习题课

Zqy

December 2023

1 重要知识点梳理

1. 毕奥-萨伐尔定律

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times d\vec{r}}{r^3}$$

2. 几种特殊磁场分布

无限长直导线：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

带电圆环中心：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

带电圆环轴线：

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

无限长螺线管内部：

$$B=\mu_0 nI$$

均匀无限大导电平板：

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

磁矩：

$$\vec{B}_{//}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu_{//}}{r^3}$$

$$\vec{B}_{\perp}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_{\perp}}{r^3}$$

3. 带电粒子在磁场中运动：

$$R=\frac{mv}{qB},\omega=\frac{qB}{m}$$

磁矩守恒：

$$\mu=\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B}=Const$$

$$R=\frac{mv}{qB}=\sqrt{\frac{2m\mu}{q^2B}}$$

磁镜比：

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2sin^2\theta_m}{B_0}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{B_m}\Rightarrow sin\theta=\sqrt{\frac{B_0}{B_m}}=\sqrt{\frac{1}{R_m}}$$

4. 静磁场高斯定理：

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

5. 环路定理：

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I,\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$$
$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_0,\nabla\times\vec{H}=\mu_0\vec{j}_0$$
$$\oint_L\vec{M}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I',\nabla\times\vec{M}=\mu_0\vec{j}'$$

6. 边值条件：

$$\vec{i}'=(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\times\vec{n}$$
$$\vec{i}_0=(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\times\vec{n}$$
$$(\vec{B}_1-\vec{B}_2)\cdot\vec{n}=0$$

边界无传导电流时满足折射定律：

$$\frac{tan\theta_1}{\mu_1}=\frac{tan\theta_2}{\mu_2}$$

7. 磁路基尔霍夫定理：

$$R_m=\sum\frac{dl}{\mu_0\mu_rS}$$
$$U_m=\int\vec{H}\cdot d\vec{l}$$
$$U_m=\sum\Phi_mR_m$$

8. 电磁铁

$$F=\frac{B_0^2S}{2\mu_0}$$

2 第 13、14 次作业

4.1

由毕奥-萨伐尔定律

$$B=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\mu_0Irdx}{2\pi(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0I}{2\pi r}\frac{l}{\sqrt{l^2+4r}}$$
$$\lim_{l>>r}B=\frac{\mu_0I}{2\pi r}$$

4.2

直导线在 O 点产生的磁感应强度为 0，而内外圆环在 O 点产生的磁感应强度分别为：

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}$$

$$B_b = -\frac{\mu_0 I}{8\pi b}$$

故总磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{8}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

带入 I=20A，a=30mm，b=50mm

$$B = 42\mu T$$

4.3

可以视为无限长直导线和圆环在 O 点磁感应强度的叠加：

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

则总磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}(1 + \frac{1}{\pi})$$

4.6

可以视为长为 $2Rsin\theta$ 的直导线和圆心角为 $2\pi - 2\theta$ 的圆环在 O 点磁感应强度的叠加，利用 4.1 的结果 ($r = Rcos\theta$,$l = 2Rsin\theta$):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} tan\theta$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{\pi - \theta}{\pi}$$

则总磁感应强度为：

$$B = \frac{mu_0 I}{2\pi R}(1 - \frac{\theta}{\pi} + tan\theta)$$

4.8

电子运动产生的电流为：

$$I = \frac{q}{t} = \frac{e}{\frac{2\pi R}{v}}$$

磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0 e v}{(2\pi R)^2} = 12.5T$$

4.11

直接利用磁矩产生的磁感应强度公式计算：

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi R^3} \Rightarrow \mu = 8.64 * 10^{22} Tm^2$$

3 第 15 次作业

4.12

圆柱和圆管内电流密度大小分别为:

$$j_1 = \frac{I}{\pi a^2}, j_2 = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$$

由安培环路定理，r<a 时:

$$B_1 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

a<r<b 时:

$$B_2 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b<r<c 时:

$$B_3 2\pi r = \mu_0(\pi r^2 - \pi b^2) j_2 \Rightarrow B_3 = \frac{\mu_0 I(r^2 - b^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)}$$

r>c 时:

$$B_4 = 0$$

4 第 16、17 次作业

4.13

（1）导体内电流密度为:

$$j = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$$

空心管可视为电流密度为 j 和-j 的导体管电流叠加而成，导体管轴线上的磁感应强度由-j 的导体管提供

$$B_1 = \frac{\mu_0 j(\pi b^2)}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \frac{b^2}{a^2 - b^2}$$

而空心管轴线的磁感应强度由半径为 d 的导体管提供

$$B_2 = \frac{\mu_0 j(\pi d^2)}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}$$

根据右手定则判断方向均向上

（2）设 $OP = \vec{r_1}, OP' = \vec{r_2}$, 整体正向电流产生的磁场为:

$$B_{1P} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r_1}$$

空心管内反向电流产生的磁场为:

$$B_{2P} = -\frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r_2}$$

叠加可得：

$$B_P = \frac{\mu_0}{2} jd = \frac{\mu_0 Id}{2\pi(a^2 - b^2)}$$

(3) 代入数据得

$$B_1 = 2 \times 10^{-6}T, B_2 = B_P = 2 \times 10^{-4}T$$

4.20

无限大载流平面产生的磁场为 $\frac{1}{2}\mu_0 i$, 直接叠加：

$$B_0 - \frac{\mu_0 i}{2} = B_1$$

$$B_0 + \frac{\mu_0 i}{2} = B_2$$

解得：

$$i = \frac{B_2 - B_1}{\mu_0}, B_0 = \frac{B_1 + B_2}{2}$$

$$F = iB_0 = \frac{B_2^2 - B_1^2}{2\mu_0}$$

4.31

根据能量守恒和牛顿定律：

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU$$

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

解得：

$$x = 2R = 2\frac{mv}{qB} = \sqrt{\frac{8mU}{qB^2}}$$

代入 $U = 750V, B = 3580G = 0.358T, x = 10cm$

$$\frac{q}{m} = 4.68 \times 10^6 C \cdot kg^{-1}$$

4.32

直接将速度分解到 x 方向和 y 方向，v_x 做匀速直线运动：

$$x = v_0 cos\beta t$$

v_y 在 yz 平面内做圆周运动, 由前述结论：

$$R = \frac{mv_0 sin\beta}{qB}, \omega = \frac{qB}{m}$$

结合初始条件，直接写出 yz 平面的轨迹：

$$z = \frac{mv_0 sin\beta}{qB} cos(\frac{qB}{m}t)$$

$$y=\frac{mv_0 sin\beta}{qB}sin(\frac{qB}{m}t)$$

4.36

由电荷切割磁感线产生的电动势为 $E=Bav$, 导线中的电流为:

$$I=\frac{E}{R}=\frac{Bav}{\rho\frac{a}{bl}}=\frac{Bvbl}{\rho}$$

水银受到该电流的安培力:

$$F=BIa=\frac{B^2vabl}{\rho}$$

加磁场后水银受到外力的压强为:

$$P'=P-\frac{F}{ab}=P-\frac{B^2vl}{\rho}$$

根据压强和速度的正比关系可得到:

$$\frac{v}{v_0}=\frac{P'}{P}\Rightarrow v=\frac{\rho p}{\rho p+\rho v_0 B^2}$$

5 第 18、19 次作业

5.4

(1)

$$N=2\frac{\rho(\frac{\pi d^2}{4}l)}{M_A}N_A=1.6\times 10^{24}$$

(2)

$$m=Nm_0=1.6*9.27=14.6Am^2$$

(3)

$$i=M=\frac{\mu}{\frac{\pi d^2}{4}l}=1.55\times 10^6$$

(4)

$$B=\mu_0 i=1.94T$$

5.5

(1)

$$H=\frac{NI}{l}=2\times 10^4$$

(2)

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H=7.76\times 10^5$$

(3)

$$\chi=\frac{M}{H}=38.8$$

(4)

$$i = M = 7.76 \times 10^5$$
$$\mu_r = 1 + \chi = 39.8$$

5.6

球体的带电量和面电荷密度分别为:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 RU \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 U}{R}$$

取环形面元:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma 2\pi R sin\theta R d\theta}{\frac{2\pi}{\omega}}$$

环形面元的磁矩:

$$d\mu = dI \times \pi(R sin\theta)^2 = \pi\epsilon_0 U\omega R^3 sin^3\theta$$

对球面积分:

$$\mu = \pi\epsilon_0\omega R^3 U \int_0^\pi sin^3\theta d\theta = \frac{4\pi\epsilon_0\omega R^3 U}{3}$$

5.9

(1) 代入 $C = 1.8 \times 10^(-3) K$

$$M = 1.7 A/m$$

(2) 回代数据:

$$T = 210K$$

5.14

(1)

$$H = i_0$$

则上下部分磁感应强度分别为:

$$B_1 = \mu_0\mu_{r1} i_0$$
$$B_2 = \mu_0\mu_{r2} i_0$$

(2) 上下部分磁化强度分别为:

$$M_1 = \frac{B}{\mu_0} - H = (\mu_{r1} - 1) i_0$$
$$M_2 = \frac{B}{\mu_0} - H = (\mu_{r2} - 1) i_0$$

由 $\vec{i'} = (\vec{M_1} - \vec{M_2}) \times \vec{n}$

$$i'_1 = (\mu_{r1} - 1) i_0$$
$$i'_2 = (\mu_{r1} - \mu_{r2}) i_0$$
$$i'_3 = (\mu_{r2} - 1) i_0$$

5.16

根据磁场环路定理, 在导体内部 x 位置处:

$$2lH = 2xlj \Rightarrow H = jx \Rightarrow B = \mu_0 jx$$

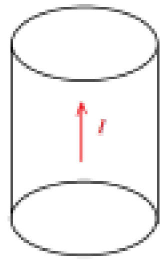
导体外部:

$$2lH = lbj \Rightarrow H = \frac{1}{2}bj \Rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_r\mu_0 bj$$

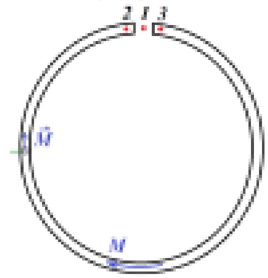
6 补充习题

1. 一载有电流 I 的无限长直导线垂直接到地面上，电流到达地面后分散开来，均匀向各个方向流去。求（1）地面上距离导线为 r 处 P 的磁感应强度.（2）大地下方距离地面垂直距离为 d、距电流轴线距离为 r 的 Q 点处磁感应强度。

2. 一半径为 R 的无限长圆柱面上载有电流 I，I 平行于圆柱面的轴线流动并均匀分布。求（1）全空间磁场分布（2）圆柱面受到的压强。



3. 一铁环均匀磁化，磁化强度为 M，M 沿环的方向，环上有一个很窄的空气隙。已知环的截面积半径比环长小很多，求 1，2，3 点的磁场强度 H 和磁感应强度 B。



4. 同轴电缆的内导体是半径为 a 的空心圆柱，外导体是半径为 b 的薄圆柱面。内外导体间充有绝对磁导率分别为 μ_1, μ_2, μ_3 的磁介质，每种磁介质均占三分之一圆柱体积。设内外圆柱通有轴线方向大小相等方向相反的电流，内圆柱电流密度为 i，求（1）各区域磁感应强度和磁场强度，（2）单位长度储能