Математическое программирование, лекция 4

1. Метод дихотомии - расстояние между точками x_1, x_2 задается малой величиной б<=E

$x_1 = (a_0 + b_0 - б)/2$ и $x_2 = (a_0 + b_0 + б)/2$

2. Метод Фибоначчи.
   последовательность чисел Фибоначчи вырабатывается рекуррентной формулой: F*(n+2)* = *F*(n+1) + F_n,
   где n=1, 2, ... и F_1=F_2=1. Начальными членами последовательности будут 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... , n-е число Фибоначчи может быть вычислено также по формуле Бинэ:
   $F_n = ([(1 + sqrt(5))/2)]^n - [(1 - sqrt(5))/2]^n)/sqrt(5)$

Метод Фибоначчи состоит в просмотре точек, дробящих интервалы в отношениях, заданных числами F*(n-1), F*(n-2) Т.е. если принять длину исходного интервала за F*n, то длиной k-того интервала будет F*(n-k), а его пробные внутренние точки будут отстоять от левой границы на F*(n-k-2) и на F*(n-k-1) причем в одной из них значение функции всегда известно из предыдущего шага.
Рассмотрим метод Фибоначчи, если n = 2, 3, 4, 5, ... вычислений функции. Исходный интервал $[a_0, b_0]$.

Шаг 1. На 1-о1 итерации вычисляем пробные точки на начальном интервале по следующим формулам:
$x_1 = a_0 + F_n/F_(n + 2) * (b_0 - a_0)$
$x_2 = a_0 + F_n + 1/F_(n + 2) * (b_0 - a_0) = a_0 + b_0 - x_1$
и вычисляем значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$
Шаг 2. Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_2)$ и сокращаем интервал неопределенности, получая новый интервал [a_1, b_1] след. образом:
1) Если f(x_1) < f(x_2), то полагаем a_1 = a_0, b_1 = x_2, x_2 = x_1. Т.е. исключаем правую часть исходного интервала - подынтервал (x_2, b_0]
2) Если f(x_1) > f(x_2), то полагаем a_1 = x_1, b_1 = b_0, x_1 = x_2. Т.е. исключаем левую часть исходного интервала - подынтервал [a_0, x_1]
Шаг 3. Считаем новые x_1 и x_2 по формулам:

$x_1 = a_1 + (F_(n - 1))/(F_(n + 1))(b_1 - a_1)$
$x_1 = a_1 + F_(n)/(F_(n + 1))(b_1 - a_1)$

Результатом поиска методом Фибоначчи с n вычислениями функции является интервал неопределенности
$|(b_(n - 1) - a_(n - 1))|/2$, составляющий $1/F_(n + 2)$ части функции

Если на n-ом шаге надо получить решение с точность E, то должно выполняться условие:

$|b_n - 1 - a_n - 1|/2 = |b_0 - a_0|/F_n + 2 <= E$
Отсюда получаем: $|b_0 - a_0|/E <= F_(n + 2)$

3. Метод золотого сечения
   С ростом n из-за того, что $F_n/F_(n+2)$ бесконечная десятичная дробь с точкой минимума вследствие погрешностей вычислений.
   Рассмотрим минимизацию функции на единичном интервале [0, 1].

$t/1 = (1-t)/t$
или
$1-t = t^2$

Решая это квадратичное уравнение, получаем
$t_1, 2 = (-1 + -sqrt(5))/2$
Положительное решение $t = 0.618$, соответственно
$1-t = 0.382$
$lim(F_n - 1/F_n) = t = 0.618$

При использовании метода золотого сечения на каждой k-ой итерации интервал неопределенности сокращается до величины $t(b_k - 1 - a_k - 1) = 0.618(b_k - 1 - a_k - 1)$
Если исходный интервал имеет единичную длину, то величина интервала, получаемая в результате n вычислений значений функции равна $t^(n-1)$

$t/(1-t) = (1-t)/(t-(1-t))$ или $(1-t)^2 = 2t^2 - t$ или $1 - 2t + t = 2t^2 - t^2$ или $1 - t = t^2$

Шаг 1. На 1-ой итерации вычисляем пробные точки на начальном интервале по следующим формулам:
$x_1 = a_0 + (1-t)(b_0 - a_0) = a_0 + 0.382(b_0 - a_0)$
$x_2 = a_0 + t(b_0 - a_0) = a_0 + 0.618(b_0 - a_0)$

Шаг 2. Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_2)$ и сокращаем
Шаг 3. Проверяем критерий останова
$|b_k - a_k| <= E$

Шаг 4. На 2ой и последующих итерациях производим расчет только той точки и значение функции в ней, которые необходимо обновить:
в случае 1 вычисляем новое значение x_1 и $f(x_1)$;
в случае 2 вычисляем x_2 и $f(x_2)$
При этом применяем те же формулы (3, 5), только используем новые границы интервала, полученные на предыдущей итерации. Возвращаемся к шагу 2

Тема 2. Безусловная оптимизация функций одной переменной

Численные методы точечного оценивания с полиноминальной интерполяцией и с использованием производных

1. Метод точечного оценивания с квадратичной интерполяцией
2. Метод использования производных
3. Мы ведь сравниваем функцию в трех точка или двух, при этом мы не смотрим на значение величин, волнует только оно больше или меньше. В данных методах используется дополнительная информация в сравнениях точек.

Гладкая (непрерывно дифференцируемая) - функция, которая будет иметь первую производную на всем множестве определении функции (то есть не равна +-inf)
Метод основан на теореме Вейерштрасса - любую гладкую непрерывную f можно аппроксимировать с любой точностью полиномом достаточно высокого порядка.
Если есть полином первой степени - x
второй - x^2
третий - x^3
Если мы говорим о полиноме 10го порядка, значит имеем ввиду, что там есть x^10
Мы можем подобрать такой полином, который будет описывать функцию очень точно и скорее всего он будет высокого порядка. Мы можем заменить нашу функцию полиномом и найти оптимум этого полинома.
Согласно теореме Вейерштрасса качество оценки координаты точки оптимума, получаемых с помощью аппроксимирующего полинома, можно повысить 2-мя способами:
- Использованием полинома более высокого порядка;
- Уменьшением интервала аппроксимации
К данной группе относят в основном только 2 метода:
- Метод с квадратичной интерполяцией (метод Пауэлла)
- Метод кубической интерполяции (метод Дэвидона)
Суть в том, что для построения функции кубического

полинома нужно брать 4 точки, но в методе Дэвидона достаточно 2х

Если задана последовательность точек x_1, x_2, x_3 и известны соответствующие этим точкам значения функции $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$, то функция может быть аппроксимирована квадратичной функцией

$q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$

Причем значения a_0, a_1, a_2, определяются из условия совпадения значений функций полинома в трех указанных точках.