总结答疑时间：2025年1月2日（周四）上课时间（上午、下午）
答疑地点：上课教室GT-B210
考试时间：2025年1月11日（周六）下午 14:30—16:30
考试地点：高新校区3号学科楼
课程号006187.02（上午班）G3-107(43) G3-108(53)
课程号006187.01（下午班） G3-109(84)
考试要求：①仅能携带一张A4纸（双面可写字）
②需要带计算器

【1.1】已知$X(e^{j\omega})$是序列$x(n)$的DTFT，求下列序列的DTFT。

(1) $x^*(n)$ 共轭性　　(2) $\mathrm{Re}[x(n)]$ 对称性　　(3) $x(2n)$ $\Longleftrightarrow$ (4) $g(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{2}), n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases}$

解：(1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x*(n)e^{-j\omega n} = \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right)^* = X^*(e^{-j\omega})$

(4) $G(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j\omega n} = \sum\limits_{n\text{为偶数}} x\left(\frac{n}{2}\right)e^{-j\omega n} \overset{k=\frac{n}{2}}{=} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\omega k} = X(e^{j2\omega})$

(2) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[x(n)]\, e^{-j\omega n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(x(n)+x^*(n))\right]e^{-j\omega n}$

$= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e(e^{j\omega})$ 共轭对称分量

构造$x(n)$

(3) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-j\omega n} = \sum\limits_{n\text{为偶数}} x(n)e^{\frac{-j\omega n}{2}} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(n) + (-1)^n x(n)]e^{\frac{-j\omega n}{2}}$ n为奇数时取零

$= \frac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{\frac{-j\omega n}{2}} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi n}x(n)e^{\frac{-j\omega n}{2}}$

$= \frac{1}{2}X\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{\frac{j(\omega-2\pi)}{2}}\right)$ ±都是对的 $e^{-j\pi n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$

【1.2】求下列Z变换的原序列$x(n)$：

(1) $X(z)=\log(1-\frac{1}{2}z^{-1})\quad |z|>1/2$ (2) $X(z)=e^{1/z}$ 设$x(n)$为右边序列

思路：Taylor展开或者Z变换的微分性质以及初值定理

$$nx(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{dX(z)}{dz}$$

解：(1) 方法一：$X(z)=\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{n}}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\frac{1}{n2^{n}}u(n-1))z^{-n}$ 定义式

$\xRightarrow{\text{z反变换}} x(n)=-\frac{1}{n2^{n}}u(n-1)$

教材P81

方法二：$-z\frac{d}{dz}X(z)=-z\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=-\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\xRightarrow{\text{z反变换}}-\frac{1}{2^{n}}u(n-1)=nx(n)$ 右边序列

移位性质 $-\frac{1}{2^{n+1}}u(n)$

(2) $-z\frac{d}{dz}X(z)=-z\bullet e^{1/z}\bullet(-z^{-2})=z^{-1}X(z)\xRightarrow{\text{z反变换}}nx(n)=x(n-1)$

$x(0)=\lim_{|z|\to\infty}X(z)=1\qquad x(n)=\frac{1}{n!}(n>0)\qquad x(n)=\delta(n)+\frac{1}{n!}u(n-1)=\frac{1}{n!}u(n)$

$$nx(n) \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad a^n x(n) \xleftrightarrow{z} X(a^{-1}z) \qquad x(n+n_o) \xleftrightarrow{z} z^{n_o}X(z)$$

【T 1.1】求序列$x(n) = n(0.5)^n u(n-2)$的Z变换。

解：令 $w(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2)$ $\xRightarrow{\text{z变换}}$ $W(z) = \dfrac{\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $|z| > \frac{1}{2}$ 右边序列

移位性质

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}W(z) = \frac{1}{2}z^{-2}\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

微分性质

$$nx(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad a^n x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z) \qquad x(n+n_o) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{n_0}X(z)$$

【T 1.2】若$F(z)$为$f(n)$的Z变换，$G(z)$为$g(n)$的z变换，且:

$$G(z) = \frac{1}{z}\frac{d^2}{dz^2}F\left(\frac{z}{3}\right) \longrightarrow \text{与}f(n)\text{的关系}$$

求$f(n)$与$g(n)$的关系。

解:

$$\frac{d^2}{dz^2}X(z) = \frac{d}{dz}\left[-\frac{1}{z}\times\left(-z\frac{d}{dz}X(z)\right)\right] = \underbrace{-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]}_{A} + \underbrace{\frac{1}{z^2}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]}_{B}$$

$Z[nx(n)]$　　$Z[(n-2)^2x(n-2)+(n-2)x(n-2)]$

$$A = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right] \qquad Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z) \xrightarrow[\text{微分性质}]{z^{-1}} y(n) = nx(n) \qquad A = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}Y(z) = \frac{1}{z^2}\times\left(-z\frac{d}{dz}Y(z)\right)$$

$Z[ny(n)]$

$$Q(z) = -z\frac{d}{dz}Y(z) \xrightarrow{z^{-1}} q(n) = ny(n) = n^2x(n) \qquad A = \frac{1}{z^2}Q(z) \xrightarrow[\text{移位性质}]{z^{-1}} a(n) = q(n-2) = (n-2)^2x(n-2)$$

$\tilde{f}(n-3)$

$$B = \frac{1}{z^2}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right] \xrightarrow{z^{-1}} (n-2)x(n-2) \qquad \frac{1}{z}\frac{d^2}{dz^2}F\left(\frac{z}{3}\right) \xrightarrow{z^{-1}} (n-3)^2 3^{n-3}f(n-3) + (n-3)3^{n-3}f(n-3) = g(n)$$

Z域尺度变换

【1.3】设一模拟信号$x_a(t)=\sin(2\pi f_0 t+\frac{\pi}{8})$，其中$f_0=50Hz$。

（1）求$x_a(t)$的周期，满足奈奎斯特准则的最低采样频率应为多少？对应的采样时间间隔应为多少？

（2）若选采样频率$f_s=200Hz$，采样时间间隔为多少？写出采样后信号$\hat{x}_a(t)$的表达式。

（3）求出对应$\hat{x}_a(t)$的时域离散序列$x(n)$的表达式，求出周期。

解：（1） $T_0=\frac{1}{f_0}=0.02s \quad f_s\geq 2f_0=100Hz \quad T_s\leq\frac{1}{f_s}=0.01s$

（2） $T_s=\frac{1}{f_s}=0.005s$

$$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(t)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT_s)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sin(\frac{1}{2}\pi n+\frac{\pi}{8})\delta(t-\frac{n}{200})$$

（3） $x(n)=x_a(t)\Big|_{t=nT_s}=\sin(\frac{1}{2}\pi n+\frac{\pi}{8})$ 周期 $N=\frac{2\pi}{\omega_0}=4$

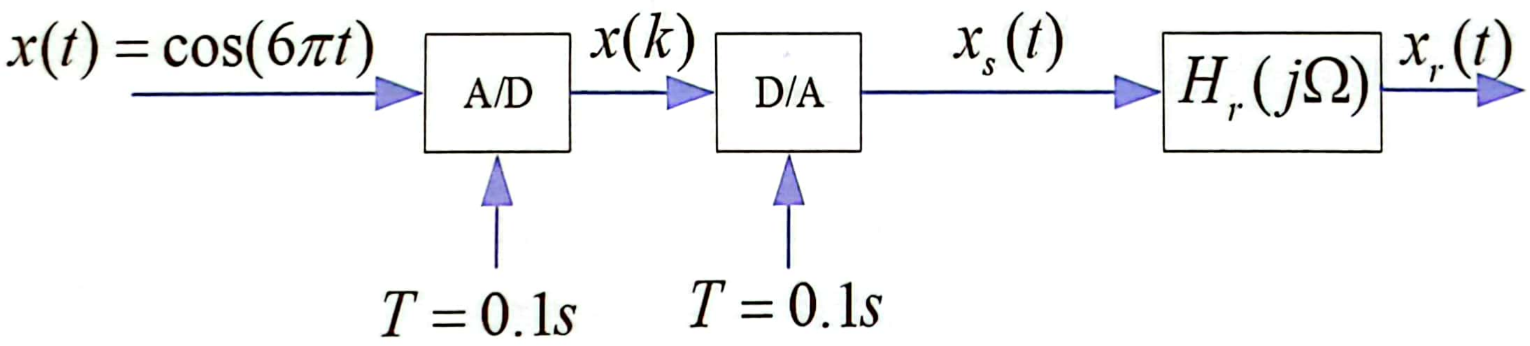
第四题 模拟角频率与数字角频率

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

【1.4】由理想A/D和D/A构成的系统如图所示:

（1）当重建滤波器的频率响应为$H_r(j\Omega)=\begin{cases}0.1 & 13\pi\le|\Omega|\le15\pi\\ 0 & else\end{cases}$时，画出$x(k)$，$x_s(t)$，$x_{r1}(t)$的频谱。

（2）当重建滤波器的频率响应为$H_r(j\Omega)=\begin{cases}0.1 & 25\pi\le|\Omega|\le27\pi\\ 0 & else\end{cases}$时，画出$x(k)$，$x_s(t)$，$x_{r2}(t)$的频谱。



思路：模拟角频率Ω数字频率ω转换

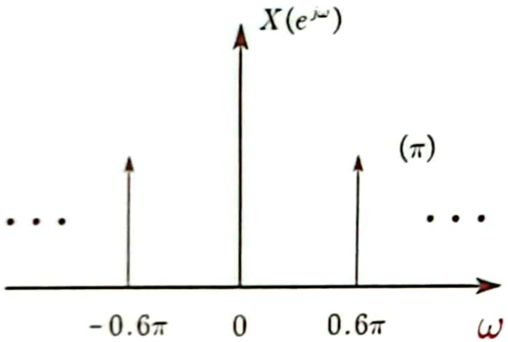
第四题 模拟角频率与数字角频率

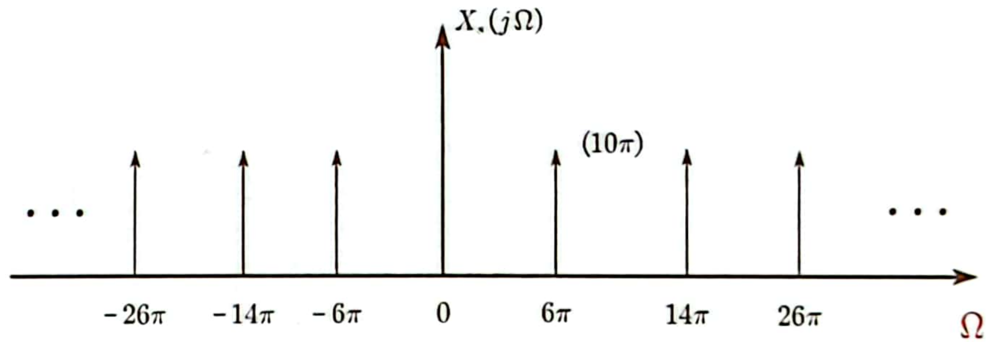
解：

$$x(k)=x(t)|_{t=kT}=\cos(0.6\pi k)\xrightarrow{DTFT}X\left(e^{j\omega}\right)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-0.6\pi-2\pi k)+\delta(\omega+0.6\pi-2\pi k)]$$

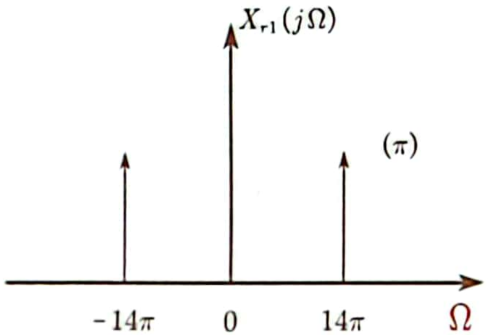
$$\omega=\Omega T=0.1\Omega \qquad X_s(j\Omega)=X\left(e^{j\Omega T}\right)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(0.1\Omega-0.6\pi-2\pi k)+\delta(0.1\Omega+0.6\pi-2\pi k)]$$

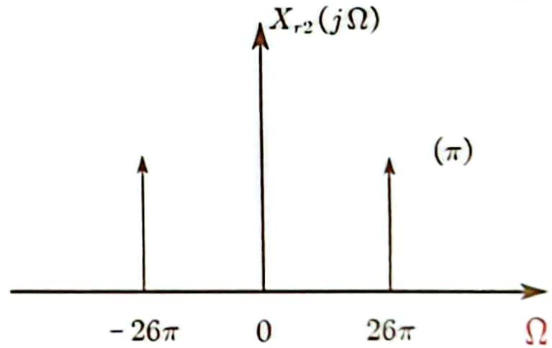
$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}\longrightarrow=10\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\Omega-6\pi-20\pi k)+\delta(\Omega+6\pi-20\pi k)]$$





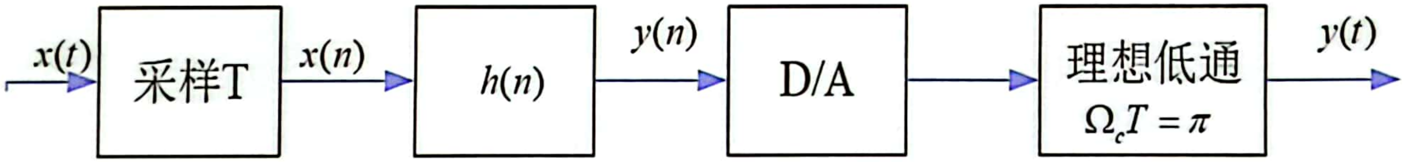
$$X_r(j\Omega)=H_r(j\Omega)X_s(j\Omega)$$





数字角频率ω，模拟角频率Ω和模拟频率f之间的关系$\omega = \Omega T = 2\pi f T$

【T 1.3】研究者常用数字滤波器对模拟信号处理，整个利用数字滤波器处理模拟信号的过程如下图所示。图中T为采样周期，把从输入模拟信号$x(t)$到输出模拟信号$y(t)$的整个系统等效为一个模拟滤波器。



若$h(n)$截止于$\frac{\pi}{8}$rad，$\frac{1}{T} = 10kHz$，求整个系统的截止频率，分别用模拟角频率Ω_c，模拟频率f_c和数字角频率ω_c表达。

解：　最后一级低通滤波器的截止频率为π，整个系统的截止频率由$h(n)$决定

$$\omega_c = \frac{\pi}{8} \qquad \Omega_c T = \frac{\pi}{8} \qquad f_c = \frac{\Omega_c}{2\pi} = \frac{1}{16T} = 625Hz$$

【1.5】设某离散时间LTI系统的单位冲激响应为$h(n)$，系统的响应、激励分别为$y(n)$、$x(n)$。已知系统如下信息：

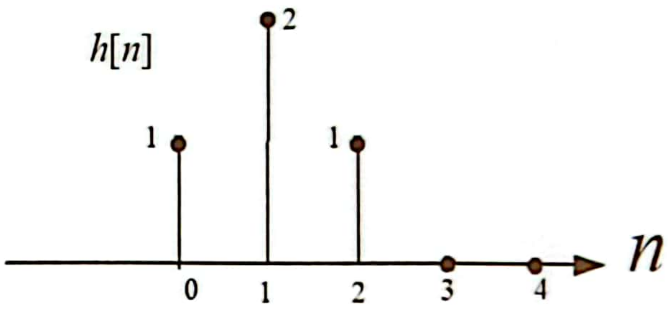
(1) 若在$3 \le n \le 7$区间外$x(n)=0$，则在$3 \le n \le 9$区间外一定有$y(n)=0$；

(2) 若$x(n)=(-1)^n$，则$y(n)=0$；

(3) 系统单位阶跃响应$s(n)$有：$s(1)=3$，$s(7)=4$。

计算该系统的单位冲激响应为$h(n)$，并画出波形图。

教材P15



解：由 (1) 知，系统的单位冲激响应$h(n) \neq 0$的区间为$0 \le n \le 2$

$$h(n)=a\delta(n)+b\delta(n-1)+c\delta(n-2)$$

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=0}^{2} h(m)(-1)^{n-m}=(-1)^n\{a-b+c\}=0 \qquad s(7)=\sum_{m=0}^{2} h(m)u(7-m)=a+b+c=4$$

$$s(1)=u(n-1)*h(n)=\sum_{m=0}^{2} h(m)u(1-m)=a+b=3 \qquad a=1 \quad b=2 \quad c=1$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n} \qquad H(z)=Y(z)/X(z)$$

【T 1.4】如果线性时不变系统的输入为 $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+2^n u(-n-1)$

输出为 $y(n)=6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-6\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$

求系统函数$H(z)$，并判别其稳定性和因果性。

解：

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \qquad \frac{1}{2}<|z|<2$$

$$Y(z)=\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{6}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}=\frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})} \qquad |z|>\frac{3}{4}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(1-2z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})} \qquad |z|>\frac{3}{4}$$

因为$H(z)$的收敛域包括单位圆，所以h(n)是稳定系统，又因为收敛域包含$z=\infty$，$H(z)|_{z=\infty}=1$，所以h(n)是因果系统。

第六题 DFS定义

【1.6】设$\tilde{x}(n)$是周期为N的周期序列，则肯定也是周期为$2N$的周期序列，记：

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk} \qquad \tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}$$

试用$\tilde{X}(k)$表示$\tilde{X}_1(k)$。

解：

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk} \qquad W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk/2}+\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n-N)W_{2N}^{(n-N)k}$$

$$=\tilde{X}\left(\frac{k}{2}\right)+W_{2N}^{-Nk}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk/2}$$

$$=\tilde{X}\left(\frac{k}{2}\right)+\cos(\pi k)\,\tilde{X}\left(\frac{k}{2}\right)=\begin{cases}2\tilde{X}\left(\frac{k}{2}\right) & k\text{为偶数}\\ 0 & k\text{为奇数}\end{cases}$$

欧拉公式