中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第一章 线性系统的复频域分析方法

lugh@ustc.edu.cn

2016年8月30日

本章主要内容

- §1.1 复频域分析
- §1.2 系统响应

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

§1.1 复频域分析

lugh@ustc.edu.cn

2016年8月30日

1. 时域－复频域的变换

- **什么是系统**
  - 系统是由若干相互关联相互作用的事物的组合，形成具有某种或某些特定功能的整体

- **各种系统**

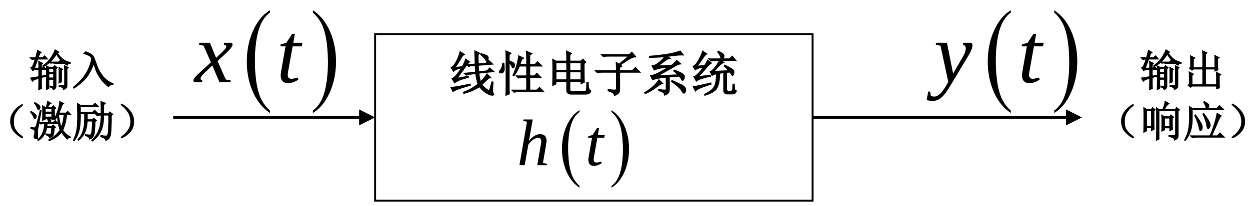
1. 时域－复频域的变换

- **线性电子系统**
  - 可以用线性电路模型来等效的各种电子电路，线性时不变系统
  - 输入输出等满足线性叠加原理
- **系统分析**
  - 利用输入信号激励某一系统，通过研究该系统产生的响应来获得对该系统性能认识
  - 分为时域分析和复频域分析

1. 时域－复频域的变换

- **时域分析方法**
  - 线性系统的时域经典分析工具是线性常系数微分方程
  - 根据初始条件，通过求解微分方程，可获得系统对特定激励的时域响应
  - 复杂的线性系统需要使用高阶线性常微分方程来描述

1. 时域－复频域的变换



$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 y(t)$$
$$= a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 x(t)$$

1. 时域－复频域的变换

- **时域分析的不足之处**
  - 求解微分方程，特别是高阶线性常微分方程，是相当麻烦的一件事情
  - 微分方程的时域解不能清晰地反映出系统的内在特征

- **解决办法**
  - 用变域法：将时域方程变为复频域方程，即将微分方程变为线性方程

1. 时域－复频域的变换

- **变换域**
  - 利用数学变换，将时间域的波形信号变换到一种新的处理域，统称为变换域

$$\text{时域}\xrightarrow{\text{数学变换}}\text{变换域}$$

- **变换域分析的优势**
  - 变换域的数学性质较多，可以简化数学运算
  - 变换域分析结果可以反映系统内在特征，帮助认识和分析比较复杂的系统
  - 系统分析可以在变换域中进行，将变换域分析结果反变换回时域中，再进行时域分析

1. 时域－复频域的变换

- 拉普拉斯变换

$$F(S)=\int_{0}^{\infty}e^{-St}f(t)dt$$

  - $F(S)$称为$f(t)$的象函数，是以复数 $S=\sigma+j\omega$为自变量的复变函数；S为复频率
  - 起始0状态

1. 时域－复频域的变换

- **复频域**
  - 拉氏变换将时域信号变换到新的处理域，所建立的新域称为复频域
- **线性系统的复频域分析**
  - 所谓线性系统的复频域分析，指的就是利用拉氏变换在复频域对线性系统进行分析，获得系统的功能和性质

1. 时域－复频域的变换

- 拉氏变换的性质
  - （1）线性性质
  - （2）频移性质
  - （3）微分性质
  - （4）积分性质

1. 时域－复频域的变换

- （1）线性性质

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\xleftrightarrow{L} X_1(s) \\ x_2(t) &\xleftrightarrow{L} X_2(s) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \xleftrightarrow{L} \alpha X_1(s)+\beta X_2(s)$$

1. 时域－复频域的变换

- （2）频移性质

$$\text{频移：} e^{-\alpha t}x(t) \xleftrightarrow{L} X(s+\alpha)$$

1. 时域－复频域的变换

- （3）微分性质

$$\text{一阶微分}: \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$$

$$\text{K阶微分}: \frac{d^k x(t)}{dt^k} \xleftrightarrow{L} s^k X(s)$$

1. 时域－复频域的变换

- （4）积分性质

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}$$

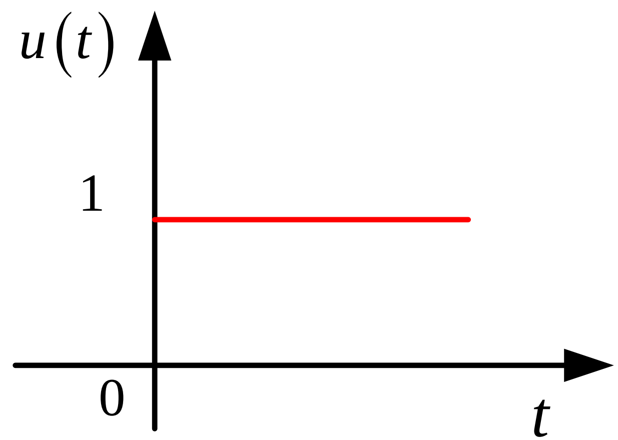
1. 时域－复频域的变换

- **激励信号的拉氏变换**
  - （**1**）单位阶跃信号 $u(t)$ 的拉氏变换
  - （**2**）正弦信号的拉氏变换
  - （**3**）指数信号的拉氏变换

1. 时域－复频域的变换

- （1）单位阶跃信号 $u(t)$ 的拉氏变换

$$u(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t>0\end{cases}$$



$$L\{u(t)\}=\int_0^{\infty}u(t)e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

1. 时域－复频域的变换

- 正弦信号 $\sin(\omega_0 t)$

$$L\{\sin(\omega_0 t)\} = \int_0^\infty \sin(\omega_0 t) e^{-st} dt = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

- 指数信号 e^{pt}

$$L\{e^{pt}\} = \int_0^\infty e^{pt} u(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s-p} e^{-(s-p)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-p}$$

1. 时域－复频域的变换

- 起始状态为0的线性系统可描述成复频域的线性方程

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 x(t)$$

$$(b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \cdots + b_0) Y(S) = (a_m S^m + a_{m-1} S^{m-1} + \cdots + a_0) F(S)$$

$$F(S) \longrightarrow \boxed{\text{系统H(S)}} \longrightarrow Y(S)$$

2. 系统函数

- **什么是系统函数**
  - 在复频域中，零状态条件下的系统的输出响应和输入激励之比，称为系统函数或系统的传递函数

$$H(S)=\frac{Y(S)}{F(S)}=\frac{a_m S^m+\cdots a_0}{b_n S^n+\cdots b_0}$$

2. 系统函数

$$H(S)=\frac{Y(S)}{F(S)}=\frac{a_m S^m+\cdots a_0}{b_n S^n+\cdots b_0}$$

- **说明**
  - 系统函数只与系统自身结构参数有关，是反映系统内在特征的物理量
  - 系统函数能够充分表达一个系统的特征，系统所有性质都包含在系统函数中

2. 系统函数

- **系统函数的性质**
  - 系统函数是S的有理函数
  - 系统函数是物理可实现的、稳定的
  - 由于输入、输出各有电流和电压两种表示方法，根据量纲的不同， 系统函数有四种形式
    - 电压传递函数
    - 电流传递函数
    - 阻抗传递函数
    - 导纳传递函数

2. 系统函数

- 系统零点其实就是传递函数分子多项式的根

$$H(s)=\left.\frac{Y(s)}{X(s)}\right|_{s=z}=0 \Rightarrow \left.Y(s)\right|_{s=z}=0$$

- 系统极点其实就是传递函数分母多项式的根

$$H(s)=\left.\frac{Y(s)}{X(s)}\right|_{s=p}\to\infty \Rightarrow \left.X(s)\right|_{s=p}=0$$

2. 系统函数

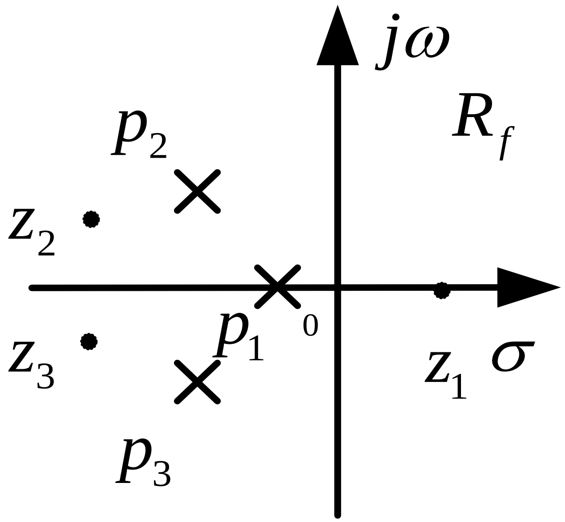
- 系统函数的零极点表达式

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

2. 系统函数

■ 零极点分布图

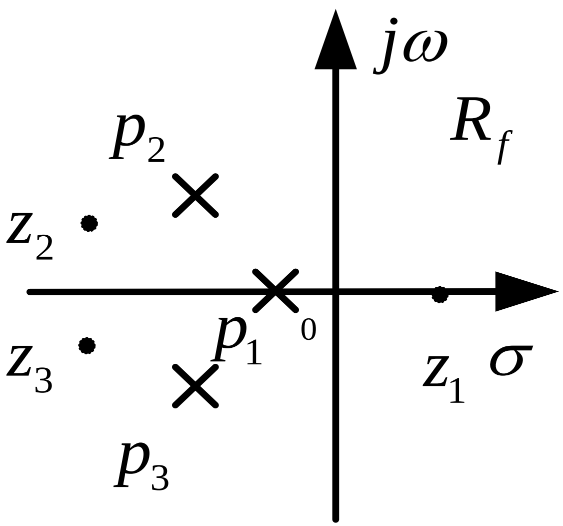
- □ 将系统函数的零、极点全部表示在复平面上，则形成系统函数的零极点分布图



三零点三极点系统

2. 系统函数

- **零极点分布特点-1**
  - 多项式的实根可单独存在，复根必须成对出现

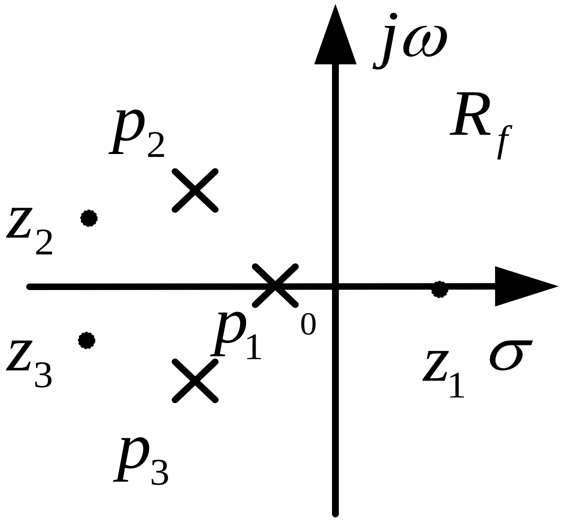


$$z_2 = z_3^*$$

$$p_2 = p_3^*$$

2. 系统函数

- **零极点分布特点-2**
  - 对于一个稳定系统，系统函数的所有极点必须分布在虚轴的左侧s平面内，而零点的分布没有任何约束

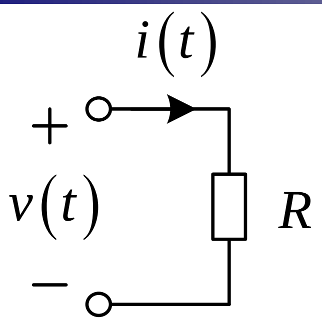


$$\mathrm{Re}\left\{p_1, p_2, p_3\right\} < 0$$

2. 系统函数

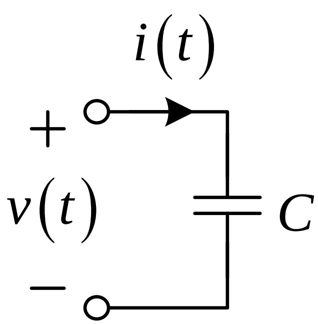
$$\left.\begin{cases} \dfrac{1}{s-p} \overset{L}{\longleftrightarrow} e^{pt} = e^{(\sigma+j\omega)t} \\ \exists M < \infty, \lim\limits_{t\to\infty} \left|h(t)\right| < M \end{cases}\right. \Rightarrow \sigma < 0$$

3. 元件和网络的S域模型



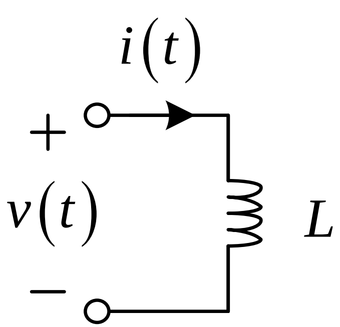
$$v(t)=R\cdot i(t)\Rightarrow V(s)=Z(s)I(s)=RI(s)$$

$$\Rightarrow Z_R(s)=R$$



$$v(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt\Rightarrow V(s)=\frac{1}{sC}I(s)$$

$$\Rightarrow Z_C(s)=\frac{1}{sC}$$

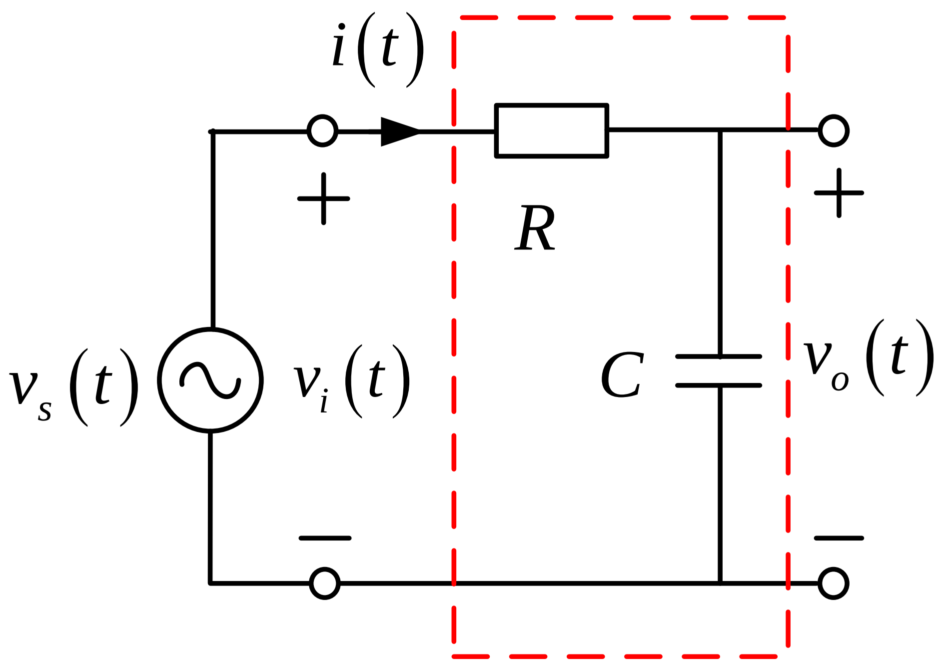


$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}\Rightarrow V(s)=LsI(s)$$

$$\Rightarrow Z_L(s)=Ls$$

3. 元件和网络的S域模型

■ 例：一阶RC电路的复频域分析



3. 元件和网络的S域模型

$$\begin{cases} v_i(t) \xleftrightarrow{L} V_i(s) \\ v_o(t) \xleftrightarrow{L} V_o(s) \end{cases}$$

第一步

先利用拉氏变换，将电路中待分析的时域电压信号变换到复频域中

$$V_o(s) = \frac{1/sC}{R+1/sC} V_i(s)$$

$$= \frac{1}{1+sRC} V_i(s)$$

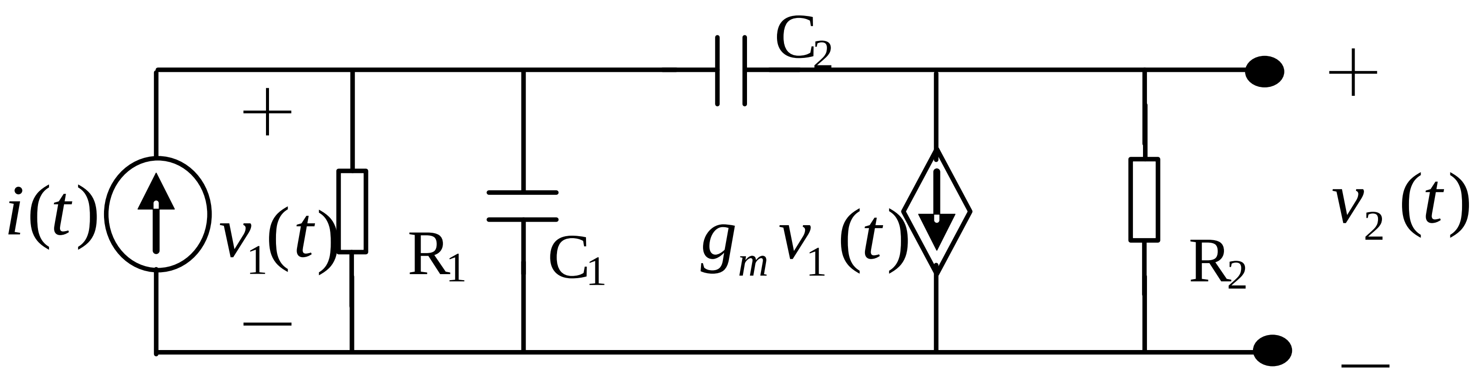
第二步

再利用拉氏变换以及电路中无源器件的复阻抗参数，依电路结构求解输出电压

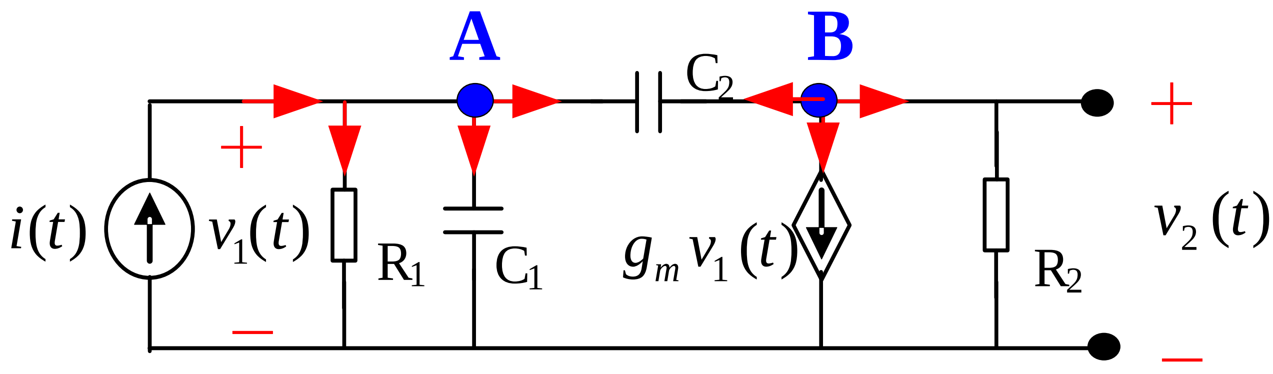
3. 元件和网络的S域模型

■ **例：复杂线性电路的复频域分析**

已知输入为$i(t)$，输出为$v_2(t)$，求系统函数$\mathrm{H}(\mathrm{s})$.



3. 元件和网络的S域模型



$$\left.\begin{array}{l} i(t) \xleftrightarrow{L} I(s) \\ v_1(t) \xleftrightarrow{L} V_1(s) \\ v_2(t) \xleftrightarrow{L} V_2(s) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_2(s)}{I(s)} = ?$$

第一步

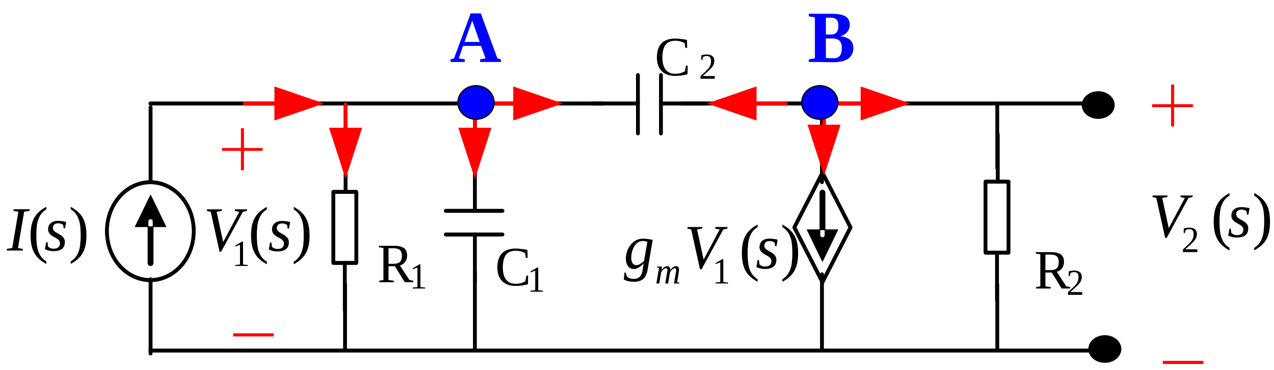
分析题意，标明电路的输入输出端口，所需电压电流的定义方向，并变换到复频域

3. 元件和网络的S域模型

第二步

根据电路结构，采用节点电压法，列出A、B两节点的电流方程，并进行求解

3. 元件和网络的S域模型



$$\begin{cases} \dfrac{V_1(s)}{R_1} + sC_1 \cdot V_1(s) + sC_2\left[V_1(s) - V_2(s)\right] = I(s) \\ sC_2\left[V_2(s) - V_1(s)\right] + \dfrac{1}{R_2} V_2(s) + g_m V_1(s) = 0 \end{cases}$$

3. 元件和网络的S域模型

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{I(s)}$$

$$=\frac{R_1R_2\left(sC_2-g_m\right)}{s^2R_1R_2C_1C_2+\left(sR_1C_1+sC_2\left(R_1+R_2+R_1R_2g_m\right)\right)+1}$$