МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет автоматизации и информатики
Кафедра автоматизированных систем управления

Домашняя работа №5

по математическому программированию

Студент АС-21-1 ____________________ Станиславчук С. М.

(подпись, дата)

Руководитель ____________________ Качановский Ю. П.

(подпись, дата)

Липецк 2023

1. Задание

Задача 1. Найти минимум (максимум) целевой функции при заданных ограничениях

Вариант: 2

$f(x) = x_1 + x_2$

при ограничениях

$h_1(x) = x^2_1 + x^2_2 = 1$

Решение

Функция Лагранжа:

$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda(h(x) – 1) = x_1 + x_2 + \lambda(x^2_1 + x^2_2)$

Частные производные:

$dL / dx_1 = 1 + 2\lambda x_1$

$dL / dx_2 = 1 + 2\lambda x_2$

$dL / d\lambda = x^2_1 + x^2_2$

Запишем общую систему:

$\{1 + 2\lambda x_1 = 0$

$\{1 + 2\lambda x_2 = 0$

$\{x^2_1 + x^2_2 = 1$

Выразим каждую переменную:

$\{2\lambda x_1 = -1$ $\{x_1 = -1/2\lambda$

$\{2\lambda x_2 = -1$ $\{x_2 = -1/2\lambda$

$\{(-1/2\lambda)^2 + (-1/2\lambda)^2 = 1$

Отсюда $\lambda = \pm \sqrt{2}/2$

Для того, чтобы понять какое значение из этих двух использовать в дальнейших вычислениях x_1 и x_2, возьмем вторые производные по каждой переменной:

$(d^2L)/(dx^2_1) = 2\lambda$

$(d^2L)/(dx^2_2) = 2\lambda$

$(d^2L)/(d\lambda^2) = 0$

$(d^2L)/(dx_1 dx_2) = 0$

$(d^2L)/(dx_2 dx_1) = 0$

Теперь сгенерируем Гессиан:

$$H = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Отсюда её определитель:

$D = 4\lambda^2$

Теперь, чтобы определить характер точек λ, нужно рассмотреть значения вторых производных:

при $\lambda = \sqrt{2}/2$: $(d^2L)/(dx^2_1) = (d^2L)/(dx^2_2) = 2\lambda = \sqrt{2} > 0$ – минимум

при $\lambda = -\sqrt{2}/2$: $(d^2L)/(dx^2_1) = (d^2L)/(dx^2_2) = 2\lambda = -\sqrt{2} < 0$ – максимум

Мы в нашей задаче ищем что? - минимум (максимум).

Для минимума:

$x_{1\_min} = -1/(2\lambda) = -1/(2*(\sqrt{2}/2)) = -\sqrt{2}/2$

$x_{2\_min} = -1/(2\lambda) = -1/(2*(\sqrt{2}/2)) = -\sqrt{2}/2$

Для максимума:

$x_{1\_max} = -1/(2\lambda) = -1/(2*(-\sqrt{2}/2)) = \sqrt{2}/2$

$x_{2\_max} = -1/(2\lambda) = -1/(2*(-\sqrt{2}/2)) = \sqrt{2}/2$

точка минимума (-0.707, -0.707), точка максимума (0.707, 0.707)

$f_{min} = -\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 = -\sqrt{2}$

$f_{max} = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$

Ответ:
$f_{min} = -\sqrt{2}$
$f_{max} = \sqrt{2}$

Задача 2

Найти минимум (максимум) целевой функции:
$f(x_1, x_2)=1/3(x_1+1)^2+x_2$

при заданных ограничениях:
$g_1(x_1) = x_1 - 1 >= 0$
$g_2(x_2) = x_2 \quad >= 0$

Решение

Перед нами стоит задача решить случай, когда система ограничений содержит только неравенства

Найдем стационарные точки **безусловного** экстремума функции. Для этого определим частные производные и приравняет их к нулю. В результате получим систему 2ух уравнений относительно двух переменных

$f(x_1, x_2) = 1/3(x_1+1)^2+x_2$

Теперь найдем частные производные:

$\{(dL)/(dx_1) = 2/3*(x_1+1)$

$\{(dL)/(dx_2) = 1$

Решим полученную систему

$\{2/3*(x_1+1) = 0 \qquad x_1 = -1$

$\{x_2 = 0 \qquad x_2 = 0$

$f(-1, 0) = 0$

Так как $0 >= 0$, но $-1 < 1$ (из неравенств g) => точка (-1, 0) не лежит внутри области.

Теперь строим функцию Лагранжа для ограничения $x_1 >= 1$:

$L(x_1, x_2, \lambda) = 1/3(x_1+1)^2+x_2+ \lambda*(x_1-1)$

Вычислим частные производные функции и приравняем их к нулю

$\{dL/dx_1 = 2/3*(x_1+1) + \lambda = 0 \quad -> \quad \{2/3*(1+1) + \lambda = 0,$

$\{dL/dx_2 = 1 \qquad \lambda = -4/3, x_1 = 1, x_2 = 0$

$\{dL/d\lambda = x_1-1 = 0$

Данная точка (1, 0) удовлетворяет всем ограничениям

Рассмотрим ограничение $x_2 >= 0$. Функция Лагранжа в этом случае примет вид:

$L(x_1, x_2, \lambda) = 1/3(x_1+1)^2+x_2 + \lambda*x_2$ $\lambda = -1, x_1 = -1, x_2 = 0$

$\{dL/dx_1 = 2/3*(x_1+1) = 0$

$\{dL/dx_2 = 1 + \lambda = 0$

$\{dL/d\lambda = x_2 = 0$

Данная точка (-1, 0) не удовлетворяет ограничению (1)

Проверим достаточное условие минимума для точки (1, 0), так как она удовлетворяет всем ограничениям.

Вычислим вторую производную по x_1:

$(d^2L/dx_1^2) = 2/3 > 0$

Так как вторая производная положительна, точка (1, 0) - является точкой минимума.

f (1, 0) = 4/3 – минимум целевой функции, а точка (1, 0) – является точкой минимума

Ответ: $f_{min} = 4/3$