1. **离散信号与系统** 已知序列 $x_1 = n+1$，序列 $x_2 = R_3(n)$

(1) 为使他们的圆周卷积结果与线性卷积结果相等，它们圆周卷积的最小周期为多少？

(2) 将 $x_1(n)$,$x_2(n)$ 扩充成圆周序列。

(3) 写出圆周卷积的计算公式，并计算出结果。（16 分）

解 (1) 由于长度分别是 M、N 的两序列的圆周卷积和线性卷积的结果相等 $\Leftrightarrow L \geq M+N-1$，故而选择卷积长度 $L = 3+4-1 = 6$

(2) 这里写出主值：$x_1(n) = \{1,2,3,4,0,0\}$，$x_2(n) = \{1,1,1,0,0,0\}$

(3)

$$x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

检验可得与线性卷积相同。

2. **离散傅里叶变换** 已知序列 $x(n) = a^n u(n), 0 < a < 1$, 今对其 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上 N 等分采样，采样值为：

$$X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

求有限长序列 $x'(n) = IDFT[X(k)]$。（16 分）

解 对于原序列可以求出其 Z 变换的结果：$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, 根据频域抽样定理频率抽样的结果是时域的搬移，以抽样点数 N 为周期，所以时域的结果是：

$$\begin{aligned} x'(n) &= (a^n + a^{n-N} + a^{n-2N} + \dots) R_N(n) \\ &= R_N(n) \sum_{i=0}^{\infty} a^n a^{-iN} \\ &= \frac{a^n}{1-a^{-N}} R_N(n) \end{aligned}$$

注：程佩青书例题，作业题。

3. **快速傅里叶变换** 试推导对 $x(n), 0 \leq n \leq 34$ 采取复合数分解方式的快速傅里叶变换计算公式，并比较直接计算 DFT 和采用快速方式计算所需要的乘法次数。（17 分）

解 这是一个 35 点的 FFT，可以取 $M=5,L=7$。过程如下：

$$\begin{aligned}X_(k) &= \sum_{n_0=0}^{6}\sum_{n_1=0}^{4} x(7n_1+n_0)W_{35}^{(7n_1+n_0)(5k_1+k_0)} \\ &= \sum_{n_0=0}^{6} W_{35}^{n_0k_0}W_7^{n_0k_1}\sum_{n_1=0}^{4} x(7n_1+n_0)W_5^{n_1k_0} \\ &= \sum_{n_0=0}^{6}(W_{35}^{n_0k_0}X_1(n_0,k_0))W_7^{n_0k_1} \\ &= X_2(k_1,k_0)\end{aligned}$$

运算速度分析：正常的 DFT 需要花费复数乘法次数是 $35^2=1225$，FFT 算法的复数乘法次数是 $LM(L+M+1)=455$

注：老师感情上偏爱复合数（多基多进制）*FFT*，考的可能性大。

4.**IIR 滤波器设计** 设计 IIR 高通滤波器，通带截止频率 4800Hz，通带波纹小于 3dB，过渡带不超过 3000Hz，阻带最小衰减大于 20dB，采样率 24000Hz，要求在不劣于设计要求的前提下使系统复杂度最低。选取合适的幅度平方函数模型，说明理由，并求出系统函数。（17 分）

解 由题目要求复杂度尽可能低，故而要求使用 Chebyshev 滤波器（等波纹幅度平方函数模型），用双线性变换法设计。频率预畸：$\Omega_1=0.4\pi,\Omega_2=0.15\pi$，由于 $\omega=\cot\frac{\Omega}{2},\omega_1=1.376,\omega_2=4.165.\varepsilon=0.9976.$ 采用试算法确定阶数：

当 N=2 时有：

$$\delta=10lg(1+\varepsilon^2C_2^2(\frac{\omega_2}{\omega_1}))=24.767dB>20dB$$

满足要求。所以采用二阶切比雪夫滤波器。

查表得：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N/\varepsilon 2^{N-1}}{s^2+0.645\Omega_c+0.708\Omega_c^2}=\frac{0.949}{s^2+0.888s+1.341}$$

所以：

$$H(z)=H_a(s)|_{z=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}}=\frac{0.949(1-2z^{-1}+z^{-2})}{3.229-0.682z^{-1}+1.453z^{-2}}$$

注：与 2020-2021 试卷中的一道题完全相同，需要查的各种工具表见程佩青书。

5.**FIR 滤波器设计** 设计 FIR 高通滤波器，通带截止频率 6000Hz，过渡带不超过 3000Hz，阻带最小衰减大于 20dB，采样率 24000Hz，要求在不劣于设计要求的前提下使系统复杂度最低。要求采取频率取样设计法。求出单位取样响应 $h(n)$。（17 分）

解 查表得普通的频率取样设计法的最小旁瓣是-16dB，所以应该采用改进的频率取样设计法，这里取一个过渡带点，幅度是 0.5. 由 $\omega_1=0.5\pi,\omega_2=0.25\pi$ 得应该取 N=16, 是偶数，所以设计第四类滤波器，即循环奇对称。得到以下的 $|H(k)|$:

$$|H(k)| = \begin{cases} 0, k = 0,1,2,8,14,15 \\ 0.5, k = 3 \\ -0.5, k = 13 \\ 1, k = 4,5,6,7 \\ -1, k = 9,10,11,12 \end{cases}$$

由于 $\tau = -\frac{N-1}{2}, \theta = -\frac{2k\pi}{N}\frac{N-1}{2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{N-1}{N}k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得：

$$\begin{aligned} h(n) &= IDFT[|H(k)|e^{j\theta}] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{15}|H(k)|je^{j\frac{2nk\pi}{16}}e^{-j\frac{15}{16}k\pi} \\ &= \frac{j}{16}\sum_{k=3}^{7}|H(k)|(e^{-j\frac{15}{16}k\pi}e^{j\frac{nk\pi}{8}} + e^{-j\frac{15}{16}(16-k)\pi}e^{j\frac{n(16-k)}{8}\pi}) \\ &= \frac{j}{16}\sum_{k=3}^{7}|H(k)|(e^{-j\frac{15}{16}k\pi}e^{j\frac{nk\pi}{8}} - e^{j\frac{15}{16}k\pi}e^{-j\frac{nk\pi}{8}}) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=4}^{7}\sin(\frac{15}{16}k\pi - \frac{nk\pi}{8}) + \frac{1}{16}\sin(\frac{45}{16}\pi - \frac{3n\pi}{8}) \end{aligned}$$

注：课件上的补充。亲身实验写成 *8* 点的滤波器仍然可以总评 4.0（笑）

6. **滤波器综合问题** 设题四中所设计滤波器的系统函数为 $H_1(z)$，题五中所设计滤波器的系统函数为 $H_2(z)$.

(1) 若 $H_2(z)$ 的阻带最大衰减为-43dB，且通带抖动幅度与阻带抖动幅度相等，求其通带波纹大小；

(2) 将 $H_1(z)$ 的通带波纹大小改为上述计算结果，其他参数指标不变，重新计算所需阶数；

(3) 将正弦信号 $e^{j\omega_0 n}$ 输入 $H_2(z)$ 中，计算时延；

(4) 根据上述计算结果，分析和比较两滤波器。（17 分）

解 (1) 通带和阻带的波动均设为 δ，则有通带起伏：$A = 20lg(1+\delta)$，阻带起伏：$R = 20lg(\delta)$。故有 $\delta = 7.079\times10^{-3}, A = 0.06127dB.$

(2) 由 $10lg(1+\varepsilon^2) = 0.06127$ 得到 $\varepsilon = 0.1192$, 采用试算法确定阶数：

N=2 时有：

$$10lg(1+\varepsilon^2 C_2^2(\frac{\omega_2}{\omega_1})) = 7.213dB < 20dB$$

N=3 时有：

$$10lg(1+\varepsilon^2 C_3^2(\frac{\omega_2}{\omega_1})) = 21.714dB > 20dB$$

所以应该选用 3 阶滤波器。

(3)$\tau = -\frac{N-1}{2} = -7.5$

(4) $H_1(z)$ 作为 IIR 滤波器其优点是阶数远远小于 FIR 滤波器，即使是在考虑了波纹起伏相等的情况下。但是不保证线性相位，因为设计时没有这方面的限制。$H_2(z)$ 可以保证是线性相位滤波器，但是牺牲了复杂度。