第一题

【2.1】计算有限长序列$x(n)$的DFT，假设序列长度为N。

(1) $x(n)=\delta(n)$

(2) $x(n)=\delta(n-n_0),0<n_0<N$

(3) $x(n)=a^n,0\le n\le N-1$

(4) $x(n)=nR_N(n)$

标注出k的取值范围,$0\le k\le N-1$

$$nx(n)\overset{Z}{\longleftrightarrow}-z\frac{dX(z)}{dz}$$

解：(1) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)W_N^{kn}=1$

(2) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n-n_0)W_N^{kn}=W_N^{kn_0}$

(3) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\frac{1-(aW_N^k)^N}{1-(aW_N^k)}=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$

(4) $x_1(n)=R_N(n)\qquad X_1(z)=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

$$X(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=-z\frac{dX_1(z)}{dz}\bigg|_{z=W_N^{-k}}=-\frac{N}{1-W_N^k},k\ne 0$$

$$X(k)\big|_{k=0}=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^0=\sum_{n=0}^{N-1}n=\frac{N(N-1)}{2}$$

$x(n)=n^2R_N(n)$? $\quad X(0)=\frac{N(N-1)(2N-1)}{6}\quad X(k)=\frac{N(N-2)W_N^k-N^2}{\left(1-W_N^k\right)^2},k\ne 0$

第一题

解：(4) (解法二)

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}nR_N(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{nk}$$

左右两边同乘W_N^k:

$$W_N^kX(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{(n+1)k}=\sum_{n=1}^{N}(n-1)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{nk}+NW_N^{Nk}-\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nk}$$

$$(1-W_N^k)X(k)=-N+\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nk}$$

当$k=0$时，$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}n=\frac{(N-1)(N-2)}{2}$　　易错点：$k=0$ 的情况一定要单独讨论！

当$k=1,\dots,N-1$时，$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nk}=N\delta(k)=0$

$$X(k)=-\frac{N}{1-W_N^k}$$

所以综上，$X(k)=\begin{cases}\frac{(N-1)(N-2)}{2},k=0\\-\frac{N}{1-W_N^k},k=1,\dots,N-1\end{cases}$

第二题

【2.2】研究两个周期序列$\tilde{x}(n)$和$\tilde{y}(n)$， $\tilde{x}(n)$周期为N而$\tilde{y}(n)$周期为M，$M \neq N$。序列$\tilde{w}(n)$定义为$\tilde{w}(n) = \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n)$。

（1）求序列$\tilde{w}(n)$的最小周期，并给出证明过程。

（2）设$\tilde{X}(k)$为$\tilde{x}(n)$的DFS， $\tilde{Y}(k)$为$\tilde{y}(n)$的DFS， $\tilde{W}(k)$为$\tilde{w}(n)$的DFS。试用$\tilde{X}(k)$和$\tilde{Y}(k)$表示$\tilde{W}(k)$。

解：（1）

$$Q = LCM(M,N) = k_1 M = k_2 N$$

$$\tilde{w}(n) = \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n)$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}(n+Q) &= \tilde{x}(n+k_2N) + \tilde{y}(n+k_1M) \\ &= \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n) = \tilde{w}(n)\end{aligned}$$

下面证明其是最小周期

$\exists K < Q$

$$\begin{aligned}\tilde{w}(n+K) &= \tilde{x}(n+K) + \tilde{y}(n+K) \\ &= \tilde{w}(n) = \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n)\end{aligned}$$

$$\tilde{x}(n+K) - \tilde{x}(n) = \tilde{y}(n) - \tilde{y}(n+K)$$

不能同时等于0，矛盾

第二题

(2)

$$\tilde{W}(k)=\sum_{n=0}^{Q-1}\tilde{w}(n)W_Q^{nk}=\sum_{n=0}^{Q-1}[\tilde{x}(n)+\tilde{y}(n)]\tilde{x}(n)W_Q^{nk}=\sum_{n=0}^{Q-1}\tilde{x}(n)W_Q^{nk}+\sum_{n=0}^{Q-1}\tilde{y}(n)W_Q^{nk}$$

对于$\tilde{x}(n)$,可以把上式看成长为N的k_2段相加，令$n'=n-lN$，其中$0\le n'\le N-1$

$$\tilde{X}_Q(k)=\sum_{n=0}^{Q-1}\tilde{x}(n)W_Q^{nk}=\sum_{n'=0}^{N-1}\tilde{x}(n')W_Q^{n'k}\sum_{l=0}^{k_2-1}W_Q^{lNk}=\sum_{n'=0}^{N-1}\tilde{x}(n')e^{-\frac{2\pi}{N}\frac{k}{k_2}n'}\sum_{l=0}^{k_2-1}W_Q^{lNk}=\tilde{X}(\frac{k}{k_2})\sum_{l=0}^{k_2-1}W_Q^{lNk}$$

其中，

$$\sum_{l=0}^{k_2-1}W_Q^{lNk}=\sum_{l=0}^{k_2-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{k_2}k}\right)^l=\begin{cases}k_2, & k\text{为}k_2\text{倍数时}\\ \dfrac{1-\left(e^{j\frac{2\pi}{k_2}k}\right)^{k_2}}{1-e^{j\frac{2\pi}{k_2}k}}=0, & \text{其他}\end{cases}=k_2\delta(k-k_2)$$

则有：

$$\tilde{X}_Q(k)=k_2\tilde{X}\left(\frac{k}{k_2}\right)\delta(k-qk_2),\tilde{Y}_Q(k)=k_1\tilde{Y}\left(\frac{k}{k_1}\right)\delta(k-pk_1)$$

$$\tilde{W}(k)=\tilde{X}_Q(k)+\tilde{Y}_Q(k)=k_2\tilde{X}\left(\frac{k}{k_2}\right)\delta(k-qk_2)+k_1\tilde{Y}\left(\frac{k}{k_1}\right)\delta(k-pk_1)$$

第三题

【2.3】设$X(k)$表示长度为N的有限长序列$x(n)$的DFT。

（1）证明如果$x(n)$满足关系式$x(n)=-x(N-1-n)$，则$X(0)=0$。

（2）证明当N为偶数时，如果$x(n)=x(N-1-n)$，则$X\left(\frac{N}{2}\right)=0$。

证明：（1）

$$X(0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^0=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)=\sum_{n=0}^{N-1}-x(N-1-n)$$

$$2X(0)=0\Rightarrow X(0)=0$$

（2）

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n\frac{N}{2}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{jn\pi}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)(-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)(-1)^{N-1-n}\overset{①}{=}\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)(-1)^{n-1}$$

①处等号：N为偶数

$$2X\left(\frac{N}{2}\right)=0\Rightarrow X\left(\frac{N}{2}\right)=0$$

第四题

【2.4】已知序列$x(n) = a^n u(n)$，$0 < a < 1$，对其z变换$X(z)$在单位圆上N等分采样，采样值为$X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}}$，$0 \le k \le N-1$。

（1）求有限长序列IDFT$[X(k)]$。

（2）若$x(n) = a^n R_N(n)$，$0 < a < 1$，重复上述过程。

（3）试作分析比较和解释上述两个结果。

解：（1）

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}} = \left.\frac{1}{1-az^{-1}}\right|_{z=W_N^{-k}} = \frac{1}{1-aW_N^k}$$

$$= \frac{1}{1-a^N} \cdot \frac{1-a^N W_N^{Nk}}{1-aW_N^k} = \frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1}(aW_N^k)^n$$

$$= \frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{nk}$$

$$\therefore \mathrm{IDFT}\left[X(k)\right] = \frac{1}{1-a^N} a^n R_N(n)$$

（2）

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{nk}$$

$$\therefore \mathrm{IDFT}\left[X(k)\right] = a^n R_N(n) = x(n)$$

（3）第一问中序列长度无限长，频域N点采样，时域混叠；第二问中序列长度为N，当频域采样点数M满足$N \le M$时，就可以不失真恢复出原序列。

第五题

【2.5】证明DFT的帕斯维尔关系式

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

证明:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n)\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]^*\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)X(k)\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2\end{aligned}$$

【2.6】已知两个有限长序列为：

$$x(n)=\begin{cases} n+1, & 0\le n\le 3 \\ 0, & 4\le n\le 6 \end{cases}\qquad y(n)=\begin{cases} -1, & 0\le n\le 4 \\ 1, & 5\le n\le 6 \end{cases}$$

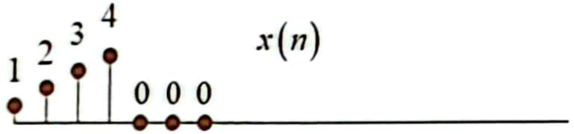
（1）试画出序列$x(n)$和$y(n)$的图。

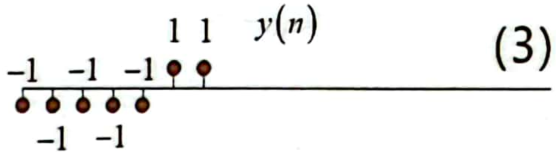
（2）作图画出线性卷积$f_1(n) = x(n) * y(n)$以及圆周卷积$f_2(n) = x(n)\otimes y(n)$的结果，并比较异同

（3）设$x_1(n)$和$y_1(n)$的圆周卷积与$x(n)$和$y(n)$的线性卷积相等，画出$x_1(n)$和$y_1(n)$。

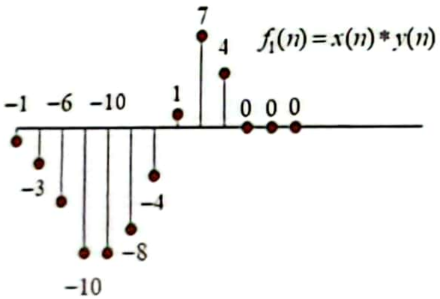
解：

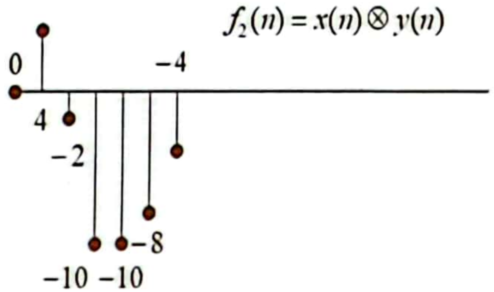
（1）





（2）





（3）圆周卷积与线性卷积相等而不产生混淆的必要条件是$L \ge N + M - 1$。故在$x(n)$和$y(n)$后面补零到$7 + 7 - 1 = 13$点即可保证两者相等。

易错点：值为0的点也需要在图中标注；补零的位数不对，应当补到n=12的位置。

拓展（补零对DFT的影响）

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

【T 2.1】已知$x(n)$是N点的有限长序列，$X(k) = DFT[x(n)]$。现采用两种补零方法：

（1）在$x(n)$的每两个点之间补进$r-1$个零值点，得到一个rN点的有限长序列

$$y_1(n) = \begin{cases} x\left(n/r\right) & n = ir, i = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & others \end{cases}$$

给出$DFT[y_1(n)]$与$X(k)$的关系。

（2）将$x(n)$的长度扩大r倍（在末尾补0来延长），得到一个rN点的有限长序列

$$y_2(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & N \le n \le rN-1 \end{cases}$$

给出$DFT[y_2(n)]$与$X(k)$的关系。

拓展（补零对DFT的影响）

解：(1)

$$y_1(n)=\begin{cases} x\left(n/r\right) & n=ir, i=0,\dots,N-1 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$X(k)=DFT\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}, 0\le k\le N-1$$

$$Y_1(k)=DFT\left[y_1(n)\right]=\sum_{n=0}^{rN-1}y_1(n)W_{rN}^{nk}=\sum_{i=0}^{N-1}x\left(\frac{ir}{r}\right)W_{rN}^{irk}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik}, 0\le k\le rN-1=X\left((k)\right)_N R_{rN}(k)$$

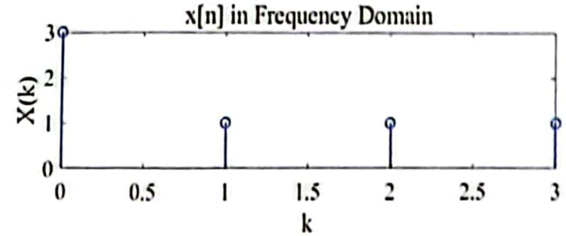
$X\left((k)\right)_N$ 的定义见书P147

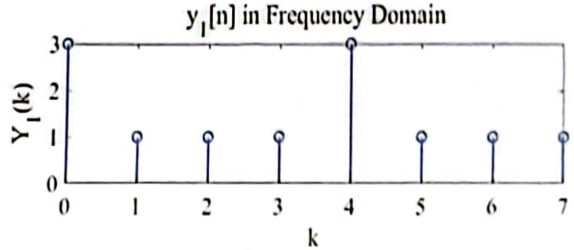
$Y_1(k)$是将$X(k)$（周期为N）以N为周期延拓r次而形成的序列，$Y_1(k)$的周期为rN。

$$r=2$$

$$x=[\underline{1},1,0,1]$$

$$y_1=[\underline{1},0,1,0,0,0,1,0]$$





拓展（补零对DFT的影响）

(2)

$$y_2(n)=\begin{cases}x(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & N\le n\le rN-1\end{cases}$$

$$X(k)=DFT\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},0\le k\le N-1$$

$$\bullet Y_2(k)=DFT\left[y_2(n)\right]=\sum_{n=0}^{rN-1}y_2(n)W_{rN}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{rN}^{nk}$$

$$=X\left(\frac{k}{r}\right),k=lr,l=0,1,\cdots,N-1$$

$$\bullet Y_2(k)=DFT\left[y_2(n)\right]=\sum_{n=0}^{rN-1}y_2(n)W_{rN}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{rN}^{nk}$$

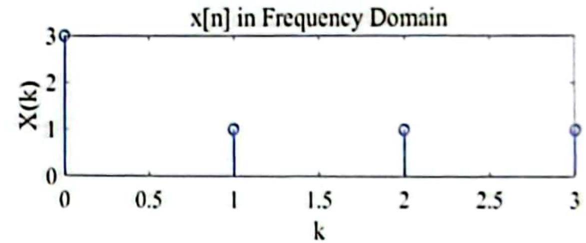
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)W_N^{-jn}\right]W_{rN}^{nk}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{n\left(\frac{k}{r}-j\right)}$$

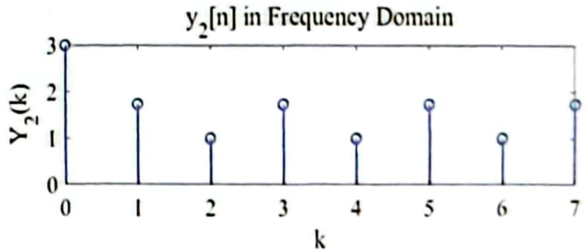
$$=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\frac{1-W_N^{N\left(\frac{k}{r}-j\right)}}{1-W_N^{\left(\frac{k}{r}-j\right)}},\frac{k}{r}\ne\text{整数},0\le k\le rN-1$$

$r=2$

$x=[\underline{1},1,0,1]$

$y_2=[\underline{1},1,0,1,0,0,0,0]$





$Y_2(k)$相当于在$X(k)$每两个值中间插入$r-1$个其他数值，而当k为r的整数倍时，$Y_2(k)$与$X(k/r)$相等。

拓展（DFT的圆周共轭对称性）

【T 2.2】已知复数有限长序列$f(n)$由两个实有限长序列$x(n)$、$y(n)$组成$(0 \le n \le N-1)$，即有 $f(n) = x(n) + jy(n)$，且知:

(1)$F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$,

(2)$F(k) = DFT[f(n)] = 1 + jN$,试用$F(k)$来求$X(k)$、$Y(k)$及$x(n)$、$y(n)$($a, b$为实数，采用DFT的性质来求解)。

解:

（1）由题意，有:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{nk} = \sum_{n-0}^{N-1}[x(n) + jy(n)]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} + j\sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{nk}$$

$$= \frac{1-a^N}{1-aW_N^{nk}} + j\frac{1-b^N}{1-bW_N^{nk}}$$

拓展（DFT的圆周共轭对称性）

根据DFT的圆周共轭对称性

$$X(k) = DFT[x(n)] = DFT[Re[f(n)]] = F_{ep}(k) = \frac{1}{2}[F(k) + F^*(N-k)] = \frac{1-a^N}{1-aW_N^{nk}}$$

$$Y(k) = DFT[y(n)] = DFT[Im[f(n)]] = \frac{1}{j}F_{op}(k) = \frac{1}{2j}[F(k) - F^*(N-k)] = \frac{1-b^N}{1-bW_N^{nk}}$$

又因为

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{nk} = \frac{1-a^N}{1-aW_N^{nk}}$$

所以$x(n) = a^n R_N(n)$

同理，$y(n) = b^n R_N(n)$

拓展（DFT的圆周共轭对称性）

(2) 同 (1) 可知，

$$X(k) = DFT[x(n)] = DFT[Re[f(n)]] = F_{ep}(k) = \frac{1}{2}[F(k) + F^*(N-k)] = 1, \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$Y(k) = DF[y(n)] = DFT[Im[f(n)]] = \frac{1}{j}F_{op}(k) = \frac{1}{2j}[F(k) - F^*(N-k)] = N,$$

$$0 \le k \le N-1$$

由此可知

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,W_N^{-nk} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-W_N^{-nN}}{1-W_N^{-n}} = \delta(n)R_N(n)$$

同理

$$y(n) = N\delta(n)R_N(n)$$