Математическое программирование, лекция 3

Чаще всего скорость сходимости a более важна, чем константа C.
Из двух алгоритмов с одинаковыми скоростями сходимости a быстрее сходится тот, для которого константа C меньше.
Линейно сходящийся алгоритм с C~0 вначале может сходиться быстрее, чем алгоритм с квадратичной скоростью сходимости, но с большим значением C. Такой алгоритм характеризуется *суперлинейной* скоростью сходимости.

3. Классический метод оптимизации

Классический подход к нахождению x*, если функция и её производные непрерывны, состоит в решении уравнения
f'(x) = 0
Точки, удовлетворяющие условию (2.1) называются стационарными, т.е. стационарными точками будут и точки оптимума (минимума и максимума) и точки горизонтального перегиба.

Если в точке x_0 достигается минимум, то левая часть уравнения 2.2 должна быть неотрицательной для любого достаточно малого h(|h| < E), как положительного, так и отрицательного. Для этого необходимо, чтобы f'(x_0)=0,

$f''(x_0)>0$, $f'''(x_0)=0$, $f''''(x_0) > 0$
Если функция f(x) и её производные непрерывны и первые (n-1) производные функций в точке x_0

Альтернативные методы решения (численные методы)
($\Phi(x) = f'(x) = 0$)
Половинного деления (средней точки, Больцано)
Простых итераций
Ньютона (Ньютона-Рафсона)
Секущих (хорд, линейной интерполяции)
Гибридный метод Ньютона - половинного деления
Стеффенсена

4. Основы численных методов исключения интервалов

Группы численных методов:
Исключения интервалов
Точечного оценивания с полиноминальной интерполяцией
С использованием производных

К 1-ой группе методов относят:
Метод деления интервала пополам
Метод "Золотого сечения"
Метод Фибоначчи
Метод дихотомии
Метод равномерного поиска

Градиент(первая производная) - показывает направление увеличения функции

Антиградиент - показывает направление уменьшения функции

Методы исключения интервалов - отбрасывают "неперспективные" участки функции.

Пусть функция f(x) - унимодальна на отрезке $a <= x <= b$, а её минимум достигается в точке $x * e[a, b]$
Рассмотрим точки x_1 и x_2, расположенные в интервале таким образом, что $a < x_1 < x_2 < b$

1. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то точка минимума $f(x)$ не лежит в интервале $[a, x_1]$ т.е. $x * e(x_1, b]$
2. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то точка минимума $f(x)$ не лежит в интервале $[x_2, b]$, т.е. $x * e[a, x_2)$
3. Если $f(x_1) = f(x_2)$, То можно исключить оба крайних подынтервала $[a, x1)u(x_2, b]$, а точка минимума $f(x)x * e[x_1, x_2]$

2 этапа методов исключения интервалов:
Этап установления границ интервала;
Этап уменьшения интервала.

Первый этап начинается с того, что задается начальная точка, а затем строится относительно широкий интервал, содержащий точку минимума.

Определение граничных точек такого интервала проводится с помощью эвристических методов, например *метода Свенна* (*Swann*), согласно которому $(k + 1)$-я пробная точка определяется по рекуррентной формуле $x_(k + 1)$ = x_k + 2^k /\

Ищем точку, если заметим альтернативное поведение функции в конкретной точке, то берем отрезок с этой точкой и пред предпоследней точкой ([x1, x3]).

Знак /\ определяется путем сравнения значений f(x_0), f(x_0 + |/\|), f(x_0 - |/\|)
Если f(x_0 - |/\|) >= f(x_0) >= f(x_0 + |/\|)

1. Метод деления интервала пополам (трехточечный)

Этот метод позволяет исключить ровно половину интервала. Метод требует определения трех точек интервала.
Известен первоначальный интервал $[a_0, b_0]$ и необходимо найти минимум данной функции на заданном отрезке с некоторой точностью E

1. Положим $x_m = (a_0 + b_0)/2$ и вычисляем значения функции $f(x_m)$
2. Вычисляем точки согласно следующим соотношениям:
   $x_1 = a_0 + ((b_0 - a_0)/4)$ $x_2 = b_0 - ((b_0 - a_0)/4)$
   Затем вычисляем значения функции: $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
   Заметим, что точки x_1, x_m, x_2 делят интервал $[a_0, b_0]$ на 4 равные части.
3. Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_m)$. Если $f(x_1) < f(x_m)$ исключаем подынтервал $(x_m, b_0]$, положив $b_1 = x_m$. Средней точкой нового интервала поиска становится точка x_1. Следовательно, необходимо положить

$x_m = x_1, a_1 = a_0$. Переходим к шагу 5. Если $f(x_1) >= f(x_m)$, переходим к шагу 4.

4. Сравниваем $f(x_2)$ и $f(x_m)$. Если $f(x_2) < f(x_m)$ исключаем подынтервал $[a_0, x_m)$, положив $a_1 = x_m$. Средней точкой нового интервала поиска становится точка x_2. => Необходимо положить $x_m = x_2$, $b_1 = b_0$. переходим к шагу
5. Если $f(x_2) >= f(x_m)$, то исключаем сразу 2 подынтервала $[a_0, x_1)$ и $(x_2, b_0]$, положив $a_1 = x_1$ и $b_1 = x_2$. x_m продолжает
6. оставаться средней точкой нового интервала. Переходим к шагу 5.
7. Проверяем критерий останова. Если длина оставшегося интервала неопределенности $[a_k, b_k]$ на текущей итерации k становится меньше заданной точности $|b_k - a_k| <= E$
   Поиск заканчиваем. Минимум функции равен $f(x_m)$.
   В противном случае возвращаемся к шагу 2 и начинаем новую итерацию
   На каждой итерации требуется 2 доп. вычисления. Если проверено n вычислений значений функций, то длина полученного интервала составляет (1/2)^((n-1)/2) величины исходного интервала (n = 3, 5, 7, ...) т.е. после каждой итерации сокращается в два раза
   Из всех методов поиска на равных интервалах (2-ух точечных. 4-ех точечный и т.д.) 3-ех точечный поиск или метод деления интервала пополам отличается наибольшей эффективностью.