2016.6.24

(1) 设$\{N(t), t\geq 0\}$是一个强度为$\lambda>0$的Poisson过程,

a. $\{N(t), t\geq 0\}$一定是平稳过程; (X)

b. 给定$N(t)=n>0$, 则第n个事件的到达时间服从区间$[0,t]$上的均匀分布; Thm 2.3.1 (ppt) 到达时间条件分布 (√)

c. $\{M(t), t\geq 0\}$是另一个强度为$\gamma>0$的Poisson过程,则$\{N(t)+M(t), t\geq 0\}$是一个强度为$\lambda+\gamma$的Poisson 过程; 独立性要求不满足 (X)

(2) 假设一个马氏链的所有状态都是常返的, i和j是两个状态且$i\to j$,则

a. $j\to i$; (√)

b. $P_{ij}>0$ 或$P_{ji}>0$; (√)

c. $\sum_{i=1}^{\infty} P_{jj}^{(i)}<\infty$; 瞬过 (X)

(3) 下列关于τ的函数$R(\tau)$是否可能作为平稳过程或平稳序列的协方差函数 平稳过程协方差的协方差函数性质

a. $R(\tau)=e^{-|\tau|}(\tau^2+2|\tau|-1)$; $R(0)<0$ (X)

b. $R(\tau)=\begin{cases}1/|\tau|, & \tau\neq 0\\ 1, & \tau=0\end{cases}$; (√)

c. $R(\tau)=|\tau|e^{-\tau^2/2}$; $R(0)=0<R(1)$ (X)

(4) 设$\{X_n, n\in N\}$是一个马氏链，状态空间为S. 下面说法是否正确.

a. $P_{ij}^{(n)}\geq f_{ij}^{(n)}$, 其中$i,j\in S, n\in N$; 首达定义 (√)

b. 如果状态i,j是互达的, 则存在n使得$P_{ij}^{(n)}>0, P_{ji}^{(n)}>0$; n同时成立不一定 (X)

c. 如果转移概率矩阵的所有行相同，则所有状态是属于相同的类. 反 $\begin{array}{c|cc} & A & B\\ \hline A & 0 & 1\\ B & 0 & 1\end{array}$ (X)

d. 如果$f_{ij}<1, f_{ji}<1$, 则i,j不是互达的; 可互达 (X)

1. 设$X=\{X_n, n\geq 0\}$为一不可约、有限（N 个）状态的 Markov 链，且其转移概率矩阵 P 为双随机的（行和与列和均为 1)，则判断是非:

(1) X 的平稳分布不一定存在 X (2) X 的平稳分布存在但不必唯一 X

(3) X 的平稳分布为$\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N}\right)$ √ (4) X 的极限分布为$\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N}\right)$ X 需要遍历. 周期 MC 极限分布不存在. (ppt P68)

随机过程应考复习

一， Poisson 过程

2016-2017 秋

(1) 设$\{N(t), t\geq 0\}$是一个强度为$\lambda>0$的Poisson过程, 则 $Cov(N(t), N(s))=$ $\underline{\lambda \min(s,t)}$.

$N(t)-N(s) \perp N(s)$

不妨设$t>s$, $Cov(N(t),N(s))=Cov(N(s), N(t)-N(s)+N(s)) = Cov(N(s),N(s))=\lambda s$.

(3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为λ_1, λ_2, λ_3 的Piosson过程到达，且相互独立。若不论颜色，第一辆汽车平均到达时间为$\underline{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}$; 第一辆红色汽车的平均到达时间为$\underline{\frac{1}{\lambda_2}}$。

参考第5次作业 T6

T2. $E[N(1)N(2)] = E[N(1)(N(2)-N(1))] + E[N^2(1)] = \underbrace{EN(1)}_{\lambda} \cdot \underbrace{EN(2)-N(1)}_{\lambda} + (\lambda^2+\lambda) = \lambda + 2\lambda^2$.

$E[N(10)|N(5)] = E[N(10)-N(5)|N(5)] + E[N(5)|N(5)] = N(5) + E[N(10)-N(5)] = 5\lambda + N(5)$

$P(N(2)-N(1)=1|N(3)=1) = \frac{P(N(2)-N(1)=1, N(3)=1)}{P(N(3)=1)} = \frac{P(N(1)=0, N(2)=1, N(3)=1)}{P(N(3)=1)} = \frac{P(N(1)=0)P(N(2)-N(1)=1)\cdot P(N(3)-N(2)=0)}{P(N(3)=1)} = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}}{3\lambda e^{-3\lambda}} = \frac{1}{3}$.

(4) 设$[0,t]$内到达某商店门口的顾客数$\{N(t),t\geq 0\}$是一个强度为$\lambda>0$的Poisson过程，每个达到的顾客依概率p进入店内，以概率$1-p$不进店即离开，且顾客是否进店是相互独立的；进店的每个顾客又独立地以概率q进行消费，以概率$1-q$不消费。则进店的顾客数的均值和方差为 λp 和 λp；消费的顾客数的均值和方差为 $\lambda p(1-q)$ 和 $\lambda p(1-q)$ 参考Ex5 T1.

二、(16分) 设某人甲负责订阅杂志，前来订阅的顾客数是日均到达率为6的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$。若每个顾客的订阅季数$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$，且各人的选择相互独立。设$N_i(t)$为订阅$i$季杂志的顾客人数，$i=1,2,3$。并以$\{X(t)\}$表示到时刻$t$为止甲所得全部手续费（假设每订出一季杂志，甲可得手续费1元）。   参考Ex5 答案 补充题 1.

(1) 问$N_i(t)$，$i=1,2,3$分别是什么过程？它们是否相互独立？

(2) 试求：$E[X(t)]$，$Var(X(t))$，及$X(t)$的矩母函数$g_{X(t)}(u)=E[e^{uX(t)}]$.

2016-2017 春

2. 设$\{N(t),t\geq 0\}$是一个强度为λ的Poisson过程，则$E[N(1)N(2)]=$ $\lambda+2\lambda^2$；$E[N(10)|N(5)]=$ $5\lambda+N(5)$；若又已知$N(3)=1$，则$P(N(2)-N(1)=1)=$ $\frac{1}{3}$.

3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程，据以往资料统计为每小时平均观测到3颗流星。则在晚上8点到10点期间，该天文台没有观察到流星的概率是 e^{-6} 。凌晨0点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 $Exp(3)$ 。 $\Rightarrow \lambda=3$ $P(N(2)=0)=$ 等待间隔 与之无关（指数无记忆性）

8. 关于平稳过程，下列说法正确的是(C)。
(A) 宽平稳过程具有平稳增量性 → 相同时间内分布相同 宽平稳不要求分布
(B) Possion过程是宽平稳过程 X.
(C) 初始状态服从平稳分布的Markov过程为严平稳过程 ✓ $\pi P=\pi$ 分布相同
(D) 严平稳过程一定是宽平稳过程 X 严+二阶矩$\Rightarrow$宽

二、(12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目$N(t)$服从参数为λ的Poisson过程，每个电子携带能量相互独立且与电子数目$N(t)$相互独立，并均服从区间$[1,2]$上的均匀分布，设到t时刻的阳极接受的能量为$S(t)$。求$S(t)$的均值$E[S(t)]$和方差$Var[S(t)]$。   书例1.12 结论   参考Ex1 T5.

三、(20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车，分别按强度为λ_1，λ_2和λ_3且相互独立的Poisson过程通过公路上的某观察站，   参考Ex5 T6.

(1) 若不论颜色，求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望；

(2) 在已知时刻t_0观察到一辆红车的条件下，

(a) 下一辆仍是红车的概率是多少？ (b) 下一辆是黄车的概率是多少？

(3) 已知时刻t_0观察到一辆红车的条件下，接下来通过的k辆全是红车，而后是非红车的概率是多少？（$k\geq 0$）

(4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有n辆的概率，$n=0,1,2,\cdots$.

2019 期末   2019.6.24

(3) 设有复合泊松过程$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$，其中$N(t)$是强度为$\lambda$的泊松过程，$Y_i\sim Exp\{\mu\}$。则：$EX(t)=$ $\frac{\lambda t}{\mu}$，$E[X^2(t)]=$ $\frac{\lambda t(\lambda t+2)}{\mu^2}$，$g_{X(t)}(s)=E\exp\{sX(t)\}=$ $e^{\frac{\lambda ts}{\mu-s}}$ $EY_i=\frac{1}{\mu}$ $Var Y_i=\frac{1}{\mu^2}$

二. $S(t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k & N(t)\geq 1\\ 0 & N(t)=0\end{cases}$ 能量 $Y_k\sim U(1,2)$

$E[S(t)]=E[E(S(t)|N(t))]=E[\frac{3}{2}N(t)]=\frac{3}{2}\lambda t$.

$Var S(t) = Var Y_i\cdot E[N(t)] + (E[Y_i])^2\cdot Var N(t)$

$=(\frac{1}{12}+\frac{9}{4})\lambda t = \frac{7}{3}\lambda t$.

同(二). $EX_t = EY_i\cdot EN(t) = \frac{\lambda t}{\mu}$

$Var X(t) = (EY_i)^2\cdot Var N(t) + Var Y_i\cdot EN(t) = \frac{1}{\mu^2}\lambda t + \frac{1}{\mu^2}\lambda t = \frac{2\lambda t}{\mu^2} \Rightarrow EX^2(t) = \frac{\lambda t(\lambda t+2)}{\mu^2}$

$g_{X(t)}(s) = E[e^{sX(t)}] = E\{E[e^{sX(t)}|N(t)=n]\} = E[g_Y(s)^{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty}(g_Y(s))^n P(N(t)=n)$

$= e^{\frac{\lambda ts}{\mu-s}}$，$g_Y(s)=\frac{\mu}{\mu-s}$ 为指数分布矩母函数.

二. $E[C(t)|N(t)=n] = E[\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\alpha W_i}|N(t)=n] = E\mu\, E[\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha W_i}|N(t)=n]$

$= \mu \cdot E[\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha U_i}|N(t)=n] = \mu \cdot \frac{n}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$ $\quad [E[e^{-\alpha U_i}] = \int_0^t e^{-\alpha u}\frac{1}{t}du = \frac{1}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})]$

$(W_1 \dots W_n)|N(t)=n \overset{d}{=} (U_{(1)}, \dots U_{(n)})$ 故 $E[C(t)] = \frac{\mu}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t}) \cdot E[N(t)] = \frac{\mu\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$

~~$\overset{d}{=}$~~ 由二 顺序 设为 $U_i \sim U(0,t)$

二、（8分）保险公司的理赔次数$N(t)$是强度为λ的泊松过程，诸次理赔额$C_i (i \geq 1)$为独立同分布，且与$N(t)$独立，$EC_i = \mu$，又设W_i为第i次理赔发生的时间$(i \geq 1)$，则到时刻t为止的理赔总额的折现值为：

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中$\alpha > 0$为折现率，试求$C(t)$的期望值。

这里题课写错，$X \sim Gamma(1,\lambda)$，$Y \sim Gamma(1,\mu)$，但$X+Y$不 $\sim Gamma(1,\lambda+\mu)$

$X \sim Gamma(\alpha,\lambda) + Y \sim G(\beta,\lambda) \sim Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$ 这是可加性

(1) (c) $P(\max(X,Y) \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x)$

$= (1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\mu x})$

(d) $P(X>h) = e^{-\lambda h} = 1-\lambda h + o(h)$

Taylor展开

(1) 设X与Y相互独立，分别服从指数分布$Exp\{\lambda\}$与$Exp\{\mu\}$，则：

(a) $X+Y \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. (X) ~~Gamma(1,λ+μ)~~ (b) $\min\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. (√) Ex5 结论

(c) $\max\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. (X) (d) $P\{X>h\} = 1-\lambda h + o(h)$, $h \downarrow 0$. (√)

(e) $P\{X \leq s+t \mid X > s\} = P\{X \leq t\}$, $s,t>0$. (√)

无记忆性

2019.1.10

(3) $P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x}$

$P(X_1 = X_{(1)}) = P(X_1 < X_2, X_1 < X_3) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$

算联合分布. 参照Ex5 T6

（3）（填空）设X_1、X_2、X_3相互独立，且$X_i \sim Exp(\lambda_i)$，$i=1,2,3$（指数分布），则$X_{(1)} = \min\{X_1,X_2,X_3\}$的分布为（ $Exp(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ）概率 $P\{X_1 = X_{(1)}\}$等于（ $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ ）

(4) $(W_1 \dots W_n)|N(t)=n \overset{d}{=} (U_{(1)} \dots U_{(n)})$ $U_i \sim U(0,t)$

$U_{(k)}$的p.d.f.为 $f_k(u) = nC_{n-1}^{k-1}(\frac{u}{t})^{k-1}(1-\frac{u}{t})^{n-k}\frac{1}{t}$

$EU_{(k)} = \int_0^t nC_{n-1}^{k-1}(\frac{u}{t})^{k-1}(1-\frac{u}{t})^{n-k}\frac{u}{t}du$

$= tn\int_0^1 C_{n-1}^{k-1} v^k (1-v)^{n-k} dv$

$= tn\, C_{n-1}^{k-1} \cdot B(k+1, n-k+1) = \frac{k}{n+1} \cdot t$

2° $N(t) \geq k \Leftrightarrow W_k \leq t$，$W_k \sim \Gamma(k,\lambda)$

$g(w) = \lambda \cdot e^{-\lambda w} \cdot \frac{(\lambda w)^{k-1}}{(k-1)!}$

$EW_k = \int_0^{\infty} w \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda w}\frac{(\lambda w)^{k-1}}{(k-1)!}dw$

$= \frac{k}{\lambda}$

(~~随机变量~~ $\Gamma(\alpha,\beta)$ 期望为$\frac{\alpha}{\beta}$)

（4）（填空）设$\{N(t), t \geq 0\}$是一强度为λ的Poisson过程，W_k为其第k个事件发生的时间，并设$1 \leq k \leq n$，$t>0$，则$E\{W_k \mid N(t)=n\} =$（ $\frac{kt}{n+1}$ ），$E(W_k) =$（ $\frac{k}{\lambda}$ ）。

可直接用 $W_k \sim \Gamma(k,\lambda)$ $EW_k = \frac{k}{\lambda}$.

二、（8分）假设汽车按强度为λ的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路，进入的第i辆车以速度V_i行驶。假定诸V_i $(i \geq 1)$为相互独立的正随机变量，有共同分布F。试求在时刻t位于区间(a,b)内的平均汽车辆数。

解. 设第i辆车在时刻s进入公路，若t时刻在(a,b)内，记为I型事件

则要求 $a < V_i(t-s) < b \Rightarrow p(s) = P(a < V_i(t-s) < b) = F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})$

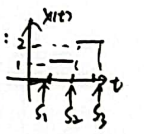
即时刻s发生的事件有概率$p(s)$判入I型事件

$N_1(t) \sim Poi(\lambda p t)$，$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds$

$\Rightarrow EN_1(t) = \lambda p t = \lambda\int_0^t [F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})]ds$.

2020.1.6

（4）设$\{X(t), t \geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，命$X_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，则：



$E(X_T) =$（ $\frac{1}{2}\lambda T$ ），$Var(X_T) =$（ $\frac{1}{3}\lambda T$ ）。

(4) 1° $T \cdot X_T = \sum_{k=1}^{X(T)}(S_k - S_{k-1}) \cdot (k-1) + [T - S_{X(T)}] \cdot X(T)$

$= T \cdot X(T) - \sum_{k=1}^{X(T)} S_k$

$\Rightarrow X_T = X(T) - \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{X(T)} S_k$

$E(X_T | X(T)=n) = n - \frac{1}{T}E[\sum_{k=1}^{n} S_k | X(T)=n]$

$= n - \frac{1}{T} \cdot \frac{nT}{2} = \frac{n}{2}$.

$\Rightarrow EX_T = \frac{1}{2}\lambda T$.

$\{E[\sum_{k=1}^{n} S_k | X(T)=n] = E[\sum_{k=1}^{n} U_k] = \frac{nT}{2}.$

2° $Var X_T = Var[E(X_T|X(T))] + E[Var(X_T|X(T))]$

$Var(X_T | X(T)=n) = \frac{1}{T^2}Var[\sum_{k=1}^{n} S_k | X(T)=n] = \frac{1}{T^2}Var[\sum U_k | X(T)=n]$

$= \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{12}T^2 \cdot n = \frac{n}{12}$.

$\therefore Var X_T = E[\frac{1}{12}X(T)] + Var[\frac{1}{2}X(T)] = \frac{1}{3}\lambda T$.

（3）到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为9和3的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为（ $\frac{1}{12}$ ），第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了k封正常邮件的概率为（ $\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^k$ ）。 (参考Ex5 T6)

（5）到达某商店的顾客数$N(t)$是一强度为$\lambda(t) = 2 + t/2$的非齐次泊松过程，若该商店早上8:00开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(e^{-8})，午时段到达商店的平均人数为(8)。

(5) 以8:00为起始时间 $P(N(t+s)-N(t)=n) = \frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}e^{-[m(t+s)-m(t)]}$

$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds = 2t + \frac{1}{4}t^2$

$\therefore P(N(5)-N(3)=0) = e^{-8}$，$E(N(5)-N(3)) = m(5)-m(3) = 8$.