

第六章 二能级体系与量子比特

二能级体系及其操控
叠加态、混合态与密度算符
量子比特

6.1 二能级系统

■ 二能级系统

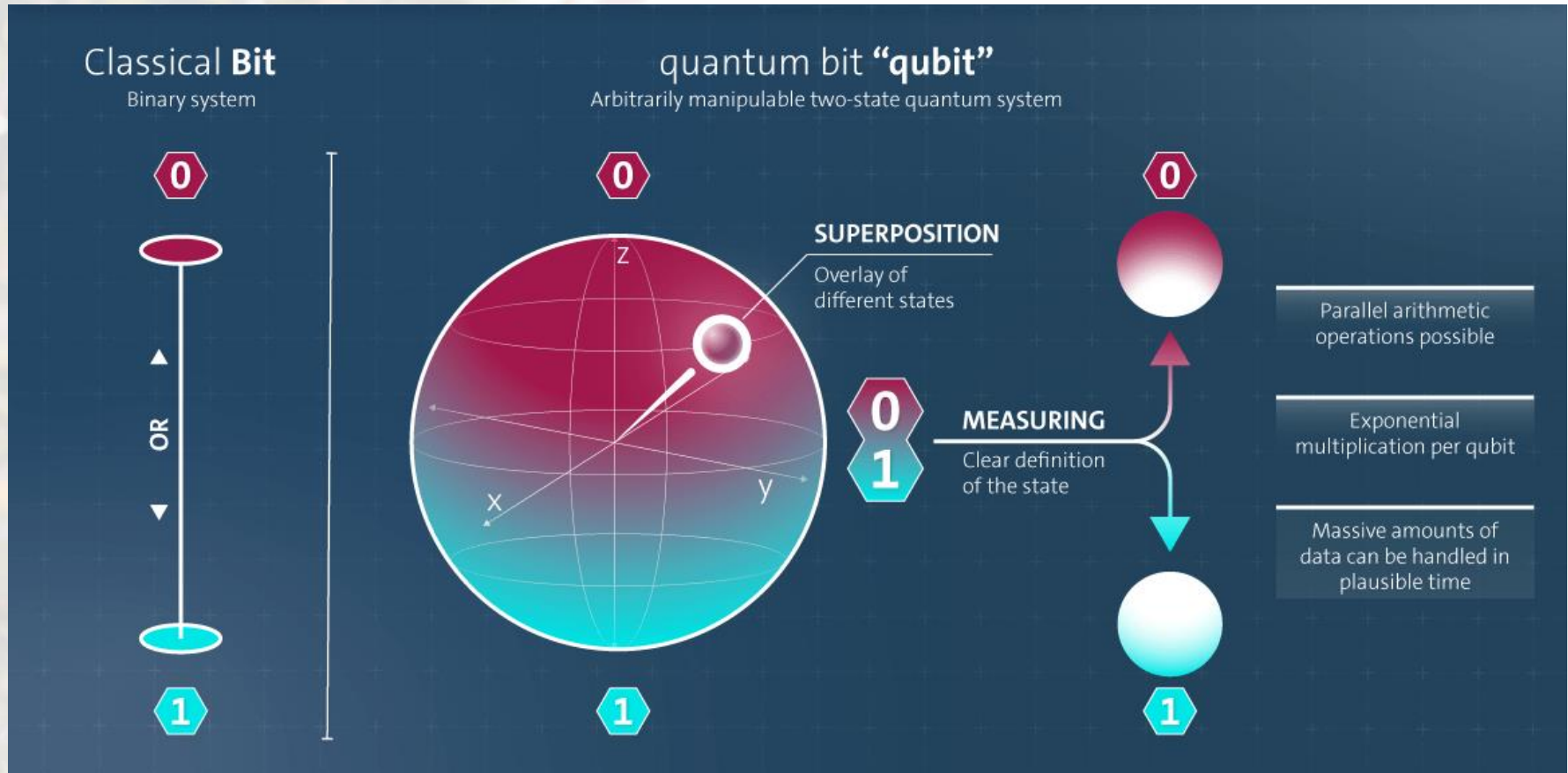
- 许多量子系统都能够用二能级系统来描述，他们的共同特点在于系统的希尔伯特空间是二维的，因此可以用一组二维正交完备基 $\{|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$ 来描述空间中的任意量子态

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

■ 二能级系统的重要性

- 本身蕴含很多丰富的物理，具有很强的代表性，而系统本身相对简单，可以从这样的体系入手分析复杂物理现象，如：通过二能级粒子的直积来解决一些多粒子问题；在（近）共振光驱动下分析Rabi振荡现象等
- 就这门课而言，许多描述二能级系统的基矢可以被定义成量子比特，从而作为实现量子计算任务的备选系统

6.1 二能级系统



Qubit. Source: Volkswagen Aktiengesellschaft 2019

原理：量子计算机的并行计算能力

一个存储器

经典

可存储0或1（一个数）

量子

可同时存储0和1（两个数）

两个存储器

经典

可存储00,01,10或11(一个数)

量子

可同时存储00,01,10,11(四个数)

6.1 二能级系统

N 个存储器

经典：可存储一个数
(2^N 个可能的数之中的一个数)

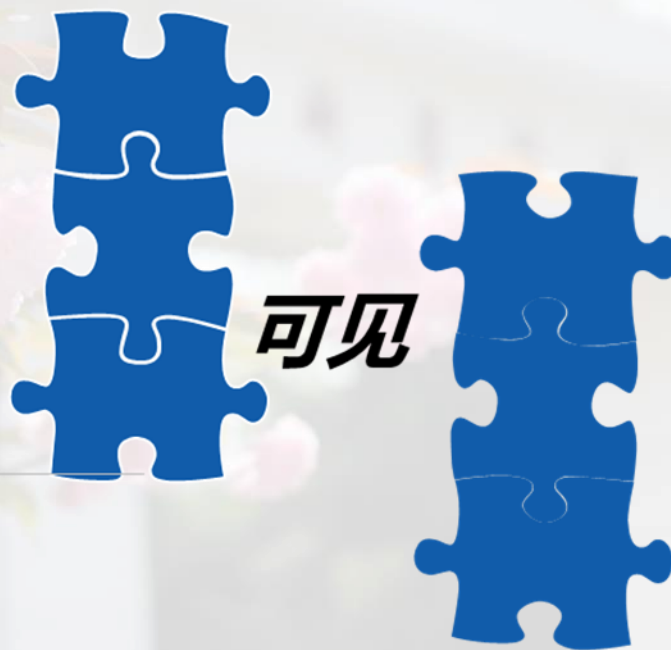
量子：可同时存储 2^N 个数

因此，量子存储器的存储数据能力是经典的 2^N 倍

例如， $N=250$ ，量子存储器可同时存储比宇宙中原子数目还要多的数据。

6.1 二能级系统

对含 N 个量子比特的存储器实行一次么正操作，其效果相当于对经典存储器进行了 2^N 次经典操作，**这就是量子计算机巨大并行运算能力的来源。**



设计合适的量子算法，可大大地提高计算效率。

6.1 二能级系统

量子计算机与经典计算机的区别

电子计算机：串行运算模式，单次仅处理一条信息

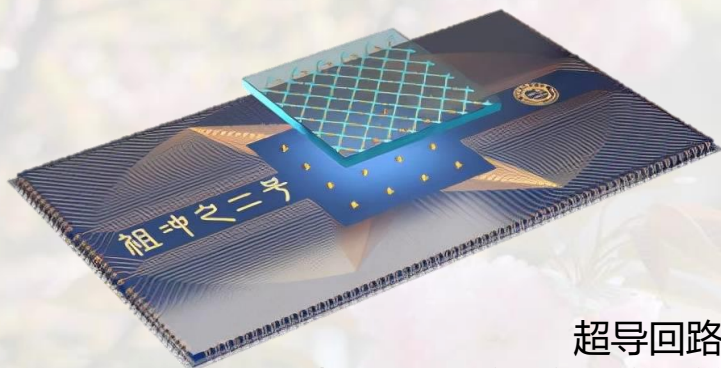
量子计算机：并行运算模式，处理数据的能力极强



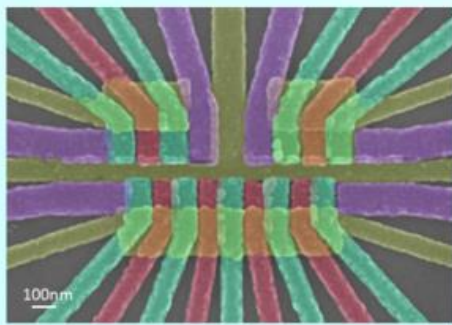
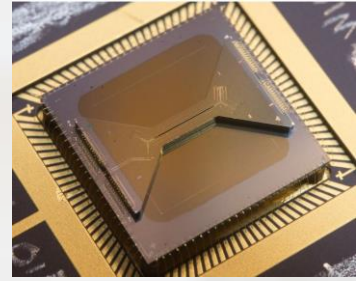
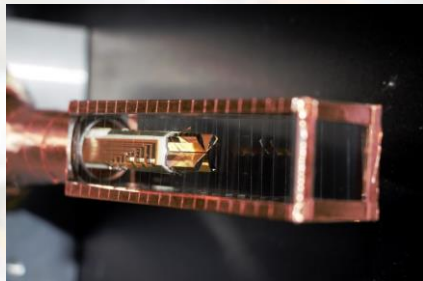
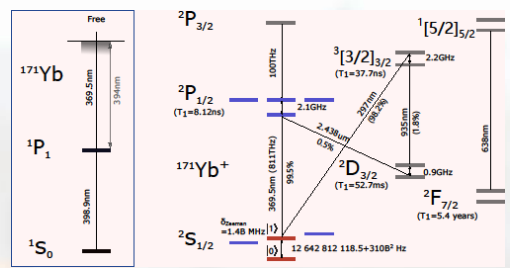
6.1 二能级系统

- 典型的二能级系统
 - 除了电子的自旋，还有很多典型的二能级系统

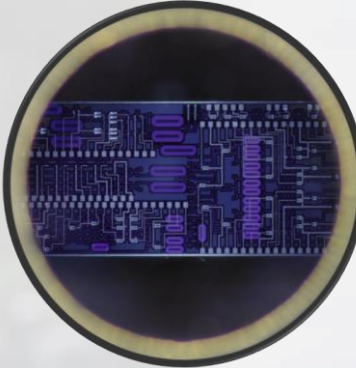
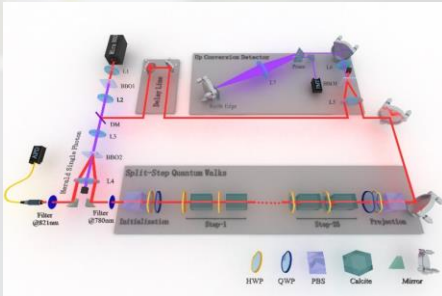
人造原子（量子点，Quantum Dot），及天然原子、离子、分子等体系中**隔离选出**的两个特定能级 $\{|g\rangle, |e\rangle\}$



超导回路
(superconducting circuit)
中的电流方向 $\{|\psi\rangle, |\bar{\psi}\rangle\}$



硅量子点中
电子自旋共振 (EDSR)



光子系统：
路径 (path)
到达时间 (time bin)
偏振 (Polarization)
频率 (Frequency)
轨道角动量 (Orbit Angular Momentum)
.....

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控 (理论)

- 二能级系统的希尔伯特空间是**二维**的, 存在**两个正交完备基矢量**:

$$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}, \{|g\rangle, |e\rangle\}, \dots$$

空间中的任意状态可以表示为它们的线性叠加

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

叠加系数也可以用参数 $\{\theta, \varphi\}$ 表示

$$c_1 = \cos \theta/2, \quad c_2 = \sin \theta/2 e^{i\varphi}$$

■ 矩阵表示

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

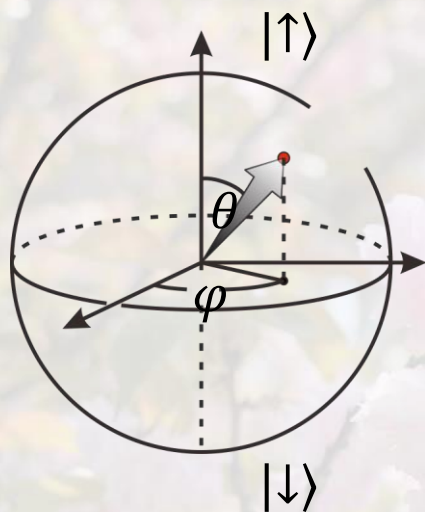
$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos \theta/2 |\uparrow\rangle + \sin \theta/2 e^{i\varphi} |\downarrow\rangle \\ \Rightarrow &= \cos \theta/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \theta/2 e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.2 二能级系统及其操控

■ Bloch球表示

与自旋类比



$$|\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\vec{n}\rangle \\ &= \cos \theta/2 |\uparrow\rangle + \sin \theta/2 e^{i\varphi} |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

- θ 角度决定了矢量 \vec{n} 在Bloch球z轴上的投影
→ 决定了处于基态与激发态的具体概率
处于激发态的概率: $|c_1|^2 = \cos^2 \theta/2$
处于基态的概率为: $|c_2|^2 = \sin^2 \theta/2$
- 方位角 φ 决定了处于这两个态的几率幅的相位差

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控（实验）

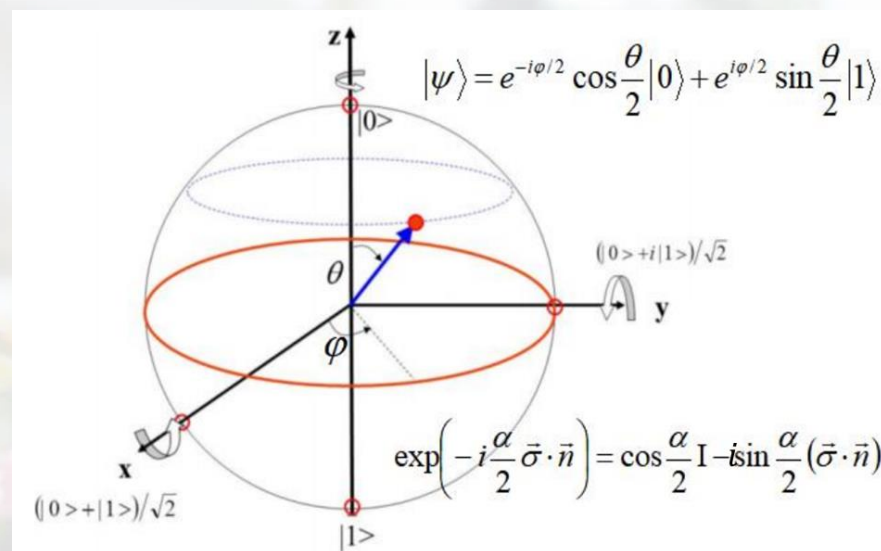
- 与自旋的转动类似，二能级系统状态的演化可以用么正算符表示，对应于Bloch球上的转动， α 跟系统参数有关。

$$\exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)$$

└─→ 转动角度
└─→ 转动轴

- 空间中的任意算符可以用Pauli矩阵进行分解

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \hat{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



6.2 二能级系统及其操控

■ 例如：Hadamard算符

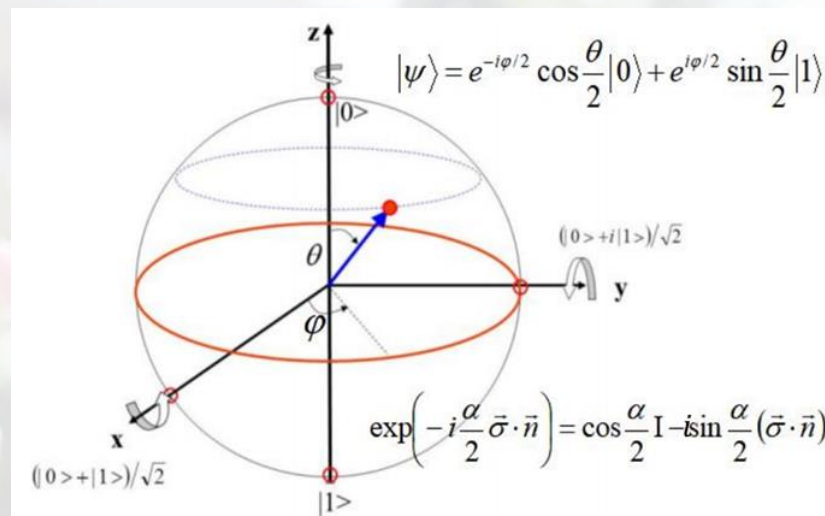
$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x)$$

$$H|\uparrow\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$H|\downarrow\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$



Hadamard算符是二能级系统中的重要算符，可以实现基态或激发态到等概率叠加状态的变换。如果再做一次Hadamard门会怎么样？

量子化 \rightarrow 以光量子辐射, 所以跃迁率为:

$$\lambda_{if} = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{\omega^3}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{|p_{if}|^2}{3c^3} \quad p_{if} = -e \int u_i^* \vec{r} u_f dV (\text{i, f态电偶极矩})$$

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控 (实验)

■ 二能级系统在光场驱动下的Rabi振荡 (光与原子的相互作用)

自由二能级系统哈密顿量 \hat{H}_0

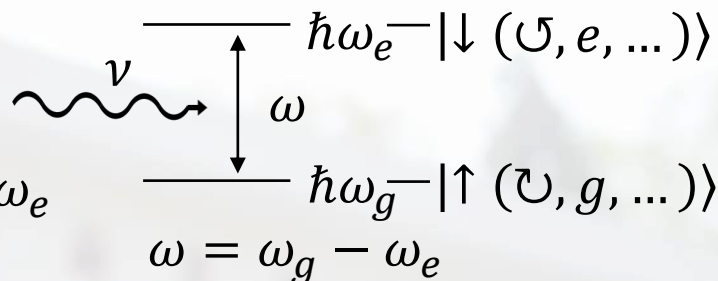
对应的本征态

$$|\uparrow(\uparrow, g, \dots)\rangle, \quad |\downarrow(\downarrow, e, \dots)\rangle$$

相应的本征值为 $E_g = \hbar\omega_g$, $E_e = \hbar\omega_e$

$$\hat{H}_0 |\uparrow(\uparrow, g, \dots)\rangle = \hbar\omega_g |\uparrow(\uparrow, g, \dots)\rangle$$

$$\hat{H}_0 |\downarrow(\downarrow, e, \dots)\rangle = \hbar\omega_e |\downarrow(\downarrow, e, \dots)\rangle$$



当存在外场驱动时, 原子可能吸收或发射光子

\rightarrow 原子的状态会处在基态和激发态的叠加状态

$$|\psi\rangle = \cos \theta/2 |\uparrow(\uparrow, g, \dots)\rangle + \sin \theta/2 e^{i\varphi} |\downarrow(\downarrow, e, \dots)\rangle$$

通过光和原子的相互作用可以将原子的基态和激发态耦合起来

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$$

自由哈密顿量

光和原子相互作用

$$-e\vec{r} \cdot \vec{E}$$

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控 (实验)

在自由粒子的能量表象下:

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \hat{H}_0 (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) = \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| \\ &= \begin{pmatrix} \hbar\omega_g & 0 \\ 0 & \hbar\omega_e \end{pmatrix}\end{aligned}$$

\hat{H}_I 的部分需要考虑光与原子的相互作用机制:
原子的电偶极矩与光的电场分量的相互作用

$$\begin{aligned}\hat{H}_I &= -e(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)r(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \cdot E(t) \\ &= -(\gamma_{ge}|g\rangle\langle e| + \gamma_{eg}|e\rangle\langle g|) \cdot E(t)\end{aligned}$$

$\gamma_{ge} = \gamma_{eg}^*$ 为电偶极矩矩阵元 $\langle g|er|e\rangle$

$E(t)$ 为电场强度

对角项根据选择定则为0

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| - E(t)(\gamma_{ge}|g\rangle\langle e| + \gamma_{eg}|e\rangle\langle g|)$$

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int \hat{H}(t) dt\right] |\psi(0)\rangle$$

讲义中的严格求解作为参考

6.2 二能级系统及其操控

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

■ 二能级系统的状态表示及操控 (实验)

■ 二能级系统在光场驱动下的Rabi振荡 (光与原子的相互作用)

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| - E(t)(\gamma_{ge}|g\rangle\langle e| + \gamma_{eg}|e\rangle\langle g|) \\ &= \begin{pmatrix} \hbar\omega_g & -E(t)\gamma_{ge} \\ -E(t)\gamma_{eg} & \hbar\omega_e \end{pmatrix} \\ |\psi(t)\rangle &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int \hat{H}(t) dt\right] |\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ge} &= |\gamma_{ge}|e^{i\varphi} & E(t) &= |E| \cos \nu t \\ \gamma_{eg} &= |\gamma_{ge}|e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

$$\epsilon_g = \hbar\omega_g, \quad \epsilon_e = \hbar\omega_e$$

将 $\hat{H}(t)$ 用Pauli矩阵进行分解

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}(\epsilon_g + \epsilon_e)\hat{I} + \frac{1}{2}(\epsilon_g - \epsilon_e)\hat{\sigma}_z - E(t)|\gamma_{ge}| \cos \varphi \hat{\sigma}_x - E(t)|\gamma_{ge}| \sin \varphi \hat{\sigma}_y$$

定义

- 平均能量: $\bar{\epsilon} = (\epsilon_g + \epsilon_e)/2$
- 能级间隔: $\Delta\epsilon = \epsilon_e - \epsilon_g$
- 等效磁场: $\vec{B} = (-2E(t)|\gamma_{ge}| \cos \varphi, -2E(t)|\gamma_{ge}| \sin \varphi, -\Delta\epsilon)$

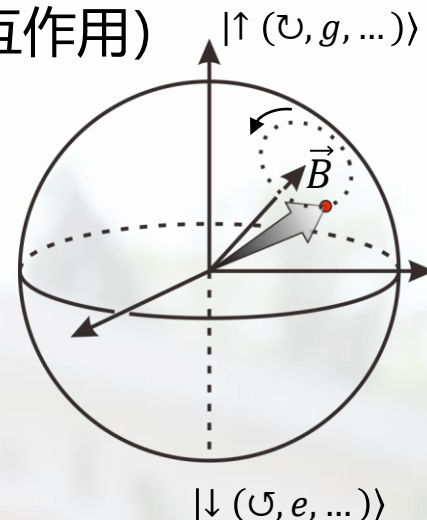
$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控 (实验)

■ 二能级系统在光场驱动下的Rabi振荡 (光与原子的相互作用)

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= \bar{\epsilon} \hat{I} + \vec{B} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \\ &= \bar{\epsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta\epsilon & 2E(t)\gamma_{ge}^* \\ 2E(t)\gamma_{ge} & -\Delta\epsilon \end{pmatrix}\end{aligned}$$



类比于自旋在静磁场下的拉莫尔进动

即二能级原子的状态在光场作用下，在Bloch上绕等效磁场方向转动

$$\begin{aligned}\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} &= \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$E(t) = |E| \cos vt$$

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控 (实验)

$$\Omega = |E| |\gamma_{ge}| / \hbar$$

并取常数相位 $\varphi = 0$ (不失一般性)

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= \bar{\epsilon} \hat{I} + \vec{B} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \\ &= \bar{\epsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta\epsilon & 2E(t)\gamma_{ge}^* \\ 2E(t)\gamma_{ge} & -\Delta\epsilon \end{pmatrix}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta\epsilon & 2\Omega \cos \nu t \\ 2\Omega \cos \nu t & -\Delta\epsilon \end{pmatrix}$$

注意: 这里的等效磁场是依赖于电场强度 $E(t)$ 的
而光波的电场强度是随时间振荡的
振荡频率决定于光子能量 \rightarrow 频率 ν (波长)

\Rightarrow 转动轴一直在变化



哈密顿量含时

6.2 二能级系统及其操控

■ 坐标变换 (线性代数)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t)^\dagger \hat{U}(t) |\psi\rangle = \hat{H} \hat{U}(t)^\dagger \hat{U}(t) |\psi\rangle$$

$$i\hbar \hat{U}(t)^\dagger \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle' + i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t)^\dagger \right) |\psi\rangle' = \hat{H} \hat{U}(t)^\dagger |\psi\rangle'$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle' = \hat{U}(t) \hat{H} \hat{U}(t)^\dagger |\psi\rangle' - i\hbar \hat{U}(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t)^\dagger \right) |\psi\rangle'$$

$$\hat{H}' = (\hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - i\hbar \hat{U} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^\dagger)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle' = \hat{H}' |\psi\rangle'$$

其中 $\vec{n} = \vec{e}_z$, 则 $\theta = 0$

$$e^{-i\omega t \vec{\sigma} \cdot \vec{n}} = \begin{bmatrix} \cos \omega t - i \sin \omega t & 0 \\ 0 & \cos \omega t + i \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta\epsilon & 2\Omega \cos vt \\ 2\Omega \cos vt & -\Delta\epsilon \end{pmatrix}$$



⇒ 旋波近似：忽略快变项（高频项）
参考讲义

⇒ 旋转坐标系：坐标系跟着等效磁场一起转动
新坐标系中，磁场时静止的，不再含时

$$\hat{H}' = (\hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - i\hbar \hat{U} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^\dagger)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_R(t)\rangle = \left(-\frac{1}{2} \hbar v \hat{\sigma}_z + e^{i v t \hat{\sigma}_z / 2} H e^{-i v t \hat{\sigma}_z / 2} \right) |\psi_R(t)\rangle$$

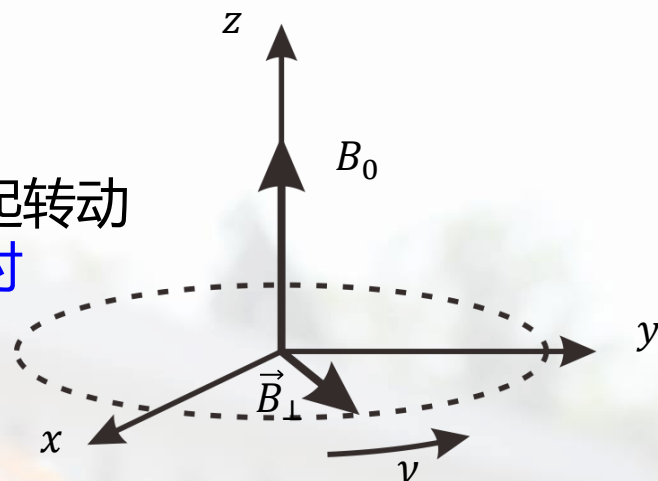
$$\frac{1}{2} \hbar \omega \hat{\sigma}_z + \frac{1}{2} \Omega \hat{\sigma}_x$$

旋转坐标系下的哈密顿量 \hat{H}_R

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2} \hbar (\delta \hat{\sigma}_z + \Omega \hat{\sigma}_x)$$

等效磁场:

$$\vec{B} = (-2E(t)|\gamma_{ge}| \cos \varphi, -2E(t)|\gamma_{ge}| \sin \varphi, \Delta\epsilon)$$



$$|\psi_R(t)\rangle = e^{i v t \hat{\sigma}_z / 2} |\psi(t)\rangle$$



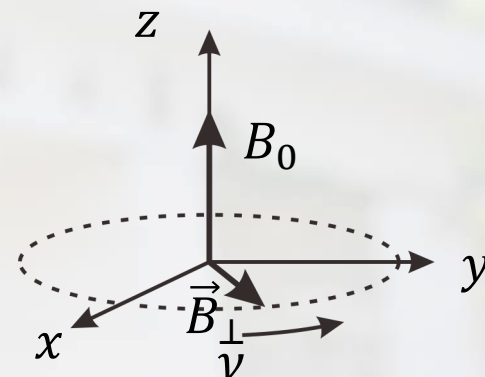
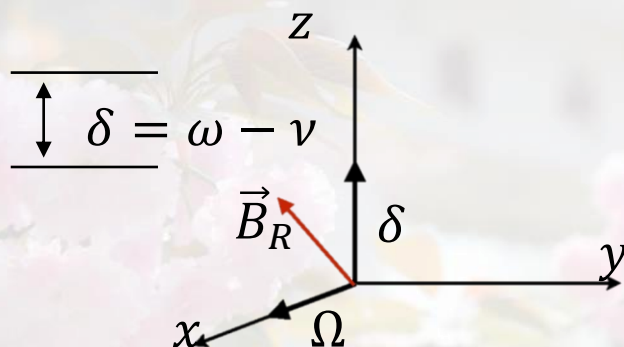
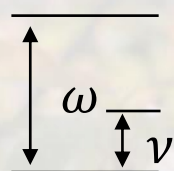
$$\begin{aligned}
& e^{i\nu t \hat{\sigma}_z/2} H e^{-i\nu t \hat{\sigma}_z/2} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\nu t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\nu t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & \Omega \cos \nu t \\ \Omega \cos \nu t & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\nu t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\nu t/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & \Omega \cos \nu t e^{-i\nu t} \\ \Omega \cos \nu t e^{i\nu t} & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & \Omega \cos \nu t (\cos \nu t - i \sin \nu t) \\ \Omega \cos \nu t (\cos \nu t + i \sin \nu t) & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & \frac{1}{2}\Omega[1 + (\cos 2\nu t - i \sin 2\nu t)] \\ \frac{1}{2}\Omega[1 + (\cos 2\nu t + i \sin 2\nu t)] & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & \frac{1}{2}\Omega(1 + e^{-i2\nu t}) \\ \frac{1}{2}\Omega(1 + e^{i2\nu t}) & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} \quad \text{旋波近似舍去高频项}
\end{aligned}$$

$$e^{i\nu t \hat{\sigma}_z/2} H e^{-i\nu t \hat{\sigma}_z/2} = \frac{1}{2}\hbar\omega \hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}\Omega \hat{\sigma}_x$$

6.2 二能级系统及其操控

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2} \hbar (\delta \hat{\sigma}_z + \Omega \hat{\sigma}_x)$$

Lab Frame Rotating Frame



旋转坐标系：坐标系跟着等效磁场一起转动
新坐标系中，磁场时静止的，不再含时

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控 (实验)

■ 二能级系统在光场驱动下的Rabi振荡 (光与原子的相互作用)

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2} \hbar (\delta \hat{\sigma}_z + \Omega \hat{\sigma}_x) = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix}$$

■ 近共振条件: $\delta \leq \Omega \ll \omega$

- 非对角元与对角元是一个量级或者比对角元大, 意味着两个态之间耦合很强
- 此时等效磁场离赤道面很近, 也就是说 \vec{B}_R 很靠近 x 轴系统的状态会在激发态和基态之间来回振荡

振荡频率 $\Omega_R = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$ **Rabi振荡频率**

共振情况下: $\omega = \nu \Rightarrow \delta = 0$

Rabi振荡频率就是耦合强度 Ω

$\Omega = |E| |\gamma_{ge}| / \hbar$ $\gamma_{ge} = \gamma_{eg}^*$ 为电偶极矩阵元 $\langle g | \vec{e} \cdot \vec{r} | e \rangle$



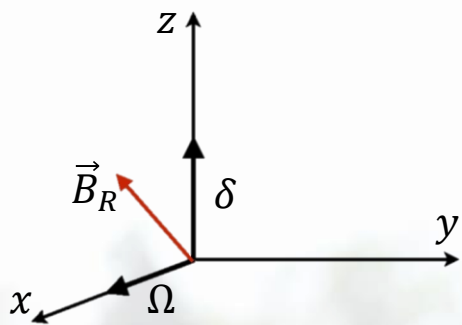
Isidor Isaac Rabi
1937 年考虑自旋
1/2磁偶极子在射
频磁场作用下的
运动得出的Rabi
振荡结论, 1944
年因磁共振方法
研究原子核磁矩
得诺贝尔奖

6.2 二能级系统及其操控

■ 二能级系统的状态表示及操控 (实验)

■ 近共振条件: $\delta \leq \Omega \ll \omega$

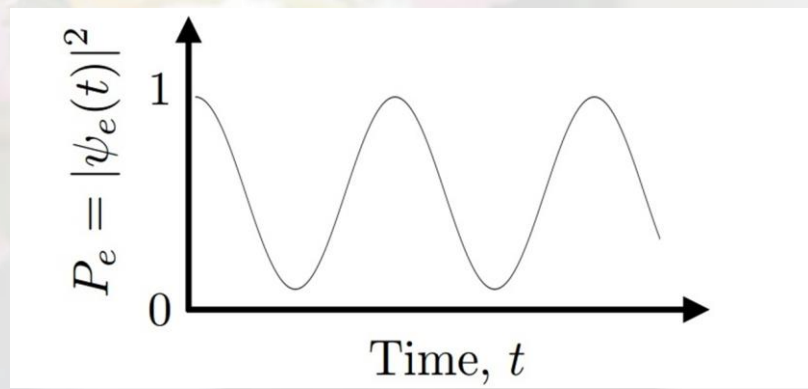
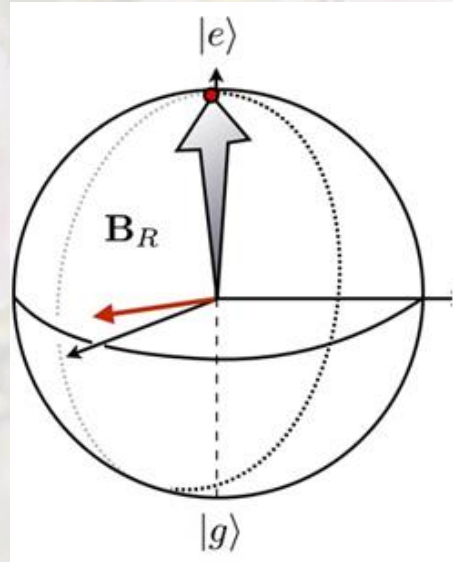
- 非对角元与对角元是一个量级或者比对角元大, 意味着两个态之间耦合很强
- 此时等效磁场离赤道面很近, 也就是说 \vec{B}_R 很靠近 x 轴系统的状态会在激发态和基态之间来回振荡



Lab Frame Rotating Frame

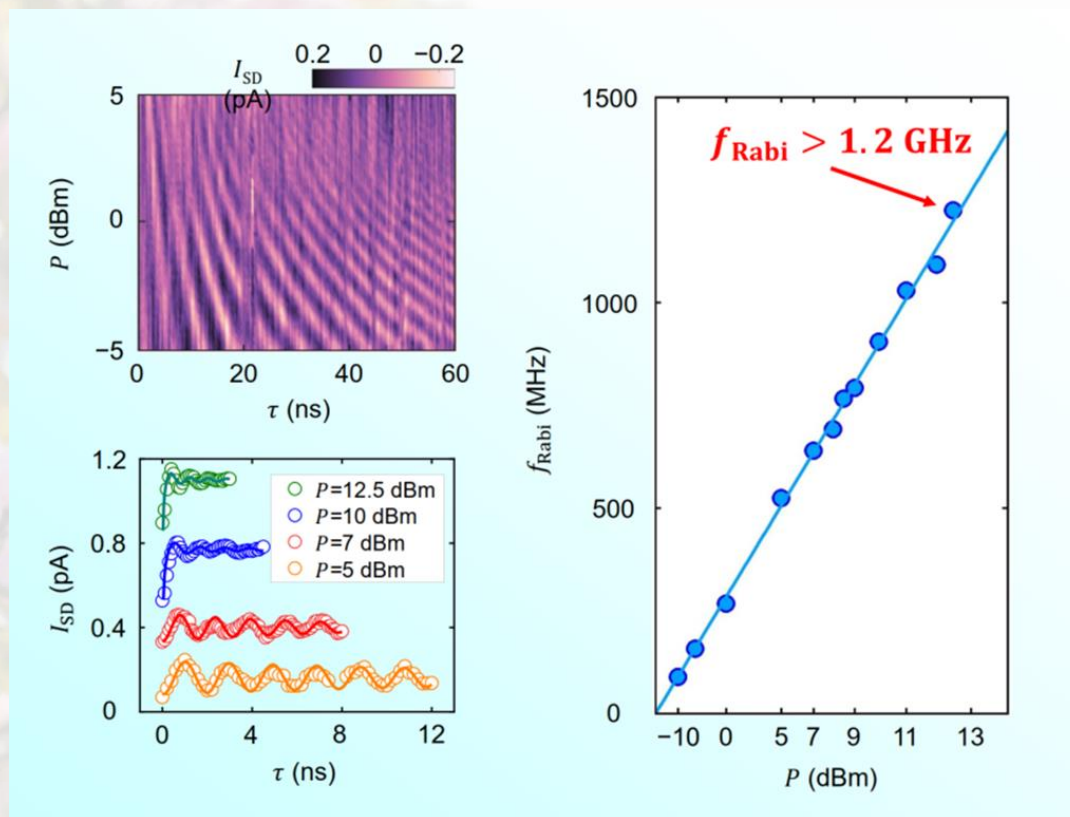
$\overline{\omega}$
 $\overline{\nu}$

$\overline{\delta = \omega - \nu}$



6.2 二能级系统及其操控

- 二能级系统的状态表示及操控 (实验)
- 二能级系统在光场驱动下的Rabi振荡 (光与原子的相互作用)



Rabi
振荡幅
度会逐
渐衰减

Rabi振荡和光场的振幅大小 (强度) 和频率均有关:

- 光场振幅越大, Rabi 频率振荡的频率越大
- 光场频率和原子能级间隔对应的频率越接近 (即越接近共振), Rabi 振荡的振幅越大

$$E(t) = |E| \cos \nu t$$

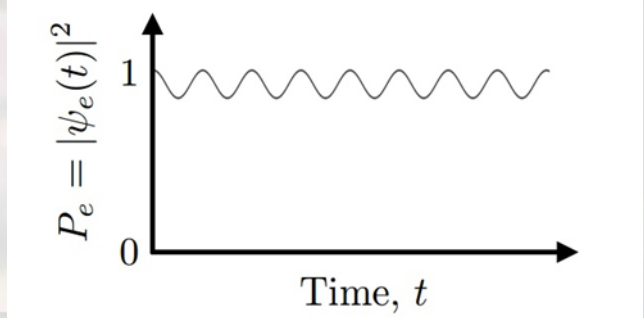
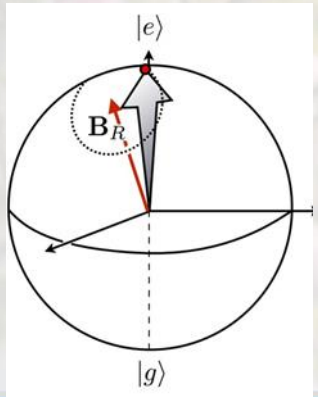
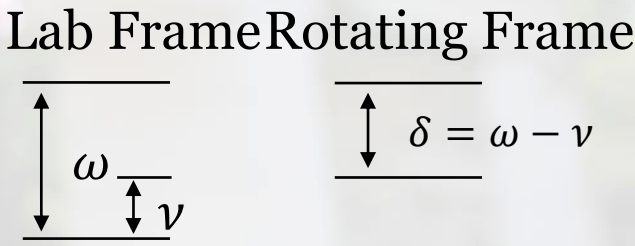
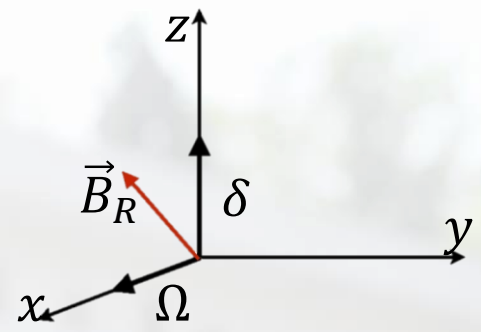
6.2 二能级系统及其操控

- 二能级系统的状态表示及操控 (实验)
- 二能级系统在光场驱动下的Rabi振荡 (光与原子的相互作用)

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2}(\delta \hat{\sigma}_z + \Omega \hat{\sigma}_x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix}$$

■ **远失谐**条件: $\delta \gg \Omega$

- 非对角元远小于对角元, 也就是说耦合项是微扰
- 此时等效磁场远离 x 轴, 等效磁场旋转的幅度很小
- 也就是说如果初态处于 $|e\rangle$, 那么此后原子基本上还是会处于 $|e\rangle$, 根本不会跃迁到另一个状态



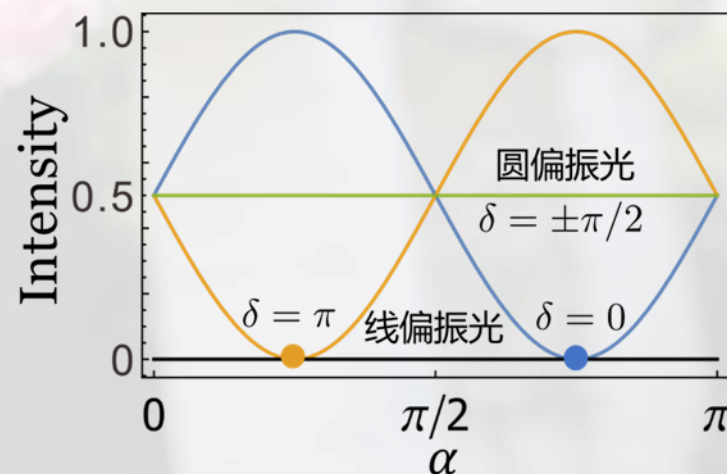
6.3 纯态、混合态与密度算符

■ 纯态与混合态（从偏振光的区分说起）

- 自然光 \rightarrow 光强不变（定义）
- 线偏振光 \rightarrow 光强改变且在某一特定角度消光（定义）
- 部分偏振光 \rightarrow 光强改变、但不消光（定义）
- 圆偏振光 \rightarrow 光强不变
- 椭圆偏振光 \rightarrow 光强改变、但不消光



只用一片检偏器仅能鉴别出线偏振光
无法完全区别五种偏振态



6.3 纯态、混合态与密度算符

■ 纯态与混合态（从偏振光的区分说起）



6.3 纯态、混合态与密度算符

■ 纯态与混合态（从偏振光的区分说起）



为什么有效？

经典混合与量子叠加

6.3 纯态、混合态与密度算符

■ 纯态与混合态（从偏振光的区分说起）

■ 光子的等效（赝）自旋空间：偏振

➤ 水平偏振Horizontal $\rightarrow |H\rangle$

➤ 垂直偏振Vertical $\rightarrow |V\rangle$

➤ 椭圆偏振光 $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

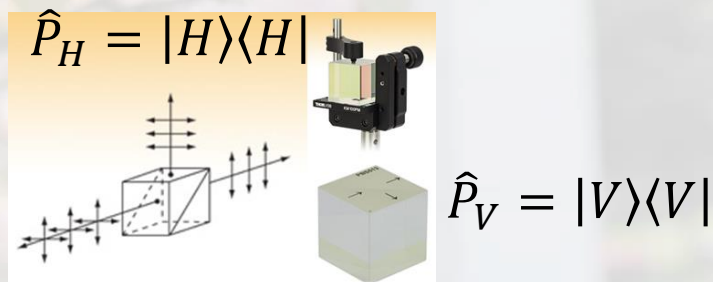
■ 两种情形

➤ Alice制备出线偏振光 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$

➤ Bob以各一半的概率分别制备水平偏振光和垂直偏振光

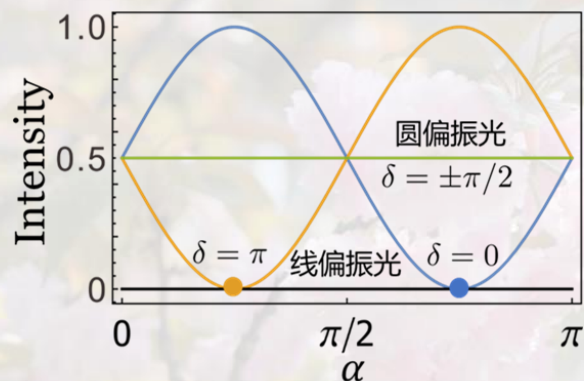
Charlie用垂直偏振分束器（PBS）进行检测

透过射和反射的概率均为1/2
无法区分两种状态



6.3 纯态、混合态与密度算符

Charlie可以转动检偏器进行区分



如何描述?



对于Bob制备的光, 光强不变: 经典**混合态**

马吕斯定律

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

6.3 纯态、混合态与密度算符

■ 纯态与混合态（从偏振光的区分说起）

■ 混合态的表示

➤ Bob制备的态

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\Rightarrow |H\rangle \quad \text{偏振观测量} \quad \hat{P}_H = |H\rangle\langle H| \quad \text{各1/2概率} \\ \frac{1}{2} &\Rightarrow |V\rangle \quad \hat{\sigma}_z \text{的本征态} \quad \hat{P}_V = |V\rangle\langle V| \end{aligned} \quad \left\{ \frac{1}{2} : |H\rangle; \frac{1}{2} : |V\rangle \right\}$$



$$\{P_i : |\psi_i\rangle\} \quad \text{总概率归一 } \sum P_i = 1$$

➤ 对于任何可观测力学量 \hat{A} ，其期望值为

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum P_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i P_i \sum_n \langle \psi_i | \hat{A} | n \rangle \langle n | \psi_i \rangle \\ &= \sum_n \sum_i P_i \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{A} | n \rangle \\ &= \sum_n \langle n | \left(\sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \hat{A} | n \rangle \\ &= \text{Tr}(\rho \hat{A}) \end{aligned}$$

密度算符 (Density Matrix)

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

6.3 纯态、混合态与密度算符

- 纯态与混合态（从偏振光的区分说起）
- 密度算符（Density Matrix）的性质

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

- 厄密性： $\rho = \rho^\dagger$
- 正定性

任意 $|\psi\rangle$, $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$

$$\sum P_i \langle \psi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi \rangle = \sum P_i |\langle \psi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0$$

- Trace求迹运算，无论是纯态还是混态，归一化使得两者的对角线元素之后均为一

$$\text{Tr}(\rho) = 1$$

$$\begin{aligned} \sum \left\langle n \left| \sum_i P_i \right| \psi_i \right\rangle \langle \psi_i | n \rangle &= \sum_i P_i \sum_n \langle \psi_i | n \rangle \langle n | \psi_i \rangle \\ &= \sum P_i = 1 \end{aligned}$$

6.3 纯态、混合态与密度算符

■ 纯态与混合态（从偏振光的区分说起）

- 可以么正对角化，本征值非负，本征值之和为1
- 纯态： $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ，其迹为一

区分纯态和混态要利用到 $\text{Tr}(\rho)$ ，但无论纯态还是混态，其迹均为一，差异在于 $\text{Tr}(\rho^2)$

和混合态如何区分？

$$\text{纯态: } \rho^2 = \rho \quad \text{Tr}(\rho^2) = 1$$

$$\text{混合态: } \rho^2 \neq \rho \quad \text{Tr}(\rho^2) < 1$$

■ 密度算符的动力学

密度算符 ρ 在哈密顿量 \hat{H} 作用下得演化方程可以由波函数的薛定谔方程推导出来(直接求导可以得到)

$$\frac{d}{dt}\rho = i/\hbar[\rho, \hat{H}]$$

$$\text{纯态: } |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ 密度矩阵为 } \rho = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{混态: } \rho_{\text{mix}} = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix}$$

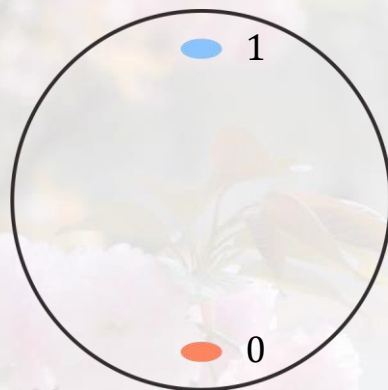
$$\rho_A = \frac{1}{2}(|H\rangle\langle H| + |H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|)$$

$$\rho_B = \frac{1}{2}(|H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|)$$

6.4 量子比特 (Qubit)

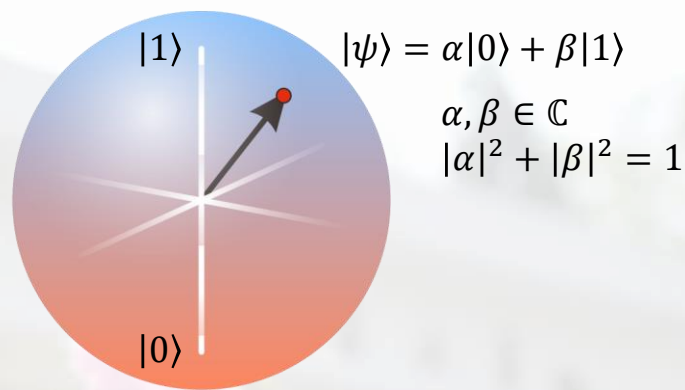
■ 从比特到量子比特

比特



- 0和1两种状态中的一个
- 对应指向南北极的两个矢量
- 晶体管中的开关状态或电路中的高低电平

量子比特



- 比特的量子版本：拥有更多的可能状态
- 这些状态可用Bloch球上的一个矢量表示
- 指向南北极的矢量表示状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，其它状态则为两者的线性叠加
- 对应二能级系统或自旋的某一个状态
- 需要通过量子测量完成经典信息的提取

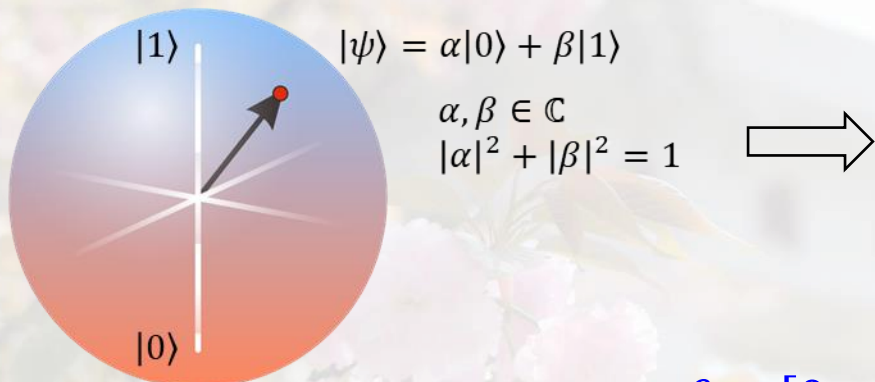
$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

6.4 量子比特 (Qubit)

量子比特的操作

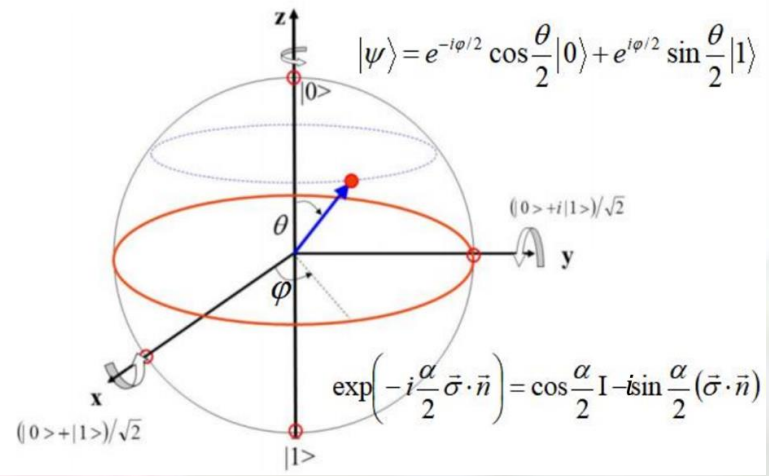
单量子比的操作对应Bloch球上矢量的转动

量子比特



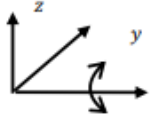
$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}|1\rangle$$

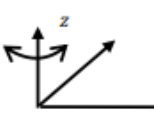
 $\theta \in [0, \pi]$
 $\varphi \in [0, 2\pi]$

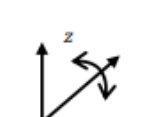


$(\theta, \varphi) \Rightarrow (\theta', \varphi')$

Hadamard	\boxed{H}	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Pauli-X	\boxed{X}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y	\boxed{Y}	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z	\boxed{Z}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Phase	\boxed{S}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$	\boxed{T}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$


$$\sigma_x \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$
 比特反转

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 π 相位门

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

6.4 量子比特 (Qubit)

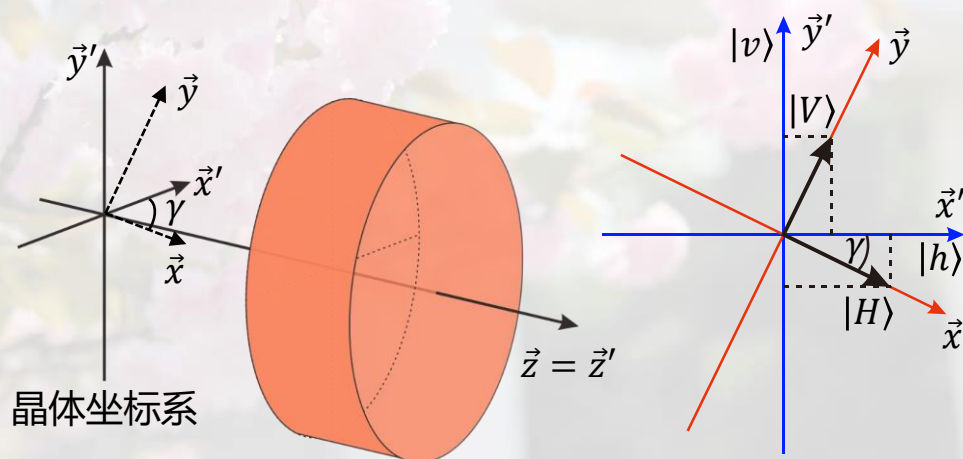
■ 量子比特的操作

物理实现 (以光子偏振态为例)

考虑一个快轴与水平方向夹角为 γ 的波带片

波带片会在振动方向平行于快轴和平行于慢轴的两个偏振态之间引入相位差

$$\Delta\phi = 2\pi d(n_1 - n_2)/\lambda$$



6.4 量子比特 (Qubit)

注意：水平和垂直偏振态是定义在实验室坐标系 $x - y$ 上的

Step 1. 本征值分解

建立晶体坐标系与实验室坐标系的对应

$$|h\rangle \rightarrow \cos \gamma |H\rangle + \sin \gamma |V\rangle$$

$$|v\rangle \rightarrow -\sin \gamma |H\rangle + \cos \gamma |V\rangle$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

及反变换

$$|H\rangle \rightarrow \cos \gamma |h\rangle - \sin \gamma |v\rangle$$

$$|V\rangle \rightarrow \sin \gamma |h\rangle + \cos \gamma |v\rangle$$

$$\Gamma^T = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Step 2. 晶体坐标系下的演化

波晶片实现的是晶体两个本征态之间的相位门，即在 $|h\rangle$ 和 $|v\rangle$ 之间引入相位差 ϕ

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

6.4 量子比特 (Qubit)

Step 3. 任意量子比特的演化

$$\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$$

$$\rightarrow \alpha[\cos \gamma |h\rangle - \sin \gamma |v\rangle] + \beta[\sin \gamma |h\rangle + \cos \gamma |v\rangle]$$

$$\rightarrow \alpha[\cos \gamma |h\rangle - e^{i\phi} \sin \gamma |v\rangle]$$

$$+ \beta[\sin \gamma |h\rangle + e^{i\phi} \cos \gamma |v\rangle]$$

$$\rightarrow \{[e^{i\phi} \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma]\alpha + [(1 - e^{i\phi}) \sin \gamma \cos \gamma]\beta\}|H\rangle$$

$$\{[(1 - e^{i\phi}) \sin \gamma \cos \gamma]\alpha + [\sin^2 \gamma + e^{i\phi} \cos^2 \gamma]\beta\}|V\rangle$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma & (1 - e^{i\phi}) \sin \gamma \cos \gamma \\ (1 - e^{i\phi}) \sin \gamma \cos \gamma & \sin^2 \gamma + e^{i\phi} \cos^2 \gamma \end{pmatrix} = \Gamma^T \hat{U} \Gamma$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |H\rangle &\rightarrow \cos \gamma |h\rangle - \sin \gamma |v\rangle \\ |V\rangle &\rightarrow \sin \gamma |h\rangle + \cos \gamma |v\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |h\rangle &\rightarrow \cos \gamma |H\rangle + \sin \gamma |V\rangle \\ |v\rangle &\rightarrow -\sin \gamma |H\rangle + \cos \gamma |V\rangle \end{aligned}$$

$$\Gamma^T = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

6.4 量子比特 (Qubit)

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma & (1 - e^{i\phi}) \sin \gamma \cos \gamma \\ (1 - e^{i\phi}) \sin \gamma \cos \gamma & \sin^2 \gamma + e^{i\phi} \cos^2 \gamma \end{pmatrix}$$

例：快轴与水平方向夹角为 γ 的**半波片**
半波片在其本征基向量间引入的**相位差为 π**
即 $\phi = \pi$
则操作矩阵为：

$$\hat{U}_{\text{hwp}} = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

例：快轴与水平方向夹角为 γ 的**四分之一波片**
半波片在其本征基向量间引入的**相位差为 $\pi/2$**
即 $\phi = \pi/2$
则操作矩阵为：

$$\hat{U}_{\text{qwp}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i \cos 2\gamma & -i \sin 2\gamma \\ -i \sin 2\gamma & 1 + i \cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

6.4 量子比特 (Qubit)

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi}\sin^2\gamma + \cos^2\gamma & (1 - e^{i\varphi})\sin\gamma\cos\gamma \\ (1 - e^{i\varphi})\sin\gamma\cos\gamma & \sin^2\gamma + e^{i\varphi}\cos^2\gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$U = \begin{pmatrix} i\sin^2\gamma + \cos^2\gamma & (1 - i)\sin\gamma\cos\gamma \\ (1 - i)\sin\gamma\cos\gamma & \sin^2\gamma + i\cos^2\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} i\frac{1-\cos 2\gamma}{2} + \frac{1+\cos 2\gamma}{2} & \frac{1}{2}(1-i)\sin 2\gamma \\ \frac{1}{2}(1-i)\sin 2\gamma & \frac{1-\cos 2\gamma}{2} + i\frac{1+\cos 2\gamma}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2}\cos 2\gamma & \frac{1}{2}(1-i)\sin 2\gamma \\ \frac{1}{2}(1-i)\sin 2\gamma & \frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2}\cos 2\gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(1+i) \begin{pmatrix} 1 - i\cos 2\gamma & -i\sin 2\gamma \\ -i\sin 2\gamma & 1 + i\cos 2\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 - i\cos 2\gamma & -i\sin 2\gamma \\ -i\sin 2\gamma & 1 + i\cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

整体相移舍去

6.4 量子比特 (Qubit)

■ 量子比特的操作

■ 单量子比特的操作对应Bloch球上的绕轴旋转

$$\hat{R}_{\vec{n}}(\eta) = \exp \left[-i \frac{\eta}{2} \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \right]$$

决定旋转轴 \vec{n} 的参数有2个，加上决定旋转角度的参数 η ，因此任意的单量子比特操作包括三个独立参数一般的还会添加一个整体相位因子 δ

$$\hat{U} = e^{i\delta} \hat{R}_{\vec{n}}(\eta)$$

■ 绕轴 \vec{n} 的旋转可以分解为绕 \vec{y}, \vec{z} 二个轴旋转的合成

$$\hat{U} = e^{i\delta} \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_z(\gamma)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_y(\beta) &= e^{i\frac{\beta}{2}\hat{\sigma}_y} = \cos \frac{\beta}{2} \hat{I} + i \sin \frac{\beta}{2} \hat{\sigma}_y & \hat{R}_z(\alpha) &= e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{\sigma}_z} = \cos \frac{\alpha}{2} \hat{I} + i \sin \frac{\alpha}{2} \hat{\sigma}_z \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ & & &= e^{i\alpha/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.4 量子比特 (Qubit)

■ 量子比特的操作

$$\hat{U}_{\text{hwp}} = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \quad \hat{U}_{\text{qwp}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i \cos 2\gamma & -i \sin 2\gamma \\ -i \sin 2\gamma & 1 + i \cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

可以用QWP-HWP-QWP组合来实现光子任意偏振状态的旋转，即

$$\hat{U} = \hat{U}_{\text{qwp}} \hat{U}_{\text{hwp}} \hat{U}_{\text{qwp}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i \cos 2\alpha & -i \sin 2\alpha \\ -i \sin 2\alpha & 1 + i \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i \cos 2\gamma & -i \sin 2\gamma \\ -i \sin 2\gamma & 1 + i \cos 2\gamma \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 = \cos[2(\alpha - \beta)] + \cos[2(\beta - \gamma)] \\ a_2 = \cos 2\beta - \cos[2(\alpha - \beta + \gamma)] \\ b_1 = -\sin[2(\alpha - \beta)] - \sin[2(\beta - \gamma)] \\ b_2 = \sin 2\beta - \sin[2(\alpha - \beta + \gamma)] \end{cases}$$

802

Nature Vol. 299 28 October 1982

Received 15 June; accepted 1 September 1982. 20. Kingsbury, R. & McKnight, S. L. Science 217, 316-324 (1982).

LETTERS TO NATURE

A single quantum cannot be cloned

W. K. Wootters*

Center for Theoretical Physics, The University of Texas at Austin, Austin, Texas 78712, USA

W. H. Zurek

Theoretical Astrophysics 130-33, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA

on an incoming photon with polarization state $|s\rangle$:

$$|A_0\rangle|s\rangle \rightarrow |A_s\rangle|ss\rangle \tag{1}$$

Here $|A_0\rangle$ is the 'ready' state of the apparatus, and $|A_s\rangle$ is its final state, which may or may not depend on the polarization of the original photon. The symbol $|ss\rangle$ refers to the state of the radiation field in which there are two photons each having the polarization $|s\rangle$. Let us suppose that such an amplification can in fact be accomplished for the vertical polarization $|\uparrow\rangle$ and for the horizontal polarization $|\leftrightarrow\rangle$. That is,

$$|A_0\rangle|\uparrow\rangle \rightarrow |A_{\text{vert}}\rangle|\uparrow\uparrow\rangle \tag{2}$$

1982 年，W. K. Wootters 和 W. H. Zurek 在 Nature 上撰文指出：
单个任意未知量子态不可以精确克隆。

- 经典世界中的克隆
 - 未知信息可以被拷贝；传递的信号衰减后可以被放大；
- 量子世界中的克隆
 - 假设存在这样的Cloning Machine，完成某种么正操作 \hat{U} ，可以将任意量子态 $|\phi\rangle$ 进行拷贝，即

$$\hat{U}(|\phi\rangle \otimes |0\rangle) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

量子不可克隆定理：不存在这样的克隆机



量子不可克隆定理 (No-cloning theorem)

■ 量子不可克隆定理的证明

- 首先假定这样的克隆机存在, 即可以进行任意未知量子态的拷贝
- 对于任意两个量子状态 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$, 克隆机可以将两个状态拷贝到与他们完全无关的状态 $|k\rangle$ 上

$$\hat{U}(|\psi\rangle \otimes |k\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle, \quad \hat{U}(|\phi\rangle \otimes |k\rangle) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

- 计算左侧两个状态的内积

$$\langle (\langle \phi| \otimes \langle k|) \hat{U}^\dagger | \hat{U} (|\psi\rangle \otimes |k\rangle) \rangle = \langle (\langle \phi| \otimes \langle k|) | (|\psi\rangle \otimes |k\rangle) \rangle$$

计算两式右侧两个状态的内积

$$\langle (\langle \phi| \otimes \langle \phi|) | (|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle) \rangle$$

- 两侧相等意味着

$$\langle (\langle \phi| \otimes \langle \phi|) | (|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle) \rangle = \langle (\langle \phi| \otimes \langle k|) | (|\psi\rangle \otimes |k\rangle) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \phi|\psi\rangle \langle \phi|\psi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle \langle k|k\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \phi|\psi\rangle \langle \phi|\psi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle$$

这并不是我们最初假设的任意状态的完全克隆, 不可克隆原理证明完毕

- 上式成立的解只有两个

$$\Rightarrow \langle \phi|\psi\rangle = 0 \quad \cup \quad \langle \phi|\psi\rangle = 1$$

这意味着要么两个态正交, 要么两个态相等, 即这样的克隆机仅能克隆正交或相同的两个状态

量子不可克隆定理 (No-cloning theorem)

■ 量子不可克隆定理的证明

➤ Qubit系统中例子

令空白量子比特为 $|0\rangle$ ，目标比特为 $|0\rangle$ 或者 $|1\rangle$ ，普适克隆机意味着

$$\hat{U}|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\hat{U}|1\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

对于任意量子态 $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ ，其归一化态为

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\begin{aligned}\hat{U}|\phi\rangle \otimes |0\rangle &= \hat{U}[(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle] \\ &= \alpha\hat{U}|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta\hat{U}|1\rangle \otimes |0\rangle \\ &= \alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle\end{aligned}$$

根据普适克隆机的定义

$$\begin{aligned}\hat{U}|\phi\rangle \otimes |0\rangle &= |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \\ &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &= \alpha^2|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta^2|1\rangle \otimes |1\rangle + \alpha\beta|0\rangle \otimes |1\rangle + \alpha\beta|1\rangle \otimes |0\rangle\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}&\alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &\neq \alpha^2|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta^2|1\rangle \otimes |1\rangle + \alpha\beta|0\rangle \otimes |1\rangle + \alpha\beta|1\rangle \otimes |0\rangle\end{aligned}$$

所以对任意的 $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ ，并不存在这样的一个cloning machine

量子不可克隆定理 (No-cloning theorem)

■ 量子不可克隆定理的物理意义及应用

- 是量子物理的一个重要结论，即不可能构造一个能够完全复制任意量子比特，而不对原始量子位元产生干扰的系统
- 量子力学的线性特征是这个原理的根本原因
- 是量子信息学的基础。量子信息在信道中传输，不可能被第三方复制而窃取信息而不对量子信息产生干扰。因此这个原理也是量子密码学的基石。

类似不可克隆定理，也可以得到下面的一个推论：**未知的非正交量子态不可以准确识别。**
例如 Alice 向 Bob 发送一个光子，可能处于水平偏振，也可能处于 45 度偏振

$$\begin{array}{ll} \rightarrow & |H\rangle \quad (0^\circ); \\ \nearrow & |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad (45^\circ) \end{array} \quad (7.56)$$

如果 Alice 不告诉 Bob 她发送的是哪一种状态，Bob 无法准确识别出来。

1. 证明: $\exp(i\theta\sigma_z) = I\cos\theta + i\sin\theta\sigma_z$.
2. 两个态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的保真度(相似程度)定义为 $F = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$, 计算如下两个态之间的保真度: $|\psi_1\rangle = \cos\frac{\theta_1}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta_1}{2}|1\rangle$, $|\psi_2\rangle = \cos\frac{\theta_2}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta_2}{2}|1\rangle$.
3. 写出Alice制备的纯态和BOB制备的混态各自的密度算符:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Rightarrow |H\rangle \\ \frac{1}{2} \Rightarrow |V\rangle \end{array}$$

并证明:

$$\begin{array}{ll} \text{纯态: } \rho^2 = \rho & \text{Tr}(\rho^2) = 1 \\ \text{混合态: } \rho^2 \neq \rho & \text{Tr}(\rho^2) < 1 \end{array}$$