le B(x) \quad \forall x \in X$$



Определение. Пусть заданы нечеткие подмножества *A* и *B* множества *X*. *A* и *B* равны, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Или:

$$A(x) = B(x) \quad \forall x \in X$$

3.2. Операции над нечёткими множествами

Определение. **Объединением** нечётких множеств *A* и *B* называется множество

$$A \cup B$$

функция принадлежности элементов к которому определяется как

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Пример.

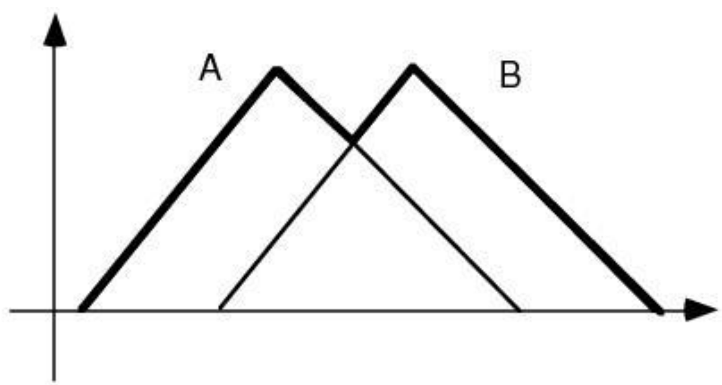
X = {-2,-1,0,1}

A = (-2)/0,6+(-1)/0,3+0/0,6+1/1,0

B = (-2)/0,1+(-1)/0,4+0/0,9+1/0,4

$$A \cup B = (-2)/0{,}6 + (-1)/0{,}4 + 0/0{,}9 + 1/1{,}0$$

Пример



Определение. **Пересечением** нечётких множеств *A* и *B* называется множество

$$A \cap B$$

функция принадлежности элементов к которому определяется как

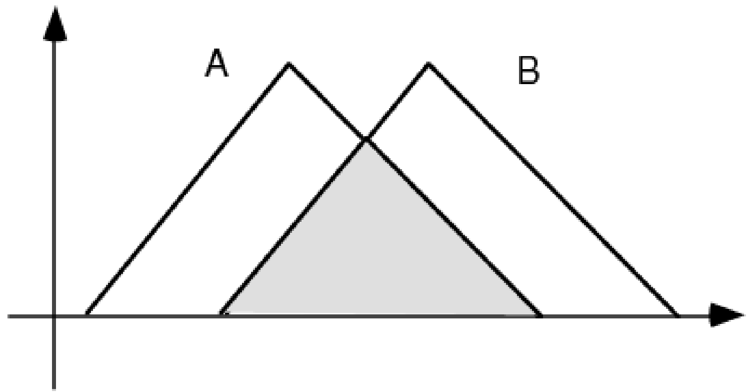
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Пример.

$$X = \{-2,-1,0,1\}$$
$$A = (-2)/0,6+(-1)/0,3+0/0,6+1/1,0$$
$$B = (-2)/0,1+(-1)/0,4+0/0,9+1/0,4$$

$$A \cap B = (-2)/0{,}1 + (-1)/0{,}3 + 0/0{,}6 + 1/0{,}4$$

Пример



Определение. **Дополнением** нечётких множеств *A* и *B* называется множество

$$\overline{A}$$

функция принадлежности элементов к которому определяется как

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Пример.

$$X = \{-2,-1,0,1\}$$

$$A = (-2)/0,6+(-1)/0,3+0/0,6+1/1,0$$

$$\overline{A} = (-2)/0,9 + (-1)/0,7 + 0/0,4 + 1/0,6$$

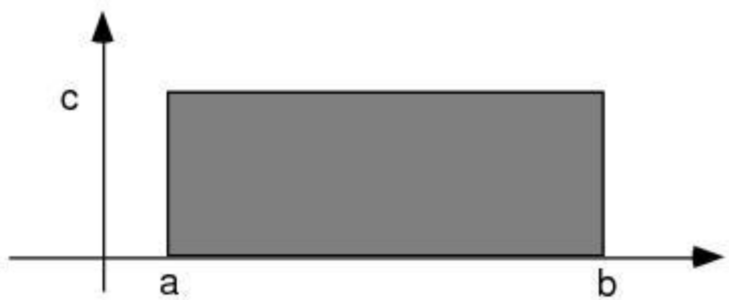
Пример

3.3. Нечёткие соответствия и отношения

Определение. Пусть *X* и *Y* – обычные (чёткие) множества. Декартовым (прямым) произведением называется множество всех упорядоченных пар:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

Пример. Декартово произведение отрезков *[a;b]* и *[0;c]*:



Пример

Определение. Пусть *X* и *Y* – обычные (чёткие) множества. Соответствием *S* между множествами *X* и *Y* называется подмножество декартова произведения $X \times Y$

Пример. Пусть *X*={Иван, Пётр, Василий}, *Y*={Анна, Елена, Татьяна}. Соответствие *S*="Женат на" может быть таким:

S = {(Иван, Елена), (Пётр,Татьяна), (Василий,Анна)}

Пример

Определение. Если *X* = *Y*, то соответствие называется отношением на множестве *X*.

3.3. Нечёткие соответствия и отношения

Определение. Пусть *X* и *Y* – непустые обычные (чёткие) множества. Нечётким соответствием *S* между множествами *X* и *Y* называется нечёткое подмножество декартова произведения $X \times Y$

Определение. Пусть *X* – непустое обычное множество. Нечётким отношением *R* на множестве *X* называется нечёткое подмножество декартова произведения $X \times X$

Пример. Пусть *X={1,2,3}*. Нечеткое отношение R="Приблизительно равняться":

R(1,1)=R(2,2)=R(3,3)=1

R(1,2)=R(2,1)=R(2,3)=R(3,2)=0,8

R(1,3)=R(3,1)=0,3

Функция принадлежности:

$$R(x,y)=\begin{cases} 1, x=y \\ 0{,}8, |x-y|=1 \\ 0{,}3, |x-y|=2 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример

Над нечёткими соответствиями и отношениями определены теоретико-множественные операции, аналогичные операциям над нечёткими множествами:
-объединение,
-пересечение,
-дополнение.

Определение. Пусть *X* и *Y* – непустые обычные множества, *A* – нечеткое подмножество *X*, *S* – нечёткое соответствие на $X \times Y$
Композицией *A* и *S* называется нечёткое подмножество *Y*:

$$A \circ S = \{(y, \mu_{A \circ S}(y))\}$$

где

$$\mu_{A \circ S}(y) = \sup_{x \in X} \min \{A(x), S(x, y)\} \quad \forall y \in Y$$

Если *X*,*Y* – конечные множества, то sup = max. Фактически, для них композиция – произведение вектора-строки на матрицу с заменой операций: * -> min, + -> max (max-min произведение).

Пример. Пусть *A = x1/0,5+x2/0,8+x3/0,4*

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$A \circ R = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Здесь первый элемент получается как:

*0,5*0,3+0,8*0,8+0,4*0,9=*

=max {min{0,5;0,3}, min{0,8;0,8}, min{0,4;0,9}}=

=max{0,3; 0,8; 0,4} = 0,8

Пример

3.3. Нечёткие соответствия и отношения

Определение. Пусть *A* и *B* – нечёткие подмножества множеств *X* и *Y* соответственно. Декартовым (прямым) произведением нечётких множеств называется нечёткое множество:

$$A \times B = \{((x, y), \mu_{A \times B}(x, y)) : x \in X, y \in Y\}$$

с функцией принадлежности

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min\{A(x), B(y)\}$$

Декартово произведение нечётких множеств – нечёткое соответствие между множествами X и Y.

Определение. Пусть X, Y, Z – непустые обычные множества, R – нечеткое соответствие на $X^x Y$, S – нечёткое соответствие на $Y^x Z$. Композицией нечётких соответствий R и S называется нечёткое соответствие на $X^x Z$:

$$R \circ S = \{((x,z), \mu_{R \circ S}(x,z))\}$$

где

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in Y} \min \{R(x,y), S(y,z)\} \quad \forall x \in X, z \in Z$$

Если X, Y, Z – конечные, то композиция – максминное произведение матриц.

Пример. Пусть нечёткие соответствия:

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Композиция нечётких соответствий:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

Пример

3.4. Основные понятия нечёткой логики.

Определение. **Нечётким высказыванием** *A* называется предложение, о котором с некоторой степенью уверенности можно сказать о его истинности или ложности. Степень уверенности $d(A)$ выражается вещественным числом из [$0; 1$].

$d(A) = 1$ => *A* – истинно
$d(A) = 0$ => *A* – ложно
$d(A) = 0{,}5$ => *A* – индифферентно (истинно в той же степени, что и ложно)

Пример 15. *A* = “4 – маленькое натуральное число”

$$d(A) = 0{,}2$$

Пример

Определение. **t-нормой** (от англ. *triangular*) называется бинарная функция

$$T:[0;1]\times[0;1]\to[0;1]$$

удовлетворяющая условиям:

1) коммутативности

$$T(x,y)=T(y,x) \quad \forall x,y\in[0;1]$$

2) ассоциативности

$$T\big(T(x,y),z\big)=T\big(x,T(y,z)\big) \quad \forall x,y,z\in[0;1]$$

3) монотонности (неубывающая по каждому аргументу)

$$T\big(x,y\big)\le T\big(x',y'\big) \quad \forall x\le x',y\le y'$$

4) с нейтральным элементом *1*

$$T\big(x,1\big)=x \quad \forall x\in[0;1]$$

Основные **t-нормы:**

1) минимум

$$\min(x,y)=\min\{x,y\}$$

2) Лукасевича

$$T_L(x,y)=\max\{x+y-1,0\}$$

3) произведение

$$T_P(x,y)=xy$$

4) слабая

$$WEAK(x,y)=\begin{cases}\min\{x,y\}, & \text{\textit{если}} \quad \max\{x,y\}=1\\ 0 & \text{\textit{иначе}}\end{cases}$$

5) Гамахера

$$HAND_\gamma(x,y)=\frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}, \gamma\geq 0$$

6) Ягера

$$YAND_p(x,y)=1-\min\{1,\sqrt[p]{(1-x)^p+(1-y)^p}\}, p>0$$

Лемма. $$WEAK(x,y) \le T(x,y) \le \min(x,y) \quad \forall x,y \in [0;1]$$

(c) Доказать!

Лемма. $$T(x,x) = x \quad \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow T(x,y) = \min(x,y)$$

(c) Доказать!

Определение. **Конъюнкцией** нечётких высказываний *A* и *B* называется нечёткое высказывание $A \wedge B$, степень истинности которого определяется как

$$d(A \wedge B) = T(d(A), d(B))$$

где *T* – некоторая t-норма.

t-норма может использоваться в операции пересечения множеств вместо min:

$$(A \cap B)(x) = T(A(x), B(x))$$

Определение. **t-конормой (s-нормой)** называется бинарная функция

$$S:[0;1]\times[0;1]\to[0;1]$$

удовлетворяющая условиям:

1) коммутативности

$$S(x,y)=S(y,x)\quad \forall x,y\in[0;1]$$

2) ассоциативности

$$S\big(S(x,y),z\big)=S\big(x,S(y,z)\big)\quad \forall x,y,z\in[0;1]$$

3) монотонности (неубывающая по каждому аргументу)

$$S\big(x,y\big)\le S\big(x',y'\big)\quad \forall x\le x',y\le y'$$

4) с нейтральным элементом *0*

$$S\big(x,0\big)=x\quad \forall x\in[0;1]$$

Если T – t-норма, то равенство

$$S\big(x,y\big)=1-T(1-x,1-y)$$

определяет t-конорму, наследуемую от T.

Основные **t-конормы:**

1) максимум

$$\max(x, y) = \max\{x, y\}$$

2) Лукасевича

$$S_L(x, y) = \min\{x + y, 1\}$$

3) вероятностная

$$S_P(x, y) = x + y - xy$$

4) сильная

$$STRONG(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \textit{если} \quad \min\{x, y\} = 0 \\ 1 & \textit{иначе} \end{cases}$$

5) Гамахера

$$HOR_\gamma(x, y) = \frac{x + y - (2 - \gamma)xy}{1 - (1 - \gamma)xy}, \gamma \geq 0$$

6) Ягера

$$YOR_p(x, y) = \min\{1, \sqrt[p]{x^p + y^p}\}, p > 0$$

Лемма. $$\max(x,y) \le S(x,y) \le STRONG(x,y) \quad \forall x,y \in [0;1]$$

(c) Доказать!

Лемма. $$S(x,x) = x \quad \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow S(x,y) = \max(x,y)$$

(c) Доказать!

Определение. **Дизъюнкцией** нечётких высказываний *A* и *B* называется нечёткое высказывание $A \vee B$, степень истинности которого определяется как

$$d(A \vee B) = S(d(A), d(B))$$

где *S* – некоторая t-конорма.

t-конорма может использоваться в операции объединения множеств вместо max:

$$(A \cup B)(x) = S(A(x), B(x))$$

Определение. **Инвертором (нечётким отрицанием)** называется унарная функция

$$N:[0;1] \to [0;1]$$

удовлетворяющая условиям:

1) граничному

$$N(0)=1$$

2) инволюции

$$N\big(N(x)\big)=x \quad \forall x \in [0;1]$$

3) изменяющая порядок

$$x<y \Rightarrow N(x)>N(y) \quad \forall x,y \in [0;1]$$

Определение. **Отрицанием** нечёткого высказывания *A* называется нечёткое высказывание $\overline{A}$, степень истинности которого определяется как

$$d(\overline{A})=N(d(A))$$

где *N* – некоторый инвертор.

Инвертор может использоваться в операции дополнения множеств.

Определение. **Импликатором** называется бинарная функция

$$I:[0;1]\times[0;1]\to[0;1]$$

удовлетворяющая условиям:

1) невозрастания по первому аргументу

$$x\le x' \Rightarrow I(x,y)\ge I(x',y) \quad \forall x,x',y\in[0;1]$$

2) неубывания по второму аргументу

$$y\le y' \Rightarrow I(x,y)\le I(x,y') \quad \forall x,y,y'\in[0;1]$$

3) граничным условиям

$$I(x,1)=1,\quad I(1,y)=y,\quad I(0,y)=1,\quad \forall x,y\in[0;1]$$

Лемма. $$I(x,y)=N(T(x,N(y)))$$

(c) Доказать!

Лемма. $$I(x,y)=S(N(x),y)$$

(c) Доказать!

Основные **импликаторы:**

1) Ларсена

$$x \to y = xy$$

2) Лукасевича

$$x \to y = \min\{1, 1 - x + y\}$$

3) Мамдани

$$x \to y = \min\{x, y\}$$

4) стандартный чёткий

$$x \to y = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x \le y \\ 0 & \textit{иначе} \end{cases}$$

5) Гёделя

$$x \to y = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x \le y \\ y & \textit{иначе} \end{cases}$$

6) Гейнса

$$x \to y = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x \le y \\ y/x & \textit{иначе} \end{cases}$$

7) Клина-Дайнеса

$$x \to y = \max\{1 - x, y\}$$

Определение. **Импликацией** нечётких высказываний *A* и *B* называется нечёткое высказывание $A \rightarrow B$, степень истинности которого определяется как

$$d(A \rightarrow B) = I(d(A), d(B))$$

где *I* – некоторый импликатор.

ВЫВОДЫ

1. Теория нечётких множеств и нечёткая логика – более адекватный по отношению к классической теории множеств математической логики математический аппарат, предназначенный для моделирования мышления человека.

2. Нечёткие соответствия и отношения – важнейшие понятия теории нечётких множеств, широко применяемые в приложениях. Важнейшая операция над нечёткими соответствиями – композиция.

3. Логические операции – конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация – основаны на применении функций – t-норм, t-конорм, инверторов, импликаторов.

4. Важную роль в нечётких системах логического вывода играет импликация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А., Сараев П.В., Черпаков И.В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ, 2002 – 107с.

2. Асаи К., Ватада Д., Иваи С и др. / Под ред. Тэрано Т., Асаи К, Сугэно М. Прикладные нечеткие системы.– М: Мир, 1993.– 368 с.

3. Fuller R. Introduction to Neuro-Fuzzy Systems.– Berlin/Heildelberg, Springer-Verlag, 2000.– 289 p.

Спасибо за внимание!