Математическое программирование, лекция 5

Безусловная оптимизация функций нескольких переменных

2. Норма вектора

Говорят, что в пространстве R^n задана норма, если каждому вектору x из R^n сопоставлено вещественное число ||x||, называемое нормой вектора x и обладающее следующими свойствами:

1. *Положительная определенность* ||x|| >= 0, причем ||x|| = 0 тогда и только тогда, когда x = 0;
2. *однородность* ||ax|| = |a| ||x|| для любого вектора x и любого числа a;
3. *неравенством* треугольника ||x+y||<=||x||+||y|| для любых векторов x и y.

Длина вектора обладает всеми этими тремя свойствами.

Используемые нормы:

- p-нормы $||x||_p$ = $sqrt(sum(|x_i|^p, 1, n), p)$
- inf-норма (норма-максимум, sup-норма, кубическая норма):
  $||x||_{inf}$ = $max|x_i|$
  В вычислительных методах наиболее

употребительными из p-норм являются следующие две нормы:

- норма-сумма $||x||_1 = sum(|x_i|, 1, n)$
- евклидова норма $||x||_2 = sqrt(sum(|x_i|^2, 1, n)$ где x, x - скалярные произведения векторов

3. Абсолютная и относительная погрешности вектора. Сходимость по норме вектора

В качестве меры степени близости векторов x и x *естественно использовать величину $||x-x||*

$, являющуюсяаналогомрасстояниямеждуточкамихихи*. Абсолютн$

,

Относительная погрешность вектора

$x* : б(x*) = (||x - x*||)/||x||$

Выбор нормы $||x||_1$ отвечает случаю, когда малой должна быть суммарная абсолютная ошибка в компонентах решения;

выбор $||x||_2$ соответствует критерию малости среднеквадратичной ошибки;

выбор нормы $||x||_{inf}$, означает, что малой должна быть максимальная из абсолютных ошибок в компонентах решения.

Сходимость по норме (на каждой итерации рассчитываем норму и анализировать насколько она мала) эквивалентна сходимости

4. Определение основных понятий

1. Градиент функции представляет собой вектор-столбец, составленный из 1-ых производных функции по всем независимым переменным.
2. Матрица Гессе представляет собой симметричную матрицу вторых частных производных
   $\nabla^2 = H_f(x)$
3. Скалярная функция ф(x) n-переменных называется квадратичной формой, если $\phi(x) = x^T Qx$, Где Q - некоторая симметричная матрица, x - вектор переменных.
4. Матрица Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда значение квадратичной формы $x^T Qx > 0$, для любого вектора $\forall x != 0$
5. Матрица Q является положительно полуопределенной тогда и только тогда, когда значение квадратичной формы $x^T QX >= 0$, для любого вектора $\forall x$ и существует вектор $Ex != 0$, такой что $x^T Qx = 0$
6. Матрица Q является отрицательно полуопределенной тогда и только тогда, когда значение квадратичной формы $x^T Qx <= 0$, такой что $x^T Qx = 0$ или , если -Q -положительно полуопределенная матрица
7. Матрица Q является неопределенной, если её квадратичная форма может принимать как положительные так и отрицательные значения.
8. Главным минором порядка k квадратной матрицы Q порядка nxn называется определитель подматрицы

порядка kxk полученной путем исключения из матрицы Q произвольных $n-k$ строк и соответствующих этим строкам столбцов. Общее кол-во главных миноров для квадратной матрицы порядка что равно $2^n - 1$

9. Ведущим (или угловым) главным минором порядка k квадратной матрицы Q порядка nxn называется определитель подматрицы порядка kxk полученной путем исключения из матрицы Q последних $n-k$ строк и соответствующих этим строкам столбцов. Кол-во ведущих главных миноров для квадратной матрицы порядка nxn равно n.
10. Множество P c_ R^n называется выпуклым, если оно содержит всякий отрезок, концы которого принадлежат P. т.е. если для любых P_1, P_2 e P и $0 <= (theta) <= 1$ справедливо $(theta)p_2 + (1-(theta))p_1 eP$

5. Проверка матрица на положительную определенность и полуопределенность

Для проверки определенности служит критерий Сильвестра:

Матрица положительно определена, если:

1) все диагональные элементы матрицы положительны

2) все угловые миноры матрицы положительны

Матрица отрицательно определена, если:

1. Все диагональные элементы матрицы отрицательны;
2. Все угловые миноры матрицы имеют чередующиеся знаки, начиная со знака "-".

6. Необх. и дост. условия сущ мин ф многих переменных

для наличия у дважды лфи функции f(x) опред. на множестве x c_ R^n в точке x *e R^n локального минимума (строгого или нестрогого) f(x*) = min(f(x)) необходимо выполнения 2-ух условий:
1. Равенства нулю градиента ▼f(x*)=0 (условие экстремума первого порядка). Точки, удовлетворяющие этому условию называются стационарными*
*2. условия положительной полуопределенности матрицы Гессе: $H_f(x*)$

Алгоритм решения задачи нахождения безусловного экстремума функции многих переменных классическим методом с помощью необходимых и достаточных условий

1. Записать необходимые суловия экстремума первого порядка и найти стацю точки в результате решения системы в общем случае n нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными
2. В найденных стационарных точках проверить выполнение достаточных условий, а если они не

выполняются, то необходимых условий второго порядка

3. вычислить уравнение f(x*) В точках экстремума
4. Если достаточные условия не выполняются, а необходимые условия второго порядка выполняются. Необходимо проверить стац. точки на возможны экстремум, анализируя поведение функции на окрестностях