

清华大学计算机系列教材

本套教材已伴随着计算机科学与技术的发展茁壮成长了三十余年，获得了中华人民共和国教育部科技进步奖、普通高等学校优秀教材全国特等奖、全国优秀畅销书金奖等三十多项部级以上奖励，被近千所高校选用教材，教学效果非常好。本套教材经过多次修订改版和增加新品种、新内容、新技术，基本涵盖了本科生和硕士研究生的主要课程。本套教材的作者全部是清华大学计算机系的教师，教材的内容、语言特点、课时安排体现了他们治学严谨的特点，概念表述严谨，逻辑推理严密，语言精炼。同时，本套教材体系完整、结构严谨，理论结合实际，注重素质培养。

内容简介

本书按照面向对象程序设计的思想，根据作者多年教学积累，系统地介绍各类数据结构的功能、表示和实现，对比各类数据结构适用的应用环境；结合实际问题展示算法设计的一般性模式与方法、算法实现的主流技巧，以及算法效率的评判依据和分析方法；以高度概括的体例为线索贯穿全书，并通过对比和类比揭示数据结构与算法的内在联系，帮助读者形成整体性认识。

配套的习题解析涵盖验证型、拓展型、反思型、实践型和研究型习题，总计290余道大题、525多道小题，激发读者的求知欲，培养自学能力和独立思考习惯。本书及《习题解析》共计配有340多组、400余幅插图结合简练的叙述，40多张表格列举简明的规范、过程及要点，280余段代码及算法配合详尽而简洁的注释，使深奥抽象的概念和过程得以具体化且便于理解和记忆；推荐20余册经典的专著与教材，提供40余篇重点的学术论文，便于读者进一步钻研和拓展。

结合学生基础、专业方向、教学目标及允许课时总量等各种因素，本书推荐了若干种典型教学进度及学时分配方案，供授课教师视具体情况参考和选用。

勘误表、插图、代码以及配套讲义等相关教学资料，均以电子版形式向公众开放，读者可从本书主页直接下载：<http://dsa.cs.tsinghua.edu.cn/~deng/ds/dsacpp/>

作者介绍



邓俊辉 清华大学计算机系副教授。1993年、1997年分别于清华大学计算机系获工学学士和工学博士学位。主要研究方向为科学计算可视化、计算几何及计算机图形学。长期承担清华大学计算机本科生专业基础课程“数据结构”和研究生基础理论课“计算几何”的教学工作，编著的《数据结构与算法（Java描述）》入选“北京市高等教育精品教材”，参与编著的《数据结构（用面向对象方法与C++语言描述）》入选“国家级高等教育精品教材”，曾获清华大学“青年教师教学优秀奖”、清华大学“教书育人奖”、清华大学“教学成果奖”二等奖、清华大学“教学成果奖”一等奖、中国高校科学技术奖二等奖、宝钢教育基金“宝钢教育奖”。

清华大学
计算机系列教材

邓俊辉 编著

数据结构(C++语言版)

(第3版)



清华大学出版社

清华大学985名优教材立项资助

数据结构（C++语言版）

第 3 版

邓俊辉

清华大学出版社

2013年9月 · 北京

丛书序

“清华大学计算机系列教材”已经出版发行了30余种，包括计算机科学与技术专业的基础数学、专业技术基础和专业等课程的教材，覆盖了计算机科学与技术专业本科生和研究生的主要教学内容。这是一批至今发行数量很大并赢得广大读者赞誉的书籍，是近年来出版的大学计算机专业教材中影响比较大的一批精品。

本系列教材的作者都是我熟悉的教授与同事，他们长期在第一线担任相关课程的教学工作，是一批很受本科生和研究生欢迎的任课教师。编写高质量的计算机专业本科生（和研究生）教材，不仅需要作者具备丰富的教学经验和科研实践，还需要对相关领域科技发展前沿的正确把握和了解。正因为本系列教材的作者们具备了这些条件，才有了这批高质量优秀教材的产生。可以说，教材是他们长期辛勤工作的结晶。本系列教材出版发行以来，从其发行的数量、读者的反映、已经获得的国家级与省部级的奖励，以及在各个高等院校教学中所发挥的作用上，都可以看出本系列教材所产生的社会影响与效益。

计算机学科发展异常迅速，内容更新很快。作为教材，一方面要反映本领域基础性、普遍性的知识，保持内容的相对稳定性；另一方面，又需要跟踪科技的发展，及时地调整和更新内容。本系列教材都能按照自身的需要及时地做到这一点。如王爱英教授等编著的《计算机组成与结构》、戴梅萼教授等编著的《微型计算机技术及应用》都已经出版了第四版，严蔚敏教授的《数据结构》也出版了三版，使教材既保持了稳定性，又达到了先进性的要求。

本系列教材内容丰富，体系结构严谨，概念清晰，易学易懂，符合学生的认知规律，适合于教学与自学，深受广大读者的欢迎。系列教材中多数配有丰富的习题集、习题解答、上机及实验指导和电子教案，便于学生理论联系实际地学习相关课程。

随着我国进一步的开放，我们需要扩大国际交流，加强学习国外的先进经验。在大学教材建设上，我们也应该注意学习和引进国外的先进教材。但是，“清华大学计算机系列教材”的出版发行实践以及它所取得的效果告诉我们，在当前形势下，编写符合国情的具有自主版权的高质量教材仍具有重大意义和价值。它与国外原版教材不仅不矛盾，而且是相辅相成的。本系列教材的出版还表明，针对某一学科培养的要求，在教育部等上级部门的指导下，有计划地组织任课教师编写系列教材，还能促进对该学科科学、合理的教学体系和内容的研究。

我希望今后有更多、更好的我国优秀教材出版。

清华大学计算机系教授
中国科学院院士

张钹

序

为适应快速发展的形势，计算机专业基础课的教学必须走内涵发展的道路，扎实的理论基础、计算思维能力和科学的方法论是支撑该学科从业人员进行理性思维和理性实践的重要基础。“程序设计基础”、“面向对象技术”、“离散数学”以及“数据结构”等相关课程，构成了清华大学计算机系专业基础课程体系中的一条重要脉络。近年来为强化学生在计算思维和实践能力方面的训练力度，课程组通过研究，探索和实践，着力对该课程系列的教学目标、内容、方法和各门课的分工，以及如何衔接等进行科学而系统的梳理，进一步明确了教学改革的方向。在这样的背景下，由邓俊辉撰写的《数据结构（C++语言版）》正式出版了。

为了体现教材的先进性，作者研读并参考了计算学科教学大纲（ACM/IEEE Computing Curricula），结合该课程教学的国际发展趋势和对计算机人才培养的实际需求，对相关知识点做了精心取舍，从整体考虑加以编排，据难易程度对各章节内容重新分类，给出了具体的教学计划方案。

为了不失系统性，作者依据多年教学积累，对各种数据结构及其算法，按照分层的思想精心进行归纳和整理，并从数据访问方式、数据逻辑结构、算法构成模式等多个角度，理出线索加以贯穿，使之构成一个整体，使学生在学习数据结构众多知识点的同时，获得对这门学问相关知识结构的系统性和全局性的认识。

计算机学科主张“抽象第一”，这没有错，但弄不好会吓倒或难倒学生。本书从具体实例入手，运用“转换-化简”、“对比-类比”等手法，借助大量插图和表格，图文并茂地展示数据结构组成及其算法运转的内在过程与规律，用形象思维帮助阐释抽象过程，给出几乎所有算法的具体实现，并通过多种版本做剖析和对比，引领读者通过学习提升抽象思维能力。

计算机学科实践性极强，不动手是学不会的。为了强化实践，本书除了每章都布置人人必做的习题和思考题外，还有不少于授课学时的上机编程要求，旨在培养学生理性思维和理性实践的动脑动手能力。

《中国计算机科学与技术学科教程2002》曾批评国内有关程序设计类的课，一是淡化算法，二是“一开始就扎进程序设计的语言细节中去”。本书十分重视从算法的高度来讲述数据结构与算法的相互依存关系，在书的开篇就用极其精彩的例子讲清了算法效率和算法复杂度度量的基本概念和方法，这就给全书紧密结合算法来讲数据结构打下了很好的基础。

这本书是精心策划和撰写的，结构严整，脉络清晰，行文流畅，可读性强。全书教学目标明确，内容丰富，基本概念和基本方法的阐述深入浅出，最大的特点是将算法知识、数据结构和编程实践有机地融为一体。我以为，引导学生学好本书，对于奠定扎实的学科基础，提高计算思维能力能够起到良好的作用。

清华大学计算机系教授



2011年9月

第3版说明

在第2版的基础上，本书第3版推出了配套的《习题解析》，故在体例上也做了相应的调整，主要包括以下方面：

- 原各章所附习题，均统一摘出并汇编为《习题解析》；除了部分实践型和研究型习题，大部分习题均提供了详尽的分析和解答。
- 删除了少量习题，同时也补充了若干。大题的总数，已增至292道；因多数习题都是逐层递进式的，小题的总数已超过500道。
- 关于伸展树性能分摊分析的原8.1.4小节，作为习题转入《习题解析》。
- 图灵机模型、RAM模型等基本概念，以及（线性）归约、封底估算及基本技巧，也结合对应的习题予以介绍。

同时，结合读者反馈以及新一轮教学实践效果，也在以下方面做了相应修订：

- 1.4节补充了对记忆策略与动态规划策略的介绍，并通过实例展示二者的联系与区别。
- 鉴于前四章已经充分地展示了相关技巧，后续Bintree和Dictionary等结构不再过于严格地封装，使读者更好地将注意力集中于这些结构的机理本身。
- 通过多重继承，统一了ComplHeap、LeftHeap、ListHeap等结构的实现方式，使之封装更紧凑、代码更简洁。
- 精简了Vector<T>::mergesort()、GraphMatrix::insert()、Splay::splay()、RedBlack::solveDoubleRed()、trivialMedian()等算法的实现。
- 关于函数调用栈、栈与递归、Huffman编码算法等各节的叙述与讲解，也尽可能地做了精简。
- 统一了“环路”、“众数”、“最左/右侧通路”、“波峰集”、“输入/输出敏感”等概念。
- 严格了“完全二叉树”等概念以及“黑高度”等指标的定义。
- 参照BFS和DFS的实现方式改进PFS框架，使之支持多个连通域（或可达域）。
- 借助几何分布等概率模型，简化对跳转表、散列表的平均性能分析。
- 插图、表格、代码等均有大幅增加，关键词索引项进一步细化。
- 增加了若干重要的参考文献。
- 修正了原书及代码中的若干错误，详细对比请见勘误表。

最后，鉴于第3版采用双色印刷方式，故在版面及样式等方面也做了相应的调整。

第2版说明

本书的初稿完成于2009年冬季，随后在清华大学经过了三个学期共四个课堂的试用，根据各方的反馈意见做过调整补充之后，第1版于2011年夏季由清华大学出版社正式出版发行。此后，又在清华大学经过两个学期共三个课堂的教学实践，并汇总读者的反馈进一步修订完善之后，第2版终于2012年夏季出版发行，也就是目前读者所看到的这个版本。

第2版继承并强化了此前版本的叙述风格，基本保留了总体的体例结构，同时在针对性、简洁性、实用性和拓展性等方面，也做了大量的修改、删节与扩充。与此前的版本相比较，主要的变化包括以下几个方面：

- 针对多种数据结构的算法实现及其性能分析，精简了行文叙述与代码实现，比如有序向量的查找、树和图的遍历、**Huffman**编码、平衡二叉搜索树的重平衡、二叉堆的调整等。
- 更换并补充了大量的实例和插图，比如向量、词典、关联数组、高级平衡二叉搜索树和优先级队列等数据结构，以及表达式求值、**KMP**、**BM**、平衡二叉搜索树的重平衡、字符串散列、快速排序、中位数及众数等算法的原理及过程等等，插图增至260多组。
- 重写了多个章节的总结部分，比如针对各类查找算法、串匹配算法，就其性能特点均做了统一的归纳与梳理，指明其中的关键因素以及不同的适用范围。
- 进一步规范和统一了几个基本概念的定义及其表述方式，使得各章节之间的相互引述更趋一致，比如栈混洗、真二叉树、完全二叉树、满树、闭散列策略等概念的定义，以及遍历序列、红黑树不同类型节点等概念的图解示意方式。
- 细化了针对一些关键知识点的讲解，比如第1章的渐进复杂度层次和伪复杂度、第8章中B-树及**kd**-树的引入动机、第11章中BM算法好后缀策略中的GS[]表构造算法等。
- 添加了大量的习题，总量已超过280道。在帮助读者梳理主要知识点、加深对讲解内容理解的同时，还从以下方面为他们的进一步拓展，提供了必要的线索：插入排序算法性能与逆序对的关系、选择排序算法性能与循环节的关系、插值查找、指数查找、马鞍查找、CBA式排序算法平均性能的下界、栈混洗甄别、栈堆、队堆、算术表达式的组合搜索、键树、关联矩阵、Prim算法与Krusal算法的正确性、欧氏最小支撑树、并查集、计数排序、四叉树、八叉树、范围树、优先级搜索树、树堆、AVL树节点删除算法的平均性能、AVL树的合并与分裂、堆节点插入算法的平均性能、支持重复元素的二叉搜索树、双向平方试探、轴点构造算法版本C、希尔排序算法的正确性，等等。
- 提供了一批相关的参考文献，包括经典的教材专著20余册、拓展的学术论文30余篇。
- 修正了多处排版问题及若干实质错误。请此前版本的读者下载勘误表并做相应更正，同时感谢我的读者、学生和同行，他们的意见与建议是本教材不断完善的保证。

第1版前言

背景

伴随着计算学科（**Computing Discipline**）近年来的迅猛发展，相关专业方向不断细化和分化，相应地在计算机教育方面，人才培养的定位与目标呈现明显的多样化趋势，在知识结构与专业素养方面对人才的要求也在广度与深度上拓展到空前的水平。以最新版计算学科教学大纲（**ACM/IEEE Computing Curricula**, 以下简称CC大纲）为例，2001年制定的**CC2001**因只能覆盖狭义的计算机科学方向而更多地被称作**CS2001**。所幸的是，**CC2001**的意义不仅在于针对计算机科学方向的本科教学提出了详细的指导意见，更在于构建了一个开放的**CC2001**框架（**CC2001 Model**）。按照这一规划，首先应该顺应计算学科总体发展的大势，沿着计算机科学（**CS**）、计算机工程（**CE**）、信息系统（**IS**）、信息技术（**IT**）和软件工程（**SE**）以及更多潜在的新学科方向，以分卷的形式制订相应的教学大纲计划，同时以综述报告的形式概括统领；另外，不宜仍拘泥于十年的周期，而应更为频繁地调整和更新大纲，以及时反映计算领域研究的最新进展，满足应用领域对人才的现实需求。

饶有意味的是，无论从此后发表的综述报告还是各分卷报告都可看出，作为计算学科知识结构的核心与技术体系的基石，数据结构与算法的基础性地位不仅没有动摇，反而得到进一步的强化和突出，依然是计算学科研究开发人员的必备素养，以及相关应用领域专业技术人员的看家本领。以CC大纲的综述报告（**Computing Curricula 2005 - The Overview Report**）为例，在针对以上五个专业方向本科学位所归纳的共同要求中，数据结构与算法作为程序设计概念与技能的核心，紧接在数学基础之后列第二位。这方面的要求可进一步细分为五个层次：对数据结构与算法核心地位的充分理解与认同，从软件视角对处理器、存储器及显示器等硬件资源的透彻理解，通过编程以软件方式实现数据结构与算法的能力，基于恰当的数据结构与算法设计并实现大型结构化组件及其之间通讯接口的能力，运用软件工程的原理与技术确保软件鲁棒性、可靠性及其面向特定目标受众的针对性的能力。

自20世纪末起，我有幸参与和承担清华大学计算机系以及面向全校“数据结构”课程的教学工作，在学习和吸收前辈们丰富而宝贵教学经验的同时，通过悉心体会与点滴积累，逐步摸索和总结出一套较为完整的教学方法。作为数据结构与算法一线教学工作者中的一员，我与众多的同行一样，在为此类课程的重要性不断提升而欢欣鼓舞的同时，更因其对计算学科人才培养决定性作用的与日俱增而倍感责任重大。尽管多年来持续推进的教学改革已经取得巨大的进展，但面对新的学科发展形势和社会发展需求，为从根本上提高我国计算机理论及应用人才的培养质量，我们的教学理念、教学内容与教学方法仍然有待于进一步突破。

与学校“高素质、高层次、多样化、创造性”人才培养总体目标相呼应，我所在的清华大学计算机系长期致力于培养“面向基础或应用基础的科学技术问题，具备知识创新、技术创新或集成创新能力的研究型人才”。沿着这个大方向，近年来我与同事们从讲授、研讨、作业、实践、考核和教材等方面入手，在系统归纳已有教学资源和成果的基础上，着力推进数据结构的课程建设与改革。其中，教材既为所授知识提供了物化的载体，也为传授过程指明了清晰的脉络，更为

教师与学生之间的交流建立了统一的平台，其重要性不言而喻。继2006年出版《数据结构与算法（Java语言描述）》之后，本教材的出版也是作者对自己数据结构与算法教学工作的又一次系统总结与深入探索。

原则

在读者群体定位、体例结构编排以及环节内容取舍等方面，全书尽力贯彻以下原则。

■ 兼顾基础不同、目标不同的多样化读者群体

全书12章按四大部分组织，既相对独立亦彼此呼应，难度较大的章节以星号标注，教员与学生可视具体情况灵活取舍。其中第1章绪论旨在尽快地将背景各异的读者引导至同一起点，为此将系统地引入计算与算法的一般性概念，确立时空复杂度的度量标准，并以递归为例介绍算法设计的一般模式；第2至7章为基础部分，涵盖序列、树、图、初级搜索树等基本数据结构及其算法的实现方法及性能分析，这也是多数读者在实际工作中最常涉及的内容，属于研读的重点；第8至10章为进阶部分，介绍高级搜索树、词典和优先级队列等高级数据结构，这部分内容对更加注重计算效率的读者将很有帮助；最后两章分别以串匹配和高级排序算法为例，着重介绍算法性能优化以及针对不同应用需求的调校方法与技巧，这部分内容可以帮助读者深入理解各类数据结构与算法在不同实际环境中适用性的微妙差异。

■ 注重整体认识，着眼系统思维

全书体例参照现代数据结构普遍采用的分类规范进行编排，其间贯穿以具体而本质的线索，帮助读者在了解各种具体数据结构之后，通过概括与提升形成对数据结构家族的整体性认识。行文从多个侧面体现“转换-化简”的技巧，引导读者逐步形成和强化计算思维（computational thinking）的意识与习惯，从方法论的高度掌握利用计算机求解问题的一般性规律与方法。

比如从逻辑结构的角度，按照线性、半线性和非线性三个层次对数据结构进行分类，并以遍历算法为线索，点明不同层次之间相互转换的技巧。又如，通过介绍动态规划、减而治之、分而治之等算法策略，展示如何将人所擅长的概括化简思维方式与计算机强大的枚举迭代能力相结合，高效地求解实际应用问题。再如，从数据元素访问形式的角度，按照循秩访问、循位置访问或循链接访问、循关键码访问、循值访问、循优先级访问等方式，对各种数据结构做了归类，并指明它们之间的联系与区别。

通过引入代数判定树模型以及对应的下界等概念，并讲解如何针对具体计算模型确定特定问题的复杂度下界，破除了部分读者对计算机计算能力的盲目迷信。按照CC大纲综述报告的归纳结论，这也是对计算学科所有专业本科毕业生共同要求中的第三点——不仅需要了解计算机技术可以做什么（possibilities）以及如何做，更需要了解不能做什么（limitations）以及为什么不能做。

■ 尊重认知规律，放眼拓展提升

在相关学科众多的专业基础课程中，数据结构与算法给学生留下的印象多是内容深、难度大，而如何让学生打消畏难情绪从而学有所乐、学有所获，则是摆在每位任课教师面前的课题。计算机教学有其独特的认知规律，整个过程大致可以分为记忆（remember）、理解（understand）、应用（apply）、分析（analyze）、评估（evaluate）和创造（create）等若干阶段，本书也按照这一脉络，在叙述方式上做了一些粗浅的尝试。

为加深记忆与理解，凡重要的知识点均配有插图。全书共计230多组300余幅插图，借助视觉通道，从原理、过程、实例等角度使晦涩抽象的知识点得以具体化、形象化，也就是鲁迅先生“五到”读书法中的第一条“眼到”。

为加深对类似概念或系列概念的综合理解，完成认识上的提升，还普遍采用“对比”的手法。例如，优先级队列接口不同实现方式之间的性能对比、快速排序算法不同版本在适用范围上的对比，等等。又如，通过Dijkstra算法和Prim算法的横向对比，提炼和抽象出更具一般性的优先级搜索框架，并反过来基于这一认识实现统一的搜索算法模板。

为强化实践能力的培养，多从具体的应用问题入手，经逐步分析导出具体的解决方法。所列230余段代码，均根据讲述的侧重按模块划分，在力求简洁的同时也配有详实的备注解说。读者可以下载代码，边阅读边编译执行，真正做到“手到”和“心到”。几乎所有实现的数据结构均符合对应的抽象数据类型接口标准，在强化接口规范的同时，从习惯与方式上为读者日后的团队协作做铺垫与准备。

在分析与评估方面，介绍了算法复杂度的典型层次及分析技巧，包括常规的最坏情况和平均情况分析，以及分摊分析。针对递归算法，还着重介绍了递归跟踪法与递推方程法。另外从实用的角度，还引入了稳定性、就地性等更为精细的性能评估尺度，并结合部分算法做了相关的分析对比。

数据结构与算法这两者之间相辅相成的关系，也是本书着重体现的一条重要线索。为此，本书的体例与多数同类教材不尽相同。以排序算法为例，除最后一章外，大部分排序算法都作为对应数据结构的应用实例，分散编入相应的章节：其中起泡排序、归并排序、插入排序、选择排序等算法以排序器的形式归入序列部分；桶排序和基数排序归入散列部分；而堆排序则归入优先级队列部分。再如，图算法及其基本实现均前置到第6章，待到后续章节引入高级数据结构时再介绍其优化方法，如此前后呼应。行文讲述中也着力突出数据结构对高效算法的支撑作用，以及源自应用的算法问题对数据结构发展的反向推动作用，优先级队列之于Huffman编码算法、完全二叉堆之于就地堆排序、伸展树之于基于局部性原理的缓存算法、散列表之于数值空间与样本空间规模差异的混合算法等，均属于这方面的实例。

与许多课程的规律类似，习题对于数据结构与算法而言也是强化和提升学习效果的必由之途，否则无异于“入宝山而空返”。本书各章均针对性地附有大量习题，累计逾270道。当然，好的习题不应仅限于对讲授内容的重复与堆砌，而应更多地侧重于拓展与反思。其中，拓展型习题既包括对书中数据结构接口的扩充、算法性能的改进，也包括通过查阅文献资料补充相关的知识点。另外，一些难度极大或者难度不大但过程繁琐的内容，在这里也以习题的形式留待课后进一步探讨。在求知求真的过程中，质疑与批判是难能可贵的精神，反诘与反思更是创造创新的起点。从吸收到反思，在某种意义上也就是学习(learning)与反学习(unlearning)反复迭代、不断上升的过程。为此，部分习题的答案并非简单地重复正文的结论，甚至并不具有固定答案，以给读者日后灵活的运用与创新留下足够的空间。

说明

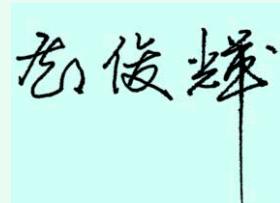
书中凡重要的专业词汇均注有原文，插图中的标注也多以英文给出，因为作者认为这都是进一步钻研以及与国际同行交流的基础。公式多采用接近代码的风格，而非严格的数学格式，以利

于按照代码注释的方式描述和理解算法。

书中涉及的所有代码以及大量尚未在书中列出的辅助代码，均按Visual Studio工程形式分成50多组，并统一到名为DSACPP的解决方案之下，完整的代码包可从本书主页下载后直接编译执行。

为精简篇幅、突出重点，在一定程度上牺牲了软件规范性甚至计算效率，读者不必盲目效仿。比如，为尽量利用页面宽度和便于投影式播放，全文源代码统一采用Java风格编排，但代码的层次感却因此有所削弱，代码片段的切分也有过度之嫌。同样出于简化的考虑，代码中一些本可优化但可能影响总体思路的细节也被忽略。另外，对错误与意外的处理也采用了简化的处理方式。

限于本人的水平与经验，书中一定不乏纰漏与谬误之处，恳请读者及专家批评指正。



2011年夏末于清华园

教学计划编排方案建议

采用本书作为教材时，视学生基础、专业方向、教学目标及允许课时总量的不同，授课教师可参照以下典型方案分配课内学时，通常还需另外设置约50%的课外编程实验学时。

教学内容			教学方案与课内学时分配						
部分	章	节(视学时可省略*小节)	方案A	方案B	方案C	方案D	方案E	方案F	方案G
一 基础知识	第1章 绪论	1.1~1.3 + 1.5	2.5	2.5	3.5	4.5	3.5	2.5	3
		1.4*	1.5	1.5	2	2.5	2.5	0	2
二 基本数据 结构	第2章 向量	2.1 ~ 2.6	3	3	3	4	3	2.5	3
		2.7*	1	0	1.5	2	1	0	0
		2.8	2	2	2	3	2	2	2
	第3章 列表	3.1 ~ 3.4	2	2	3	4	3	2	3
		3.5	2	2	3	4	3	2	3
	第4章 栈与队列	4.1 ~ 4.3	2	2	2	3	2	2	2
		4.4*	3	3	3	3	3	0	3
		4.5 ~ 4.6	1	1	1	2	1	2	1
	第5章 二叉树	5.1 + 5.3	2	2	2	2	2	2	2
		5.4	2	2	3	3	3	2	2
		5.2 + 5.5	2	2	3	3	3	0	3
三 高级数据 结构	第6章 图	6.1 ~ 6.4	1.5	1.5	2	2	2	2	2
		6.5 ~ 6.8	2.5	2.5	2	4	3	3	3
		6.9*	1	1	2	2	0	0	0
		6.10 ~ 6.12	2	2	2	4	3	2	2
	第7章 搜索树	7.1 ~ 7.2	2	2	3	6	4	3	3
		7.3 ~ 7.4	2	2	3	6	4	3	3
	第8章 高级搜索树	8.1 ~ 8.2	2	2	3	0	0	0	0
		8.3* ~ 8.4*	3	0	3	0	0	0	0
	第9章 词典	9.1 + 9.3	2	2	2	0	0	0	0
		9.2* + 9.4*	4	0	4	0	0	0	0
四 算法	第10章 优先级队列	10.1 ~ 10.2	4	4	4	0	0	0	0
		10.3*	2	0	2	0	0	0	0
	第11章 串	11.1 ~ 11.3	2	2	0	0	0	0	2
		11.4* ~ 11.5*	2	0	0	0	0	0	2
	第12章 排序	12.1	2	2	0	0	0	0	2
		12.2* ~ 12.3*	4	0	0	0	0	0	0

本书所有相关教学资料均向公众开放，包括勘误表、插图、代码以及配套讲义等。欢迎访问教材主页：<http://dsa.cs.tsinghua.edu.cn/~deng/dsacpp/>

致 谢

感谢严蔚敏教授，廿多年前是她引领我进入数据结构的殿堂；感谢吴文虎教授，在追随他参与信息学相关竞赛组织工作的过程中，我更加切实地感受到了算法之宏之美。感谢殷人昆、王宏、朱仲涛、徐明星、尹霞等老师，在与他们的教学合作过程中我获益良多。感谢众多的同行，与他们的交流和探讨每每令我思路顿开。感谢数以千计的学生，他们是我写作的最终动机与不竭动力，无论是在课堂或是课后，与他们相处的时光都属于我在清华园最美好的记忆。

历年的助教研究生不仅出色地完成了繁重的课外辅导与资源建设工作，他们丰富的想象力和创造力更是我重要的灵感来源，在此我要感谢他们对我的帮助！

截至2012年秋季，按担任助教时间先后，他们分别是：

王智、李云翀、赵乐、肖晶、刘汝佳、高岳、沈超慧、李锐喆
于泽、白彦冰、夏龙、向阳、姚姜源、刘雨辰、姜禹、方宇剑

在本书各版次的使用过程中，收到了学生及读者的大量反馈，其中杨凯峪、李雨田、许婷婷、郑斯陶、石梦凯、陈逸翀、王紫、朱剑男、李仁杰、许建林、吴育昕、刘苏齐、陈键飞、唐骞璘、徐霜晴等同学，分别指出了多处纰漏及错误。王笑尘同学作为第3版的试验读者，杨凯峪、李雨田同学作为配套《习题解析》的试验读者，均提出了许多很好的修改建议。清华美院的郭清华同学，对第3版的版式和色调设计提出了极具价值的建议。在此也谨向他们表示感谢！

感谢清华大学出版社的各位编辑，正是依靠他们的鼎力支持，本书才得以顺利出版。特别感谢龙启铭先生，他出色而高效的协调工作，使我得以将更多精力集中于书稿本身；在体例编排及编写风格等方面，他的许多建议都极具价值。

本教材第3版的撰写工作，得到了“清华大学985名优教材”立项资助，在此谨向清华大学，特别是校、系教务部门的大力支持表示感谢！

简要目录

第1章 绪论	1
§1.1 计算机与算法	2
§1.2 复杂度度量	8
§1.3 复杂度分析	11
§1.4 *递归	16
§1.5 抽象数据类型	26
第2章 向量	27
§2.1 从数组到向量	28
§2.2 接口	29
§2.3 构造与析构	32
§2.4 动态空间管理	33
§2.5 常规向量	37
§2.6 有序向量	44
§2.7 *排序与下界	57
§2.8 排序器	59
第3章 列表	65
§3.1 从向量到列表	66
§3.2 接口	67
§3.3 列表	71
§3.4 有序列表	77
§3.5 排序器	78
第4章 栈与队列	85
§4.1 栈	86
§4.2 栈与递归	88
§4.3 栈的典型应用	90
§4.4 *试探回溯法	99
§4.5 队列	105
§4.6 队列应用	107
第5章 二叉树	109
§5.1 二叉树及其表示	110
§5.2 编码树	114
§5.3 二叉树的实现	117
§5.4 遍历	124
§5.5 Huffman编码	136
第6章 图	149
§6.1 概述	150
§6.2 抽象数据类型	153
§6.3 邻接矩阵	155
§6.4 邻接表	158
§6.5 图遍历算法概述	159
§6.6 广度优先搜索	159
§6.7 深度优先搜索	162
§6.8 拓扑排序	165
§6.9 *双连通域分解	168
§6.10 优先级搜索	172
§6.11 最小支撑树	174
§6.12 最短路径	178
第7章 搜索树	181
§7.1 查找	183
§7.2 二叉搜索树	184

§7.3 平衡二叉搜索树	191	第11章 串	305
§7.4 AVL树	194		
第8章 高级搜索树	203	§11.1 串及串匹配	306
§8.1 伸展树	204	§11.2 蛮力算法	309
§8.2 B-树	212	§11.3 KMP算法	311
§8.3 *红黑树	227	§11.4 *BM算法	317
§8.4 *kd-树	239	§11.5 *Karp-Rabin算法	327
第9章 词典	245	第12章 排序	333
§9.1 词典ADT	247	§12.1 快速排序	334
§9.2 *跳转表	249	§12.2 *选取与中位数	341
§9.3 散列表	259	§12.3 *希尔排序	350
§9.4 *散列应用	277	附录	357
第10章 优先级队列	281	参考文献	358
§10.1 优先级队列ADT	282	插图索引	362
§10.2 堆	286	表格索引	369
§10.3 *左式堆	297	算法索引	370
		代码索引	371
		关键词索引	377

详细目录

第1章 绪论	1
§1.1 计算机与算法	2
1.1.1 古埃及人的绳索	2
1.1.2 欧几里得的尺规	3
1.1.3 起泡排序	4
1.1.4 算法.....	5
1.1.5 算法效率	7
§1.2 复杂度度量	8
1.2.1 时间复杂度	8
1.2.2 渐进复杂度	9
1.2.3 空间复杂度	11
§1.3 复杂度分析	11
1.3.1 常数 $\mathcal{O}(1)$	12
1.3.2 对数 $\mathcal{O}(\log n)$	12
1.3.3 线性 $\mathcal{O}(n)$	13
1.3.4 多项式 $\mathcal{O}(\text{polynomial}(n))$	14
1.3.5 指数 $\mathcal{O}(2^n)$	14
1.3.6 复杂度层次	15
1.3.7 输入规模	16
§1.4 *递归	16
1.4.1 线性递归	17
1.4.2 递归分析	17
1.4.3 递归模式	19
1.4.4 递归消除	21
1.4.5 二分递归	22
§1.5 抽象数据类型	26
第2章 向量	27
§2.1 从数组到向量	28
2.1.1 数组.....	28
2.1.2 向量.....	29
§2.2 接口	29
2.2.1 ADT接口.....	29
2.2.2 操作实例	30
2.2.3 Vector模板类	30
§2.3 构造与析构	32
2.3.1 默认构造方法	32
2.3.2 基于复制的构造方法	32
2.3.3 析构方法	33
§2.4 动态空间管理	33
2.4.1 静态空间管理	33
2.4.2 可扩充向量	34
2.4.3 扩容.....	34
2.4.4 分摊分析	35
2.4.5 缩容.....	36
§2.5 常规向量	37
2.5.1 直接引用元素	37
2.5.2 置乱器	37
2.5.3 判等器与比较器	38
2.5.4 无序查找	39
2.5.5 插入	40
2.5.6 删除	40
2.5.7 唯一化	42
2.5.8 遍历	43
§2.6 有序向量	44
2.6.1 比较器	44
2.6.2 有序性甄别	44
2.6.3 唯一化	45
2.6.4 查找	47
2.6.5 二分查找 (版本A)	48
2.6.6 Fibonacci查找	52
2.6.7 二分查找 (版本B)	54
2.6.8 二分查找 (版本C)	56

§2.7 *排序与下界	57	3.5.2 插入排序	79
2.7.1 有序性	57	3.5.3 选择排序	80
2.7.2 排序及其分类	57	3.5.4 归并排序	82
2.7.3 下界.....	57		
2.7.4 比较树.....	58		
2.7.5 估计下界	59		
§2.8 排序器	59		
2.8.1 统一入口	59		
2.8.2 起泡排序	60		
2.8.3 归并排序	61		
第3章 列表	65		
§3.1 从向量到列表	66		
3.1.1 从静态到动态	66		
3.1.2 由秩到位置	67		
3.1.3 列表.....	67		
§3.2 接口	67		
3.2.1 列表节点	67		
3.2.2 列表.....	68		
§3.3 列表	71		
3.3.1 头、尾节点	71		
3.3.2 默认构造方法	71		
3.3.3 由秩到位置的转换.....	72		
3.3.4 查找.....	72		
3.3.5 插入.....	72		
3.3.6 基于复制的构造	74		
3.3.7 删除.....	75		
3.3.8 析构.....	76		
3.3.9 唯一化.....	76		
3.3.10 遍历.....	77		
§3.4 有序列表	77		
3.4.1 唯一化.....	77		
3.4.2 查找.....	78		
§3.5 排序器	78		
3.5.1 统一入口	78		
第4章 栈与队列	85		
§4.1 栈	86		
4.1.1 ADT接口.....	86		
4.1.2 操作实例	87		
4.1.3 Stack模板类.....	88		
§4.2 栈与递归	88		
4.2.1 函数调用栈	88		
4.2.2 避免递归	89		
§4.3 栈的典型应用	90		
4.3.1 逆序输出	90		
4.3.2 递归嵌套	91		
4.3.3 延迟缓冲	94		
4.3.4 逆波兰表达式	96		
§4.4 *试探回溯法	99		
4.4.1 试探与回溯	99		
4.4.2 八皇后.....	100		
4.4.3 迷宫寻径	102		
§4.5 队列	105		
4.5.1 概述.....	105		
4.5.2 ADT接口.....	105		
4.5.3 操作实例	106		
4.5.4 Queue模板类.....	106		
§4.6 队列应用	107		
4.6.1 循环分配器	107		
4.6.2 银行服务模拟	107		
第5章 二叉树	109		
§5.1 二叉树及其表示	110		
5.1.1 树	110		
5.1.2 二叉树.....	111		
5.1.3 多叉树.....	112		

§5.2 编码树	114	6.6.2 实现.....160 6.6.3 实例.....161 6.6.4 复杂度.....161 6.6.5 应用.....161
5.2.1 二进制编码	114	
5.2.2 二叉编码树	116	
§5.3 二叉树的实现	117	
5.3.1 二叉树节点	117	
5.3.2 二叉树节点操作接口 ...	119	
5.3.3 二叉树	120	
§5.4 遍历	124	
5.4.1 递归式遍历	124	
5.4.2 *迭代版先序遍历	126	
5.4.3 *迭代版中序遍历	128	
5.4.4 *迭代版后序遍历	132	
5.4.5 层次遍历	133	
§5.5 Huffman编码	136	
5.5.1 PFC编码及解码	136	
5.5.2 最优编码树	139	
5.5.3 Huffman编码树.....	141	
5.5.4 Huffman编码算法	143	
第6章 图	149	
§6.1 概述	150	
§6.2 抽象数据类型	153	
6.2.1 操作接口	153	
6.2.2 Graph模板类.....	153	
§6.3 邻接矩阵	155	
6.3.1 原理.....	155	
6.3.2 实现.....	155	
6.3.3 时间性能	157	
6.3.4 空间性能	157	
§6.4 邻接表	158	
6.4.1 原理.....	158	
6.4.2 复杂度.....	158	
§6.5 图遍历算法概述	159	
§6.6 广度优先搜索	159	
6.6.1 策略.....	159	
§6.7 深度优先搜索	162	
6.7.1 策略.....	162	
6.7.2 实现.....	162	
6.7.3 实例.....	163	
6.7.4 复杂度.....	165	
6.7.5 应用.....	165	
§6.8 拓扑排序	165	
6.8.1 应用.....	165	
6.8.2 有向无环图	166	
6.8.3 算法.....	166	
6.8.4 实现.....	167	
6.8.5 实例.....	168	
6.8.6 复杂度.....	168	
§6.9 *双连通域分解	168	
6.9.1 关节点与双连通域.....	168	
6.9.2 蛮力算法	169	
6.9.3 可行算法	169	
6.9.4 实现.....	170	
6.9.5 实例.....	171	
6.9.6 复杂度.....	172	
§6.10 优先级搜索	172	
6.10.1 优先级与优先级数....	172	
6.10.2 基本框架	173	
6.10.3 复杂度	174	
§6.11 最小支撑树	174	
6.11.1 支撑树	174	
6.11.2 最小支撑树	174	
6.11.3 歧义性	175	
6.11.4 蛮力算法	175	
6.11.5 Prim算法	175	
§6.12 最短路径	178	
6.12.1 最短路径树	178	

6.12.2 Dijkstra算法 178

第7章 搜索树

181

§7.1 查找 183

- 7.1.1 循关键码访问 183
- 7.1.2 词条 183
- 7.1.3 序与比较器 183

§7.2 二叉搜索树 184

- 7.2.1 顺序性 184
- 7.2.2 中序遍历序列 184
- 7.2.3 BST模板类 185
- 7.2.4 查找算法及其实现 185
- 7.2.5 插入算法及其实现 188
- 7.2.6 删除算法及其实现 189

§7.3 平衡二叉搜索树 191

- 7.3.1 树高与性能 191
- 7.3.2 理想平衡与适度平衡 192
- 7.3.3 等价变换 192
- 7.3.4 旋转调整 193

§7.4 AVL树 194

- 7.4.1 定义及性质 194
- 7.4.2 节点插入 196
- 7.4.3 节点删除 198
- 7.4.4 统一重平衡算法 200

第8章 高级搜索树

203

§8.1 伸展树 204

- 8.1.1 局部性 204
- 8.1.2 逐层伸展 205
- 8.1.3 双层伸展 206
- 8.1.4 伸展树的实现 208

§8.2 B-树 212

- 8.2.1 多路平衡查找 212
- 8.2.2 ADT接口及其实现 215
- 8.2.3 关键码查找 216

8.2.4 性能分析 218

8.2.5 关键码插入 219

8.2.6 上溢与分裂 219

8.2.7 关键码删除 222

8.2.8 下溢与合并 223

§8.3 *红黑树 227

- 8.3.1 概述 228
- 8.3.2 红黑树接口定义 230
- 8.3.3 节点插入算法 231
- 8.3.4 节点删除算法 234

§8.4 *kd-树 239

- 8.4.1 范围查询 239
- 8.4.2 kd-树 242
- 8.4.3 基于2d-树的范围查询 243

第9章 词典

245

§9.1 词典ADT 247

- 9.1.1 操作接口 247
- 9.1.2 操作实例 247
- 9.1.3 接口定义 248
- 9.1.4 实现方法 248

§9.2 *跳转表 249

- 9.2.1 SkipList模板类 249
- 9.2.2 总体逻辑结构 250
- 9.2.3 四联表 250
- 9.2.4 查找 252
- 9.2.5 空间复杂度 253
- 9.2.6 时间复杂度 254
- 9.2.7 插入 255
- 9.2.8 删除 258

§9.3 散列表 259

- 9.3.1 完美散列 259
- 9.3.2 装填因子与空间利用率 260
- 9.3.3 散列函数 261
- 9.3.4 散列表 264
- 9.3.5 冲突及其排解 266

9.3.6 闭散列策略	268
9.3.7 查找与删除	271
9.3.8 插入.....	272
9.3.9 更多闭散列策略	273
9.3.10 散列码转换	275

§9.4 *散列应用 277

9.4.1 桶排序	277
9.4.2 最大间隙	278
9.4.3 基数排序	279

第10章 优先级队列 281

§10.1 优先级队列ADT 282

10.1.1 优先级与优先级队列 ..	282
10.1.2 关键码、比较器与偏序关系	283
10.1.3 操作接口	283
10.1.4 操作实例：选择排序 ..	283
10.1.5 接口定义	284
10.1.6 应用实例：Huffman编码树	284

§10.2 堆 286

10.2.1 完全二叉堆	286
10.2.2 元素插入	289
10.2.3 元素删除	291
10.2.4 建堆.....	292
10.2.5 就地堆排序	295

§10.3 *左式堆 297

10.3.1 堆合并	297
10.3.2 单侧倾斜	298
10.3.3 PQ_LeftHeap模板类 ..	298
10.3.4 空节点路径长度	299
10.3.5 左倾性与左式堆	299
10.3.6 最右侧通路	300
10.3.7 合并算法	300
10.3.8 实例.....	301
10.3.9 合并操作merge()的实现	

.....	302
10.3.10 复杂度	303
10.3.11 基于合并的插入和删除	303

第11章 串 305

§11.1 串及串匹配 306

11.1.1 串	306
11.1.2 串匹配	307
11.1.3 测评标准与策略	308

§11.2 蛮力算法 309

11.2.1 算法描述	309
11.2.2 算法实现	309
11.2.3 时间复杂度	310

§11.3 KMP算法 311

11.3.1 构思	311
11.3.2 next表	312
11.3.3 KMP算法	312
11.3.4 next[0] = -1	313
11.3.5 next[j + 1]	313
11.3.6 构造next表	314
11.3.7 性能分析	314
11.3.8 继续改进	315

§11.4 *BM算法 317

11.4.1 思路与框架	317
11.4.2 坏字符策略	318
11.4.3 好后缀策略	321
11.4.4 GS[]表构造算法	323
11.4.5 算法纵览	326

§11.5 *Karp-Rabin算法 327

11.5.1 构思	327
11.5.2 算法与实现	328

第12章 排序 333

§12.1 快速排序 334

12.1.1 分治策略	334
-------------------	-----

12.1.2 轴点	334
12.1.3 快速排序算法	335
12.1.4 快速划分算法	335
12.1.5 复杂度	338
12.1.6 应对退化	339
§12.2 *选取与中位数	341
12.2.1 概述	341
12.2.2 众数	342
12.2.3 归并向量的中位数	343
12.2.4 基于优先级队列的选取	346
12.2.5 基于快速划分的选取 ..	347
12.2.6 k-选取算法	348
§12.3 *希尔排序	350

12.3.1 递减增量策略	350
12.3.2 增量序列	353

附录

357

参考文献	358
插图索引	362
表格索引	369
算法索引	370
代码索引	371
关键词索引	377

第1章

绪论

作为万物之灵的人，与动物的根本区别在于理性，而计算则是理性的一种重要而具体的表现形式。计算机是人类从事计算的工具，是抽象计算模型的具体物化。基于图灵模型的现代计算机，既是人类现代文明的标志与基础，更是人脑思维的拓展与延伸。

尽管计算机的性能日益提高，但这种能力在解决实际应用问题时能否真正得以发挥，决定性的关键因素仍在于人类自身。具体地，通过深入思考与分析获得对问题本质的透彻理解，按照长期积淀而成的框架与模式设计出合乎问题内在规律的算法，选用、改进或定制足以支撑算法高效实现的数据结构，并在真实的应用环境中充分测试、调校和改进，构成了应用计算机高效求解实际问题的典型流程与不二法门。任何一位有志于驾驭计算机的学生，都应该从这些方面入手，不断学习，反复练习，勤于总结。

本章将介绍与计算相关的基本概念，包括算法构成的基本要素、算法效率的衡量尺度、计算复杂度的分析方法与界定技巧、算法设计的基本框架与典型模式，这些也构成了全书所讨论的各类数据结构及相关算法的基础与出发点。

§ 1.1 计算机与算法

1946年问世的ENIAC开启了现代电子数字计算机的时代，计算机科学（computer science）也在随后应运而生。计算机科学的核心在于研究计算方法与过程的规律，而不仅仅是作为计算工具的计算机本身，因此E. Dijkstra及其追随者更倾向于将这门科学称作计算科学（computing science）。

实际上，人类使用不同工具从事计算的历史可以追溯到更为久远的时代，计算以及计算工具始终与我们如影相随地穿越漫长的时光岁月，不断推动人类及人类社会的进化发展。从最初颜色各异的贝壳、长短不一的刻痕、周载轮回的日影、粗细有别的绳结，以至后来的直尺、圆规和算盘，都曾经甚至依然是人类有力的计算工具。

1.1.1 古埃及人的绳索

古埃及人以其复杂而浩大的建筑工程而著称于世，在长期规划与实施此类工程的过程中，他们逐渐归纳并掌握了基本的几何度量和测绘方法。考古研究发现，公元前2000年的古埃及人已经知道如何解决如下实际工程问题：通过直线1上给定的点P，作该直线的垂线。

2

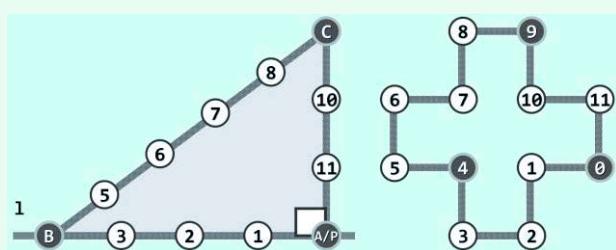


图1.1 古埃及人使用的绳索计算机及其算法

他们所采用的方法，原理及过程如图1.1所示，翻译成现代的算法语言可描述如下。

```
perpendicular(l, P)
```

输入：直线l及其上一点P

输出：经过P且垂直于l的直线

1. 取12段等长绳索，依次首尾联结成环 //联结处称作“结”，按顺时针方向编号为0..11
2. 奴隶A看管0号结，将其固定于点P处
3. 奴隶B牵动4号结，将绳索沿直线l方向尽可能地拉直
4. 奴隶C牵动9号结，将绳索尽可能地拉直
5. 经过0号和9号结，绘制一条直线

算法1.1 过直线上给定点作直角

以上由古希腊人发明、由奴隶与绳索组成的这套计算工具，乍看起来与现代的电子计算机相去甚远。但就本质而言，二者之间的相似之处远多于差异，它们同样都是用于支持和实现计算过程的物理机制，亦即广义的计算机。因此就这一意义而言，将其称作“绳索计算机”毫不过分。

1.1.2 欧几里得的尺规

欧几里得几何是现代公理系统的鼻祖。从计算的角度来看，针对不同的几何问题，欧氏几何都分别给出了一套几何作图流程，也就是具体的算法。比如，经典的线段三等分过程可描述为如算法1.2所示。该算法的一个典型的执行实例如图1.2所示。

```
tripartition(AB)
```

输入：线段AB

输出：将AB三等分的两个点C和D

1. 从A发出一条与AB不重合的射线p
2. 任取p上三点C'、D'和B'，使 $|AC'| = |C'D'| = |D'B'|$
3. 联接B'B
4. 过D'做B'B的平行线，交AB于D
5. 过C'做B'B的平行线，交AB于C

算法1.2 三等分给定线段

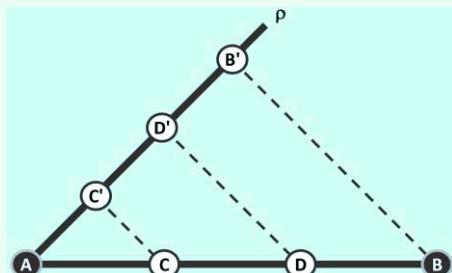


图1.2 古希腊人的尺规计算机

在以上算法中，输入为所给的直线段AB，输出为将其三等分的C和D点。我们知道，欧氏几何还给出了大量过程与功能更为复杂的几何作图算法，为将这些算法变成可行的实际操作序列，欧氏几何使用了两种相互配合的基本工具：不带刻度的直尺，以及半径跨度不受限制的圆规。同样地，从计算的角度来看，由直尺和圆规构成的这一物理机制也不妨可以称作“尺规计算机”。在尺规计算机中，可行的基本操作不外乎以下五类：

- 过两个点作一直线
- 确定两条直线的交点
- 以任一点为圆心，以任意半径作一个圆
- 确定任一直线和任一圆的交点（若二者的确相交）
- 确定两个圆的交点（若二者的确相交）

每一欧氏作图算法均可分解为一系列上述操作的组合，故称之为基本操作恰如其分。

1.1.3 起泡排序

D. Knuth^[3]曾指出，四分之一以上的CPU时间都用于执行同一类型的计算：按照某种约定的次序，将给定的一组元素顺序排列，比如将n个整数按通常的大小次序排成一个非降序列。这类操作统称排序（sorting）。

就广义而言，我们今天借助计算机所完成的计算任务中，有更高的比例都可归入此类。例如，从浩如烟海的万维网中找出与特定关键词最相关的前100个页面，就是此类计算的一种典型形式。排序问题在算法设计与分析中扮演着重要的角色，以下不妨首先就此做一讨论。为简化起见，这里暂且只讨论对整数的排序。

■ 局部有序与整体有序

在由一组整数组成的序列A[0, n - 1]中，满足 $A[i - 1] \leq A[i]$ 的相邻元素称作顺序的；否则是逆序的。不难看出，有序序列中每一对相邻元素都是顺序的，亦即，对任意 $1 \leq i < n$ 都有 $A[i - 1] \leq A[i]$ ；反之，所有相邻元素均顺序的序列，也必然整体有序。

■ 扫描交换

由有序序列的上述特征，我们可以通过不断改善局部的有序性实现整体的有序：从前向后依次检查每一对相邻元素，一旦发现逆序即交换二者的位置。对于长度为n的序列，共需做 $n - 1$ 次比较和不超过 $n - 1$ 次交换，这一过程称作一趟扫描交换。

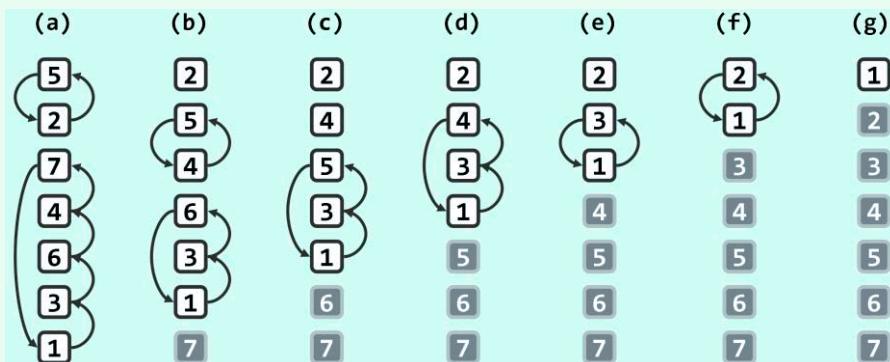


图1.3 通过6趟扫描交换对七个整数排序（其中已就位的元素以深色示意）

以图1.3(a)中由7个整数组成的序列 $A[0, 6] = \{5, 2, 7, 4, 6, 3, 1\}$ 为例。

在第一趟扫描交换过程中，{5, 2}交换位置，{7, 4, 6, 3, 1}循环交换位置，扫描交换后的结果如图(b)所示。

■ 起泡排序

可见，经过这样的一趟扫描，序列未必达到整体有序。果真如此，则可对该序列再做一趟扫描交换，比如，图(b)再经一趟扫描交换的结果如图(c)。事实上，很可能如图(c~f)所示，需要反复进行多次扫描交换，直到如图(g)所示，在序列中不再含有任何逆序的相邻元素。多数的这类交换操作，都会使得越小（大）的元素朝上（下）方移动（习题[1-3]），直至它们抵达各自应处的位置。

排序过程中，所有元素朝各自最终位置亦步亦趋的移动过程，犹如气泡在水中的上下沉浮，起泡排序（bubblesort）算法也因此得名。

■ 实现

上述起泡排序的思路，可准确描述和实现为如代码1.1所示的函数**bubblesort1A()**。

```
1 void bubblesort1A(int A[], int n) { //起泡排序算法（版本1A）：0 <= n
2     bool sorted = false; //整体排序标志，首先假定尚未排序
3     while (!sorted) { //在尚未确认已全局排序之前，逐趟进行扫描交换
4         sorted = true; //假定已经排序
5         for (int i = 1; i < n; i++) { //自左向右逐对检查当前范围A[0, n)内的各相邻元素
6             if (A[i - 1] > A[i]) { //一旦A[i - 1]与A[i]逆序，则
7                 swap(A[i - 1], A[i]); //交换之，并
8                 sorted = false; //因整体排序不能保证，需要清除排序标志
9             }
10        }
11        n--; //至此末元素必然就位，故可以缩短待排序序列的有效长度
12    }
13 } //借助布尔型标志位sorted，可及时提前退出，而不致总是蛮力地做n - 1趟扫描交换
```

代码1.1 整数数组的起泡排序

1.1.4 算法

以上三例都可称作算法。那么，究竟什么是算法呢？所谓算法，是指基于特定的计算模型，旨在解决某一信息处理问题而设计的一个指令序列。比如，针对“过直线上一点作垂直线”这一问题，基于由绳索和奴隶构成的计算模型，由古埃及人设计的算法1.1；针对“三等分线段”这一问题，基于由直尺和圆规构成的计算模型，由欧几里得设计的算法1.2；以及针对“将若干元素按大小排序”这一问题，基于图灵机模型而设计的**bubblesort1A()**算法，等等。

一般地，本书所说的算法还应必须具备以下要素。

■ 输入与输出

待计算问题的任一实例，都需要以某种方式交给对应的算法，对所求解问题特定实例的这种描述统称为输入（**input**）。对于上述三个例子而言，输入分别是“某条直线及其上一点”、“某条线段”以及“由n个整数组成的某一序列”。其中，第三个实例的输入具体地由A[]与n共同描述和定义，前者为存放待排序整数的数组，后者为整数的总数。

经计算和处理之后得到的信息，即针对输入问题实例的答案，称作输出（**output**）。比如，对于上述三个例子而言，输出分别是“垂直线”、“三等分点”以及“有序序列”。在物理上，输出有可能存放于单独的存储空间中，也可能直接存放于原输入所占的存储空间中。比如，第三个实例即属于后一情形，经排序的整数将按非降次序存放在数组A[]中。

■ 基本操作、确定性与可行性

所谓确定性和可行性是指，算法应可描述为由若干语义明确的基本操作组成的指令序列，且每一基本操作在对应的计算模型中均可兑现。以上述算法1.1为例，整个求解过程可以明白无误地描述为一系列借助绳索可以兑现的基本操作，比如“取等长绳索”、“联结绳索”、“将绳结固定于指定点”以及“拉直绳索”等。再如算法1.2中，“从一点任意发出一条射线”、“在直线上任取三个等距点”、“联接指定两点”等，也都属于借助尺规可以兑现的基本操作。

细心的读者可能会注意到，算法1.2所涉及的操作并不都是基本的，比如，最后两句都要求“过直线外一点作其平行线”，这本身就是另一几何作图问题。幸运的是，借助基本操作的适当组合，这一子问题也可圆满解决，对应的算法则不妨称作是算法1.2的“子算法”。

从现代程序设计语言的角度，可以更加便捷而准确地理解算法的确定性与可行性。具体地，一个算法满足确定性与可行性，当且仅当它可以通过程序设计语言精确地描述，比如，起泡排序算法可以具体地描述和实现为代码1.1中的函数**bubblesort1A()**，其中“读取某一元素的内容”、“修改某一元素的内容”、“比较两个元素的大小”、“逻辑表达式求值”以及“根据逻辑判断确定分支转向”等等，都属于现代电子计算机所支持的基本操作。

■ 有穷性与正确性

不难理解，任意算法都应在执行有限次基本操作之后终止并给出输出，此即所谓算法的有穷性（**finiteness**）。进一步地，算法不仅应该迟早会终止，而且所给的输出还应该能够符合由问题本身在事先确定的条件，此即所谓算法的正确性（**correctness**）。

对以上前两个算法实例而言，在针对任一输入实例的计算过程中，每条基本操作语句仅执行一次，故其有穷性不证自明。另外，根据勾股定理以及平行等比原理，其正确性也一目了然。然而对于更为复杂的算法，这两条性质的证明往往颇需费些周折（习题[1-27]和[1-28]），有些问题甚至尚无定论（习题[1-29]）。即便是简单的起泡排序，**bubblesort1A()**算法的有穷性和正确性也不是由代码1.1自身的结构直接保证的。以下就以此为例做一分析。

■ 起泡排序

图1.3给出了**bubblesort1A()**的一次具体执行过程和排序结果，然而严格地说，这远不足以证明起泡排序就是一个名副其实的算法。比如，对于任意一组整数，经过若干趟的起泡交换之后该算法是否总能完成排序？事实上，即便是其有穷性也值得怀疑。就代码结构而言，只有在前一趟扫描交换中未做任何元素交换的情况下，外层循环才会因条件“**!sorted**”不再满足而退出。但是，这一情况对任何输入实例都总能出现吗？反过来，是否存在某一（某些）输入序列，无论做多少趟起泡交换也无济于事？这种担心并非毫无道理。细心的读者或许已注意到，在起泡交换的过程中，尽管多数时候元素会朝着各自的最终位置不断靠近，但有的时候某些元素也的确会暂时朝着远离自己应处位置的方向移动（习题[1-3]）。

证明算法有穷性和正确性的一个重要技巧，就是从适当的角度审视整个计算过程，并找出其所具有的某种不变性和单调性。其中的单调性通常是指，问题的有效规模会随着算法的推进不断递减。不变性则不仅应在算法初始状态下自然满足，而且应与最终的正确性相呼应——当问题的有效规模缩减到0时，不变性应随即等价于正确性。

那么，具体到**bubblesort1A()**算法，其单调性和不变性应如何定义和体现呢？

反观图1.3不难看出，每经过一趟扫描交换，尽管并不能保证序列立即达到整体有序，但从“待求解问题的规模”这一角度来看，整体的有序性必然有所改善。以全局最大的元素（图1.3中的整数7）为例，在第一趟扫描交换的过程中，一旦触及该元素，它必将与后续的所有元素依次交换。于是如图1.3(b)所示，经过第一趟扫描之后，该最大元素必然就位；而且在此后的各趟扫描交换中，该元素将绝不会参与任何交换。这就意味着，经过一趟扫描交换之后，我们只需要关注前面更小的那n - 1个元素。实际上，这一结论对后续的各趟扫描交换也都成立——考查图1.3(c~g)中的元素6~2，不难验证这一点。

于是，起泡排序算法的不变性和单调性可分别概括为：**经过 k 趟扫描交换之后，最大的前 k 个元素必然就位；经过 k 趟扫描交换之后，待求解问题的有效规模将缩减至 $n - k$ 。**

反观如代码1.1所示的**bubblesort1A()**算法，外层**while**循环会不断缩减待排序序列的有效长度 n 。现在我们已经可以理解，该算法之所以能够如此处理，正是基于以上不变性和单调性。

特别地，初始状态下 $k = 0$ ，这两条性质都自然满足。另一方面，由以上单调性可知，无论如何，至多经 $n - 1$ 趟扫描交换后，问题的有效规模必将缩减至1。此时，仅含单个元素的序列，有序性不言而喻；而由该算法的不变性，其余 $n - 1$ 个元素在此前的 $n - 1$ 步迭代中业已相继就位。因此，算法不仅必然终止，而且输出序列必然整体有序，其有穷性与正确性由此得证。

■ 退化与鲁棒性

同一问题往往不限于一种算法，而同一算法也常常会有多种实现方式，因此除了以上必须具备的基本属性，在应用环境中还需从实用的角度对不同算法及其不同版本做更为细致考量和取舍。这些细致的要求尽管应纳入软件工程的范畴，但也不失为成熟算法的重要标志。

比如其中之一就是，除一般性情况外，实用的算法还应能够处理各种极端的输入实例。仍以排序问题为例，极端情况下待排序序列的长度可能不是正数（参数 $n = 0$ 甚至 $n < 0$ ），或者反过来长度达到或者超过系统支持的最大值（ $n = \text{INT_MAX}$ ），或者 $A[]$ 中的元素不见得互异甚至全体相等，以上种种都属于所谓的退化（*degeneracy*）情况。算法所谓的鲁棒性（*robustness*），就是要求能够尽可能充分地应对此类情况。请读者自行验证，对于以上退化情况，代码1.1中**bubblesort1A()**算法依然可以正确返回而不致出现异常。

■ 重用性

从实用角度评判不同算法及其不同实现方式时，可采用的另一标准是：算法的总体框架能否便捷地推广至其它场合。仍以起泡排序为例。实际上，起泡算法的正确性与所处理序列中元素的类型关系不大，无论是对于**float**、**char**或其它类型，只要元素之间可以比较大小，算法的整体框架就依然可以沿用。算法模式可推广并适用于不同类型基本元素的这种特性，即是重用性的一种典型形式。很遗憾，代码1.1所实现的**bubblesort1A()**算法尚不满足这一要求；而稍后的第2章和第3章，将使包括起泡排序在内的各种排序算法具有这一特性。

1.1.5 算法效率

■ 可计算性

相信本书的读者已经学习并掌握了至少一种高级程序设计语言，如C、C++或Java等。学习程序设计语言的目的，在于学会如何编写合法（即合乎特定程序语言的语法）的程序，从而保证编写的程序或者能够经过编译和链接生成执行代码，或者能够由解释器解释执行。然而从通过计算有效解决实际问题的角度来看，这只是第一个层次，仅仅做到语法正确还远远不够。很遗憾，算法所应具备的更多基本性质，合法的程序并非总是自然具备。

以前面提到的有穷性为例，完全合乎语法的程序却往往未必能够满足。相信每一位编写程序的读者都有过这样的体验：很多合法的程序可以顺利编译链接，但在实际运行的过程中却因无穷循环或递归溢出导致异常。更糟糕的是，就大量的应用问题而言，根本就不可能设计出必然终止的算法。从这个意义讲，它们都属于不可解的问题。当然，关于此类问题的界定和研究，应归入可计算性（*computability*）理论的范畴，本书将不予过多涉及。

■ 难解性

实际上我们不仅需要确定，算法对任何输入都能够在有穷次操作之后终止，而且更加关注该过程所需的时间。很遗憾，很多算法即便满足有穷性，但在终止之前所花费的时间成本却太高。比如，理论研究的成果显示，大量问题的最低求解时间成本，都远远超出目前实际系统所能提供的计算能力。同样地，此类难解性（**intractability**）问题，在本书中也不予过多讨论。

■ 计算效率

在“编写合法程序”这一基础之上，本书将更多地关注于非“不可解和难解”的一般性问题，并讨论如何高效率地解决这一层面的计算问题。为此，首先需要确立一种尺度，用以从时间和空间等方面度量算法的计算成本，进而依此尺度对不同算法进行比较和评判。当然，更重要的是研究和归纳算法设计与实现过程中的一般性规律与技巧，以编写出效率更高、能够处理更大规模数据的程序。这两点既是本书的基本主题，也是贯穿始终的主体脉络。

■ 数据结构

由上可知，无论是算法的初始输入、中间结果还是最终输出，在计算机中都可以数据的形式表示。对于数据的存储、组织、转移及变换等操作，不同计算模型和平台环境所支持的具体形式不尽相同，其执行效率将直接影响和决定算法的整体效率。数据结构这一学科正是以“数据”这一信息的表现形式为研究对象，旨在建立支持高效算法的数据信息处理策略、技巧与方法。要做到根据实际应用需求自如地设计、实现和选用适当的数据结构，必须首先对算法设计的技巧以及相应数据结构的特性了然于心，这些也是本书的重点与难点。

§ 1.2 复杂度度量

算法的计算成本涵盖诸多方面，为确定计算成本的度量标准，我们不妨先从计算速度这一主要因素入手。具体地，如何度量一个算法所需的计算时间呢？

1.2.1 时间复杂度

上述问题并不容易直接回答，原因在于，运行时间是由多种因素综合作用而决定的。首先，即使是同一算法，对于不同的输入所需的运行时间并不相同。以排序问题为例，输入序列的规模、其中各元素的数值以及次序均不确定，这些因素都将影响到排序算法最终的运行时间。为针对运行时间建立起一种可行、可信的评估标准，我们不得不首先考虑其中最为关键的因素。其中，问题实例的规模往往是决定计算成本的主要因素。一般地，问题规模越接近，相应的计算成本也越接近；而随着问题规模的扩大，计算成本通常也呈上升趋势。

如此，本节开头所提的问题即可转化为：随着输入规模的扩大，算法的执行时间将如何增长？执行时间的这一变化趋势可表示为输入规模的一个函数，称作该算法的时间复杂度（**time complexity**）。具体地，特定算法处理规模为 n 的问题所需的时间可记作 $T(n)$ 。

细心的读者可能注意到，根据规模并不能唯一确定具体的输入，规模相同的输入通常都有多个，而算法对其进行处理所需时间也不尽相同。仍以排序问题为例，由 n 个元素组成的输入序列有 $n!$ 种，有时所有元素都需交换，有时却无需任何交换（习题[1-3]）。故严格说来，以上定义的 $T(n)$ 并不明确。为此需要再做一次简化，即从保守估计的角度出发，在规模为 n 的所有输入中选择执行时间最长者作为 $T(n)$ ，并以 $T(n)$ 度量该算法的时间复杂度。

1.2.2 渐进复杂度

至此，对于同一问题的两个算法A和B，通过比较其时间复杂度 $T_A(n)$ 和 $T_B(n)$ ，即可评价二者对于同一输入规模n的计算效率高低。然而，藉此还不足以就其性能优劣做出总体性的评判，比如对于某些问题，一些算法更适用于小规模输入，而另一些则相反（习题[1-5]）。

幸运的是，在评价算法运行效率时，我们往往可以忽略其处理小规模问题时的能力差异，转而关注其在处理更大规模问题时的表现。其中的原因不难理解，小规模问题所需的处理时间本来就相对更少，故此时不同算法的实际效率差异并不明显；而在处理更大规模的问题时，效率的些许差异都将对实际执行效果产生巨大的影响。这种着眼长远、更为注重时间复杂度的总体变化趋势和增长速度的策略与方法，即所谓的渐进分析（asymptotic analysis）。

那么，针对足够大的输入规模n，算法执行时间 $T(n)$ 的渐进增长速度，应如何度量和评价呢？

■ 大O记号

同样地出于保守的估计，我们首先关注 $T(n)$ 的渐进上界。为此可引入所谓“大O记号”(big-O notation)。具体地，若存在正的常数c和函数 $f(n)$ ，使得对任何 $n \gg 2$ 都有

$$T(n) \leq c \cdot f(n)$$

则可认为在n足够大之后， $f(n)$ 给出了 $T(n)$ 增长速度的一个渐进上界。此时，记之为：

$$T(n) = O(f(n))$$

由这一定义，可导出大O记号的以下性质：

(1) 对于任一常数 $c > 0$ ，有 $O(f(n)) = O(c \cdot f(n))$

(2) 对于任意常数 $a > b > 0$ ，有 $O(n^a + n^b) = O(n^a)$

前一性质意味着，在大O记号的意义下，函数各项正的常系数可以忽略并等同于1。后一性质则意味着，多项式中的低次项均可忽略，只需保留最高次项。可以看出，大O记号的这些性质的确体现了对函数总体渐进增长趋势的关注和刻画。

■ 环境差异

在实际环境中直接测得的执行时间 $T(n)$ ，虽不失为衡量算法性能的一种指标，但作为评判不同算法性能优劣的标准，其可信度值得推敲。事实上，即便是同一算法、同一输入，在不同的硬件平台上、不同的操作系统中甚至不同的时间，所需要的计算时间都不尽相同。因此，有必要按照超脱于具体硬件平台和软件环境的某一客观标准，来度量算法的时间复杂度，并进而评价不同算法的效率差异。

■ 基本操作

一种自然且可行的解决办法是，将时间复杂度理解为算法中各条指令的执行时间之和。在图灵机（Turing Machine, TM）和随机存储机（Random Access Machine, RAM）等计算模型^[4]中，指令语句均可分解为若干次基本操作，比如算术运算、比较、分支、子程序调用与返回等；而在大多数实际的计算环境中，每一次这类基本操作都可在常数时间内完成。

如此，不妨将 $T(n)$ 定义为算法所执行基本操作的总次数。也就是说， $T(n)$ 决定于组成算法的所有语句各自的执行次数，以及其中所含基本操作的数目。以代码1.1中起泡排序**bubblesort1A()**算法为例，若将该算法处理长度为n的序列所需的时间记作 $T(n)$ ，则按照上述分析，只需统计出该算法所执行基本操作的总次数，即可确定 $T(n)$ 的上界。

■ 起泡排序

`bubblesort1A()` 算法由内、外两层循环组成。内循环从前向后，依次比较各对相邻元素，如有必要则将其交换。故在每一轮内循环中，需要扫描和比较 $n - 1$ 对元素，至多需要交换 $n - 1$ 对元素。元素的比较和交换，都属于基本操作，故每一轮内循环至多需要执行 $2(n - 1)$ 次基本操作。另外，根据 1.1.4 节对该算法正确性的分析结论，外循环至多执行 $n - 1$ 轮。因此，总共需要执行的基本操作不会超过 $2(n - 1)^2$ 次。若以此来度量该算法的时间复杂度，则有

$$T(n) = \mathcal{O}(2(n-1)^2)$$

根据大 \mathcal{O} 记号的性质，可进一步简化和整理为：

$$T(n) = \mathcal{O}(2n^2 - 4n + 2) = \mathcal{O}(2n^2) = \mathcal{O}(n^2)$$

■ 最坏、最好与平均情况

由上可见，以大 \mathcal{O} 记号形式表示的时间复杂度，实质上是对算法执行时间的一种保守估计——对于规模为 n 的任意输入，算法的运行时间都不会超过 $\mathcal{O}(f(n))$ 。比如，“起泡排序算法复杂度 $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$ ” 意味着，该算法处理任何序列所需的时间绝不会超过 $\mathcal{O}(n^2)$ 。的确需要这么长计算时间的输入实例，称作最坏实例或最坏情况（*worst case*）。

需强调的是，这种保守估计并不排斥更好情况甚至最好情况（*best case*）的存在和出现。比如，对于某些输入序列，起泡排序算法的内循环的执行轮数可能少于 $n-1$ ，甚至只需执行一轮（习题[1-3]）。当然，有时也需要考查所谓的平均情况（*average case*），也就是按照某种约定的概率分布，将规模为 n 的所有输入对应的计算时间加权平均。

比较而言，“最坏情况复杂度”是人们最为关注且使用最多的，在一些特殊的场合甚至成为唯一的指标。比如控制核电站运转、管理神经外科手术室现场的系统而言，从最好或平均角度评判算法的响应速度都不具有任何意义，在最坏情况下的响应速度才是唯一的指标。

■ 大 Ω 记号

为了对算法的复杂度最好情况做出估计，需要借助另一个记号。如果存在正的常数 c 和函数 $g(n)$ ，使得对于任何 $n >> 2$ 都有

$$T(n) \geq c \cdot g(n)$$

就可以认为，在 n 足够大之后， $g(n)$ 给出了 $T(n)$ 的一个渐进下界。此时，我们记之为：

$$T(n) = \Omega(g(n))$$

这里的 Ω 称作“大 Ω 记号”（*big-omega notation*）。与大 \mathcal{O} 记号恰好相反，大 Ω 记号是对算法执行效率的乐观估计——对于规模为 n 的任意输入，算法的运行时间都不低于 $\Omega(g(n))$ 。比如，即便在最好情况下，起泡排序也至少需要 $T(n) = \Omega(n)$ 的计算时间（习题[1-4]）。

■ 大 Θ 记号

借助大 \mathcal{O} 记号、大 Ω 记号，可以对算法的时间复杂度作出定量的界定，亦即，从渐进的趋势看， $T(n)$ 介于 $\Omega(g(n))$ 与 $\mathcal{O}(f(n))$ 之间。若恰巧出现 $g(n) = f(n)$ 的情况，则可以使用另一记号来表示。

如果存在正的常数 $c_1 < c_2$ 和函数 $h(n)$ ，使得对于任何 $n >> 2$ 都有

$$c_1 \cdot h(n) \leq T(n) \leq c_2 \cdot h(n)$$

就可以认为在 n 足够大之后， $h(n)$ 给出了 $T(n)$ 的一个确界。此时，我们记之为：

$$T(n) = \Theta(h(n))$$

这里的 Θ 称作“大 Θ 记号”(big-theta notation)，它是对算法复杂度的准确估计——对于规模为 n 的任何输入，算法的运行时间 $T(n)$ 都与 $\Theta(h(n))$ 同阶。

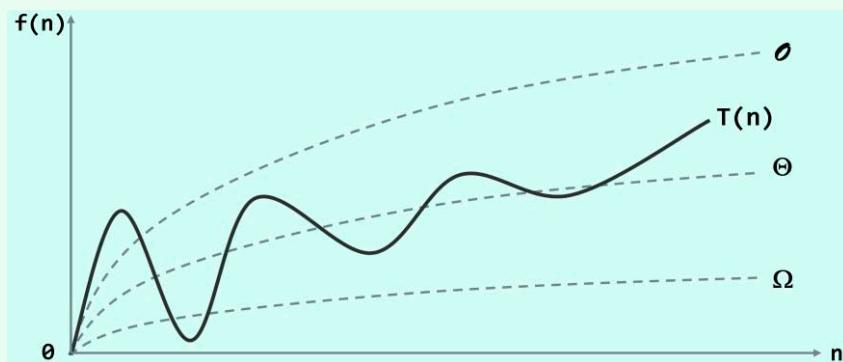


图1.4 大 θ 记号、大 Ω 记号和大 Θ 记号

以上主要的这三种渐进复杂度记号之间的联系与区别，可直观地由图1.4示意。

1.2.3 空间复杂度

除了执行时间的长短，算法所需存储空间的多少也是衡量其性能的一个重要方面，此即所谓空间复杂度(space complexity)。实际上，以上针对时间复杂度所引入的几种渐进记号，也适用于对空间复杂度的度量，其原理及方法基本相同，不再赘述。

需要注意的是，为了更为客观地评价算法性能的优劣，除非特别申明，空间复杂度通常并不计入原始输入本身所占用的空间——对于同一问题，这一指标对任何算法都是相同的。反之，其它(如转储、中转、索引、映射、缓冲等)各个方面所消耗的空间，则都应计入。

另外，很多时候我们都是更多地甚至仅仅关注于算法的时间复杂度，而不必对空间复杂度做专门的考查。这种简便评测方式的依据，来自于以下事实：就渐进复杂度的意义而言，在任一算法的任何一次运行过程中所消耗的存储空间，都不会多于其间所执行基本操作的累计次数。

实际上根据定义，每次基本操作所涉及的存储空间，都不会超过常数规模；纵然每次基本操作所占用或访问的存储空间都是新开辟的，整个算法所需的空间总量，也不过与基本操作的次数同阶。从这个意义上说，时间复杂度本身就是空间复杂度的一个天然的上界。

当然，对空间复杂度的分析也有其自身的意义，尤其在对空间效率非常在乎的应用场合中，或当问题的输入规模极为庞大时，由时间复杂度所确立的平凡上界已经难以令人满意。这类情况下，人们将更为精细地考查不同算法的空间效率，并尽力在此方面不断优化。本书的后续章节，将结合一些实际问题介绍相关的方法与技巧。

§ 1.3 复杂度分析

在明确了算法复杂度的度量标准之后，如何分析具体算法的复杂度呢？1.2.2节所引入的三种记号中，大 θ 记号是最基本的，也是最常用到的。从渐进分析的角度，大 θ 记号将各算法的复杂度由低到高划分为若干层次级别。以下依次介绍若干典型的复杂度级别，并介绍主要的分析方法与技巧。读者可参照以下介绍的方法，做进一步的练习(习题[1-30]和[1-32])。

1.3.1 常数 $\mathcal{O}(1)$

■ 问题与算法

考查如下常规元素的选取问题，该问题一种解法如算法1.3所示。

```
ordinaryElement(S[], n) //从n ≥ 3个互异整数中，除最大、最小者以外，任取一个“常规元素”
    任取的三个元素x, y, z ∈ S; //这三个元素亦必互异
    通过比较，对它们做排序；//设经排序后，依次重命名为：a < b < c
    输出b;
```

算法1.3 取非极端元素

该算法的正确性不言而喻，但它需要运行多少时间？与输入的规模n有何联系？

■ 复杂度

既然S是有限集，故其中的最大、最小元素各有且仅有一个。因此，无论S的规模有多大，在任意三个元素中至少都有一个是非极端元素。不妨取前三个元素x = S[0]、y = S[1]和z = S[2]，这一步只需执行三次（从特定单元读取元素的）基本操作，耗费 $\mathcal{O}(3)$ 时间。接下来，为确定这三个元素的大小次序，最多需要做三次比较（习题[2-37]），也需 $\mathcal{O}(3)$ 时间。最后，输出居中的非极端元素只需 $\mathcal{O}(1)$ 时间。因此综合起来，算法1.3的运行时间为：

$$T(n) = \mathcal{O}(3) + \mathcal{O}(3) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(7) = \mathcal{O}(1)$$

运行时间可表示和度量为 $T(n) = \mathcal{O}(1)$ 的这一类算法，统称作“常数时间复杂度算法”（constant-time algorithm）。此类算法已是较为理想的，因为不可能奢望“不劳而获”。

一般地，仅含一次或常数次基本操作的算法（如算法1.1和算法1.2）均属此类。此类算法通常不含循环、分支、子程序调用等，但也不能仅凭语法结构的表面形式一概而论（习题[1-7]）。

采用1.2.3节的分析方法不难看出，除了输入数组等参数之外，该算法仅需常数规模的辅助空间。此类仅需 $\mathcal{O}(1)$ 辅助空间的算法，亦称作就地算法（in-place algorithm）。

1.3.2 对数 $\mathcal{O}(\log n)$

■ 问题与算法

考查如下问题：对于任意非负整数，统计其二进制展开中数位1的总数。

该问题的一个算法可实现如代码1.2所示。

该算法使用一个计数器ones记录数位1的数目，其初始值为0。随后进入一个循环：通过二进制位的与（and）运算，检查n的二进制展开的最低位，若该位为1则累计至ones。由于每次循环都将n的二进制展开右移一位，故整体效果等同于逐个检验所有数位是否为1，该算法的正确性也不难由此得证。

以 $n = 441_{(10)} = 110111001_{(2)}$ 为例，采用以上算法，变量n与计数器ones在计算过程中的演变过程如表1.1所示。

表1.1 countOnes(441)的执行过程

十进制	二进制	数位1计数
441	110111001	0
220	11011100	1
110	1101110	1
55	110111	1
27	11011	2
13	1101	3
6	110	4
3	11	4
1	1	5
0	0	6

```

1 int countOnes(unsigned int n) { //统计整数n的二进制展开中数位1的总数 : O(logn)
2     int ones = 0; //计数器复位
3     while (0 < n) { //在n缩减至0之前，反复地
4         ones += (1 & n); //检查最低位，若为1则计数
5         n >>= 1; //右移一位
6     }
7     return ones; //返回计数
8 } //等效于glibc的内置函数int __builtin_popcount (unsigned int n)

```

代码1.2 整数二进制展开中数位1总数的统计

■ 复杂度

根据右移运算的性质，每右移一位， n 都至少缩减一半。也就是说，至多经过 $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ 次循环， n 必然缩减至0，从而算法终止。实际上从另一角度来看， $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ 恰为 n 二进制展开的总位数，每次循环都将其右移一位，总的循环次数自然也应是 $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ 。后一解释，也可以从表1.1中 n 的二进制展开一列清晰地看出。

无论是该循环体之前、之内还是之后，均只涉及常数次（逻辑判断、位与运算、加法、右移等）基本操作。因此，`countOnes()`算法的执行时间主要由循环的次数决定，亦即：

$$\mathcal{O}(1 + \lfloor \log_2 n \rfloor) = \mathcal{O}(\lfloor \log_2 n \rfloor) = \mathcal{O}(\log_2 n)$$

由大 \mathcal{O} 记号定义，在用函数 $\log_r n$ 界定渐进复杂度时，常底数 r 的具体取值无所谓（习题[1-8]），故通常不予专门标出而笼统地记作 $\log n$ 。比如，尽管此处底数为常数2，却可直接记作 $\mathcal{O}(\log n)$ 。此类算法称作具有“对数时间复杂度”（*logarithmic-time algorithm*）。

实际上，代码1.2中的`countOnes()`算法仍有巨大的改进余地（习题[1-12]）。

■ 对数多项式复杂度

更一般地，凡运行时间可以表示和度量为 $T(n) = \mathcal{O}(\log^c n)$ 形式的这一类算法（其中常数 $c > 0$ ），均统称作“对数多项式时间复杂度的算法”（*polylogarithmic-time algorithm*）。上述 $\mathcal{O}(\log n)$ 即 $c = 1$ 的特例。此类算法的效率虽不如常数复杂度算法理想，但从多项式的角度看仍能无限接近于后者（习题[1-9]），故也是极为高效的一类算法。

1.3.3 线性 $\mathcal{O}(n)$

■ 问题与算法

考查如下问题：计算给定 n 个整数的总和。该问题可由代码1.3中的算法`sumI()`解决。

```

1 int sumI(int A[], int n) { //数组求和算法(迭代版)
2     int sum = 0; //初始化累计器, O(1)
3     for (int i = 0; i < n; i++) //对全部共O(n)个元素，逐一
4         sum += A[i]; //累计, O(1)
5     return sum; //返回累计值, O(1)
6 } //O(1) + O(n)*O(1) + O(1) = O(n+2) = O(n)

```

代码1.3 数组元素求和算法`sumI()`

■ 复杂度

`sumI()`算法的正确性一目了然，它需要运行多少时间呢？

首先，对`s`的初始化需要 $\mathcal{O}(1)$ 时间。算法的主体部分是一个循环，每一轮循环中只需进行一次累加运算，这属于基本操作，可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内完成。每经过一轮循环，都将一个元素累加至`s`，故总共需要做 n 轮循环，于是该算法的运行时间应为：

$$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) \times n = \mathcal{O}(n + 1) = \mathcal{O}(n)$$

凡运行时间可以表示和度量为 $T(n) = \mathcal{O}(n)$ 形式的这一类算法，均统称作“线性时间复杂度算法”（linear-time algorithm）。比如，算法1.2只需略加修改，即可解决“ n 等分给定线段”问题，这个通用版本相对于输入 n 就是一个线性时间复杂度的算法。

也就是说，对于输入的每一单元，此类算法平均消耗常数时间。就大多数问题而言，在对输入的每一单元均至少访问一次之前，不可能得出解答。以数组求和为例，在尚未得知每一元素的具体数值之前，绝不可能确定其总和。故就此意义而言，此类算法的效率亦足以令人满意。

1.3.4 多项式 $\mathcal{O}(\text{polynomial}(n))$

若运行时间可以表示和度量为 $T(n) = \mathcal{O}(f(n))$ 的形式，而且 $f(x)$ 为多项式，则对应的算法称作“多项式时间复杂度算法”（polynomial-time algorithm）。比如根据1.2.2节的分析，1.1.3节所实现起泡排序`bubblesort1A()`算法的时间复杂度应为 $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$ ，故该算法即属于此类。当然，以上所介绍的线性时间复杂度算法，也属于多项式时间复杂度算法的特例，其中线性多项式 $f(n) = n$ 的次数为1。

在算法复杂度理论中，多项式时间复杂度被视作一个具有特殊意义的复杂度级别。多项式级的运行时间成本，在实际应用中一般被认为是可接受的或可忍受的。某问题若存在一个复杂度在此范围以内的算法，则称该问题是可有效求解的或易解的（tractable）。

请注意，这里仅要求多项式的次数为一个正的常数，而并未对其最大取值范围设置任何具体上限，故实际上该复杂度级别涵盖了很大的一类算法。比如，从理论上讲，复杂度分别为 $\mathcal{O}(n^2)$ 和 $\mathcal{O}(n^{2012})$ 算法都同属此类，尽管二者实际的计算效率有天壤之别。之所以如此，是因为相对于以下的指数级复杂度，二者之间不超过多项式规模的差异只是小巫见大巫。

1.3.5 指数 $\mathcal{O}(2^n)$

■ 问题与算法

考查如下问题：在禁止超过1位的移位运算的前提下，对任意非负整数 n ，计算幂 2^n 。

```
1 __int64 power2BF_I(int n) { //幂函数2^n算法(蛮力迭代版), n >= 0
2     __int64 pow = 1; //O(1):累积器初始化为2^0
3     while (0 < n --) //O(n):迭代n轮, 每轮都
4         pow <= 1; //O(1):将累积器翻倍
5     return pow; //O(1):返回累积器
6 } //O(n) = O(2^r), r为输入指数n的比特位数
```

代码1.4 幂函数算法（蛮力迭代版）

第2章

向量

数据结构是数据项的结构化集合，其结构性表现为数据项之间的相互联系及作用，也可以理解为定义于数据项之间的某种逻辑次序。根据这种逻辑次序的复杂程度，大致可以将各种数据结构划分为线性结构、半线性结构与非线性结构三大类。在线性结构中，各数据项按照一个线性次序构成一个整体。最为基本的线性结构统称为序列（sequence），根据其中数据项的逻辑次序与其物理存储地址的对应关系不同，又可进一步地将序列区分为向量（vector）和列表（list）。在向量中，所有数据项的物理存放位置与其逻辑次序完全吻合，此时的逻辑次序也称作秩（rank）；而在列表中，逻辑上相邻的数据项在物理上未必相邻，而是采用间接定址的方式通过封装后的位置（position）相互引用。

本章的讲解将围绕向量结构的高效实现而逐步展开，包括其作为抽象数据类型的接口规范以及对应的算法，尤其是高效维护动态向量的技巧。此外，还将针对有序向量，系统介绍经典的查找与排序算法，并就其性能做一分析对比，这也是本章的重点与难点所在。最后，还将引入复杂度下界的概念，并通过建立比较树模型，针对基于比较式算法给出复杂度下界的统一界定方法。

§ 2.1 从数组到向量

2.1.1 数组

C、C++和Java等程序设计语言，都将数组作为一种内置的数据类型，支持对一组相关元素的存储组织与访问操作。具体地，若集合S由n个元素组成，且各元素之间具有一个线性次序，则可将它们存放于起始于地址A、物理位置连续的一段存储空间，并统称作数组（array），通常以A作为该数组的标识。具体地，数组A[]中的每一元素都唯一对应于某一下标编号，在多数高级程序设计语言中，一般都是从0开始编号，依次是0号、1号、2号、...、n-1号元素，记作：

$$A = \{ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \} \quad \text{或者}$$

$$A[0, n) = \{ A[0], A[1], \dots, A[n - 1] \}$$

其中，对于任何 $0 \leq i < j < n$ ， $A[i]$ 都是 $A[j]$ 的前驱（predecessor）， $A[j]$ 都是 $A[i]$ 的后继（successor）。特别地，对于任何 $i \geq 1$ ， $A[i - 1]$ 称作 $A[i]$ 的直接前驱（immediate predecessor）；对于任何 $i \leq n - 2$ ， $A[i + 1]$ 称作 $A[i]$ 的直接后继（immediate successor）。任一元素的所有前驱构成其前缀（prefix），所有后继构成其后缀（suffix）。

采用这一编号规范，不仅可以使得每个元素都通过下标唯一指代，而且可以使我们直接访问到任一元素。这里所说的“访问”包含读取、修改等基本操作，而“直接”则是指这些操作都可以在常数时间内完成——只要从数组所在空间的起始地址A出发，即可根据每一元素的编号，经过一次乘法运算和一次加法运算，获得待访问元素的物理地址。具体地，若数组A[]存放空间的起始地址为A，且每个元素占用s个单位的空间，则元素A[i]对应的物理地址为：

$$A + i \times s$$

因其中元素的物理地址与其下标之间满足这种线性关系，故亦称作线性数组（linear array）。

2.1.2 向量

按照面向对象思想中的数据抽象原则，可对以上的数组结构做一般性推广，使得其以上特性更具普遍性。向量（vector）就是线性数组的一种抽象与泛化，它也是由具有线性次序的一组元素构成的集合 $V = \{ v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \}$ ，其中的元素分别由秩相互区分。

各元素的秩（rank）互异，且均为 $[0, n)$ 内的整数。具体地，若元素 e 的前驱元素共计 r 个，则其秩就是 r 。以此前介绍的线性递归为例，运行过程中所出现过的所有递归实例，按照相互调用的关系可构成一个线性序列。在此序列中，各递归实例的秩反映了它们各自被创建的时间先后，每一递归实例的秩等于早于它出现的实例总数。反过来，通过 r 亦可唯一确定 $e = v_r$ 。这是向量特有的元素访问方式，称作“循秩访问”（call-by-rank）。

经如此抽象之后，我们不再限定同一向量中的各元素都属于同一基本类型，它们本身可以是来自于更具一般性的某一类的对象。另外，各元素也不见得同时具有某一数值属性，故而并不保证它们之间能够相互比较大小。

以下首先从向量最基本的接口出发，设计并实现与之对应的向量模板类。然后在元素之间具有大小可比性的假设前提下，通过引入通用比较器或重载对应的操作符明确定义元素之间的大小判断依据，并强制要求它们按此次序排列，从而得到所谓有序向量，并介绍和分析此类向量的相关算法及其针对不同要求的各种实现版本。

§ 2.2 接口

2.2.1 ADT接口

作为一种抽象数据类型，向量对象应支持如下操作接口。

表2.1 向量ADT支持的操作接口

操作接口	功能	适用对象
<code>size()</code>	报告向量当前的规模（元素总数）	向量
<code>get(r)</code>	获取秩为 r 的元素	向量
<code>put(r, e)</code>	用 e 替换秩为 r 元素的数值	向量
<code>insert(r, e)</code>	e 作为秩为 r 元素插入，原后继元素依次后移	向量
<code>remove(r)</code>	删除秩为 r 的元素，返回该元素中原存放的对象	向量
<code>disordered()</code>	判断所有元素是否已按非降序排列	向量
<code>sort()</code>	调整各元素的位置，使之按非降序排列	向量
<code>find(e)</code>	查找等于 e 且秩最大的元素	向量
<code>search(e)</code>	查找目标元素 e ，返回不大于 e 且秩最大的元素	有序向量
<code>deduplicate()</code>	剔除重复元素	向量
<code>uniquify()</code>	剔除重复元素	有序向量
<code>traverse()</code>	遍历向量并统一处理所有元素，处理方法由函数对象指定	向量

以上向量操作接口，可能有多种具体的实现方式，计算复杂度也不尽相同。而在引入秩的概念并将外部接口与内部实现分离之后，无论采用何种具体的方式，符合统一外部接口规范的任一实现均可直接地相互调用和集成。

2.2.2 操作实例

按照表2.1定义的ADT接口，表2.2给出了一个整数向量从被创建开始，通过ADT接口依次实施一系列操作的过程。请留意观察，向量内部各元素秩的逐步变化过程。

表2.2 向量操作实例

操作	输出	向量组成(自左向右)	操作	输出	向量组成(自左向右)
初始化			disordered()	3	4 3 7 4 9 6
insert(0, 9)		9	find(9)	4	4 3 7 4 9 6
insert(0, 4)		4 9	find(5)	-1	4 3 7 4 9 6
insert(1, 5)		4 5 9	sort()		3 4 4 6 7 9
put(1, 2)		4 2 9	disordered()	0	3 4 4 6 7 9
get(2)	9	4 2 9	search(1)	-1	3 4 4 6 7 9
insert(3, 6)		4 2 9 6	search(4)	2	3 4 4 6 7 9
insert(1, 7)		4 7 2 9 6	search(8)	4	3 4 4 6 7 9
remove(2)	2	4 7 9 6	search(9)	5	3 4 4 6 7 9
insert(1, 3)		4 3 7 9 6	search(10)	5	3 4 4 6 7 9
insert(3, 4)		4 3 7 4 9 6	uniquify()		3 4 6 7 9
size()	6	4 3 7 4 9 6	search(9)	4	3 4 6 7 9

2.2.3 Vector模板类

按照表2.1确定的向量ADT接口，可定义Vector模板类如代码2.1所示。

```

1 typedef int Rank; //秩
2 #define DEFAULT_CAPACITY 3 //默认的初始容量(实际应用中可设置为更大)
3
4 template <typename T> class Vector { //向量模板类
5 protected:
6     Rank _size; int _capacity; T* _elem; //规模、容量、数据区
7     void copyFrom(T const* A, Rank lo, Rank hi); //复制数组区间A[lo, hi)
8     void expand(); //空间不足时扩容
9     void shrink(); //装填因子过小时压缩
10    bool bubble(Rank lo, Rank hi); //扫描交换
11    void bubbleSort(Rank lo, Rank hi); //起泡排序算法
12    Rank max(Rank lo, Rank hi); //选取最大元素
13    void selectionSort(Rank lo, Rank hi); //选择排序算法
14    void merge(Rank lo, Rank mi, Rank hi); //归并算法
15    void mergeSort(Rank lo, Rank hi); //归并排序算法
16    Rank partition(Rank lo, Rank hi); //轴点构造算法
17    void quickSort(Rank lo, Rank hi); //快速排序算法
18    void heapSort(Rank lo, Rank hi); //堆排序(稍后结合完全堆讲解)
19 public:

```

```

20 // 构造函数
21 Vector(int c = DEFAULT_CAPACITY, int s = 0, T v = 0) //容量为c、规模为s、所有元素初始为v
22 { _elem = new T[_capacity = c]; for (_size = 0; _size < s; _elem[_size++] = v); } //s <= c
23 Vector(T const* A, Rank lo, Rank hi) { copyFrom(A, lo, hi); } //数组区间复制
24 Vector(T const* A, Rank n) { copyFrom(A, 0, n); } //数组整体复制
25 Vector(Vector<T> const& V, Rank lo, Rank hi) { copyFrom(V._elem, lo, hi); } //向量区间复制
26 Vector(Vector<T> const& V) { copyFrom(V._elem, 0, V._size); } //向量整体复制
27 // 析构函数
28 ~Vector() { delete [] _elem; } //释放内部空间
29 // 只读访问接口
30 Rank size() const { return _size; } //规模
31 bool empty() const { return !_size; } //判空
32 int disordered() const; //判断向量是否已排序
33 Rank find(T const& e) const { return find(e, 0, (Rank)_size); } //无序向量整体查找
34 Rank find(T const& e, Rank lo, Rank hi) const; //无序向量区间查找
35 Rank search(T const& e) const //有序向量整体查找
36 { return (0 >= _size) ? -1 : search(e, (Rank)0, (Rank)_size); }
37 Rank search(T const& e, Rank lo, Rank hi) const; //有序向量区间查找
38 // 可写访问接口
39 T& operator[](Rank r) const; //重载下标操作符，可以类似于数组形式引用各元素
40 Vector<T> & operator=(Vector<T> const&); //重载赋值操作符，以便直接克隆向量
41 T remove(Rank r); //删除秩为r的元素
42 int remove(Rank lo, Rank hi); //删除秩在区间[lo, hi)之内的元素
43 Rank insert(Rank r, T const& e); //插入元素
44 Rank insert(T const& e) { return insert(_size, e); } //默认作为末元素插入
45 void sort(Rank lo, Rank hi); //对[lo, hi)排序
46 void sort() { sort(0, _size); } //整体排序
47 void unsort(Rank lo, Rank hi); //对[lo, hi)置乱
48 void unsort() { unsort(0, _size); } //整体置乱
49 int deduplicate(); //无序去重
50 int uniquify(); //有序去重
51 // 遍历
52 void traverse(void (*)(T&)); //遍历（使用函数指针，只读或局部性修改）
53 template <typename VST> void traverse(VST&); //遍历（使用函数对象，可全局性修改）
54 }; //Vector

```

代码2.1 向量模板类Vector

这里通过模板参数T，指定向量元素的类型。于是，以`Vector<int>`或`Vector<float>`之类的形式，可便捷地引入存放整数或浮点数的向量；而以`Vector<Vector<char>>`之类的形式，则可直接定义存放字符的二维向量等。这一技巧有利于提高数据结构选用的灵活性和运行效率，并减少出错，因此将在本书中频繁使用。

在表2.1所列基本操作接口的基础上，这里还扩充了一些接口。比如，基于`size()`直接实现

的判空接口`empty()`，以及区间删除接口`remove(lo, hi)`、区间查找接口`find(e, lo, hi)`等。它们多为上述基本接口的扩展或变型，可使代码更为简洁易读，并提高计算效率。

这里还提供了`sort()`接口，以将向量转化为有序向量。为此可有多种排序算法供选用，本章及后续章节，将陆续介绍它们的原理、实现并分析其效率。排序之后，向量的很多操作都可更加高效地完成，其中最基本和最常用的莫过于查找。因此，这里还针对有序向量提供了`search()`接口，并将详细介绍若干种相关的算法。为便于对`sort()`算法的测试，这里还设有一个`unsort()`接口，以将向量随机置乱。在讨论这些接口之前，我们首先介绍基本接口的实现。

§ 2.3 构造与析构

由代码2.1可见，向量结构在内部维护一个元素类型为T的私有数组`_elem[]`：其容量由私有变量`_capacity`指示；有效元素的数量（即向量当前的实际规模），则由`_size`指示。此外还进一步地约定，在向量元素的秩、数组单元的逻辑编号以及物理地址之间，具有如下对应关系：

向量中秩为r的元素，对应于内部数组中的`_elem[r]`，其物理地址为`_elem + r`

因此，向量对象的构造与析构，将主要围绕这些私有变量和数据区的初始化与销毁展开。

2.3.1 默认构造方法

与所有的对象一样，向量在使用之前也需首先被系统创建——借助构造函数(`constructor`)做初始化(`initialization`)。由代码2.1可见，这里为向量重载了多个构造函数。

其中默认的构造方法是，首先根据创建者指定的初始容量，向系统申请空间，以创建内部私有数组`_elem[]`；若容量未明确指定，则使用默认值`DEFAULT_CAPACITY`。接下来，鉴于初生的向量尚不包含任何元素，故将指示规模的变量`_size`初始化为0。

整个过程顺序进行，没有任何迭代，故若忽略用于分配数组空间的时间，共需常数时间。

2.3.2 基于复制的构造方法

向量的另一典型创建方式，是以某个已有的向量或数组为蓝本，进行（局部或整体的）克隆。代码2.1中虽为此功能重载了多个接口，但无论是已封装的向量或未封装的数组，无论是整体还是区间，在入口参数合法的前提下，都可归于如代码2.2所示的统一的`copyFrom()`方法：

```

1 template <typename T> //元素类型
2 void Vector<T>::copyFrom(T const* A, Rank lo, Rank hi) { //以数组区间A[lo, hi)为蓝本复制向量
3     _elem = new T[_capacity = 2 * (hi - lo)]; _size = 0; //分配空间，规模清零
4     while (lo < hi) //A[lo, hi)内的元素逐一
5         _elem[_size++] = A[lo++]; //复制至_elem[0, hi - lo)
6 }
```

代码2.2 基于复制的向量构造器

`copyFrom()`首先根据待复制区间的边界，换算出新向量的初始规模；再以双倍的容量，为内部数组`_elem[]`申请空间。最后通过一趟迭代，完成区间`A[lo, hi)`内各元素的顺次复制。

若忽略开辟新空间所需的时间，运行时间应正比于区间宽度，即 $\mathcal{O}(hi - lo) = \mathcal{O}(_size)$ 。

需强调的是，由于向量内部含有动态分配的空间，默认的运算符“=”不足以支持向量之间的直接赋值。例如，6.3节将以二维向量形式实现图邻接表，其主向量中的每一元素本身都是一维向量，故通过默认赋值运算符，并不能复制向量内部的数据区。

为适应此类赋值操作的需求，可如代码2.3所示，重载向量的赋值运算符。

```
1 template <typename T> Vector<T>& Vector<T>::operator=(Vector<T> const& V) { //重载赋值操作符
2     if (_elem) delete [] _elem; //释放原有内容
3     copyFrom(V._elem, 0, V.size()); //整体复制
4     return *this; //返回当前对象的引用，以便链式赋值
5 }
```

代码2.3 重载向量赋值操作符

2.3.3 析构方法

与所有对象一样，不再需要的向量，应借助析构函数(`destructor`)及时清理(`cleanup`)，以释放其占用的系统资源。与构造函数不同，同一对象只能有一个析构函数，不得重载。

向量对象的析构过程，如代码2.1中的方法`~Vector()`所示：只需释放用于存放元素的内部数组`_elem[]`，将其占用的空间交还操作系统。`_capacity`和`_size`之类的内部变量无需做任何处理，它们将作为向量对象自身的一部分被系统回收，此后既无需也无法被引用。

若不计系统用于空间回收的时间，整个析构过程只需 $O(1)$ 时间。

同样地，向量中的元素可能不是程序语言直接支持的基本类型。比如，可能是指向动态分配对象的指针或引用，故在向量析构之前应该提前释放对应的空间。出于简化的考虑，这里约定并遵照“谁申请谁释放”的原则。究竟应释放掉向量各元素所指的对象，还是需要保留这些对象，以便通过其它指针继续引用它们，应由上层调用者负责确定。

§ 2.4 动态空间管理

2.4.1 静态空间管理

内部数组所占物理空间的容量，若在向量的生命期内不允许调整，则称作静态空间管理策略。很遗憾，该策略的空间效率难以保证。一方面，既然容量固定，总有可能在此后的某一时刻，无法加入更多的新元素——即导致所谓的上溢(`overflow`)。例如，若使用向量来记录网络访问日志，则由于插入操作远多于删除操作，必然频繁溢出。注意，造成此类溢出的原因，并非系统不能提供更多的空间。另一方面反过来，即便愿意为降低这种风险而预留出部分空间，也很难在程序执行之前，明确界定一个合理的预留量。以上述`copyFrom()`方法为例，即便将容量取作初始规模的两倍，也只能保证在此后足够长的一段时间内（而并非永远）不致溢出。

向量实际规模与其内部数组容量的比值（即`_size/_capacity`），亦称作装填因子(`load factor`)，它是衡量空间利用率的重要指标。从这一角度，上述难题可归纳为：

如何才能保证向量的装填因子既不致于超过1，也不致于太接近于0？

为此，需要改用动态空间管理策略。其中一种有效的方法，即使用所谓的可扩充向量。

2.4.2 可扩充向量

经过一段时间的生长，每当身体无法继续为其外壳所容纳，蝉就会蜕去外壳，同时换上一身更大的外壳。扩充向量（extendable vector）的原理，与之相仿。若内部数组仍有空余，则操作可照常执行。每经一次插入（删除），可用空间都会减少（增加）一个单元（图2.1(a)）。一旦可用空间耗尽（图(b)），就动态地扩大内部数组的容量。这里的难点及关键在于：

如何实现扩容？新的容量取作多少才算适宜？

首先解决前一问题。直接在原有物理空间的基础上追加空间？这并不现实。数组特有的定址方式要求，物理空间必须地址连续，而我们却无法保证，其尾部总是预留了足够空间可供拓展。

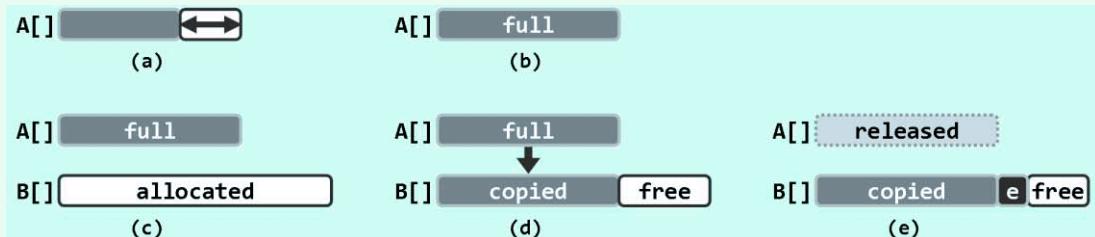


图2.1 可扩充向量的溢出处理

一种可行的方法，如图2.1(c~e)所示。我们需要另行申请一个容量更大的数组B[](图(c))，并将原数组中的成员集体搬迁至新的空间(图(d))，此后方可顺利地插入新元素e而不致溢出(图(e))。当然，原数组所占的空间，需要及时释放并归还操作系统。

2.4.3 扩容

基于以上策略的扩容算法expand()，可实现如代码2.4所示。

```

1 template <typename T> void Vector<T>::expand() { //向量空间不足时扩容
2     if (_size < _capacity) return; //尚未满员时，不必扩容
3     if (_capacity < DEFAULT_CAPACITY) _capacity = DEFAULT_CAPACITY; //不低于最小容量
4     T* oldElem = _elem; _elem = new T[_capacity <= 1]; //容量加倍
5     for (int i = 0; i < _size; i++)
6         _elem[i] = oldElem[i]; //复制原向量内容 (T为基本类型，或已重载赋值操作符'=')
7     delete [] oldElem; //释放原空间
8 }
```

代码2.4 向量内部数组动态扩容算法expand()

实际上，在调用insert()接口插入新元素之前，都要先调用该算法，检查内部数组的可用容量。一旦当前数据区已满(_size == _capacity)，则将原数组替换为一个更大的数组。

请注意，新数组的地址由操作系统分配，与原数据区没有直接的关系。这种情况下，若直接引用数组，往往会导致共同指向原数组的其它指针失效，成为野指针（wild pointer）；而经封装为向量之后，即可继续准确地引用各元素，从而有效地避免野指针的风险。

这里的关键在于，新数组的容量总是取作原数组的两倍——这正是上述后一问题的答案。

2.4.4 分摊分析

■ 时间代价

与常规数组实现相比，可扩充向量更加灵活：只要系统尚有可用空间，其规模将不再受限于初始容量。不过，这并非没有代价——每次扩容，元素的搬迁都需要花费额外的时间。

准确地，每一次由 n 到 $2n$ 的扩容，都需要花费 $\Theta(2n) = \Theta(n)$ 时间——这也是最坏情况下，单次插入操作所需的时间。表面看来，这一扩容策略似乎效率很低，但这不过是一种错觉。

请注意，按照此处的约定，每花费 $\Theta(n)$ 时间实施一次扩容，数组的容量都会加倍。这就意味着，至少要再经过 n 次插入操作，才会因为可能溢出而再次扩容。也就是说，随着向量规模的不断扩大，在执行插入操作之前需要进行扩容的概率，也将迅速降低。故就某种平均意义而言，用于扩容的时间成本不至很高。以下不妨就此做一严格的分析。

■ 分摊复杂度

这里，不妨考查对可扩充向量的足够多次连续操作，并将其间所消耗的时间，分摊至所有的操作。如此分摊平均至单次操作的时间成本，称作分摊运行时间（*amortized running time*）。

请注意，这一指标与平均运行时间（*average running time*）有着本质的区别（习题[2-1]）。后者是按照某种假定的概率分布，对各种情况下所需执行时间的加权平均，故亦称作期望运行时间（*expected running time*）。而前者则要求，参与分摊的操作必须构成和来自一个真实可行的操作序列，而且该序列还必须足够地长。

相对而言，分摊复杂度可以针对计算成本和效率，做出更为客观而准确的估计。比如在这里，在任何一个可扩充向量的生命期内，在任何足够长的连续操作序列中，以任何固定间隔连续出现上述最坏情况的概率均为0，故常规的平均复杂度根本不具任何参考意义。作为评定算法性能的一种重要尺度，分摊分析（*amortized analysis*）的相关方法与技巧将在后续章节陆续介绍。

■ $\Theta(1)$ 分摊时间

以可扩充向量为例，可以考查对该结构的连续 n 次（查询、插入或删除等）操作，将所有操作中用于内部数组扩容的时间累计起来，然后除以 n 。只要 n 足够大，这一平均时间就是用于扩容处理的分摊时间成本。以下我们将看到，即便排除查询和删除操作而仅考查插入操作，在可扩充向量单次操作中，用于扩容处理的分摊时间成本也不过 $\Theta(1)$ 。

假定数组的初始容量为某一常数 N 。既然是估计复杂度的上界，故不妨设向量的初始规模也为 N ——即将溢出。另外不难看出，除插入操作外，向量其余的接口操作既不会直接导致溢出，也不会增加此后溢出的可能性，因此不妨考查最坏的情况，假设在此后需要连续地进行 n 次`insert()`操作， $n \gg N$ 。首先定义如下函数：

```
size(n) = 连续插入n个元素后向量的规模
capacity(n) = 连续插入n个元素后数组的容量
T(n) = 为连续插入n个元素而花费于扩容的时间
```

其中，向量规模从 N 开始随着操作的进程逐步递增，故有：

```
size(n) = N + n
```

既然不致溢出，故装填因子绝不会超过100%。同时，这里的扩容采用了“懒惰”策略——只有在的确即将发生溢出时，才不得不将容量加倍——因此装填因子也始终不低于50%。

概括起来，始终应有：

$$\text{size}(n) \leq \text{capacity}(n) < 2 \cdot \text{size}(n)$$

考虑到N为常数，故有：

$$\text{capacity}(n) = \Theta(\text{size}(n)) = \Theta(n)$$

容量以2为比例按指数速度增长，在容量达到 $\text{capacity}(n)$ 之前，共做过 $\Theta(\log_2 n)$ 次扩容，每次扩容所需时间线性正比于当时的容量（或规模），且同样以2为比例按指数速度增长。因此，消耗于扩容的时间累计不过：

$$T(n) = 2N + 4N + 8N + \dots + \text{capacity}(n) < 2 \cdot \text{capacity}(n) = \Theta(n)$$

将其分摊到其间的连续n次操作，单次操作所需的分摊运行时间为 $O(1)$ 。

■ 其它扩容策略

以上分析确凿地说明，基于加倍策略的动态扩充数组不仅可行，而且就分摊复杂度而言效率也足以令人满意。当然，并非任何扩容策略都能保证如此高的效率。比如，早期可扩充向量多采用另一策略：一旦有必要，则追加固定数目的单元。实际上，无论采用的固定常数多大，在最坏情况下，此类数组单次操作的分摊时间复杂度都将高达 $\Omega(n)$ （习题[2-3]）。

2.4.5 缩容

导致低效率的另一情况是，向量的实际规模可能远远小于内部数组的容量。比如在连续的一系列操作过程中，若删除操作远多于插入操作，则装填因子极有可能远远小于100%，甚至非常接近于0。当装填因子低于某一阈值时，我们称数组发生了下溢（underflow）。

尽管下溢不属于必须解决的问题，但在格外关注空间利用率的场合，发生下溢时也有必要适当缩减内部数组容量。代码2.5给出了一个动态缩容`shrink()`算法：

```

1 template <typename T> void Vector<T>::shrink() { //装填因子过小时压缩向量所占空间
2     if (_capacity < DEFAULT_CAPACITY << 1) return; //不致收缩到DEFAULT_CAPACITY以下
3     if (_size << 2 > _capacity) return; //以25%为界
4     T* oldElem = _elem; _elem = new T[_capacity >>= 1]; //容量减半
5     for (int i = 0; i < _size; i++) _elem[i] = oldElem[i]; //复制原向量内容
6     delete [] oldElem; //释放原空间
7 }
```

代码2.5 向量内部功能`shrink()`

可见，每次删除操作之后，一旦空间利用率已降至某一阈值以下，该算法随即申请一个容量减半的新数组，将原数组中的元素逐一搬迁至其中，最后将原数组所占空间交还操作系统。这里以25%作为装填因子的下限，但在实际应用中，为避免出现频繁交替扩容和缩容的情况，可以选用更低的阈值，甚至取作0（相当于禁止缩容）。

与`expand()`操作类似，尽管单次`shrink()`操作需要线性量级的时间，但其分摊复杂度亦为 $O(1)$ （习题[2-4]）。实际上`shrink()`过程等效于`expand()`的逆过程，这两个算法相互配合，在不致实质地增加接口操作复杂度的前提下，保证了向量内部空间的高效利用。当然，就单次扩容或缩容操作而言，所需时间的确会高达 $\Omega(n)$ ，因此在对单次操作的执行速度极其敏感的应用场合以上策略并不适用，其中缩容操作甚至可以完全不予考虑。

§ 2.5 常规向量

2.5.1 直接引用元素

与数组直接通过下标访问元素的方式(形如“`A[i]`”)相比，向量ADT所设置的`get()`和`put()`接口都显得不甚自然。毕竟，前一访问方式不仅更为我们所熟悉，同时也更加直观和便捷。那么，在经过封装之后，对向量元素的访问可否沿用数组的方式呢？答案是肯定的。

解决的方法之一就是重载操作符“`[]`”，具体实现如代码2.6所示。

```
1 template <typename T> T& Vector<T>::operator[](Rank r) const //重载下标操作符
2 { return _elem[r]; } // assert: 0 <= r < _size
```

代码2.6 重载向量操作符`[]`

2.5.2 置乱器

■ 置乱算法

可见，经重载后操作符“`[]`”返回的是对数组元素的引用，这就意味着它既可以取代`get()`操作（通常作为赋值表达式的右值），也可以取代`set()`操作（通常作为左值）。例如，采用这种形式，可以简明清晰地描述和实现如代码2.7所示的向量置乱算法。

```
1 template <typename T> void permute(Vector<T>& V) { //随机置乱向量，使各元素等概率出现于每一位置
2     for (int i = V.size(); i > 0; i--) //自后向前
3         swap(V[i - 1], V[rand() % i]); //V[i - 1]与V[0, i)中某一随机元素交换
4 }
```

代码2.7 向量整体置乱算法`permute()`

该算法从待置乱区间的末元素开始，逆序地向前逐一处理各元素。如图2.2(a)所示，对每一个当前元素`V[i - 1]`，先通过调用`rand()`函数在 $[0, i)$ 之间等概率地随机选取一个元素，再令二者互换位置。注意，这里的交换操作`swap()`，隐含了三次基于重载操作符“`[]`”的赋值。

于是如图(b)所示，每经过一步这样的迭代，置乱区间都会向前拓展一个单元。因此经过 $\mathcal{O}(n)$ 步迭代之后，即实现了整个向量的置乱。

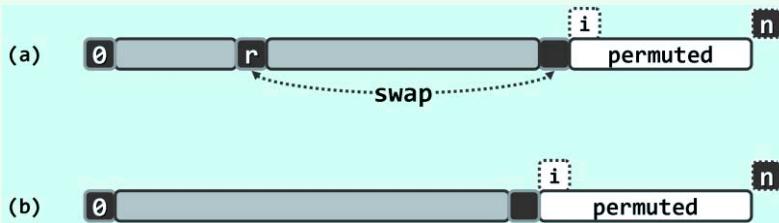


图2.2 向量整体置乱算法`permute()`的迭代过程

在软件测试、仿真模拟等应用中，随机向量的生成都是一项至关重要的基本操作，直接影响到测试的覆盖面或仿真的真实性。从理论上说，使用这里的算法`permute()`，不仅可以枚举出同一向量所有可能的排列，而且能够保证生成各种排列的概率均等（习题[2-6]）。

■ 区间置乱接口

为便于对各种向量算法的测试与比较，这里不妨将以上`permute()`算法封装至向量ADT中，并如代码2.8所示，对外提供向量的置乱操作接口`Vector::unsort()`。

```
1 template <typename T> void Vector<T>::unsort(Rank lo, Rank hi) { //等概率随机置乱向量区间[lo, hi)
2     T* V = _elem + lo; //将子向量_elem[lo, hi)视作另一向量V[0, hi - lo]
3     for (Rank i = hi - lo; i > 0; i--) //自后向前
4         swap(V[i - 1], V[rand() % i]); //将V[i - 1]与V[0, i)中某一元素随机交换
5 }
```

代码2.8 向量区间置乱接口`unsort()`

通过该接口，可以均匀地置乱任一向量区间 $[lo, hi)$ 内的元素，故通用性有所提高。可见，只要将该区间等效地视作另一向量 V ，即可从形式上完整地套用以上`permute()`算法的流程。

尽管如此，还请特别留意代码2.7与代码2.8的细微差异：后者是通过下标，直接访问内部数组的元素；而前者则是借助重载的操作符“`[]`”，通过秩间接地访问向量的元素。

2.5.3 判等器与比较器

从算法的角度来看，“判断两个对象是否相等”与“判断两个对象的相对大小”都是至关重要的操作，它们直接控制着算法执行的分支方向，因此也是算法的“灵魂”所在。在本书中为了以示区别，前者多称作“比对”操作，后者多称作“比较”操作。当然，这两种操作之间既有联系也有区别，不能相互替代。比如，有些对象只能比对但不能比较；反之，支持比较的对象未必支持比对。不过，出于简化的考虑，在很多场合并不需要严格地将二者区分开来。

算法实现的简洁性与通用性，在很大程度上体现于：针对整数等特定数据类型的某种实现，可否推广至可比较或可比对的任何数据类型，而不必关心如何定义以及判定其大小或相等关系。若能如此，我们就可以将比对和比较操作的具体实现剥离出来，直接讨论算法流程本身。

为此，通常可以采用两种方法。其一，将比对操作和比较操作分别封装成通用的判等器和比较器。其二，在定义对应的数据类型时，通过重载“`<`”和“`==`”之类的操作符，给出大小和相等关系的具体定义及其判别方法。本书将主要采用后一方式。为节省篇幅，这里只给出涉及到的比较和判等操作符，读者可以根据实际需要，参照给出的代码加以扩充。

```
1 template <typename T> static bool lt(T* a, T* b) { return lt(*a, *b); } //less than
2 template <typename T> static bool lt(T& a, T& b) { return a < b; } //less than
3 template <typename T> static bool eq(T* a, T* b) { return eq(*a, *b); } //equal
4 template <typename T> static bool eq(T& a, T& b) { return a == b; } //equal
```

代码2.9 重载比较器以便比较对象指针

在一些复杂的数据结构中，内部元素本身的类型可能就是指向其它对象的指针；而从外部更多关注的，则往往是其所指对象的大小。若不加处理而直接根据指针的数值（即被指对象的物理地址）进行比较，则所得结果将毫无意义。

为此，这里不妨通过如代码2.9所示的机制，将这种情况与一般情况予以区分，并且约定在这种情况下，统一按照被指对象的大小做出判断。

2.5.4 无序查找

■ 判等器

代码2.1中`Vector::find(e)`接口，功能语义为“查找与数据对象`e`相等的元素”。这同时也暗示着，向量元素可通过相互比对判等——比如，元素类型`T`或为基本类型，或已重载操作符“`==`”或“`!=`”。这类仅支持比对，但未必支持比较的向量，称作无序向量(`unsorted vector`)。

■ 顺序查找

在无序向量中查找任意指定元素`e`时，因为没有更多的信息可以借助，故在最坏情况下——比如向量中并不包含`e`时——只有在访遍所有元素之后，才能得出查找结论。



图2.3 无序向量的顺序查找

因此不妨如图2.3所示，从末元素起自后向前，逐一取出各个元素并与目标元素`e`进行比对，直至发现与之相等者（查找成功），或者直至检查过所有元素之后仍未找到相等者（查找失败）。这种依次逐个比对的查找方式，称作顺序查找(`sequential search`)。

■ 实现

针对向量的整体或区间，代码2.1分别定义了一个顺序查找操作的入口，其中前者作为特例，可直接通过调用后者而实现。因此，只需如代码2.10所示，实现针对向量区间的查找算法。

```
1 template <typename T> //无序向量的顺序查找：返回最后一个元素e的位置；失败时，返回lo - 1
2 Rank Vector<T>::find(T const& e, Rank lo, Rank hi) const { //assert: 0 <= lo < hi <= _size
3     while ((lo < hi--) && (e != _elem[hi])); //从后向前，顺序查找
4     return hi; //若hi < lo，则意味着失败；否则hi即命中元素的秩
5 }
```

代码2.10 无序向量元素查找接口`find()`

其中若干细微之处，需要体会。比如，当同时有多个命中元素时，本书统一约定返回其中秩最大者——稍后介绍的查找接口`find()`亦是如此——故这里采用了自后向前的查找次序。如此，一旦命中即可立即返回，从而省略掉不必要的比对。另外，查找失败时约定统一返回`-1`。这不仅简化了对查找失败情况的判别，同时也使此时的返回结果更加易于理解——只要假想着在秩为`-1`处植入一个与任何对象都相等的哨兵元素，则返回该元素的秩当且仅当查找失败。

最后还有一处需要留意。`while`循环的控制逻辑由两部分组成，首先判断是否已抵达通配符，再判断当前元素与目标元素是否相等。得益于C/C++语言中逻辑表达式的短路求值特性，在前一判断非真后循环会立即终止，而不致因试图引用已越界的秩(`-1`)而出错。

■ 复杂度

最坏情况下，查找终止于首元素`_elem[lo]`，运行时间为 $\mathcal{O}(hi - lo) = \mathcal{O}(n)$ 。最好情况下，查找命中于末元素`_elem[hi - 1]`，仅需 $\mathcal{O}(1)$ 时间。对于规模相同、内部组成不同的输入，渐进运行时间却有本质区别，故此类算法也称作输入敏感的(`input sensitive`)算法。

2.5.5 插入

■ 实现

按照代码2.1的ADT定义，插入操作`insert(r, e)`负责将任意给定的元素`e`插到任意指定的秩为`r`的单元。整个操作的过程，可具体实现如代码2.11所示。

```
1 template <typename T> //将e作为秩为r元素插入
2 Rank Vector<T>::insert(Rank r, T const& e) { //assert: 0 <= r <= size
3     expand(); //若有必要，扩容
4     for (int i = _size; i > r; i--) _elem[i] = _elem[i-1]; //自后向前，后继元素顺次后移一个单元
5     _elem[r] = e; _size++; //置入新元素并更新容量
6     return r; //返回秩
7 }
```

代码2.11 向量元素插入接口`insert()`

如前所述，插入之前必须首先调用`expand()`算法，核对是否即将溢出；若有必要（图2.4(a)），则加倍扩容（图2.4(b)）。

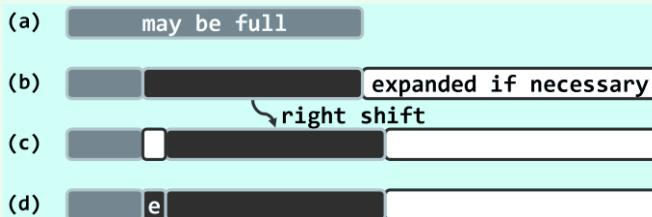


图2.4 向量元素插入操作`insert(r, e)`的过程

为保证数组元素物理地址连续的特性，随后需要将后缀`_elem[r, _size]`（如果非空）整体后移一个单元（图(c)）。这些后继元素自后向前的搬迁次序不能颠倒，否则会因元素被覆盖而造成数据丢失。在单元`_elem[r]`腾出之后，方可将待插入对象`e`置入其中（图(d)）。

■ 复杂度

时间主要消耗于后继元素的后移，线性正比于后缀的长度，故总体为 $O(_size - r + 1)$ 。

可见，新插入元素越靠后（前）所需时间越短（长）。特别地，`r`取最大值`_size`时为最好情况，只需 $O(1)$ 时间；`r`取最小值`0`时为最坏情况，需要 $O(_size)$ 时间。一般地，若插入位置等概率分布，则平均运行时间为 $O(_size) = O(n)$ （习题[2-9]），线性正比于向量的实际规模。

2.5.6 删除

删除操作重载有两个接口，`remove(lo, hi)`用以删除区间`[lo, hi)`内的元素，而`remove(r)`用以删除秩为`r`的单个元素。乍看起来，利用后者即可实现前者：令`r`从`hi - 1`到`lo`递减，反复调用`remove(r)`。不幸的是，这一思路似是而非。

因数组中元素的地址必须连续，故每删除一个元素，所有后继元素都需向前移动一个单元。若后继元素共有 $m = _size - hi$ 个，则对`remove(r)`的每次调用都需移动 m 次；对于整个区间，元素移动的次数累计将达到 $m * (hi - lo)$ ，为后缀长度和待删除区间宽度的乘积。

实际可行的思路恰好相反，应将单元素删除视作区间删除的特例，并基于后者来实现前者。稍后就会看到，如此可将移动操作的总次数控制在 $O(m)$ 以内，而与待删除区间的宽度无关。

■ 区间删除: `remove(lo, hi)`

向量区间删除接口`remove(lo, hi)`，可实现如代码2.12所示。

```
1 template <typename T> int Vector<T>::remove(Rank lo, Rank hi) { //删除区间[lo, hi)
2     if (lo == hi) return 0; //出于效率考虑，单独处理退化情况，比如remove(0, 0)
3     while (hi < _size) _elem[lo++] = _elem[hi++]; // [hi, _size)顺次前移hi - lo个单元
4     _size = lo; //更新规模，直接丢弃尾部[lo, _size = hi)区间
5     shrink(); //若有必要，则缩容
6     return hi - lo; //返回被删除元素的数目
7 }
```

代码2.12 向量区间删除接口`remove(lo, hi)`

设 $[lo, hi)$ 为向量（图2.5(a)）的合法区间（图(b)），则其后缀 $[hi, n)$ 需整体前移 $hi - lo$ 个单元（图(c)）。与插入算法同理，这里后继元素自前向后的移动次序也不能颠倒（习题[2-10]）。

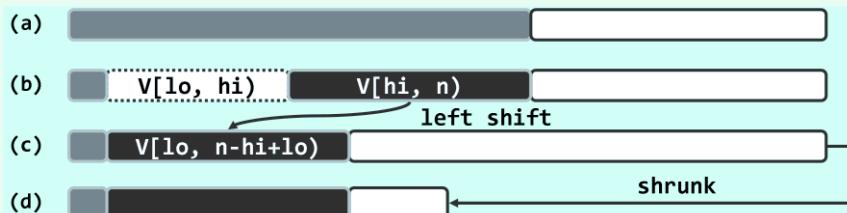


图2.5 向量区间删除操作`remove(lo, hi)`的过程

向量规模更新为 $_size - hi + lo$ 后，还要调用`shrink()`，若有必要则做缩容处理（图(d)）。

■ 单元素删除`remove(r)`

利用以上`remove(lo, hi)`通用接口，通过重载即可实现如下另一同名接口`remove(r)`。

```
1 template <typename T> T Vector<T>::remove(Rank r) { //删除向量中秩为r的元素，0 <= r < size
2     T e = _elem[r]; //备份被删除元素
3     remove(r, r + 1); //调用区间删除算法，等效于对区间[r, r + 1)的删除
4     return e; //返回被删除元素
5 }
```

代码2.13 向量单元素删除接口`remove()`

■ 复杂度

`remove(lo, hi)`的计算成本，主要消耗于后续元素的前移，线性正比于后缀的长度，总体不过 $O(m + 1) = O(_size - hi + 1)$ 。

这与此前的预期完全吻合：区间删除操作所需的时间，应该仅取决于后继元素的数目，而与被删除区间本身的宽度无关。特别地，基于该接口实现的单元素删除接口`remove(r)`需耗时 $O(_size - r)$ 。也就是说，被删除元素在向量中的位置越靠后（前）所需时间越短（长），最好为 $O(1)$ ，最坏为 $O(n) = O(_size)$ 。

■ 错误及意外处理

请注意，上述操作接口对输入都有一定的限制和约定。其中指定的待删除区间，必须落在合法范围 $[0, _size)$ 之内，为此输入参数必须满足 $0 \leq \text{lo} \leq \text{hi} \leq _size$ 。

一般地，输入参数超出接口所约定合法范围的此类问题，都属于典型的错误（error）或意外（exception）。除了以注释的形式加以说明，还应该尽可能对此类情况做更为周全的处理。

尽管如此，本书还是沿用了相对简化的处置方式，将入口参数合法性检查的责任统一交由上层调用例程，这也是出于对本书的重点——算法效率、讲解重点以及叙述简洁——的优先考虑。当然，在充分掌握了本书的内容之后，读者不妨再按照软件工程的规范，就此做进一步的完善。

2.5.7 唯一化

很多应用中，在进一步处理之前都要求数据元素互异。以网络搜索引擎为例，多个计算节点各自获得的局部搜索结果，需首先剔除其中重复的项目，方可合并为一份完整的报告。类似地，所谓向量的唯一化处理，就是剔除其中的重复元素，即表2.1所列deduplicate()接口的功能。

■ 实现

视向量是否有序，该功能有两种实现方式，以下首先介绍针对无序向量的唯一化算法。

```
1 template <typename T> int Vector<T>::deduplicate() { //删除无序向量中重复元素 (高效版)
2     int oldSize = _size; //记录原规模
3     Rank i = 1; //从_elemt[1]开始
4     while (i < _size) //自前向后逐一考查各元素_elemt[i]
5         (find(_elemt[i], 0, i) < 0) ? //在其前缀中寻找与之雷同者 (至多一个)
6             i++ : remove(i); //若无雷同则继续考查其后继，否则删除雷同者
7     return oldSize - _size; //向量规模变化量，即被删除元素总数
8 }
```

代码2.14 无序向量清除重复元素接口deduplicate()

如代码2.14所示，该算法自前向后逐一考查各元素`_elemt[i]`，并通过调用`find()`接口，在其前缀中寻找与之雷同者。若找到，则随即删除；否则，转而考查当前元素的后继。

■ 正确性

算法的正确性由以下不变性保证：

在while循环中，在当前元素的前缀`_elemt[0, i)`内，所有元素彼此互异

初次进入循环时 $i = 1$ ，只有唯一的前驱`_elemt[0]`，故不变性自然满足。

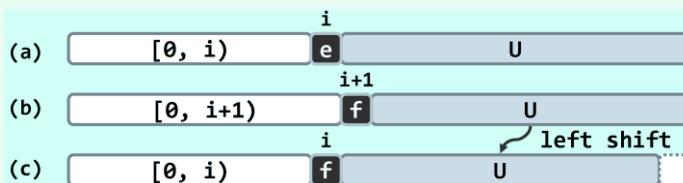


图2.6 无序向量deduplicate()算法原理

一般地如图2.6(a)所示，假设在转至元素`e = _elemt[i]`之前不变性一直成立。于是，经过

针对该元素的一步迭代之后，无非两种结果：

1) 若元素e的前缀`_elem[0, i)`中不含与之雷同的元素，则如图(b)，在做过`i++`之后，新的前缀`_elem[0, i)`将继续满足不变性，而且其规模增加一个单位。

2) 反之，若含存在与e雷同的元素，则由此前一直满足的不变性可知，这样的雷同元素不超过一个。因此如图(c)，在删除e之后，前缀`_elem[0, i)`依然保持不变性。

■ 复杂度

由图2.6(a)和(b)也可看出该算法过程所具有的单调性：

随着循环的不断进行，当前元素的后继持续地严格减少

因此，经过 $n - 2$ 步迭代之后该算法必然终止。

这里所需的时间，主要消耗于`find()`和`remove()`两个接口。根据2.5.4节的结论，前一部分时间应线性正比于查找区间的宽度，即前驱的总数；根据2.5.6节的结论，后一部分时间应线性正比于后继的总数。因此，每步迭代所需时间为 $\mathcal{O}(n)$ ，总体复杂度应为 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

经预排序转换之后，借助2.6.3节将要介绍的相关算法，还可以进一步提高向量唯一化处理的效率（习题[2-12]）。

2.5.8 遍历

■ 功能

在很多算法中，往往需要将向量作为一个整体，对其中所有元素实施某种统一的操作，比如输出向量中的所有元素，或者按照某种运算流程统一修改所有元素的数值（习题[2-13]）。针对此类操作，可为向量专门设置一个遍历接口`traverse()`。

■ 实现

向量的遍历操作接口，可实现如代码2.15所示。

```
1 template <typename T> void Vector<T>::traverse(void (*visit)(T&)) //利用函数指针机制的遍历
2 { for (int i = 0; i < _size; i++) visit(_elem[i]); }
3
4 template <typename T> template <typename VST> //元素类型、操作器
5 void Vector<T>::traverse(VST& visit) //利用函数对象机制的遍历
6 { for (int i = 0; i < _size; i++) visit(_elem[i]); }
```

代码2.15 向量遍历接口`traverse()`

可见，`traverse()`遍历的过程，实质上就是自前向后地逐一对各元素实施同一基本操作。而具体采用何种操作，可通过两种方式指定。前一种方式借助函数指针`*visit()`指定某一函数，该函数只有一个参数，其类型为对向量元素的引用，故通过该函数即可直接访问或修改向量元素。另外，也可以函数对象的形式，指定具体的遍历操作。这类对象的操作符“`()`”经重载之后，在形式上等效于一个函数接口，故此得名。

相比较而言，后一形式的功能更强，适用范围更广。比如，函数对象的形式支持对向量元素的关联修改。也就是说，对各元素的修改不仅可以相互独立地进行，也可以根据某个（些）元素的数值相应地修改另一元素。前一形式虽也可实现这类功能，但要繁琐很多。

■ 实例

在代码2.16中，`Increase<T>()`即是按函数对象形式指定的基本操作，其功能是将作为参数的引用对象的数值加一（假定元素类型`T`可直接递增或已重载操作符`"++"`）。于是可如`increase()`函数那样，以此基本操作做遍历即可使向量内所有元素的数值同步加一。

```
1 template <typename T> struct Increase //函数对象：递增一个T类对象
2   { virtual void operator()(T& e) { e++; } }; //假设T可直接递增或已重载++
3
4 template <typename T> void increase(Vector<T> & V) //统一递增向量中的各元素
5 { V.traverse(Increase<T>()); } //以Increase<T>()为基本操作进行遍历
```

代码2.16 基于遍历实现`increase()`功能

■ 复杂度

遍历操作本身只包含一层线性的循环迭代，故除了向量规模的因素之外，遍历所需时间应线性正比于所统一指定的基本操作所需的时间。比如在上例中，统一的基本操作`Increase<T>()`只需常数时间，故这一遍历的总体时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$ 。

§ 2.6 有序向量

若向量 $S[0, n)$ 中的所有元素不仅按线性次序存放，而且其数值大小也按此次序单调分布，则称作有序向量（sorted vector）。例如，所有学生的学籍记录可按学号构成一个有序向量（学生名单），使用同一跑道的所有航班可按起飞时间构成一个有序向量（航班时刻表），第二十九届奥运会男子跳高决赛中各选手的记录可按最终跳过的高度构成一个（非增）序列（名次表）。与通常的向量一样，有序向量依然不要求元素互异，故通常约定其中的元素自前（左）向后（右）构成一个非降序列，即对任意 $0 \leq i < j < n$ 都有 $S[i] \leq S[j]$ 。

2.6.1 比较器

当然，除了与无序向量一样需要支持元素之间的“判等”操作，有序向量的定义中实际上还隐含了另一更强的先决条件：各元素之间必须能够比较大小。这一条件构成了有序向量中“次序”概念的基础，否则所谓的“有序”将无从谈起。

多数高级程序语言所提供的基本数据类型都满足上述条件，比如C++语言中的整型、浮点型和字符型等，然而字符串、复数、矢量以及更为复杂的类型，则未必直接提供了某种自然的大小比较规则。采用很多方法，都可以使得大小比较操作对这些复杂数据对象可以明确定义并且可行，比如最常见的就是在内部指定某一（些）可比较的数据项，并由此确立比较的规则。这里沿用2.5.3节的约定，假设复杂数据对象已经重载了“`<`”和“`<=`”等操作符。

2.6.2 有序性甄别

作为无序向量的特例，有序向量自然可以沿用无序向量的查找算法。然而，得益于元素之间的有序性，有序向量的查找、唯一化等操作都可更快地完成。因此在实施此类操作之前，都有必要先判断当前向量是否已经有序，以便确定是否可采用更为高效的接口。

```

1 template <typename T> int Vector<T>::disordered() const { //返回向量中逆序相邻元素对的总数
2     int n = 0; //计数器
3     for (int i = 1; i < _size; i++) //逐一检查_size - 1对相邻元素
4         if (_elem[i - 1] > _elem[i]) n++; //逆序则计数
5     return n; //向量有序当且仅当n = 0
6 }

```

代码2.17 有序向量甄别算法`disordered()`

代码2.17即为有序向量的一个甄别算法，其原理与1.1.3节起泡排序算法相同：顺序扫描整个向量，逐一比较每一对相邻元素——向量已经有序，当且仅当它们都是顺序的。

2.6.3 唯一化

相对于无序向量，有序向量中清除重复元素的操作更为重要。正如2.5.7节所指出的，出于效率的考虑，为清除无序向量中的重复元素，一般做法往往是首先将其转化为有序向量。

■ 低效版

```

1 template <typename T> int Vector<T>::uniquify() { //有序向量重复元素剔除算法（低效版）
2     int oldSize = _size; int i = 0; //当前比对元素的秩，起始于首元素
3     while (i < _size - 1) //从前向后，逐一比对各对相邻元素
4         (_elem[i] == _elem[i + 1]) ? remove(i + 1) : i++; //若雷同，则删除后者；否则，转至后一元素
5     return oldSize - _size; //向量规模变化量，即被删除元素总数
6 }

```

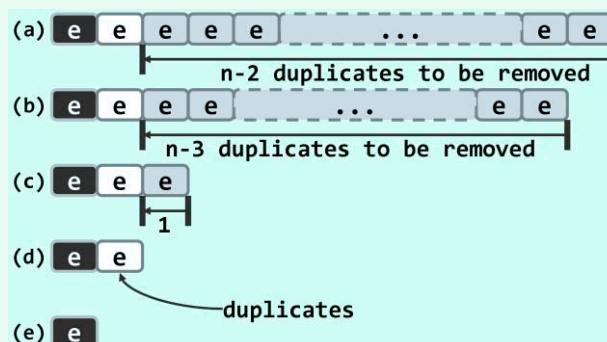
代码2.18 有序向量`uniquify()`接口的平凡实现

唯一化算法可实现如代码2.18所示，其正确性基于如下事实：有序向量中的重复元素必然前后紧邻。于是，可以自前向后地逐一检查各对相邻元素：若二者雷同则调用`remove()`接口删除靠后者，否则转向下一对相邻元素。如此，扫描结束后向量中将不再含有重复元素。

这里的运行时间，主要消耗于`while`循环，共需迭代`_size - 1 = n - 1`步。此外，在最坏情况下，每次循环都需执行一次`remove()`操作，由2.3节的分析结论，其复杂度线性正比于被删除元素的后继元素总数。因此如图2.7所示，当大量甚至所有元素均雷同时，用于所有这些`remove()`操作的时间总量将高达：

$$\begin{aligned}
 & (n - 2) + (n - 3) + \dots + 2 + 1 \\
 &= O(n^2)
 \end{aligned}$$

这一效率竟与向量未排序时相同，说明该方法未能充分利用此时向量的有序性。

图2.7 低效版`uniquify()`算法的最坏情况

■ 改进思路

稍加分析即不难看出，以上唯一化过程复杂度过高的根源是，在对`remove()`接口的各次调用中，同一元素可能作为后继元素向前移动多次，且每次仅移动一个单元。

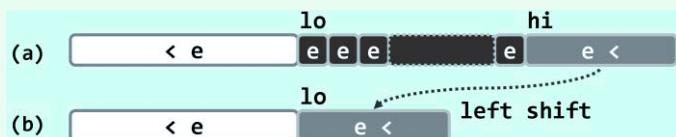


图2.8 有序向量中的重复元素可批量删除

如上所言，此时的每一组重复元素，都必然前后紧邻地集中分布。因此如图2.8所示，可以区间为单位成批地删除前后紧邻的各组重复元素，并将其后继元素（若存在）统一地大跨度前移。具体地，若 $V[lo, hi)$ 为一组紧邻的重复元素，则所有的后继元素 $V[hi, _size)$ 可统一地整体前移 $hi - lo - 1$ 个单元。

■ 高效版

按照上述思路，可如代码2.19所示得到唯一化算法的新版本。

```
1 template <typename T> int Vector<T>::uniquify() { //有序向量重复元素剔除算法 (高效版)
2     Rank i = 0, j = 0; //各对互异“相邻”元素的秩
3     while (++j < _size) //逐一扫描，直至末元素
4         if (_elem[i] != _elem[j]) //跳过雷同者
5             _elem[++i] = _elem[j]; //发现不同元素时，向前移至紧邻于前者右侧
6     _size = ++i; shrink(); //直接截除尾部多余元素
7     return j - i; //向量规模变化量，即被删除元素总数
8 }
```

代码2.19 有序向量`uniquify()`接口的高效实现

图2.9针对一个有序向量的实例，完整地给出了该算法对应的执行过程。

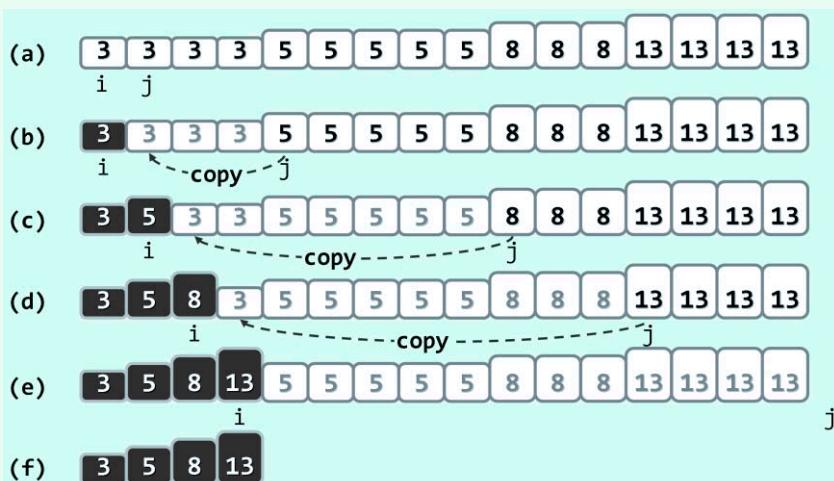


图2.9 在有序向量中查找互异的相邻元素

第3章

列表

上一章介绍的向量结构中，各数据项的物理存放位置与逻辑次序完全对应，故可通过秩直接访问对应的元素，此即所谓“循秩访问”（**call-by-rank**）。这种访问方式，如同根据具体的城市名、街道名和门牌号，直接找到某人。本章将要介绍的列表，与向量同属序列结构的范畴，其中的元素也构成一个线性逻辑次序；但与向量极为不同的是，元素的物理地址可以任意。

为保证对列表元素访问的可行性，逻辑上互为前驱和后继的元素之间，应维护某种索引关系。这种索引关系，可抽象地理解为被索引元素的位置（**position**），故列表元素是“循位置访问”（**call-by-position**）的；也可形象地理解为通往被索引元素的链接（**link**），故亦称作“循链接访问”（**call-by-link**）。这种访问方式，如同通过你的某位亲朋，找到他/她的亲朋、亲朋的亲朋、....。注意，向量中的秩同时对应于逻辑和物理次序，而位置仅对应于逻辑次序。

本章的讲解，将围绕列表结构的高效实现逐步展开，包括其ADT接口规范以及对应的算法。此外还将针对有序列表，系统地介绍排序等经典算法，并就其性能做一分析和对比。

§ 3.1 从向量到列表

不同数据结构内部的存储与组织方式各异，其操作接口的使用方式及时空性能也不尽相同。在设计或选用数据结构时，应从实际应用的需求出发，先确定功能规范及性能指标。比如，引入列表结构的目的，就在于弥补向量结构在解决某些应用问题时，在功能及性能方面的不足。二者之间的差异，表面上体现于对外的操作方式，但根源则在于其内部存储方式的不同。

3.1.1 从静态到动态

数据结构支持的操作，通常无非静态和动态两类：前者仅从中获取信息，后者则会修改数据结构的局部甚至整体。以第2章基于数组实现的向量结构为例，其**size()**和**get()**等静态操作均可在常数时间内完成，而**insert()**和**remove()**等动态操作却都可能需要线性时间。究其原因，在于“各元素物理地址连续”的约定——此即所谓的“静态存储”策略。

得益于这种策略，可在 $O(1)$ 时间内由秩确定向量元素的物理地址；但反过来，在添加（删除）元素之前（之后），又不得不移动 $O(n)$ 个后继元素。可见，尽管如此可使静态操作的效率达到极致，但就动态操作而言，局部的修改可能引起大范围甚至整个数据结构的调整。

列表（**list**）结构尽管也要求各元素在逻辑上具有线性次序，但对其物理地址却未作任何限制——此即所谓“动态存储”策略。具体地，在其生命期内，此类数据结构将随着内部数据的需要，相应地分配或回收局部的数据空间。如此，元素之间的逻辑关系得以延续，却不必与其物理次序相关。作为补偿，此类结构将通过指针或引用等机制，来确定各元素的实际物理地址。

例如，链表（**linked list**）就是一种典型的动态存储结构。其中的数据，分散为一系列称作节点（**node**）的单位，节点之间通过指针相互索引和访问。为了引入新节点或删除原有节点，只需在局部，调整少量相关节点之间的指针。这就意味着，采用动态存储策略，至少可以大大降低动态操作的成本。

3.1.2 由秩到位置

改用以上动态存储策略之后，在提高动态操作效率的同时，却又不得不舍弃原静态存储策略中循秩访问的方式，从而造成静态操作性能的下降。

以采用动态存储策略的线性结构（比如链表）为例。尽管按照逻辑次序，每个数据元素依然具有秩这一指标，但为了访问秩为 r 的元素，我们只能顺着相邻元素之间的指针，从某一端出发逐个扫描各元素，经过 r 步迭代后才能确定该元素的物理存储位置。这意味着，原先只需 $O(1)$ 时间的静态操作，此时的复杂度也将线性正比于被访问元素的秩，在最坏情况下等于元素总数 n ；即便在各元素被访问概率相等的情况下，平均而言也需要 $O(n)$ 时间。

对数据结构的访问方式，应与其存储策略相一致。此时，既然继续延用循秩访问的方式已非上策，就应更多地习惯于通过位置，来指代并访问动态存储结构中的数据元素。与向量中秩的地位与功能类似，列表中的位置也是指代各数据元素的一个标识性指标，借助它以便捷地（比如在常数时间内）得到元素的物理存储地址。各元素的位置，通常可表示和实现为联接于元素之间的指针或引用。因此，基于此类结构设计算法时，应更多地借助逻辑上相邻元素之间的位置索引，以实现对目标元素的快速定位和访问，并进而提高算法的整体效率。

3.1.3 列表

与向量一样，列表也是由具有线性逻辑次序的一组元素构成的集合：

$$L = \{ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \}$$

列表是链表结构的一般化推广，其中的元素称作节点（node），分别由特定的位置或链接指代。与向量一样，在元素之间，也可定义前驱、直接前驱，以及后继、直接后继等关系；相对于任意元素，也有定义对应的前缀、后缀等子集。

§3.2 接口

如上所述，作为列表的基本组成单位，列表节点除需保存对应的数据项，还应记录其前驱和后继的位置，故需将这些信息及相关操作组成列表节点对象，然后参与列表的构建。

本节将给出列表节点类与列表类的接口模板类描述，稍后逐一讲解各接口的具体实现。

3.2.1 列表节点

■ ADT接口

作为一种抽象数据类型，列表节点对象应支持以下操作接口。

表3.1 列表节点ADT支持的操作接口

操作接口	功能
data()	当前节点所存数据对象
pred()	当前节点前驱节点的位置
succ()	当前节点后继节点的位置
insertAsPred(e)	插入前驱节点，存入被引用对象e，返回新节点位置
insertAsSucc(e)	插入后继节点，存入被引用对象e，返回新节点位置

■ ListNode模板类

按照表3.1所定义的ADT接口，可定义列表节点模板类如代码3.1所示。出于简洁与效率的考虑，这里并未对ListNode对象做封装处理。列表节点数据项的类型，通过模板参数T指定。

```

1 typedef int Rank; //秩
2 #define ListNodePosi(T) ListNode<T>* //列表节点位置
3
4 template <typename T> struct ListNode { //列表节点模板类(以双向链表形式实现)
5 // 成员
6     T data; ListNodePosi(T) pred; ListNodePosi(T) succ; //数值、前驱、后继
7 // 构造函数
8     ListNode() {} //针对header和trailer的构造
9     ListNode( T e, ListNodePosi(T) p = NULL, ListNodePosi(T) s = NULL)
10    : data(e), pred(p), succ(s) {} //默认构造器
11 // 操作接口
12     ListNodePosi(T) insertAsPred(T const& e); //紧靠当前节点之前插入新节点
13     ListNodePosi(T) insertAsSucc(T const& e); //紧随当前节点之后插入新节点
14 };

```

代码3.1 列表节点模板类^①

每个节点都存有数据对象**data**。为保证叙述简洁，在不致歧义的前提下，本书将不再区分节点及其对应的**data**对象。此外，每个节点还设有指针**pred**和**succ**，分别指向其前驱和后继。

为了创建一个列表节点对象，只需根据所提供的参数，分别设置节点内部的各个变量。其中前驱、后继节点的位置指针若未予指定，则默认取作NULL。

3.2.2 列表

■ ADT接口

作为一种抽象数据类型，列表对象应支持以下操作接口。

表3.2 列表ADT支持的操作接口

操作接口	功能	适用对象
size()	报告列表当前的规模(节点总数)	列表
first()、last()	返回首、末节点的位置	列表
insertAsFirst(e) insertAsLast(e)	将e当作首、末节点插入	列表
insertBefore(p, e) insertAfter(p, e)	将e当作节点p的直接前驱、后继插入	列表

^① 请注意，这里所“定义”的**ListNodePosi(T)**并非真正意义上“列表节点位置”类型。

巧合的是，就在本书第1版即将付印之际，C++11标准终于被ISO接纳。

新标准所拓展的特性之一，就是对模板别名(**template alias**)等语法形式的支持。因此可以期望在不久的将来，C++编译器将能够支持如下更为直接和简明的描述和实现：

```
template <typename T> typedef ListNode<T>* ListNodePosi;
```

操作接口	功能	适用对象
remove(p)	删除位置p处的节点，返回其数值	列表
disordered()	判断所有节点是否已按非降序排列	列表
sort()	调整各节点的位置，使之按非降序排列	列表
find(e)	查找目标元素e，失败时返回NULL	列表
search(e)	查找目标元素e，返回不大于e且秩最大的节点	有序列表
deduplicate()	剔除重复节点	列表
uniquify()	剔除重复节点	有序列表
traverse()	遍历并统一处理所有节点，处理方法由函数对象指定	列表

请留意用以指示插入和删除操作位置的节点p。这里约定，它或者在此前经查找已经确定，或者从此前的其它操作返回或沿用。这些也是列表类结构的典型操作方式。

这里也设置一个**disordered()**接口，以判断列表是否已经有序。同时，也分别针对有序和无序列表，提供了去重操作的两个版本（**deduplicate()**和**uniquify()**），以及查找操作的两个版本（**find()**和**search()**）。与向量一样，有序列表的唯一化，比无序列表效率更高。然而正如我们将要看到的，由于只能通过位置指针以局部移动的方式访问节点，尽管有序列表中节点在逻辑上始终按照大小次序排列，其查找操作的效率并没有实质改进（习题[3-1]）。

■ List模板类

按照表3.2定义的ADT接口，可定义List模板类如下。

```

1 #include "listNode.h" //引入列表节点类
2
3 template <typename T> class List { //列表模板类
4
5 private:
6     int _size; ListNodePosi(T) header; ListNodePosi(T) trailer; //规模、头哨兵、尾哨兵
7
8 protected:
9     void init(); //列表创建时的初始化
10    int clear(); //清除所有节点
11    void copyNodes(ListNodePosi(T), int); //复制列表中自位置p起的n项
12    void merge(ListNodePosi(T)&, int, List<T>&, ListNodePosi(T), int); //有序列表区间归并
13    void mergeSort(ListNodePosi(T)&, int); //对从p开始连续的n个节点归并排序
14    void selectionSort(ListNodePosi(T), int); //对从p开始连续的n个节点选择排序
15    void insertionSort(ListNodePosi(T), int); //对从p开始连续的n个节点插入排序
16
17 public:
18 // 构造函数
19     List() { init(); } //默认
20     List(List<T> const& L); //整体复制列表L
21     List(List<T> const& L, Rank r, int n); //复制列表L中自第r项起的n项
22     List(ListNodePosi(T) p, int n); //复制列表中自位置p起的n项

```

```

23 // 析构函数
24 ~List(); //释放(包含头、尾哨兵在内的)所有节点
25 // 只读访问接口
26 Rank size() const { return _size; } //规模
27 bool empty() const { return _size <= 0; } //判空
28 T& operator[](int r) const; //重载，支持循秩访问(效率低)
29 ListNodePosi(T) first() const { return header->succ; } //首节点位置
30 ListNodePosi(T) last() const { return trailer->pred; } //末节点位置
31 bool valid(ListNodePosi(T) p) //判断位置p是否对外合法
32 { return p && (trailer != p) && (header != p); } //将头、尾节点等同于NULL
33 int disordered() const; //判断列表是否已排序
34 ListNodePosi(T) find(T const& e) const //无序列表查找
35 { return find(e, _size, trailer); }
36 ListNodePosi(T) find(T const& e, int n, ListNodePosi(T) p) const; //无序区间查找
37 ListNodePosi(T) search(T const& e) const //有序列表查找
38 { return search(e, _size, trailer); }
39 ListNodePosi(T) search(T const& e, int n, ListNodePosi(T) p) const; //有序区间查找
40 ListNodePosi(T) selectMax(ListNodePosi(T) p, int n); //在p及其前n-1个后继中选出最大者
41 ListNodePosi(T) selectMax() { return selectMax(header->succ, _size); } //整体最大者
42 // 可写访问接口
43 ListNodePosi(T) insertAsFirst(T const& e); //将e当作首节点插入
44 ListNodePosi(T) insertAsLast(T const& e); //将e当作末节点插入
45 ListNodePosi(T) insertBefore(ListNodePosi(T) p, T const& e); //将e当作p的前驱插入
46 ListNodePosi(T) insertAfter(ListNodePosi(T) p, T const& e); //将e当作p的后继插入
47 T remove(ListNodePosi(T) p); //删除合法位置p处的节点，返回被删除节点
48 void merge(List<T> & L) { merge(first(), size, L, L.first(), L._size); } //全列表归并
49 void sort(ListNodePosi(T) p, int n); //列表区间排序
50 void sort() { sort(first(), _size); } //列表整体排序
51 int deduplicate(); //无序去重
52 int uniquify(); //有序去重
53 void reverse(); //前后倒置(习题)
54 // 遍历
55 void traverse(void (*)(T&)); //遍历，依次实施visit操作(函数指针，只读或局部性修改)
56 template <typename VST> //操作器
57 void traverse(VST&); //遍历，依次实施visit操作(函数对象，可全局性修改)
58 }; //List

```

由代码3.2可见，列表结构的实现方式与第2章的向量结构颇为相似：通过模板参数T指定列表元素的类型（同时亦为代码3.1中列表节点数据项的类型）；在内部设置私有变量以记录当前规模等状态信息；基于多种排序算法提供统一的sort()接口，以将列表转化为有序列表。

以下，分别介绍列表的内部结构、基本接口，以及主要算法的具体实现。

§ 3.3 列表

3.3.1 头、尾节点

`List`对象的内部组成及逻辑结构如图3.1所示，其中私有的头节点（`header`）和尾节点（`trailer`）始终存在，但对外并不可见。对外部可见的数据节点如果存在，则其中的第一个和最后一个节点分别称作首节点（`first node`）和末节点（`last node`）。



图3.1 首(末)节点是头(尾)节点的直接后继(前驱)

就内部结构而言，头节点紧邻于首节点之前，尾节点紧邻于末节点之后。这类经封装之后从外部不可见的节点，称作哨兵节点（`sentinel node`）。由代码3.2中`List::valid()`关于合法节点位置的判别准则可见，此处的两个哨兵节点从外部被等效地视作NULL。

设置哨兵节点之后，对于从外部可见的任一节点而言，其前驱和后继在列表内部都必然存在，故可简化算法的描述与实现。比如，在代码3.2中为实现`first()`和`last()`操作，只需直接返回`header->succ`或`trailer->pred`。此外更重要地，哨兵节点的引入，也使得相关算法不必再对各种边界退化情况做专门的处理，从而避免出错的可能，我们稍后将对此有更实际的体会。

尽管哨兵节点也需占用一定的空间，但只不过是常数规模，其成本远远低于由此带来的便利。

3.3.2 默认构造方法

创建`List`对象时，默认构造方法将调用如代码3.3所示的统一初始化过程`init()`，在列表内部创建一对头、尾哨兵节点，并适当地设置其前驱、后继指针构成一个双向链表。

```

1 template <typename T> void List<T>::init() { //列表初始化，在创建列表对象时统一调用
2     header = new ListNode<T>; //创建头哨兵节点
3     trailer = new ListNode<T>; //创建尾哨兵节点
4     header->succ = trailer; header->pred = NULL;
5     trailer->pred = header; trailer->succ = NULL;
6     _size = 0; //记录规模
7 }
  
```

代码3.3 列表类内部方法`init()`

如图3.2所示，该链表对外的有效部分初始为空，哨兵节点对外不可见，此后引入的新节点都将陆续插入于这一对哨兵节点之间。



图3.2 刚创建的List对象

在列表的其它构造方法中，内部变量的初始化过程与此相同，因此都可统一调用`init()`过程。该过程仅涉及常数次基本操作，共需运行常数时间。

3.3.3 由秩到位置的转换

鉴于偶尔可能需要通过秩来指定列表节点，可通过重载操作符“[]”，提供一个转换接口。

```
1 template <typename T> //重载下标操作符，以通过秩直接访问列表节点（虽方便，效率低，需慎用）
2 T& List<T>::operator[](int r) const { //assert: 0 <= r < size
3     ListNodePosi(T) p = first(); //从首节点出发
4     while (0 < r--) p = p->succ; //顺数第r个节点即是
5     return p->data; //目标节点，返回其中所存元素
6 }
```

代码3.4 重载列表类的下标操作符

具体地如代码3.4所示，为将任意指定的秩r转换为列表中对应的元素，可从首节点出发，顺着后继指针前进r步。只要秩r合法，该算法的正确性即一目了然。其中每步迭代仅需常数时间，故该算法的总体运行时间应为 $\mathcal{O}(r + 1)$ ，线性正比于目标节点的秩。

相对于向量同类接口的 $\mathcal{O}(1)$ 复杂度，列表的这一效率十分低下——其根源在于，列表元素的存储和访问方式已与向量截然不同。诚然，当r大于n/2时，从trailer出发沿pred指针逆行查找，可以在一定程度上减少迭代次数，但就总体的平均效率而言，这一改进并无实质意义。

3.3.4 查找

■ 实现

在代码3.2中，列表ADT针对整体和区间查找，重载了操作接口find(e)和find(e, p, n)。其中，前者作为特例，可以直接调用后者。因此，只需如代码3.5所示，实现后一接口。

```
1 template <typename T> //在无序列表内节点p（可能是trailer）的n个（真）前驱中，找到等于e的最后者
2 ListNodePosi(T) List<T>::find(T const& e, int n, ListNodePosi(T) p) const { //0<=n<=rank(p)<_size
3     while (0 < n--) //对于p的最近的n个前驱，从右向左
4         if (e == (p = p->pred)->data) return p; //逐个比对，直至命中或范围越界
5     return NULL; //p超出左边界意味着区间内不含e，查找失败
6 } //失败时，返回NULL
```

代码3.5 无序列表元素查找接口find()

■ 复杂度

以上算法的思路及过程，与无序向量的顺序查找算法Vector::find()（代码2.10）相仿，故时间复杂度也应是 $\mathcal{O}(n)$ ，线性正比于查找区间的宽度。

3.3.5 插入

■ 接口

为将节点插至列表，可视具体要求的不同，在代码3.6所提供的多种接口中灵活选用。

```
1 template <typename T> ListNodePosi(T) List<T>::insertAsFirst(T const& e)
2 { _size++; return header->insertAsSucc(e); } //e当作首节点插入
3
```

```

4 template <typename T> ListNodePosi(T) List<T>::insertAsLast(T const& e)
5 { _size++; return trailer->insertAsPred(e); } //e当作末节点插入
6
7 template <typename T> ListNodePosi(T) List<T>::insertBefore(ListNodePosi(T) p, T const& e)
8 { _size++; return p->insertAsPred(e); } //e当作p的前驱插入
9
10 template <typename T> ListNodePosi(T) List<T>::insertAfter(ListNodePosi(T) p, T const& e)
11 { _size++; return p->insertAsSucc(e); } //e当作p的后继插入

```

代码3.6 列表节点插入接口

可见，这些接口的实现，都可转化为列表节点对象的前插入或后插入接口。

■ 前插入

将新元素e作为当前节点的前驱插至列表的过程，可描述和实现如代码3.7所示。

```

1 template <typename T> //将e紧靠当前节点之前插入于当前节点所属列表(设有哨兵头节点header)
2 ListNodePosi(T) List<T>::insertAsPred(T const& e) {
3     ListNodePosi(T) x = new ListNode(e, pred, this); //创建新节点
4     pred->succ = x; pred = x; //设置正向链接
5     return x; //返回新节点的位置
6 }

```

代码3.7 ListNode::insertAsPred()算法

图3.3给出了整个操作的具体过程。插入新节点之前，列表局部的当前节点及其前驱如图(a)所示。该算法首先如图(b)所示创建新节点new，构造函数同时将其数据项置为e，并令其后继链接succ指向当前节点，令其前驱链接pred指向当前节点的前驱节点。随后如图(c)所示，使new成为当前节点前驱节点的后继，使new成为当前节点的前驱（次序不能颠倒）。最终如图(d)所示，经过如此调整，新节点即被顺利地插至列表的这一局部。

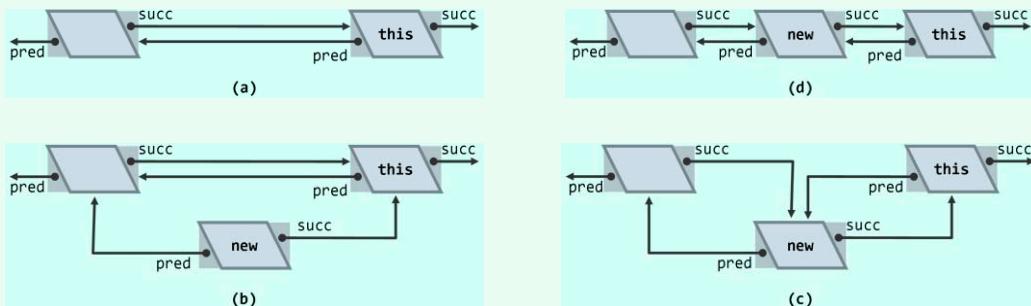


图3.3 ListNode::insertAsPred()算法

请注意，列表规模记录的更新由代码3.6中的上层调用者负责。另外，得益于头哨兵节点的存在，即便当前节点为列表的首节点，其前驱也如图(a)所示必然存在，故不必另做特殊处理。当然，在当前节点即首节点时，前插入接口等效于List::insertAsFirst()。

■ 后插入

将新元素e作为当前节点的后继插至列表的过程，可描述和实现如代码3.8所示。

```
1 template <typename T> //将e紧随当前节点之后插入于当前节点所属列表(设有哨兵尾节点trailer)
2 ListNodePosi(T) ListNode<T>::insertAsSucc(T const& e) {
3     ListNodePosi(T) x = new ListNode(e, this, succ); //创建新节点
4     succ->pred = x; succ = x; //设置逆向链接
5     return x; //返回新节点的位置
6 }
```

代码3.8 ListNode::insertAsSucc()算法

后插入的操作过程以及最终效果与前插入完全对称，不再赘述。

■ 复杂度

上述两种插入操作过程，仅涉及局部的两个原有节点和一个新节点，且不含任何迭代或递归。若假设当前节点已经定位，不计入此前的查找所消耗的时间，则它们都可在常数时间内完成。

3.3.6 基于复制的构造

与向量一样，列表的内部结构也是动态创建的，故利用默认的构造方法并不能真正地完成新列表的复制创建。为此，需要专门编写相应的构造方法，通过复制某一已有列表来构造新列表。

■ copyNodes()

尽管这里提供了多种形式，以允许对原列表的整体或局部复制，但其实质过程均大同小异，都可概括和转化为如代码3.9所示的底层内部方法copyNodes()。在输入参数合法的前提下，copyNodes()首先调用init()方法，创建头、尾哨兵节点并做相应的初始化处理，然后自p所指节点起，从原列表中取出n个相邻的节点，并逐一作为末节点插至新列表中。

```
1 template <typename T> //列表内部方法：复制列表中自位置p起的n项
2 void List<T>::copyNodes(ListNodePosi(T) p, int n) { //p合法，且至少有n-1个真后继节点
3     init(); //创建头、尾哨兵节点并做初始化
4     while(n--) { insertAsLast(p->data); p = p->succ; } //将起自p的n项依次作为末节点插入
5 }
```

代码3.9 列表类内部方法copyNodes()

根据此前的分析，init()操作以及各步迭代中的插入操作均只需常数时间，故copyNodes()过程总体的运行时间应为 $\mathcal{O}(n + 1)$ ，线性正比于待复制列表区间的长度n。

■ 基于复制的构造

如代码3.10所示，基于上述copyNodes()方法可以实现多种接口，通过复制已有列表的区间或整体，构造出新列表。其中，为了复制列表L中自秩r起的n个相邻节点，List(L, r, n)需借助重载后的下标操作符，找到待复制区间起始节点的位置，然后再以此节点作为参数调用copyNodes()。根据3.3.3节的分析结论，需要花费 $\mathcal{O}(r + 1)$ 的时间才能将r转换为起始节点的位置，故该复制接口的总体复杂度应为 $\mathcal{O}(r + n + 1)$ ，线性正比于被复制节点的最高秩。由此也可再次看出，在诸如列表之类采用动态存储策略的结构中，循秩访问远非有效的方式。

第4章

栈与队列

本章将定制并实现更加基本，且更为常用的两类数据结构——栈与队列。与此前介绍的向量和列表一样，它们也属于线性序列结构，故其中存放的数据对象之间也具有线性次序。相对于一般的序列结构，栈与队列的数据操作范围仅限于逻辑上的特定某端。然而，得益于其简洁性与规范性，它们既成为构建更复杂、更高级数据结构的基础，同时也是算法设计的基本出发点，甚至常常作为标准配置的基本数据结构以硬件形式直接实现。因此无论就工程或理论而言，其基础性地位都是其它结构无法比拟的。

在信息处理领域，栈与队列的身影随处可见。许多程序语言本身就是建立于栈结构之上，无论PostScript或者Java，其实时运行环境都是基于栈结构的虚拟机。再如，网络浏览器多会将用户最近访问过的地址组织为一个栈。这样，用户每访问一个新页面，其地址就会被存放至栈顶；而用户每按一次“后退”按钮，即可沿相反的次序返回此前刚访问过的页面。类似地，主流的文本编辑器也大都支持编辑操作的历史记录功能，用户的编辑操作被依次记录在一个栈中。一旦出现误操作，用户只需按下“撤销”按钮，即可取消最近一次操作并回到此前的编辑状态。

在需要公平且经济地对各种自然或社会资源做管理或分配的场合，无论是调度银行和医院的服务窗口，还是管理轮耕的田地和轮伐的森林，队列都可大显身手。甚至计算机及其网络自身内部的各种计算资源，无论是多进程共享的CPU时间，还是多用户共享的打印机，也都需要借助队列结构实现合理和优化的分配。

相对于向量和列表，栈与队列的外部接口更为简化和紧凑，故亦可视作向量与列表的特例，因此C++的继承与封装机制在此可以大显身手。得益于此，本章的重点将不再拘泥于对数据结构内部实现机制的展示，并转而更多地从其外部特性出发，结合若干典型实际问题介绍栈与队列的具体应用。

在栈的应用方面，本章将在1.4节的基础上，结合函数调用栈的机制介绍一般函数调用的实现方式与过程，并将其推广至递归调用。然后以降低空间复杂度为目标为线索，介绍通过显式地维护栈结构解决应用问题的典型方法和基本技巧。此外，还将着重介绍如何利用栈结构，实现基于试探回溯策略的高效搜索算法。在队列的应用方面，本章将介绍如何实现基于轮值策略的通用循环分配器，并以银行窗口服务为例实现基本的调度算法。

§ 4.1 栈

86

4.1.1 ADT接口

■ 入栈与出栈

栈（stack）是存放数据对象的一种特殊容器，其中的数据元素按线性的逻辑次序排列，故也可定义首、末元素。不过，尽管栈结构也支持对象的插入和删除操作，但其操作的范围仅限于栈的某一特定端。也就是说，若约定新的元素只能从某一端插入其中，则反过来也只能从这一端删除已有的元素。禁止操作的另一端，称作盲端。



图4.1 一摞椅子即是一个栈

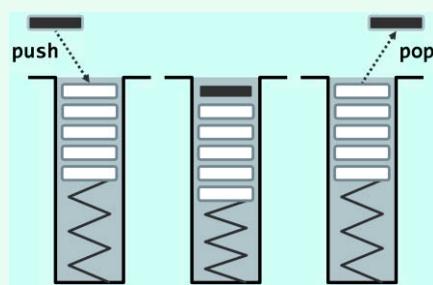


图4.2 栈操作

如图4.1所示，数把椅子叠成一摞即可视作一个栈。为维持这一放置形式，对该栈可行的操作只能在其顶部实施：新的椅子只能叠放到最顶端；反过来，只有最顶端的椅子才能被取走。因此比照这类实例，栈中可操作的一端更多地称作栈顶（stack top），而另一无法直接操作的盲端则更多地称作栈底（stack bottom）。

作为抽象数据类型，栈所支持的操作接口可归纳为表4.1。其中除了引用栈顶的top()等操作外，如图4.2所示，最常用的插入与删除操作分别称作入栈（push）和出栈（pop）。

■ 后进先出

由以上关于栈操作位置的约定和限制不难看出，栈中元素接受操作的次序必然始终遵循所谓“后进先出”（last-in-first-out, LIFO）的规律：从栈结构的整个生命期来看，更晚（早）出栈的元素，应为更早（晚）入栈者；反之，更晚（早）入栈者应更早（晚）出栈。

4.1.2 操作实例

表4.2给出了一个存放整数的栈从被创建开始，按以上接口实施一系列操作的过程。

表4.2 栈操作实例

操作	输出	栈（左侧为栈顶）	操作	输出	栈（左侧为栈顶）
Stack()			push(11)		11 3 7 5
empty()	true		size()	4	11 3 7 5
push(5)		5	push(6)		6 11 3 7 5
push(3)		3 5	empty()	false	6 11 3 7 5
pop()	3	5	push(7)		7 6 11 3 7 5
push(7)		7 5	pop()	7	6 11 3 7 5
push(3)		3 7 5	pop()	6	11 3 7 5
top()	3	3 7 5	top()	11	11 3 7 5
empty()	false	3 7 5	size()	4	11 3 7 5

4.1.3 Stack模板类

既然栈可视作序列的特例，故只要将栈作为向量的派生类，即可利用C++的继承机制，基于2.2.3节定义的向量模板类实现栈结构。当然，这里需要按照栈的习惯，对各接口重新命名。

按照表4.1所列的ADT接口，可描述并实现Stack模板类如代码4.1所示。

```

1 #include "../Vector/Vector.h" //以向量为基类，派生出栈模板类
2 template <typename T> class Stack: public Vector<T> { //将向量的首/末端作为栈底/顶
3 public: //size()、empty()以及其它开放接口，均可直接沿用
4     void push(T const& e) { insert(size(), e); } //入栈：等效于将新元素作为向量的末元素插入
5     T pop() { return remove(size() - 1); } //出栈：等效于删除向量的末元素
6     T& top() { return (*this)[size() - 1]; } //取顶：直接返回向量的末元素
7 };

```

代码4.1 Stack模板类

既然栈操作都限制于向量的末端，参与操作的元素没有任何后继，故由2.5.5节和2.5.6节的分析结论可知，以上栈接口的时间复杂度均为常数。

套用以上思路，也可直接基于3.2.2节的List模板类派生出Stack类（习题[4-1]）。

§ 4.2 栈与递归

习题[1-17]指出，递归算法所需的空间量，主要决定于最大递归深度。在达到这一深度的时刻，同时活跃的递归实例达到最多。那么，操作系统具体是如何实现函数（递归）调用的？如何记录调用与被调用函数（递归）实例之间的关系？如何实现函数（递归）调用的返回？又是如何维护同时活跃的所有函数（递归）实例的？所有这些问题的答案，都可归结于栈。

4.2.1 函数调用栈

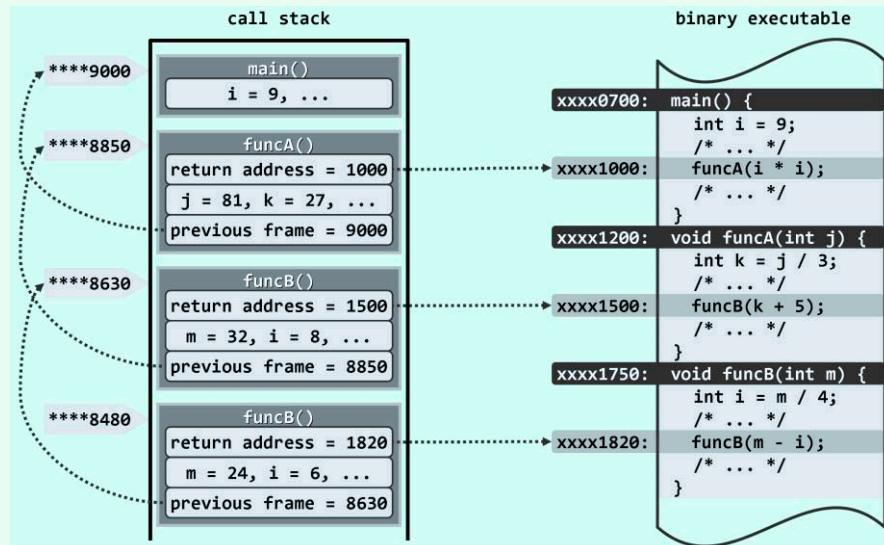


图4.3 函数调用栈实例：主函数main()调用funcA()，funcA()调用funcB()，funcB()再自我调用

在Windows等大部分操作系统中，每个运行中的二进制程序都配有一个调用栈（call stack）或执行栈（execution stack）。借助调用栈可以跟踪属于同一程序的所有函数，记录它们之间的相互调用关系，并保证在每一调用实例执行完毕之后，可以准确地返回。

■ 函数调用

如图4.3所示，调用栈的基本单位是帧（frame）。每次函数调用时，都会相应地创建一帧，记录该函数实例在二进制程序中的返回地址（return address），以及局部变量、传入参数等，并将该帧压入调用栈。若在该函数返回之前又发生新的调用，则同样地要将与新函数对应的一帧压入栈中，成为新的栈顶。函数一旦运行完毕，对应的帧随即弹出，运行控制权将被交还给该函数的上层调用函数，并按照该帧中记录的返回地址确定在二进制程序中继续执行的位置。

在任一时刻，调用栈中的各帧，依次对应于那些尚未返回的调用实例，亦即当时的活跃函数实例（active function instance）。特别地，位于栈底的那帧必然对应于入口主函数main()，若它从调用栈中弹出，则意味着整个程序的运行结束，此后控制权将交还给操作系统。

仿照递归跟踪法，程序执行过程出现过的函数实例及其调用关系，也可构成一棵树，称作该程序的运行树。任一时刻的所有活跃函数实例，在调用栈中自底到顶，对应于运行树中从根节点到最新活跃函数实例的一条调用路径。

此外，调用栈中各帧还需存放其它内容。比如，因各帧规模不一，它们还需记录前一帧的起始地址，以保证其出栈之后前一帧能正确地恢复。

■ 递归

作为函数调用的特殊形式，递归也可借助上述调用栈得以实现。比如在图4.3中，对应于funcB()的自我调用，也会新压入一帧。可见，同一函数可能同时拥有多个实例，并在调用栈中各自占有一帧。这些帧的结构完全相同，但其中同名的参数或变量，都是独立的副本。比如在funcB()的两个实例中，入口参数m和内部变量i各有一个副本。

4.2.2 避免递归

今天，包括C++在内的各种高级程序设计语言几乎都允许函数直接或间接地自我调用，通过递归来提高代码的简洁度和可读性。而Cobol和Fortran等早期的程序语言虽然一开始并未采用栈来实现过程调用，但在其最新的版本中也陆续引入了栈结构来支持过程调用。

尽管如此，系统在后台隐式地维护调用栈的过程中，难以区分哪些参数和变量是对计算过程有实质作用的，更无法以通用的方式对它们进行优化，因此不得不将描述调用现场的所有参数和变量悉数入栈。再加上每一帧都必须保存的执行返回地址以及前一帧起始位置，往往导致程序的空间效率不高甚至极低；同时，隐式的入栈和出栈操作也会令实际的运行时间增加不少。

因此在追求更高效率的场合，应尽可能地避免递归，尤其是过度的递归。实际上，我们此前已经介绍过相应的方法和技巧。例如，在1.4.4节中将尾递归转换为等效的迭代形式；在1.4.5节中采用动态规划策略，将Fibonacci数算法中的二分递归改为线性递归，直至完全消除递归。

既然递归本身就是操作系统隐式地维护一个调用栈而实现的，我们自然也可以通过显式地模拟调用栈的运转过程，实现等效的算法功能。采用这一方式，程序员可以精细地裁剪栈中各帧的内容，从而尽可能降低空间复杂度的常系数。尽管算法原递归版本的高度概括性和简洁性将大打折扣，但毕竟在空间效率方面可以获得足够的补偿。

§ 4.3 栈的典型应用

4.3.1 逆序输出

在栈所擅长解决的典型问题中，有一类具有以下共同特征：首先，虽有明确的算法，但其解答却以线性序列的形式给出；其次，无论是递归还是迭代实现，该序列都是依逆序计算输出的；最后，输入和输出规模不确定，难以事先确定盛放输出数据的容器大小。因其特有的“后进先出”特性及其在容量方面的自适应性，使用栈来解决此类问题可谓恰到好处。

■ 进制转换

考查如下问题：任给十进制整数 n ，将其转换为 λ 进制的表示形式。比如 $\lambda = 8$ 时有

$$12345_{(10)} = 30071_{(8)}$$

一般地，设 $n = (d_m \dots d_2 d_1 d_0)_{(\lambda)} = d_m \times \lambda^m + \dots + d_2 \times \lambda^2 + d_1 \times \lambda^1 + d_0 \times \lambda^0$

若记 $n_i = (d_m \dots d_{i+1} d_i)_{(\lambda)}$

则有 $d_i = n_i \% \lambda$ 和 $n_{i+1} = n_i / \lambda$

这一递推关系对应的计算流程如下。可见，其输出的确为长度不定的逆序线性序列。



图4.4 进制转换算法流程

■ 递归实现

根据如图4.4所示的计算流程，可得到如代码4.2所示递归式算法。

```

1 void convert(Stack<char>& S, __int64 n, int base) { //十进制数n到base进制的转换（递归版）
2     static char digit[] //0 < n, 1 < base <= 16, 新进制下的数位符号，可视base取值范围适当扩充
3     = { '0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', 'A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F' };
4     if (0 < n) { //在尚有余数之前，不断
5         convert(S, n / base, base); //通过递归得到所有更高位
6         S.push(digit[n % base]); //输出低位
7     }
8 } //新进制下由高到低的各数位，自顶而下保存于栈S中

```

代码4.2 进制转换算法（递归版）

尽管新进制下的各数位须按由低到高次序逐位算出，但只要引入一个栈并将算得的数位依次入栈，则在计算结束后只需通过反复的出栈操作即可由高到低地将其顺序输出。

■ 迭代实现

这里的静态数位符号表在全局只需保留一份，但与一般的递归函数一样，该函数在递归调用栈中的每一帧都仍需记录参数 S 、 n 和 $base$ 。将它们改为全局变量固然可以节省这部分空间，但依然不能彻底地避免因调用栈操作而导致的空间和时间消耗。为此，不妨考虑改写为如代码4.3所示的迭代版本，既能充分发挥栈处理此类问题的特长，又可将空间消耗降至 $O(1)$ 。

```

1 void convert(Stack<char>& S, __int64 n, int base) { //十进制数n到base进制的转换(迭代版)
2     static char digit[] //0 < n, 1 < base <= 16, 新进制下的数位符号, 可视base取值范围适当扩充
3     = { '0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', 'A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F' };
4     while (n > 0) { //由低到高, 逐一计算出新进制下的各数位
5         int remainder = (int) (n % base); S.push(digit[remainder]); //余数(当前位)入栈
6         n /= base; //n更新为其对base的除商
7     }
8 } //新进制下由高到低的各数位, 自顶而下保存于栈S中

```

代码4.3 进制转换算法(迭代版)

4.3.2 递归嵌套

具有自相似性的问题多可嵌套地递归描述, 但因分支位置和嵌套深度并不固定, 其递归算法的复杂度不易控制。栈结构及其操作天然地具有递归嵌套性, 故可用以高效地解决这类问题。以下先从混洗的角度介绍栈的递归嵌套性, 然后再讲解其在具体问题中的应用。

■ 栈混洗

考查三个栈A、B和S, 其中A含有n个元素, 自顶而下构成输入序列:

{ a_1, a_2, \dots, a_n }

B和S初始为空。若只允许通过S.push(A.pop())弹出栈A的顶元素并压入栈S中, 或通过B.push(S.pop())弹出S的顶元素并压入栈B中, 则在经过一系列这样的操作后, 当栈A和S均为空时, 原A中的元素应均已转入栈B。此时, 若将B中元素自底而上构成的序列记作:

{ $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ }

则该序列称作原输入序列的一个栈混洗(stack permutation)。

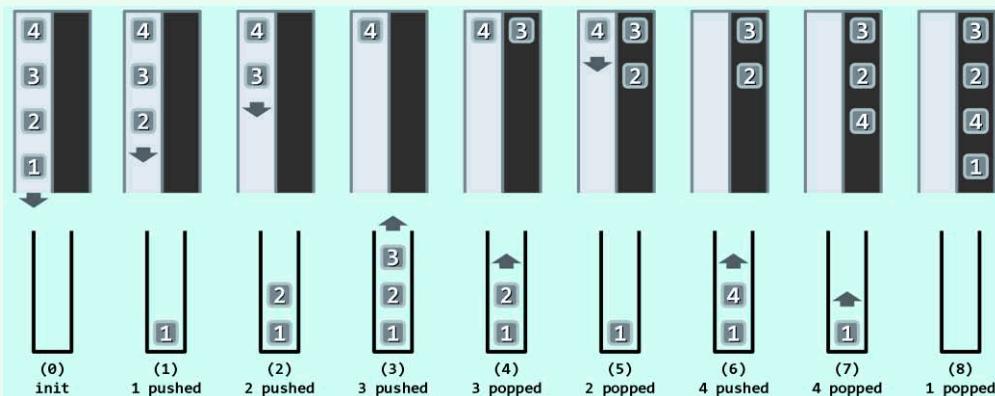


图4.5 栈混洗实例: 从{ 1, 2, 3, 4 }到{ 3, 2, 4, 1 }(上方左侧为栈A, 右侧为栈B; 下方为栈S)

如图4.5所示, 设初始状态下 $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, 栈S和B均为空; 经过“随机的”8次操作, A中的元素全部转入栈B中。此时, 栈B中元素自底而上对应的序列{ 3, 2, 4, 1 }, 即是原序列{ 1, 2, 3, 4 }的一个栈混洗。除了“实施出栈操作的栈不得为空”, 以上过程并无更多限制, 操作序列具有很大的随机性, 故同一输入序列的栈混洗并不唯一。比如就上例而言, { 1, 2, 3, 4 }、{ 4, 3, 2, 1 }以及{ 3, 2, 1, 4 }等也是栈混洗。

从图4.5也可看出，一般地对于长度为n的输入序列，每一栈混淆都对应于由栈S的n次push和n次pop构成的某一合法操作序列，比如{ 3, 2, 4, 1 }即对应于操作序列：

```
{ push, push, push, pop, pop, push, pop, pop }
```

反之，由n次push和n次pop构成的任何操作序列，只要满足“任一前缀中的push不少于pop”这一限制，则该序列也必然对应于某个栈混淆（习题[4-4]）。

■ 括号匹配

对源程序的语法检查是代码编译过程中重要而基本的一个步骤，而对表达式括号匹配的检查则又是语法检查中必需的一个环节。其任务是，对任一程序块，判断其中的括号是否在嵌套的意义下完全匹配（简称匹配）。比如在以下两个表达式中，前者匹配，而后者不匹配。

```
a / ( b [ i - 1 ] [ j + 1 ] + c [ i + 1 ] [ j - 1 ] ) * 2
a / ( b [ i - 1 ] [ j + 1 ] ) + c [ i + 1 ] [ j - 1 ] ) * 2
```

■ 递归实现

不妨先只考虑圆括号。用'+'表示表达式的串接。

不难理解，一般地，若表达式S可分解为如下形式：

```
S = S0 + (" + S1 + ") + S2 + S3
```

其中S₀和S₃不含括号，且S₁中左、右括号数目相等，则S匹配当且仅当S₁和S₂均匹配。

按照这一理解，可采用分治策略设计算法如下：将表达式划分为子表达式S₀、S₁和S₂，分别递归地判断S₁和S₂是否匹配。这一构思可具体实现如代码4.4所示。

```
1 void trim(const char exp[], int& lo, int& hi) { //删除表达式exp[lo, hi]不含括号的最长前缀、后缀
2     while ((lo <= hi) && (exp[lo] != '(') && (exp[hi] != ')')) lo++; //查找第一个和
3     while ((lo <= hi) && (exp[hi] != ')') && (exp[lo] != '(')) hi--; //最后一个括号
4 }
5
6 int divide(const char exp[], int lo, int hi) { //切分表达式exp[lo, hi]，使exp匹配仅当它们匹配
7     int mi = lo; int crc = 1; //crc为[lo, mi]范围内左、右括号数目之差
8     while ((0 < crc) && (++mi < hi)) //逐个检查各字符，直到左、右括号数目相等，或者越界
9         { if (exp[mi] == ')') crc--; if (exp[mi] == '(') crc++; } //左、右括号分别计数
10    return mi; //若mi <= hi，则为合法切分点；否则，意味着局部不可能匹配
11 }
12
13 bool paren(const char exp[], int lo, int hi) { //检查表达式exp[lo, hi]是否括号匹配（递归版）
14     trim(exp, lo, hi); if (lo > hi) return true; //清除不含括号的前缀、后缀
15     if (exp[lo] != '(') return false; //首字符非左括号，则必不匹配
16     if (exp[hi] != ')') return false; //末字符非右括号，则必不匹配
17     int mi = divide(exp, lo, hi); //确定适当的切分点
18     if (mi > hi) return false; //切分点不合法，意味着局部以至整体不匹配
19     return paren(exp, lo + 1, mi - 1) && paren(exp, mi + 1, hi); //分别检查左、右子表达式
20 }
```

其中, `trim()` 函数用于截除表达式中不含括号的头部和尾部, 即前缀 S_0 和后缀 S_3 。 `divide()` 函数对表达式做线性扫描, 并动态地记录已经扫描的左、右括号数目之差。如此, 当已扫过同样多的左、右括号时, 即确定了一个合适的切分点 mi , 并得到子表达式 $S_1 = \text{exp}(lo, mi)$ 和 $S_2 = \text{exp}(mi, hi]$ 。以下, 经递归地检查 S_1 和 S_2 , 即可判断原表达式是否匹配。

在最坏情况下 `divide()` 需要线性时间, 且递归深度为 $\mathcal{O}(n)$, 故以上算法共需 $\mathcal{O}(n^2)$ 时间。此外, 该方法也难以处理含有多种括号的表达式(习题[4-5]和[4-15]), 故有必要进一步优化。

■ 迭代实现

实际上, 只要将 `push`、`pop` 操作分别与左、右括号相对应, 则长度为 n 的栈混洗, 必然与由 n 对括号组成的合法表达式彼此对应(习题[4-4])。比如, 栈混洗 { 3, 2, 4, 1 } 对应于表达式 "(()) ()"。按照这一理解, 借助栈结构, 只需扫描一趟表达式, 即可在线性时间内, 判定其中的括号是否匹配。这一新的算法, 可简明地实现如代码4.5所示。

```

1 bool paren(const char exp[], int lo, int hi) { //表达式括号匹配检查, 可兼顾三种括号
2     Stack<char> S; //使用栈记录已发现但尚未匹配的左括号
3     for (int i = 0; exp[i]; i++) /*逐一检查当前字符*/
4         switch (exp[i]) { //左括号直接进栈; 右括号若与栈顶失配, 则表达式必不匹配
5             case '(': case '[': case '{': S.push(exp[i]); break;
6             case ')': if ((S.empty()) || ('(' != S.pop())) return false; break;
7             case ']': if ((S.empty()) || ('[' != S.pop())) return false; break;
8             case '}': if ((S.empty()) || ('{' != S.pop())) return false; break;
9             default: break; //非括号字符一律忽略
10        }
11     return S.empty(); //整个表达式扫描过后, 栈中若仍残留(左)括号, 则不匹配; 否则(栈空)匹配
12 }
```

代码4.5 括号匹配算法(迭代版)

新算法的流程控制简单, 而且便于推广至多类括号并存の場合。它自左向右逐个考查各字符, 忽略所有非括号字符。凡遇到左括号, 无论属于哪类均统一压入栈 S 中。若遇右括号, 则弹出栈顶的左括号并与之比对。若二者属于同类, 则继续检查下一字符; 否则, 即可断定表达式不匹配。当然, 栈 S 提前变空或者表达式扫描过后栈 S 非空, 也意味着不匹配。

图4.6给出了一次完整的计算过程。表达式扫描完毕时, 栈 S 恰好为空, 故知表达式匹配。

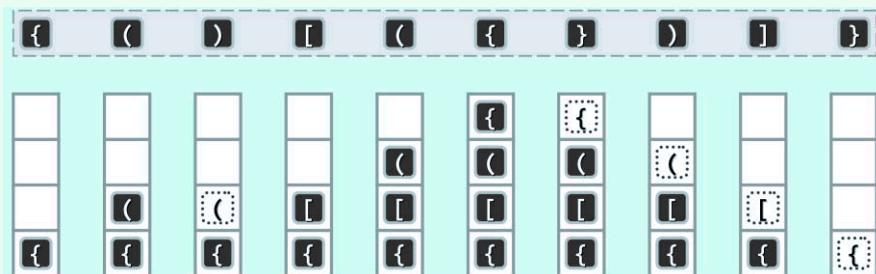


图4.6 迭代式括号匹配算法实例

(上方为输入表达式;下方为辅助栈的演变过程;虚框表示在(右)括号与栈顶(左)括号匹配时对应的出栈操作)

4.3.3 延迟缓冲

在一些应用问题中，输入可分解为多个单元并通过迭代依次扫描处理，但过程中的各步计算往往滞后于扫描的进度，需要待到必要的信息已完整到一定程度之后，才能作出判断并实施计算。在这类场合，栈结构则可以扮演数据缓冲区的角色。

■ 表达式求值

在编译C++程序的预处理阶段，源程序中的所有常量表达式都需首先计算并替换为对应的具体数值。而在解释型语言中，算术表达式的求值也需随着脚本执行过程中反复进行。

比如，在UNIX Shell、DOS Shell和PostScript交互窗口中分别输入：

```
$ echo $(( 0 + ( 1 + 23 ) / 4 * 5 * 67 - 8 + 9 ))
\> set /a (( 0 + ( 1 + 23 ) / 4 * 5 * 67 - 8 + 9 ))
GS> 0 1 23 add 4 div 5 mul 67 mul add 8 sub 9 add =
```

都将返回“2011”。

可见，不能简单地按照“先左后右”的次序执行表达式中的运算符。关于运算符执行次序的规则（即运算优先级），一部分决定于事先约定的惯例（比如乘除优先于加减），另一部分则决定于括号。也就是说，仅根据表达式的某一前缀，并不能完全确定其中各运算符可否执行以及执行的次序；只有在已获得足够多后续信息之后，才能确定其中哪些运算符可以执行。

■ 优先级表

我们首先如代码4.6所示，将不同运算符之间的运算优先级关系，描述为一张二维表格。

```
1 #define N_OPTR 9 //运算符总数
2 typedef enum {ADD, SUB, MUL, DIV, POW, FAC, L_P, R_P, EOE} Operator; //运算符集合
3 //加、减、乘、除、乘方、阶乘、左括号、右括号、起始符与终止符
4
5 const char pri[N_OPTR][N_OPTR] = { //运算符优先等级 [栈顶] [当前]
6     /*           |-----| 当前运算符 |-----| */
7     /*           +   -   *   /   ^   !   (   )   \0 */
8     /* -- + */ '>', '>', '<', '<', '<', '<', '<', '>', '>',
9     /* | - */ '>', '>', '<', '<', '<', '<', '<', '>', '>',
10    /* 栈 */ '>', '>', '>', '<', '<', '<', '<', '>', '>',
11    /* 顶 */ '>', '>', '>', '>', '<', '<', '<', '>', '>',
12    /* 运 */ '>', '>', '>', '>', '>', '<', '<', '>', '>',
13    /* 算 */ '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>', '>',
14    /* 符 */ '<', '<', '<', '<', '<', '<', '<', '=' , '=' ,
15    /* | ) */ ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ', ' ',
16    /* -- \0 */ '<', '<', '<', '<', '<', '<', '<', ' ', '='
17};
```

代码4.6 运算符优先级关系的定义

在常规的四则运算之外，这里还引入了乘方和阶乘运算。其中阶乘属于一元运算，且优先级最高。为统一算法的处理流程，将左、右括号以及标识表达式尾部的字符‘\0’，也视作运算符。

■ 求值算法

基于运算符优先级如上的定义和判定规则，可实现表达式求值算法如代码4.7所示。

```

1 float evaluate(char* S, char*& RPN) { //对(已剔除白空格的)表达式S求值，并转换为逆波兰式RPN
2     Stack<float> opnd; Stack<char> optr; //运算数栈、运算符栈
3     optr.push('\0'); //尾哨兵'\0'也作为头哨兵首先入栈
4     while (!optr.empty()) { //在运算符栈非空之前，逐个处理表达式中各字符
5         if (isdigit(*S)) { //若当前字符为操作数，则
6             readNumber(S, opnd); append(RPN, opnd.top()); //读入操作数，并将其接至RPN末尾
7         } else //若当前字符为运算符，则
8             switch(orderBetween(optr.top(), *S)) { //视其与栈顶运算符之间优先级高低分别处理
9                 case '<': //栈顶运算符优先级更低时
10                     optr.push(*S); S++; //计算推迟，当前运算符进栈
11                     break;
12                 case '=': //优先级相等(当前运算符为右括号或者尾部哨兵'\0')时
13                     optr.pop(); S++; //脱括号并接收下一个字符
14                     break;
15                 case '>': { //栈顶运算符优先级更高时，可实施相应的计算，并将结果重新入栈
16                     char op = optr.pop(); append(RPN, op); //栈顶运算符出栈并续接至RPN末尾
17                     if ('!' == op) { //若属于一元运算符
18                         float pOpnd = opnd.pop(); //只需取出一个操作数，并
19                         opnd.push(calcu(op, pOpnd)); //实施一元计算，结果入栈
20                     } else { //对于其它(二元)运算符
21                         float pOpnd2 = opnd.pop(), pOpnd1 = opnd.pop(); //取出后、前操作数
22                         opnd.push(calcu(pOpnd1, op, pOpnd2)); //实施二元计算，结果入栈
23                     }
24                     break;
25                 }
26                 default : exit(-1); //逢语法错误，不做处理直接退出
27             } //switch
28     } //while
29     return opnd.pop(); //弹出并返回最后的计算结果
30 }
```

代码4.7 表达式的求值及RPN转换

该算法自左向右扫描表达式，并对其中字符逐一做相应的处理。那些已经扫描过但（因信息不足）尚不能处理的操作数与运算符，将分别缓冲至栈opnd和栈optr。一旦判定已缓存的子表达式优先级足够高，便弹出相关的操作数和运算符，随即执行运算，并将结果压入栈opnd。

请留意这里区分操作数和运算符的技巧。一旦当前字符由非数字转为数字，则意味着开始进入一个对应于操作数的子串范围。由于这里允许操作数含有多个数位，甚至可能是小数，故可调用readNumber()函数（习题[4-6]），根据当前字符及其后续的若干字符，利用另一个栈解析出当前的操作数。解析完毕，当前字符将再次聚焦于一个非数字字符。

■ 不同优先级的处置

按照代码4.7，若当前字符为运算符，则在调用`orderBetween()`函数（习题[4-7]），将其与栈`optr`的栈顶操作符做一比较之后，即可视二者的优先级高低，分三种情况相应地处置。

1) 若当前运算符的优先级更高，则`optr`中的栈顶运算符尚不能执行

以表达式“`1 + 2 * 3 ...`”为例，在扫描到运算符`*`时，`optr`栈顶运算符为此前的`+`，由于`pri['+']['*'] = '<'`，当前运算符`*`优先级更高，故栈顶运算符`+`的执行必须推迟。

请注意，由代码4.6定义的优先级表，无论栈顶元素如何，当前操作符为`'('`的所有情况均统一归入这一处理方式；另外，无论当前操作符如何，栈顶操作符为`')'`的所有情况也统一按此处理。也就是说，所有左括号及其后紧随的一个操作符都会相继地被直接压入`optr`栈中，而此前的运算符则一律押后执行——这与左括号应有的功能完全吻合。

2) 反之，一旦栈顶运算符的优先级更高，则可以立即弹出并执行对应的运算

以表达式“`1 + 2 * 3 - 4 ...`”为例，在扫描到运算符`-`时，`optr`栈顶运算符为`*`，由于`pri['*']['-'] = '>'`，意味着当前运算符的优先级更低，故栈顶运算符`*`可立即执行。

类似地，根据代码4.6定义的优先级表，无论栈顶元素如何，当前操作符为`')'`的情况也几乎全部归入这一处理方式。也就是说，一旦抵达右括号，此前在`optr`栈缓冲的运算符大都可以逐一弹出并执行——这与右括号应有的功能也完全吻合。

3) 当前运算符与栈顶运算符的优先级“相等”

对右括号的上述处理方式，将在`optr`栈顶出现操作符`'('`时终止——由代码4.6可知，`pri['('][''] = '='`。此时，将弹出栈顶的`'('`，然后继续处理`')'`之后的字符。不难看出，这对左、右括号在表达式中必然相互匹配，其作用在于约束介乎二者之间的那段子表达式的优先级关系，故在其“历史使命”完成之后，算法做如上处置理所应当。

除左、右括号外，还有一种优先级相等的合法情况，即`pri['\0']['\0'] = '='`。由于在算法启动之初已经首先将字符`'\0'`压入`optr`栈，故在整个表达式已被正确解析并抵达表达式结束标识符`'\0'`时，即出现这一情况。对于合法的表达式，这种情况只在算法终止前出现一次。既然同样是需要弹出栈顶，算法不妨将这种情况按照优先级相等的方式处置。

■ 语法检查及鲁棒性

为简洁起见，以上算法假设输入表达式的语法完全正确；否则，有可能会导致荒诞的结果。读者可在此基础上，尝试扩充语法检查以及对各种非法情况的处理功能（习题[4-12]）。

4.3.4 逆波兰表达式

■ RPN

逆波兰表达式（reverse Polish notation, RPN）是数学表达式的一种，其语法规则可概括为：操作符紧邻于对应的（最后一个）操作数之后。比如“`1 2 +`”即通常习惯的“`1 + 2`”。

按此规则，可递归地得到更复杂的表达式，比如RPN表达式

`1 2 + 3 4 ^ *`

即对应于常规的表达式

`(1 + 2) * 3 ^ 4`

第5章

二叉树

通过前面的章节，我们已经了解了一些基本的数据结构。根据其实现方式，这些数据结构大致可以分为两种类型：基于数组的实现与基于链表的实现。正如我们已经看到的，就其效率而言，二者各有长短。具体来说，前一实现方式允许我们通过下标或秩，在常数的时间内找到目标对象；然而，一旦需要对这类结构进行修改，那么无论是插入还是删除，都需要耗费线性的时间。反过来，后一实现方式允许我们借助引用或位置对象，在常数的时间内插入或删除元素；但是为了找出居于特定次序的元素，我们却不得不花费线性的时间，对整个结构进行遍历查找。能否将这两类结构的优点结合起来，并回避其不足呢？本章所讨论的树结构，将正面回答这一问题。

在此前介绍的这些结构中，元素之间都存在一个自然的线性次序，故它们都属于所谓的线性结构（**linear structure**）。树则不然，其中的元素之间并不存在天然的直接后继或直接前驱关系。不过，正如我们马上就要看到的，只要附加某种约束（比如遍历），也可以在树中的元素之间确定某种线性次序，因此树属于半线性结构（**semi-linear structure**）。

无论如何，随着从线性结构转入树结构，我们的思维方式也将有个飞跃；相应地，算法设计的策略与模式也会因此有所变化，许多基本的算法也将得以更加高效地实现。以第7章和第8章将要介绍的平衡二叉搜索树为例，若其中包含n个元素，则每次查找、更新、插入或删除操作都可在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内完成——相对于线性结构，几乎提高了一个线性因子（习题[1-9]）。

树结构有着不计其数的变种，在算法理论以及实际应用中，它们都扮演着最为关键的角色。之所以如此，是因得益于其独特而又普适的逻辑结构。树是一种分层结构，而层次化这一特征几乎蕴含于所有事物及其联系当中，成为其本质属性之一。从文件系统、互联网域名系统和数据库系统，一直到地球生态系统乃至人类社会系统，层次化特征以及层次结构均无所不在。

有趣的是，作为树的特例，二叉树实际上并不失其一般性。本章将指出，无论就逻辑结构或算法功能而言，任何有根有序的多叉树，都可等价地转化并实现为二叉树。因此，本章讲解的重点也将放在二叉树上。我们将以通讯编码算法的实现这一应用实例作为线索贯穿全章。

§ 5.1 二叉树及其表示

5.1.1 树

■ 有根树

从图论的角度看，树等价于连通无环图。因此与一般的图相同，树也由一组顶点（**vertex**）以及联接与其间的若干条边（**edge**）组成。在计算机科学中，往往还会在此基础上，再指定某一特定顶点，并称之为根（**root**）。在指定根节点之后，我们也称之为有根树（**rooted tree**）。此时，从程序实现的角度，我们也更多地将顶点称作节点（**node**）。

■ 深度与层次

由树的连通性，每一节点与根之间都有一条路径相联；而根据树的无环性，由根通往每个节点的路径必然唯一。因此如图5.1所示，沿每个节点 v 到根 r 的唯一通路所经过边的数目，称作 v 的深度（depth），记作 $\text{depth}(v)$ 。依据深度排序，可对所有节点做分层归类。特别地，约定根节点的深度 $\text{depth}(r) = 0$ ，故属于第0层。

■ 祖先、后代与子树

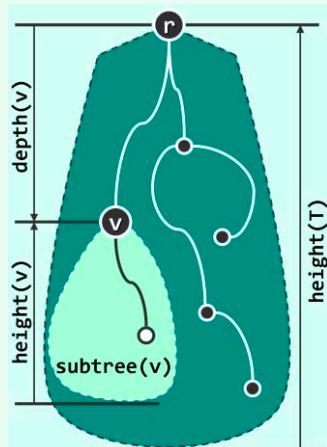


图5.1 有根树的逻辑结构

任一节点 v 在通往树根沿途所经过的每个节点都是其祖先（ancestor）， v 是它们的后代（descendant）。特别地， v 的祖先/后代包括其本身，而 v 本身以外的祖先/后代称作真祖先（proper ancestor）/真后代（proper descendant）。

节点 v 历代祖先的层次，自下而上以1为单位逐层递减；在每一层次上， v 的祖先至多一个。特别地，若节点 u 是 v 的祖先且恰好比 v 高出一层，则称 u 是 v 的父亲（parent）， v 是 u 的孩子（child）。

v 的孩子总数，称作其度数或度（degree），记作 $\text{deg}(v)$ 。无孩子的节点称作叶节点（leaf），包括根在内的其余节点皆为内部节点（internal node）。

v 所有的后代及其之间的联边称作子树（subtree），记作 $\text{subtree}(v)$ 。在不致歧义时，我们往往不再严格区分节点（ v ）及以之为根的子树（ $\text{subtree}(v)$ ）。

■ 高度

树 T 中所有节点深度的最大值称作该树的高度（height），记作 $\text{height}(T)$ 。

不难理解，树的高度总是由其中某一叶节点的深度确定的。特别地，本书约定，仅含单个节点的树高度为0，空树高度为-1。

推而广之，任一节点 v 所对应子树 $\text{subtree}(v)$ 的高度，亦称作该节点的高度，记作 $\text{height}(v)$ 。特别地，全树的高度亦即其根节点 r 的高度， $\text{height}(T) = \text{height}(r)$ 。

5.1.2 二叉树

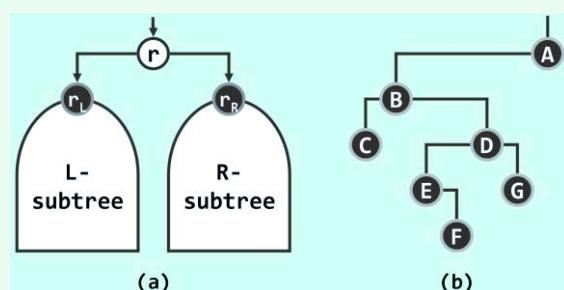


图5.2 二叉树：(a)逻辑结构；(b)实例

如图5.2所示，二叉树（binary tree）中每个节点的度数均不超过2。

因此在二叉树中，同一父节点的孩子都可以左、右相互区分——此时，亦称作有序二叉树（ordered binary tree）。本书所提到的二叉树，默认地都是有序的。

特别地，不含一度节点的二叉树称作真二叉树（proper binary tree）（习题[5-2]）。

5.1.3 多叉树

一般地，树中各节点的孩子数目并不确定。每个节点的孩子均不超过 k 个的有根树，称作 k 叉树（ k -ary tree）。本节将就此类树结构的表示与实现方法做一简要介绍。

■ 父节点

由如图5.3(a)实例不难看出，在多叉树中，根节点以外的任一节点有且仅有一个父节点。

因此可如图5.3(b)所示，将各节点组织为向量或列表，其中每个元素除保存节点本身的信息（node）外，还需要保存父节点（parent）的秩或位置。可为树根指定一个虚构的父节点-1或NULL，以便统一判断。

如此，所有向量或列表所占的空间总量为 $O(n)$ ，线性正比于节点总数n。时间方面，仅需常数时间，即可确定任一节点的父节点；但反过来，孩子节点的查找却不得不花费 $O(n)$ 时间访遍所有节点。

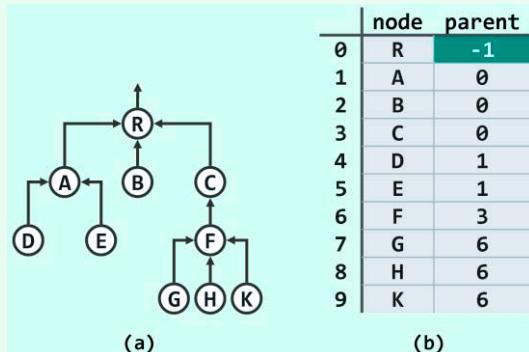


图5.3 多叉树的“父节点”表示法

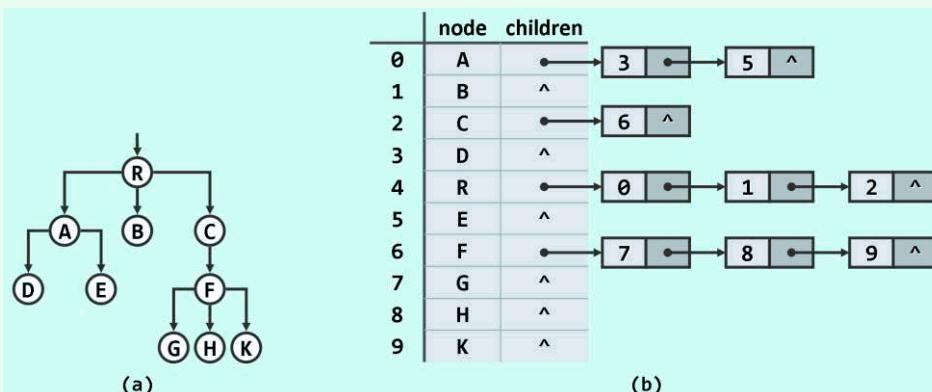


图5.4 多叉树的“孩子节点”表示法

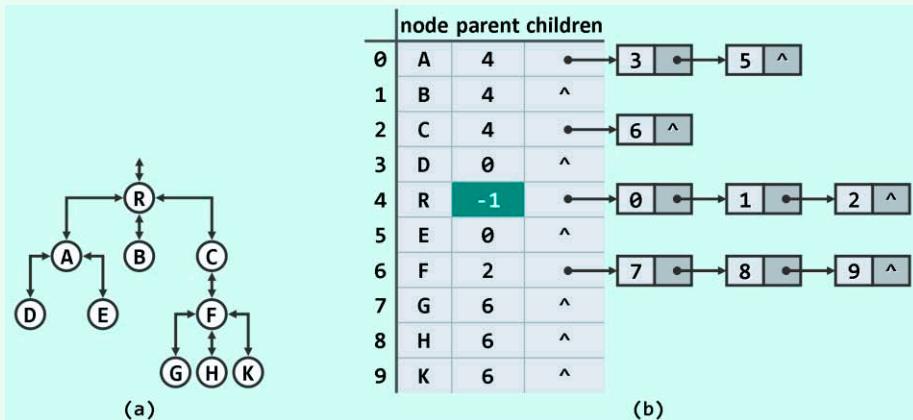


图5.5 多叉树的“父节点 + 孩子节点”表示法

■ 孩子节点

若注重孩子节点的快速定位，可如图5.4所示，令各节点将其所有的孩子组织为一个向量或列表。如此，对于拥有 r 个孩子的节点，可在 $O(r + 1)$ 时间内列举出其所有的孩子。

■ 父节点 + 孩子节点

以上父节点表示法和孩子节点表示法各有所长，但也各有所短。为综合二者的优势，消除缺点，可如图5.5所示令各节点既记录父节点，同时也维护一个序列以保存所有孩子。

尽管如此可以高效地兼顾对父节点和孩子的定位，但在节点插入与删除操作频繁的场合，为动态地维护和更新树的拓扑结构，不得不反复地遍历和调整一些节点所对应的孩子序列。然而，向量和列表等线性结构的此类操作都需耗费大量时间，势必影响到整体的效率。

■ 有序多叉树 = 二叉树

解决上述难题的方法之一，就是采用支持高效动态调整的二叉树结构。为此，必须首先建立起从多叉树到二叉树的某种转换关系，并使得在此转换的意义下，任一多叉树都等价于某棵二叉树。当然，为了保证作为多叉树特例的二叉树有足够的能力表示任何一棵多叉树，我们只需给多叉树增加一项约束条件——同一节点的所有孩子之间必须具有某一线性次序。

仿照有序二叉树的定义，凡符合这一条件的多叉树也称作有序树（ordered tree）。幸运的是，这一附加条件在实际应用问题中往往自然满足。以互联网域名系统所对应的多叉树为例，其中同一域名下的分支通常即按照字典序排列。

■ 长子 + 兄弟

由图5.6(a)的实例可见，有序多叉树中任一非叶节点都有唯一的“长子”，而且从该“长子”出发，可按照预先约定或指定的次序遍历所有孩子节点。因此可如图(b)所示，为每个节点设置两个指针，分别指向其“长子”和下一“兄弟”。

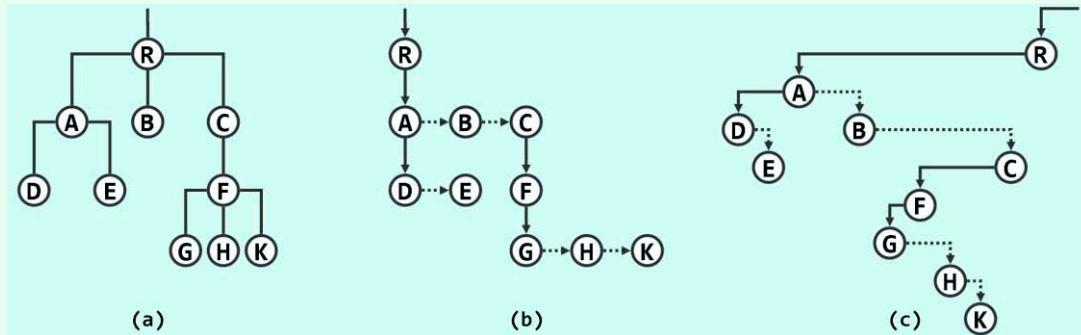


图5.6 多叉树的“长子 + 兄弟”表示法 ((b)中长子和兄弟指针，分别以垂直实线和水平虚线示意)

现在，若将这两个指针分别与二叉树节点的左、右孩子指针统一对应起来，则可进一步地将原有序多叉树转换为如图(c)所示的常规二叉树。

在这里，一个饶有趣味的现象出现了：尽管二叉树只是多叉树的一个子集，但其对应用问题的描述与刻画能力绝不低于后者。实际上以下我们还将进一步发现，即便是就计算效率而言，二叉树也并不逊色于一般意义上的树。反过来，得益于其定义的简洁性以及结构的规范性，二叉树所支撑的算法往往可以更好地得到描述，更加简捷地得到实现。二叉树的身影几乎出现在所有的应用领域当中，这也是一个重要的原因。

§ 5.2 编码树

本章将以通讯编码算法的实现作为二叉树的应用实例。通讯理论中的一个基本问题是，如何在尽可能低的成本下，以尽可能高的速度，尽可能忠实地实现信息在空间和时间上的复制与转移。在现代通讯技术中，无论采用电、磁、光或其它任何形式，在信道上传递的信息大多以二进制比特的形式表示和存在，而每一个具体的编码方案都对应于一棵二叉编码树。

5.2.1 二进制编码

在加载到信道上之前，信息被转换为二进制形式的过程称作编码（encoding）；反之，经信道抵达目标后再由二进制编码恢复原始信息的过程称作解码（decoding）。

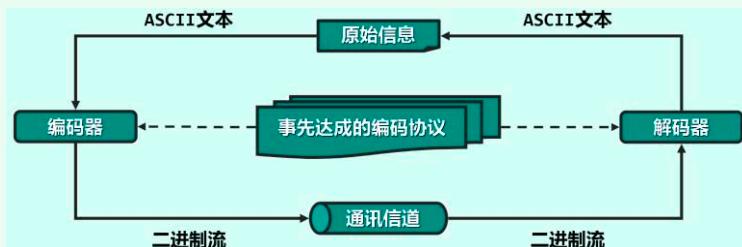


图5.7 完整的通讯过程由预处理、编码和解码阶段组成

如图5.7所示，编码和解码的任务分别由发送方和接收方分别独立完成，故在开始通讯之前，双方应已经以某种形式，就编码规则达成过共同的约定或协议。

■ 生成编码表

原始信息的基本组成单位称作字符，它们都来自于某一特定的有限集合 Σ ，也称作字符集（alphabet）。而以二进制形式承载的信息，都可表示为来自编码表 $\Gamma = \{0, 1\}^*$ 的某一特定二进制串。从这个角度理解，每一编码表都是从字符集 Σ 到编码表 Γ 的一个单射，编码就是对信息文本中各字符逐个实施这一映射的过程，而解码则是逆向映射的过程。

表5.1 $\Sigma = \{ 'A', 'E', 'G', 'M', 'S' \}$ 的一份二进制编码表

字符	A	E	G	M	S
编码	00	01	10	110	111

表5.1即为二进制编码表的实例。编码表一旦制定，信息的发送方与接收方之间也就建立起了一个约定与默契，从而使得独立的编码与解码成为可能。

■ 二进制编码

现在，所谓编码就是对于任意给定的文本，通过查阅编码表逐一将其中的字符转译为二进制编码，这些编码依次串接起来即得到了全文的编码。比如若待编码文本为"MESSAGE"，则根据由表5.1确定的编码方案，对应的二进制编码串应为"110 01 111 111 00 10 01"^①。

表5.2 二进制解码过程

二进制编码	当前匹配字符	解出原文
11001111111001001	M	M
01111111001001	E	ME
111111001001	S	MES
111001001	S	MESS
001001	A	MESSA
1001	G	MESSAG
01	E	MESSAGE

^① 这里对各比特位做了适当的上下移位，以便读者区分各字符编码串的范围；在实际编码中，它们并无“高度”的区别

■ 二进制解码

由编码器生成的二进制流经信道送达之后，接收方可以按照事先约定的编码表（表5.1），依次扫描各比特位，并经匹配逐一转译出各字符，从而最终恢复出原始的文本。

仍以二进制编码串 " $110\ 01\ 111\ 111\ 00\ 10\ 01$ " 为例，其解码过程如表5.2所示。

■ 解码歧义

请注意，编码方案确定之后，尽管编码结果必然确定，但解码过程和结果却不见得唯一。

表5.3 $\Sigma = \{ 'A', 'E', 'G', 'M', 'S' \}$ 的另一份编码表

字符	A	E	G	M	S
编码	00	01	10	11	111

比如，上述字符集 Σ 的另一编码方案如表5.3所示，与表5.1的差异在于，字符'M'的编码由"110"改为"11"。此时，原始文本"MESSAGE"经编码得到二进制编码串 " $11\ 01\ 111\ 111\ 00\ 10\ 01$ "，但如表5.4左侧和右侧所示，解码方法却至少有两种。

表5.4 按照表5.3“确定”的编码协议，可能有多种解码结果

二进制编码	当前匹配字符	解出原文	二进制编码	当前匹配字符	解出原文
110111111001001	M	M	110111111001001	M	M
01111111001001	E	ME	01111111001001	E	ME
111111001001	S	MES	111111001001	M	MEM
111001001	S	MESS	1111001001	M	MEMMM
001001	A	MESSA	11001001	M	MEMMM
1001	G	MESSAG	001001	A	MEMMMA
01	E	MESSAGE	1001	G	MEMMMAG
			01	E	MEMMMAGE

进一步推敲之后不难发现，按照这份编码表，有时甚至还会出现无法完成解码的情况。

■ 前缀无歧义编码

解码过程之所以会出现上述歧义甚至错误，根源在于编码表制订不当。这里的解码算法采用的是，按顺序对信息比特流做子串匹配的策略，因此为消除匹配的歧义性，任何两个原始字符所对应的二进制编码串，相互都不得是前缀。比如在表5.3中，字符'M'的编码（"11"）即为字符'S'的编码（"111"）的前缀，于是编码串"111111"既可以解释为：

$$\text{"SS"} = \text{"111 111"}$$

也可以解释为

$$\text{"MMM"} = \text{"11 11 11"}$$

反过来，只要各字符的编码串互不为前缀，则即便出现无法解码的错误，也绝对不致歧义。这类编码方案即所谓的“前缀无歧义编码”（prefix-free code），简称PFC编码。此类编码算法，可以明确地将二进制编码串，分割为一系列与各原始字符对应的片段，从而实现无歧义的解码。得益于这一特点，此类算法在整个解码过程中，对信息比特流的扫描不必回溯。

那么，PFC编码的以上特点，可否直观解释？从算法角度看，PFC编码与解码过程，又该如何准确描述？从数据结构角度看，这些过程的实现，需要借助哪些功能接口？支持这些接口的数据结构，又该如何高效率地实现？以下以二叉树结构为模型，逐步解答这些疑问。

5.2.2 二叉编码树

■ 根通路与节点编码

任一编码方案都可描述为一棵二叉树：从根节点出发，每次向左（右）都对应于一个0（1）比特位。于是如图5.8所示，由从根节点到每个节点的唯一通路，可以为各节点 v 赋予一个互异的二进制串，称作根通路串（root path string），记作 $rps(v)$ 。当然， $|rps(v)| = \text{depth}(v)$ 就是 v 的深度。

若将 Σ 中的字符分别映射至二叉树的节点，则字符 x 的二进制编码串即可取作 $rps(v(x))$ 。以下，在不致引起混淆的前提下，不再区分字符 x 和与之对应的节点 $v(x)$ 。于是， $rps(v(x))$ 可简记作 $rps(x)$ ； $\text{depth}(v(x))$ 可简记作 $\text{depth}(x)$ 。

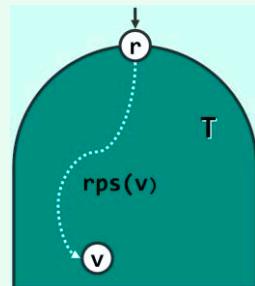


图5.8 二叉树中每个节点都由根通路串唯一确定

■ PFC编码树

仍以字符集 $\Sigma = \{ 'A', 'E', 'G', 'M', 'S' \}$ 为例，表5.1、表5.3所定义的编码方案分别对应于如图5.9左、右所示的二叉编码树。

易见， $rps(u)$ 是 $rps(v)$ 的前缀，当且仅当节点 u 是 v 的祖先，故表5.3中编码方案导致解码歧义的根源在于，在其编码树（图5.9(b)）中字符'M'是'S'的父亲。

反之，只要所有字符都对应于叶节点，歧义现象即自然消除——这也是实现PFC编码的简明策略。

比如，图5.9(a)即为一种可行的PFC编码方案。

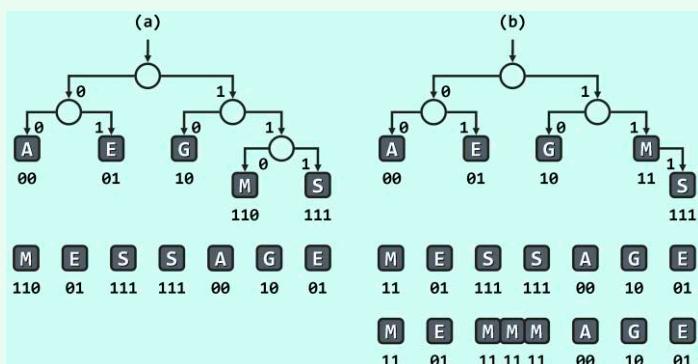


图5.9 $\Sigma = \{ 'A', 'E', 'G', 'M', 'S' \}$ 两种编码方案对应的二叉编码树

■ 基于PFC编码树的解码

反过来，依据PFC编码树可便捷地完成编码串的解码。依然以图5.9(a)中编码树为例，设对编码串"110 01 111 111 00 10 01"解码。从前向后扫描该串，同时在树中相应移动。起始时从树根出发，视各比特位的取值相应地向左或右深入下一层，直到抵达叶节点。比如，在扫描过前三位"110"后将抵达叶节点'M'。此时，可以输出其对应的字符'M'，然后重新回到树根，并继续扫描编码串的剩余部分。比如，再经过接下来的两位"01"后将抵达叶节点'E'，同样地输出字符'E'并回到树根。如此迭代，即可无歧义地解析出原文中的所有字符（习题[5-6]）。

实际上，这一解码过程甚至可以在二进制编码串的接收过程中实时进行，而不必等到所有比特位都到达之后才开始，因此这类算法属于在线算法。

■ PFC编码树的构造

由上可见，PFC编码方案可由PFC编码树来描述，由编码树不仅可以快速生成编码表，而且直接支持高效的解码。那么，任意给定一个字符集 Σ ，如何构造出PFC编码方案呢？

为此，需要首先解决二叉树本身作为数据结构的描述和实现问题。

§ 5.3 二叉树的实现

作为图的特殊形式，二叉树的基本组成单元是节点与边；作为数据结构，其基本的组成实体是二叉树节点（`binary tree node`），而边则对应于节点之间的相互引用。

5.3.1 二叉树节点

■ BinNode模板类

以二叉树节点`BinNode`模板类，可定义如代码5.1所示。

```

1 #define BinNodePosi(T) BinNode<T>* //节点位置
2 #define stature(p) ((p) ? (p)->height : -1) //节点高度(与“空树高度为-1”的约定相统一)
3 typedef enum { RB_RED, RB_BLACK} RBColor; //节点颜色
4
5 template <typename T> struct BinNode { //二叉树节点模板类
6     // 成员(为简化描述起见统一开放,读者可根据需要进一步封装)
7     T data; //数值
8     BinNodePosi(T) parent; BinNodePosi(T) lChild; BinNodePosi(T) rChild; //父节点及左、右孩子
9     int height; //高度(通用)
10    int npl; //Null Path Length(左式堆,也可直接用height代替)
11    RBColor color; //颜色(红黑树)
12 // 构造函数
13    BinNode() : parent(NULL), lChild(NULL), rChild(NULL), height(0), npl(1), color(RB_RED) { }
14    BinNode(T e, BinNodePosi(T) p = NULL, BinNodePosi(T) lc = NULL, BinNodePosi(T) rc = NULL,
15            int h = 0, int l = 1, RBColor c = RB_RED)
16        : data(e), parent(p), lChild(lc), rChild(rc), height(h), npl(l), color(c) { }
17 // 操作接口
18    int size(); //统计当前节点后代总数,亦即以其为根的子树的规模
19    BinNodePosi(T) insertAsLC(T const&); //作为当前节点的左孩子插入新节点
20    BinNodePosi(T) insertAsRC(T const&); //作为当前节点的右孩子插入新节点
21    BinNodePosi(T) succ(); //取当前节点的直接后继
22    template <typename VST> void travLevel(VST&); //子树层次遍历
23    template <typename VST> void travPre(VST&); //子树先序遍历
24    template <typename VST> void travIn(VST&); //子树中序遍历
25    template <typename VST> void travPost(VST&); //子树后序遍历
26 // 比较器、判等器(各列其一,其余自行补充)
27    bool operator<(BinNode const& bn) { return data < bn.data; } //小于
28    bool operator==(BinNode const& bn) { return data == bn.data; } //等于
29 };

```

代码5.1 二叉树节点模板类`BinNode`

为简化起见，这里也未做严格的封装。通过宏`BinNodePosi`来指代节点位置，可以简化后续代码描述；通过定义宏`stature`，则可以保证从节点返回的高度值，能够与“空树高度为-1”的约定相统一。

■ 成员变量

如图5.10所示, **BinNode**节点由多个成员变量组成, 它们分别记录了当前节点的父亲和孩子的位置、节点内存放的数据以及节点的高度等指标, 这些都是二叉树相关算法赖以实现的基础。



图5.10 **BinNode**模板类的逻辑结构

其中, `data`的类型由模板变量T指定, 用于存放各节点所对应的数值对象。`lChild`、`rChild`和`parent`均为指针类型, 分别指向左、右孩子以及父节点的位置。如此, 既可将各节点联接起来, 也可在它们之间漫游移动。比如稍后5.4节将要介绍的遍历算法, 就必须借助此类位置变量。当然, 通过判断这些变量所指位置是否为NULL, 也可确定当前节点的类型。比如, `v.parent = NULL`当且仅当v是根节点, 而`v.lChild = v.rChlid = NULL`当且仅当v是叶节点。

后续章节将基于二叉树实现二叉搜索树和优先级队列等数据结构, 而节点高度`height`在其中的具体语义也有所不同。比如, 8.3节的红黑树将采用所谓的黑高度(`black height`), 而10.3节的左式堆则采用所谓的空节点通路长度(`null path length`)。尽管后者也可以直接沿用`height`变量, 但出于可读性的考虑, 这里还是专门设置了一个变量`npl`。

有些种类的二叉树还可能需要其它的变量来描述节点状态, 比如针对其中节点的颜色, 红黑树需要引入一个属于枚举类型**RB_Color**的变量`color`。

根据不同应用需求, 还可以针对节点的深度增设成员变量`depth`, 或者针对以当前节点为根的子树规模(该节点的后代数目)增设成员变量`size`。利用这些变量固然可以加速静态的查询或搜索, 但为保持这些变量的时效性, 在所属二叉树发生结构性调整(比如节点的插入或删除)之后, 这些成员变量都要动态地更新。因此, 究竟是否值得引入此类成员变量, 必须权衡利弊。比如, 在二叉树结构改变频繁以至于动态操作远多于静态操作的场合, 舍弃深度、子树规模等变量, 转而在实际需要时再直接计算这些指标, 应是更为明智的选择。

■ 快捷方式

在**BinNode**模板类各接口以及后续相关算法的实现中, 将频繁检查和判断二叉树节点的状态与性质, 有时还需要定位与之相关的(兄弟、叔叔等)特定节点, 为简化算法描述同时增强可读性, 不妨如代码5.2所示将其中常用功能以宏的形式加以整理归纳。

```

1 //*****
2 * BinNode状态与性质的判断
3 *****/
4 #define IsRoot(x) (!((x).parent))
5 #define IsLChild(x) (!IsRoot(x) && (&(x) == (x).parent->lChild))
6 #define IsRChild(x) (!IsRoot(x) && (&(x) == (x).parent->rChild))
7 #define HasParent(x) (!IsRoot(x))
8 #define HasLChild(x) ((x).lChild)
9 #define HasRChild(x) ((x).rChild)
10 #define HasChild(x) (HasLChild(x) || HasRChild(x)) //至少拥有一个孩子
11 #define HasBothChild(x) (HasLChild(x) && HasRChild(x)) //同时拥有两个孩子
12 #define IsLeaf(x) (!HasChild(x))

```

```

13
14 //*****与BinNode具有特定关系的节点及指针*****
15 * 与BinNode具有特定关系的节点及指针
16 *****/
17 #define sibling(p) ( \
18     IsLChild(*(p)) ? \
19         (p)->parent->rChild : \
20         (p)->parent->lChild \
21 ) //兄弟
22
23 #define uncle(x) ( \
24     IsLChild(*((x)->parent)) ? \
25         (x)->parent->parent->rChild : \
26         (x)->parent->parent->lChild \
27 ) //叔叔
28
29 #define FromParentTo(x) ( \
30     IsRoot(x) ? _root : ( \
31         IsLChild(x) ? (x).parent->lChild : (x).parent->rChild \
32     ) \
33 ) //来自父亲的指针

```

代码5.2 以宏的形式对基于BinNode的操作做一归纳整理

5.3.2 二叉树节点操作接口

由于BinNode模板类本身处于底层，故这里也将所有操作接口统一设置为开放权限，以简化描述。同样地，注重数据结构封装性的读者可在此基础之上自行修改扩充。

■ 插入孩子节点

```

1 template <typename T> //将e作为当前节点的左孩子插入二叉树
2 BinNodePosi(T) BinNode<T>::insertAsLC(T const& e) { return lChild = new BinNode(e, this); }
3
4 template <typename T> //将e作为当前节点的右孩子插入二叉树
5 BinNodePosi(T) BinNode<T>::insertAsRC(T const& e) { return rChild = new BinNode(e, this); }

```

代码5.3 二叉树节点左、右孩子的插入

可见，为将新节点作为当前节点的左孩子插入树中，可如图5.11(a)所示，先创建新节点；再如图(b)所示，将当前节点作为新节点的父亲，并令新节点作为当前节点的左孩子。这里约定，在插入新节点之前，当前节点尚无左孩子。

右孩子的插入过程完全对称，不再赘述。

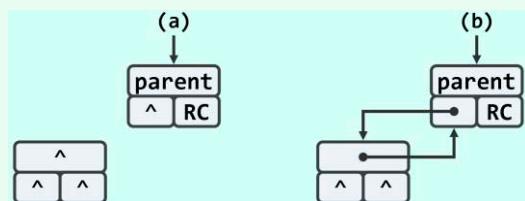


图5.11 二叉树节点左孩子插入过程

■ 定位直接后继

稍后在5.4.3节我们将会看到，通过中序遍历，可在二叉树各节点之间定义一个线性次序。相应地，各节点之间也可定义前驱与后继关系。这里的succ()接口，可以返回当前节点的直接后继（如果存在）。该接口的具体实现，将在130页代码5.16中给出。

■ 遍历

稍后的5.4节，将从递归和迭代两个角度，分别介绍各种遍历算法的不同实现。为便于测试与比较，不妨将这些算法的不同版本统一归入统一的接口中，并在调用时随机选择。

```

1 template <typename T> template <typename VST> //元素类型、操作器
2 void BinNode<T>::travIn(VST& visit) { //二叉树中序遍历算法统一入口
3     switch (rand() % 5) { //此处暂随机选择以做测试，共五种选择
4         case 1: travIn_I1(this, visit); break; //迭代版#1
5         case 2: travIn_I2(this, visit); break; //迭代版#2
6         case 3: travIn_I3(this, visit); break; //迭代版#3
7         case 4: travIn_I4(this, visit); break; //迭代版#4
8         default: travIn_R(this, visit); break; //递归版
9     }
10 }
```

代码5.4 二叉树中序遍历算法的统一入口

比如，中序遍历算法的五种实现方式（其中travIn_I4留作习题[5-17]），即可如代码5.4所示，纳入统一的BinNode::travIn()接口。其余遍历算法的处理方法类似，不再赘述。

5.3.3 二叉树

■ BinTree模板类

在BinNode模板类的基础之上，可如代码5.5所示定义二叉树BinTree模板类。

```

1 #include "BinNode.h" //引入二叉树节点类
2 template <typename T> class BinTree { //二叉树模板类
3 protected:
4     int _size; //规模
5     BinNodePosi(T) _root; //根节点
6     virtual int updateHeight(BinNodePosi(T) x); //更新节点x的高度
7     void updateHeightAbove(BinNodePosi(T) x); //更新节点x及其祖先的高度
8 public:
9     BinTree() : _size(0), _root(NULL) { } //构造函数
10    ~BinTree() { if (0 < _size) remove(_root); } //析构函数
11    int size() const { return _size; } //规模
12    bool empty() const { return !_root; } //判空
13    BinNodePosi(T) root() const { return _root; } //树根
14    BinNodePosi(T) insertAsRoot(T const& e); //插入根节点
15    BinNodePosi(T) insertAsLC(BinNodePosi(T) x, T const& e); //e作为x的左孩子（原无）插入
```

```

16     BinNodePosi(T) insertAsRC(BinNodePosi(T) x, T const& e); //e作为x的右孩子(原无)插入
17     BinNodePosi(T) attachAsLC(BinNodePosi(T) x, BinTree<T>* &T); //T作为x左子树接入
18     BinNodePosi(T) attachAsRC(BinNodePosi(T) x, BinTree<T>* &T); //T作为x右子树接入
19     int remove(BinNodePosi(T) x); //删除以位置x处节点为根的子树, 返回该子树原先的规模
20     BinTree<T>* secede(BinNodePosi(T) x); //将子树x从当前树中摘除, 并将其转换为一棵独立子树
21     template <typename VST> //操作器
22     void travLevel(VST& visit) { if (_root) _root->travLevel(visit); } //层次遍历
23     template <typename VST> //操作器
24     void travPre(VST& visit) { if (_root) _root->travPre(visit); } //先序遍历
25     template <typename VST> //操作器
26     void travIn(VST& visit) { if (_root) _root->travIn(visit); } //中序遍历
27     template <typename VST> //操作器
28     void travPost(VST& visit) { if (_root) _root->travPost(visit); } //后序遍历
29 // 比较器、判等器(各列其一, 其余自行补充)
30     bool operator<(BinTree<T> const& t) { return _root && t._root && lt(_root, t._root); }
31     bool operator==(BinTree<T> const& t) { return _root && t._root && (_root == t._root); }
32 }; //BinTree

```

代码5.5 二叉树模板类BinTree

其中, `_root`指向树根, `_size`动态记录树的规模, 且`_root = NULL`当且仅当`_size = 0`。

■ 高度更新

二叉树任一节点的高度, 都等于其孩子节点的最大高度加一。于是, 每当某一节点的孩子或后代有所增减, 其高度都有必要及时更新。然而实际上, 节点自身很难发现后代的变化, 因此这里反过来采用另一处理策略: 一旦有节点加入或离开二叉树, 则更新其所有祖先的高度。请读者自行验证, 这一原则实际上与前一个等效(习题[5-3])。

在每一节点v处, 只需读出其左、右孩子的高度并取二者之间的大者, 再计入当前节点本身, 就得到了v的新高度。通常, 接下来还需要从v出发沿`parent`指针逆行向上, 依次更新各代祖先的高度记录。这一过程可具体实现如代码5.6所示。

```

1 template <typename T> int BinTree<T>::updateHeight(BinNodePosi(T) x) //更新节点x高度
2 { return x->height = 1 + max(stature(x->lChild), stature(x->rChild)); } //具体规则因树不同而异
3
4 template <typename T> void BinTree<T>::updateHeightAbove(BinNodePosi(T) x) //更新v及祖先的高度
5 { while (x) { updateHeight(x); x = x->parent; } } //可优化: 一旦高度未变, 即可终止

```

代码5.6 二叉树节点的高度更新

更新每一节点本身的高度, 只需执行两次`getHeight()`操作、两次加法以及两次取最大操作, 不过常数时间, 故`updateHeight()`算法总体运行时间也是 $O(\text{depth}(v) + 1)$, 其中`depth(v)`为节点v的深度。当然, 这一算法还可进一步优化(习题[5-4])。

在某些种类的二叉树(例如8.3节将要介绍的红黑树)中, 高度的定义有所不同, 因此这里将`updateHeight()`定义为保护级的虚方法, 以便派生类在必要时重写(`override`)。

■ 节点插入

二叉树节点可以通过三种方式插入二叉树中，具体实现如代码5.7所示。

```

1 template <typename T> BinNodePosi(T) BinTree<T>::insertAsRoot(T const& e)
2 { _size = 1; return _root = new BinNode<T>(e); } //将e当作根节点插入空的二叉树
3
4 template <typename T> BinNodePosi(T) BinTree<T>::insertAsLC(BinNodePosi(T) x, T const& e)
5 { _size++; x->insertAsLC(e); updateHeightAbove(x); return x->lChild; } //e插入为x的左孩子
6
7 template <typename T> BinNodePosi(T) BinTree<T>::insertAsRC(BinNodePosi(T) x, T const& e)
8 { _size++; x->insertAsRC(e); updateHeightAbove(x); return x->rChild; } //e插入为x的右孩子

```

代码5.7 二叉树根、左、右节点的插入

`insertAsRoot()`接口用于将节点插入空树中，当然，该节点随即也应成为树根。

为此，只需创建一个新节点并存入指定的数据项，再令其作为根节点，同时更新全树的规模。

如图5.12(a)所示，若二叉树T中某个节点x的右孩子为空，则可通过`T.insertAsRC()`接口为其添加一个右孩子。为此可如图(b)所示调用`x->insertAsRC()`接口，将二者按照父子关系相互联接，同时通过`updateHeightAbove()`接口更新x所有祖先的高度，并更新全树规模。请注意这里的两个同名`insertAsRC()`接口，它们各自所属的对象类型不同。

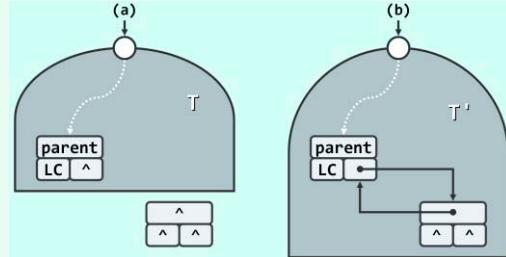


图5.12 右节点插入过程：(a)插入前；(b)插入后

左侧节点的插入过程与此相仿，可对称地调用`insertAsLC()`完成。

■ 子树接入

如代码5.8所示，任一二叉树均可作为另一二叉树中指定节点的左子树或右子树，植入其中。

```

1 template <typename T> //二叉树子树接入算法：将s当作节点x的左子树接入，s本身置空
2 BinNodePosi(T) BinTree<T>::attachAsLC(BinNodePosi(T) x, BinTree<T>* &s) { //x->lChild == NULL
3     if (x->lChild = s->_root) x->lChild->parent = x; //接入
4     _size += s->_size; updateHeightAbove(x); //更新全树规模与x所有祖先的高度
5     s->_root = NULL; s->_size = 0; release(s); s = NULL; return x; //释放原树，返回接入位置
6 }
7
8 template <typename T> //二叉树子树接入算法：将s当作节点x的右子树接入，s本身置空
9 BinNodePosi(T) BinTree<T>::attachAsRC(BinNodePosi(T) x, BinTree<T>* &s) { //x->rChild == NULL
10    if (x->rChild = s->_root) x->rChild->parent = x; //接入
11    _size += s->_size; updateHeightAbove(x); //更新全树规模与x所有祖先的高度
12    s->_root = NULL; s->_size = 0; release(s); s = NULL; return x; //释放原树，返回接入位置
13 }

```

代码5.8 二叉树子树的接入

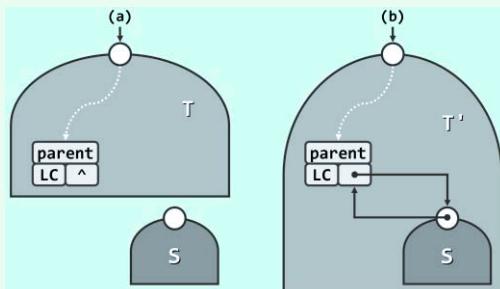


图5.13 右子树接入过程：(a)接入前；(b)接入后

如图5.13(a)，若二叉树T中节点x的右孩子为空，则attachAsRC()接口首先将待植入的二叉树S的根节点作为x的右孩子，同时令x作为该根节点的父亲；然后，更新全树规模以及节点x所有祖先的高度；最后，将树S中除已接入的各节点之外的其余部分归还系统。

左子树接入过程与此类似，可对称地调用attachAsLC()完成。

■ 子树删除

子树删除的过程与如图5.13所示的子树接入过程恰好相反，不同之处在于，需要将被摘除子树中的节点逐一释放并归还系统（习题[5-5]）。具体实现如代码5.9所示。

```

1 template <typename T> //删除二叉树中位置x处的节点及其后代，返回被删除节点的数值
2 int BinTree<T>::remove(BinNodePosi(T) x) { //assert: x为二叉树中的合法位置
3     FromParentTo(*x) = NULL; //切断来自父节点的指针
4     updateHeightAbove(x->parent); //更新祖先高度
5     int n = removeAt(x); _size -= n; return n; //删除子树x，更新规模，返回删除节点总数
6 }
7
8 template <typename T> //删除二叉树中位置x处的节点及其后代，返回被删除节点的数值
9 static int removeAt(BinNodePosi(T) x) { //assert: x为二叉树中的合法位置
10    if (!x) return 0; //递归基：空树
11    int n = 1 + removeAt(x->lChild) + removeAt(x->rChild); //递归释放左、右子树
12    release(x->data); release(x); return n; //释放被摘除节点，并返回删除节点总数
13 }
```

代码5.9 二叉树子树的删除

■ 子树分离

子树分离的过程与以上的子树删除过程基本一致，不同之处在于，需要对分离出来的子树重新封装，并返回给上层调用者。具体实现如代码5.10所示。

```

1 template <typename T> //二叉树子树分离算法：将子树x从当前树中摘除，将其封装为一棵独立子树返回
2 BinTree<T>* BinTree<T>::secede(BinNodePosi(T) x) { //assert: x为二叉树中的合法位置
3     FromParentTo(*x) = NULL; //切断来自父节点的指针
4     updateHeightAbove(x->parent); //更新原树中所有祖先的高度
5     BinTree<T>* S = new BinTree<T>; S->_root = x; x->parent = NULL; //新树以x为根
6     S->_size = x->size(); _size -= S->_size; return S; //更新规模，返回分离出来的子树
7 }
```

代码5.10 二叉树子树的分离

■ 复杂度

就二叉树拓扑结构的变化范围而言，以上算法均只涉及局部的常数个节点。因此，除了更新祖先高度和释放节点等操作，只需常数时间。

§ 5.4 遍历

对二叉树的访问多可抽象为如下形式：按照事先约定的某种规则或次序，对节点各访问一次而且仅一次。与向量和列表等线性结构一样，二叉树的这类访问也统称为遍历（**traversal**）。同样地，遍历操作之于二叉树的意义，在于为许多相关算法的实现提供了通用框架和基本接口。从算法策略的角度看，这一过程也等效于将半线性的树形结构转换为线性结构。

不过，因为二叉树已经不再属于线性结构，故相对于向量和列表等序列结构，二叉树的遍历略显复杂。为此，以下首先从递归的角度，给出若干种典型的二叉树遍历次序的定义，并按照117页代码5.1和121页代码5.5所列接口，给出相应的递归式实现；然后，为了提高遍历算法的实际效率，再分别介绍各种遍历接口的迭代式实现。

5.4.1 递归式遍历

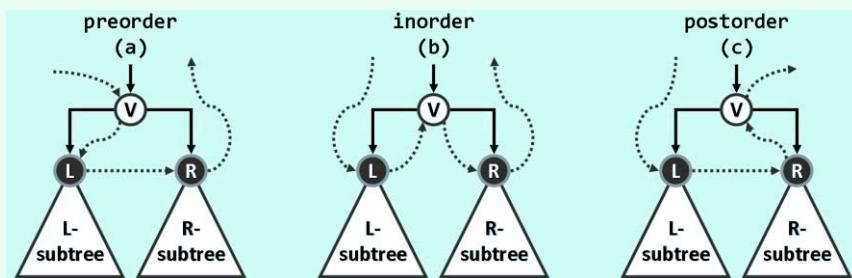


图5.14 二叉树遍历的全局次序由局部次序规则确定

二叉树本身并不具有天然的全局次序，故为实现遍历，需通过在各节点与其孩子之间约定某种局部次序，间接地定义某种全局次序。

按惯例左兄弟优先于右兄弟，故若将节点及其孩子分别记作V、L和R，则如图5.14所示，局部访问的次序可有VLR、LVR和LRV三种选择。根据节点V在其中的访问次序，三种策略也相应地分别称作先序遍历、中序遍历和后序遍历，分述如下。

■ 先序遍历

得益于递归定义的简洁性，如代码5.11所示，只需数行即可实现先序遍历算法。

```

1 template <typename T, typename VST> //元素类型、操作器
2 void travPre_R(BinNodePosi(T) x, VST& visit) { //二叉树先序遍历算法(递归版)
3     if (!x) return;
4     visit(x->data);
5     travPre_R(x->lChild, visit);
6     travPre_R(x->rChild, visit);
7 }
```

代码5.11 二叉树先序遍历算法(递归版)

为遍历（子）树x，首先核对x是否为空。若x为空，则直接退出——其效果相当于递归基。反之，若x非空，则按照先序遍历关于局部次序的定义，优先访问其根节点x；然后，依次深入左子树和右子树，递归地进行遍历。实际上，这一实现模式也同样可以应用于中序和后序遍历。

经过遍历之后，即可相应地在节点之间定义出某种线性次序，称作遍历(生成)序列。图5.15以一棵具体的二叉树为例，给出了完整的先序遍历过程以及生成的遍历序列。

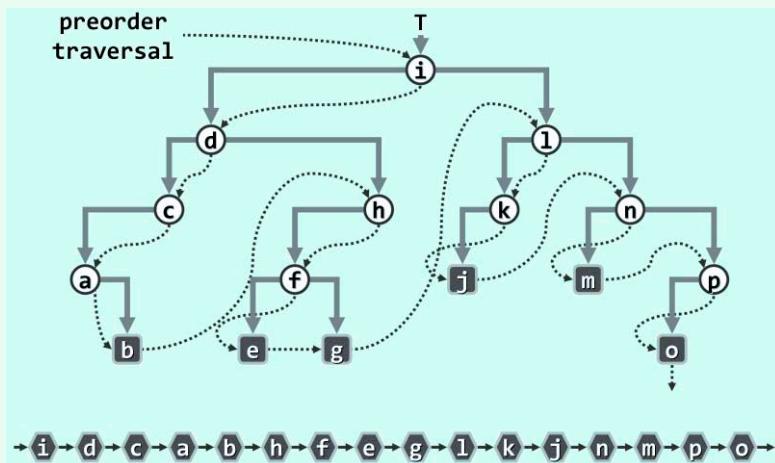


图5.15 二叉树先序遍历序列

■ 后序遍历

```

1 template <typename T, typename VST> //元素类型、操作器
2 void travPost_R(BinNodePosi(T) x, VST& visit) { //二叉树后序遍历算法（递归版）
3     if (!x) return;
4     travPost_R(x->lChild, visit);
5     travPost_R(x->rChild, visit);
6     visit(x->data);
7 }
```

代码5.12 二叉树后序遍历算法（递归版）

仿照以上先序遍历的模式，可如代码5.12所示实现递归版后序遍历算法。

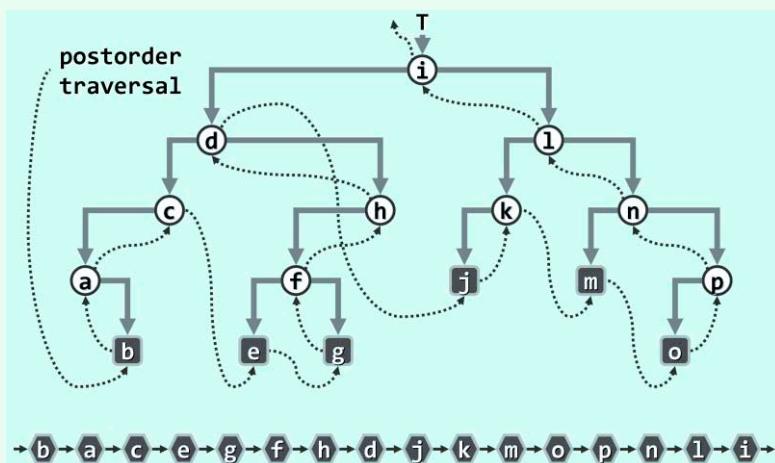


图5.16 二叉树的后序遍历序列

按照后序遍历规则，为遍历非空的（子）树x，将在依次递归遍历其左子树和右子树之后，才访问节点x。对于以上二叉树实例，其完整的后序遍历过程以及生成的遍历序列如图5.16所示。与图5.15做一对比可见，先序遍历序列与后序遍历序列并非简单的逆序关系。

■ 中序遍历

再次仿照以上模式，可实现递归版中序遍历算法如代码5.13所示。

```
1 template <typename T, typename VST> //元素类型、操作器
2 void travIn_R(BinNodePosi(T) x, VST& visit) { //二叉树中序遍历算法（递归版）
3     if (!x) return;
4     travIn_R(x->lChild, visit);
5     visit(x->data);
6     travIn_R(x->rChild, visit);
7 }
```

代码5.13 二叉树中序遍历算法（递归版）

按照中序遍历规则，为遍历非空的（子）树x，将依次递归遍历其左子树、访问节点x、递归遍历其右子树。以上二叉树实例的中序遍历过程以及生成的遍历序列，如图5.17所示。

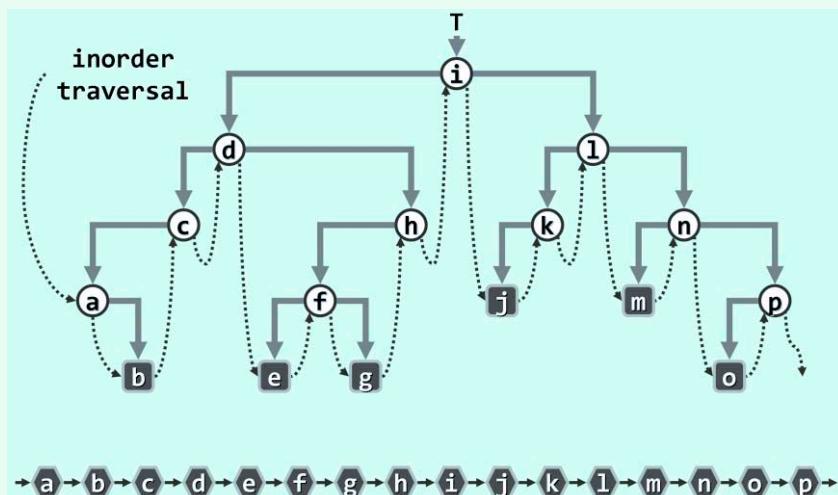


图5.17 二叉树的中序遍历序列

与以上的先序和后序遍历序列做一对比不难发现，各节点在中序遍历序列中的局部次序，与按照有序树定义所确定的全局左、右次序完全吻合。这一现象并非巧合，在第7章和第8章中，这正是搜索树及其等价变换的原理和依据所在。

5.4.2 *迭代版先序遍历

无论以上各种递归式遍历算法还是以下各种迭代式遍历算法，都只需渐进的线性时间（习题[5-9]和[5-11]）；而且相对而言，前者更加简明。既然如此，有何必要介绍迭代式遍历算法呢？

首先，递归版遍历算法时间、空间复杂度的常系数，相对于迭代版更大。同时，从学习的角度来看，从底层实现迭代式遍历，也是加深对相关过程与技巧理解的有效途径。

■ 版本1

观察先序遍历的递归版（代码5.11）可发现，其中针对右子树的递归属于尾递归，左子树的则接近于尾递归。故参照消除尾递归的一般性方法，不难将其改写迭代版（习题[5-10]）。

■ 版本2

很遗憾，以上思路并不容易推广到非尾递归的场合，比如在中序或后序遍历中，至少有一个递归方向严格地不属于尾递归。此时，如下另一迭代式版本的实现思路，则更具参考价值。

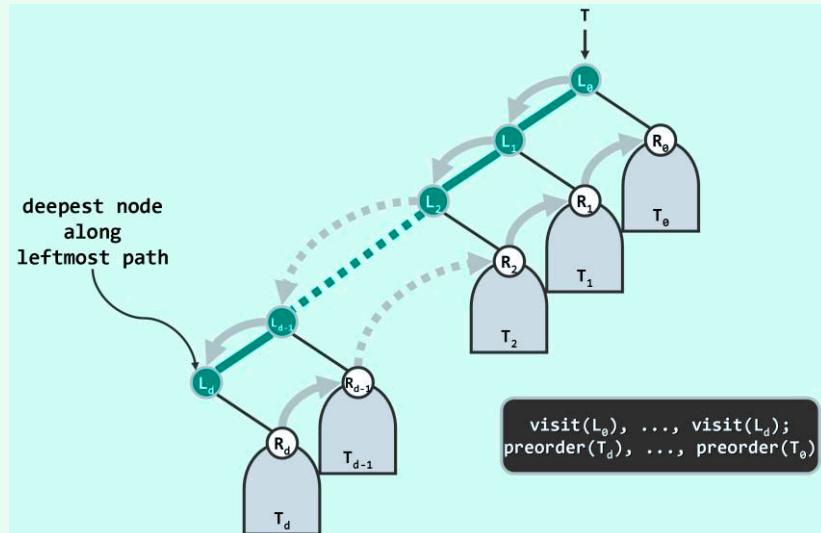


图5.18 先序遍历过程：先沿最左侧通路自顶而下访问沿途节点，再自底而上依次遍历这些节点的右子树

如图5.18所示，在二叉树T中，从根节点出发沿着左分支一直下行的那条通路（以粗线示意），称作最左侧通路（*leftmost path*）。若将沿途节点分别记作 L_k , $k = 0, 1, 2, \dots, d$ ，则最左侧通路终止于没有左孩子末端节点 L_d 。若这些节点的右孩子和右子树分别记作 R_k 和 T_k , $k = 0, 1, 2, \dots, d$ ，则该二叉树的先序遍历序列可表示为：

```
preorder(T) =
    visit(L0),     visit(L1), ...,           visit(Ld);
    preorder(Td), ...,   preorder(T1), preorder(T0)
```

也就是说，先序遍历序列可分解为两段：沿最左侧通路自顶而下访问的各节点，以及自底而上遍历的对应右子树。基于对先序遍历序列的这一理解，可以导出以下迭代式先序遍历算法。

```
1 //从当前节点出发，沿左分支不断深入，直至没有左分支的节点；沿途节点遇到后立即访问
2 template <typename T, typename VST> //元素类型、操作器
3 static void visitAlongLeftBranch(BinNodePosi(T) x, VST& visit, Stack<BinNodePosi(T)>& S) {
4     while (x) {
5         visit(x->data); //访问当前节点
6         S.push(x->rChild); //右孩子入栈暂存（可优化：通过判断，避免空的右孩子入栈）
7         x = x->lChild; //沿左分支深入一层
8     }
9 }
```

```

10
11 template <typename T, typename VST> //元素类型、操作器
12 void travPre_I2(BinNodePosi(T) x, VST& visit) { //二叉树先序遍历算法(迭代版#2)
13     Stack<BinNodePosi(T)> S; //辅助栈
14     while (true) {
15         visitAlongLeftBranch(x, visit, S); //从当前节点出发，逐批访问
16         if (S.empty()) break; //直到栈空
17         x = S.pop(); //弹出下一批的起点
18     }
19 }
```

代码5.14 二叉树先序遍历算法(迭代版#2)

如代码5.14所示，在全树以及其中每一棵子树的根节点处，该算法都首先调用函数VisitAlongLeftBranch()，自顶而下访问最左侧通路沿途的各个节点。这里也使用了一个辅助栈，逆序记录最左侧通路上的节点，以便确定其对应右子树自底而上的遍历次序。

5.4.3 *迭代版中序遍历

如上所述，在中序遍历的递归版本（126页代码5.13）中，尽管右子树的递归遍历是尾递归，但左子树绝对不是。实际上，实现迭代式中序遍历算法的难点正在于此，不过好在迭代式先序遍历的版本2可以为我们提供启发和借鉴。

■ 版本1

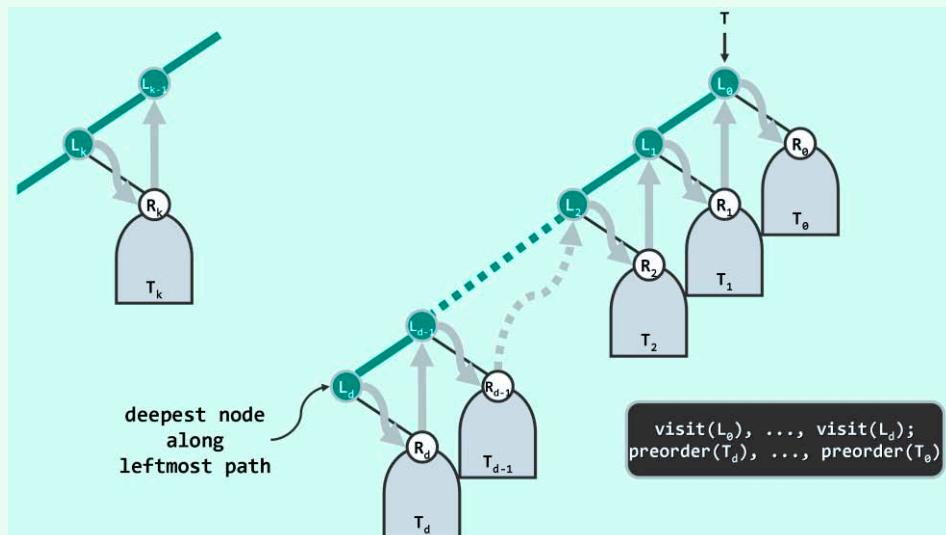


图5.19 中序遍历过程：

顺着最左侧通路，自底而上依次访问沿途各节点及其右子树

如图5.19所示，参照迭代式先序遍历版本2的思路，再次考查二叉树 T 的最左侧通路，并对其中的节点和子树标记命名。于是， T 的中序遍历序列可表示为：

第6章



4.4节曾仿效古希腊英雄忒修斯，以栈等基本数据结构模拟线绳和粉笔，展示了试探回溯策略的应用技巧。实际上，这一技巧可进一步推广至更为一般性的场合，包括可以图结构描述的应用问题，从而导出一系列对应的图算法。

忒修斯取得成功的关键在于，借助线绳掌握迷宫内各通道之间的联接关系。在很多应用中，能否有效描述和利用这类信息，同样至关重要。一般地，这类信息往往可表述为定义于一组对象之间的二元关系，比如城市交通图中，联接于各公交站之间的街道，或者互联网中，联接于IP节点之间的路由，等等。尽管在某种程度上，第5章所介绍的树结构也可用以表示这种二元关系，但仅限于父、子节点之间。相互之间均可能存在二元关系的一组对象，从数据结构的角度分类，属于非线性结构(**non-linear structure**)。此类一般性的二元关系，属于图论(**Graph Theory**)的研究范畴。从算法的角度对此类结构的处理策略，与上一章相仿，也是通过遍历将其转化为半线性结构，进而借助树结构已有的处理方法和技巧，最终解决问题。

以下首先简要介绍图的基本概念和术语，已有相关基础的读者可直接跳过。接下来，介绍如何实现作为抽象数据类型的图结构，主要讨论邻接矩阵和邻接表两种实现方式。然后，从遍历的角度介绍将图转化为树的典型方法，包括广度优先搜索和深度优先搜索。进而，分别以拓扑排序和双连通域分解为例，介绍利用基本数据结构并基于遍历模式，设计图算法的主要方法。最后，从“数据结构决定遍历次序”的观点出发，将所有遍历算法概括并统一为最佳优先遍历这一模式。如此，我们不仅能够更加准确和深刻地理解不同图算法之间的共性与联系，更可以学会通过选择和改进数据结构，高效地设计并实现各种图算法——这也是本章的重点与精髓。

§ 6.1 概述

■ 图

图结构是描述和解决实际应用问题的一种基本而有力的工具。所谓的图(**graph**)，可定义为 $G = (V, E)$ 。其中，集合V中的元素称作顶点(**vertex**)；集合E中的元素分别对应于V中的某一对顶点(u, v)，表示它们之间存在某种关系，故亦称作边(**edge**)^①。一种直观显示图结构的方法是，用小圆圈或小方块代表顶点，用联接于其间的直线段或曲线弧表示对应的边。

从计算的需求出发，我们约定V和E均为有限集，通常将其规模分别记 $n = |V|$ 和 $e = |E|$ 。

■ 无向图、有向图及混合图

若边(u, v)所对应顶点u和v的次序无所谓，则称作无向边(**undirected edge**)，例如表示同学关系的边。反之若u和v不对等，则称(u, v)为有向边(**directed edge**)，例如描述企业与银行之间的借贷关系，或者程序之间的相互调用关系的边。

^① 在某些文献中，顶点也称作节点(**node**)，边亦称作弧(**arc**)，本章则统一称作顶点和边。

如此，无向边 (u, v) 也可记作 (v, u) ，而有向的 (u, v) 和 (v, u) 则不可混淆。这里约定，有向边 (u, v) 从 u 指向 v ，其中 u 称作该边的起点（origin）或尾顶点（tail），而 v 称作该边的终点（destination）或头顶点（head）。

若 E 中各边均无方向，则 G 称作无向图（undirected graph，简称undigraph）。例如在描述影视演员相互合作关系的图 G 中，若演员 u 和 v 若曾经共同出演过至少一部影片，则在他（她）们之间引入一条边 (u, v) 。反之，若 E 中只含有向边，则 G 称作有向图（directed graph，简称digraph）。例如在C++类的派生关系图中，从顶点 u 指向顶点 v 的有向边，意味着类 u 派生自类 v 。特别地，若 E 同时包含无向边和有向边，则 G 称作混合图（mixed graph）。例如在北京市内交通图中，有些道路是双行的，另一些是单行的，对应地可分别描述为无向边和有向边。

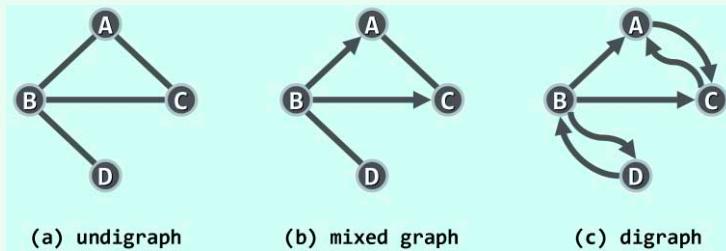


图6.1 (a)无向图、(b)混合图和(c)有向图

相对而言，有向图的通用性更强，因为无向图和混合图都可转化为有向图——如图6.1所示，每条无向边 (u, v) 都可等效地替换为对称的一对有向边 (u, v) 和 (v, u) 。因此，本章将主要针对有向图，介绍图结构及其算法的具体实现。

度

对于任何边 $e = (u, v)$ ，称顶点 u 和 v 彼此邻接（adjacent），互为邻居；而它们都与边 e 彼此关联（incident）。在无向图中，与顶点 v 关联的边数，称作 v 的度数（degree），记作 $\deg(v)$ 。以图6.1(a)为例，顶点{ A, B, C, D }的度数为{ 2, 3, 2, 1 }。

对于有向边 $e = (u, v)$ ， e 称作 u 的出边（outgoing edge）、 v 的入边（incoming edge）。 v 的出边总数称作其出度（out-degree），记作 $\text{outdeg}(v)$ ；入边总数称作其入度（in-degree），记作 $\text{indeg}(v)$ 。在图6.1(c)中，各顶点的出度为{ 1, 3, 1, 1 }，入度为{ 2, 1, 2, 1 }。

简单图

联接于同一顶点之间的边，称作自环（self-loop）。在某些特定的应用中，这类边可能的确具有意义——比如在城市交通图中，沿着某条街道，有可能不需经过任何交叉路口即可直接返回原处。不含任何自环的图称作简单图（simple graph），也是本书主要讨论的对象。

通路与环路

所谓路径或通路（path），就是由 $m + 1$ 个顶点与 m 条边交替而成的一个序列：

$$\pi = \{ v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_m, v_m \}$$

且对任何 $0 < i \leq m$ 都有 $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ 。也就是说，这些边依次地首尾相联。其中沿途边的总数 m ，亦称作通路的长度，记作 $|\pi| = m$ 。

为简化描述，也可依次给出通路沿途的各个顶点，而省略联接于其间的边，即表示为：

$$\pi = \{ v_0, v_1, v_2, \dots, v_m \}$$

图6.2(a)中的{ C, A, B, A, D }，即是从顶点C到D的一条通路，其长度为4。可见，尽管通路上的边必须互异，但顶点却可能重复。沿途顶点互异的通路，称作简单通路 (simple path)。在图6.2(b)中，{ C, A, D, B }即是从顶点C到B的一条简单通路，其长度为3。

特别地，对于长度 $m \geq 1$ 的通路 π ，若起止顶点相同（即 $v_0 = v_m$ ），则称作环路 (cycle)，其长度也取作沿途边的总数。图6.3(a)中，{ C, A, B, A, D, B, C }即是一条环路，其长度为6。反之，不含任何环路的有向图，称作有向无环图 (directed acyclic graph, DAG)。

同样，尽管环路上的各边必须互异，但顶点却也可能重复。反之若沿途除 $v_0 = v_m$ 外所有顶点均互异，则称作简单环路 (simple cycle)。例如，图6.3(b)中的{ C, A, B, C }即是一条简单环路，其长度为3。特别地，经过图中各边一次且恰好一次的环路，称作欧拉环路 (Eulerian tour)——当然，其长度也恰好等于图中边的总数 e 。

图6.4(a)中的{ C, A, B, A, D, C, D, B, C }即是一条欧拉环路，其长度为8。对偶地，经过图中各顶点一次且恰好一次的环路，称作哈密尔顿环路 (Hamiltonian tour)，其长度亦等于构成环路的边数。图6.4(b)中，{ C, A, D, B, C }即是一条长度为4的哈密尔顿环路。

■ 带权网络

图不仅需要表示顶点之间是否存在某种关系，有时还需要表示这一关系的具体细节。以铁路运输为例，可以用顶点表示城市，用顶点之间的联边，表示对应的城市之间是否有客运铁路联接；同时，往往还需要记录各段铁路的长度、承运能力，以及运输成本等信息。

为适应这类应用要求，需通过一个权值函数，为每一边 e 指定一个权重 (weight)，比如 $wt(e)$ 即为边 e 的权重。各边均带有权重的图，称作带权图 (weighted graph) 或带权网络 (weighted network)，有时也简称网络 (network)，记作 $G(V, E, wt())$ 。

■ 复杂度

与其它算法一样，图算法也需要就时间性能和空间性能，进行分析和比较。相应地，问题的输入规模，也应该以顶点数与边数的总和 ($n + e$) 来度量。不难看出，无论顶点多少，边数都有可能为0。那么反过来，在包含 n 个顶点的图中，至多可能包含多少条边呢？

对于无向图，每一对顶点至多贡献一条边，故总共不超过 $n(n - 1)/2$ 条边，且这个上界由完全图达到。对于有向图，每一对顶点都可能贡献（互逆的）两条边，因此至多可有 $n(n - 1)$ 条边。总而言之，必有 $e = O(n^2)$ 。

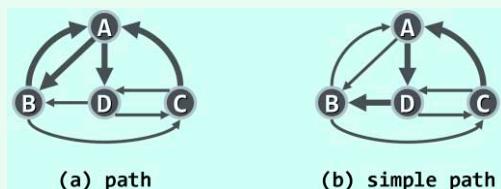


图6.2 通路与简单通路

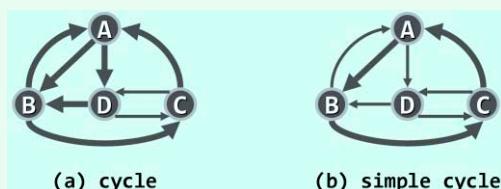


图6.3 环路与简单环路

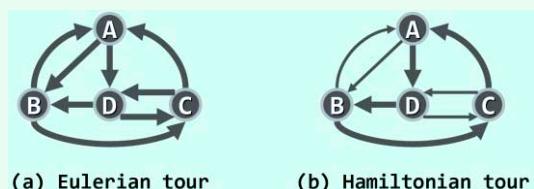


图6.4 欧拉环路与哈密尔顿环路

§ 6.2 抽象数据类型

6.2.1 操作接口

作为抽象数据类型，图支持的操作接口分为边和顶点两类，分列于表6.1和表6.2。

表6.1 图ADT支持的边操作接口

操作接口	功能描述
e()	边总数 E
exist(v, u)	判断联边(v, u)是否存在
insert(v, u)	引入从顶点v到u的联边
remove(v, u)	删除从顶点v到u的联边
status(v, u)	边(v, u)的状态
edge(v, u)	边(v, u)对应的数据域
weight(v, u)	边(v, u)的权重

表6.2 图ADT支持的顶点操作接口

操作接口	功能描述
n()	顶点总数 V
insert(v)	在顶点集V中插入新顶点v
remove(v)	将顶点v从顶点集中删除
inDegree(v) outDegree(v)	顶点v的入度、出度
firstNbr(v)	顶点v的首个邻接顶点
nextNbr(v, u)	在v的邻接顶点中，u的后继
status(v)	顶点v的状态
dTime(v)、fTime(v)	顶点v的时间标签
parent(v)	顶点v在遍历树中的父节点
priority(v)	顶点v在遍历树中的权重

6.2.2 Graph模板类

代码6.1以抽象模板类的形式，给出了图ADT的具体定义。

```

1 typedef enum { UNDISCOVERED, DISCOVERED, VISITED } VStatus; //顶点状态
2 typedef enum { UNDETERMINED, TREE, CROSS, FORWARD, BACKWARD } EStatus; //边状态
3
4 template <typename Tv, typename Te> //顶点类型、边类型
5 class Graph { //图Graph模板类
6 private:
7     void reset() { //所有顶点、边的辅助信息复位
8         for (int i = 0; i < n; i++) { //所有顶点的
9             status(i) = UNDISCOVERED; dTime(i) = fTime(i) = -1; //状态，时间标签
10            parent(i) = -1; priority(i) = INT_MAX; // (在遍历树中的)父节点，优先级数
11            for (int j = 0; j < n; j++) //所有边的
12                if (exists(i, j)) status(i, j) = UNDETERMINED; //状态
13        }
14    }
15    void BFS(int, int&); // (连通域) 广度优先搜索算法
16    void DFS(int, int&); // (连通域) 深度优先搜索算法
17    void BCC(int, int&, Stack<int>&); // (连通域) 基于DFS的双连通分量分解算法
18    bool TSort(int, int&, Stack<Tv>*); // (连通域) 基于DFS的拓扑排序算法
19    template <typename PU> void PFS(int, PU); // (连通域) 优先级搜索框架

```

```

20 public:
21 // 顶点
22     int n; //顶点总数
23     virtual int insert(Tv const&) = 0; //插入顶点，返回编号
24     virtual Tv remove(int) = 0; //删除顶点及其关联边，返回该顶点信息
25     virtual Tv& vertex(int) = 0; //顶点v的数据（该顶点的确存在）
26     virtual int inDegree(int) = 0; //顶点v的入度（该顶点的确存在）
27     virtual int outDegree(int) = 0; //顶点v的出度（该顶点的确存在）
28     virtual int firstNbr(int) = 0; //顶点v的第一个邻接顶点
29     virtual int nextNbr(int, int) = 0; //顶点v的（相对于顶点j的）下一邻接顶点
30     virtual VStatus& status(int) = 0; //顶点v的状态
31     virtual int& dTime(int) = 0; //顶点v的时间标签dTime
32     virtual int& fTime(int) = 0; //顶点v的时间标签fTime
33     virtual int& parent(int) = 0; //顶点v在遍历树中的父亲
34     virtual int& priority(int) = 0; //顶点v在遍历树中的优先级数
35 // 边：这里约定，无向边均统一转化为方向互逆的一对有向边，从而将无向图视作有向图的特例
36     int e; //边总数
37     virtual bool exists(int, int) = 0; //边(v, u)是否存在
38     virtual void insert(TE const&, int, int, int) = 0; //在顶点v和u之间插入权重为w的边e
39     virtual TE remove(int, int) = 0; //删除顶点v和u之间的边e，返回该边信息
40     virtual EStatus& status(int, int) = 0; //边(v, u)的状态
41     virtual TE& edge(int, int) = 0; //边(v, u)的数据（该边的确存在）
42     virtual int& weight(int, int) = 0; //边(v, u)的权重
43 // 算法
44     void bfs(int); //广度优先搜索算法
45     void dfs(int); //深度优先搜索算法
46     void bcc(int); //基于DFS的双连通分量分解算法
47     Stack<Tv>* tSort(int); //基于DFS的拓扑排序算法
48     void prim(int); //最小支撑树Prim算法
49     void dijkstra(int); //最短路径Dijkstra算法
50     template <typename PU> void pfs(int, PU); //优先级搜索框架
51 };

```

代码6.1 图ADT操作接口

仍为简化起见，这里直接开放了变量n和e。除以上所列的操作接口，这里还明确定义了顶点和边可能处于的若干状态，并通过内部接口reset()复位顶点和边的状态。

图的部分基本算法在此也以操作接口的形式供外部用户直接使用，比如广度优先搜索、深度优先搜索、双连通分量分解、最小支撑树、最短路径等。为求解更多的具体应用问题，读者可照此模式，独立地补充相应的算法。

就功能而言，这些算法均超脱于图结构的具体实现方式，借助统一的顶点和边ADT操作接口直接编写。尽管如此，正如以下即将看到的，图算法的时间、空间性能，却与图结构的具体实现方式紧密相关，在这方面的理解深度，也将反映和决定我们对图结构的驾驭与运用能力。

§ 6.3 邻接矩阵

6.3.1 原理

邻接矩阵（adjacency matrix）是图ADT最基本的实现方式，使用方阵 $A[n][n]$ 表示由 n 个顶点构成的图，其中每个单元，各自负责描述一对顶点之间可能存在的邻接关系，故此得名。

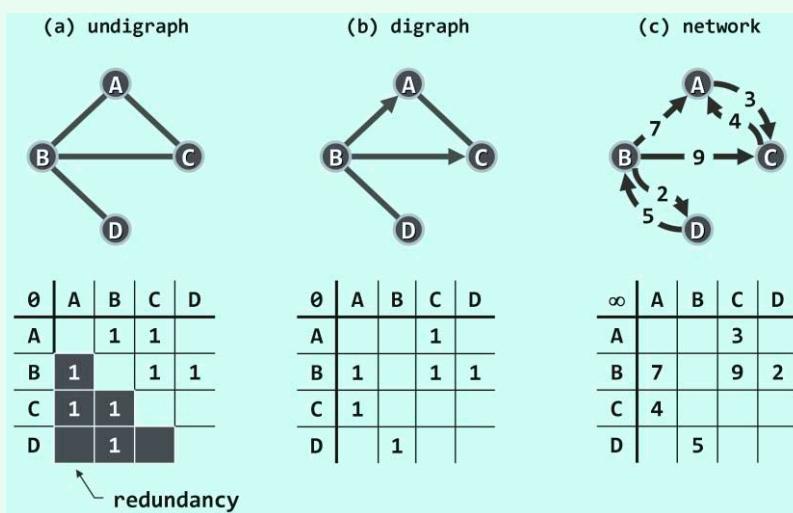


图6.5 邻接矩阵（空白单元对应的边不存在，其统一取值标注于矩阵最左上角）

对于无权图，存在（不存在）从顶点 u 到 v 的边，当且仅当 $A[u][v] = 1 (0)$ 。图6.5(a)和(b)即为无向图和有向图的邻接矩阵实例。

这一表示方式，不难推广至带权网络。此时如图(c)所示，矩阵各单元可从布尔型改为整型或浮点型，记录所对应边的权重。对于不存在的边，通常统一取值为 ∞ 或 0 。

6.3.2 实现

基于以上原理与构思实现的图结构如代码6.2所示。

```

1 #include "../Vector/Vector.h" //引入向量
2 #include "../Graph/Graph.h" //引入图ADT
3
4 template <typename Tv> struct Vertex { //顶点对象（为简化起见，并未严格封装）
5     Tv data; int inDegree, outDegree; VStatus status; //数据、出入度数、状态
6     int dTime, fTime; //时间标签
7     int parent; int priority; //在遍历树中的父节点、优先级数
8     Vertex(Tv const& d = (Tv) 0) : //构造新顶点
9         data(d), inDegree(0), outDegree(0), status(UNDISCOVERED),
10        dTime(-1), fTime(-1), parent(-1), priority(INT_MAX) {} //暂不考虑权重溢出
11    };
12
13 template <typename Te> struct Edge { //边对象（为简化起见，并未严格封装）
14     Te data; int weight; EStatus status; //数据、权重、状态
15     Edge(Te const& d, int w) : data(d), weight(w), status(UNDETERMINED) {} //构造新边
16    };
17

```

```

18 template <typename Tv, typename Te> //顶点类型、边类型
19 class GraphMatrix : public Graph<Tv, Te> { //基于向量，以邻接矩阵形式实现的图
20 private:
21     Vector<Vertex<Tv>> V; //顶点集（向量）
22     Vector<Vector<Edge<Te>*>> E; //边集（邻接矩阵）
23 public:
24     GraphMatrix() { n = e = 0; } //构造
25     ~GraphMatrix() { //析构
26         for (int j = 0; j < n; j++) //所有动态创建的
27             for (int k = 0; k < n; k++) //边记录
28                 delete E[j][k]; //逐条清除
29     }
30 // 顶点的基本操作：查询第i个顶点 (0 <= i < n)
31     virtual Tv& vertex(int i) { return V[i].data; } //数据
32     virtual int inDegree(int i) { return V[i].inDegree; } //入度
33     virtual int outDegree(int i) { return V[i].outDegree; } //出度
34     virtual int firstNbr(int i) { return nextNbr(i, n); } //首个邻接顶点
35     virtual int nextNbr(int i, int j) //相对于顶点j的下一邻接顶点
36     { while ((-1 < j) && (!exists(i, --j))); return j; } //逆向线性试探（改用邻接表可提高效率）
37     virtual VStatus& status(int i) { return V[i].status; } //状态
38     virtual int& dTime(int i) { return V[i].dTime; } //时间标签dTime
39     virtual int& fTime(int i) { return V[i].fTime; } //时间标签fTime
40     virtual int& parent(int i) { return V[i].parent; } //在遍历树中的父亲
41     virtual int& priority(int i) { return V[i].priority; } //在遍历树中的优先级数
42 // 顶点的动态操作
43     virtual int insert(Tv const& vertex) { //插入顶点，返回编号
44         for (int j = 0; j < n; j++) E[j].insert(NULL); n++; //各顶点预留一条潜在的关联边
45         E.insert(Vector<Edge<Te>*>(n, n, (Edge<Te>*) NULL)); //创建新顶点对应的边向量
46         return V.insert(Vertex<Tv>(vertex)); //顶点向量增加一个顶点
47     }
48     virtual Tv remove(int i) { //删除第i个顶点及其关联边 (0 <= i < n)
49         for (int j = 0; j < n; j++) //所有出边
50             if (exists(i, j)) { delete E[i][j]; V[j].inDegree--; } //逐条删除
51         E.remove(i); n--; //删除第i行
52         for (int j = 0; j < n; j++) //所有出边
53             if (exists(j, i)) { delete E[j].remove(i); V[j].outDegree--; } //逐条删除
54         Tv vBak = vertex(i); V.remove(i); //删除顶点i
55         return vBak; //返回被删除顶点的信息
56     }
57 // 边的确认操作
58     virtual bool exists(int i, int j) //边(i, j)是否存在
59     { return (0 <= i) && (i < n) && (0 <= j) && (j < n) && E[i][j] != NULL; }
60 // 边的基本操作：查询顶点i与j之间的联边 (0 <= i, j < n且exists(i, j))

```

```

61     virtual EStatus& status(int i, int j) { return E[i][j]->status; } //边(i, j)的状态
62     virtual Te& edge(int i, int j) { return E[i][j]->data; } //边(i, j)的数据
63     virtual int& weight(int i, int j) { return E[i][j]->weight; } //边(i, j)的权重
64 // 边的动态操作
65     virtual void insert(Te const& edge, int w, int i, int j) { //插入权重为w的边e = (i, j)
66         if (exists(i, j)) return; //确保该边尚不存在
67         E[i][j] = new Edge<Te>(edge, w); //创建新边
68         e++; V[i].outDegree++; V[j].inDegree++; //更新边计数与关联顶点的度数
69     }
70     virtual Te remove(int i, int j) { //删除顶点i和j之间的联边 (exists(i, j))
71         Te eBak = edge(i, j); delete E[i][j]; E[i][j] = NULL; //备份后删除边记录
72         e--; V[i].outDegree--; V[j].inDegree--; //更新边计数与关联顶点的度数
73         return eBak; //返回被删除边的信息
74     }
75 };

```

代码6.2 基于邻接矩阵实现的图结构

可见，这里利用第2章实现并封装的**Vector**结构，在内部将所有顶点组织为一个向量**V[]**；同时通过嵌套定义，将所有（潜在的）边组织为一个二维向量**E[][]**——亦即邻接矩阵。

每个顶点统一表示为**Vertex**对象，每条边统一表示为**Edge**对象。

边对象的属性**weight**统一简化为整型，既可用于表示无权图，亦可表示带权网络。

6.3.3 时间性能

按照代码6.2的实现方式，各顶点的编号可直接转换为其在邻接矩阵中对应的秩，从而使得图ADT中所有的静态操作接口，均只需 $O(1)$ 时间——这主要是得益于向量“循秩访问”的特长与优势。另外，边的静态和动态操作也仅需 $O(1)$ 时间——其代价是邻接矩阵的空间冗余。

然而，这种方法并非完美无缺。其不足主要体现在，顶点的动态操作接口均十分耗时。为了插入新的顶点，顶点集向量**V[]**需要添加一个元素；边集向量**E[][]**也需要增加一行，且每行都需要添加一个元素。顶点删除操作，亦与此类似。不难看出，这些恰恰也是向量结构固有的不足。

好在通常的算法中，顶点的动态操作远少于其它操作。而且，即便计入向量扩容的代价，就分摊意义而言，单次操作的耗时亦不过 $O(n)$ （习题[6-2]）。

6.3.4 空间性能

上述实现方式所用空间，主要消耗于邻接矩阵，亦即其中的二维边集向量**E[][]**。每个**Edge**对象虽需记录多项信息，但总体不过常数。根据2.4.4节的分析结论，**Vector**结构的装填因子始终不低于50%，故空间总量渐进地不超过 $O(n \times n) = O(n^2)$ 。

当然，对于无向图而言，仍有改进的余地。如图6.5(a)所示，无向图的邻接矩阵必为对称阵，其中除自环以外的每条边，都被重复地存放了两次。也就是说，近一半的单元都是冗余的。为消除这一缺点，可采用压缩存储等技巧，进一步提高空间利用率（习题[6-4]）。

§ 6.4 邻接表

6.4.1 原理

即便就有向图而言， $\Theta(n^2)$ 的空间亦有改进的余地。实际上，如此大的空间足以容纳所有潜在的边。然而实际应用所处理的图，所含的边通常远远少于 $\Theta(n^2)$ 。比如在平面图之类的稀疏图（sparse graph）中，边数渐进地不超过 $\Theta(n)$ ，仅与顶点总数大致相当（习题[6-3]）。

由此可见，邻接矩阵的空间效率之所以低，是因为其中大量单元所对应的边，通常并未在图中出现。因静态空间管理策略导致的此类问题，并非首次出现，比如此前的2.4节，就曾指出这类缺陷并试图改进。既然如此，为何不仿照3.1节的思路，将这里的向量替换为列表呢？

是的，按照这一思路，的确可以导出图结构的另一种表示与实现形式。

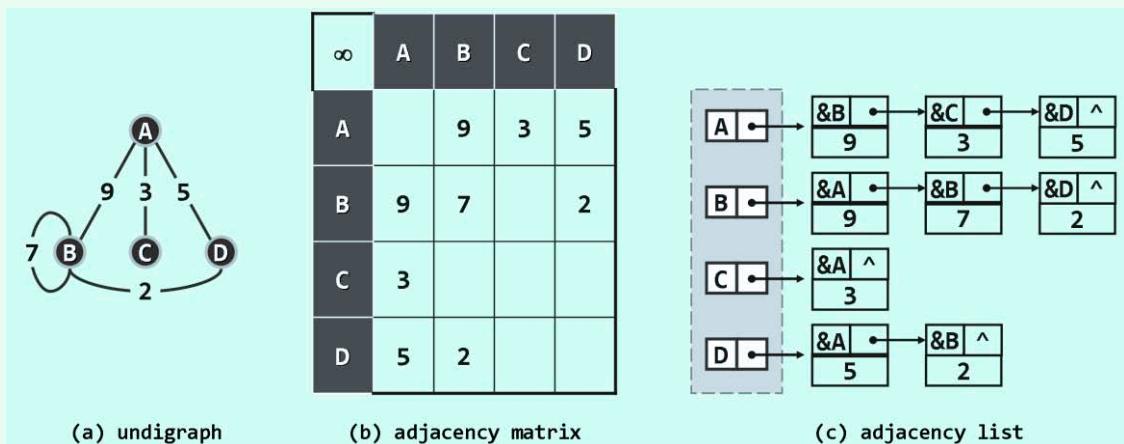


图6.6 以邻接表方式描述和实现图

以如图6.6(a)所示的无向图为例，只需将如图(b)所示的邻接矩阵，逐行地转换为如图(c)所示的一组列表，即可分别记录各顶点的关联边（或等价地，邻接顶点）。这些列表，也因此称作邻接表（adjacency list）。实际上，这种通用方法不难推广至有向图（习题[6-5]）。

6.4.2 复杂度

可见，邻接表所含列表数等于顶点总数n，每条边在其中仅存放一次（有向图）或两次（无向图），故空间总量为 $\Theta(n + e)$ ，与图自身的规模相当，较之邻接矩阵有很大改进。

当然，空间性能的这一改进，需以某些方面时间性能的降低为代价。比如，为判断顶点v到u的联边是否存在，`exists(v, u)`需在v对应的邻接表中顺序查找，共需 $\Theta(n)$ 时间。

与顶点相关操作接口，时间性能依然保持，甚至有所提高。比如，顶点的插入操作，可在 $\Theta(1)$ 而不是 $\Theta(n)$ 时间内完成。当然，顶点的删除操作，仍需遍历所有邻接表，共需 $\Theta(e)$ 时间。

尽管邻接表访问单条边的效率并不算高，却十分擅长于以批量方式，处理同一顶点的所有关联边。在以下图遍历等算法中，这是典型的处理流程和模式。比如，为枚举从顶点v发出的所有边，现在仅需 $\Theta(1 + \text{outDegree}(v))$ 而非 $\Theta(n)$ 时间。故总体而言，邻接表的效率较之邻接矩阵更高。因此，本章对以下各算法的复杂度分析，多以基于邻接表的实现方式为准。

§ 6.5 图遍历算法概述

图算法是个庞大的家族，其中大部分成员的主体框架，都可归结于图的遍历。与5.4节中树的遍历类似，图的遍历也需要访问所有顶点一次且仅一次；此外，图遍历同时还需要访问所有的边一次且仅一次——尽管对树而言这显而易见——并对边做分类，以便后续的处理。

实际上，无论采用何种策略和算法，图的遍历都可理解为，将非线性结构转化为半线性结构的过程。经遍历而确定的边类型中，最重要的一类即所谓的树边，它们与所有顶点共同构成了原图的一棵支撑树（森林），称作遍历树（*traversal tree*）。以遍历树为背景，其余各种类型的边，也能提供关于原图的重要信息，比如其中所含的环路等。

图中顶点之间可能存在多条通路，故为避免对顶点的重复访问，在遍历的过程中，通常还要动态地设置各顶点不同的状态，并随着遍历的进程不断地转换状态，直至最后的“访问完毕”。图的遍历更加强调对处于特定状态顶点的甄别与查找，故也称作图搜索（*graph search*）。

与树遍历一样，作为图算法基石的图搜索，本身也必须能够高效地实现。幸运的是，正如我们马上就会看到的，诸如深度优先、广度优先、最佳优先等基本而典型的图搜索，都可以在线性时间内完成。准确地，若顶点数和边数分别为n和e，则这些算法自身仅需 $O(n + e)$ 时间。既然图搜索需要访问所有的顶点和边，故这已经是我们所能期望的最优的结果。

§ 6.6 广度优先搜索

6.6.1 策略

各种图搜索之间的区别，体现为边分类结果的不同，以及所得遍历树（森林）的结构差异。其决定因素在于，搜索过程中的每一步迭代，将依照何种策略来选取下一接受访问的顶点。

通常，都是选取某个已访问到的顶点的邻居。同一顶点所有邻居之间的优先级，在多数遍历中不必讲究。因此，实质的差异应体现在，当有多个顶点已被访问到，应该优先从谁的邻居中选取下一顶点。比如，广度优先搜索（*breadth-first search, BFS*）采用的策略，可概括为：

越早被访问到的顶点，其邻居越优先被选用

于是，始自图中顶点s的BFS搜索，将首先访问顶点s；再依次访问s所有尚未访问到的邻居；再按后者被访问的先后次序，逐个访问它们的邻居；...；如此不断。在所有已访问到的顶点中，仍有邻居尚未访问者，构成所谓的波峰集（*frontier*）。于是，BFS搜索过程也可等效地理解为：

反复从波峰集中找到最早被访问到顶点v，若其邻居均已访问到，则将其逐出波峰集；否则，随意选出一个尚未访问到的邻居，并将其加入到波峰集中

不难发现，若将上述BFS策略应用于树结构，则效果等同于层次遍历（5.4.5节）——波峰集内顶点的深度始终相差不超过一，且波峰集总是优先在更浅的层次沿广度方向拓展。实际上，树层次遍历的这些特性，在一定程度上也适用于图的BFS搜索（习题[6-7]）。

由于每一步迭代都有一个顶点被访问，故至多迭代 $O(n)$ 步。另一方面，因为不会遗漏每个刚被访问顶点的任何邻居，故对于无向图必能覆盖s所属的连通分量（*connected component*），对于有向图必能覆盖以s为起点的可达分量（*reachable component*）。倘若还有来自其它连通分量或可达分量的顶点，则不妨从该顶点出发，重复上述过程。

6.6.2 实现

图的广度优先搜索算法，可实现如代码6.3所示。

```

1 template <typename Tv, typename Te> //广度优先搜索BFS算法(全图)
2 void Graph<Tv, Te>::bfs(int s) { //assert: 0 <= s < n
3     reset(); int clock = 0; int v = s; //初始化
4     do //逐一检查所有顶点
5         if (UNDISCOVERED == status(v)) //一旦遇到尚未发现的顶点
6             BFS(v, clock); //即从该顶点出发启动一次BFS
7     while (s != (v = (++v % n))); //按序号检查，故不漏不重
8 }
9
10 template <typename Tv, typename Te> //广度优先搜索BFS算法(单个连通域)
11 void Graph<Tv, Te>::BFS(int v, int& clock) { //assert: 0 <= v < n
12     Queue<int> Q; //引入辅助队列
13     status(v) = DISCOVERED; Q.enqueue(v); //初始化起点
14     while (!Q.empty()) { //在Q变空之前，不断
15         int v = Q.dequeue(); dTime(v) = ++clock; //取出队首顶点v
16         for (int u = firstNbr(v); -1 < u; u = nextNbr(v, u)) //枚举v的所有邻居u
17             if (UNDISCOVERED == status(u)) { //若u尚未被发现，则
18                 status(u) = DISCOVERED; Q.enqueue(u); //发现该顶点
19                 status(v, u) = TREE; parent(u) = v; //引入树边拓展支撑树
20             } else { //若u已被发现，或者甚至已访问完毕，则
21                 status(v, u) = CROSS; //将(v, u)归类于跨边
22             }
23         status(v) = VISITED; //至此，当前顶点访问完毕
24     }
25 }
```

代码6.3 BFS算法

算法的实质功能，由子算法BFS()完成。对该函数的反复调用，即可遍历所有连通或可达域。

仿照树的层次遍历，这里也借助队列Q，来保存已被发现，但尚未访问完毕的顶点。因此，任何顶点在进入该队列的同时，都被随即标记为DISCOVERED（已发现）状态。

BFS()的每一步迭代，都先从Q中取出当前的首顶点v；再逐一核对其各邻居u的状态并做相应处理；最后将顶点v置为VISITED（访问完毕）状态，即可进入下一步迭代。

若顶点u尚处于UNDISCOVERED（未发现）状态，则令其转为DISCOVERED状态，并随即加入队列Q。实际上，每次发现一个这样的顶点u，都意味着遍历树可从v到u拓展一条边。于是，将边(v, u)标记为树边(tree edge)，并按照遍历树中的承袭关系，将v记作u的父节点。

若顶点u已处于DISCOVERED状态（无向图），或者甚至处于VISITED状态（有向图），则意味着边(v, u)不属于遍历树，于是将该边归类为跨边(cross edge)（习题[6-11]）。

BFS()遍历结束后，所有访问过的顶点通过parent[]指针依次联接，从整体上给出了原图某一连通或可达域的一棵遍历树，称作广度优先搜索树，或简称BFS树(BFS tree)。

6.6.3 实例

图6.7给出了一个含8个顶点和11条边的有向图，起始于顶点S的BFS搜索过程。请留意观察辅助队列（下方）的演变，顶点状态的变化，边的分类与结果，以及BFS树的生长过程。

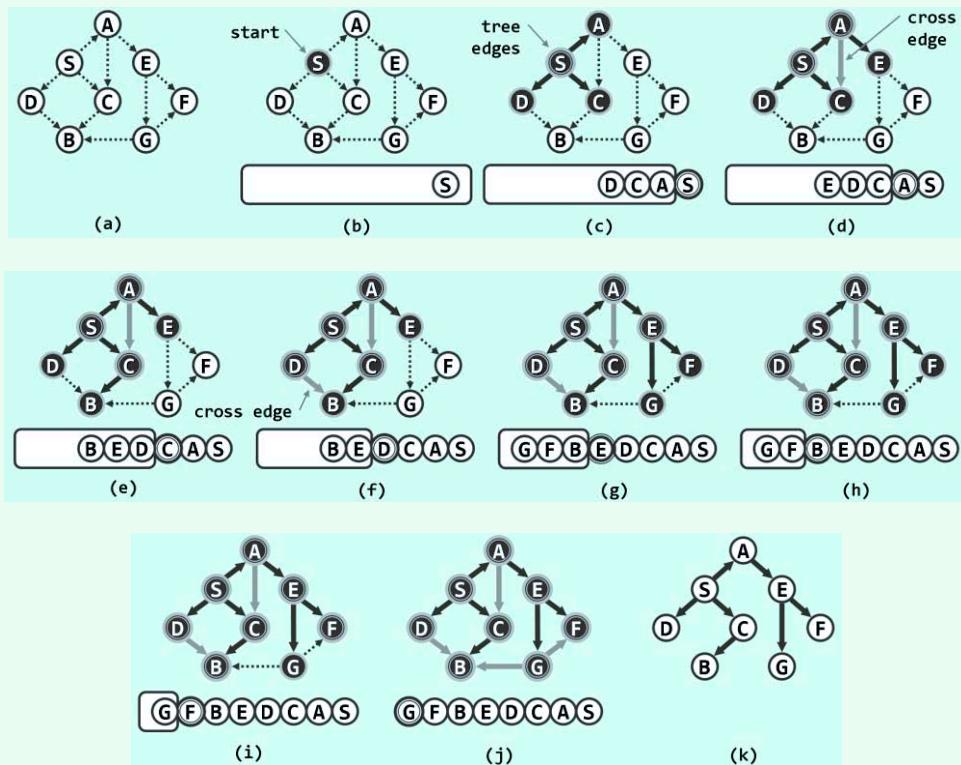


图6.7 广度优先搜索示例

不难看出， $\text{BFS}(s)$ 将覆盖起始顶点s所属的连通分量或可达分量，但无法抵达此外的顶点。而上层主函数**bfs()**的作用，正在于处理多个连通分量或可达分量并存的情况。具体地，在逐个检查顶点的过程中，只要发现某一顶点尚未被发现，则意味着其所属的连通分量或可达分量尚未触及，故可从该顶点出发再次启动BFS()，以遍历其所属的连通分量或可达分量。如此，各次BFS()调用所得的BFS树构成一个森林，称作BFS森林（BFS forest）。

6.6.4 复杂度

除作为输入的图本身外，BFS搜索所使用的空间，主要消耗在用于维护顶点访问次序的辅助队列、用于记录顶点和边状态的标识位向量，累计 $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(e) = \mathcal{O}(n + e)$ 。

时间方面，首先需花费 $\mathcal{O}(n + e)$ 时间复位所有顶点和边的状态。不计对子函数BFS()的调用，**bfs()**本身对所有顶点的枚举共需 $\mathcal{O}(n)$ 时间。而在对BFS()的所有调用中，每个顶点、每条边均只耗费 $\mathcal{O}(1)$ 时间，累计 $\mathcal{O}(n + e)$ 。综合起来，BFS搜索总体仅需 $\mathcal{O}(n + e)$ 时间。

6.6.5 应用

基于BFS搜索，可有效地解决连通域分解（习题[6-6]）、最短路径（习题[6-8]）等问题。

§ 6.7 深度优先搜索

6.7.1 策略

深度优先搜索（Depth-First Search, DFS）选取下一项点的策略，可概括为：

优先选取最后一个被访问到的顶点的邻居

于是，以顶点 s 为基点的DFS搜索，将首先访问顶点 s ；再从 s 所有尚未访问到的邻居中任取其一，并以之为基点，递归地执行DFS搜索。故各顶点被访问到的次序，类似于树的先序遍历（5.4.2节）；而各顶点被访问完毕的次序，则类似于树的后序遍历（5.4.4节）。

6.7.2 实现

深度优先遍历算法可实现如代码6.4所示。

```

1 template <typename Tv, typename Te> //深度优先搜索DFS算法(全图)
2 void Graph<Tv, Te>::dfs(int s) { //assert: 0 <= s < n
3     reset(); int clock = 0; int v = s; //初始化
4     do //逐一检查所有顶点
5         if (UNDISCOVERED == status(v)) //一旦遇到尚未发现的顶点
6             DFS(v, clock); //即从该顶点出发启动一次DFS
7     while (s != (v = (++v % n))); //按序号检查，故不漏不重
8 }
9
10 template <typename Tv, typename Te> //深度优先搜索DFS算法(单个连通域)
11 void Graph<Tv, Te>::DFS(int v, int& clock) { //assert: 0 <= v < n
12     dTime(v) = ++clock; status(v) = DISCOVERED; //发现当前顶点v
13     for (int u = firstNbr(v); -1 < u; u = nextNbr(v, u)) //枚举v的所有邻居u
14         switch (status(u)) { //并视其状态分别处理
15             case UNDISCOVERED: //u尚未发现，意味着支撑树可在此拓展
16                 status(v, u) = TREE; parent(u) = v; DFS(u, clock); break;
17             case DISCOVERED: //u已被发现但尚未访问完毕，应属被后代指向的祖先
18                 status(v, u) = BACKWARD; break;
19             default: //u已访问完毕(VISITED, 有向图)，则视承袭关系分为前向边或跨边
20                 status(v, u) = (dTime(v) < dTime(u)) ? FORWARD : CROSS; break;
21         }
22     status(v) = VISITED; fTime(v) = ++clock; //至此，当前顶点v方告访问完毕
23 }
```

代码6.4 DFS算法

算法的实质功能，由子算法DFS()递归地完成。每一递归实例中，都先将当前节点 v 标记为 DISCOVERED（已发现）状态，再逐一核对其各邻居 u 的状态并做相应处理。待其所有邻居均已处理完毕之后，将顶点 v 置为VISITED（访问完毕）状态，便可回溯。

若顶点 u 尚处于UNDISCOVERED（未发现）状态，则将边 (v, u) 归类为树边（tree edge），

并将 v 记作 u 的父节点。此后，便可将 u 作为当前顶点，继续递归地遍历。

若顶点 u 处于DISCOVERED状态，则意味着在此处发现一个有向环路。此时，在DFS遍历树中 u 必为 v 的祖先（习题[6-13]），故应将边 (v, u) 归类为后向边（back edge）。

这里为每个顶点 v 都记录了被发现的和访问完成的时刻，对应的时间区间 $[dTime(v), fTime(v)]$ 均称作 v 的活跃期（active duration）。实际上，任意顶点 v 和 u 之间是否存在祖先/后代的“血缘”关系，完全取决于二者的活跃期是否相互包含（习题[6-12]）。

对于有向图，顶点 u 还可能处于VISITED状态。此时，只要比对 v 与 u 的活跃期，即可判定在DFS树中 v 是否为 u 的祖先。若是，则边 (v, u) 应归类为前向边（forward edge）；否则，二者必然来自相互独立的两个分支，边 (v, u) 应归类为跨边（cross edge）。

DFS(s)返回后，所有访问过的顶点通过parent[]指针依次联接，从整体上给出了顶点 s 所属连通或可达分量的一棵遍历树，称作深度优先搜索树或DFS树（DFS tree）。与BFS搜索一样，此时若还有其它的连通或可达分量，则可以其中任何顶点为基点，再次启动DFS搜索。

最终，经各次DFS搜索生成的一系列DFS树，构成了DFS森林（DFS forest）。

6.7.3 实例

图6.8针对含7个顶点和10条边的某有向图，给出了DFS搜索的详细过程。请留意观察顶点时间标签的设置，顶点状态的演变，边的分类和结果，以及DFS树（森林）的生长过程。

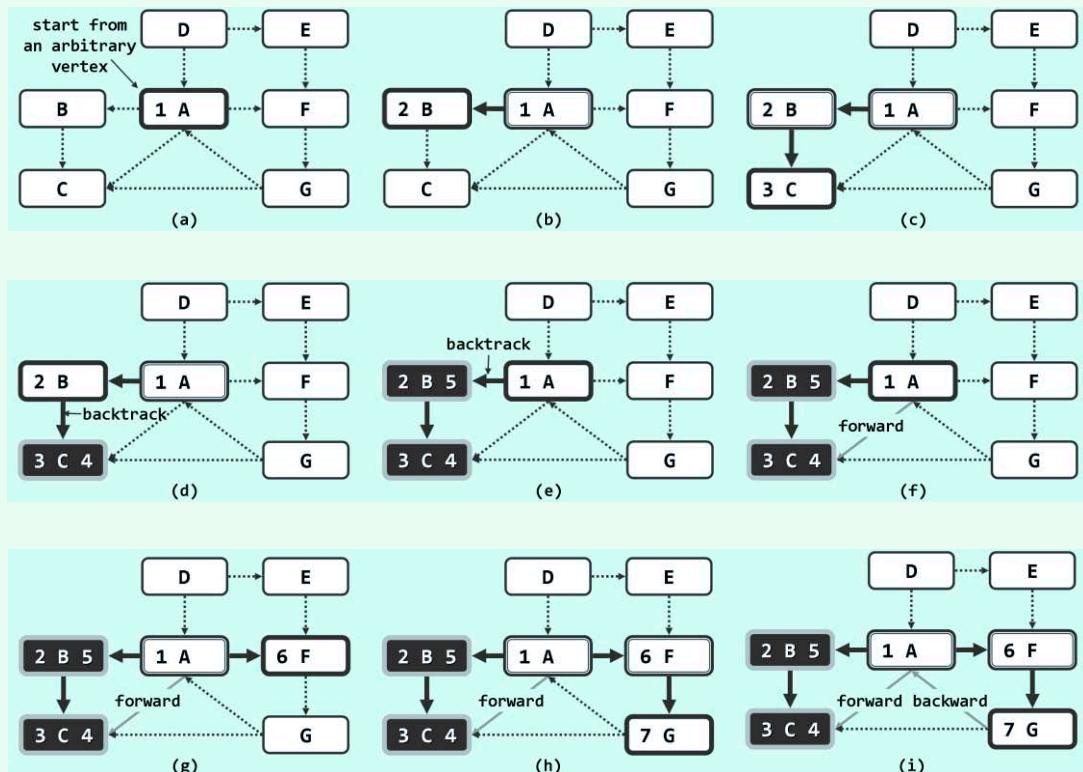


图6.8 深度优先搜索实例（粗边框白色，为当前顶点；细边框白色、双边框白色和黑色，分别为处于UNDISCOVERED、DISCOVERED和VISITED状态的顶点；dTime和fTime标签，分别标注于各顶点的左右）

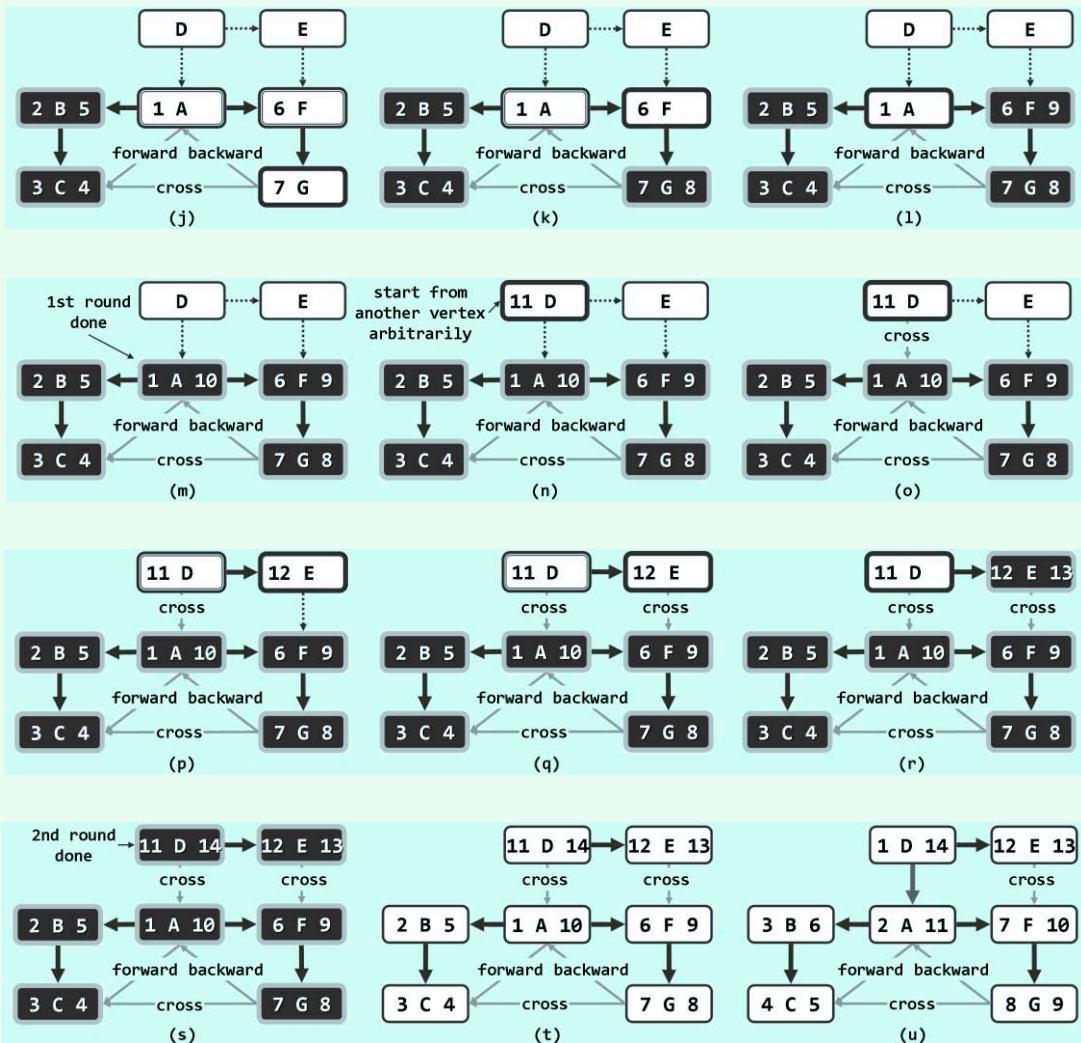


图6.8 深度优先搜索实例(续)：(a~m)对应于DFS(A)，(n~s)为随后的DFS(D)

最终结果如图(t)所示，为包含两棵DFS树的一个DFS森林。可以看出，选用不同的起始基点，生成的DFS树（森林）也可能各异。如本例中，若从D开始搜索，则DFS森林可能如图(u)所示。

图6.9以时间为横坐标，绘出了图6.8(u)中DFS树内各顶点的活跃期。可以清晰地看出，活跃期相互包含的顶点，在DFS树中都是“祖先-后代”关系（比如B之于C，或者D之于F）；反之亦然。

这种对应关系并非偶然，籍此可以便捷地判定节点之间的承袭关系（习题[6-12]）。故无论是对DFS搜索本身，还是对基于DFS的各种算法而言，时间标签都至关重要。

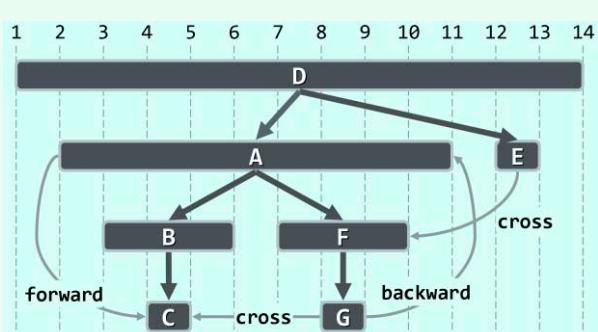


图6.9 活跃期与“祖先-后代”关系之间的对应关系

6.7.4 复杂度

除了原图本身，深度优先搜索算法所使用的空间，主要消耗于各顶点的时间标签和状态标记，以及各边的分类标记，二者累计不超过 $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(e) = \mathcal{O}(n + e)$ 。当然，如采用以上代码6.4的直接递归实现方式，操作系统为维护运行栈还需耗费一定量的空间——尽管这部分增量在渐进意义下还不足以动摇以上结论。为此，不妨仿照5.4节的做法，通过显式地引入并维护一个栈结构，将DFS算法改写为迭代版本（习题[6-14]）。

时间方面，首先需要花费 $\mathcal{O}(n + e)$ 时间对所有顶点和边的状态复位。不计对子函数DFS()的调用，dfs()本身对所有顶点的枚举共需 $\mathcal{O}(n)$ 时间。不计DFS()之间相互的递归调用，每个顶点、每条边只在子函数DFS()的某一递归实例中耗费 $\mathcal{O}(1)$ 时间，故累计亦不过 $\mathcal{O}(n + e)$ 时间。综合而言，深度优先搜索算法也可在 $\mathcal{O}(n + e)$ 时间内完成。

6.7.5 应用

深度优先搜索无疑是最重要的图遍历算法。基于DFS的框架，可以导出和建立大量的图算法。以4.4节英雄忒修斯营救公主的故事为例，为寻找从迷宫入口（起始顶点）至公主所在位置（目标顶点）的通路，可将迷宫内不同位置之间的联接关系表示为一幅图，并将问题转化为起点和终点之间的可达性判定，从而可利用DFS算法便捷地加以解决。非但如此，一旦找到通路，则不仅可以顺利抵达终点与公主会合，还能沿这条通路安全返回。当然，与广度优先搜索一样，深度优先搜索也可用作连通分量的分解，或者有向无环图的判定。

下面仅以拓扑排序和双连通域分解为例，对DFS模式的应用做更为具体的介绍。

§6.8 拓扑排序

6.8.1 应用

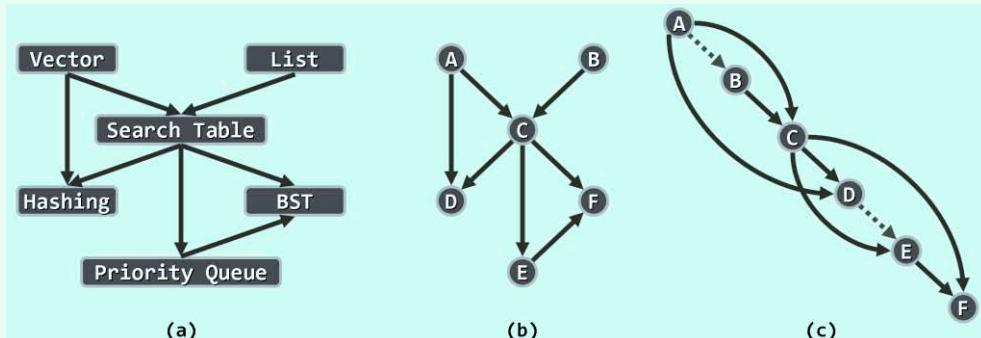


图6.10 拓扑排序

以教材的编写这一实际问题为例。首先，作者可借助有向图结构，整理出相关知识点之间的依赖关系。如图6.10(a)所示，因向量是散列表和查找表的基础知识点，故从Vector发出两条边分别指向Hashing和Search Table；同理，查找表是二叉搜索树的基础知识点，故也从前者引出一条边指向后者；……；诸如此类。那么，如何将这些知识点串联为一份教学计划，以保证在整个授课进程中，每堂课的基础知识点均在此前业已讲授呢？

若将图6.10(a)抽象为图(b)，则不难看出，图(c)就是一份可行的教材目录和授课计划。实际上，许多应用问题，都可转化为和描述为这一标准形式：给定描述某一实际应用(图(a))的有向图(图(b))，如何在与该图“相容”的前提下，将所有顶点排成一个线性序列(图(c))。

此处的“相容”，准确的含义是：每一顶点都不会通过边，指向其在此序列中的前驱顶点。这样的一个线性序列，称作原有向图的一个拓扑排序(**topological sorting**)。

6.8.2 有向无环图

那么，拓扑排序是否必然存在？若存在，又是否唯一？

这两个问题都不难回答。在图6.10(c)中，顶点A和B互换之后依然是一个拓扑排序，故同一有向图的拓扑排序未必唯一。若在图(b)中引入一条从顶点F指向B的边，使顶点B、C和F构成一个有向环路，则无论如何也不可能得到一个“相容”的线性序列，故拓扑排序也未必存在。

反之，不含环路的有向图——有向无环图——一定存在拓扑排序吗？答案是肯定的。

有向无环图的拓扑排序必然存在；反之亦然。这是因为，有向无环图对应于偏序关系，而拓扑排序则对应于全序关系。在顶点数目有限时，与任一偏序相容的全序必然存在。

任一有限偏序集，必有极值元素（尽管未必唯一）；类似地，任一有向无环图，也必包含入度为零的顶点。否则，每个顶点都至少有一条入边，意味着要么顶点有无穷个，要么包含环路。

于是，只要将入度为0的顶点m（及其关联边）从图G中取出，则剩余的G'依然是有向无环图，故其拓扑排序也必然存在。从递归的角度看，一旦得到了G'的拓扑排序，只需将m作为最大顶点插入，即可得到G的拓扑排序。如此，我们已经得到了一个拓扑排序的算法（习题[6-18]）。

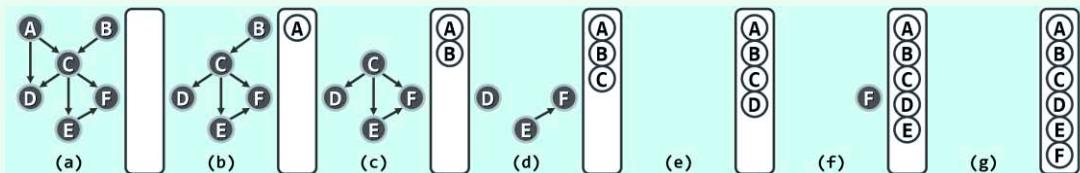


图6.11 利用“DAG必有零入度顶点”的特性，实现拓扑排序

图6.11给出了该算法的一个实例。以下，将转而从BFS搜索入手，给出另一拓扑排序算法。

6.8.3 算法

不妨将关注点，转至与极大顶点相对称的极小顶点。

同理，有限偏序集中也必然存在极小元素（同样，未必唯一）。该元素作为顶点，出度必然为零——比如图6.10(b)中的顶点D和F。而在对有向无环图的DFS搜索中，首先因访问完成而转换至VISITED状态的顶点m，也必然具有这一性质；反之亦然。

进一步地，根据DFS搜索的特性，顶点m（及其关联边）对此后的搜索过程将不起任何作用。于是，下一转换至VISITED状态的顶点可等效地理解为是，从图中剔除顶点m（及其关联边）之后的出度为零者——在拓扑排序中，该顶点应为顶点m的前驱。由此可见，DFS搜索过程中各顶点被标记为VISITED的次序，恰好（按逆序）给出了原图的一个拓扑排序。

此外，DFS搜索善于检测环路的特性，恰好可以用来判别输入是否为有向无环图。具体地，搜索过程中一旦发现后向边，即可终止算法并报告“因非DAG而无法拓扑排序”。

第7章

搜索树

从本章开始，讨论的重点将逐步转入查找技术。实际上，此前的若干章节已经就此做过一些讨论，在向量与列表等结构中，甚至已经提供并实现了对应的ADT接口。然而遗憾的是，此前这类接口的总体效率均无法令人满意。

以31页代码2.1中的向量模板类**Vector**为例，其中针对无序和有序向量的查找，分别提供了**find()**和**search()**接口。前者的实现策略只不过是将目标对象与向量内存放的对象逐个比对，故最坏情况下需要运行 $\mathcal{O}(n)$ 时间。后者利用二分查找策略尽管可以确保在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内完成单次查找，但一旦向量本身需要修改，无论是插入还是删除，在最坏情况下每次仍需 $\mathcal{O}(n)$ 时间。而就代码3.2中的列表模板类**List**（70页）而言，情况反而更糟：即便不考虑对列表本身的修改，无论**find()**或**search()**接口，在最坏情况或平均情况下都需要线性的时间。另外，基于向量或列表实现的栈和队列，一般地甚至不提供对任意成员的查找接口。总之，若既要求对象集合的组成可以高效率地动态调整，同时也要求能够高效率地查找，则以上线性结构均难以胜任。

那么，高效率的动态修改和高效率的静态查找，究竟能否同时兼顾？如有可能，又应该采用什么样的数据结构？接下来的两章，将逐步回答这两个层次的问题。

因为这部分内容所涉及的数据结构变种较多，它们各具特色、各有所长，也有其各自的适用范围，故按基本和高级两章分别讲解，相关内容之间的联系如图7.1所示。

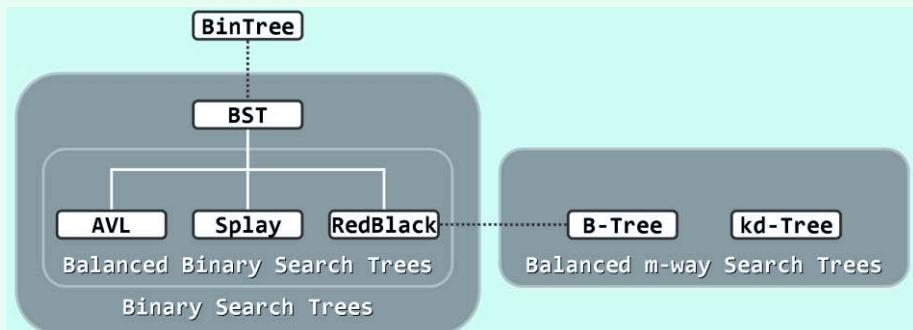


图7.1 第7章和第8章内容纵览

本章将首先介绍树式查找的总体构思、基本算法以及数据结构，通过对二分查找策略的抽象与推广，定义并实现二叉搜索树结构。尽管就最坏情况下的渐进时间复杂度而言，这一方法与此前相比并无实质的改进，但这部分内容依然十分重要——基于半线性的树形结构的这一总体构思，正是后续内容的立足点和出发点。比如，本章的后半部分将据此提出理想平衡和适度平衡等概念，并相应地引入和实现**AVL**树这一典型的平衡二叉搜索树。借助精巧的平衡调整算法，**AVL**树可以保证，即便是在最坏情况下，单次动态修改和静态查找也均可以在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内完成。这样，以上关于兼顾动态修改与静态查找操作效率的问题，就从正面得到了较为圆满的回答。接下来的第8章将在此基础上，针对更为具体的应用需求和更为精细的性能指标，介绍平衡搜索树家族的其它典型成员。

§ 7.1 查找

7.1.1 循关键码访问

所谓的查找或搜索（**search**），指从一组数据对象中找出符合特定条件者，这是构建算法的一种基本而重要的操作。其中的数据对象，统一地表示和实现为词条（**entry**）的形式；不同词条之间，依照各自的关键码（**key**）彼此区分。根据身份证号查找特定公民，根据车牌号查找特定车辆，根据国际统一书号查找特定图书，均属于根据关键码查找特定词条的实例。

请注意，与此前的“循秩访问”和“循位置访问”等完全不同，这一新的访问方式，与数据对象的物理位置或逻辑次序均无关。实际上，查找的过程与结果，仅仅取决于目标对象的关键码，故这种方式亦称作循关键码访问（**call-by-key**）。

7.1.2 词条

一般地，查找集内的元素，均可视作如代码7.1所示词条模板类**Entry**的实例化对象。

```

1 template <typename K, typename V> struct Entry { //词条模板类
2     K key; V value; //关键码、数值
3     Entry(K k = K(), V v = V()) : key(k), value(v) {}; //默认构造函数
4     Entry(Entry<K, V> const& e) : key(e.key), value(e.value) {}; //基于克隆的构造函数
5     bool operator<(Entry<K, V> const& e) { return key < e.key; } //比较器：小于
6     bool operator>(Entry<K, V> const& e) { return key > e.key; } //比较器：大于
7     bool operator==(Entry<K, V> const& e) { return key == e.key; } //判等器：等于
8     bool operator!=(Entry<K, V> const& e) { return key != e.key; } //判等器：不等于
9 }; //得益于比较器和判等器，从此往后，不必严格区分词条及其对应的关键码

```

代码7.1 词条模板类**Entry**

词条对象拥有成员变量**key**和**value**。前者作为特征，是词条之间比对和比较的依据；后者为实际的数据。若词条对应于商品的销售记录，则**key**为其条形扫描码，**value**可以是其单价或库存量等信息。设置词条类只为保证查找算法接口的统一，故不必过度封装。

7.1.3 序与比较器

由代码7.1可见，通过重载对应的操作符，可将词条的判等与比较等操作转化为关键码的判等与比较（故在不致歧义时，往往无需严格区分词条及其关键码）。当然，这里隐含地做了一个假定——所有词条构成一个全序关系，可以相互比对和比较。需指出的是，这一假定条件不见得总是满足。比如在人事数据库中，作为姓名的关键码之间并不具有天然的大小次序。另外，在任务相对单纯但更加讲求效率的某些场合，并不允许花费过多时间来维护全序关系，只能转而付出有限的代价维护一个偏序关系。后者的一个实例，即第10章将要介绍的优先级队列——根据其ADT接口规范，只需高效地跟踪全局的极值元素，其它元素一般无需直接访问。

实际上，任意词条之间可相互比较大小，也是此前（2.6.5节至2.6.8节）有序向量得以定义，以及二分查找算法赖以成立的基本前提。以下将基于同样的前提，讨论如何将二分查找的技巧融入二叉树结构，进而借助二叉搜索树以实现高效的查找。

§ 7.2 二叉搜索树

7.2.1 顺序性

若二叉树中各节点所对应的词条之间支持大小比较，则在不致歧义的情况下，我们可以不必严格区分树中的节点、节点对应的词条以及词条内部所存的关键码。

如图7.2所示，在所谓的二叉搜索树（binary search tree）中，处处都满足顺序性：

任一节点r的左（右）子树中，所有节点（若存在）均不大于（不小于）r

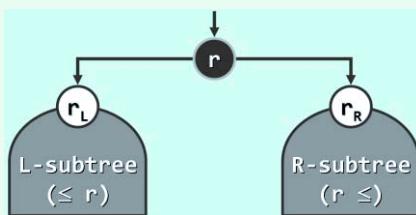


图7.2 二叉搜索树即处处满足顺序性的二叉树

为回避边界情况，这里不妨暂且假定所有节点互不相等。于是，上述顺序性便可简化表述为：

任一节点r的左（右）子树中，所有节点（若存在）均小于（大于）r

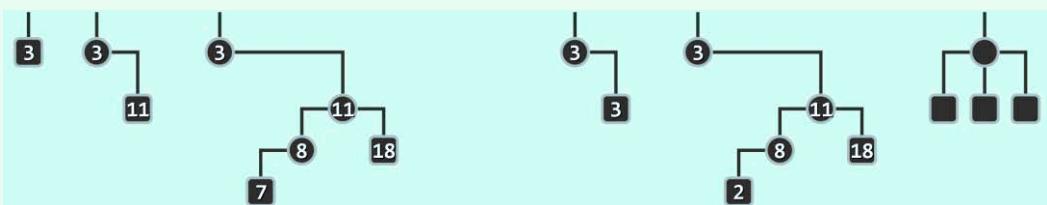


图7.3 二叉搜索树的三个实例（左），以及三个反例（右）

当然，在实际应用中，对相等元素的禁止既不自然也不必要。读者可在本书所给代码的基础上继续扩展，使得二叉搜索树的接口支持相等词条的同时并存（习题[7-10]）。比如，在去除掉这一限制之后，图7.3中原先的第一个反例，将转而成为合法的二叉搜索树。

7.2.2 中序遍历序列

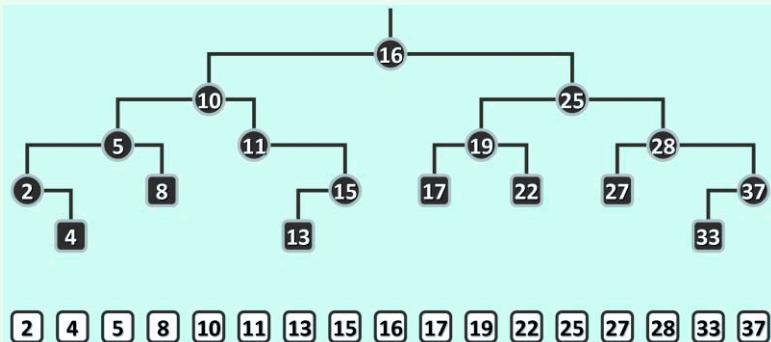


图7.4 二叉搜索树（上）的中序遍历序列（下），必然单调非降

顺序性是一项很强的条件。实际上，搜索树中节点之间的全序关系，已完全“蕴含”于这一

条件之中。以如图7.4所示的二叉搜索树为例，只需采用5.4.3节的算法对该树做一次中序遍历，即可将该树转换为一个线性序列，且该序列中的节点严格按照其大小次序排列。

这一现象，并非巧合。借助数学归纳法，可以证明更具一般性的结论（习题[7-1]）：

任何一棵二叉树是二叉搜索树，当且仅当其中序遍历序列单调非降

7.2.3 BST模板类

既然二叉搜索树属于二叉树的特例，故自然可以基于BinTree模板类（121页代码5.5），派生出如代码7.2所示的BST模板类。

```

1 #include "../BinTree/BinTree.h" //引入BinTree
2
3 template <typename T> class BST : public BinTree<T> { //由BinTree派生BST模板类
4 protected:
5     BinNodePosi(T) _hot; //BST::search()最后访问的非空(除非树空)的节点位置
6     BinNodePosi(T) connect34( //按照“3 + 4”结构，联接3个节点及四棵子树
7         BinNodePosi(T), BinNodePosi(T), BinNodePosi(T),
8         BinNodePosi(T), BinNodePosi(T), BinNodePosi(T), BinNodePosi(T));
9     BinNodePosi(T) rotateAt(BinNodePosi(T) x); //对x及其父亲、祖父做统一旋转调整
10 public: //基本接口：以virtual修饰，强制要求所有派生类(BST变种)根据各自的规则对其重写
11     virtual BinNodePosi(T) & search(const T& e); //查找
12     virtual BinNodePosi(T) insert(const T& e); //插入
13     virtual bool remove(const T& e); //删除
14 };

```

代码7.2 由BinTree派生的二叉搜索树模板类BST

可见，在继承原模板类BinTree的同时，BST内部也继续沿用了二叉树节点模板类BinNode。

按照二叉搜索树的接口规范定义，这里新增了三个标准的对外接口search()、insert()和remove()，分别对应于基本的查找、插入和删除操作。这三个标准接口的调用参数，都是属于元素类型T的对象引用——这正是此类结构“循关键码访问”方式的具体体现。

另外，既然这些操作接口的语义均涉及词条的大小和相等关系，故这里也假定基本元素类型T或者直接支持比较和判等操作，或者已经重载过对应的操作符。

本章以及下一章还将以BST为基类，进一步派生出二叉搜索树的多个变种。无论哪一变种，既必须支持上述三个基本接口，同时在内部的具体实现方式又有所不同。因此，它们均被定义为虚成员函数，从而强制要求派生的所有变种，根据各自的规则对其重写。

7.2.4 查找算法及其实现

■ 算法

二叉搜索树的查找算法，亦采用了减而治之的思路与策略，其执行过程可描述为：

从树根出发，逐步地缩小查找范围，直到发现目标（成功）或缩小至空树（失败）

例如，在图7.5中查找关键码22的过程如下。

首先，经与根节点16比较确认目标关键码更大，故深入右子树25递归查找；经比较发现目标关键码更小，故继续深入左子树19递归查找；经再次比较确认目标关键码更大后，深入右子树22递归查找；最终在节点22处匹配，查找成功。

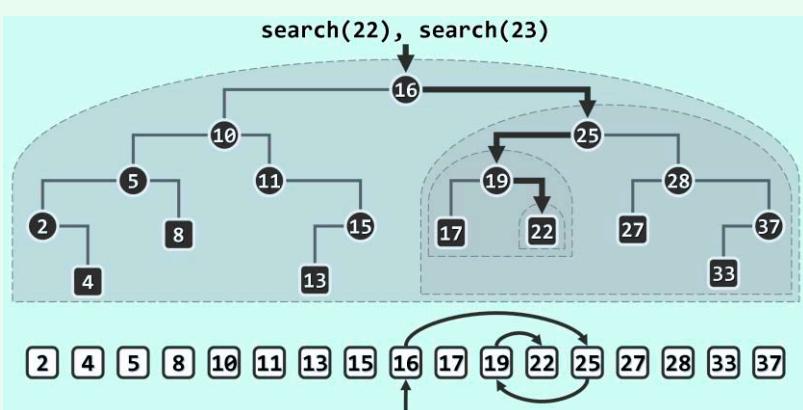


图7.5 二叉搜索树的查找过程（查找所经过的通路，以粗线条示意）

当然，查找未必成功。比如针对关键码20的查找也会经过同一查找通路并抵达节点22，但在因目标关键码更小而试图继续向左深入时发现左子树为空^①，至此即可确认查找失败。

一般地，在上述查找过程中，一旦发现当前节点为NULL，即说明查找范围已经缩小至空，查找失败；否则，视关键码比较结果，向左（更小）或向右（更大）深入，或者报告成功（相等）。

对照中序遍历序列可见，整个过程与有序向量的二分查找过程等效，故可视作后者的推广。

■ searchIn()算法与search()接口

一般地，在子树v中查找关键码e的过程，可实现为如代码7.3所示的算法searchIn()。

```
1 template <typename T> //在以v为根的（AVL、SPLAY、rbTree等）BST子树中查找关键码e
2 static BinNodePosi(T) & searchIn (BinNodePosi(T)& v, const T& e, BinNodePosi(T)& hot) {
3     if (!v || (e == v->data)) return v; //递归基：在节点v（或假想的通配节点）处命中
4     hot = v; //一般情况：先记下当前节点，然后再
5     return searchIn((e < v->data) ? v->lChild : v->rChild), e, hot); //深入一层，递归查找
6 } //返回时，返回值指向命中节点（或假想的通配哨兵），hot指向其父亲（退化时为初始值NULL）
```

代码7.3 二叉搜索树searchIn()算法的递归实现

节点的插入和删除操作，都需要首先调用查找算法，并根据查找结果确定后续的处理方式。因此，这里以引用方式传递（子）树根节点，以为后续操作提供必要的信息。

如代码7.4所示，通过调用searchIn()算法，即可实现二叉搜索树的标准接口search()。

```
1 template <typename T> BinNodePosi(T) & BST<T>::search(const T& e) //在BST中查找关键码e
2 { return searchIn(_root, e, _hot = NULL); } //返回目标节点位置的引用，以便后续插入、删除操作
```

代码7.4 二叉搜索树search()接口

^① 此类空节点通常对应于空孩子指针或引用，也可假想地等效为“真实”节点，后一方式不仅可简化算法描述以及退化情况的处理，也可直观地解释（B-树之类）纵贯多级存储层次的搜索树。故在后一场合，空节点也称作外部节点（external node），并等效地当作叶节点的“孩子”。这里暂采用前一方式，故空节点不在插图中出现。

■ 语义约定

以上查找算法之所以如此实现，是为了统一并简化后续不同搜索树的各种操作接口的实现。其中的技巧，主要体现于返回值和`hot`变量（即`BinTree`对象内部的`_hot`变量）的语义约定。

若查找成功，则`searchIn()`以及`search()`的返回值都将如图7.6(a)所示，指向一个关键码为`e`且真实存在的节点；若查找失败，则返回值的数值虽然为NULL，但是它作为引用将如图(b)所示，指向最后一次试图转向的空节点。对于后一情况，不妨假想地将此空节点转换为一个数值为`e`的哨兵节点——如此，无论成功与否，查找的返回值总是等效地指向“命中节点”。

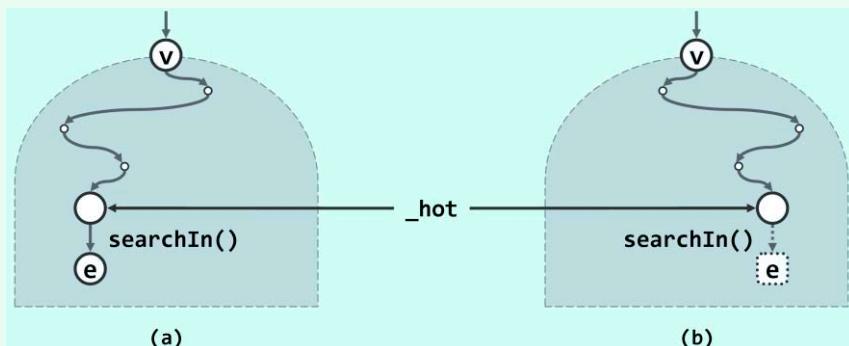


图7.6 `searchIn()`算法对返回值和`_hot`的语义定义：(a) 查找成功；(b) 查找失败

在调用`searchIn()`算法之前，`search()`接口首先将内部变量`_hot`初始化为NULL，然后作为引用型参数`hot`传递给`searchIn()`。在整个查找的过程中，`hot`变量始终指向当前节点的父亲。因此在算法返回时，按照如上定义，`_hot`亦将统一指向“命中节点”的父亲。

请注意，`_hot`节点是否拥有另一个孩子，与查找成功与否无关。查找成功时，节点`e`可能是叶子，也可能是内部节点；查找失败时，假想的哨兵`e`等效于叶节点，但可能有兄弟。

同时也请读者对照代码7.3验证，即便在退化的情况下（比如查找终止并返回于树根处），算法`searchIn()`的输出依然符合以上语义约定。

在7.2.6节将要介绍的删除操作中，也首先要进行查找（不妨设查找成功）。按照如上语义，命中节点必然就是待摘除节点；该节点与其父亲`_hot`，联合指示了删除操作的位置。7.2.5节将要介绍的插入操作，亦首先需做查找（不妨设查找失败）。按照如上语义，假想的“命中节点”也就是待插入的新节点；`_hot`所指向的，正是该节点可行的接入位置。

■ 效率

在二叉搜索树的每一层，查找算法至多访问一个节点，且只需常数时间，故总体所需时间应线性正比于查找路径的长度，或最终返回节点的深度。在最好情况下，目标关键码恰好出现在树根处（或其附近），此时只需 $\mathcal{O}(1)$ 时间。然而不幸的是，对于规模为n的二叉搜索树，深度在最坏情况下可达 $\Omega(n)$ 。比如，当该树退化为（接近于）一条单链时，发生此类情况的概率将很高。此时的单次查找可能需要线性时间并不奇怪，因为实际上这样的一棵“二分”搜索树，已经退化成了一个不折不扣的一维有序列表，而此时的查找则等效于顺序查找。

由此我们可得到启示：若要控制单次查找在最坏情况下的运行时间，须从控制二叉搜索树的高度入手。后续章节将要讨论的平衡二叉搜索树，正是基于这一思路而做的改进。

7.2.5 插入算法及其实现

■ 算法

为了在二叉搜索树中插入一个节点，首先需要利用查找算法`search()`确定插入的位置及方向，然后才能将新节点作为叶子插入。

以如图7.7(a)所示的二叉搜索树为例。若欲插入关键码40，则在执行`search(40)`之后，如图(b)所示，`_hot`将指向比较过的最后一个节点46，同时返回其左孩子（此时为空）的位置。于是接下来如图(c)所示，只需创建新节点40，并将其作为46的左孩子接入，拓扑意义上的节点插入即告完成。不过，为保持二叉搜索树作为数据结构的完整性和一致性，还需从节点`_hot` (46)出发，自底而上地逐个更新新节点40历代祖先的高度。

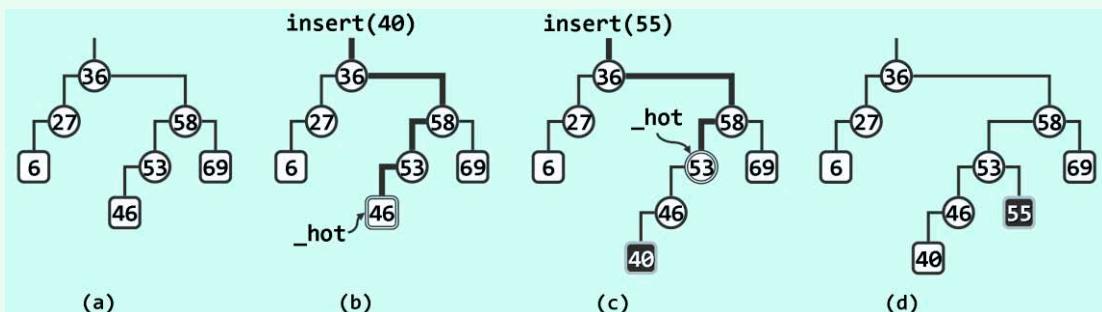


图7.7 二叉搜索树节点插入算法实例

接下来若欲插入关键码55，则在执行`search(55)`之后如图(c)所示，`_hot`将指向比较过的最后一个节点53，同时返回其右孩子（此时为空）的位置。于是如图(d)所示，创建新节点55，并将其作为53的右孩子接入。当然，此后同样需从节点`_hot`出发，逐代更新祖先的高度。

■ `insert()`接口的实现

一般地，在二叉搜索树中插入新节点e的过程，可描述为代码7.5中的函数`insert()`。

```
1 template <typename T> BinNodePosi(T) BST<T>::insert(const T& e) { //将关键码e插入BST树中
2     BinNodePosi(T) & x = search(e); if (x) return x; //确认目标节点不存在 (留意对_hot的设置)
3     x = new BinNode<T>(e, _hot); //创建新节点x : 以e为关键码, 以_hot为父
4     _size++; //更新全树规模
5     updateHeightAbove(x); //更新x及其历代祖先的高度
6     return x; //新插入的节点, 必为叶子
7 } //无论e是否存在于原树中, 返回时总有x->data == e
```

代码7.5 二叉搜索树`insert()`接口

首先调用`search()`查找e。若返回位置x非空，则说明已有雷同节点，插入操作失败。否则，x必是`_hot`节点的某一空孩子，于是创建这个孩子并存入e。此后，更新全树的规模记录，并调用代码5.6中的`updateHeightAbove()`更新x及其历代祖先的高度。

注意，按照以上实现方式，无论插入操作成功与否，都会返回一个非空位置，且该处的节点与拟插入的节点相等。如此可以确保一致性，以简化后续的操作。另外，也请对照代码7.3和代码7.4中的查找算法，体会这里对“首个节点插入空树”等特殊情况的处理手法。

■ 效率

由上可见，节点插入操作所需的时间，主要消耗于对算法**search()**及**updateHeightAbove()**的调用。后者与前者一样，在每一层次至多涉及一个节点，仅消耗 $O(1)$ 时间，故其时间复杂度也同样取决于新节点的深度，在最坏情况下不超过全树的高度。

7.2.6 删除算法及其实现

为从二叉搜索树中删除节点，首先也需要调用算法**BST::search()**，判断目标节点是否的确存在于树中。若存在，则需返回其位置，然后方能相应地具体实施删除操作。

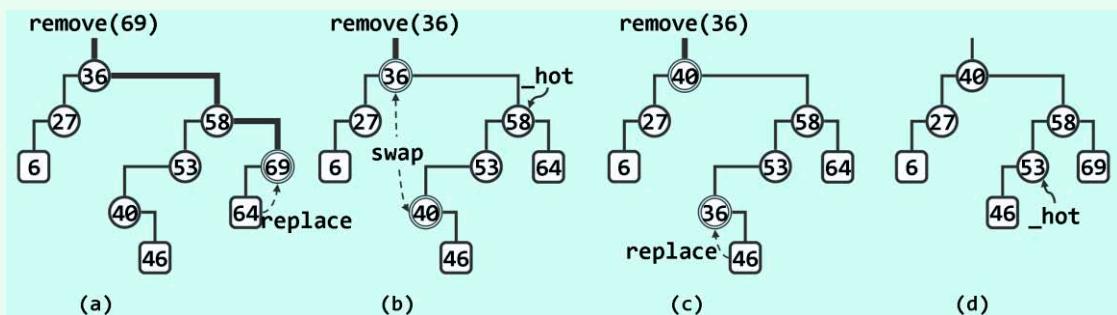


图7.8 二叉搜索树节点删除算法实例

■ 单分支情况

以如图7.8(a)所示二叉搜索树为例。若欲删除节点69，需首先通过**search(69)**定位待删除节点(69)。因该节点的右子树为空，故只需如图(b)所示，将其替换为左孩子(64)，则拓扑意义上的节点删除即告完成。当然，为保持二叉搜索树作为数据结构的完整性和一致性，还需更新全树的规模记录，释放被摘除的节点(69)，并自下而上地逐个更新替代节点(64)历代祖先的高度。注意，首个需要更新高度的祖先(58)，恰好由`_hot`指示。

不难理解，对于没有左孩子的目标节点，也可以对称地予以处理。当然，以上同时也已涵盖了左、右孩子均不存在（即目标节点为叶节点）的情况。

那么，当目标节点的左、右孩子双全时，删除操作又该如何实施呢？

■ 双分支情况

继续上例，设拟再删除二度节点36。如图7.8(b)所示，首先调用**BinNode::succ()**算法，找到该节点的直接后继(40)。然后，只需如图(c)所示交换二者的数据项，则可将后继节点等效地视作待删除的目标节点。不难验证，该后继节点必无左孩子，从而相当于转化为此前相对简单的情况。于是最后可如图(d)所示，将新的目标节点(36)替换为其右孩子(46)。

请注意，在中途互换数据项之后，这一局部如图(c)所示曾经一度并不满足顺序性。但这并不要紧——不难验证，在按照上述方法完成整个删除操作之后，全树的顺序性必然又将恢复。

同样地，除了更新全树规模记录和释放被摘除节点，此时也要更新一系列祖先节点的高度。不难验证，此时首个需要更新高度的祖先(53)，依然恰好由`_hot`指示。

■ **remove()**

一般地，删除关键码e的过程，可描述为如代码7.6所示的函数**remove()**。

```

1 template <typename T> bool BST<T>::remove(const T& e) { //从BST树中删除关键码
2     BinNodePosi(T) & x = search(e); if (!x) return false; //确认目标节点存在(留意对_hot的设置)
3     removeAt(x, _hot); _size--; //实施删除
4     updateHeightAbove(_hot); //更新_hot及其历代祖先的高度
5     return true;
6 } //删除成功与否,由返回值指示

```

代码7.6 二叉搜索树remove()接口

首先调用search()查找e。若返回位置x为空，则说明树中不含目标节点，故删除操作随即可以失败返回。否则，调用removeAt()删除目标节点x。同样，此后还需更新全树的规模，并调用函数updateHeightAbove(_hot)（121页代码5.6），更新被删除节点历代祖先的高度。

■ removeAt()

这里，实质的删除操作由removeAt()负责分情况实施，其具体实现如代码7.7所示。

```

1 ****
2 * BST节点删除算法：删除位置x所指的节点(全局静态模板函数，适用于AVL、Splay、RedBlack等各种BST)
3 * x由此前的查找确定，并经确认非NULL后方调用本函数，故必删除成功
4 * 与searchIn不同，调用之前不必将hot置空
5 * 返回值指向实际被删除节点的接替者，hot指向实际被删除节点的父亲——二者均有可能是NULL
6 ****
7 template <typename T> static BinNodePosi(T) removeAt(BinNodePosi(T)& x, BinNodePosi(T)& hot) {
8     BinNodePosi(T) w = x; //实际被摘除的节点，初值同x
9     BinNodePosi(T) succ = NULL; //实际被删除节点的接替者
10    if (!HasLChild(*x)) //若*x的左子树为空，则可
11        succ = x = x->rChild; //直接将*x替换为其右子树
12    else if (!HasRChild(*x)) //若右子树为空，则可
13        succ = x = x->lChild; //对称地处理——注意：此时succ != NULL
14    else { //若左右子树均存在，则选择x的直接后继作为实际被摘除节点，为此需要
15        w = w->succ(); //在右子树中找到*x的直接后继*w
16        swap(x->data, w->data); //交换*x和*w的数据元素
17        BinNodePosi(T) u = w->parent;
18        ((u == x) ? u->rChild : u->lChild) = succ = w->rChild; //隔离节点*w
19    }
20    hot = w->parent; //记录实际被删除节点的父亲
21    if (succ) succ->parent = hot; //并将被删除节点的接替者与hot相联
22    release(w->data); release(w); return succ; //释放被摘除节点，返回接替者
23 }

```

代码7.7 二叉搜索树removeAt()算法

■ 效率

删除操作所需的时间，主要消耗于对search()、succ()和updateHeightAbove()的调用。在树中的任一高度，它们至多消耗 $O(1)$ 时间。故总体的渐进时间复杂度，亦不超过全树的高度。

§ 7.3 平衡二叉搜索树

7.3.1 树高与性能

根据7.2节对二叉搜索树的实现与分析，`search()`、`insert()`和`remove()`等主要接口的运行时间，均线性正比于二叉搜索树的高度。而在最坏情况下，二叉搜索树可能彻底地退化为列表，此时的查找效率甚至会降至 $\Theta(n)$ ，线性正比于数据集的规模。因此，若不能有效地控制树高，则就实际的性能而言，较之此前的向量和列表，二叉搜索树将无法体现出明显优势。

那么，出现上述最坏（或较坏）情况的概率有多大？或者，至少从平均复杂度的角度来看，二叉搜索树的性能是否还算令人满意？

以下，将按照两种常用的随机统计口径，就二叉搜索树的平均性能做一比较。

■ 随机生成

不妨设各节点对应于 n 个互异关键码 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 。于是按照每一排列：

$$\sigma = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

只要从空树开始，通过依次执行`insert(e_{i_k})`，即可得到这 n 个关键码的一棵二叉搜索树 $T(\sigma)$ 。与随机排列 σ 如此相对应的二叉搜索树 $T(\sigma)$ ，称作由 σ “随机生成”（randomly generated）。

图7.9以三个关键码 $\{1, 2, 3\}$ 为例，列出了由其所有排列所生成的二叉搜索树。

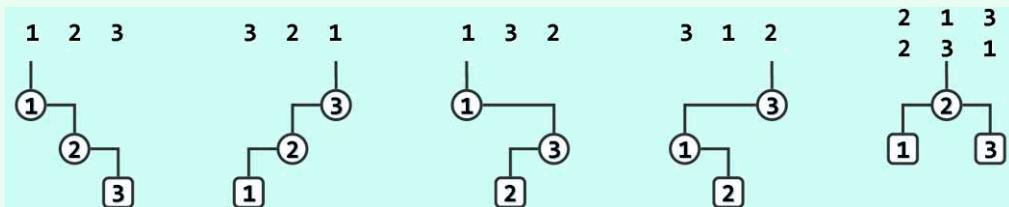


图7.9 由三个关键码 $\{1, 2, 3\}$ 的6种全排列生成的二叉搜索树

显然，任意的 n 个互异关键码，都可以构成 $n!$ 种全排列。若各排列作为输入序列的概率均等，则只要将它们各自所生成二叉搜索树的平均查找长度进行平均，即可在一定程度上反映二叉搜索树的平均查找性能。可以证明^{[29][30]}，在这一随机意义下，二叉搜索树的平均高度为 $\Theta(\log n)$ 。

■ 随机组成

另一随机策略是，假定 n 个互异节点同时给定，然后在遵守顺序性的前提下，随机确定它们之间的拓扑联接。如此，称二叉搜索树由这组节点“随机组成”（randomly composed）。

实际上，由 n 个互异节点组成的二叉搜索树，总共可能有 $(2n)!/n!/(n + 1)!$ 棵（习题[7-2]）。若这些树出现的概率均等，则通过对其高度做平均可知^[30]，平均查找长度为 $\Theta(\sqrt{n})$ 。

■ 比较

前一口径的 $\Theta(\log n)$ 与后一口径的 $\Theta(\sqrt{n})$ 之间，就渐进意义而言有实质的差别。原因何在？

读者也许已经发现，同一组关键码的不同排列所生成的二叉搜索树，未必不同。仍以图7.9为例，排列 $(2, 1, 3)$ 与 $(2, 3, 1)$ 生成的，实际上就是同一棵二叉搜索树。而在按照前一口径估计平均树高时，这棵树被统计了两次。实际上一般而言，越是平衡的树，被统计的次数亦越多。从这个角度讲，前一种平均的方式，在无形中高估了二叉搜索树的平均性能。因此相对而言，按照后一口径所得的估计值更加可信。

■ 树高与平均树高

实际上，即便按照以上口径统计出平均树高，仍不足以反映树高的随机分布情况。实际上，树高较大情况的概率依然可能很大。另外，理想的随机并不常见，实际应用中的情况恰恰相反，一组关键码往往会出现（接近）单调次序出现，因此频繁出现极高的搜索树也不足为怪。

另外，若`removeAt()`操作的确如代码7.7所示，总是固定地将待删除的二度节点与其直接后继交换，则随着操作次数的增加，二叉搜索树向左侧倾斜的趋势将愈发明显（习题[7-9]）。

7.3.2 理想平衡与适度平衡

■ 理想平衡

既然二叉搜索树的性能主要取决于高度，故在节点数目固定的前提下，应尽可能地降低高度。相应地，应尽可能地使兄弟子树的高度彼此接近，即全树尽可能地平衡。当然，包含n个节点的二叉树，高度不可能小于 $\lfloor \log_2 n \rfloor$ （习题[7-3]）。若树高恰好为 $\lfloor \log_2 n \rfloor$ ，则称作理想平衡树。例如，如图5.26所示的完全二叉树，甚至如图5.27所示的满二叉树，均属此列。

遗憾的是，完全二叉树“叶节点只能出现于最底部两层”的限制过于苛刻。略做简单的组合统计不难发现，相对于二叉树所有可能的形态，此类二叉树所占比例极低；而随着二叉树规模的增大，这一比例还将继续锐减（习题[7-2]）。由此可见，从算法可行性的角度来看，有必要依照某种相对宽松的标准，重新定义二叉搜索树的平衡性。

■ 适度平衡

在渐进意义下适当放松标准之后的平衡性，称作适度平衡。

幸运的是，适度平衡的标准的确存在。比如，若将树高限制为“渐进地不超过 $O(\log n)$ ”，则下节将要介绍的AVL树，以及下一章将要介绍的伸展树、红黑树、kd-树等，都属于适度平衡。这些变种，因此也都可归入平衡二叉搜索树（balanced binary search tree, BBST）之列。

7.3.3 等价变换

■ 等价二叉搜索树

如图7.10所示，若两棵二叉搜索树的中序遍历序列相同，则称它们彼此等价；反之亦然。

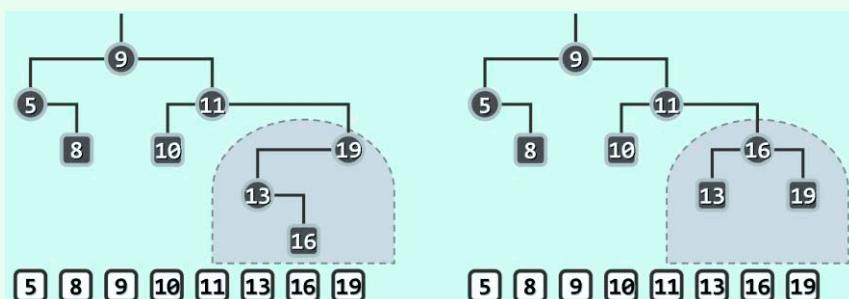


图7.10 由同一组共11个节点组成，相互等价的两棵二叉搜索树（二者在拓扑上的差异，以阴影圈出）

由该图也不难看出，虽然等价二叉搜索树中各节点的垂直高度可能有所不同，但水平次序完全一致。这一特点可概括为“上下可变，左右不乱”，它也是以下等价变换的基本特性。

第8章

高级搜索树

除了AVL树，本章将按照如图7.1所示的总体框架，继续介绍平衡二叉搜索树家族中的其它成员。首先，鉴于数据访问的局部性在实际应用中普遍存在，将按照“最常用者优先”的启发策略，引入并实现伸展树。尽管最坏情况下其单次操作需要 $\Theta(n)$ 时间，但分摊而言仍在 $\Theta(\log n)$ 以内。构思巧妙，实现简洁，加上适用广泛，这些特点都使得伸展树具有别样的魅力。

接下来，通过对平衡二叉搜索树的推广，引入平衡多路搜索树，并着重讨论作为其中典型代表的B-树。借助此类结构，可以有效地弥合不同存储级别之间，在访问速度上的巨大差异。

对照4阶B-树，还将引入并实现红黑树。红黑树不仅能保持全树的适度平衡，从而有效地控制单次操作的时间成本，而且可以将每次重平衡过程执行的结构性调整，控制在常数次数以内。后者也是该树有别于其它变种的关键特性，它不仅保证了红黑树更高的实际计算效率，更为持久性结构（**persistent structure**）之类高级数据结构的实现，提供了直接而有效的方法。

最后，将针对平面范围查询应用，介绍基于平面子区域正交划分的kd-树结构。该结构是对四叉树（quadtree）和八叉树（octree）等结构的一般性推广，它也为计算几何类应用问题的求解，提供了一种基本的模式和有效的方法。

§ 8.1 伸展树

与前一章的AVL树一样，伸展树（splay tree）^①也是平衡二叉搜索树的一种形式。相对于前者，后者的实现更为简捷。伸展树无需时刻都严格地保持全树的平衡，但却能够在任何足够长的真实操作序列中，保持分摊意义上的高效率。伸展树也不需要对基本的二叉树节点结构，做任何附加的要求或改动，更不需要记录平衡因子或高度之类的额外信息，故适用范围更广。

8.1.1 局部性

信息处理的典型模式是，将所有数据项视作一个集合，并将其组织为某种适宜的数据结构，进而借助操作接口高效访问。本书介绍的搜索树、词典和优先级队列等，都可归于此类。

为考查和评价各操作接口的效率，除了从最坏情况的角度出发，也可假定所有操作彼此独立、次序随机且概率均等，并从平均情况的角度出发。然而，后一尺度所依赖的假定条件，往往并不足以反映真实的情况。实际上，通常在任意数据结构的生命期内，不仅执行不同操作的概率往往极不均衡，而且各操作之间具有极强的相关性，并在整体上多呈现出极强的规律性。其中最为典型的，就是所谓的“数据局部性”（**data locality**），这包括两个方面的含义：

- 1) 刚刚被访问过的元素，极有可能在不久之后再次被访问到
- 2) 将被访问的下一元素，极有可能就处于不久之前被访问过的某个元素的附近

充分利用好此类特性，即可进一步地提高数据结构和算法的效率。比如习题[3-6]中的自调

^① 由D. D. Sleator和R. E. Tarjan于1985年发明^[41]

整列表，就是通过“即用即前移”的启发式策略，将最为常用的数据项集中于列表的前端，从而使得单次操作的时间成本大大降低。同样地，类似的策略也可应用于二叉搜索树。

就二叉搜索树而言，数据局部性具体表现为：

- 1) 刚刚被访问过的节点，极有可能在不久之后再次被访问到
- 2) 将被访问的下一节点，极有可能就处于不久之前被访问过的某个节点的附近

因此，只需将刚被访问的节点，及时地“转移”至树根（附近），即可加速后续的操作。当然，转移前后的搜索树必须相互等价，故为此仍需借助7.3.4节中等价变换的技巧。

8.1.2 逐层伸展

■ 简易伸展树

一种直接方式是：每访问过一个节点之后，随即反复地以它的父节点为轴，经适当的旋转将其提升一层，直至最终成为树根。以图8.1为例，若深度为3的节点E刚被访问——无论查找或插入，甚至“删除”——都可通过3次旋转，将该树等价变换为以E为根的另一棵二叉搜索树。

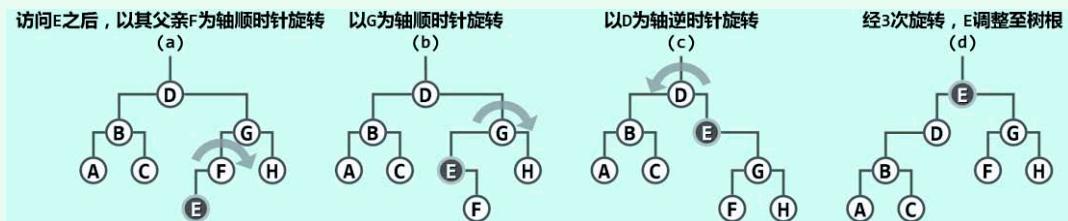


图8.1 通过自下而上的一系列等价变换，可使任一节点上升至树根

随着节点E的逐层上升，两侧子树的结构也不断地调整，故这一过程也称作伸展(splaying)，而采用这一调整策略的二叉搜索树也因此得名。不过，为实现真正意义上的伸展树，还须对以上策略做点微妙而本质的改进。之所以必须改进，是因为目前的策略仍存在致命的缺陷——对于很多访问序列，单次访问的分摊时间复杂度在极端情况下可能高达 $\Omega(n)$ 。

■ 最坏情况

不难验证，若从空树开始依次插入关键码{ 1, 2, 3, 4, 5 }，且其间采用如上调整策略，则可得到如图8.2(a)所示的二叉搜索树。接下来，若通过search()接口，再由小到大地依次访问各节点一次，则该树在各次访问之后的结构形态将如图(b~f)所示。

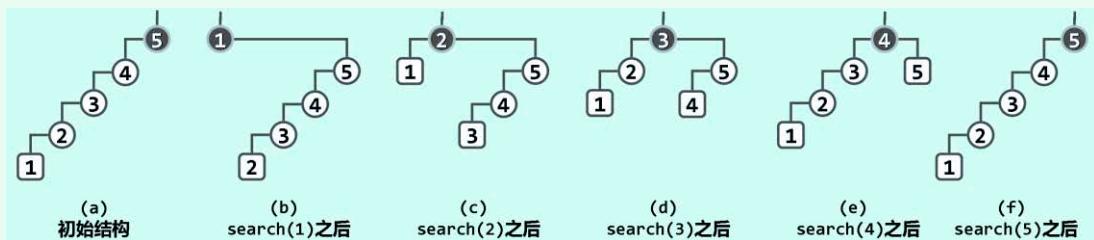


图8.2 简易伸展树的最坏情况

可见，在各次访问之后，为将对应节点伸展调整至树根，分别需做4、4、3、2和1次旋转。

一般地，若节点总数为n，则旋转操作的总次数应为：

$$(n - 1) + \{ (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \} = (n^2 + n - 2)/2 = \Omega(n^2)$$

如此分摊下来，每次访问平均需要 $\Omega(n)$ 时间。很遗憾，这一效率不仅远远低于AVL树，而且甚至与原始的二叉搜索树的最坏情况相当。而事实上，问题还远不止于此。

稍做比对即不难发现，图8.2(a)与(f)中二叉搜索树的结构完全相同。也就是说，经过以上连续的5次访问之后，全树的结构将会复原！这就意味着，以上情况可以持续地再现。

当然，这一实例，完全可以推广至规模任意的二叉搜索树。于是对于规模为任意n的伸展树，只要按关键码单调的次序，周期性地反复进行查找，则无论总的访问次数 $m \gg n$ 有多大，就分摊意义而言，每次访问都将需要 $\Omega(n)$ 时间！

那么，这类最坏的访问序列能否回避？具体地，又应该如何回避？

8.1.3 双层伸展

为克服上述伸展调整策略的缺陷，一种简便且有效的方法就是：将逐层伸展改为双层伸展。具体地，每次都从当前节点v向上追溯两层（而不是仅一层），并根据其父亲p以及祖父g的相对位置，进行相应的旋转。以下分三类情况，分别介绍具体的处理方法。

■ zig-zig/zag-zag

如图8.3(a)所示，设v是p的左孩子，且p也是g的左孩子；设W和X分别是v的左、右子树，Y和Z分别是p和g的右子树。

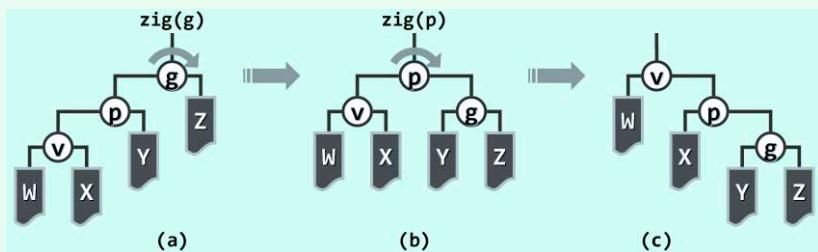


图8.3 通过zig-zig操作，将节点v上推两层

针对这种情况，首先以节点g为轴做顺时针旋转zig(g)，其效果如图(b)所示。然后，再以p为轴做顺时针旋转zig(p)，其效果如图(c)所示。如此连续的两次zig旋转，合称zig-zig调整。

自然地，另一完全对称的情形——v是p的右孩子，且p也是g的右孩子——则可通过连续的两次逆时针旋转实现调整，合称zag-zag操作。这一操作的具体过程，请读者独立绘出。

■ zig-zag/zag-zig

如图8.4(a)所示，设v是p的左孩子，而p是g的右孩子；设W是g的左子树，X和Y分别是v的左、右子树，Z是p的右子树。

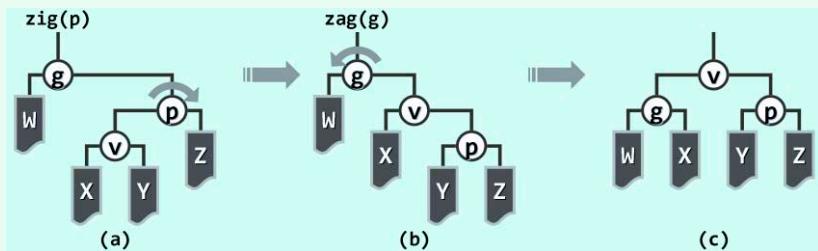


图8.4 通过zig-zag操作，将节点v上推两层

针对这种情况，首先以节点p为轴做顺时针旋转zig(p)，其效果如(b)所示。然后，再以g为轴做逆时针旋转zag(g)，其效果如图(c)所示。如此zig旋转再加zag旋转，合称zig-zag调整。

同样地，另一完全对称的情形——v是p的右孩子，而p是g的左孩子——则可通过zag旋转再加zig旋转实现调整，合称zag-zig操作。这一操作的具体过程，请读者独立绘出。

■ zig/zag

如图8.5(a)所示, 若 v 最初的深度为奇数, 则经过若干次双层调整至最后一次调整时, v 的父亲 p 即是树根 r 。将 v 的左、右子树记作 X 和 Y , 节点 $p = r$ 的另一子树记作 Z 。

此时, 只需围绕 $p = r$ 做顺时针旋转 $\text{zig}(p)$, 即可如图(b)所示, 使 v 最终攀升至树根, 从而结束整个伸展调整的过程。

zag 调整与之对称, 其过程请读者独立绘出。

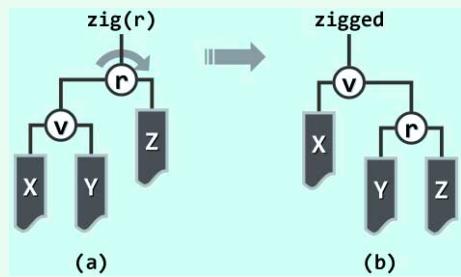


图8.5 通过zig操作, 将节点v上推一层, 成为树根

■ 效果与效率

综合以上各种情况, 每经过一次双层调整操作, 节点 v 都会上升两层。若 v 的初始深度 $\text{depth}(v)$ 为偶数, 则最终 v 将上升至树根。若 $\text{depth}(v)$ 为奇数, 则当 v 上升至深度为1时, 不妨最后再相应地做一次 zig 或 zag 单旋操作。无论如何, 经过 $\text{depth}(v)$ 次旋转后, v 最终总能成为树根。

重新审视图8.2的最坏实例不难发现, 这一访问序列导致 $\Omega(n)$ 平均单次访问时间的原因, 可以解释为: 在这一可持续重复的过程中, 二叉搜索树的高度始终不小于 $\lfloor n/2 \rfloor$; 而且, 至少有一半的节点在接受访问时, 不仅没有如最初设想的那样靠近树根, 而且反过来恰恰处于最底层。从树高的角度看, 问题根源也可再进一步地解释为: 在持续访问的过程中, 树高依算术级数逐步从 $n - 1$ 递减至 $\lfloor n/2 \rfloor$, 然后再逐步递增回到 $n - 1$ 。那么, 采用上述双层伸展的策略将每一刚被访问过的节点推至树根, 可否避免如图8.2所示的最坏情况呢?

稍作对比不难看出, 就调整之后的局部结构而言, zig-zag 和 zag-zig 调整与此前的逐层伸展完全一致(亦等效于AVL树的双旋调整), 而 zig-zig 和 zag-zag 调整则有所不同。事实上, 后者才是双层伸展策略优于逐层伸展策略的关键所在。以如图8.6(b)所示的二叉搜索树为例, 在 $\text{find}(1)$ 操作之后采用逐层调整策略与双层调整策略的效果, 分别如图(a)和图(c)所示。

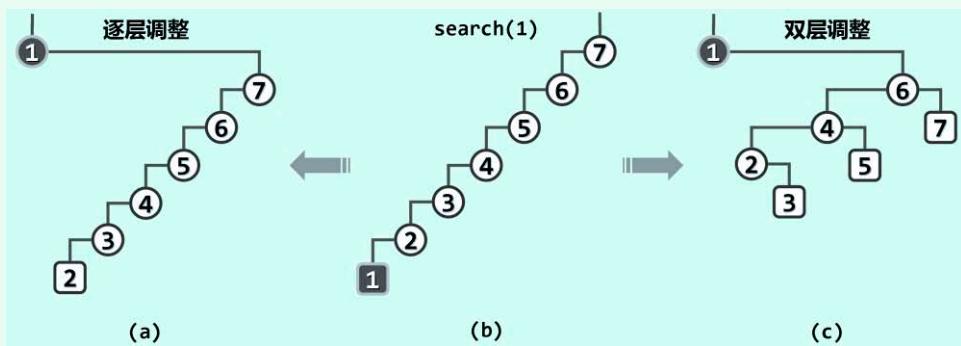


图8.6 双层调整策略的高度折半效果

可见, 最深节点(1)被访问之后再经过双层调整, 不仅同样可将该节点伸展至树根, 而且同时可使树的高度接近于减半。就树的形态而言, 双层伸展策略可“智能”地“折叠”被访问的子树分支, 从而有效地避免对长分支的连续访问。这就意味着, 即便节点 v 的深度为 $\Omega(n)$, 双层伸展策略既可将 v 推至树根, 亦可令对应分支的长度以几何级数(大致折半)的速度收缩。

图8.7则给出了一个节点更多、更具一般性的例子，从中可更加清晰地看出这一效果。

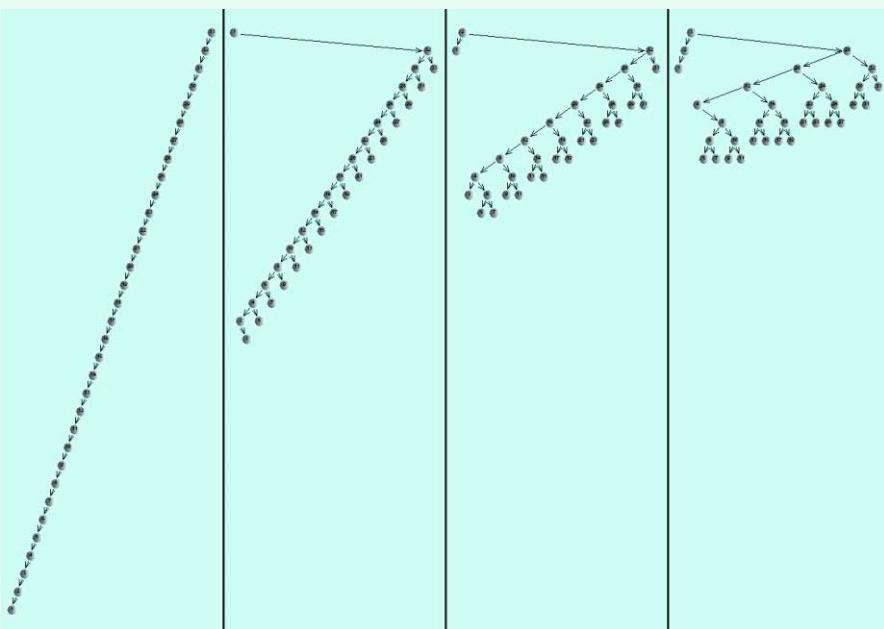


图8.7 伸展树中较深的节点一旦被访问到，对应分支的长度将随即减半

尽管在任一时刻伸展树中都可能存在很深的节点，但与含羞草类似地，一旦这类“坏”节点被“碰触”到，经过随后的双层伸展，其对应的分支都会收缩至长度大致折半。于是，即便每次都“恶意地”试图访问最底层节点，最坏情况也不会持续发生。可见，伸展树虽不能杜绝最坏情况的发生，却能有效地控制最坏情况发生的频度，从而在分摊意义上保证整体的高效率。

更准确地，Tarjan等人^[41]采用势能分析法（potential analysis）业已证明，在改用“双层伸展”策略之后，伸展树的单次操作均可在分摊的 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内完成（习题[8-2]）。

8.1.4 伸展树的实现

■ 伸展树接口定义

基于BST类，可定义伸展树模板类Splay如代码8.1所示。

```

1 #include "../BST/BST.h" //基于BST实现Splay
2 template <typename T> class Splay : public BST<T> { //由BST派生的Splay树模板类
3 protected:
4     BinNodePosi(T) splay(BinNodePosi(T) v); //将节点v伸展至根
5 public:
6     BinNodePosi(T) & search(const T& e); //查找(重写)
7     BinNodePosi(T) insert(const T& e); //插入(重写)
8     bool remove(const T& e); //删除(重写)
9 };

```

代码8.1 基于BST定义的伸展树接口

可见，这里直接沿用二叉搜索树类，并根据伸展树的平衡规则，重写了三个基本操作接口

`search()`、`insert()`和`remove()`，另外，针对伸展调整操作，设有一个内部保护型接口`splay()`。

这些接口的具体实现将在以下数节陆续给出。需强调的是，与一般的二叉搜索树不同，伸展树的查找也会引起整树的结构调整，故`search()`操作也需重写。

■ 伸展算法的实现

8.1.3节所述的伸展调整方法，可具体实现如代码8.2所示。

```

1 template <typename NodePosi> inline //在节点*p与*lC(可能为空)之间建立父(左)子关系
2 void attachAsLChild(NodePosi p, NodePosi lC) { p->lChild = lC; if (lC) lC->parent = p; }
3
4 template <typename NodePosi> inline //在节点*p与*rC(可能为空)之间建立父(右)子关系
5 void attachAsRChild(NodePosi p, NodePosi rC) { p->rChild = rC; if (rC) rC->parent = p; }
6
7 template <typename T> //Splay树伸展算法：从节点v出发逐层伸展
8 BinNodePosi(T) Splay<T>::splay(BinNodePosi(T) v) { //v为因最近访问而需伸展的节点位置
9     if (!v) return NULL;
10    BinNodePosi(T) p; BinNodePosi(T) g; /*v的父亲与祖父
11    while ((p = v->parent) && (g = p->parent)) { //自下而上，反复对*v做双层伸展
12        BinNodePosi(T) gg = g->parent; //每轮之后*v都以原曾祖父(great-grand parent)为父
13        if (IsLChild(*v))
14            if (IsLChild(*p)) { //zig-zig
15                attachAsLChild(g, p->rChild); attachAsLChild(p, v->rChild);
16                attachAsRChild(p, g); attachAsRChild(v, p);
17            } else { //zag-zag
18                attachAsLChild(p, v->rChild); attachAsRChild(g, v->lChild);
19                attachAsLChild(v, g); attachAsRChild(v, p);
20            }
21        else if (IsRChild(*p)) { //zag-zag
22            attachAsRChild(g, p->lChild); attachAsRChild(p, v->lChild);
23            attachAsLChild(p, g); attachAsLChild(v, p);
24        } else { //zag-zig
25            attachAsRChild(p, v->lChild); attachAsLChild(g, v->rChild);
26            attachAsRChild(v, g); attachAsLChild(v, p);
27        }
28        if (!gg) v->parent = NULL; //若*v原来的曾祖父*gg不存在，则*v现在应为树根
29        else //否则，*gg此后应该以*v作为左或右孩子
30            (g == gg->lChild) ? attachAsLChild(gg, v) : attachAsRChild(gg, v);
31        updateHeight(g); updateHeight(p); updateHeight(v);
32    } //双层伸展结束时，必有g == NULL，但p可能非空
33    if (p = v->parent) { //若p果真非空，则额外再做一次单旋
34        if (IsLChild(*v)) { attachAsLChild(p, v->rChild); attachAsRChild(v, p); }
35        else { attachAsRChild(p, v->lChild); attachAsLChild(v, p); }
36        updateHeight(p); updateHeight(v);
37    }

```

```

38     v->parent = NULL; return v;
39 } //调整之后新树根应为被伸展的节点，故返回该节点的位置以便上层函数更新树根

```

代码8.2 伸展树节点的调整

■ 查找算法的实现

在伸展树中查找任一关键码e的过程，可实现如代码8.3所示。

```

1 template <typename T> BinNodePosi(T) & Splay<T>::search(const T& e) { //在伸展树中查找关键码e
2     BinNodePosi(T) p = searchIn(_root, e, _hot = NULL);
3     _root = splay((p ? p : _hot)); //将最后一个被访问的节点伸展至根
4     return _root;
5 } //与其它BST不同，无论查找成功与否，_root都指向最后被访问的节点

```

代码8.3 伸展树节点的查找

首先，调用二叉搜索树的通用算法`searchIn()`（代码7.3）尝试查找具有关键码e的节点。无论查找是否成功，都继而调用`splay()`算法，将查找终止位置处的节点伸展到树根。

■ 插入算法的实现

为将节点插至伸展树中，固然可以调用二叉搜索树的标准插入算法`BST::insert()`（188页代码7.5），再通过双层伸展，将新插入的节点提升至树根。

然而，以上接口`Splay::search()`已集成了`splay()`伸展功能，故查找返回后，树根节点要么等于查找目标（查找成功），要么就是`_hot`，而且恰为拟插入节点的直接前驱或直接后继（查找失败）。因此，不妨改用如下方法实现`Splay::insert()`接口。

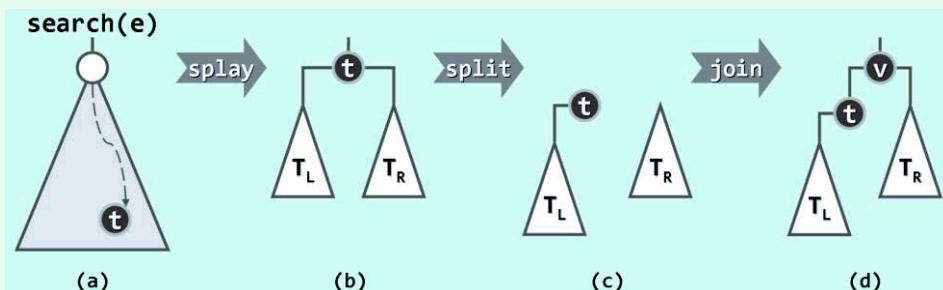


图8.8 伸展树的节点插入

如图8.8所示，为将关键码e插至伸展树T中，首先调用伸展树查找接口`Splay::search(e)`，查找该关键码（图(a)）。于是，其中最后被访问的节点t，将通过伸展被提升为树根，其左、右子树分别记作 T_L 和 T_R （图(b)）。

接下来，根据e与t的大小关系（不妨排除二者相等的情况），以t为界将T分裂为两棵子树。比如，不失一般性地设e大于t。于是，可切断t与其右孩子之间的联系（图(c)），再将以e为关键码的新节点v作为树根，并以t作为其左孩子，以 T_R 作为其右子树（图(d)）。

v小于t的情况与此完全对称，请读者独立做出分析。

上述算法过程，可具体实现如代码8.4所示。

```

1 template <typename T> BinNodePosi(T) Splay<T>::insert(const T& e) { //将关键码e插入伸展树中
2     if (!_root) { _size++; return _root = new BinNode<T>(e); } //处理原树为空的退化情况
3     if (e == search(e)->data) return _root; //确认目标节点不存在
4     _size++; BinNodePosi(T) t = _root; //创建新节点。以下调整<=7个指针以完成局部重构
5     if (_root->data < e) { //插入新根，以t和t->rChild为左、右孩子
6         t->parent = _root = new BinNode<T>(e, NULL, t, t->rChild); //2 + 3个
7         if (HasRChild(*t)) { t->rChild->parent = _root; t->rChild = NULL; } //<= 2个
8     } else { //插入新根，以t->lChild和t为左、右孩子
9         t->parent = _root = new BinNode<T>(e, NULL, t->lChild, t); //2 + 3个
10        if (HasLChild(*t)) { t->lChild->parent = _root; t->lChild = NULL; } //<= 2个
11    }
12    updateHeightAbove(t); //更新t及其祖先（实际上只有_root一个）的高度
13    return _root; //新节点必然置于树根，返回之
14 } //无论e是否存在于原树中，返回时总有_root->data == e

```

代码8.4 伸展树节点的插入

尽管伸展树并不需要记录和维护节点高度，为与其它平衡二叉搜索树的实现保持统一，这里还是对节点的高度做了及时的更新。出于效率的考虑，实际应用中可视情况，省略这类更新。

■ 删除算法的实现

为从伸展树中删除节点，固然也可以调用二叉搜索树标准的节点删除算法`BST::remove()`（190页代码7.6），再通过双层伸展，将该节点此前的父节点提升至树根。

然而，同样鉴于`Splay::search()`已集成了`splay()`伸展功能，且在成功返回后，树根节点恰好就是待删除节点。因此，亦不妨改用如下方法实现`Splay::remove()`接口。

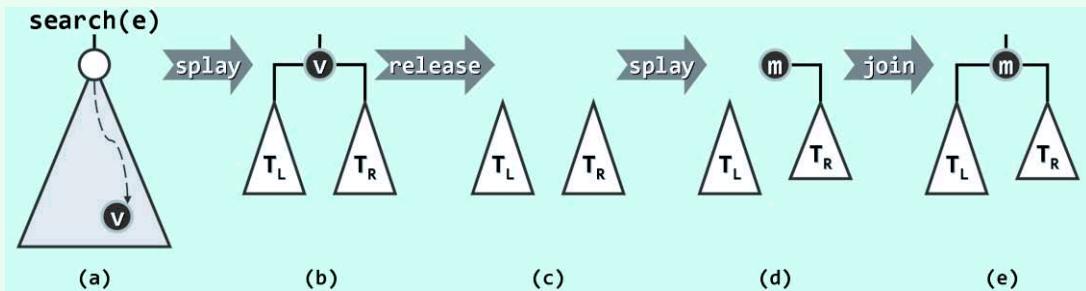


图8.9 伸展树的节点删除

如图8.9所示，为从伸展树T中删除关键码为e的节点，首先亦调用接口`Splay::search(e)`，查找该关键码，且不妨设命中节点为v（图(a)）。于是，v将随即通过伸展被提升为树根，其左、右子树分别记作 T_L 和 T_R （图(b)）。接下来，将v摘除（图(c)）。然后，在 T_R 中再次查找关键码e。尽管这一查找注定失败，却可以将 T_R 中的最小节点m，伸展提升为孩子树的根。

得益于二叉搜索树的顺序性，此时节点m的左子树必然为空；同时， T_L 中所有节点都应小于m（图(d)）。于是，只需将 T_L 作为左子树与m相互联接，即可得到一棵完整的二叉搜索树（图(e)）。如此不仅删除了v，而且既然新树根m在原树中是v的直接后继，故数据局部性也得到了利用。

上述算法过程，可具体实现如代码8.5所示。

```

1 template <typename T> bool Splay<T>::remove(const T& e) { //从伸展树中删除关键码e
2     if (!_root || (e != search(e)->data)) return false; //若树空或目标关键码不存在，则无法删除
3     BinNodePosi(T) w = _root; //assert: 经search()后节点e已被伸展至树根
4     if (!HasLChild(*_root)) { //若无左子树，则直接删除
5         _root = _root->rChild; if (_root) _root->parent = NULL;
6     } else if (!HasRChild(*_root)) { //若无右子树，也直接删除
7         _root = _root->lChild; if (_root) _root->parent = NULL;
8     } else { //若左右子树同时存在，则
9         BinNodePosi(T) lTree = _root->lChild;
10        lTree->parent = NULL; _root->lChild = NULL; //暂时将左子树切除
11        _root = _root->rChild; _root->parent = NULL; //只保留右子树
12        search(w->data); //以原树根为目标，做一次（必定失败的）查找
13     //// assert: 至此，右子树中最小节点必伸展至根，且（因无雷同节点）其左子树必空，于是
14     _root->lChild = lTree; lTree->parent = _root; //只需将原左子树接回原位即可
15 }
16 release(w->data); release(w); _size--; //释放节点，更新规模
17 if (_root) updateHeight(_root); //此后，若树非空，则树根的高度需要更新
18 return true; //返回成功标志
19 } //若目标节点存在且被删除，返回true；否则返回false

```

代码8.5 伸展树节点的删除

当然，其中的第二次查找也可在 T_L （若非空）中进行。读者不妨独立实现这一对称的版本。

§ 8.2 B-树

8.2.1 多路平衡查找

■ 分级存储

现代电子计算机发展速度空前。就计算能力而言，ENIAC^②每秒只能执行5000次加法运算，而今天的超级计算机每秒已经能够执行 3×10^{16} 次以上的浮点运算^③。就存储能力而言，情况似乎也是如此：ENIAC只有一万八千个电子管，而如今容量以TB计的硬盘也不过数百元，内存的常规容量也已达到GB量级。

然而从实际应用的需求来看，问题规模的膨胀却远远快于存储能力的增长。以数据库为例，在20世纪80年代初，典型数据库的规模为10~100 MB，而三十年后的今天，典型数据库的规模已需要以TB为单位来计量。计算机存储能力提高速度相对滞后，是长期存在的现象，而且随着时间的推移，这一矛盾将日益凸显。鉴于在同等成本下，存储器的容量越大（小）则访问速度越慢（快），因此一味地提高存储器容量，亦非解决这一矛盾的良策。

^② 第一台电子计算机，1946年2月15日诞生于美国宾夕法尼亚大学工学院

^③ 2013年6月，天河-2以此运算速度，荣登世界超级计算机500强榜首

实践证明，分级存储才是行之有效的方法。在由内存与外存（磁盘）组成的二级存储系统中，数据全集往往存放于外存中，计算过程中则可将内存作为外存的高速缓存，存放最常用数据项的副本。借助高效的调度算法，如此便可将内存的“高速度”与外存的“大容量”结合起来。

两个相邻存储级别之间的数据传输，统称I/O操作。各级存储器的访问速度相差悬殊，故应尽可能地减少I/O操作。仍以内存与磁盘为例，其单次访问延迟大致分别在纳秒(ns)和毫秒(ms)级别，相差5至6个数量级。也就是说，对内存而言的一秒/一天，相当于磁盘的一星期/两千年。因此，为减少对外存的一次访问，我们宁愿访问内存百次、千次甚至万次。也正因为此，在衡量相关算法的性能时，基本可以忽略对内存的访问，转而更多地关注对外存的访问次数。

■ 多路搜索树

当数据规模大到内存已不足以容纳时，常规平衡二叉搜索树的效率将大打折扣。其原因在于，查找过程对外存的访问次数过多。例如，若将 10^9 个记录在外存中组织为AVL树，则每次查找大致需做30次外存访问。那么，如何才能有效减少外存操作呢？

为此，需要充分利用磁盘之类外部存储器的另一特性：就时间成本而言，读取物理地址连续的一千个字节，与读取单个字节几乎没有区别。既然外部存储器更适宜于批量式访问，不妨通过时间成本相对极低的多次内存操作，来替代时间成本相对极高的单次外存操作。相应地，需要将通常的二叉搜索树，改造为多路搜索树——在中序遍历的意义下，这也是一种等价变换。

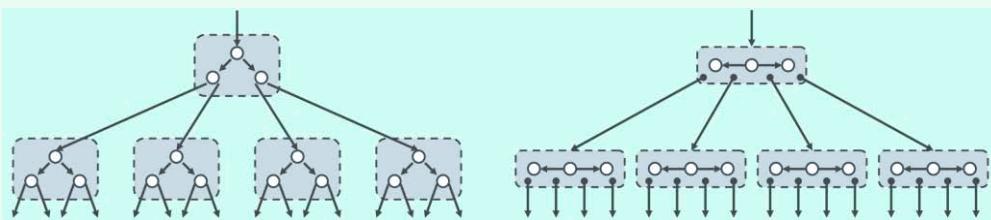


图8.10 二叉搜索树与四路搜索树

具体地如图8.10所示，比如可以两层为间隔，将各节点与其左、右孩子合并为“大节点”：原节点及其孩子的共三个关键码予以保留；孩子节点原有的四个分支也予以保留并按中序遍历次序排列；节点到左、右孩子的分支转化为“大节点”内部的搜索，在图中表示为水平分支。如此改造之后，每个“大节点”拥有四个分支，故称作四路搜索树。

这一策略还可进一步推广，比如以三层为间隔，将各节点及其两个孩子、四个孙子合并为含有七个关键码、八个分支的“大节点”，进而得到八路搜索树。一般地，以k层为间隔如此重组，可将二叉搜索树转化为等价的 2^k 路搜索树，统称多路搜索树（multi-way search tree）。

不难验证，多路搜索树同样支持查找等操作，且效果与原二叉搜索树完全等同；然而重要的是，其对外存的访问方式已发生本质变化。实际上，在此时的搜索每下降一层，都以“大节点”为单位从外存读取一组（不再是单个）关键码。更为重要的是，这组关键码在逻辑上与物理上都彼此相邻，故可以批量方式从外存一次性读出，且所需时间与读取单个关键码几乎一样。

当然，每组关键码的最佳数目，取决于不同外存的批量访问特性。比如旋转式磁盘的读写操作多以扇区为单位，故可根据扇区的容量和关键码的大小，经换算得出每组关键码的最佳规模。例如若取 $k = 8$ ，则每个“大节点”将拥有255个关键码和256个分支，此时同样对于 $1G$ 个记录，每次查找所涉及的外存访问将减至4~5次。

■ 多路平衡搜索树

所谓 m 阶B-树^④ (B-tree) , 即 m 路平衡搜索树 ($m \geq 2$) , 其宏观结构如图8.11所示。

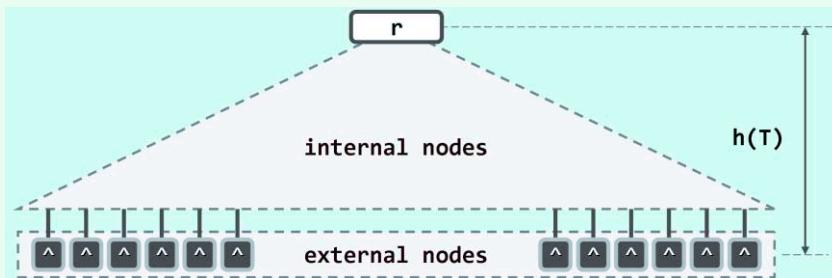


图8.11 B-树的宏观结构 (外部节点以深色示意, 深度完全一致, 且都同处于最底层)

其中, 所有外部节点均深度相等。同时, 每个内部节点都存有不超过 $m - 1$ 个关键码, 以及用以指示对应分支的不超过 m 个引用。具体地, 存有 $n \leq m - 1$ 个关键码:

$$K_1 < K_2 < K_3 < K_4 < \dots < K_n$$

的内部节点, 同时还配有 $n + 1 \leq m$ 个引用:

$$A_0 < A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \dots < A_n$$

反过来, 各内部节点的分支数也不能太少。具体地, 除根以外的所有内部节点, 都应满足:

$$n + 1 \geq \lceil m/2 \rceil$$

而在非空的B-树中, 根节点应满足:

$$n + 1 \geq 2$$

由于各节点的分支数介于 $\lceil m/2 \rceil$ 至 m 之间, 故 m 阶B-树也称作 $(\lceil m/2 \rceil, m)$ -树, 如 $(2, 3)$ -树、 $(3, 6)$ -树或 $(7, 13)$ -树等。

B-树的外部节点 (external node) 更加名副其实——它们实际上未必意味着查找失败, 而可能表示目标关键码存在于更低层次的某一外部存储系统中, 顺着该节点的指示, 即可深入至下一级存储系统并继续查找。正因为如此, 不同于常规的搜索树, 如图8.11所示, 在计算B-树高度时, 还需要计入其最底层的外部节点。

例如, 图8.12(a)即为一棵由9个内部节点、15个外部节点以及14个关键码组成的4阶B-树, 其高度 $h = 3$, 其中每个节点包含1~3个关键码, 拥有2~4个分支。

作为与二叉搜索树等价的“扁平化”版本, B-树的宽度 (亦即最底层外部节点的数目) 往往远大于其高度。因此在以图形描述B-树的逻辑结构时, 我们往往需要简化其中分支的画法, 并转而采用如图(b)所示的紧凑形式。

另外, 既然外部节点均同处于最底层, 且深度完全一致, 故在将它们省略之后, 通常还不致造成误解。因此, 还可以将B-树的逻辑结构, 进一步精简为如图(c)所示的最紧凑形式。

由这种最紧凑的表示形式, 也可同时看出, B-树叶节点 (即最深的内部节点) 的深度也必然完全一致, 比如[7]、[19, 22]、[28]、[37, 40, 41]、[46]和[52]。

^④ 由R. Bayer和E. McCreight于1970年合作发明^[43]

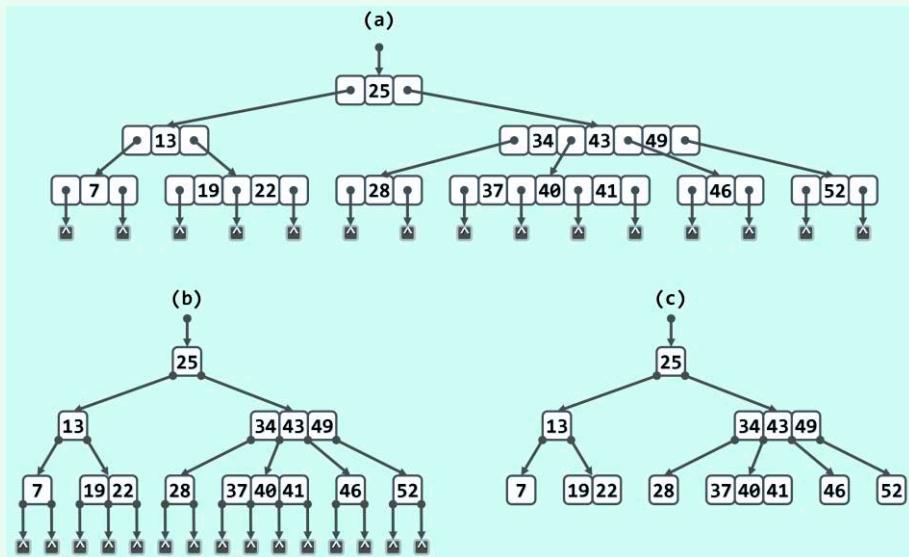


图8.12 (a) 4阶B-树；(b) B-树的紧凑表示；(c) B-树的最紧凑表示

8.2.2 ADT接口及其实现

按照以上定义，可以模板类的形式描述并实现B-树节点以及B-树结构本身如下。

■ 节点

B-树节点BTNode类，可实现如代码8.6所示。

```

1 #include "../vector/vector.h"
2 #define BTNodePosi(T) BTNode<T>* //B-树节点位置
3
4 template <typename T> struct BTNode { //B-树节点模板类
5   // 成员 (为简化描述起见统一开放，读者可根据需要进一步封装)
6   BTNodePosi(T) parent; //父节点
7   Vector<T> key; //关键码向量
8   Vector<BTNodePosi(T)> child; //孩子向量 (其长度总比key多一)
9   // 构造函数 (注意：BTNode只能作为根节点创建，而且初始时有0个关键码和1个空孩子指针)
10  BTNode() { parent = NULL; child.insert(0, NULL); }
11  BTNode(T e, BTNodePosi(T) lc = NULL, BTNodePosi(T) rc = NULL) {
12    parent = NULL; //作为根节点，而且初始时
13    key.insert(0, e); //只有一个关键码，以及
14    child.insert(0, lc); child.insert(1, rc); //两个孩子
15    if (lc) lc->parent = this; if (rc) rc->parent = this;
16  }
17}

```

代码8.6 B-树节点

这里，同一节点的所有孩子组织为一个向量，各相邻孩子之间的关键码也组织为一个向量。当然，按照B-树的定义，孩子向量的实际长度总是比关键码向量多一。

■ B-树

B-树模板类，可实现如代码8.7所示。

```

1 #include "BTNode.h" //引入B-树节点类
2
3 template <typename T> class BTree { //B-树模板类
4 protected:
5     int _size; //存放的关键码总数
6     int _order; //B-树的阶次，至少为3——创建时指定，一般不能修改
7     BTNodePosi(T) _root; //根节点
8     BTNodePosi(T) _hot; //BTree::search()最后访问的非空（除非树空）的节点位置
9     void solveOverflow(BTNodePosi(T)); //因插入而上溢之后的分裂处理
10    void solveUnderflow(BTNodePosi(T)); //因删除而下溢之后的合并处理
11 public:
12     BTree(int order = 3) : _order(order), _size(0) //构造函数：默认为最低的3阶
13     { _root = new BTNode<T>(); }
14     ~BTree() { if (_root) release(_root); } //析构函数：释放所有节点
15     int const order() { return _order; } //阶次
16     int const size() { return _size; } //规模
17     BTNodePosi(T) & root() { return _root; } //树根
18     bool empty() const { return !_root; } //判空
19     BTNodePosi(T) search(const T& e); //查找
20     bool insert(const T& e); //插入
21     bool remove(const T& e); //删除
22 }; //BTree

```

代码8.7 B-树

后面将会看到，B-树的关键码插入操作和删除操作，可能会引发节点的上溢和下溢。因此，这里设有内部接口**solveOverflow()**和**solveUnderflow()**，分别用于修正此类问题。在稍后的8.2.6节和8.2.8节中，将分别讲解其具体原理及实现。

8.2.3 关键码查找

■ 算法

如前述，B-树结构非常适宜于在相对更小的内存中，实现对大规模数据的高效操作。

一般地如图8.13所示，可以将大数据集组织为B-树并存放于外存。对于活跃的B-树，其根节点会常驻于内存；此外，任何时刻通常只有另一节点（称作当前节点）留驻于内存。

B-树的查找过程，与二叉搜索树的查找过程基本类似。

首先以根节点作为当前节点，然后再逐层深入。若在当前节点（所包含的一组关键码）中能够找到目标关键码，则成功返回。否则（在当前节点中查找“失败”），则必可在当前节点中确定某一个引用（“失败”位置），并通过它转至逻辑上处于下一层的另一节点。若该节点不是外部节点，则将其载入内存，并更新为当前节点，然后继续重复上述过程。

整个过程如图8.13所示，从根节点开始，通过关键码的比较不断深入至下一层，直到某一关键码命中（查找成功），或者到达某一外部节点（查找失败）。

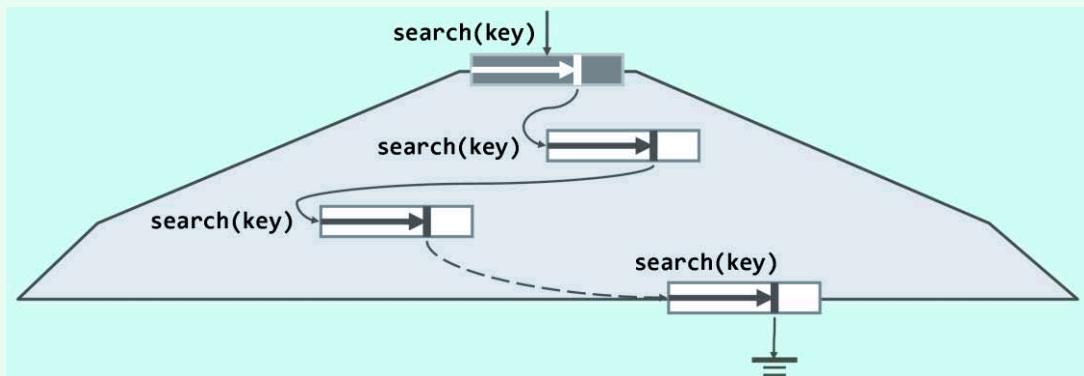


图8.13 B-树的查找过程

与二叉搜索树的不同之处在于，因此时各节点内通常都包含多个关键码，故有可能需要经过（在内存中的）多次比较，才能确定应该转向下一层的哪个节点并继续查找。

仍以如图8.12所示的4阶B-树为例，查找关键码41的过程大致如下：在根节点处经过一次关键码比较（25）之后，即可确定应转入第2个分支；再经过两次比较（34, 43）之后，确定转入第2个分支；最后经过三次比较（37, 40, 41）之后，才成功地找到目标关键码。查找关键码42的过程与之类似，只是在最底层的内部节点内，需要经过三次关键码比较（37, 40, 41）之后，才确定应转入关键码41右侧的外部节点，从而最终确定查找失败。

可见，只有在切换和更新当前节点时才会发生I/O操作，而在同一节点内部的查找则完全在内存中进行。因内存的访问速度远远高于外存，再考虑到各节点所含关键码数量通常在128~512之间，故可直接使用顺序查找策略，而不必采用二分查找之类的复杂策略。

■ 实现

如代码8.8所示，为简化代码，节点内部的查找直接借用了有序向量的search()接口。

```

1 template <typename T> BTNodePosi(T) BTree<T>::search(const T& e) { //在B-树中查找关键码
2     BTNodePosi(T) v = _root; _hot = NULL; //从根节点出发
3     while (v) { //逐层查找
4         Rank r = v->key.search(e); //在当前节点中，找到不大于e的最大关键码
5         if ((0 <= r) && (e == v->key[r])) return v; //成功：在当前节点中命中目标关键码
6         _hot = v; v = v->child[r + 1]; //否则，转入对应子树 (_hot指向其父) ——需做I/O，最费时间
7     } //这里在向量内是二分查找，但对通常的_order可直接顺序查找
8     return NULL; //失败：最终抵达外部节点
9 }
```

代码8.8 B-树关键码的查找

与二叉搜索树的实现类似，这里也约定查找结果由返回的节点位置指代：成功时返回目标关键码所在的节点，上层调用过程可在该节点内进一步查找以确定准确的命中位置；失败时返回对应外部节点，其父节点则由变量`_hot`指代。

8.2.4 性能分析

由上可见，B-树查找操作所需的时间不外乎消耗于两个方面：将某一节点载入内存，以及在内存中对当前节点进行查找。鉴于内存、外存在访问速度上的巨大差异，相对于前一类时间消耗，后一类时间消耗可以忽略不计。也就是说，B-树查找操作的效率主要取决于查找过程中的外存访问次数。那么，至多需要访问多少次外存呢？

由前节分析可见，与二叉搜索树类似，B-树的每一次查找过程中，在每一高度上至多访问一个节点。这就意味着，对于高度为 h 的B-树，外存访问不超过 $\Theta(h - 1)$ 次。

B-树节点的分支数并不固定，故其高度 h 并不完全取决于树中关键码的总数 N 。对于包含 N 个关键码的 m 阶B-树，高度 h 具体可在多大范围内变化？就渐进意义而言， h 与 m 及 N 的关系如何？

■ 树高

可以证明，若存有 N 个关键码的 m 阶B-树高度为 h ，则必有：

$$\log_m(N + 1) \leq h \leq \log_{\lceil m/2 \rceil} \lfloor (N + 1) / 2 \rfloor + 1 \dots \dots \dots \quad (\text{式8-1})$$

首先证明 $h \leq \log_{\lceil m/2 \rceil} \lfloor (N+1)/2 \rfloor + 1$ 。关键码总数固定时，为使B-树更高，各内部节点都应包含尽可能少的关键码。于是按照B-树的定义，各高度层次上节点数目至少是：

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 \\ n_1 &= 2 \\ n_2 &= 2 \times \lceil m / 2 \rceil \\ n_3 &= 2 \times \lceil m / 2 \rceil^2 \\ \dots \\ n_{h-1} &= 2 \times \lceil m / 2 \rceil^{h-2} \\ n_h &= 2 \times \lceil m / 2 \rceil^{h-1} \end{aligned}$$

现考查外部节点。这些节点对应于失败的查找，故其数量 n_h 应等于失败查找可能情形的总数，即应比成功查找可能情形的总数恰好多1，而后者等于关键码的总数 N 。于是有

$$N + 1 = n_h \geq 2 \times (\lceil m / 2 \rceil)^{h-1}, \quad h \geq 1$$

$$\text{即 } h \leq 1 + \log_{\lceil m/2 \rceil} \lfloor (N + 1) / 2 \rfloor = \Theta(\log_m N)$$

再来证明 $h \geq \log_m(N + 1)$ 。同理，关键码总数固定时，为使B-树更矮，每个内部节点都应该包含尽可能多的关键码。按照B-树的定义，各高度层次上的节点数目至多是：

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 \\ n_1 &= m \\ n_2 &= m^2 \\ \dots \\ n_{h-1} &= m^{h-1} \\ n_h &= m^h \end{aligned}$$

与上同理，有

$$N + 1 = n_h \leq m^h$$

$$\text{即 } h \geq \log_m(N + 1) = \Omega(\log_m N)$$

总之，式8-1必然成立。也就是说，存有 N 个关键码的 m 阶B-树的高度 $h = \Theta(\log_m N)$ 。

■ 复杂度

因此，每次查找过程共需访问 $\mathcal{O}(\log_m N)$ 个节点，相应地需要做 $\mathcal{O}(\log_m N)$ 次外存读取操作。由此可知，对存有N个关键码的m阶B-树的每次查找操作，耗时不超过 $\mathcal{O}(\log_m N)$ 。

需再次强调的是，尽管没有渐进意义上的改进，但相对而言极其耗时的I/O操作的次数，却已大致缩减为原先的 $1/\log_2 m$ 。鉴于m通常取值在256至1024之间，较之此前大致降低一个数量级，故使用B-树后，实际的访问效率将有十分可观的提高。

8.2.5 关键码插入

B-树的关键码插入算法，可实现如代码8.9所示。

```

1 template <typename T> bool BTNodePosi(T) v = search(e); if (v) return false; //确认目标节点不存在
2   Rank r = _hot->key.search(e); //在节点_hot的有序关键码向量中查找合适的插入位置
3   _hot->key.insert(r + 1, e); //将新关键码插至对应的位置
4   _hot->child.insert(r + 2, NULL); //创建一个空子树指针
5   _size++; //更新全树规模
6   solveOverflow(_hot); //如有必要，需做分裂
7   return true; //插入成功
8 }

```

代码8.9 B-树关键码的插入

为在B-树中插入一个新的关键码e，首先调用search(e)在树中查找该关键码。若查找成功，则按照“禁止重复关键码”的约定不予插入，操作即告完成并返回false。

否则，按照代码8.8的出口约定，查找过程必然终止于某一外部节点v，且其父节点由变量`_hot`指示。当然，此时的`_hot`必然指向某一叶节点（可能同时也是根节点）。接下来，在该节点中再次查找目标关键码e。尽管这次查找注定失败，却可以确定e在其中的正确插入位置r。最后，只需将e插至这一位置。

至此，`_hot`所指的节点中增加了一个关键码。若该节点内关键码的总数依然合法（即不超过 $m - 1$ 个），则插入操作随即完成。否则，称该节点发生了一次上溢（overflow），此时需要通过适当的处理，使该节点以及整树重新满足B-树的条件。由代码8.9可见，这项任务将借助调整算法`solveOverflow(_hot)`来完成。

8.2.6 上溢与分裂

■ 算法

一般地，刚发生上溢的节点，应恰好含有m个关键码。若取 $s = \lfloor m/2 \rfloor$ ，则它们依次为：

{ $k_0, \dots, k_{s-1}; k_s; k_{s+1}, \dots, k_{m-1}$ }

可见，以 k_s 为界，可将该节点分前、后两个子节点，且二者大致等长。于是，可令关键码 k_s 上升一层，归入其父节点（若存在）中的适当位置，并分别以这两个子节点作为其左、右孩子。这一过程，称作节点的分裂（split）。

不难验证，如此分裂所得的两个孩子节点，均符合m阶B-树关于节点分支数的条件。

■ 可能的情况

以如图8.14(a1)所示的6阶B-树局部为例，其中节点{ 17, 20, 31, 37, 41, 56 }，因所含关键码增至6个而发生上溢。为完成修复，可以关键码37为界，将该节点分裂为{ 17, 20, 31 }和{ 41, 56 }；关键码37则上升一层，并以分裂出来的两个子节点作为左、右孩子。

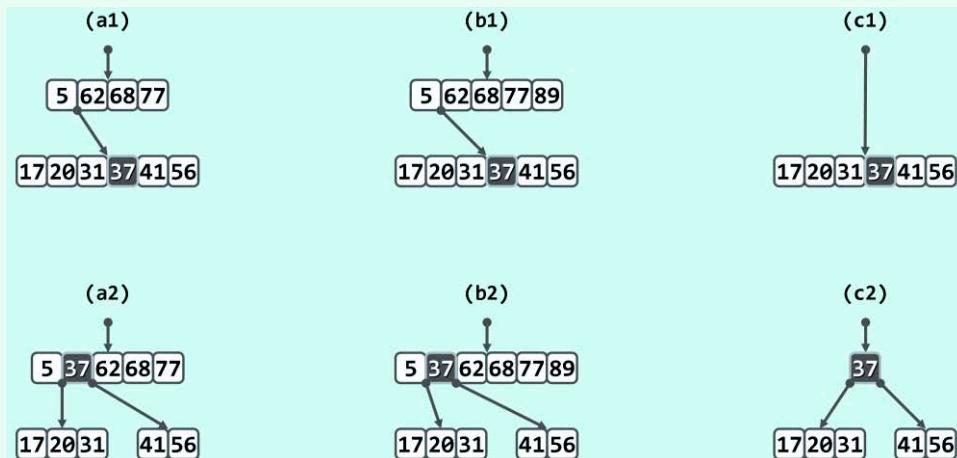


图8.14 通过分裂修复上溢节点

被提升的关键码，可能有三种进一步的处置方式。首先如图(a1)所示，设原上溢节点的父节点存在，且足以接纳一个关键码。此种情况下，只需将被提升的关键码(37)按次序插入父节点中，修复即告完成，修复后的局部如图(a2)所示。

其次如图(b1)所示，尽管上溢节点的父节点存在，但业已处于饱和状态。此时如图(b2)，在强行将被提升的关键码插入父节点之后，尽管上溢节点也可得到修复，却会导致其父节点继而发生上溢——这种现象称作上溢的向上传递。好在每经过一次这样的修复，上溢节点的高度都必然上升一层。这意味着上溢的传递不至于没有尽头，最远不至超过树根。

最后如图(c1)所示，若上溢果真传递至根节点，则可令被提升的关键码(37)自成一个节点，并作为新的树根。于是如图(c2)所示，至此上溢修复完毕，全树增高一层。可见，整个过程中所做分裂操作的次数，必不超过全树的高度——根据8.2.4节结论，即 $\mathcal{O}(\log_m N)$ 。

■ 实现

以上针对上溢的处理算法，可实现如代码8.10所示。

```

1 template <typename T> //关键码插入后若节点上溢，则做节点分裂处理
2 void BTNode<T>::solveOverflow(BTNodePosi(T) v) {
3     if (_order >= v->child.size()) return; //递归基：当前节点并未上溢
4     Rank s = _order / 2; //轴点（此时应有_order = key.size() = child.size() - 1）
5     BTNodePosi(T) u = new BTNode<T>(); //注意：新节点已有一个空孩子
6     for (Rank j = 0; j < _order - s - 1; j++) { //v右侧的_order-s-1个孩子及关键码分裂为右侧节点u
7         u->child.insert(j, v->child.remove(s + 1)); //逐个移动效率低
8         u->key.insert(j, v->key.remove(s + 1)); //此策略可改进
9     }
10    u->child[_order - s - 1] = v->child.remove(s + 1); //移动v最靠右的孩子

```

```

11     if (u->child[0]) //若u的孩子们非空，则
12         for (Rank j = 0; j < _order - s; j++) //将它们的父节点统一
13             u->child[j]->parent = u; //指向u
14     BTNodePosi(T) p = v->parent; //v当前的父节点p
15     if (!p) { _root = p = new BTNode<T>(); p->child[0] = v; v->parent = p; } //若p为空则创建之
16     Rank r = 1 + p->key.search(v->key[0]); //p中指向u的指针的秩
17     p->key.insert(r, v->key.remove(s)); //轴点关键码上升
18     p->child.insert(r + 1, u); u->parent = p; //新节点u与父节点p互联
19     solveOverflow(p); //上升一层，如有必要则继续分裂——至多递归O(logn)层
20 }

```

代码8.10 B-树节点的上溢处理

请特别留意上溢持续传播至根的情况：原树根分裂之后，新创建的树根仅含单关键码。由此也可看出，就B-树节点分支数的下限要求而言，树根节点的确应该作为例外。

■ 实例

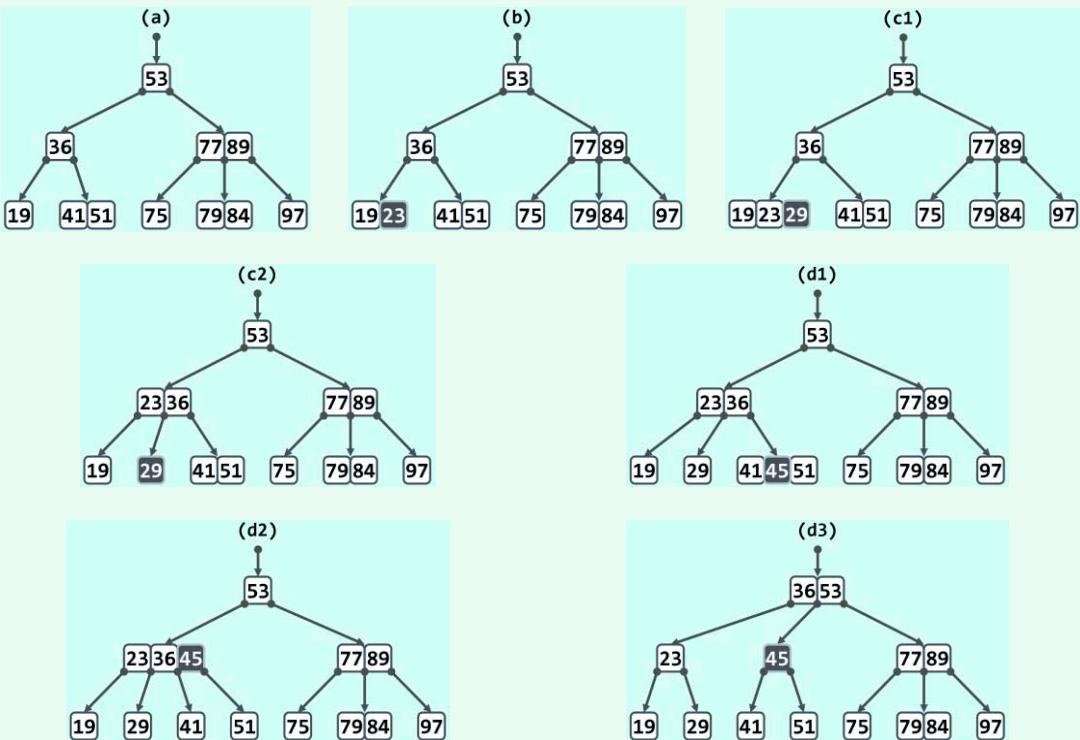


图8.15 3阶B-树插入操作实例 (I)

考查如图8.15(a)所示的3阶B-树。执行`insert(23)`后未发生任何上溢；如(b)所示不必做任何调整。接下来执行`insert(29)`后，如图(c1)所示发生上溢；经一次分裂即完全修复，结果如图(c2)所示。继续执行`insert(45)`后，如图(d1)所示发生上溢；经分裂做局部修复之后，如图(d2)所示上一层再次发生上溢；经再次分裂后，方得以实现全树的修复，结果如图(d3)所示。

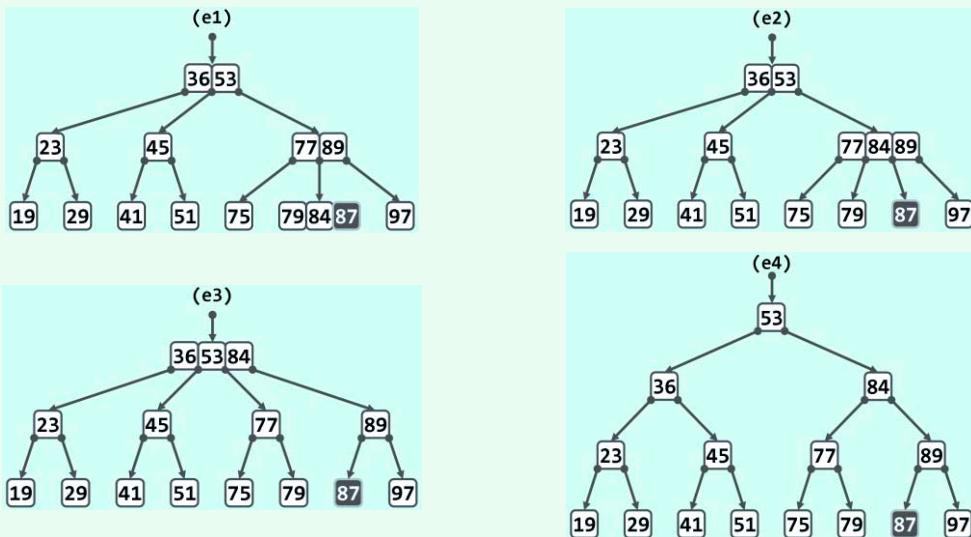


图8.16 3阶B-树插入操作实例 (II)

最后，执行`insert(87)`后如图8.16(e1)所示亦发生上溢；经局部部分裂调整后，在更高层将持续发生上溢，故如图(e2)、(e3)和(e4)所示，先后总共经三次分裂，方得以实现全树的修复。此时因一直分裂至根节点，故最终全树高度增加一层——这也是B-树长高的唯一可能。

■ 复杂度

若将B-树的阶次 m 视作为常数，则关键码的移动和复制操作所需的时间都可以忽略。至于`solveOverflow()`算法，其每一递归实例均只需常数时间，递归层数不超过B-树高度。由此可知，对于存有 N 个关键码的 m 阶B-树，每次插入操作都可在 $\mathcal{O}(\log_m N)$ 时间内完成。

实际上，因插入操作而导致 $\Omega(\log_m N)$ 次分裂的情况极为罕见，单次插入操作平均引发的分裂次数，远远低于这一估计（习题[8-6]），故时间通常主要消耗于对目标关键码的查找。

8.2.7 关键码删除

```

1 template <typename T> bool BTree<T>::remove(const T& e) { //从BTree树中删除关键码e
2     BTNodePosi(T) v = search(e); if (!v) return false; //确认目标关键码存在
3     Rank r = v->key.search(e); //确定目标关键码在节点v中的秩 (由上, 肯定合法)
4     if (v->child[0]) { //若v非叶子, 则e的后继必属于某叶节点
5         BTNodePosi(T) u = v->child[r+1]; //在右子树中一直向左, 即可
6         while (u->child[0]) u = u->child[0]; //找出e的后继
7         v->key[r] = u->key[0]; v = u; r = 0; //并与之交换位置
8     } //至此, v必然位于最底层, 且其中第r个关键码就是待删除者
9     v->key.remove(r); v->child.remove(r + 1); _size--; //删除e, 以及其下两个外部节点之一
10    solveUnderflow(v); //如有必要, 需做旋转或合并
11    return true;
12 }
```

B-树的关键码删除算法的实现如代码8.11所示。

为从B-树中删除关键码e，也首先需要调用search(e)查找e所属的节点。倘若查找失败，则说明关键码e尚不存在，删除操作即告完成；否则按照代码8.8的出口约定，目标关键码所在的节点必由返回的位置v指示。此时，通过顺序查找，即可进一步确定e在节点v中的秩r。

不妨假定v是叶节点——否则，e的直接前驱（后继）在其左（右）子树中必然存在，而且可在 $O(\text{height}(v))$ 时间内确定它们的位置，其中height(v)为节点v的高度。此处不妨选用直接后继。于是，e的直接后继关键码所属的节点u必为叶节点，且该关键码就是其中的最小者u[0]。既然如此，只要令e与u[0]互换位置，即可确保待删除的关键码e所属的节点v是叶节点。

于是，接下来可直接将e（及其左侧的外部空节点）从v中删去。如此，节点v中所含的关键码以及（空）分支将分别减少一个。

此时，若该节点所含关键码的总数依然合法（即不少于 $\lceil m/2 \rceil - 1$ ），则删除操作随即完成。否则，称该节点发生了下溢（underflow），并需要通过适当的处置，使该节点以及整树重新满足B-树的条件。由代码8.11可见，这项任务将借助调整算法solveUnderflow(v)来完成。

8.2.8 下溢与合并

由上，在m阶B-树中，刚发生下溢的节点v必恰好包含 $\lceil m/2 \rceil - 2$ 个关键码和 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个分支。以下将根据其左、右兄弟所含关键码的数目，分三种情况做相应的处置。

■ v的左兄弟L存在，且至少包含 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码

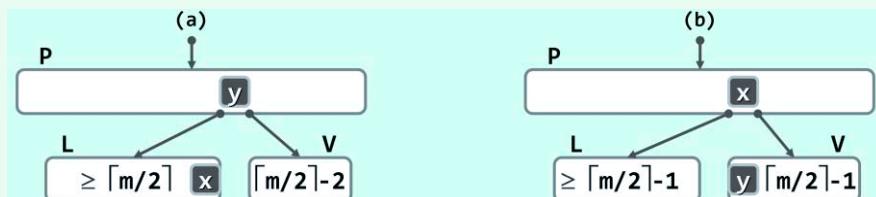


图8.17 下溢节点向父亲“借”一个关键码，父亲再向左兄弟“借”一个关键码

如图8.17(a)所示，不妨设L和V分别是其父节点P中关键码y的左、右孩子，L中最大关键码为x ($x \leq y$)。此时可如图(b)所示，将y从节点P转移至节点V中（作为最小关键码），再将x从L转移至P中（取代原关键码y）。至此，局部乃至整树都重新满足B-树条件，下溢修复完毕。

■ v的右兄弟R存在，且至少包含 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码

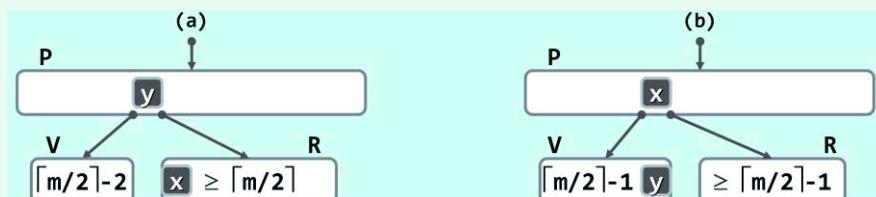


图8.18 下溢节点向父亲“借”一个关键码，父亲再向右兄弟“借”一个关键码

如图8.18所示，可参照前一情况对称地修复，不再赘述。

■ V的左、右兄弟L和R或者不存在，或者其包含的关键码均不足 $\lceil m/2 \rceil$ 个

实际上，此时的L和R不可能同时不存在。如图8.19(a)所示，不失一般性地设左兄弟节点L存在。当然，此时节点L应恰好包含 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个关键码。

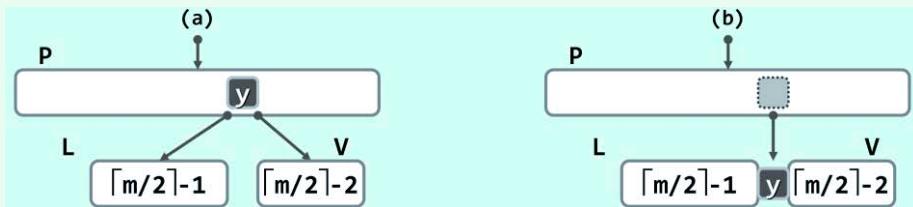


图8.19 下溢节点向父亲“借”一个关键码，然后与左兄弟“粘接”成一个节点

于是为修复节点V的下溢缺陷，可如图(b)所示，从父节点P中抽出介于L和V之间的关键码y，并通过该关键码将节点L和V“粘接”成一个节点——这一过程称作节点的合并(merge)。注意，在经如此合并而得新节点中，关键码总数应为：

$$(\lceil m/2 \rceil - 1) + 1 + (\lceil m/2 \rceil - 2) = 2 \times \lceil m/2 \rceil - 2 \leq m - 1$$

故原节点V的下溢缺陷得以修复，而且同时也不致于反过来引发上溢。

接下来，还须检查父节点P——关键码y的删除可能致使该节点出现下溢。好在，即便如此，也尽可套用上述三种方法继续修复节点P。当然，修复之后仍可能导致祖父节点以及更高层节点的下溢——这种现象称作下溢的传递。特别地，当下溢传递至根节点且其中不再含有任何关键码时，即可将其删除并代之以其唯一的孩子节点，全树高度也随之下降一层。

与上溢传递类似地，每经过一次下溢修复，新下溢节点的高度都必然上升一层。再次由8.2.4节的式8-1可知，整个下溢修复的过程中至多需做 $O(\log_m N)$ 次节点合并操作。

■ 实现

对下溢节点的整个处理过程，如代码8.12所示。

```

1 template <typename T> //关键码删除后若节点下溢，则做节点旋转或合并处理
2 void BTTree<T>::solveUnderflow(BTNodePosi(T) v) {
3     if (_order + 1) / 2 <= v->child.size() return; //递归基：当前节点并未下溢
4     BTNodePosi(T) p = v->parent;
5     if (!p) { //递归基：已到根节点，没有孩子的下限
6         if (!v->key.size() && v->child[0]) {
7             //但倘若作为树根的v已不含关键码，却有（唯一的）非空孩子，则
8             _root = v->child[0]; _root->parent = NULL; //这个节点可被跳过
9             v->child[0] = NULL; release(v); //并因不再有用而被销毁
10        } //整树高度降低一层
11    }
12 }
13 Rank r = 0; while (p->child[r] != v) r++;
14 //确定v是p的第r个孩子——此时v可能不含关键码，故不能通过关键码查找
15 //另外，在实现了孩子指针的判等器之后，也可直接调用Vector::find()定位
16 // 情况1：向左兄弟借关键码

```

第9章

词典

借助数据结构来表示和组织的数字信息，可将所有数据视作一个整体统筹处理，进而提高信息访问的规范性及其处理的效率。例如，借助关键码直接查找和访问数据元素的形式，已为越来越多的数据结构所采用，这也成为现代数据结构的一个重要特征。

词典（**dictionary**）结构，即是其中最典型的例子。逻辑上的词典，是由一组数据构成的集合，其中各元素都是由关键码和数据项合成的词条（**entry**）。映射（**map**）结构与词典结构一样，也是词条的集合。二者的差别仅仅在于，映射要求不同词条的关键码互异，而词典则允许多个词条拥有相同的关键码^①。除了静态查找，映射和词典都支持动态更新，二者统称作符号表（**symbol table**）。实际上，“是否允许雷同关键码”应从语义层面，而非ADT接口的层面予以界定，故本章将不再过分强调二者的差异，而是笼统地称作词典，并以跳转表和散列表为例，按照“允许雷同”和“禁止雷同”的语义，分别实现其统一的接口。

尽管此处词典和映射中的数据元素，仍表示和实现为词条形式，但这一做法并非必须。与第7章和第8章的搜索树相比，符号表并不要求词条之间能够根据关键码比较大小；与稍后第10章的优先级队列相比，其查找对象亦不仅限于最大或最小的词条。在符号表的内部，甚至也不需要按照大小次序来组织数据项——即便各数据项之间的确定义有某种次序。实际上，以散列表为代表的符号表结构，将转而依据数据项的数值，直接做逻辑查找和物理定位。也就是说，对于此类结构，在作为基本数据单位的词条内部，关键码（**key**）与数值（**value**）的地位等同，二者不必加以区分。此类结构所支持的这种新的数据访问方式，即所谓的循值访问（**call-by-value**）。相对于此前各种方式，这一方式更为自然，适用范围也更广泛。

有趣的是，对这种“新的”数据访问方式，在程序设计方面已有一定基础的读者，往往会或多或少有些地抵触的倾向；而刚刚涉足这一领域的读者，却反过来会有似曾相识的亲切之感，并更乐于接受。究其原因在于，循值访问方式与我们头脑中原本对数据集合组成的理解最为接近；不幸的是，在学习C/C++之类高级程序语言的过程中，我们思考问题的出发点和方向都已逐步被这些语言所同化并强化，而一些与生俱来的直觉与思路则逐渐为我们所淡忘。比如，在孩子们的头脑中，班级的概念只不过是同伴们的一组笑脸；随着学习内容的持续深入和思维方式的反复塑化，这一概念将逐渐被一组姓名所取代；甚至可能进而被抽象为一组学号。

既已抛开大小次序的概念，采用循值访问方式的计算过程，自然不再属于CBA式算法的范畴，此前关于CBA式算法下界的结论亦不再适用，比如在9.4节我们将看到，散列式排序算法将不再服从2.7节所给的复杂度下界。一条通往高效算法的崭新大道，由此在我们面前豁然展开。

当然，为支持循值访问的方式，在符号表的内部，仍然必须强制地在数据对象的数值与其物理地址之间建立某种关联。而所谓散列，正是在兼顾空间与时间效率的前提下，讨论和研究赖以设计并实现这种关联的一般性原则、技巧与方法，这些方面也是本章的核心与重点。

^① 事实上，某些文献中所定义的词典和映射结构，可能与此约定恰好相反

§ 9.1 词典ADT

9.1.1 操作接口

除通用的接口之外，词典结构主要的操作接口可归纳为表9.1。

表9.1 词典ADT支持的标准操作接口

操作接口	功能描述
get(key)	若词典中存在以key为关键码的词条，则返回该词条的数据对象；否则，返回NULL
put(key, value)	插入词条(key, value)，并报告是否成功
remove(key)	若词典中存在以key为关键码的词条，则删除之并返回true；否则，返回false

实际上，包括Snobol4、MUMPS、SETL、Rexx、Awk、Perl、Ruby、PHP、Java和Python等在内，许多编程语言都以各自不同形式，支持类似于以上词典或映射ADT接口功能的基本数据结构，有的甚至将它们作为基本的数据类型，统称作关联数组（associative array）。

9.1.2 操作实例

比如，可如图9.1所示，将三国名将所对应的词条组织为一个词典结构。其中的每一词条，都由人物的名字（style）和姓名（name）构成，分别作为词条的关键码和数据项。

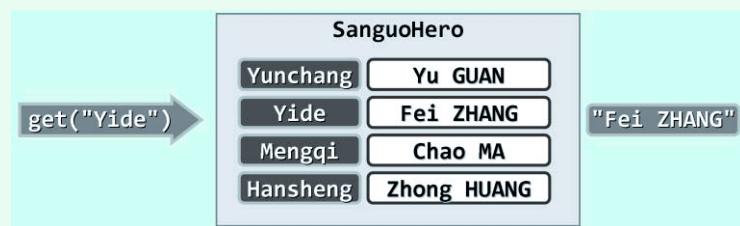


图9.1 三国人物的词典结构

以初始包含关、张、马、黄四将的词典为例，在依次执行一系列操作的过程中，该词典结构内容的变化以及对应的输出如表9.2所示。

表9.2 词典结构操作实例

操作	词典结构	输出
size()	("Yunchang", "Yu GUAN") ("Yide", "Fei ZHANG") ("Mengqi", "Chao MA") ("Hansheng", "Zhong HUANG")	4
put("Bofu", "Ce SUN")	("Yunchang", "Yu GUAN") ("Yide", "Fei ZHANG") ("Mengqi", "Chao MA") ("Hansheng", "Zhong HUANG") ("Bofu", "Ce SUN")	true
size()	[unchanged]	5
get("Yide")	[unchanged]	"Fei ZHANG"
get("Zilong")	[unchanged]	NULL

表9.2 词典结构操作实例(续)

操作	词典结构	输出
put("Yide", "Fei CHANG")	("Yunchang", "Yu GUAN") ("Yide", "Fei CHANG") ("Mengqi", "Chao MA") ("Hansheng", "Zhong HUANG") ("Bofu", "Ce SUN")	true
size()	[unchanged]	5
get("Yide")	[unchanged]	"Fei CHANG"
remove("Mengqi")	("Yunchang", "Yu GUAN") ("Yide", "Fei CHANG") ("Hansheng", "Zhong HUANG") ("Bofu", "Ce SUN")	"Chao MA"
size()	[unchanged]	4

请特别留意以上第二次put()操作，其拟插入词条的关键码"Yide"，在该词典中已经存在。由该实例可见，插入效果等同于用新词条替换已有词条；相应地，put()操作也必然会成功。这一处理方式被包括Python和Perl在内的众多编程语言普遍采用，但本章采用的约定与此略有不同。跳转表将允许同时保留多个关键码雷同的词条，查找时任意返回其一；散列表则维持原词条不变，返回插入失败标志——也就是说，更接近于映射的规范。

9.1.3 接口定义

这里首先以如代码9.1所示模板类的形式定义词典的操作接口。

```

1 template <typename K, typename V> struct Dictionary { //词典Dictionary模板类
2     virtual int size() const = 0; //当前词条总数
3     virtual bool put(K, V) = 0; //插入词条(禁止雷同词条时可能失败)
4     virtual V* get(K k) = 0; //读取词条
5     virtual bool remove(K k) = 0; //删除词条
6 };

```

代码9.1 词典结构的操作接口规范

其中，所有操作接口均以虚函数形式给出，留待在派生类中予以具体实现。

另外，正如此前所述，尽管词条关键码类型可能支持大小比较，但这并非词典结构的必要条件，Dictionary模板类中的Entry类只需支持判等操作。

9.1.4 实现方法

248

不难发现，基于此前介绍的任何一种平衡二叉搜索树，都可便捷地实现词典结构。比如，Java语言的java.util.TreeMap类即是基于红黑树实现的词典结构。然而这类实现方式都在不经意中假设“关键码可以比较大小”，故其所实现的并非严格意义上的词典结构。

以下以跳转表和散列表为例介绍词典结构的两种实现方法。尽管它们都在底层引入了某种“序”，但这类“序”只是内部的一种约定；从外部接口来看，依然只有“相等”的概念。

§ 9.2 *跳转表

第2章所介绍的有序向量和第3章所介绍的有序列表，各有所长：前者便于静态查找，但动态维护成本较高；后者便于增量式的动态维护，但只能支持顺序查找。为结合二者的优点，同时弥补其不足，第7章和第8章逐步引入了平衡二叉搜索树，其查找、插入和删除操作均可在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内完成。尽管如此，这些结构的相关算法往往较为复杂，代码实现和调试的难度较大，其正确性、鲁棒性和可维护性也很难保证。

设计并引入跳转表^②（skip list）结构的初衷，正是在于试图找到另外一种简便直观的方式，来完成这一任务。具体地，跳转表是一种高效的词典结构，它的定义与实现完全基于第3章的有序列表结构，其查询和维护操作在平均的意义下均仅需 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间。

9.2.1 Skiplist模板类

跳转表结构以模板类形式定义的接口，如代码9.2所示。

```

1 #include "../List/List.h" //引入列表
2 #include "../Entry/Entry.h" //引入词条
3 #include "Quadlist.h" //引入Quadlist
4 #include "../Dictionary/Dictionary.h" //引入词典
5
6 template <typename K, typename V> //key、value
7 //符合Dictionary接口的Skiplist模板类（但隐含假设元素之间可比较大小）
8 class Skiplist : public Dictionary<K, V>, public List<Quadlist<Entry<K, V>>*> {
9 protected:
10     bool skipSearch(
11         ListNode<Quadlist<Entry<K, V>>*>* &qlist,
12         QuadlistNode<Entry<K, V>>*>* &p,
13         K& k);
14 public:
15     int size() const { return empty() ? 0 : last()->data->size(); } //底层Quadlist的规模
16     int level() { return List::size(); } //层高 == #Quadlist, 不一定要开放
17     bool put(K, V); //插入（注意与Map有别——Skiplist允许词条重复，故必然成功）
18     V* get(K k); //读取
19     bool remove(K k); //删除
20 };

```

代码9.2 Skiplist模板类

可见，借助多重继承（multiple inheritance）机制，由Dictionary和List共同派生而得的Skiplist模板类，同时具有这两种结构的特性；此外，这里还重写了在Dictionary抽象类（代码9.1）中，以虚函数形式定义的get()、put()和remove()等接口。

^② 由W. Pugh于1989年发明^[52]

9.2.2 总体逻辑结构

跳转表的宏观逻辑结构如图9.2所示。其内部由沿横向分层、沿纵向相互耦合的多个列表{ $S_0, S_1, S_2, \dots, S_h$ }组成， h 称作跳转表的高度。

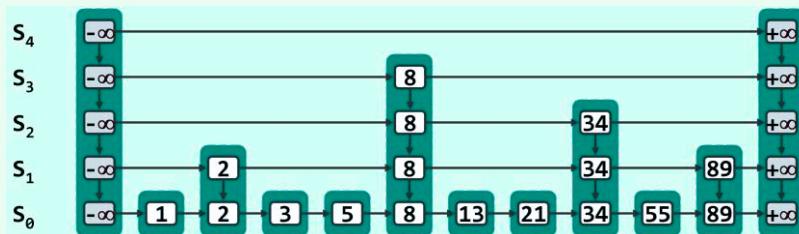


图9.2 跳转表的总体逻辑结构

每一水平列表称作一层（level），其中 S_0 和 S_h 分别称作底层（bottom）和顶层（top）。与通常的列表一样，同层节点之间可定义前驱与后继关系。为便于查找，同层节点都按关键码排序。需再次强调的是，这里的次序只是内部的一种约定；对外部而言，各词条之间仍然只需支持判等操作即可。为简化算法实现，每层列表都设有头、尾哨兵节点。

层次不同的节点可能沿纵向组成塔（tower），同一塔内的节点以高度为序也可定义前驱与后继关系。塔与词典中的词条一一对应。尽管塔内的节点相互重复，但正如随后将要看到的，这种重复不仅可以加速查找，而且只要策略得当，也不至造成空间的实质浪费。

高层列表总是低层列表的子集，其中特别地， S_0 包含词典中的所有词条，而 S_h 除头、尾哨兵外不含任何实质的词条。不难看出，跳转表的层高 h 必然决定于最大的塔高。

9.2.3 四联表

按上述约定，跳转表内各节点沿水平和垂直方向都可定义前驱和后继，支持这种联接方式的表称作四联表（quadlist），它也是代码9.2中SkipList模板类的底层实现方式。

■ Quadlist模板类

四联表结构可如代码9.3所示，以模板类的形式定义接口。

```

1 #include "QuadlistNode.h" //引入Quadlist节点类
2 template <typename T> class Quadlist { //Quadlist模板类
3 private:
4     int _size; QuadlistNodePosi(T) header; QuadlistNodePosi(T) trailer; //规模、头哨兵、尾哨兵
5 protected:
6     void init(); //Quadlist创建时的初始化
7     int clear(); //清除所有节点
8 public:
9 // 构造函数
10    Quadlist() { init(); } //默认
11 // 析构函数
12    ~Quadlist() { clear(); delete header; delete trailer; } //删除所有节点，释放哨兵
13 // 只读访问接口

```

```

14   Rank size() const { return _size; } //规模
15   bool empty() const { return _size <= 0; } //判空
16   QuadlistNodePosi(T) first() const { return header->succ; } //首节点位置
17   QuadlistNodePosi(T) last() const { return trailer->pred; } //末节点位置
18   bool valid(QuadlistNodePosi(T) p) //判断位置p是否对外合法
19   { return p && (trailer != p) && (header != p); }
20 // 可写访问接口
21   T remove(QuadlistNodePosi(T) p); //删除(合法)位置p处的节点, 返回被删除节点的数值
22   QuadlistNodePosi(T) //将*e作为p的后继、b的上邻插入
23   insertAfterAbove(T const& e, QuadlistNodePosi(T) p, QuadlistNodePosi(T) b = NULL);
24 // 遍历
25   void traverse(void (*)(T&)); //遍历各节点, 依次实施指定操作(函数指针, 只读或局部修改)
26   template <typename VST> //操作器
27   void traverse(VST&); //遍历各节点, 依次实施指定操作(函数对象, 可全局性修改节点)
28 }; //Quadlist

```

代码9.3 Quadlist模板类

此处定义的接口包括：定位首节点、末节点，在全表或某一区间查找具有特定关键码的节点，删除特定节点，以及插入特定节点。通过它们的相互组合，即可实现跳转表相应的接口功能。

■ 四联表节点

作为四联表的基本组成元素，节点QuadlistNode模板类可定义如代码9.4所示。

```

1 #include "../Entry/Entry.h"
2 #define QuadlistNodePosi(T) QuadlistNode<T>* //跳转表节点位置
3
4 template <typename T> struct QuadlistNode { //QuadlistNode模板类
5     T entry; //所存词条
6     QuadlistNodePosi(T) pred; QuadlistNodePosi(T) succ; //前驱、后继
7     QuadlistNodePosi(T) above; QuadlistNodePosi(T) below; //上邻、下邻
8     QuadlistNode //构造器
9     ( T e = T(), QuadlistNodePosi(T) p = NULL, QuadlistNodePosi(T) s = NULL,
10       QuadlistNodePosi(T) a = NULL, QuadlistNodePosi(T) b = NULL)
11     : entry(e), pred(p), succ(s), above(a), below(b) {}
12     QuadlistNodePosi(T) insertAsSuccAbove //插入新节点, 以当前节点为前驱, 以节点b为下邻
13     (T const& e, QuadlistNodePosi(T) b = NULL);
14 };

```

代码9.4 QuadlistNode模板类

为简化起见，这里并未做严格封装。对应于水平的前驱与后继，这里为每个节点设置了一对指针pred和succ；垂直方向的上邻和下邻则对应于above和below。主要的操作接口只有insertAsSuccAbove()，它负责创建新节点，并将其插入于当前节点之后、节点b之上。

■ 初始化与构造

由代码9.3可见，四联表的构造，实际上是通过调用如下**init()**函数完成的。

```
1 template <typename T> void Quadlist<T>::init() { //Quadlist初始化，创建Quadlist对象时统一调用
2     header = new QuadlistNode<T>; //创建头哨兵节点
3     trailer = new QuadlistNode<T>; //创建尾哨兵节点
4     header->succ = trailer; header->pred = NULL; //沿横向联接哨兵
5     trailer->pred = header; trailer->succ = NULL; //沿横向联接哨兵
6     header->above = trailer->above = NULL; //纵向的后继置空
7     header->below = trailer->below = NULL; //纵向的前驱置空
8     _size = 0; //记录规模
9 } //如此构造的四联表，不含任何实质的节点，且暂时与其它四联表相互独立
```

代码9.5 Quadlist对象的创建

9.2.4 查找

查找是跳转表至关重要和最实质的操作，词条的插入和删除等其它操作均以之为基础，其实现效率也将直接影响到跳转表结构的整体性能。

■ **get()**

在跳转表中查找关键码k的具体过程，如代码9.6所示。

```
1 template <typename K, typename V> V* Skiplist<K, V>::get(K k) { //跳转表词条查找算法
2     if (empty()) return NULL;
3     ListNode<Quadlist<Entry<K, V>>*>* qlist = first(); //从顶层Quadlist的
4     QuadlistNode<Entry<K, V>>* p = qlist->data->first(); //首节点开始
5     return skipSearch(qlist, p, k) ? &(p->entry.value) : NULL; //查找并报告
6 } //有多个命中时靠后者优先
```

代码9.6 Skiplist::get()查找

■ **skipSearch()**

由上可见，实质的查找过程，只不过是从某层列表qlist的首节点**first()**出发，调用如代码9.7所示的内部函数**skipSearch()**。

```
1 ****
2 * Skiplist词条查找算法（供内部调用）
3 * 入口：qlist为顶层列表，p为qlist的首节点
4 * 出口：若成功，p为命中关键码所属塔的顶部节点，qlist为p所属列表
5 *       否则，p为所属塔的基座，该塔对应于不大于k的最大且最靠右关键码，qlist为空
6 * 约定：多个词条命中时，沿四联表取最靠后者
7 ****
8 template <typename K, typename V> bool Skiplist<K, V>::skipSearch(
9     ListNode<Quadlist<Entry<K, V>>*>* &qlist, //从指定层qlist的
10    QuadlistNode<Entry<K, V>>* &p, //首节点p出发
11    K& k) { //向右、向下查找目标关键码k
```

```

12     while (true) { //在每一层
13         while (p->succ && (p->entry.key <= k)) //从前向后查找
14             p = p->succ; //直到出现更大的key或溢出至trailer
15         p = p->pred; //此时倒回一步，即可判断是否
16         if (p->pred && (k == p->entry.key)) return true; //命中
17         qlist = qlist->succ; //否则转入下一层
18         if (!qlist->succ) return false; //若已到穿透底层，则意味着失败
19         p = (p->pred) ? p->below : qlist->data->first(); //否则转至当前塔的下一节点
20     } //课后：通过实验统计，验证关于平均查找长度的结论
21 }

```

代码9.7 SkipList::skipSearch()查找

这里利用参数p和qlist，分别指示命中关键码所属塔的顶部节点，及其所属的列表。qlist和p的初始值分别为顶层列表及其首节点，返回后它们将为上层的查找操作提供必要的信息。

■ 实例

仍以图9.2为例，针对关键码21的查找经过节点{ $-\infty, -\infty, 8, 8, 8, 8, 13$ }，最终抵达21后报告成功；针对关键码34的查找经过节点{ $-\infty, -\infty, 8, 8$ }，最终抵达34后报告成功；针对关键码1的查找经过节点{ $-\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty$ }，最终抵达1后报告成功。而针对关键码80的查找经过节点{ $-\infty, -\infty, 8, 8, 34, 34, 34, 55$ }，最终抵达89后报告失败；针对关键码0的查找经过节点{ $-\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty$ }，最终抵达1后报告失败；针对关键码99的查找经过节点{ $-\infty, -\infty, 8, 8, 34, 34, 89$ }，最终抵达 $+\infty$ 后报告失败。

9.2.5 空间复杂度

■ “生长概率逐层减半”条件

不难理解，其中各塔高度的随机分布规律（如最大值、平均值等），对跳转表的总体性能至关重要。反之，若不就此作出显式的限定，则跳转表的时间和空间效率都难以保证。

比如，若将最大塔高（亦即跳转表的层高）记作h，则在极端情况下，每个词条所对应塔的高度均有可能接近甚至达到h。果真如此，在查找及更新过程中需要访问的节点数量将难以控制，时间效率注定会十分低下。同时，若词条总数为n，则在此类情况下，跳转表所需的存储空间量也将高达 $\Omega(nh)$ 。

然而幸运的是，若能采用简明而精妙的策略，控制跳转表的生长过程，则在时间和空间方面都可实现足够高的效率。就效果而言，此类控制策略必须满足所谓“生长概率逐层减半”条件：

对于任意 $0 \leq k < h$ ， S_k 中任一节点在 S_{k+1} 中依然出现的概率，始终为 $1/2$

也就是说， S_0 中任一关键码依然在 S_k 中出现的概率，等于 2^{-k} 。这也可等效地理解和模拟为，在各塔自底而上逐层生长的过程中，通过投掷正反面等概率的理想硬币（fair coin），来决定是否继续增长一层——亦即，对应于当前的词条，是否在上一层列表中再插入一个节点。

那么，在插入词条的过程中，应该如何从技术上保证这一条件始终成立呢？具体的方法稍后将在9.2.7节介绍，目前不妨暂且假定这一条件的确成立。

■ 节点总数的期望值

根据数学归纳法，“生长概率逐层减半”条件同时也意味着，列表 S_0 中任一节点在列表 S_k 中依然出现的概率均为 $1/2^k = 2^{-k}$ 。因此，第 k 层列表所含节点的期望数目为：

$$E(|S_k|) = n \times 2^{-k}$$

亦即，各层列表的规模将随高度上升以50%的比率迅速缩小，故空间总体消耗量的期望值应为：

$$E(\sum_k |S_k|) = \sum_k E(|S_k|) = n \times (\sum_k 2^{-k}) < 2n = O(n)$$

9.2.6 时间复杂度

在由多层四联表组成的跳转表中进行查找，需访问的节点数目是否会实质性地增加？由以上代码9.7中查找算法`skipSearch()`可见，单次纵向或横向跳转本身只需常数时间，故查找所需的时间应取决于横向、纵向跳转的总次数。那么，是否会因层次过多而导致横向或纵向的跳转过多呢？以下从概率的角度，分别对其平均性能做出估计，并说明其期望值均不超过 $O(\log n)$ 。

■ 期望高度与纵向跳转次数

考查第 k 层列表 S_k 。

S_k 非空，当且仅当 S_0 所含的 n 个节点中，至少有一个会出现在 S_k 中，相应的概率应为：

$$\Pr(|S_k| > 0) \leq n \times 2^{-k} = n/2^k$$

反过来， S_k 为空的概率即为：

$$\Pr(|S_k| = 0) \geq 1 - n/2^k$$

可以看出，这一概率将随着高度 k 的增加，而迅速上升并接近100%。

以第 $k = 3 \cdot \log n$ 层为例。该层列表 S_k 为空，当且仅当 $h < k$ ，对应的概率为：

$$\Pr(h < k) = \Pr(|S_k| = 0) \geq 1 - n/2^k = 1 - n/n^3 = 1 - 1/n^2$$

一般地， $k = a \cdot \log n$ 层列表为空的概率为 $1 - 1/n^{a-1}$ ， $a > 3$ 后这一概率将迅速地接近100%。这意味着跳转表的高度 h 有极大的可能不会超过 $3 \cdot \log n$ ， h 的期望值应为：

$$E(h) = O(\log n)$$

按照代码9.7的`skipSearch()`算法，查找过程中的跳转只能向右或向下（而不能向左倒退或向上爬升），故活跃节点的高度必单调非增，每一高度上的纵向跳转至多一次。因此，整个查找过程中消耗于纵向跳转的期望时间不超过跳转表高度 h 的期望值 $O(\log n)$ 。

■ 横向跳转

`skipSearch()`算法中的内循环对应于沿同一列表的横向跳转，且此类跳转在同一高度可做多次。那么，横向跳转与上述纵向跳转的这一差异，是否意味着这方面的时间消耗将不受跳转表高度 h 的控制，并进而对整体的查找时间产生实质性影响？答案是否定的。

进一步观察`skipSearch()`算法可知，沿同一列表的横向跳转所经过的节点必然依次紧邻，而且它们都应该是各自所属塔的塔顶。若将同层连续横向跳转的次数记作 Y ，则对于任意的 $0 \leq k$ ， Y 取值为 k 对应于“ k 个塔顶再加最后一个非塔顶”联合事件，故其概率应为：

$$\Pr(Y = k) = (1 - p)^k \cdot p$$

这是一个典型的几何分布（geometric distribution），其中 $p = 1/2$ 是塔继续生长的概率。因此， Y 的期望值应为：

$$E(Y) = (1 - p)/p = (1 - 1/2)/(1/2) = 1$$

也就是说，在同一高度上，彼此紧邻的塔顶节点数目的期望值为 $1 + 1 = 2$ ；沿着每条查找路径，在每一高度上平均只做常数次横向跳转。因此，整个查找过程中所做横向跳转的期望次数，应依然线性正比于跳转表的期望高度，亦即 $\mathcal{O}(\log n)$ 。

■ 其它

除以上纵向和横向跳转，`skipSearch()`还涉及其它一些操作，但总量亦不超过 $\mathcal{O}(\log n)$ 。比如，内层`while`循环尽管必终止于失败节点（`key`更大或溢出至`trailer`），但此类节点在每层至多一个，访问它们所需的时间总量仍不超过跳转表的期望高度 $E(h) = \mathcal{O}(\log n)$ 。

9.2.7 插入

■ `put()`

将词条(`k, v`)插入跳转表的具体操作过程，可描述和实现如代码9.8所示。

```

1 template <typename K, typename V> bool Skiplist<K, V>::put(K k, V v) { //跳转表词条插入算法
2     Entry<K, V> e = Entry<K, V>(k, v); //待插入的词条 (将被随机地插入多个副本)
3     if (empty()) insertAsFirst(new Quadlist<Entry<K, V>>); //插入首个Entry
4     ListNode<Quadlist<Entry<K, V>>*>* qlist = first(); //从顶层四联表的
5     QuadlistNode<Entry<K, V>>* p = qlist->data->first(); //首节点出发
6     if (skipSearch(qlist, p, k)) //查找适当的插入位置 (不大于关键码k的最后一个节点p)
7         while (p->below) p = p->below; //若已有雷同词条，则需强制转到塔底
8     qlist = last(); //以下，紧邻于p的右侧，一座新塔将自底而上逐层生长
9     QuadlistNode<Entry<K, V>>* b = qlist->data->insertAfterAbove(e, p); //新节点b即为新塔基座
10    while (rand() & 1) { //经投掷硬币，若确定新塔需要再长高一层，则
11        while (qlist->data->valid(p) && !p->above) p = p->pred; //找出不低于此高度的最近前驱
12        if (!qlist->data->valid(p)) { //若该前驱是header
13            if (qlist == first()) //且当前已是顶层，则意味着必须
14                insertAsFirst(new Quadlist<Entry<K, V>>); //首先创建新的一层，然后
15            p = qlist->pred->data->first()->pred; //将p转至上一层Skiplist的header
16        } else //否则，可径自
17            p = p->above; //将p提升至该高度
18        qlist = qlist->pred; //上升一层，并在该层
19        b = qlist->data->insertAfterAbove(e, p, b); //将新节点插入p之后、b之上
20    } //课后：调整随机参数，观察总体层高的相应变化
21    return true; //Dictionary允许重复元素，故插入必成功——这与Hashtable等Map略有差异
22 }
```

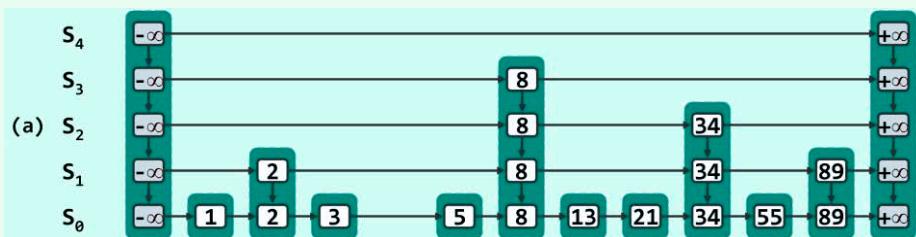
代码9.8 `Skiplist::put()`插入

这里通过逻辑表达式“`rand() % 2`”来模拟投掷硬币，并保证“生长概率逐层减半”条件。也就是说，通过（伪）随机整数的奇偶，近似地模拟一次理想的掷硬币实验。只要（伪）随机数为奇数（等价于掷出硬币正面），新塔就继续生长；一旦取（伪）随机数为偶数（等价于掷出反面），循环随即终止（生长停止），整个插入操作亦告完成。

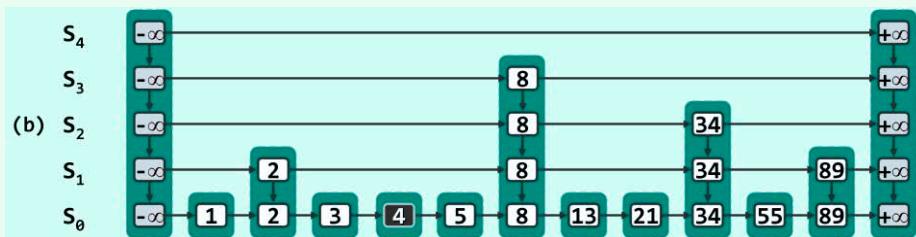
由此可见，新塔最终的（期望）高度，将取决于此前连续的正面硬币事件的（期望）次数。

■ 实例

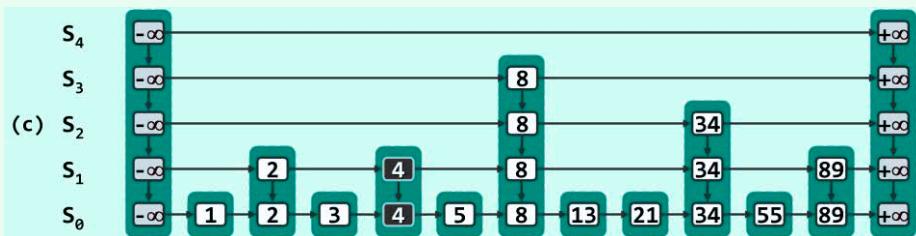
考查如图9.2所示的跳转表。将关键码4插入其中的过程，如图9.3(a~d)所示。



首先如图(a)所示，经过查找确定，应紧邻于关键码3右侧实施插入。



然后如图(b)所示，在底层列表中，创建一个节点作为新塔的基座。



此后，假定随后掷硬币的过程中，前两次为正面，第三次为反面。于是如图(c)和(d)所示，新塔将连续长高两层后停止生长。

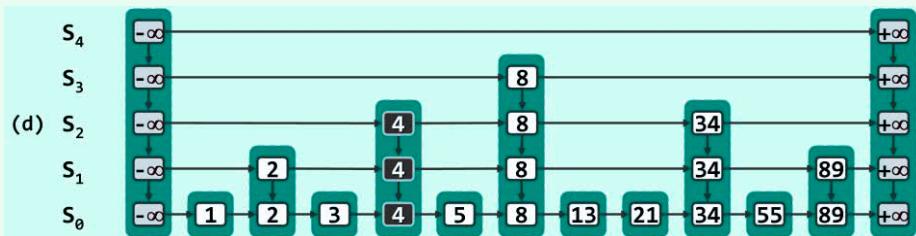


图9.3 跳转表节点插入过程(a~d)，也是节点删除的逆过程(d~a)

256

新塔每长高一层，塔顶节点除须与原塔纵向联接，还须与所在列表中的前驱与后继横向联接。

■ `insertAfterAbove()`

可见，`QuadlistNode`节点总是以塔为单位自底而上地成批插入，且每一节点都是作为当时的新塔顶而插入。也就是说，`QuadlistNode`节点的插入都属于同一固定的模式：创建关键码为e的新节点，将其作为节点p的后继和节点b（当前塔顶）的上邻“植入”跳转表。

因此，代码9.3只需提供统一的接口`insertAfterAbove()`，其具体实现如代码9.9所示。

```

1 template <typename T> QuadlistNodePosi(T) //将e作为p的后继、b的上邻插入Quadlist
2 Quadlist<T>::insertAfterAbove(T const& e, QuadlistNodePosi(T) p, QuadlistNodePosi(T) b = NULL)
3 { _size++; return p->insertAsSuccAbove(e, b); } //返回新节点位置 (below = NULL )

```

代码9.9 Quadlist::insertAfterAbove()插入

■ insertAsSuccAbove()

上述接口的实现，需转而调用节点p的insertAsSuccAbove()接口，如代码9.10所示完成节点插入的一系列实质性操作。

```

1 template <typename T> QuadlistNodePosi(T) //将e作为当前节点的后继、b的上邻插入Quadlist
2 QuadlistNode<T>::insertAsSuccAbove(T const& e, QuadlistNodePosi(T) b = NULL) {
3     QuadlistNodePosi(T) x = new QuadlistNode<T>(e, this, succ, NULL, b); //创建新节点
4     succ->pred = x; succ = x; //设置水平逆向链接
5     if (b) b->above = x; //设置垂直逆向链接
6     return x; //返回新节点的位置
7 }

```

代码9.10 QuadlistNode::insertAsSuccAbove()插入

具体过程如图9.4(a)所示，插入前节点b的上邻总是为空。

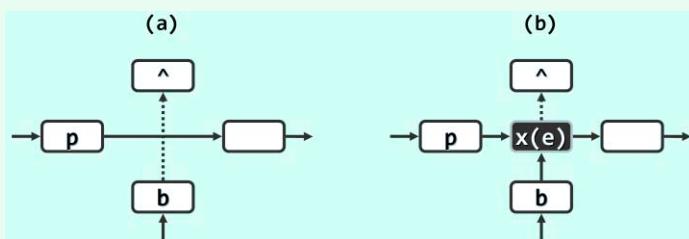


图9.4 四联表节点插入过程

首先，创建一个关键码为e的节点，其前驱和后继分别设为当前节点（p）及其后继（p->succ），上邻和下邻分别设为NULL和节点b。然后，沿水平和垂直方向设置好逆向的链接。最终结果如图(b)所示。

因这里允许关键码雷同，故在插入之前无需查找确认是否已有某个词条的关键码为e。

■ 时间复杂度

新塔每长高一层，都要紧邻于该层的某一节点p之后创建新的塔顶节点。准确地，在不大于新关键码的所有节点中，节点p为最大者；若这样的节点有多个，则按约定，p应取其中最靠后者。然而，若在每一层都从首节点开始，通过扫描确认p的位置，则最坏情况下可能每一层四联表都几乎需要遍历，耗时量将高达 $\Omega(n)$ 。然而实际上，各层四联表中的位置p之间自底而上存在很强的关联性，利用这一性质即可保证高效而精准地确定各高度上的插入位置p。

具体地如代码9.8所示，每次都从当前节点p的前驱出发，先上升一层，然后自右向左依次移动，直到发现新节点在新高度上的前驱。接下来，只需将p更新为该前驱的位置，并将新塔顶节点插入于p之后，新塔顶节点的插入即告完成。实际上，新塔每增长一层，都可重复上述过程完成新塔顶节点的插入。

整个过程中p所经过的路径，与关键码的查找路径恰好方向相反。由9.2.6节的结论，被访问节点的期望总数不超过 $\mathcal{O}(\log n)$ ，因此这也是插入算法运行时间期望值的上界。

9.2.8 删除

■ Skiplist::remove()

从跳转表中删除关键码为k词条的具体操作过程，如描述为代码9.11。

```

1 template <typename K, typename V> bool Skiplist<K, V>::remove(K k) { //跳转表词条删除算法
2     if (empty()) return false; //空表情况
3     ListNode<Quadlist<Entry<K, V>>*>* qlist = first(); //从顶层Quadlist的
4     QuadlistNode<Entry<K, V>>* p = qlist->data->first(); //首节点开始
5     if (!skipSearch(qlist, p, k)) return false; //目标词条不存在，直接返回
6     do { //若目标词条存在，则逐层拆除与之对应的塔
7         QuadlistNode<Entry<K, V>>* lower = p->below; //记住下一层节点
8         qlist->data->remove(p); //删除当前层节点
9         p = lower; qlist = qlist->succ; //转入下一层
10    } while (qlist->succ); //直到塔基
11    while (!empty() && first()->data->empty()) //反复
12        List::remove(first()); //清除已可能不含词条的顶层Quadlist
13    return true; //删除操作成功完成
14 }
```

代码9.11 Skiplist::remove()删除

这一过程的次序，与插入恰好相反。以如图9.3(d)所示的跳转表为例，若欲从其中删除关键码为4的词条，则在查找定位该词条后，依次删除塔顶。关键码删除过程的中间结果如图(c)和(b)所示，最终结果如图(a)。

■ Quadlist::remove()

在基于四联表实现跳转表中，`QuadlistNode`节点总是以塔为单位，自顶而下地成批被删除，其中每一节点的删除，都按照如下固定模式进行：节点p为当前的塔顶，将它从所属横向列表中删除；其下邻（若存在）随后将成为新塔顶，并将在紧随其后的下一次删除操作中被删除。

`Quadlist`模板类（代码9.3）为此定义了接口`remove()`，其具体实现如代码9.12所示。

```

1 template <typename T> //删除Quadlist内位置p处的节点，返回其中存放的词条
2 T Quadlist<T>::remove(QuadlistNodePosi(T) p) { //assert: p为Quadlist中的合法位置
3     p->pred->succ = p->succ; p->succ->pred = p->pred; _size--; //摘除节点
4     T e = p->entry; delete p; //备份词条，释放节点
5     return e; //返回词条
6 }
7
8 template <typename T> int Quadlist<T>::clear() { //清空Quadlist
9     int oldSize = _size;
10    while (0 < _size) remove(header->succ); //逐个删除所有节点
11    return oldSize;
12 }
```

代码9.12 Quadlist::remove()删除

这里各步迭代中的操作次序，与图9.4(a)和(b)基本相反。略微不同之处在于，因必然是整塔删除，故可省略纵向链接的调整。

其中**clear()**接口用以删除表中所有节点，在代码9.3中也是析构过程中的主要操作。

■ 时间复杂度

如代码9.11所示，词条删除算法所需的时间，不外乎消耗于两个方面。

首先是查找目标关键码，由9.2.6节的结论可知，这部分时间的期望值不过 $\mathcal{O}(\log n)$ 。其次是拆除与目标关键码相对应的塔，这是一个自顶而下逐层迭代的过程，故累计不超过 h 步；另外，由代码9.12可见，各层对应节点的删除仅需常数时间。

综合以上分析可知，跳转表词条删除操作所需的时间不超过 $\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(\log n)$ 。

§ 9.3 散列表

散列作为一种思想既朴素亦深刻，作为一种技术则虽古老却亦不失生命力，因而在数据结构及算法中占据独特而重要地位。此类方法以最基本的向量作为底层支撑结构，通过适当的散列函数在词条的关键码与向量单元的秩之间建立起映射关系。理论分析和实验统计均表明，只要散列表、散列函数以及冲突排解策略设计得当，散列技术可在期望的常数时间内实现词典的所有接口操作。也就是说，就平均时间复杂度的意义而言，可以使这些操作所需的运行时间与词典的规模基本无关。尤为重要的是，散列技术完全摒弃了“关键码有序”的先决条件，故就实现词典结构而言，散列所特有的通用性和灵活性是其它方式无法比拟的。

以下将围绕散列表、散列函数以及冲突排解三个主题，逐层深入地展开介绍。

9.3.1 完美散列

■ 散列表

散列表(**hashtable**)是散列方法的底层基础，逻辑上由一系列可存放词条(或其引用)的单元组成，故这些单元也称作桶(**bucket**)或桶单元；与之对应地，各桶单元也应按其逻辑次序在物理上连续排列。因此，这种线性的底层结构用向量来实现再自然不过。为简化实现并进一步提高效率，往往直接使用数组，此时的散列表亦称作桶数组(**bucket array**)。若桶数组的容量为 R ，则其中合法秩的区间 $[0, R)$ 也称作地址空间(**address space**)。

■ 散列函数

一组词条在散列表内部的具体分布，取决于所谓的散列(**hashing**)方案——事先在词条与桶地址之间约定的某种映射关系，可描述为从关键码空间到桶数组地址空间的函数：

hash() : key → hash(key)

这里的**hash()**称作散列函数(**hash function**)。反过来，**hash(key)**也称作**key**的散列地址(**hashing address**)，亦即与关键码**key**相对应的桶在散列表中的秩。

■ 实例

以学籍库为例。若某高校2011级共计4000名学生的学号为2011-0000至2011-3999，则可直接使用一个长度为4000的散列表A[0~3999]，并取

hash(key) = key - 20110000

从而将学号为x的学生学籍词条存放于桶单元A[hash(x)]。

如此散列之后，根据任一合法学号，都可在 $O(1)$ 时间内确定其散列地址，并完成一次查找、插入或删除。空间性能方面，每个桶恰好存放一个学生的学籍词条，既无空余亦无重复。这种在时间和空间性能方面均达到最优的散列，也称作完美散列（perfect hashing）。

实际上，Bitmap结构（习题[2-34]）也可理解为完美散列的一个实例。其中，为每个可能出现的非负整数，各分配了一个比特位，作为判定它是否属于当前集合的依据；散列函数也再简单不过——各比特位在内部向量中的秩，就是其所对应整数的数值。

遗憾的是，以上实例都是在十分特定的条件下才成立的，完美散列实际上并不常见。而在更多的应用环境中，为兼顾空间和时间效率，无论散列表或散列函数都需要经过更为精心的设计。以下就是一个更具一般性的实例。

9.3.2 装填因子与空间利用率

■ 电话查询系统

假设某大学拟建立一个电话簿查询系统，覆盖教职员和学生所使用的共约25000门固定电话。以下，主要考查其中反查功能的实现，即如何高效地由电话号码获取机主的信息。

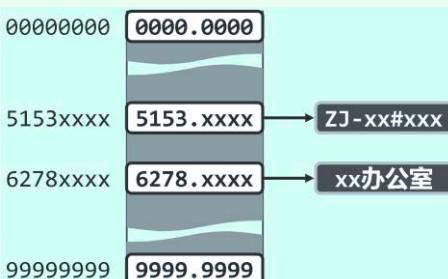


图9.5 直接使用线性数组实现电话簿词典

这一任务从数据结构的角度可理解为，设计并实现一个词典结构，以电话号码为词条关键码，支持根据这种关键码的高效查询。若考虑到开机、撤机和转机等情况，还应支持词条的插入和删除等动态操作。仿照学籍库的例子，可如图9.5引入向量，将电话号码为x的词条存放在秩为x的单元。如此，不仅词条与桶单元一一对应，而且无论是静态的查找还是动态的插入和删除，每次操作仅需常数时间！

然而进一步分析之后不难发现，这一方案在此情况下并不现实。从理论上讲，在使用8位编号系统时，整个城市固定电话最多可能达到 10^8 门。尽管该校人员所涉及的固定电话仅有25000门，但号码却可能随机分布在[0000-0000, 9999-9999]的整个范围内。这就意味着，上述方案所使用数组的长度大致应与 10^8 相当。每个词条占用的空间即便按100字节估计，该数组也至少需要占用10GB的空间。也就是说，此时的空间有效利用率为 $25000 / 10^8 = 0.025\%$ ，绝大部分的空间实际上处于闲置状态。

■ IP节点查询

另一个类似的例子是，根据IP地址获取对应的域名信息。按照32bit地址的协议，理论上可能的IP地址共有 $2^{32} = 4 \times 10^9$ 个，故此时若直接套用以上方法采用最简单的散列表和散列函数，将动辄征用100~1000GB的空间。另一方面，尽管大多数IP并没有指定域名，但任一IP都有可能具有域名，故这种方法的空间利用率也仅为5%左右^③。而在未来采用IPv6协议之后，尽管实际运

^③ 据威瑞信(VeriSign)公司2010年11月发布的《2010年第三季度域名行业报告》，截至2010年第三季度底，全球顶级域名(Top Level Domain, TLD)的注册总数已达到2.02亿，平均约每20个IP中才有一个IP具有域名

行中的节点数目在短时间内不会有很大的变化，但允许使用的IP地址将多达 $2^{128} = 256 \times 10^{36}$ 个——如此庞大的地址空间根本无法直接使用数组表示和存放^④；即便有如此规模的存储介质，其空间利用率依然极低。

■ 兼顾空间利用率与速度

此类问题在实际应用中十分常见，其共同的特点可归纳为：尽管词典中实际需要保存的词条数N（比如25000门）远远少于可能出现的词条数R（ 10^8 门），但R个词条中的任何一个都有可能出现在词典中。仿照2.4.1节针对向量空间利用率的度量方法，这里也可以将散列表中非空桶的数目与桶单元总数的比值称作装填因子（load factor）。从这一角度来看，上述问题的实质在于散列表的装填因子太小，从而导致空间利用率过低。

无论如何，散列方法的查找和更新速度实在诱人，也的确可以完美地适用于学籍库之类的应用。那么，能否在保持优势的前提下，克服其在存储空间利用率方面的不足呢？答案是肯定的，但需要运用一系列的技巧，其中首先就是散列函数的设计。

9.3.3 散列函数

9.3.10节将介绍一般类型关键码到整数的转换方法，故不妨先假定关键码均为 $[0, R)$ 范围内的整数。将词典中的词条数记作N，散列表长度记作M，于是通常有：

$$R \gg M > N$$

如图9.6所示，散列函数hash()的作用可理解为，将关键码空间 $[0, R)$ 压缩为散列地址空间 $[0, M)$ 。

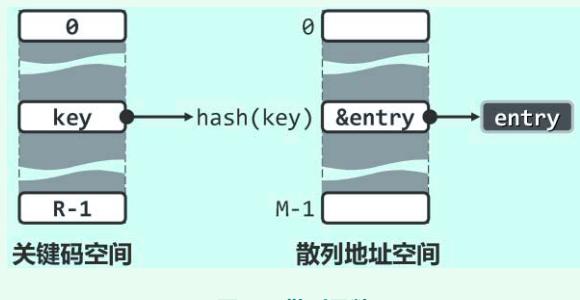


图9.6 散列函数

■ 设计原则

作为好的散列函数，hash()应具备哪些条件呢？首先，必须具有确定性。无论所含的数据项如何，词条E在散列表中的映射地址 $hash(E.key)$ 必须完全取决于其关键码E.key。其次，映射过程自身不能过于复杂，唯此方能保证散列地址的计算可快速完成，从而保证查询或修改操作整体的 $O(1)$ 期望执行时间。再次，所有关键码经映射后应尽量覆盖整个地址空间 $[0, M)$ ，唯此方可充分利用有限的散列表空间。也就是说，函数hash()最好是满射。

当然，因定义域规模R远远大于取值域规模M，hash()不可能是单射。这就意味着，关键码不同的词条被映射到同一散列地址的情况——称作散列冲突（collision）——难以彻底避免。尽管9.3.5节将会介绍解决冲突的办法，但若能在设计和选择散列函数阶段提前做些细致而充分的考量，便能尽可能地降低冲突发生的概率。

在此，最为重要的一条原则就是，关键码映射到各桶的概率应尽量接近于 $1/M$ ——若关键码均匀且独立地随机分布，这也是任意一对关键码相互冲突的概率。就整体而言，这等效于将关键码空间“均匀地”映射到散列地址空间，从而避免导致极端低效的情况——比如，因大部分关键

^④ 截至2010年，人类拥有的数字化数据总量为1.2ZB（ $1ZB = 2^{70} = 10^{21}$ 字节），预计到2020年可达35ZB

码集中分布于某一区间，而加剧散列冲突；或者反过来，因某一区间仅映射有少量的关键码，而导致空间利用率低下。

总而言之，随机越强、规律性越弱的散列函数越好。当然，完全符合上述条件的散列函数并不存在，我们只能通过先验地消除可能导致关键码分布不均匀的因素，最大限度地模拟理想的随机函数，尽最大可能降低发生冲突的概率。

■ 除余法 (division method)

符合上述要求的一种最简单的映射办法，就是将散列表长度M取作为素数，并将关键码key映射至key关于M整除的余数：

$\text{hash(key)} = \text{key} \bmod M$

仍以校园电话簿为例，若取M = 90001，则以下关键码：

{ 6278-5001, 5153-1876, 6277-0211 }

将如图9.7所示分别映射至

{ 54304, 51304, 39514 }



图9.7 除余法

请注意，采用除余法时必须将M选作素数，否则关键码被映射至[0, M)范围内的均匀度将大幅降低，发生冲突的概率将随M所含素因子的增多而迅速加大。

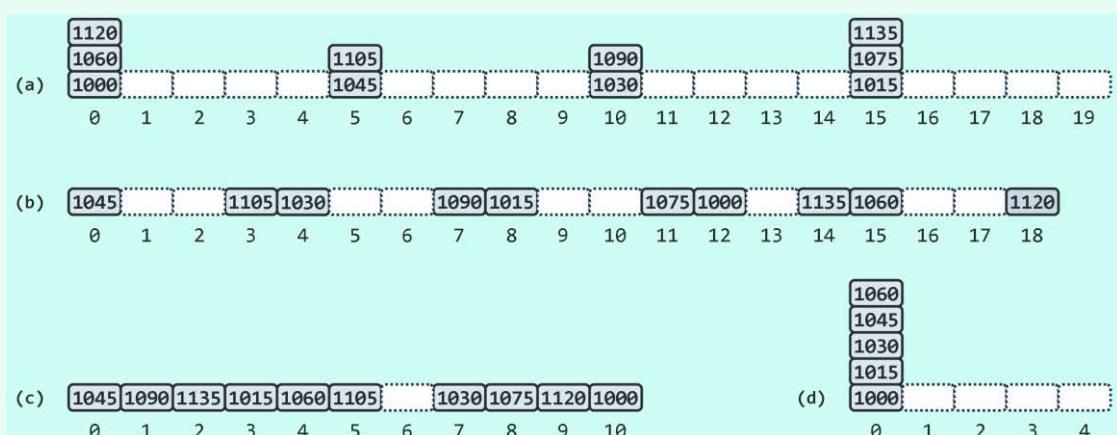


图9.8 素数表长可降低冲突的概率并提高空间的利用率

第10章

优先级队列

此前的搜索树结构和词典结构，都支持覆盖数据全集的访问和操作。也就是说，其中存储的每一数据对象都可作为查找和访问目标。为此，搜索树结构需要在所有元素之间定义并维护一个显式的全序（**full order**）关系；而词典结构中的数据对象之间，尽管不必支持比较大小，但在散列表之类的具体实现中，都从内部强制地在对象的数值与其对应的秩之间，建立起某种关联（尽管实际上这种关联通常越“随机”越好），从而隐式地定义了一个全序次序。

就对外接口的功能而言，本章将要介绍的优先级队列，较之此前的数据结构反而有所削弱。具体地，这类结构将操作对象限定于当前的全局极值者。比如，在全体北京市民中，查找年龄最长者；或者在所有鸟类中，查找种群规模最小者，等等。这种根据数据对象之间相对优先级对其进行访问的方式，与此前的访问方式有着本质区别，称作循优先级访问（**call-by-priority**）。

当然，“全局极值”本身就隐含了“所有元素可相互比较”这一性质。然而，优先级队列并不会也不必忠实地动态维护这个全序，却转而维护一个偏序（**partial order**）关系。其高明之处在于，如此不仅足以高效地支持仅针对极值对象的接口操作，更可有效地控制整体计算成本。正如我们将要看到的，对于常规的查找、插入或删除等操作，优先级队列的效率并不低于此前的结构；而对于数据集的批量构建及相互合并等操作，其性能却更胜一筹。作为不失高效率的轻量级数据结构，优先级队列在许多领域都是扮演着不可替代的角色。

§ 10.1 优先级队列ADT

10.1.1 优先级与优先级队列

除了作为存放数据的容器，数据结构还应能够按某种约定的次序动态地组织数据，以支持高效的查找和修改操作。比如4.5节的队列结构，可用以描述和处理日常生活中的很多问题：在银行排队等候接受服务的客户，提交给网络打印机的打印任务等，均属此列。在这类问题中，无论客户还是打印任务，接受服务或处理的次序完全取决于其出现的时刻——先到的客户优先接受服务，先提交的打印任务优先执行——此即所谓“先进先出”原则。

然而在更多实际应用环境中，这一简单公平的原则并不能保证整体效率必然达到最高。试想，若干病人正在某所医院的门诊处排队等候接受治疗，忽然送来一位骨折的病人。要是固守“先进先出”的原则，那么他只能咬牙坚持到目前已经到达的每位病人都已接受过治疗之后。显然，那样的话该病人将承受更长时间的痛苦，甚至贻误治疗的最佳时机。因此，医院在此时都会灵活变通，优先治疗这位骨折的病人。同理，若此时又送来一位心脏病突发的患者，那么医生肯定也会暂时把骨折病人放在一边（如果没有更多医生的话），转而优先抢救心脏病人。

由此可见，在决定病人接受治疗次序时，除了他们到达医院的先后次序，更应考虑到病情的轻重缓急，优先治疗病情最为危重的病人。在数据结构与算法设计中，类似的例子也屡见不鲜。在3.5.3节的选择排序算法中，每一步迭代都要调用**selectMax()**，从未排序区间选出最大者。在5.5.3节的Huffman编码算法中，每一步迭代都要调用**minHChar()**，从当前的森林中选出权重

最小的超字符。在基于空间扫描策略的各种算法中，每一步迭代都要根据到当前扫描线的距离，取出并处理最近的下一个事件点。

从数据结构的角度看，无论是待排序节点的数值、超字符的权重，还是事件的发生时间，数据项的某种属性只要可以相互比较大小，则这种大小关系即可称作优先级（**priority**）。而按照事先约定的优先级，可以始终高效查找并访问优先级最高数据项的数据结构，也统称作优先级队列（**priority queue**）。

10.1.2 关键码、比较器与偏序关系

仿照词典结构，我们也将优先级队列中的数据项称作词条（**entry**）；而与特定优先级相对应的数据属性，也称作关键码（**key**）。不同应用中的关键码，特点不尽相同：有时限定词条的关键码须互异，有时则允许词条的关键码雷同；有些词条的关键码一成不变，有些则可动态修改；有的关键码只是一个数字、一个字符或一个字符串，而复杂的关键码则可能由多个基本类型组合而成；多数关键码都取作词条内部的某一成员变量，而有的关键码则并非词条的天然属性。

无论具体形式如何，作为确定词条优先级的依据，关键码之间必须可以比较大小——注意，这与词典结构完全不同，后者仅要求关键码支持判等操作。因此对于优先级队列，必须以比较器的形式兑现对应的优先级关系。出于简化的考虑，与此前各章一样，本章依然假定关键码或者可直接比较，或者已重载了对应的操作符。

需特别留意的另一点是，尽管定义了明确的比较器即意味着在任何一组词条之间定义了一个全序关系，但正如2.7节所指出的，严格地维护这样一个全序关系必将代价不菲。实际上，优先级队列作为一类独特数据结构的意义恰恰在于，通过转而维护词条集的一个偏序关系。如此，不仅依然可以支持对最高优先级词条的动态访问，而且可将相应的计算成本控制在足以令人满意的范围之内。

10.1.3 操作接口

优先级队列接口的定义说明如表10.1所示。

表10.1 优先级队列ADT支持的操作接口

操作接口	功能描述
<code>size()</code>	报告优先级队列的规模，即其中词条的总数
<code>insert()</code>	将指定词条插入优先级队列
<code>getMax()</code>	返回优先级最大的词条（若优先级队列非空）
<code>delMax()</code>	删除优先级最大的词条（若优先级队列非空）

需要说明的是，本章允许在同一优先级队列中出现关键码雷同的多个词条，故`insert()`操作必然成功，因此该接口自然不必返回操作成功标志。

283

10.1.4 操作实例：选择排序

即便仍不清楚其具体实现，我们也已经可以按照以上ADT接口，基于优先级队列描述和实现各种算法。比如，实现和改进3.5.3节所介绍的选择排序算法。

具体的构思如下：将待排序的词条组织为一个优先级队列，然后反复调用`delMax()`接口，即可按关键码由大而小的次序逐一输出所有词条，从而得到全体词条的排序序列。

例如，针对某7个整数的这一排序过程，如表10.2所示。

表10.2 优先级队列操作实例：选择排序（当前的最大元素以方框示意）

操作	优 先 级 队 列	输 出
initialization	{ 441, 276, 320, 214, 698, 280, 112 }	
size()	[unchanged]	7
delMax()	{ 441, 276, 320, 214, 280, 112 }	698
size()	[unchanged]	6
delMax()	{ 276, 320, 214, 280, 112 }	441
delMax()	{ 276, 214, 280, 112 }	320
delMax()	{ 276, 214, 112 }	280
delMax()	{ 214, 112 }	276
delMax()	{ 112 }	214
size()	[unchanged]	1
delMax()	{ }	112
size()	[unchanged]	0

10.1.5 接口定义

如代码10.1所示，这里以模板类PQ的形式给出以上优先级队列的操作接口定义。

```

1 template <typename T> struct PQ { //优先级队列PQ模板类
2     virtual void insert(T) = 0; //按照比较器确定的优先级次序插入词条
3     virtual T getMax() = 0; //取出优先级最高的词条
4     virtual T delMax() = 0; //删除优先级最高的词条
5 };

```

代码10.1 优先级队列标准接口

因为这一组基本的ADT接口可能有不同的实现方式，故这里均以虚函数形式统一描述这些接口，以便在不同的派生类中具体实现。

10.1.6 应用实例：Huffman编码树

284

回到5.4节Huffman编码的应用实例。实际上，基于以上优先级队列的标准接口，即可实现统一的Huffman编码算法——无论优先级队列的具体实现方式如何。

■ 数据结构

为利用统一的优先级队列接口实现Huffman编码并对不同方法进行对比，不妨继续沿用代码5.29至代码5.33所定义的Huffman超字符、Huffman树、Huffman森林、Huffman编码表、Huffman二进制编码串等数据结构。

■ 比较器

若将Huffman森林视作优先级队列，则其中每一棵树（每一个超字符）即是一个词条。为保证词条之间可以相互比较，可如代码5.29（145页）所示重载对应的操作符。进一步地，因超字符的优先级可度量为其对应权重的负值，故不妨将大小关系颠倒过来，令小权重超字符的优先级更高，以便于操作接口的统一。

这一技巧也可运用于其它场合。仍以10.1.4节的选择排序为例，在将大小的定义颠倒之后，无需修改其它代码，即可实现反方向的排序。

■ 编码算法

经上述准备，代码10.2即可基于统一优先级队列接口给出通用的Huffman编码算法。

```

1  ****
2  * Huffman树构造算法：对传入的Huffman森林forest逐步合并，直到成为一棵树
3  ****
4  * forest基于优先级队列实现，此算法适用于符合PQ接口的任何实现方式
5  * 为Huffman_PQ_List、Huffman_PQ_ComplHeap和Huffman_PQ_LeftHeap共用
6  * 编译前对应工程只需设置相应标志：DSA_PQ_List、DSA_PQ_ComplHeap或DSA_PQ_LeftHeap
7  ****
8 HuffTree* generateTree(HuffForest* forest) {
9     while (1 < forest->size()) {
10         HuffTree* s1 = forest->delMax(); HuffTree* s2 = forest->delMax();
11         HuffTree* s = new HuffTree();
12         s->insertAsRoot(HuffChar('^', s1->root()->data.weight + s2->root()->data.weight));
13         s->attachAsLC(s->root(), s1); s->attachAsRC(s->root(), s2);
14         forest->insert(s); //将合并后的Huffman树插回Huffman森林
15     }
16     HuffTree* tree = forest->delMax(); //至此，森林中的最后一棵树
17     return tree; //即全局Huffman编码树
18 }
```

代码10.2 利用统一的优先级队列接口，实现通用的Huffman编码

■ 效率分析

相对于如代码5.36（147页）所示的版本，这里只不过将`minHChar()`替换为`PQ::delMax()`标准接口。正如我们很快将要看到的，优先级队列的所有ADT操作均可在 $\mathcal{O}(1 \log n)$ 时间内完成，故`generateTree()`算法也相应地可在 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间内构造出Huffman编码树——较之原版本，改进显著。同理，通过引入优先级队列，将如代码3.20（81页）所示的`selectMax()`替换为`PQ::delMax()`标准接口，也可自然地将选择排序的性能由 $\mathcal{O}(n^2)$ 改进至 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

自然地，这一结论可以推广至任一需要反复选取优先级最高元素的应用问题，并可直接改进相关算法的时间效率。那么，作为基础性数据结构的优先级队列，是否的确可以保证`getMax()`、`delMax()`和`insert()`等接口效率均为 $\mathcal{O}(1 \log n)$? 具体地，又应如何实现?

实际上，借助无序列表、有序列表、无序向量或有序向量，都难以同时兼顾`insert()`和`delMax()`操作的高效率（习题[10-1]）。因此，必须另辟蹊径，寻找更为高效的实现方法。

§ 10.2 堆

基于列表或向量等结构的实现方式，之所以无法同时保证`insert()`和`delMax()`操作的高效率，原因在于其对优先级的理解过于机械，以致始终都保存了全体词条之间的全序关系。实际上，尽管优先级队列的确隐含了“所有词条可相互比较”这一条件，但从操作接口层面来看，并不需要真正地维护全序关系。比如执行`delMax()`操作时，只要能够确定全局优先级最高的词条即可；至于次高者、第三高者等其余词条，目前暂时不必关心。

有限偏序集的极值必然存在，故此时借助堆（heap）结构维护一个偏序关系即足矣。堆有多种实现形式，以下首先介绍其中最基本的一种形式——完全二叉堆（complete binary heap）。

10.2.1 完全二叉堆

■ 结构性与堆序性

如图10.1实例所示，完全二叉堆应满足两个条件。

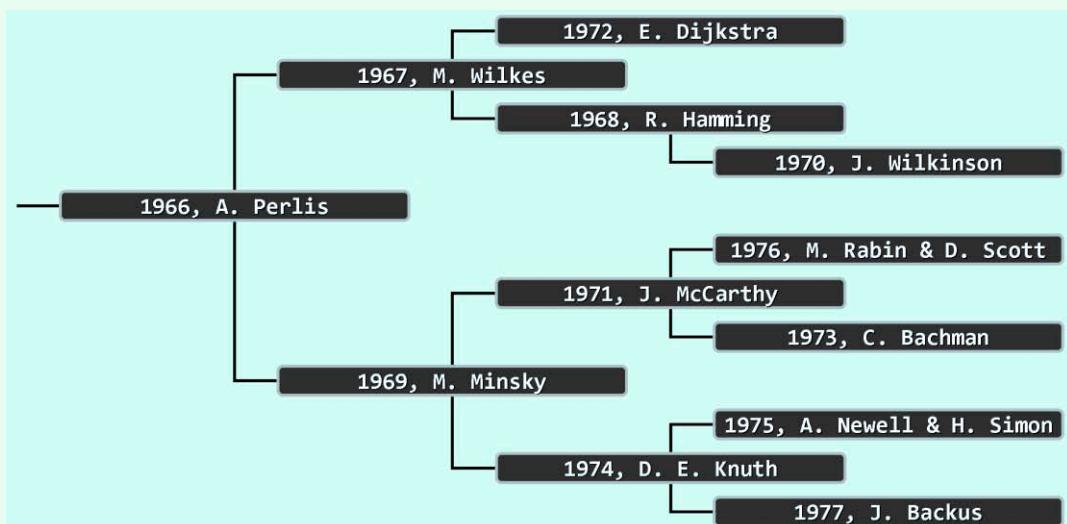


图10.1 以获奖先后为优先级，由前12届图灵奖得主构成的完全二叉堆

首先，其逻辑结构须等同于完全二叉树，此即所谓的“结构性”。如此，堆节点将与词条一一对应，故此后凡不致引起误解时，我们将不再严格区分“堆节点”与“词条”。其次，就优先级而言，堆顶以外的每个节点都不高（大）于其父节点，此即所谓的“堆序性”。

■ 大顶堆与小顶堆

由堆序性不难看出，堆中优先级最高的词条必然始终处于堆顶位置。因此，堆结构的`getMax()`操作总是可以在 $O(1)$ 时间内完成。

堆序性也可对称地约定为“堆顶以外的每个节点都不低（小）于其父节点”，此时同理，优先级最低的词条，必然始终处于堆顶位置。为以示区别，通常称前（后）者为大（小）顶堆。

小顶堆和大顶堆是相对的，而且可以相互转换。实际上，我们不久之前刚刚见过这样的一个实例——在代码5.29中重载Huffman超字符的比较操作符时，通过对超字符权重取负，颠倒优先级关系，使之与算法的实际语义及需求相吻合。

■ 高度

结构等同于完全二叉树的堆，必然不致太高。具体地，由5.5.2节的分析结论， n 个词条组成的堆的高度 $h = \lfloor \log_2 n \rfloor = \mathcal{O}(\log n)$ 。稍后我们即将看到，`insert()`和`delMax()`操作的时间复杂度将线性正比于堆的高度 h ，故它们均可在 $\mathcal{O}(\log n)$ 的时间内完成。

■ 基于向量的紧凑表示

尽管二叉树不属于线性结构，但作为其特例的完全二叉树，却与向量有着紧密的对应关系。

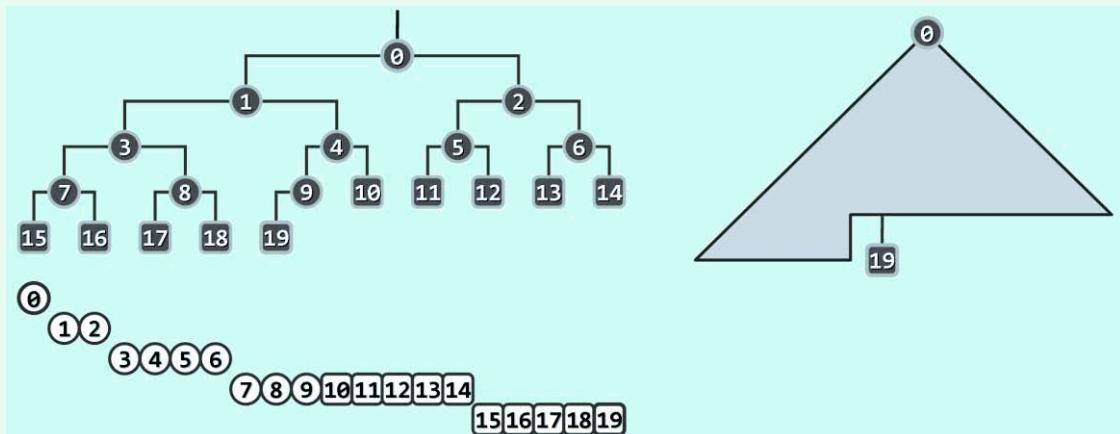


图10.2 按照层次遍历序列，对完全二叉树节点做编号（其中圆形表示内部节点，方形表示外部节点）

由图10.2可见，完全二叉堆的拓扑联接结构，完全由其规模 n 确定。按照层次遍历的次序，每个节点都对应于唯一的编号；反之亦然。故若将所有节点组织为一个向量，则堆中各节点（编号）与向量各单元（秩）也将彼此一一对应！

这一实现方式的优势首先体现在，各节点在物理上连续排列，故总共仅需 $\mathcal{O}(n)$ 空间。而更重要地是，利用各节点的编号（或秩），也可便捷地判别父子关系。

具体地，若将节点 v 的编号（秩）记作 $i(v)$ ，则根节点及其后代节点的编号分别为：

```
i(root) = 0
i(lchild(root)) = 1
i(rchild(root)) = 2
i(lchild(lchild(root))) = 3
...

```

更一般地，不难验证，完全二叉堆中的任意节点 v ，必然满足：

- 1) 若 v 有左孩子，则 $i(lchild(v)) = 2 \cdot i(v) + 1$;
- 2) 若 v 有右孩子，则 $i(rchild(v)) = 2 \cdot i(v) + 2$;
- 3) 若 v 有父节点，则 $i(parent(v)) = \lfloor (i(v) - 1)/2 \rfloor = \lceil (i(v)/2) \rceil - 1$

最后，由于向量支持低分摊成本的扩容调整，故随着堆的规模和内容不断地动态调整，除标准接口以外的操作所需的时间可以忽略不计。

所有这些良好的性质，不仅为以下基于向量实现堆结构提供了充足的理由，同时也从基本的原理和方法的层面提供了有力的支持。

■ 宏

为简化后续算法的描述及实现，可如代码10.3所示预先设置一系列的宏定义。

```

1 #define InHeap(n, i)      (((-1) < (i)) && ((i) < (n))) //判断PQ[i]是否合法节点
2 #define Parent(i)         ((i-1) >> 1) //PQ[i]的父节点 ( floor((i-1)/2), i无论正负 )
3 #define LastInternal(n)   Parent(n-1) //最后一个内部节点 ( 即末节点的父亲 )
4 #define LChild(i)          (1 + ((i) << 1)) //PQ[i]的左孩子
5 #define RChild(i)          ((1 + (i)) << 1) //PQ[i]的右孩子
6 #define ParentValid(i)    (0 < i) //判断PQ[i]是否有父亲
7 #define LChildValid(n, i)  InHeap(n, LChild(i)) //判断PQ[i]是否有一个(左)孩子
8 #define RChildValid(n, i)  InHeap(n, RChild(i)) //判断PQ[i]是否有两个孩子
9 #define Bigger(PQ, i, j)   (lt(PQ[i], PQ[j]) ? j : i) //取大者 (等时前者优先)
10 #define ProperParent(PQ, n, i) \
11     (RChildValid(n, i) ? Bigger(PQ, Bigger(PQ, i, LChild(i)), RChild(i)) : \
12     (LChildValid(n, i) ? Bigger(PQ, i, LChild(i)) : i) \
13     ) \
14 ) //父子(至多)三者中的大者 (相等时父节点优先, 如此可避免不必要的交换)

```

代码10.3 为简化完全二叉堆算法的描述及实现而定义的宏

■ PQ_ComplHeap模板类

按照以上思路，可以借助多重继承的机制，定义完全二叉堆模板类如代码10.4所示。

```

1 #include "../PQ/PQ.h" //引入优先级队列ADT
2 #include "../Vector/Vector.h" //引入向量
3 template <typename T>
4 class PQ_ComplHeap : public PQ<T>, public Vector<T> { //基于向量, 以完全二叉堆形式实现的PQ
5 protected:
6     Rank percolateDown(Rank n, Rank i); //下滤
7     Rank percolateUp(Rank i); //上滤
8     void heapify(Rank n); //Floyd建堆算法
9 public:
10    PQ_ComplHeap() { } //默认构造
11    PQ_ComplHeap(T* A, Rank lo, Rank hi) { copyFrom(A, lo, hi); heapify(hi - lo); } //批量构造
12    PQ_ComplHeap(T* A, Rank n) { copyFrom(A, 0, n); heapify(n); } //批量构造
13    void insert(T); //按照比较器确定的优先级次序插入词条
14    T getMax(); //取出优先级最高的词条
15    T delMax(); //删除优先级最高的词条
16 }; //PQ_ComplHeap

```

代码10.4 完全二叉堆接口

■ getMax()

既然全局优先级最高的词条总是位于堆顶，故如代码10.5所示，只需返回向量的首单元，即可在 $O(1)$ 时间内完成getMax()操作。

```

1 template <typename T> T PQ_CmplHeap<T>::getMax() //获取非空完全二叉堆中优先级最高的词条
2 { return _elem[0]; } //按照此处约定，向量首词条即优先级最高的词条

```

代码10.5 完全二叉堆getMax()接口

10.2.2 元素插入

本节介绍插入操作`insert(e)`的实现。因堆中的节点与其中所存词条以及词条的关键码完全对应，故沿用此前的习惯，在不致歧义的前提下，以下对它们将不再严格区分。

■ 算法

如代码10.6所示，插入算法分为两个步骤。

```

1 template <typename T> void PQ_CmplHeap<T>::insert(T e) { //将词条插入完全二叉堆中
2     Vector<T>::insert(e); //首先将新词条接至向量末尾
3     percolateUp(_size - 1); //再对该词条实施上滤调整
4 }

```

代码10.6 完全二叉堆insert()接口的主体框架

首先，调用向量的标准插入接口，将新词条接至向量的末尾。得益于向量结构良好的封装性，这里无需关心这一步骤的具体细节，尤其是无需考虑溢出扩容等特殊情况。

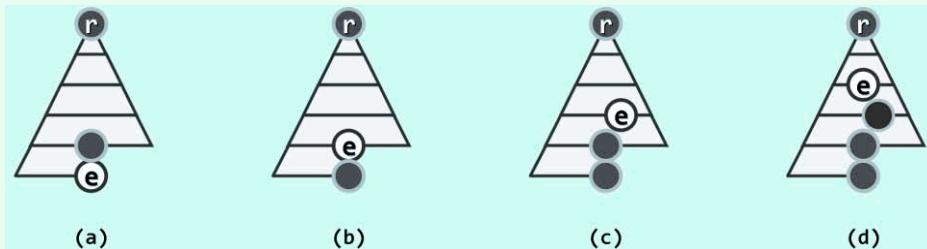


图10.3 完全二叉堆词条插入过程

尽管此时如图10.3(a)所示，新词条的引入并未破坏堆的结构性，但只要新词条`e`不是堆顶，就有可能与其父亲违反堆序性。

当然，其它位置的堆序性依然满足。故以下将调用`percolateUp()`函数，对新接入的词条做适当调整，在保持结构性的前提下恢复整体的堆序性。

■ 上滤

不妨假定原堆非空，于是新词条`e`的父亲`p`（深色节点）必然存在。根据`e`在向量中对应的秩，可以简便地确定词条`p`对应的秩，即 $i(p) = \lfloor (i(e) - 1)/2 \rfloor$ 。

此时，若经比较判定 $e \leq p$ ，则堆序性在此局部以至全堆均已满足，插入操作因此即告完成。反之，若 $e > p$ ，则可在向量中令`e`和`p`互换位置。如图10.3(b)所示，如此不仅全堆的结构性依然满足，而且`e`和`p`之间的堆序性也得以恢复。

当然，此后`e`与其新的父亲，可能再次违背堆序性。若果真如此，不妨继续套用以上方法，如图10.3(c)所示令二者交换位置。当然，只要有必要，此后可以不断重复这种交换操作。

每交换一次，新词条`e`都向上攀升一层，故这一过程也形象地称作上滤（`percolate up`）。当然，`e`至多上滤之堆顶。一档上滤完成，则如图10.3(d)所示，全堆的堆序性必将恢复。

由上可见，上滤调整过程中交换操作的累计次数，不致超过全堆的高度 $\lfloor \log_2 n \rfloor$ 。而在向量中，每次交换操作只需常数时间，故上滤调整乃至整个词条插入算法整体的时间复杂度，均为 $O(\log n)$ 。这也是从一个方面，兑现了10.1节末尾就优先级队列性能所做的承诺。

当然，不难通过构造实例说明，新词条有时的确需要一直上滤至堆顶。然而实际上，此类最坏情况通常极为罕见。以常规的随机分布而言，新词条平均需要爬升的高度，要远远低于直觉的估计（习题[10-6]）。在此类场合中，优先级队列相对于其它数据结构的性能优势，也因这一特性得到了进一步的巩固。

■ 实例

通过上滤调整实现插入操作的一个实例，如图10.4所示。图中上方为完全堆的拓扑联接结构，下方为物理上与之对应的线性存储结构。

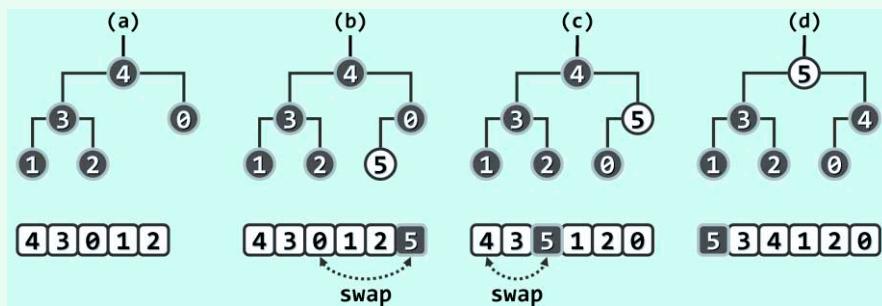


图10.4 完全二叉堆词条插入操作实例

在如图(a)所示由5个元素组成的初始完全堆中，现拟插入关键码为5的新元素。为此，首先如图(b)所示，将该元素置于向量的末尾。此时，新元素5与其父节点0逆序，故如图(c)所示，经一次交换之后，新元素5上升一层。此后，新元素5与其新的父节点4依然逆序，故如图(d)所示，经一次交换后再上升一层。此时因已抵达堆顶，插入操作完毕，故算法终止。

■ 实现

以上调整在向量中的具体操作过程，可描述和实现如代码10.7所示。

```

1 //对向量中的第i个词条实施上滤操作, i < _size
2 template <typename T> Rank PQ_CmplHeap<T>::percolateUp(Rank i) {
3     while (ParentValid(i)) { //只要i有父亲(尚未抵达堆顶)
4         Rank j = Parent(i); //j为i之父
5         if (lt(_elem[i], _elem[j])) break; //一旦当前父子不再逆序, 上滤旋即完成
6         swap(_elem[i], _elem[j]); i = j; //否则, 父子交换位置, 并继续考查上一层
7     } //while
8     return i; //返回上滤最终抵达的位置
9 }
```

代码10.7 完全二叉堆的上滤

其中为简化描述而使用的快捷方式`ParentValid()`，以宏的形式定义如代码10.3所示。

需说明的是，若仅考虑插入操作，则因被调整词条的秩总是起始于 $n - 1$ ，故无需显式地指

定输入参数*i*。然而，考虑到上滤调整可能作为一项基本操作用于其它场合（习题[10-12]），届时被调整词条的秩可能任意，故为保持通用性，这里不妨保留一项参数以指定具体的起始位置。

■ 改进

在如代码10.7所示的版本中，最坏情况下在每一层次都要调用一次`swap()`，该操作通常包含三次赋值。而若能注意到，参与这些操作的词条之间具有很强的相关性，则不难改进为平均每层大致只需一次赋值（习题[10-3]），而大小比较操作甚至可以更少（习题[10-4]）。

10.2.3 元素删除

■ 算法

下面再来讨论`delMax()`方法的实现。如代码10.8所示，删除算法也分为两个步骤。

```
1 template <typename T> T PQ_CmplHeap<T>::delMax() { //删除非空完全二叉堆中优先级最高的词条
2     T maxElem = _elem[0]; _elem[0] = remove(_size - 1); //摘除堆顶（首词条），代之以末词条
3     percolateDown(_size, 0); //对新堆顶实施下滤调整
4     return maxElem; //返回此前备份的最大词条
5 }
```

代码10.8 完全二叉堆`delMax()`接口的主体框架

首先，既然待删除词条*r*总是位于堆顶，故可直接将其取出并备份。此时如图10.5(a)所示，堆的结构性将被破坏。为修复这一缺陷，可如图(b)所示，将最末尾的词条*e*转移至堆顶。

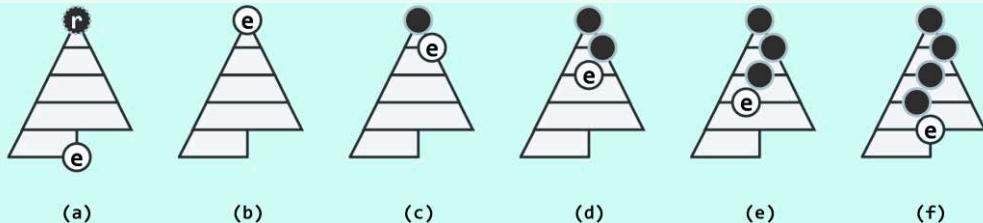


图10.5 完全二叉堆词条删除过程

当然，新的堆顶可能与其孩子（们）违背堆序性——尽管其它位置的堆序性依然满足。故以下调用`percolateDown()`函数调整新堆顶，在保持结构性的前提下，恢复整体的堆序性。

■ 下滤

若新堆顶*e*不满足堆序性，则可如图10.5(c)所示，将*e*与其（至多）两个孩子中的大者（图中深色节点）交换位置。与上滤一样，由于使用了向量来实现堆，根据词条*e*的秩可便捷地确定其孩子的秩。此后，堆中可能的缺陷依然只能来自于词条*e*——它与新孩子可能再次违背堆序性。若果真如此，不妨继续套用以上方法，将*e*与新孩子中的大者交换，结果如图(d)所示。实际上，只要有必要，此后可如图(e)和(f)不断重复这种交换操作。

因每经过一次交换，词条*e*都会下降一层，故这一调整过程也称作下滤（*percolate down*）。与上滤同理，这一过程也必然终止。届时如图(f)所示，全堆的堆序性必将恢复；而且，下滤乃至整个删除算法的时间复杂度也为 $\mathcal{O}(\log n)$ ——同样，这从另一方面兑现了此前的承诺。

■ 实例

通过下滤变换实现删除操作的一个实例，如图10.6所示。同样地，图中上方和下方分别为完全堆的拓扑结构以及对应的线性存储结构。

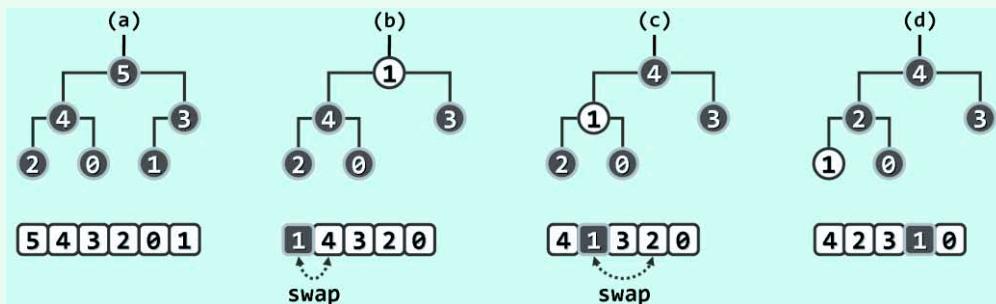


图10.6 完全二叉堆词条删除操作实例

从如图(a)所示由6个元素组成的完全堆中，现拟删除堆顶元素5。为此，首先如图(b)所示将该元素摘除，并将向量的末元素1转入首单元，权作堆顶。此后，1与其孩子节点均逆序。故如图(c)所示，在与其孩子中的大者4交换之后，1下降一层。此后，1与其新的孩子2依然逆序，故如图(d)所示经又一次交换后再下降一层。此时因1已抵达底层，删除操作完毕，算法成功终止。

■ 实现

以上调整在向量中的具体操作过程，可描述和实现如代码10.9所示。

```

1 //对向量前n个词条中的第i个实施下滤操作 , i < n
2 template <typename T> Rank PQ_CmplHeap<T>::percolateDown(Rank n, Rank i) {
3     Rank j; //i及其(至多两个)孩子中, 堪为父者
4     while (i != (j = ProperParent(_elem, n, i))) //只要i非j, 则
5         { swap(_elem[i], _elem[j]); i = j; } //二者换位, 并继续考查下降后的i
6     return i; //返回下滤抵达的位置(亦i亦j)
7 }
```

代码10.9 完全二叉堆的下滤

这里为简化算法描述使用了宏ProperParent()，其定义如288页代码10.3所示。

出于与上滤操作同样的考虑（习题[10-12]），这里也可通过输入参数i，灵活地指定起始位置。此前针对上滤操作所建议的改进方法，有的也同样适用于下滤操作（习题[10-3]），但有的却不再适用（习题[10-4]）。

10.2.4 建堆

很多算法中输入词条都是成批给出，故在初始化阶段往往需要解决一个共同问题：给定一组词条，高效地将它们组织成一个堆。这一过程也称作“建堆”（*heapification*）。本节就以完全二叉堆为例介绍相关的算法。当然，以下算法同样也适用其它类型的堆。

■ 蛮力算法

乍看起来，建堆似乎并不成其为一个问题。既然堆符合优先级队列ADT规范，那么从空堆起

第11章

串

串或字符串（**string**）属于线性结构，自然地可直接利用向量或列表等序列结构加以实现。但字符串作为数据结构，特点也极其鲜明，这可归纳为：结构简单，规模庞大，元素重复率高。

所谓结构简单，是指字符表本身的规模不大，甚至可能极小。以生物信息序列为为例，参与蛋白质（文本）合成的常见氨基酸（字符）只有20种，而构成DNA序列（文本）的碱基（字符）仅有4种。尽管就规模而言，地球系统模式的单个输出文件长达1~100GB，微软Windows系统逾4000万行的源代码长度累计达到40GB，但它们都只不过是由ASCII字符，甚至是可打印字符组成的。因此，以字符串形式表示的海量文本数据的高效处理技术，一直都是相关领域的研究重点。

鉴于字符串结构的上述特点，本章将直接利用C++本身所提供的字符数组，并转而将讲述的重点，集中于各种串匹配算法**indexOf()**的基本原理与高效实现。

§ 11.1 串及串匹配

11.1.1 串

■ 字符串

一般地，由n个字符构成的串记作：

$$S = "a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}" , \text{ 其中, } a_i \in \Sigma, 0 \leq i < n$$

这里的Σ是所有可用字符的集合，称作字符表（**alphabet**），例如二进制比特集 $\Sigma = \{ 0, 1 \}$ 、ASCII字符集、Unicode字符集、构成DNA序列的所有碱基、组成蛋白质的所有氨基酸，等等。

字符串S所含字符的总数n，称作S的长度，记作 $|S| = n$ 。这里只考虑长度有限的串， $n < \infty$ 。特别地，长度为零的串称作空串（**null string**）。请注意，空串并非由空格字符'□'组成的串，二者完全不同。

■ 子串

字符串中任一连续的片段，称作其子串（**substring**）。具体地，对于任意的 $0 \leq i \leq i + k < n$ ，由字符串S中起始于位置i的连续k个字符组成的子串记作：

$$S.substr(i, k) = "a_i \ a_{i+1} \ \dots \ a_{i+k-1}" = S[i, i + k)$$

有两种特殊子串：起始于位置0、长度为k的子串称为前缀（**prefix**），而终止于位置n - 1、长度为k的子串称为后缀（**suffix**），分别记作：

$$prefix(S, k) = S.substr(0, k) = S[0, k)$$

$$suffix(S, k) = S.substr(n - k, k) = S[n - k, n)$$

由上述定义可直接导出以下结论：空串是任何字符串的子串，也是任何字符串的前缀和后缀；任何字符串都是自己的子串，也是自己的前缀和后缀。此类子串、前缀和后缀分别称作平凡子串（**trivial substring**）、平凡前缀（**trivial prefix**）和平凡后缀（**trivial suffix**）。反之，字符串本身之外的所有非空子串、前缀和后缀，分别称作真子串（**proper substring**）、真前缀（**proper prefix**）和真后缀（**proper suffix**）。

■ 判等

最后，字符串 $S[0, n]$ 和 $T[0, m]$ 称作相等，当且仅当二者长度相等 ($n = m$)，且对应的字符分别相同（对任何 $0 \leq i < n$ 都有 $S[i] = T[i]$ ）。

■ ADT

串结构主要的操作接口可归纳为表11.1。

表11.1 串ADT支持的操作看接口

操作接口	功能
<code>length()</code>	查询串的长度
<code>charAt(i)</code>	返回第 i 个字符
<code>substr(i, k)</code>	返回从第 i 个字符起、长度为 k 的子串
<code>prefix(k)</code>	返回长度为 k 的前缀
<code>suffix(k)</code>	返回长度为 k 的后缀
<code>equal(T)</code>	判断 T 是否与当前字符串相等
<code>concat(T)</code>	将 T 串接在当前字符串之后
<code>indexOf(P)</code>	若 P 是当前字符串的一个子串，则返回该子串的起始位置；否则返回 -1

比如，依次对串 $S = "data structures"$ 执行如下操作，结果依次如表11.2所示。

表11.2 串操作实例

操作	输出	字符串 s
<code>length()</code>	15	"data structures"
<code>charAt(5)</code>	's'	"data structures"
<code>prefix(4)</code>	"data"	"data structures"
<code>suffix(10)</code>	"structures"	"data structures"
<code>concat("and algorithms")</code>		"data structures and algorithms"
<code>equal("data structures")</code>	false	"data structures and algorithms"
<code>equal("data structures and algorithms")</code>	true	"data structures and algorithms"
<code>indexOf("string")</code>	-1	"data structures and algorithms"
<code>indexOf("algorithm")</code>	20	"data structures and algorithms"

11.1.2 串匹配

■ 应用与问题

在涉及字符串的众多实际应用中，模式匹配是最常使用的一项基本操作。比如UNIX Shell的grep工具（General Regular Expression Parser）和DOS的find命令，基本功能都是在指定的字符串中查找^①特定模式的字符串。又如生物信息处理领域，也经常需要在蛋白质序列中

^① 这两个命令都是以文件形式来指定待查找的主串，具体格式分别是：

```
% grep <pattern> <file>
c:\> find "pattern" <file>
```

寻找特定的氨基酸模式，或在DNA序列中寻找特定的碱基模式。再如，邮件过滤器也需根据事先定义的特征串，通过扫描电子邮件的地址、标题及正文来识别垃圾邮件。还有，反病毒系统也会扫描刚下载的或将要执行的程序，并与事先提取的特征串相比对，以判定其中是否含有病毒。

上述所有应用问题，本质上都可转化为和描述为如下形式：

如何在字符串数据中，检测和提取以字符串形式给出的某一局部特征

这类操作都属于串模式匹配 (**string pattern matching**) 范畴，简称串匹配。一般地，即：

对基于同一字符表的任何主串 T ($|T| = n$) 和模式串 P ($|P| = m$)：

判定 T 中是否存在某一子串与 P 相同

若存在（匹配），则报告该子串在 T 中的起始位置

串的长度 n 和 m 本身通常都很大，但相对而言 n 更大，即满足 $2 \ll m \ll n$ 。比如，若：

```
T = "Now is the time for all good people to come"
```

```
P = "people"
```

则匹配的位置应该是 $T.indexOf(P) = 29$ 。

■ 问题分类

根据具体应用的要求不同，串匹配问题可以多种形式呈现。

有些场合属于模式检测 (**pattern detection**) 问题：我们只关心是否存在匹配而不关心具体的匹配位置，比如垃圾邮件的检测。有些场合属于模式定位 (**pattern location**) 问题：若经判断的确存在匹配，则还需确定具体的匹配位置，比如带毒程序的鉴别与修复。有些场合属于模式计数 (**pattern counting**) 问题：若有多处匹配，则统计出匹配子串的总数，比如网络热门词汇排行榜的更新。有些场合则属于模式枚举 (**pattern enumeration**) 问题：在有多处匹配时，报告出所有匹配的具体位置，比如网络搜索引擎。

11.1.3 测评标准与策略

串模式匹配是一个经典的问题，有名字的算法已不下三十种。鉴于串结构自身的特点，在设计和分析串模式匹配算法时也必须做特殊的考虑。其中首先需要回答的一个问题就是，如何对任一串匹配算法的性能作出客观的测量和评估。

多数读者首先会想到采用评估算法性能的常规口径和策略：以时间复杂度为例，假设主串 T 和模式串 P 都是随机生成的，然后综合其各种组合从数学或统计等角度得出结论。很遗憾，此类构思并不适用于这一问题。

以基于字符表 $\Sigma = \{0, 1\}$ 的二进制串为例。任给长度为 n 的主串，其中长度为 m 的子串不过 $n - m + 1$ 个 ($m \ll n$ 时接近于 n 个)。另一方面，长度为 m 的随机模式串多达 2^m 个，故匹配成功的概率为 $n / 2^m$ 。以 $n = 100,000$ 、 $m = 100$ 为例，这一概率仅有

$$100,000 / 2^{100} < 10^{-25}$$

对于更长的模式串、更大的字符表，这一概率还将更低。因此，这一策略并不能有效地覆盖成功匹配的情况，所得评测结论也无法准确地反映算法的总体性能。

实际上，有效涵盖成功匹配情况的一种简便策略是，随机选取主串 T ，并从 T 中随机取出长度为 m 的子串作为模式串 P 。这也是本章将采用的评价标准。

§ 11.2 蛮力算法

11.2.1 算法描述

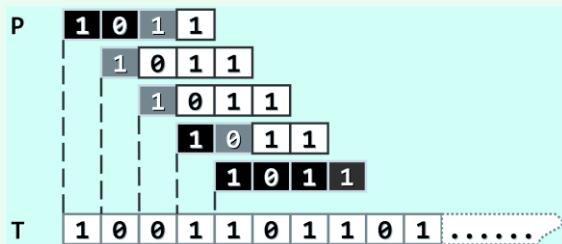


图11.1 串模式匹配的蛮力算法

蛮力串匹配是最直接最直觉的方法。如图11.1所示，可假想地将主串和模式串分别写在两条印有等间距方格的纸带上，主串对应的纸带固定，模式串纸带的首字符与主串纸带的首字符对齐，二者都沿水平方向放置。于是，只需将P与T中长度为m的n - m + 1个子串逐一比对，即可确定可能的匹配位置。

不妨按自左向右的次序考查各子串。在初始状态下，T的前m个字符将与P的m个字符两两对齐。接下来，自左向右检查相互对齐的这m对字符：若当前字符对相互匹配，则转向下一对字符；反之一旦失配，则说明在此位置主串与模式串不可能完全匹配，于是可将P对应的纸带右移一个字符，然后从其首字符开始与T中对应的新子串重新对比。图中，模式串P的每一黑色方格对应于字符对的一次匹配，每一灰色方格对应于一次失配，白色方格则对应于未进行的一次比对。若经过检查，当前的m对字符均匹配，则意味着整体匹配成功，从而返回匹配子串的位置。

蛮力算法的正确性显而易见：既然只有在某一轮的m次比对全部成功之后才成功返回，故不致于误报；反过来，所有对齐位置都会逐一尝试，故亦不致漏报。

11.2.2 算法实现

以下给出蛮力算法的两个实现版本。二者原理相同、过程相仿，但分别便于引入后续的不同改进算法，故在此先做一比较。

```

1 ****
2 * Text      : 0 1 2 . . . i-j . . . i . . n-1
3 *           -----|-----|-----|
4 * Pattern   :          0 . . . . j . .
5 *           |-----|-----|
6 ****
7 int match(char* P, char* T) { //串匹配算法 (Brute-force-1)
8     size_t n = strlen(T), i = 0; //主串长度、当前接受比对字符的位置
9     size_t m = strlen(P), j = 0; //模式串长度、当前接受比对字符的位置
10    while (j < m && i < n) //自左向右逐个比对字符
11        if (T[i] == P[j]) //若匹配
12            { i++; j++; } //则转到下一对字符
13        else //否则
14            { i -= j - 1; j = 0; } //主串回退、模式串复位
15    return i - j; //如何通过返回值，判断匹配结果？
16 }
```

如代码11.1所示的版本借助整数*i*和*j*，分别指示T和P中当前接受比对的字符T[i]与P[j]。若当前字符对匹配，则*i*和*j*同时递增以指向下一对字符。一旦*j*增长到*m*则意味着发现了匹配，即可返回P相对于T的对齐位置*i - j*。一旦当前字符对失配，则*i*回退并指向T中当前对齐位置的下一字符，同时*j*复位至P的首字符处，然后开始下一轮比对。

```

1 ****
2 * Text      : 0 1 2 . . . i i+1 . . . i+j . . n-1
3 *           -----|-----|-----
4 * Pattern   :          0 1 . . . j . .
5 *           |-----|
6 ****
7 int match(char* P, char* T) { //串匹配算法(Brute-force-2)
8     size_t n = strlen(T), i = 0; //主串长度、与模式串首字符的对齐位置
9     size_t m = strlen(P), j; //模式串长度、当前接受比对字符的位置
10    for (i = 0; i < n - m + 1; i++) { //主串从第i个字符起，与
11        for (j = 0; j < m; j++) //模式串中对应的字符逐个比对
12            if (T[i + j] != P[j]) break; //若失配，模式串整体右移一个字符，再做一轮比对
13        if (j >= m) break; //找到匹配子串
14    }
15    return i; //如何通过返回值，判断匹配结果？
16 }
```

代码11.2 蛮力串匹配算法（版本二）

如代码11.2所示的版本，借助整数*i*指示P相对于T的对齐位置，且随着*i*不断递增，对齐的位置逐步右移。在每一对齐位置*i*处，另一整数*j*从0递增至*m - 1*，依次指示当前接受比对的字符为T[i + j]与P[j]。因此，一旦发现匹配，即可直接返回当前的对齐位置*i*。

11.2.3 时间复杂度

从理论上讲，蛮力算法至多迭代*n - m + 1*轮，且各轮至多需进行*m*次比对，故总共只需做不超过 $(n - m + 1) \cdot m$ 次比对。那么，这种最坏情况的确会发生吗？答案是肯定的。

考查如图11.2所示的实例。无论采用上述哪个版本的蛮力算法，都需做*n - m + 1*轮迭代，且各轮都需做*m*次比对。因此，整个算法共需做 $m \cdot (n - m - 1)$ 次字符比对，其中成功的和失败的各有 $(m - 1) \cdot (n - m - 1) + 1$ 和*n - m - 2*次。因*m << n*，渐进的时间复杂度应为 $\mathcal{O}(n \cdot m)$ 。



图11.2 蛮力算法的最坏情况
(也是基于坏字符策略BM算法的最好情况)



图11.3 蛮力算法的最好情况
(也是基于坏字符策略BM算法的最坏情况)

当然，蛮力算法的效率也并非总是如此低下。如图11.3所示，若将模式串P左右颠倒，则每经一次比对都可排除主串中的一个字符，故此类情况下的运行时间将为 $\mathcal{O}(n)$ 。实际上，此类最好（或接近最好）情况出现的概率并不很低，尤其是在字符表较大时（习题[11-9]）。

§ 11.3 KMP算法

11.3.1 构思

上一节的分析表明，蛮力算法在最坏情况下所需时间，为主串长度与模式串长度的乘积，故无法应用于规模稍大的应用环境，很有必要改进。为此，不妨从分析以上最坏情况入手。

稍加观察不难发现，问题在于这里存在大量的局部匹配：每一轮的m次比对中，仅最后一次可能失配。而一旦发现失配，主串、模式串的字符指针都要回退，并从头开始下一轮尝试。

实际上，这类重复的字符比对操作没有必要。既然这些字符在前一轮迭代中已经接受过比对并且成功，我们也就掌握了它们的所有信息。那么，如何利用这些信息，提高匹配算法的效率呢？

以下以蛮力算法的前一版本（代码11.1）为基础进行改进。

■ 简单示例

如图11.4所示，用T[i]和P[j]分别表示当前正在接受比对的一对字符。

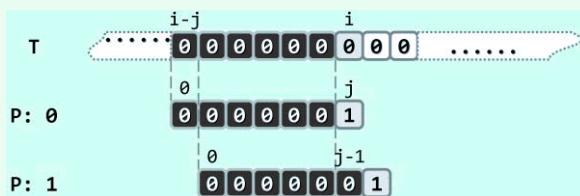


图11.4 利用以往的成功比对所提供的信息，可以避免主串字符指针的回退

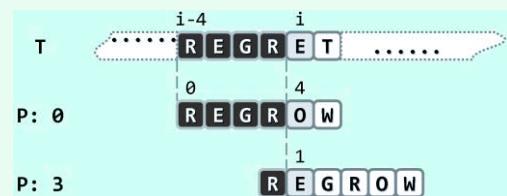


图11.5 利用以往的成功比对所提供的信息，有可能使模式串大跨度地右移

当本轮比对进行到最后一对字符并发现失配后，蛮力算法会令两个字符指针同步回退（即令 $i = i - j + 1$ 和 $j = 0$ ），然后再从这一位置继续比对。然而事实上，指针*i*完全不必回退。

■ 记忆 = 经验 = 预知力

经过前一轮比对，我们已经清楚地知道，子串`substr(T, i - j, j)`完全由'0'组成。记住这一性质便可预测出：在回退之后紧接着的下一轮比对中，前 $j - 1$ 次比对必然都会成功。因此，尽可令*i*保持不变、 $j = j - 1$ ，然后继续比对。如此，将使下一轮的比对减少 $j - 1$ 次！

上述“令*i*保持不变、 $j = j - 1$ ”的含义，可理解为“令P相对于T右移一个单元，然后从前一失配位置继续比对”。实际上这一技巧可推而广之：利用以往的成功比对所提供的信息（记忆），不仅可避免主串字符指针的回退，而且可使模式串尽可能大跨度地右移（经验）。

■ 一般实例

如图11.5所示，再来考查一个更具一般性的实例。

本轮比对进行到发现'E' = T[i] ≠ P[4] = '0'失配后，在保持*i*不变的同时，应将模式串P右移几个单元呢？有必要逐个单元地右移吗？不难看出，在这一情况下移动一个或两个单元都是徒劳的。事实上，根据此前的比对结果，必然有

```
suffix(prefix(T, i), 4) = substr(T, i - 4, 4) = prefix(P, 4) = "REGR"
```

若在此局部能够实现匹配，则至少紧邻于T[i]左侧的若干字符均应得到匹配——比如，当P[0]与T[i - 1]对齐时，即属这种情况。注意到*i - 1*是能够如此匹配的最左侧位置，故可放心地将P右移 $4 - 1 = 3$ 个单元（等效于*i*保持不变，同时令*j = 1*），然后继续比对。

11.3.2 next表

一般地，如图11.6假设前一轮迭代终止于 $T[i] \neq P[j]$ 。按以上构想，指针*i*不必回退，而是将 $T[i]$ 与 $P[t]$ 对齐并开始下一轮比对。那么，*t*准确地应该取作多少呢？

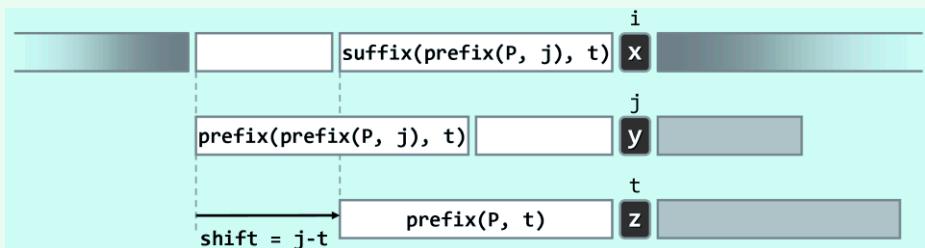


图11.6 利用此前成功比对所提供的信息，在安全的前提下尽可能大跨度地右移模式串

由图可见，经过此前一轮迭代的比对，已经确定匹配的范围应为：

$$\text{prefix}(P, j) = \text{substr}(T, i - j, j) = \text{suffix}(\text{prefix}(P, i), j)$$

于是经适当右移之后，如果模式串 P 能够与 T 的某一（包含 $T[i]$ 的）子串完全匹配，那么必要的条件之一就是：

$$\text{prefix}(P, t) = \text{prefix}(\text{prefix}(P, j), t) = \text{suffix}(\text{prefix}(P, j), t)$$

也就是说，在 $\text{prefix}(P, j)$ 中长度为 t 的真前缀应该与长度为 t 的真后缀完全匹配。更准确地，值得试探的 t 必然来自集合：

$$\begin{aligned} N(P, j) = \\ \{ t \mid \text{prefix}(\text{prefix}(P, j), t) = \text{suffix}(\text{prefix}(P, j), t), 0 \leq t < j \} \end{aligned}$$

需特别注意的是，集合 $N(P, j)$ 具体由哪些 t 值构成，仅取决于模式串 P 以及前一轮迭代的失配位置 j ，而与主串 T 无关！

从图11.6还可看出，若下一轮迭代从 $T[i]$ 与 $P[t]$ 的比对开始，其效果相当于将模式串 P 右移 $j - t$ 个单元。因此，为保证模式串与主串的对齐位置（指针*i*）绝不倒退，同时又不致遗漏任何可能的匹配，必须在集合 $N(P, j)$ 中挑选最大的 t 。也就是说，当有多个值得试探的右移方案时，应该保守地选择其中移动距离最短者。于是，只需令

$$\text{next}[j] = \max(N(P, j))$$

则一旦发现 $P[j]$ 与 $T[i]$ 失配，就可以转而用 $P[\text{next}[j]]$ 与 $T[i]$ 继续比对。

既然集合 $N(P, j)$ 仅取决于模式串 P 以及失配位置 j ，而与主串无关，作为该集合内的最大者， $\text{next}[j]$ 也同样具有这一性质。于是，对于任一模式串 P ，不妨通过预处理提前计算出所有位置 j 所对应的 $\text{next}[j]$ 值，并整理为表格以便此后反复查询——亦即，将“记忆力”转化为“预知力”。

11.3.3 KMP算法

上述思路可整理为代码11.3，即著名的KMP算法^②。

这里，假定可通过`buildNext()`构造出模式串 P 的`next`表。对照代码11.1的蛮力算法，只是在`else`分支对失配情况的处理手法有所不同，这也是KMP算法的精髓所在。

^② Knuth和Pratt师徒，与Morris几乎同时发明了这一算法。他们稍后联合署名发表^[60]该算法，并以其姓氏首字母命名

```

1 int match(char* P, char* T) { //KMP算法
2     int* next = buildNext(P); //构造next表
3     int n = (int) strlen(T), i = 0; //主串指针
4     int m = (int) strlen(P), j = 0; //模式串指针
5     while ((j < m) && (i < n)) //自左向右逐个比对字符
6         if (0 > j || T[i] == P[j]) //若匹配，或P已移出最左侧（两个判断的次序不可交换）
7             { i++; j++; } //则转到下一字符
8         else //否则
9             j = next[j]; //模式串右移（注意：主串不用回退）
10    delete [] next; //释放next表
11    return i - j;
12 }

```

代码11.3 KMP主算法

11.3.4 $\text{next}[0] = -1$

空串是任何非空串的真子串、真前缀和真后缀，故只要 $j > 0$ 则必有 $\theta \in N(P, j)$ 。此时的 $N(P, j)$ 必非空，从而保证“在其中取最大值”这一操作的确可行。但反过来，若 $j = 0$ ，则前缀 $\text{prefix}(P, j)$ 本身就是空串，它没有真子串，于是必有集合 $N(P, j) = \emptyset$ 。

此种情况下，又该如何定义 $\text{next}[0]$ 呢？按照串匹配算法的构思，若某轮迭代中首对字符即失配，则应将模式串 P 直接右移一个字符，然后从其首字符起继续下一轮比对。

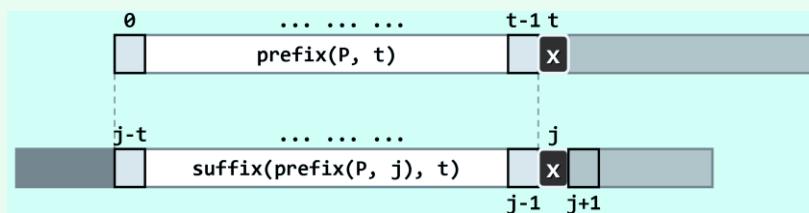
表11.3 next表实例：假想地附加一个通配符 $P[-1]$

rank	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P[]$	*	C	H	I	N	C	H	I	L	L	A
$\text{next}[]$	N/A	-1	0	0	0	0	1	2	3	0	0

如表11.3所示，不妨假想地在 $P[0]$ 的左侧“附加”一个 $P[-1]$ ，而且该字符与任何字符都是匹配的。于是就实际效果而言，上述处理方法完全等同于“令 $\text{next}[0] = -1$ ”。

11.3.5 $\text{next}[j + 1]$

那么，若已知 $\text{next}[0, j]$ ，如何才能递推地计算出 $\text{next}[j + 1]$ ？是否有高效方法？

图11.7 $P[j] = P[\text{next}[j]]$ 时，必有 $\text{next}[j + 1] = \text{next}[j] + 1$

若 $\text{next}[j] = t$ ，则意味着在前缀 $\text{prefix}(P, j)$ 中，自匹配的真前缀和真后缀的最大长度为 t ，故必有 $\text{next}[j + 1] \leq \text{next}[j] + 1$ ——而且特别地，当且仅当 $P[j] = P[t]$ 时如图11.7 取等号。那么一般地，若 $P[j] \neq P[t]$ ，又该如何得到 $\text{next}[j + 1]$ ？

此种情况下如图11.8，由next表的定义， $\text{next}[j + 1]$ 的下一候选者应该依次是
 $\text{next}[\text{next}[j]] + 1, \text{next}[\text{next}[\text{next}[j]]] + 1, \dots$

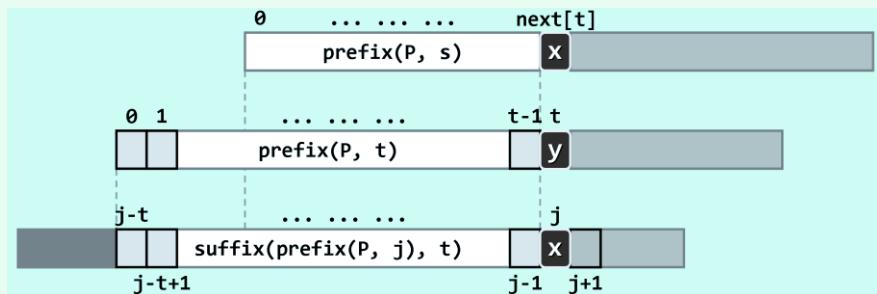


图11.8 $P[j] \neq P[\text{next}[j]]$ 时，必有 $\text{next}[j + 1] = \text{next}[\dots \text{next}[j] \dots] + 1$

因此，只需反复用 $\text{next}[t]$ 替换 t （即令 $t = \text{next}[t]$ ），即可按优先次序遍历以上候选者；一旦发现 $P[j]$ 与 $P[t]$ 匹配（含通配），即可将 $\text{next}[t] + 1$ 赋予 $\text{next}[j + 1]$ 。

既然总有 $\text{next}[t] < t$ ，故在此过程中 t 必然严格递减；同时，即便 t 降低至 0 ，亦必然会终止于通配的 $\text{next}[0] = -1$ ，而不致下溢。如此，该算法的正确性完全可以保证。

11.3.6 构造next表

按照以上思路，可实现next表构造算法如代码11.4所示。

```

1 int* buildNext(char* P) { //构造模式串P的next表
2     size_t m = strlen(P), j = 0; // "主" 串指针
3     int* N = new int[m]; //next表
4     int t = N[0] = -1; //模式串指针
5     while (j < m - 1)
6         if (0 > t || P[j] == P[t]) { //匹配
7             j++; t++;
8             N[j] = t; //此句可改进...
9         } else //失配
10            t = N[t];
11     return N;
12 }
```

代码11.4 next表的构造

可见，next表的构造算法与KMP算法几乎完全一致。实际上按照以上分析，这一构造过程完全等效于模式串的自我匹配，因此两个算法在形式上的近似亦不足为怪。

314

11.3.7 性能分析

■ $\mathcal{O}(nm)$?

通过上述分析与实例可以看出，相对于蛮力算法，KMP算法（代码11.3）借助next表可避免大量不必要的字符比对操作。然而就渐进意义而言，时间复杂度会有实质性的改进吗？这一点并非一目了然，甚至乍看起来并不乐观。比如，从算法流程的角度来看，该算法依然需做 $\mathcal{O}(n)$ 轮

迭代，而且任何一轮迭代都有可能需要比对多达 $\Omega(m)$ 对字符。

如此说来，在最坏情况下，KMP算法仍有可能共需执行 $O(nm)$ 次比对？不是的。正如以下更为精确的分析将要表明的，即便在最坏情况下，KMP算法也只需运行线性的时间！

■ $O(n)!$

为此，请注意代码11.3中用作字符指针的变量*i*和*j*。若令 $k = 2i - j$ 并考查*k*在KMP算法过程中的变化趋势，则不难发现：`while`循环每迭代一轮，*k*都会严格递增。

为验证这一点，只需分别核对`while`循环内部的`if-else`分支。无非两种情况：若执行`if`分支，则*i*和*j*同时加一，于是 $k = 2i - j$ 必将增加；反之若执行`else`分支，则尽管*i*保持不变，但在赋值 $j = \text{next}[j]$ 之后*j*必然减小，于是 $k = 2i - j$ 也必然会增加。

现在，纵观算法的整个过程：启动时有 $i = j = 0$ ，即 $k = 0$ ；算法结束时 $i \leq n$ 且 $j \geq 0$ ，故有 $k \leq 2n$ 。也就是说，在此期间尽管*k*从0开始持续地严格单调递增，但总体增幅不超过 $2n$ 。既然*k*为整数，故`while`循环至多执行 $2n$ 轮。另外，`while`循环体内部不含任何循环或调用，故只需 $O(1)$ 时间。因此，若不计构造`next`表所需的时间，KMP算法的运行时间不超过 $O(n)$ ——这一结论也可等效地理解为，KMP算法单步迭代的分摊复杂度仅为 $O(1)$ 。

■ 总体复杂度

既然`next`表构造算法的流程与KMP算法并无实质区别，故仿照上述分析可知，`next`表的构造仅需 $O(m)$ 时间。综上可知，KMP算法的总体运行时间为 $O(n + m)$ 。

11.3.8 继续改进

尽管以上KMP算法已可保证线性的运行时间，但在某些情况下仍有进一步改进的余地。

■ 反例

考查模式串 $P = "000010"$ 。按照11.3.2节的定义，其`next`表应如表11.4所示。

在KMP算法过程中，假设如图11.9前一轮比对因 $T[i] = '1' \neq '0' = P[3]$ 失配而中断。于是按照以上的`next`表，接下来KMP算法将依次将 $P[2]$ 、 $P[1]$ 和 $P[0]$ 与 $T[i]$ 对准并做比对。

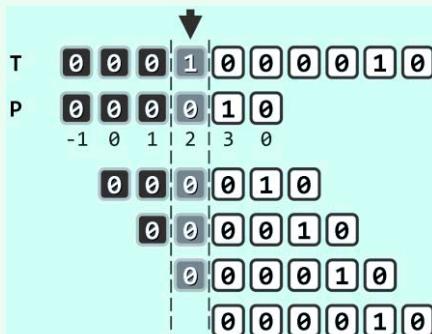


图11.9 按照此前定义的`next`表，仍有可能进行多次本不必要的字符比对操作

表11.4 `next`表仍有待优化的实例

rank	-1	0	1	2	3	4	5
P[]	*	0	0	0	0	1	0
next[]	N/A	-1	0	1	2	3	0

从图11.9可见，这三次比对都报告“失配”。那么，这三次比对的失败结果属于偶然吗？进一步地，这些比对能否避免？

实际上，即便说 $P[3]$ 与 $T[i]$ 的比对还算必要，后续的这三次比对却都是不必要的。实际上，它们的失败结果早已注定。

只需注意到 $P[3] = P[2] = P[1] = P[0] = '0'$ ，就不难看出这一点——既然经过此前的比对已发现 $T[i] \neq P[3]$ ，那么继续将 $T[i]$ 和那些与 $P[3]$ 相同的字符做比对，既重蹈覆辙，更徒劳无益。

■ 记忆 = 教训 = 预知力

从算法策略的层次来看，11.3.2节引入next表的实质作用，在于帮助我们利用以往成功比对所提供的经验，将记忆力转化为预知力。然而实际上，此前已进行过的比对，还远不止这些。确切地说，还包括那些失败的比对——作为“教训”，它们同样有益，但可惜此前一直被忽略了。

依然以图11.9为例，以往的失败比对，实际上已经为我们提供了一条极为重要的信息—— $T[i] \neq P[4]$ ——可惜我们却未能有效地加以利用。原算法之所以会执行后续四次本不必要的比对，原因也正在于未能充分汲取教训。

■ 改进

为把这类“负面”信息引入next表，只需将11.3.2节中集合 $N(P, j)$ 的定义修改为：

```
N(P, j) = { t | prefix(prefix(P, j), t) = suffix(prefix(P, j), t)
且 P[j] ≠ P[t], 0 ≤ t < j}
```

也就是说，除“对应于自匹配长度”以外， t 只有还同时满足“当前字符对不匹配”的必要条件，方能归入集合 $N(P, j)$ 并作为next表项的候选。

相应地，原next表构造算法（代码11.4）也需稍作修改，调整为如下改进版本。

```
1 int* buildNext(char* P) { //构造模式串P的next表(改进版本)
2     size_t m = strlen(P), j = 0; // "主" 串指针
3     int* N = new int[m]; //next表
4     int t = N[0] = -1; //模式串指针
5     while (j < m - 1)
6         if (0 > t || P[j] == P[t]) { //匹配
7             j++; t++;
8             N[j] = (P[j] != P[t]) ? t : N[t]; //注意此句与未改进之前的区别
9         } else //失配
10            t = N[t];
11     return N;
12 }
```

代码11.5 改进的next表构造算法

由代码11.5可见，改进后的算法与原算法的唯一区别在于，每次在prefix(P, j)中发现长度为 t 的真前缀和真后缀相互匹配之后，还需进一步检查 $P[j]$ 是否等于 $P[t]$ 。唯有在 $P[j] \neq P[t]$ 时，才能将 t 赋予 $next[j]$ ；否则，需转而代之以 $next[t]$ 。

仿照11.3.7节的分析方法易知，改进后next表的构造算法同样只需 $O(m)$ 时间。

■ 实例

仍以 $P = "000010"$ 为例，改进之后的next表如表11.5所示。读者可参照图11.9，就计算效率将新版本与原版本（表11.4）做一对比。

表11.5 改进后的next表实例

rank	-1	0	1	2	3	4	5
$P[]$	*	0	0	0	0	1	0
$next[]$	N/A	-1	-1	-1	-1	3	-1

利用新的next表针对图11.9中实例重新执行KMP算法，在首轮比对因 $T[i] = '1' \neq '0' = P[3]$ 失配而中断之后，将随即以 $P[next[3]] = P[-1]$ （虚拟通配符）与 $T[i]$ 对齐，并启动下一轮比对。将其效果而言，等同于聪明且安全地跳过了三个不必要的对齐位置。

§ 11.4 *BM算法

11.4.1 思路与框架

■ 构思

KMP算法的思路可概括为：当前比对一旦失配，即利用此前的比对（无论成功或失败）所提供的信息，尽可能长距离地移动模式串。其精妙之处在于，无需显式地反复保存或更新比对的历史，而是独立于具体的主串，事先根据模式串预测出所有可能出现的失配情况，并将这些信息“浓缩”为一张next表。就其总体思路而言，本节将要介绍的BM算法^③与KMP算法类似，二者的区别仅在于预测和利用“历史”信息的具体策略与方法。

BM算法中，模式串P与主串T的对准位置依然“自左向右”推移，而在每一对准位置却是“自右向左”地逐一比对各字符。具体地，在每一轮自右向左的比对过程中，一旦发现失配，则将P右移一定距离并再次与T对准，然后重新一轮自右向左的扫描比对。为实现高效率，BM算法同样需要充分利用以往的比对所提供的信息，使得P可以“安全地”向后移动尽可能远的距离。

■ 主体框架

BM算法的主体框架，可实现如代码11.6所示。

```

1 int match(char* P, char* T) { //Boyer-Morre算法(完全版, 兼顾Bad Character与Good Suffix)
2     int* bc = buildBC(P); int* gs = buildGS(P); //构造BC表和GS表
3     size_t i = 0; //模式串相对于主串的起始位置(初始时与主串左对齐)
4     while (strlen(T) >= i + strlen(P)) { //不断右移(距离可能不止一个字符)模式串
5         int j = strlen(P) - 1; //从模式串最末尾的字符开始
6         while (P[j] == T[i + j]) //自右向左比对
7             if (0 > --j) break;
8         if (0 > j) //若极大匹配后缀 == 整个模式串(说明已经完全匹配)
9             break; //返回匹配位置
10        else //否则, 适当地移动模式串
11            i += __max(gs[j], j - bc[T[i + j]]); //位移量根据BC表和GS表选择大者
12    }
13    delete [] gs; delete [] bc; //销毁GS表和BC表
14    return i;
15 }
```

代码11.6 BM主算法

可见，这里采用了蛮力算法后一版本（310页代码11.2）的方式，借助整数*i*和*j*指示主串中当前的对齐位置T[i]和模式串中接受比对的字符P[j]。不过，一旦局部失配，这里不再是机械地令*i* += 1并在下一字符处重新对齐，而是采用了两种启发式策略确定最大的安全移动距离。为此，需经过预处理，根据模式串P整理出坏字符和好后缀两类信息。

与KMP一样，算法过程中指针*i*始终单调递增；相应地，P相对于T的位置也绝不回退。

^③ 由R. S. Boyer和J. S. Moore于1977年发明^[61]

11.4.2 坏字符策略

■ 坏字符

如图11.10(a)和(b)所示, 若模式串P当前在主串T中的对齐位置为i, 且在这一轮自右向左将P与substr(T, i, m)的比对过程中, 在P[j]处首次发现失配:

$$T[i + j] = 'X' \neq 'Y' = P[j]$$

则将'X'称作坏字符 (bad character)。问题是:

接下来应该选择P中哪个字符对准T[i + j], 然后开始下一轮自右向左的比对?

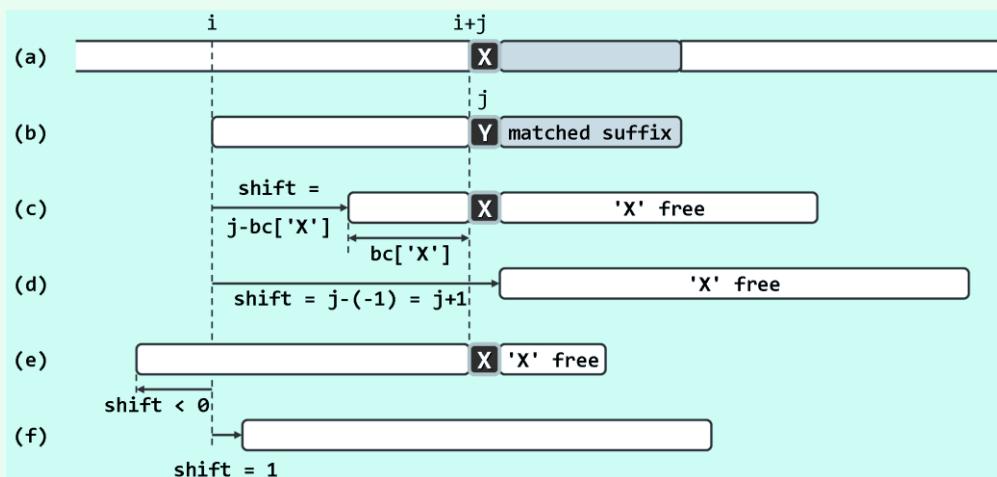


图11.10 坏字符策略：通过右移模式串P，使T[i + j]重新得到匹配

若P与T的某一 (包括T[i + j]在内的) 子串匹配, 则必然在T[i + j] = 'X' 处匹配; 反之, 若与T[i + j]对准的字符不是'X', 则必然失配。故如图11.10(c)所示, 只需找出P中的每一字符 'X', 分别与T[i + j] = 'X' 对准, 并执行一轮自右向左的扫描比对。不难看出, 对应于每个这样的字符'X', P的位移量仅取决于原失配位置j, 以及'X'在P中的秩, 而与T和i无关!

■ BC[]表

若P中包含多个'X', 则是否真地有必要逐一尝试呢? 实际上, 这既不现实——如此将无法确保主串指针i永不回退——更不必要。一种简便而高效的做法是, 仅尝试P中最靠右的字符'X' (若存在)。与KMP算法类似, 如此便可在确保不致遗漏匹配的前提下, 始终单向地滑动模式串。具体如图11.10(c)所示, 若P中最靠右的字符'X'为P[k] = 'X', 则P的右移量即为j - k。

同样幸运的是, 对于任一给定的模式串P, k值只取决于字符T[i + j] = 'X', 因此可将其视作从字符表到整数 (P中字符的秩) 的一个函数:

$$bc(c) = \begin{cases} k & (\text{若 } P[k] = c, \text{ 且对所有的 } i > k \text{ 都有 } P[i] \neq c) \\ -1 & (\text{若 } P[] \text{ 中不含字符 } c) \end{cases}$$

故如代码11.6所示, 如当前对齐位置为i, 则一旦出现坏字符P[j] = 'Y', 即重新对齐于:

$$i += j - bc[T[i + j]]$$

并启动下一轮比对。为此可仿照KMP算法, 预先将函数bc()整理为一份查询表, 称作BC表。

第12章

排序

此前各章已结合具体的数据结构，循序渐进地介绍过多种基本的排序算法：2.8节和3.5节分别针对向量和列表，统一以排序器的形式实现过起泡排序、归并排序、插入排序以及选择排序等算法；9.4.1节也曾按照散列的思路与手法，实现过桶排序算法；9.4.3节还将桶排序推广至基数排序算法；10.2.5节也曾完美地利用完全二叉堆的特长，实现过就地堆排序算法。

本章着重于高级排序算法。与以上基本算法一样，其构思与技巧各具特色，在不同应用中的效率也各有千秋。因此在学习过程中，唯有更多地关注不同算法之间细微而本质的差异，留意体会其优势与不足，方能做到运用自如，并结合实际问题的需要，合理取舍与并适当改造。

§ 12.1 快速排序

12.1.1 分治策略

与归并排序算法一样，快速排序（quicksort）算法^①也是分治策略的典型应用，但二者之间也有本质区别。2.8.3节曾指出，归并排序的计算量主要消耗于有序子向量的归并操作，而子向量的划分却几乎不费时间。快速排序恰好相反，它可以在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内，由子问题的解直接得到原问题的解；但为了将原问题划分为两个子问题，却需要 $\mathcal{O}(n)$ 时间。

快速排序算法虽然能够确保，划分出来的子任务彼此独立，并且其规模总和保持渐进不变，却不能保证两个子任务的规模大体相当——实际上，甚至有可能极不平衡。因此，该算法并不能保证最坏情况下的 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间复杂度。尽管如此，它仍然受到人们的青睐，并在实际应用中往往成为首选的排序算法。究其原因在于，快速排序算法易于实现，代码结构紧凑简练，而且对于按通常规律随机分布的输入序列，快速排序算法实际的平均运行时间较之同类算法更少。

下面结合向量介绍该算法的原理，并针对实际需求相应地给出不同的实现版本。

12.1.2 轴点

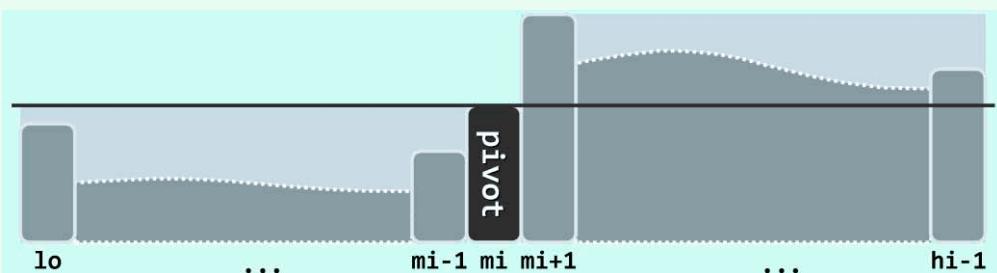


图12.1 序列的轴点（这里用高度来表示各元素的大小）

^① 由英国计算机科学家、1980年图灵奖得主C. A. R. Hoare爵士于1960年发明^[64]

如图12.1所示，考查任一向量区间 $S[lo, hi]$ 。对于任何 $lo \leq mi < hi$ ，以元素 $S[mi]$ 为界，都可分割出前、后两个子向量 $S[lo, mi]$ 和 $S(mi, hi)$ 。若 $S[lo, mi]$ 中的元素均不大于 $S[mi]$ ，且 $S(mi, hi)$ 中的元素均不小于 $S[mi]$ ，则元素 $S[mi]$ 称作向量 S 的一个轴点（pivot）。设向量 S 经排序可转化为有序向量 S' 。不难看出，轴点位置 mi 必然满足如下充要条件：

- a) $S[mi] = S'[mi]$
- b) $S[lo, mi]$ 和 $S'[lo, mi]$ 的成员完全相同
- c) $S(mi, hi)$ 和 $S'(mi, hi)$ 的成员完全相同

因此，不仅以轴点 $S[mi]$ 为界，前、后子向量的排序可各自独立地进行，而且更重要的是，一旦前、后子向量各自完成排序，即可立即（在 $O(1)$ 时间内）得到整个向量的排序结果。

采用分治策略，递归地利用轴点的以上特性，便可完成原向量的整体排序。

12.1.3 快速排序算法

按照以上思路，可作为向量的一种排序器，实现快速排序算法如代码12.1所示。

```
1 template <typename T> //向量快速排序
2 void Vector<T>::quickSort(Rank lo, Rank hi) { //0 <= lo < hi <= size
3     if (hi - lo < 2) return; //单元素区间自然有序，否则...
4     Rank mi = partition(lo, hi - 1); //在[lo, hi - 1]内构造轴点
5     quickSort(lo, mi); //对前缀递归排序
6     quickSort(mi + 1, hi); //对后缀递归排序
7 }
```

代码12.1 向量的快速排序

可见，轴点的位置一旦确定，则只需以轴点为界，分别递归地对前、后子向量实施快速排序；子向量的排序结果就地返回之后，原向量的整体排序即告完成。算法的核心与关键在于：

轴点构造算法partition()应如何实现？可以达到多高的效率？

12.1.4 快速划分算法

■ 反例

事情远非如此简单，我们首先遇到的困难就是，并非每个向量都必然含有轴点。以如图12.2所示长度为9的向量为例，不难验证，其中任何元素都不是轴点。

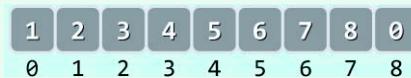


图12.2 有序向量经循环左移一个单元后，将不含任何轴点

事实上根据此前的分析，任一元素作为轴点的必要条件之一是，其在初始向量 S 与排序后有序向量 S' 中的秩应当相同。因此反过来一般地，只要向量中所有元素都是错位的——即所谓的错排序列——则任何元素都不可能是轴点。

由上可见，若保持原向量的次序不变，则不能保证总是能够找到轴点。因此反过来，唯有通过适当地调整向量中各元素的位置，方可“人为地”构造出一个轴点。

■ 思路

为在区间 $[lo, hi]$ 内构造出一个轴点，首先需要任取某一元素 m 作为“培养对象”。

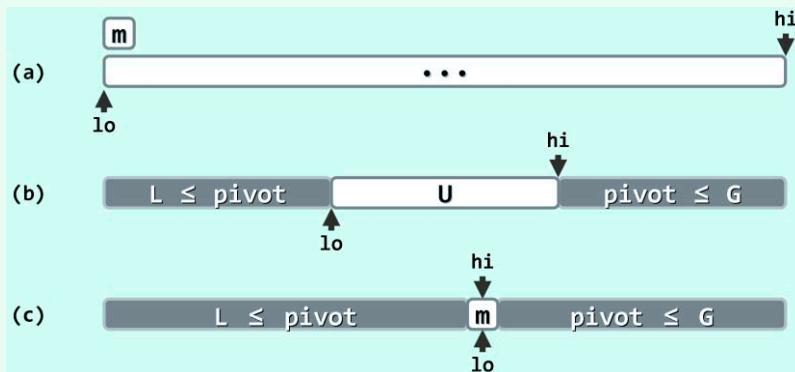


图12.3 轴点构造算法的构思

如图12.3(a)所示，不妨取首元素 $m = S[lo]$ 作为候选，将其从向量中取出并做备份，腾出的空间单元便于其它元素的位置调整。然后如图(b)所示，不断试图移动 lo 和 hi ，使之相互靠拢。当然，整个移动过程中，需始终保证 lo (hi) 左侧 (右侧) 的元素均不大于 (不小于) m 。

最后如图(c)所示，当 lo 与 hi 彼此重合时，只需将原备份的 m 回填至这一位置，则 $S[lo = hi] = m$ 便成为一个名副其实的轴点。

以上过程在构造出轴点的同时，也按照相对于轴点的大小关系，将原向量划分为左、右两个子向量，故亦称作快速划分（quick partitioning）算法。

■ 实现

按照以上思路，快速划分算法可实现如代码12.2所示。

```

1 template <typename T> //轴点构造算法：通过调整元素位置构造区间[lo, hi]的轴点，并返回其秩
2 Rank Vector<T>::partition(Rank lo, Rank hi) { //版本A：基本形式
3     swap(_elem[lo], _elem[lo + rand() % (hi - lo + 1)]); //任选一个元素与首元素交换
4     T pivot = _elem[lo]; //以首元素为候选轴点——经以上交换，等效于随机选取
5     while (lo < hi) { //从向量的两端交替地向中间扫描
6         while ((lo < hi) && (pivot <= _elem[hi])) //在不小于pivot的前提下
7             hi--; //向左拓展右端子向量
8         _elem[lo] = _elem[hi]; //小于pivot者归入左侧子序列
9         while ((lo < hi) && (_elem[lo] <= pivot)) //在不大于pivot的前提下
10            lo++; //向右拓展左端子向量
11         _elem[hi] = _elem[lo]; //大于pivot者归入右侧子序列
12     } //assert: lo == hi
13     _elem[lo] = pivot; //将备份的轴点记录置于前、后子向量之间
14     return lo; //返回轴点的秩
15 }
```

代码12.2 轴点构造算法（版本A）

为便于和稍后的改进版本进行比较，不妨称作版本A。

■ 过程

可见，算法的主体框架为循环迭代；主循环的内部，通过两轮迭代交替地移动 lo 和 hi 。

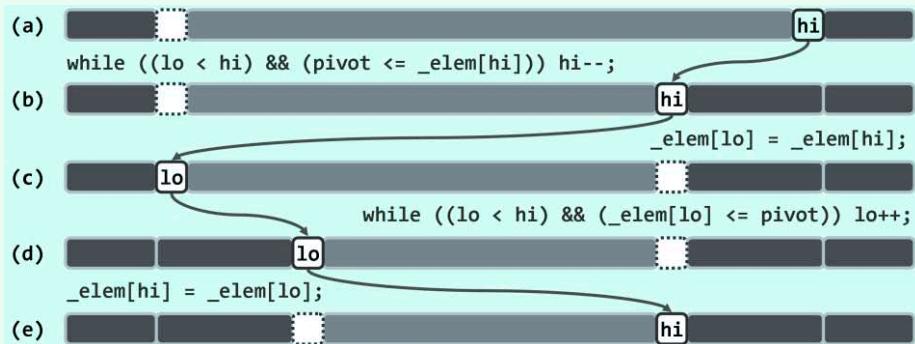


图12.4 轴点构造过程

各迭代的初始状态如图12.4(a)所示。反复地将候选轴点pivot与当前的`_elem[hi]`做比较，只要前者不大于后者，就不断向左移动`hi`（除非`hi`即将越过`lo`）。`hi`无法移动继续时，当如图(b)所示。于是接下来如图(c)所示，将`_elem[hi]`转移至`_elem[lo]`，并归入左侧子向量。

随后对称地，将`_elem[lo]`与`pivot`做比较，只要前者不大于后者，就不断向右移动`lo`（除非`lo`即将越过`hi`）。`lo`无法继续移动时，当如图(d)所示。于是接下来如图(e)所示，将`_elem[lo]`转移至`_elem[hi]`，并归入右侧子向量。

每经过这样的两轮移动，`lo`与`hi`的间距都会缩短，故该算法迟早会终止。当然，若如图(e)所示`lo`与`hi`仍未重合，则可再做两轮移动。不难验证，在任一时刻，在以`lo`和`hi`为界的三个子向量中，左、右子向量分别满足12.1.2节所列的轴点充要条件b)和c)。而随着算法的持续推进，中间子向量的范围则不断压缩。当主循环退出时`lo`和`hi`重合，充要条件a)也随即满足。至此，只需将`pivot`“镶嵌”于左、右子向量之间，即实现了对原向量的一次轴点划分。

该算法的运行时间线性正比于被移动元素的数目，线性正比于原向量的规模 $O(hi - lo)$ 。

■ 实例

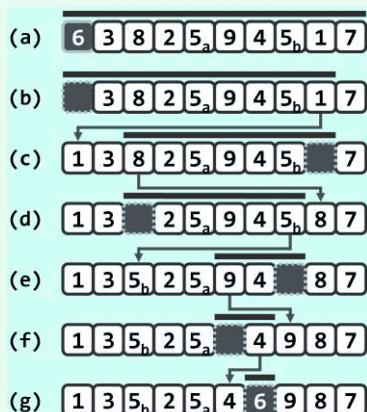


图12.5 轴点构造算法实例

快速划分算法的一次完整运行过程，如图12.5所示。输入序列A如图(a)长度为10，选择 $A[0] = 6$ 作为轴点候选。以下， hi 和 lo 的第一趟交替移动的过程及结果如图(b~c)所示，第二趟交替移动的过程及结果如图(d~e)所示，最后一趟交替移动的过程及结果如图(f~g)所示。

由于lo和hi的移动方向相反，故原处于向量右（左）端较小（大）的元素将按颠倒的次序转移至左（右）端；特别地，重复的元素也将按颠倒的次序转移至相对的一端，因而不再保持其原有的相对次序。由此可见，如此实现的快速排序算法并不稳定。从图12.5实例中数值为5的两个元素的移动过程与最终效果，不难看出这一点。

12.1.5 复杂度

■ 最坏情况

上节的分析结论指出，采用代码12.2中的`partition()`算法，可在线性时间内将原向量的排序问题分解为两个相互独立、总体规模保持线性的子向量排序问题；而且根据轴点的性质，由各自排序后的子向量，可在常数时间内得到整个有序向量。也就是说，分治策略得以高效实现的两个必要条件——子问题划分的高效性及其相互之间的独立性——均可保证。然而尽管如此，另一项关键的必要条件——子任务规模接近——在这里却无法保证。事实上，由`partition()`算法划分出的子任务在规模上不仅不能保证接近，而且可能相差悬殊。

反观`partition()`算法不难发现，其划分所得子序列的长度与划分的具体过程无关，而是完全取决于入口处所选的候选轴点。具体地，若在最终有序向量中该候选元素的秩为 r ，则子向量的规模必为 r 和 $n - r - 1$ 。特别地， $r = 0$ 时子向量规模分别为 0 和 $n - 1$ ——左侧子向量为空，而右侧子向量与原向量几乎等长。当然，对称的 $r = n - 1$ 亦属最坏情况。

更糟糕的是，这类最坏情况可能持续发生。比如，若每次都是简单地选择最左端元素`_elem[lo]`作为候选轴点，则对于完全（或几乎完全）有序的输入向量，每次（或几乎每次）划分的结果都是如此。这种情况下，若将快速排序算法处理规模为 n 的向量所需的时间记作 $T(n)$ ，则如下递推关系始终成立：

$$T(n) = T(0) + T(n - 1) + O(n) = T(n - 1) + O(n)$$

综合考虑到其常数复杂度的递归基，与以上递推关系联立即可解得：

$$T(n) = T(n - 2) + 2 \cdot O(n) = \dots = T(0) + n \cdot O(n) = O(n^2)$$

也就是说，其效率居然低到与起泡排序相近。

■ 降低最坏情况概率

那么，如何才能降低上述最坏情况出现的概率呢？读者可能已注意到，代码12.2的`partition()`算法在入口处增加了`swap()`一句，在区间内任选一个元素与`_elem[lo]`交换。就其效果而言，这使得后续的处理等同于随机选择一个候选轴点，从而在一定程度上降低上述最坏情况出现的概率。这种方法称作随机法。

类似地，也可采用所谓三者取中法：从待排序向量中任取三个元素，将数值居中者作为候选轴点。理论分析及实验统计均表明，较之固定选取某个元素或随机选取单个元素的策略，如此选出的轴点在最终有序向量中秩过小或过大的概率更低——尽管还不能彻底杜绝最坏情况。

■ 平均运行时间

以上关于最坏情况下效率仅为 $O(n^2)$ 的结论不免令人沮丧，难道快速排序名不副实？实际上，更为细致的分析与实验统计都一致地显示，在大多数情况下，快速排序算法的平均效率依然可以达到 $O(n \log n)$ ；而且较之其它排序算法，其时间复杂度中的常系数更小。以下就以最常见的场景为例，对采用随机法确定候选轴点的快速排序算法的平均效率做一估算。

假设待排序的元素服从独立均匀随机分布。于是，`partition()`算法在经过 $n - 1$ 次比较和至多 $n + 1$ 次移动操作之后，对规模为 n 的向量的划分结果无非 n 种可能，划分所得左侧子序列的长度分别是 $0, 1, \dots, n - 1$ ，分别决定于所取候选元素在最终有序序列中的秩。按假定条件，每种情况的概率均为 $1/n$ ，故若将算法的平均运行时间记作 $\hat{T}(n)$ ，则有：

$$\hat{T}(n) = (n + 1) + (1/n) \times \sum_{k=1}^n [\hat{T}(k - 1) + \hat{T}(n - k)]$$

$$= (n + 1) + (2/n) \times \sum_{k=1}^n \hat{T}(k - 1)$$

等式两侧同时乘以n，则有：

$$n \cdot \hat{T}(n) = (n + 1) \cdot n + 2 \cdot \sum_{k=1}^n \hat{T}(k - 1)$$

以及同理：

$$(n - 1) \cdot \hat{T}(n - 1) = (n - 1) \cdot n + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \hat{T}(k - 1)$$

以上两式相减，即得：

$$\begin{aligned} n \cdot \hat{T}(n) - (n - 1) \cdot \hat{T}(n - 1) &= 2n + 2 \cdot \hat{T}(n - 1) \\ n \cdot \hat{T}(n) &= (n + 1) \cdot \hat{T}(n - 1) + 2n \\ \hat{T}(n)/(n + 1) &= \hat{T}(n - 1)/n + 2/(n + 1) \\ &= \hat{T}(n - 2)/(n - 1) + 2/(n + 1) + 2/n \\ &= \hat{T}(n - 3)/(n - 2) + 2/(n + 1) + 2/n + 2/(n - 1) \\ &= \dots \\ &= \hat{T}(0)/1 + 2/(n + 1) + 2/n + 2/(n - 1) + \dots + 2/2 \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (1/k) - 1 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mathcal{O}(2 \cdot \ln n) = \mathcal{O}(2 \cdot \ln 2 \cdot \log_2 n) = \mathcal{O}(1.386 \cdot \log_2 n) \end{aligned}$$

正因为其良好的平均性能，加上其形象直观和易于实现的特点，快速排序算法自诞生起就一直受到人们的青睐，并被集成到Linux和STL等环境中。

12.1.6 应对退化

■ 重复元素

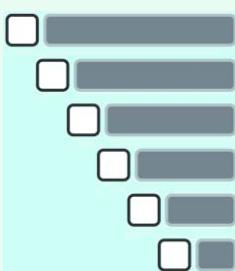


图12.6 partition()算法的退化情况，也是最坏情况

考查所有（或几乎所有）元素均重复的退化情况。对照代码12.2不难发现，partition()算法的版本A对此类输入的处理完全等效于此前所举的最坏情况。事实上对于此类向量，主循环内部前一子循环的条件中“pivot <= _elem[hi]”形同虚设，故该子循环将持续执行，直至“lo < hi”不再满足。当然，在此之后另一内循环及主循环也将随即结束。

如图12.6所示，如此划分的结果必然是以最左端元素为轴点，原向量被分为极不对称的两个子向量。更糟糕的是，这一最坏情况还可能持续发生，从而使整个算法过程等效地退化为线性递归，递归深度为 $\mathcal{O}(n)$ ，导致总体运行时间高达 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

⁽²⁾ 若记 $h(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ ，则有 $\ln(n+1) = \int_{i=1}^{n+1} (1/x) < h(n) < 1 + \int_{i=1}^n (1/x) = 1 + \ln n$

当然，可以在每次深入递归之前做统一核验，若确属退化情况，则无需继续递归而直接返回。但在重复元素不多时，如此不仅不能改进性能，反而会增加额外的计算量，总体权衡后得不偿失。

■ 改进

轴点构造算法可行的一种改进方案如代码12.3所示。为与如代码12.2所示同名算法版本A相区别，不妨称作版本B。

```

1 template <typename T> //轴点构造算法：通过调整元素位置构造区间[lo, hi]的轴点，并返回其秩
2 Rank Vector<T>::partition(Rank lo, Rank hi) { //版本B：可优化处理多个关键码雷同的退化情况
3     swap(_elem[lo], _elem[lo + rand() % (hi - lo + 1)]); //任选一个元素与首元素交换
4     T pivot = _elem[lo]; //以首元素为候选轴点——经以上交换，等效于随机选取
5     while (lo < hi) { //从向量的两端交替地向中间扫描
6         while (lo < hi)
7             if (pivot < _elem[hi]) //在大于pivot的前提下
8                 hi--; //向左拓展右端子向量
9             else //直至遇到不大于pivot者
10                { _elem[lo++] = _elem[hi]; break; } //将其归入左端子向量
11         while (lo < hi)
12             if (_elem[lo] < pivot) //在小于pivot的前提下
13                 lo++; //向右拓展左端子向量
14             else //直至遇到不小于pivot者
15                { _elem[hi--] = _elem[lo]; break; } //将其归入右端子向量
16     } //assert: lo == hi
17     _elem[lo] = pivot; //将备份的轴点记录置于前、后子向量之间
18     return lo; //返回轴点的秩
19 }
```

代码12.3 轴点构造算法（版本B）

较之版本A，版本B主要是调整了两个内循环的终止条件。以前一内循环为例，原条件

pivot <= _elem[hi]

在此更改为：

pivot < _elem[hi]

也就是说，一旦遇到重复元素，右端子向量随即终止拓展，并将右端重复元素转移至左端。因此，若将版本A的策略归纳为“勤于拓展、懒于交换”，版本B的策略则是“懒于拓展、勤于交换”。

■ 效果及性能

对照代码12.3不难验证，对于由重复元素构成的输入向量，以上版本B将交替地将右（左）侧元素转移至左（右）侧，并最终恰好将轴点置于正中央的位置。这就意味着，退化的输入向量能够始终被均衡的切分，如此反而转为最好情况，排序所需时间为 $O(n \log n)$ 。

当然，以上改进并非没有代价。比如，单趟partition()算法需做更多的元素交换操作。好在这并不影响该算法的线性复杂度。另外，版本B倾向于反复交换重复的元素，故它们在原输入向量中的相对次序更难保持，快速排序算法稳定性的不足更是雪上加霜。

§ 12.2 *选取与中位数

12.2.1 概述

■ k-选取

考查如下问题：

在任意一组可比较大小的元素中，如何找出由小到大次序为k者？

如图12.7(a)所示，也就是要从与这组元素对应的有序序列S中，找出秩为k的元素S[k]，故称作选取（selection）问题。若将目标元素的秩记作k，则亦称作k-选取（k-selection）问题。以无序向量A = { 3, 13, 2, 5, 8 }为例，对应的有序向量为S = { 2, 3, 5, 8, 13 }，其中的元素依次与k = { 0, 1, 2, 3, 4 }相对应。



图12.7 选取与中位数

作为k-选取问题的特例，0-选取即通常的最小值问题，而(n - 1)-选取问题即通常的最大值问题。这两个问题都有平凡的最优解，例如List::selectMax()（82页代码3.21）。

在允许元素重复の場合，秩为k的元素可能同时存在多个副本。此时不妨约定，其中任何一个都可作为解答输出。

■ 中位数

如图12.7(b)所示，在长度为n的有序序列S中，位序居中的元素S $\lfloor n/2 \rfloor$ 称作中值或中位数（median）。例如，有序序列S = { 2, 3, 5, 8, 13 }的中位数，为S $\lfloor 5/2 \rfloor$ = S[2] = 5；而有序序列S = { 2, 3, 5, 8, 13, 21 }的中位数，则为S $\lfloor 6/2 \rfloor$ = S[3] = 8。

即便对于尚未排序的序列，也可定义中位数——也就是在对原数据集排序之后，对应的有序序列的中位数。例如，无序序列A = { 3, 13, 2, 5, 8 }的中位数为元素A[3] = 5。

由于中位数可将原数据集（原问题）划分为大小明确、规模相仿且彼此独立的两个子集（子问题），故能否高效地确定中位数，将直接关系到采用分治策略的算法能否高效地实现。

■ 蛮力算法

由中位数的定义，可直接得到查找中位数的如下直觉算法：对所有元素做排序，将其转换为有序序列S；于是，S $\lfloor n/2 \rfloor$ 便是所要找的中位数。然而根据2.7.5节的结论，该算法在最坏情况下需要 $\Omega(n \log n)$ 时间。于是，基于该算法的任何分治算法，时间复杂度都会不低于：

$$T(n) = n \log n + 2 \cdot T(n/2) = \Theta(n \log^2 n)$$

这一效率难以令人接受。

综上可见，中位数查找问题的挑战恰恰就在于：

如何在避免全排序的前提下，在 $\Theta(n \log n)$ 时间内找出中位数？

不难看出，所谓中位数查找问题，也可以理解为是选取问题在k = $\lfloor n/2 \rfloor$ 时的特例。稍后我们将看到，中位数查找问题既是选取问题的特例，同时也是选取问题中的难度最大者。

以下先结合若干特定情况讨论中位数的定位算法，然后再回到一般性的选取问题。

12.2.2 众数

■ 问题

为达到热身的目的，不妨先来讨论中位数问题的一个简化版本。在任一无序向量A中，若有半以上元素的数值同为m，则将m称作A的众数（**majority**）。例如，向量{ 5, 3, 9, 3, 3, 2, 3, 3 }的众数为3；而虽然3在向量{ 5, 3, 9, 3, 1, 2, 3, 3 }中最多，确非众数。

那么，任给无序向量，如何快速判断其中是否存在众数，并在存在时将其找出？尽管只是以整数向量为例，以下算法不难推广至元素类型支持判等和比较操作的任意向量。

■ 必要性与充分性

不难理解但容易忽略的一个事实是：若众数存在，则必然同时也是中位数。否则，在对应的有序向量中，总数超过半数的众数必然被中位数分隔为非空的两组——与向量的有序性相悖。

```
1 template <typename T> bool majority(Vector<T> A, T& maj) { //众数查找算法：T可比较可判等
2     maj = majEleCandidate(A); //必要性：选出候选者maj
3     return majEleCheck(A, maj); //充分性：验证maj是否的确当选
4 }
```

代码12.4 众数查找算法主体框架

因此可如代码12.4所示，通过调用**majEleCandidate()**，从向量A中找到中位数maj（如果的确可以高效地查找到的话），并将其作为众数的唯一候选者。

然后再如代码12.5所示，调用**majEleCheck()**在线性时间内扫描一遍向量，通过统计该中位数出现的次数，即可验证其作为众数的充分性，从而最终判断向量A的众数是否的确存在。

```
1 template <typename T> bool majEleCheck(Vector<T> A, T maj) { //验证候选者是否确为众数
2     int occurrence = 0; //maj在A[]中出现的次数
3     for (int i = 0; i < A.size(); i++) //逐一遍历A[]的各个元素
4         if (A[i] == maj) occurrence++; //每遇到一次maj，均更新计数器
5     return 2 * occurrence > A.size(); //根据最终的计数值，即可判断是否的确当选
6 }
```

代码12.5 候选众数核对算法

那么，在尚未得到高效的中位数查找算法之前，又该如何解决众数问题呢？

■ 减而治之

关于众数的另一重要事实，如图12.8所示：

设P为向量A中长度为2m的前缀。若元素x在P中恰好出现m次，则A有众数仅当后缀A-P拥有众数，且A-P的众数就是A的众数。

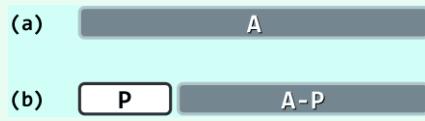


图12.8 通过减治策略计算众数

既然最终总会针对充分性另作一次核对，故不必担心A不含众数的情况，而只需验证A的确拥有众数的两种情况。若A的众数就是x，则在剪除前缀P之后，x与非众数均减少相同的数目，二者数目的差距在后缀A-P中保持不变。反过来，若A的众数为y ≠ x，则在剪除前缀P之后，y减少的数目也不致多于非众数减少的数目，二者数目的差距在后缀A-P中也不会缩小。



参考文献

- [1] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms* (3rd edn.). Addison-Wesley (1997), ISBN:0-201-89683-1
- [2] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms* (3rd edn.). Addison-Wesley (1997), ISBN:0-201-89684-8
- [3] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching* (2nd edn.). Addison-Wesley (1998), ISBN:0-201-89685-0
- [4] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms* (1st edn.). Addison-Wesley (1974), ISBN:0-201-00029-0
- [5] J. Bentley. *Writing Efficient Programs*. Prentice-Hall (1982), ISBN:0-139-70251-2
- [6] J. Bentley. *More Programming Pearls: Confessions of a Coder*. Addison Wesley (1988), ISBN:0-201-11889-0
- [7] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science* (2nd edn.). Addison-Wesley (1994), ISBN:0-201-55802-5
- [8] 严蔚敏 等. 数据结构 (C语言版) . 北京: 清华大学出版社, 1997年4月第1版, ISBN:7-302-02368-9
- [9] J. Bentley. *Programming Pearls* (2nd edn.). Addison-Wesley (2000), ISBN:0-201-65788-0
- [10] T. Budd. *Classic Data Structures in Java*. Addison-Wesley (2000), ISBN:0-201-70002-6
- [11] J. Hromkovic. *Design And Analysis Of Randomized Algorithms: Introduction to Design Paradigms*. Springer-Verlag (2005), ISBN:3-540-23949-9
- [12] H. Samet. *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures*. Morgan Kaufmann (2006), ISBN:0-123-69446-9
- [13] M. A. Weiss. *Data Structures and Algorithm Analysis in C++* (3rd edn.). Addison Wesley (2006), ISBN:0-321-44146-1
- [14] E. Horowitz, S. Sahni, D. Mehta. *Fundamentals of Data Structures in C++* (2nd edn.). Silicon Press (2006), ISBN:0-929-30637-6
- [15] A. Drozdek. *Data Structures and Algorithms in C++* (2nd edn.). Thomson Press (2006), ISBN:8-131-50115-9
- [16] 殷人昆 等. 数据结构 (C++语言描述) . 北京: 清华大学出版社, 2007年6月第2版, ISBN:7-302-14811-1
- [17] P. Brass. *Advanced Data Structures*. Cambridge University Press, ISBN:0-521-88037-8
- [18] J. Edmonds. *How to Think about Algorithms*. Cambridge University Press (2008), ISBN:0-521-61410-8
- [19] K. Mehlhorn & P. Sanders. *Algorithms and Data Structures: The Basic Tools*. Springer (2008), ISBN:3-540-77977-9
- [20] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein. *Introduction to Algorithms* (3rd edn.). MIT Press (2009), ISBN:0-262-03384-4

- [21] R. Bird. *Pearls of Functional Algorithm Design*. Cambridge University Press (2010), ISBN:0-521-51338-8
- [22] M. L. Hetland. *Python Algorithms: Mastering Basic Algorithms in the Python Language*. Apress (2010), ISBN:1-430-23237-4
- [23] M. T. Goodrich, R. Tamassia, D. M. Mount. *Data Structures and Algorithms in C++* (2nd edn.). John Wiley & Sons (2011), ISBN:0-470-38327-5
- [24] R. Sedgewick & K. Wayne. *Algorithms* (4th edn.). Addison-Wesley (2011), ISBN:0-321-57351-X
- [25] Y. Perl, A. Itai and H. Avni, *Interpolation Search: A $\log(\log(n))$ Search*, Commun. ACM, 21 (1978), pp. 550-553
- [26] A. C. Yao & F. F. Yao. *The Complexity of Searching an Ordered Random Table*. 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (1976), 173-177
- [27] A. C. Yao & J. M. Steele. *Lower Bounds to Algebraic Decision Trees*. Journal of Algorithms (1982), 3:1-8
- [28] A. C. Yao. *Lower Bounds for Algebraic Computation Trees with Integer Inputs*. SIAM J. On Computing (1991), 20:655-668
- [29] L. Devroye. *A Note on the Height of Binary Search Trees*. J. of ACM (1986), 33(3):489-498
- [30] P. Flajolet & A. Odlyzko. *The Average Height of Binary Trees and Other Simple Trees*. Journal of Computer and System Sciences (1982), 25(2):171-213
- [31] J. B. Kruskal. *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem*. Proc. of the American Mathematical Society, 7(1):48-50
- [32] B. W. Arden, B. A. Galler, R. M. Graham. *An Algorithm for Equivalence Declarations*. Communications ACM (1961), 4:310-314
- [33] B. A. Galler, M. J. Fisher. *An Improved Equivalence Algorithm*. Communications ACM (1964), 7:301-303
- [34] R. E. Tarjan. *Efficiency of a Good but not Linear Set Union Algorithm*. Journal of the ACM (1975), 22:215-225
- [35] R. Seidel & M. Sharir. *Top-Down Analysis of Path Compression*. SIAM Journal Computing (2005), 34:515-525
- [36] G. Adelson-Velskii & E. M. Landis. *An Algorithm for the Organization of Information*. Proc. of the USSR Academy of Sciences (1962), 146:263-266
- [37] D. S. Hirschberg. *An Insertion Technique for One-Sided Heightbalanced Trees*. Comm. ACM (1976), 19(8):471-473
- [38] S. H. Zweben & M. A. McDonald. *An Optimal Method for Deletion in One-Sided Height-Balanced Trees*. Commun. ACM (1978), 21(6):441-445
- [39] K. Culik, T. Ottman, D. Wood. *Dense Multiway Trees*. ACM Transactions on Database Systems (1981), 6:486-512
- [40] E. Gudes & S. Tsur. *Experiments with B-tree Reorganization*. SIGMOD (1980), 200-206
- [41] D. D. Sleator & R. E. Tarjan. *Self-Adjusting Binary Trees*. JACM (1985), 32:652-686

- [42] R. E. Tarjan. Amortized Computational Complexity. SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods 6(2):306-318
- [43] R. Bayer & E. McCreight. Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes. Acta Informatica (1972), 1(3):173-189
- [44] R. Bayer. Symmetric Binary B-Trees: Data Structure and Maintenance Algorithms. Acta Informatica (1972), 1(4):290-306
- [45] L. J. Guibas & R. Sedgewick. A Dichromatic Framework for Balanced Trees. Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (1978), 8-21
- [46] J. L. Bentley. Multidimensional Binary Search Trees Used for Associative Searching. Communications of the ACM (1975), 18(9):509-517
- [47] H. J. Olivie. A New Class of Balanced Search Trees: Half Balanced Binary Search Trees. ITA (1982), 16(1):51-71
- [48] J. L. Bentley. Decomposable Searching Problems. Information Processing Letters (1979), 8:244-251
- [49] J. H. Hart. Optimal Two-Dimensional Range Queries Using Binary Range Lists. Technical Report 76-81, Department of Computer Science, University of Kentucky (1981)
- [50] D. E. Willard. New Data Structures for Orthogonal Range Queries. SIAM Journal on Computing (1985), 14:232-253
- [51] H. Samet, An Overview of Quadtrees, Octrees, and Related Hierarchical Data Structures, in R. Earnshaw, ed., Theoretical Foundations of Computer Graphics and Cad, Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 51-68
- [52] W. Pugh. Skip Lists: a Probabilistic Alternative to Balanced Trees. Lecture Notes in Computer Science (1989), 382:437-449
- [53] R. de la Briandais. File Searching Using Variable Length Keys. Proc. of the Western Joint Computer Conference 1959, 295-298
- [54] E. H. Sussenguth. Use of Tree Structures for Processing Files. Communications of the ACM (1963), 6:272-279
- [55] D. R. Morrison. PATRICIA - Practical Algorithm to Retrieve Information Coded in Alphanumeric. Journal of the ACM (1968), 15:514-534
- [56] J. L. Bentley & R. Sedgewick. Fast Algorithms for Sorting and Searching Strings. Proc. of 8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (1997), 360-369
- [57] R. W. Floyd. Algorithm 113: Treesort. Communications of the ACM (1962), 5:434
- [58] C. A. Crane. Linear Lists and Priority Queues as Balanced Binary Trees. PhD thesis, Stanford University (1972)
- [59] E. M. McCreight. Priority Search Trees. SIAM J. Comput. (1985), 14(2):257-276
- [60] D. E. Knuth, J. H. Morris, V. R. Pratt. Fast Pattern Matching in Strings. SIAM Journal of Computing (1977), 6(2):323-350

- [61] R. S. Boyer & J. S. Moore. A Fast String Searching Algorithm. *Communications of the ACM* (1977), 20:762-772
- [62] L. J. Guibas & A. M. Odlyzko. A New Proof of the Linearity of the Boyer-Moore String Search Algorithm. *SIAM Journal on Computing* (1980), 9(4):672-682
- [63] R. Cole. Tight Bounds on the Complexity of the Boyer-Moore Pattern Matching Algorithm. *SIAM Journal on Computing* 23(5):1075-1091
- [64] C. A. R. Hoare. Quicksort. *Computer Journal* (1962), 5(1):10-15
- [65] D. L. Shell. A High-Speed Sorting Procedure. *Communications of the ACM* (1959), 2(7):30-32
- [66] R. Sedgewick, A New Upper Bound for Shellsort, *J. Algorithms*, 7 (1986), pp. 159-173

插图索引

图1.1 古埃及人使用的绳索计算机及其算法	2
图1.2 古希腊人的尺规计算机	3
图1.3 通过6趟扫描交换对七个整数排序（其中已就位的元素以深色示意）	4
图1.4 大 \mathcal{O} 记号、大 Ω 记号和大 Θ 记号	11
图1.5 复杂度的典型层次：(1)~(7)依次为 $\mathcal{O}(\log n)$ 、 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 、 $\mathcal{O}(n)$ 、 $\mathcal{O}(n \log n)$ 、 $\mathcal{O}(n^2)$ 、 $\mathcal{O}(n^3)$ 和 $\mathcal{O}(2^n)$	15
图1.6 对sum(A, 5)的递归跟踪分析	18
图1.7 对sum(A, 0, 7)的递归跟踪分析	23
图2.1 可扩充向量的溢出处理	34
图2.2 向量整体置乱算法permute()的迭代过程	37
图2.3 无序向量的顺序查找	39
图2.4 向量元素插入操作insert(r, e)的过程	40
图2.5 向量区间删除操作remove(lo, hi)的过程	41
图2.6 无序向量deduplicate()算法原理	42
图2.7 低效版uniqueify()算法的最坏情况	45
图2.8 有序向量中的重复元素可批量删除	46
图2.9 在有序向量中查找互异的相邻元素	46
图2.10 基于减治策略的有序向量二分查找算法（版本A）	48
图2.11 二分查找算法（版本A）实例：search(8, 0, 7)成功，search(3, 0, 7)失败	49
图2.12 二分查找算法（版本A）的查找长度（成功、失败查找分别以实线、虚线白色方框示意）	50
图2.13 Fibonacci查找算法原理	52
图2.14 Fibonacci查找算法的查找长度（成功、失败查找分别以实线、虚线白色方框示意）	53
图2.15 基于减治策略的有序向量二分查找算法（版本B）	54
图2.16 基于减治策略的有序向量二分查找算法（版本C）	56
图2.17 从三只苹果中挑出重量不同者	58
图2.18 有序向量的二路归并实例（来自两个向量的元素分别以黑、白方框区分，其各自的当前首元素则以灰色长方形示意）	62
图2.19 归并排序实例：S = { 6, 3, 2, 7, 1, 5, 8, 4 }	63
图3.1 首（末）节点是头（尾）节点的直接后继（前驱）	71
图3.2 刚创建的List对象	71
图3.3 ListNode::insertAsPred()算法	73
图3.4 List::remove()算法	75
图3.5 序列的插入排序	79
图3.6 序列的选择排序	80
图4.1 一摞椅子即是一个栈	87
图4.2 栈操作	87

图4.3 函数调用栈实例：主函数main()调用funcA()，funcA()调用funcB()，funcB()再自我调用	88
图4.4 进制转换算法流程	90
图4.5 栈混洗实例：从{ 1, 2, 3, 4 }到{ 3, 2, 4, 1 }（上方左侧为栈A，右侧为栈B；下方为栈S）	91
图4.6 迭代式括号匹配算法实例（上方为输入表达式；下方为辅助栈的演变过程；虚框表示在（右）括号与栈顶（左）括号匹配时对应的出栈操作）	93
图4.7 通过剪枝排除候选解子集	99
图4.8 (a)皇后的控制范围；(b)8皇后问题的一个解	100
图4.9 四皇后问题求解过程（棋盘右侧为记录解的栈solu）	101
图4.10 迷宫寻径算法实例	104
图4.11 在球桶中顺序排列的一组羽毛球可视作一个队列	105
图4.12 队列操作	105
图5.1 有根树的逻辑结构	111
图5.2 二叉树：(a)逻辑结构；(b)实例	111
图5.3 多叉树的“父节点”表示法	112
图5.4 多叉树的“孩子节点”表示法	112
图5.5 多叉树的“父节点 + 孩子节点”表示法	112
图5.6 多叉树的“长子 + 兄弟”表示法 ((b)中长子和兄弟指针，分别以垂直实线和水平虚线示意)	113
图5.7 完整的通讯过程由预处理、编码和解码阶段组成	114
图5.8 二叉树中每个节点都由根通路串唯一确定	116
图5.9 $\Sigma = \{ 'A', 'E', 'G', 'M', 'S' \}$ 两种编码方案对应的二叉编码树	116
图5.10 BinNode模板类的逻辑结构	118
图5.11 二叉树节点左孩子插入过程	119
图5.12 右节点插入过程：(a)插入前；(b)插入后	122
图5.13 右子树接入过程：(a)接入前；(b)接入后	123
图5.14 二叉树遍历的全局次序由局部次序规则确定	124
图5.15 二叉树先序遍历序列	125
图5.16 二叉树的后序遍历序列	125
图5.17 二叉树的中序遍历序列	126
图5.18 先序遍历过程：先沿最左侧通路自顶而下访问沿途节点，再自底而上依次遍历这些节点的右子树	127
图5.19 中序遍历过程：顺着最左侧通路，自底而上依次访问沿途各节点及其右子树	128
图5.20 迭代式中序遍历实例（出栈节点以深色示意）	129
图5.21 中序遍历过程中，在无右孩子的节点处需做回溯	131
图5.22 后序遍历过程也可划分为模式雷同的若干段	132
图5.23 迭代式后序遍历实例（出栈节点以深色示意，发生gotoHLVFL()调用的节点以大写字母示意）	133
图5.24 二叉树的层次遍历序列	134
图5.25 层次遍历实例（出队节点以深色示意）	134
图5.26 完全二叉树实例及其宏观结构	135
图5.27 满二叉树实例及其宏观结构	135

图5.28 为实现PFC编码和解码过程所需的数据结构和算法.....	136
图5.29 子集的PFC编码树合并后，即是全集的一棵PFC编码树.....	136
图5.30 最优编码树的双子性	140
图5.31 最优编码树的层次性	140
图5.32 通过节点交换提高编码效率完全二叉树与满二叉树	140
图5.33 考虑字符出现频率，以平均带权深度衡量编码效率	141
图5.34 若考虑出现频率，完全二叉树或满树未必最优.....	142
图5.35 若考虑出现频率，最优编码树往往不是完全二叉树	142
图5.36 最优编码树的层次性	142
图5.37 最优编码树中底层兄弟节点合并后，依然是最优编码树	143
图5.38 Huffman树构造算法实例	144
图6.1 (a)无向图、(b)混合图和(c)有向图	151
图6.2 通路与简单通路	152
图6.3 环路与简单环路	152
图6.4 欧拉环路与哈密尔顿环路	152
图6.5 邻接矩阵（空白单元对应的边不存在，其统一取值标注于矩阵最左上角）	155
图6.6 以邻接表方式描述和实现图	158
图6.7 广度优先搜索示例	161
图6.8 深度优先搜索实例（粗边框白色，为当前顶点；细边框白色、双边框白色和黑色，分别为处于UNDISCOVERED、DISCOVERED和VISITED状态的顶点；dTime和fTime标签，分别标注于各顶点的左右）	163
图6.9 活跃期与“祖先-后代”关系之间的对应关系	164
图6.10 拓扑排序	165
图6.11 利用“DAG必有零入度顶点”的特性，实现拓扑排序	166
图6.12 基于DFS搜索的拓扑排序实例	168
图6.13 关节点	168
图6.14 双连通域	168
图6.15 DFS树根节点是关节点，当且仅当它拥有多个分支	169
图6.16 内部节点C是关节点，当且仅当C的某棵极大真子树不（经后向边）联接到C的真祖先	169
图6.17 基于DFS搜索的双连通域分解实例	171
图6.18 支撑树	174
图6.19 极小支撑树与最小支撑树	175
图6.20 最小支撑树总是会采用联接每一割的最短跨越边	176
图6.21 Prim算法示例（阴影区域示意不断扩展的子树 T_k ，粗线示意树边）	177
图6.22 最短路径的任一前缀也是最短路径	178
图6.23 有向带权图(a)，及其最短路径树(b)和(c)	178
图6.24 最短路径子树序列	179
图6.25 Dijkstra算法示例（阴影区域示意不断扩展的子树 T_k ，粗线示意树边）	180
图7.1 第7章和第8章内容纵览	182

图7.2 二叉搜索树即处处满足顺序性的二叉树	184
图7.3 二叉搜索树的三个实例（左），以及三个反例（右）	184
图7.4 二叉搜索树（上）的中序遍历序列（下），必然单调非降.....	184
图7.5 二叉搜索树的查找过程（查找所经过的通路，以粗线条示意）	186
图7.6 searchIn()算法对返回值和_hot的语义定义：(a) 查找成功；(b) 查找失败	187
图7.7 二叉搜索树节点插入算法实例	188
图7.8 二叉搜索树节点删除算法实例	189
图7.9 由三个关键码{ 1, 2, 3 }的6种全排列生成的二叉搜索树.....	191
图7.10 由同一组共11个节点组成，相互等价的两棵二叉搜索树（二者在拓扑上的差异，以阴影圈出）	192
图7.11 zig(v)：顺时针旋转	193
图7.12 zag(v)：逆时针旋转	193
图7.13 在高度固定为h的前提下，节点最少的AVL树	195
图7.14 经节点删除和插入操作后，AVL树可能失衡（加减号示意平衡因子，双圈表示失衡节点）	195
图7.15 节点插入后，通过单旋操作使AVL树重新平衡	196
图7.16 节点插入后通过连续的两次旋转操作使AVL树重新平衡	197
图7.17 节点删除后经一次旋转恢复局部平衡	198
图7.18 节点删除后通过两次旋转恢复局部平衡	199
图7.19 节点插入后的统一重新平衡	200
图8.1 通过自下而上的一系列等价变换，可使任一节点上升至树根.....	205
图8.2 简易伸展树的最坏情况.....	205
图8.3 通过zig-zig操作，将节点v上推两层	206
图8.4 通过zig-zag操作，将节点v上推两层	206
图8.5 通过zig操作，将节点v上推一层，成为树根	207
图8.6 双层调整策略的高度折半效果	207
图8.7 伸展树中较深的节点一旦被访问到，对应分支的长度将随即减半	208
图8.8 伸展树的节点插入	210
图8.9 伸展树的节点删除	211
图8.10 二叉搜索树与四路搜索树	213
图8.11 B-树的宏观结构（外部节点以深色示意，深度完全一致，且都同处于最底层）	214
图8.12 (a) 4阶B-树；(b) B-树的紧凑表示；(c) B-树的最紧凑表示	215
图8.13 B-树的查找过程	217
图8.14 通过分裂修复上溢节点.....	220
图8.15 3阶B-树插入操作实例 (I)	221
图8.16 3阶B-树插入操作实例 (II)	222
图8.17 下溢节点向父亲“借”一个关键码，父亲再向左兄弟“借”一个关键码	223
图8.18 下溢节点向父亲“借”一个关键码，父亲再向右兄弟“借”一个关键码	223
图8.19 下溢节点向父亲“借”一个关键码，然后与左兄弟“粘接”成一个节点	224
图8.20 3阶B-树删除操作实例 (I)	226

图8.21 3阶B-树删除操作实例 (II)	227
图8.22 通过假想式地引入外部节点 (黑色正方形) , 将二叉树扩展为真二叉树	228
图8.23 红黑树到4阶B-树的等价转换 (在完全彩色版尚未出版之前本书约定 , 分别以圆形、正方形和八角形表示红黑树的红节点、黑节点和颜色未定节点 , 以长方形表示B-树节点)	229
图8.24 红黑树的黑高度不低于高度的一半 ; 反之 , 高度不超过黑高度的两倍	229
图8.25 双红修正第一种情况 (RR-1) 及其调整方法 (上方、下方分别为红黑树及其对应B-树的局部)	231
图8.26 双红修正第二种情况 (RR-2) 及其调整方法 (带问号的关键码可能存在)	232
图8.27 双红修正流程图	232
图8.28 删除节点x之后 , 红黑树条件(4) : (a)或依然满足 , (b)或经重染色后重新满足 , (c)或不再满足	234
图8.29 双黑修正 (情况BB-1) (带问号的关键码可能存在 , 且颜色不定)	235
图8.30 双黑修正 (情况BB-2-R) (带问号的黑关键码可能但不会同时存在)	235
图8.31 双黑修正 (情况BB-2-B)	236
图8.32 双黑修正 (情况BB-3)	236
图8.33 双黑修正流程图	237
图8.34 一维范围查询	239
图8.35 通过预先排序 , 高效地解决一维范围查询问题 (p ₋₁ 为假想着引入的哨兵 , 数值等于-∞)	239
图8.36 平面范围查询 (planar range query)	240
图8.37 平衡二叉搜索树 : 叶节点存放输入点 , 内部节点等于左子树中的最大者	240
图8.38 借助平衡二叉搜索树解决一维范围查询问题 (针对区间端点的两条查找路径加粗示意)	241
图8.39 2d-树中各节点对应的区域 , 逐层递归地按所包含的输入点数均衡切分	242
图8.40 2d-树的构造过程 , 就是对平面递归划分的过程	243
图8.41 基于2d-树的平面范围查询 (A~J共计10个输入点 ; 命中子树的根节点 , 以双线圆圈示意)	244
图9.1 三国人物的词典结构	247
图9.2 跳转表的总体逻辑结构	250
图9.3 跳转表节点插入过程(a~d) , 也是节点删除的逆过程(d~a)	256
图9.4 四联表节点插入过程	257
图9.5 直接使用线性数组实现电话簿词典	260
图9.6 散列函数	261
图9.7 除余法	262
图9.8 素数表长可降低冲突的概率并提高空间的利用率	262
图9.9 MAD法可消除散列过程的连续性	263
图9.10 通过槽位细分排解散列冲突	267
图9.11 利用建立独立链排解散列冲突	267
图9.12 利用公共溢出区解决散列冲突	268
图9.13 线性试探法	268
图9.14 线性试探法对应的查找链	269
图9.15 通过设置懒惰删除标记 , 无需大量词条的重排即可保证查找链的完整	270
图9.16 线性试探法会加剧聚集现象 , 而平方试探法则会快速跳离聚集区段	273

图9.17 平方试探法	274
图9.18 即便散列表长取为素数 ($M = 11$) , 在装填因子 $\lambda > 50\%$ 时仍可能找不到实际存在的空桶	274
图9.19 分两步将任意类型的关键码 , 映射为桶地址	275
图9.20 利用散列表对一组互异整数排序	277
图9.21 利用散列表对一组可能重复的整数排序	277
图9.22 利用散列法 , 在线性时间内确定 n 个共线点之间的最大间隙	278
图10.1 以获奖先后为优先级 , 由前12届图灵奖得主构成的完全二叉堆	286
图10.2 按照层次遍历序列 , 对完全二叉树节点做编号 (其中圆形表示内部节点 , 方形表示外部节点)	287
图10.3 完全二叉堆词条插入过程	289
图10.4 完全二叉堆词条插入操作实例	290
图10.5 完全二叉堆词条删除过程	291
图10.6 完全二叉堆词条删除操作实例	292
图10.7 堆合并算法原理	293
图10.8 Floyd 算法实例 (虚线示意下滤过程中的交换操作)	294
图10.9 就地堆排序	295
图10.10 就地堆排序实例 : 建堆	296
图10.11 就地堆排序实例 : 迭代	296
图10.12 堆合并	297
图10.13 整体结构向左倾斜 , 右侧通路上的节点不超过 $O(\log n)$ 个	298
图10.14 空节点路径长度 (其中有个节点违反左倾性 , 以双圈标出)	299
图10.15 左式堆 : 左孩子的 np_1 值不小于右孩子 , 而前者的高度却可能小于后者	299
图10.16 左式堆的最右侧通路	300
图10.17 左式堆合并算法原理	300
图10.18 左式堆合并算法实例	301
图10.19 基于堆合并操作实现删除接口	303
图10.20 基于堆合并操作实现词条插入算法	304
图11.1 串模式匹配的蛮力算法	309
图11.2 蛮力算法的最坏情况 (也是基于坏字符策略 BM 算法的最好情况)	310
图11.3 蛮力算法的最好情况 (也是基于坏字符策略 BM 算法的最坏情况)	310
图11.4 利用以往的成功比对所提供的信息 , 可以避免主串字符指针的回退	311
图11.5 利用以往的成功比对所提供的信息 , 有可能使模式串大跨度地右移	311
图11.6 利用此前成功比对所提供的信息 , 在安全的前提下尽可能大跨度地右移模式串	312
图11.7 $P[j] = P[\text{next}[j]]$ 时 , 必有 $\text{next}[j + 1] = \text{next}[j] + 1$	313
图11.8 $P[j] \neq P[\text{next}[j]]$ 时 , 必有 $\text{next}[j + 1] = \text{next}[\dots \text{next}[j] \dots] + 1$	314
图11.9 按照此前定义的 next 表 , 仍有可能进行多次不必要的字符比对操作	315
图11.10 坏字符策略 : 通过右移模式串 P , 使 $T[i + j]$ 重新得到匹配	318
图11.11 借助 $BC[]$ 表的串匹配	320
图11.12 好后缀策略 : 通过右移模式串 P , 使与 P 后缀 U 匹配的 w 重新得到匹配	321

图11.13 借助GS[]表的串匹配：(a).模式串P及其GS[]表；(b).主串T	322
图11.14 MS[j]和SS[j]表的定义与含义	323
图11.15 由SS[]表构造GS[]表	324
图11.16 构造SS[]表	325
图11.17 典型串匹配算法的复杂度概览	326
图11.18 随着单次比对成功概率(横轴)的提高，串匹配算法的运行时间(纵轴)通常亦将增加	327
图11.19 Karp-Rabin串匹配算法实例：模式串指纹hash("82818") = 82,818 % 97 = 77	329
图11.20 Karp-Rabin串匹配算法实例：模式串指纹hash("18284") = 18,284 % 97 = 48	330
图11.21 相邻子串内容及指纹的相关性	331
图12.1 序列的轴点(这里用高度来表示各元素的大小)	334
图12.2 有序向量经循环左移一个单元后，将不含任何轴点	335
图12.3 轴点构造算法的构思	336
图12.4 轴点构造过程	337
图12.5 轴点构造算法实例	337
图12.6 partition()算法的退化情况，也是最坏情况	339
图12.7 选取与中位数	341
图12.8 通过减治策略计算众数	342
图12.9 采用减治策略，计算等长有序向量归并后的中位数	344
图12.10 基于堆结构的选取算法	346
图12.11 基于快速划分算法逐步逼近选取目标元素	347
图12.12 k-选取目标元素所处位置的三种可能情况	349
图12.13 各子序列的中位数以及全局中位数	349
图12.14 将待排序向量视作二维矩阵	350
图12.15 递减增量、逐渐逼近策略	351
图12.16 希尔排序实例：采用增量序列{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...}	352
图12.17 (g, h)-有序向量必然(mg + nh)-有序	354
图12.18 经多步迭代，逆序元素可能的范围必然不断缩小	355

表格索引

表1.1 countOnes(441)的执行过程	12
表2.1 向量ADT支持的操作接口	29
表2.2 向量操作实例	30
表3.1 列表节点ADT支持的操作接口	67
表3.2 列表ADT支持的操作接口	68
表3.3 插入排序算法实例	79
表3.4 选择排序算法实例	81
表4.1 栈ADT支持的操作接口	87
表4.2 栈操作实例	87
表4.3 RPN表达式求值算法实例（当前字符以方框注明，操作数栈的底部靠左）	97
表4.4 队列ADT支持的操作接口	105
表4.5 队列操作实例（元素均为整型）	106
表5.1 $\Sigma = \{ 'A', 'E', 'G', 'M', 'S' \}$ 的一份二进制编码表	114
表5.2 二进制解码过程	114
表5.3 $\Sigma = \{ 'A', 'E', 'G', 'M', 'S' \}$ 的另一份编码表	115
表5.4 按照表5.3“确定”的编码协议，可能有多种解码结果	115
表5.5 在一篇典型的英文文章中，各字母出现的次数	141
表5.6 由6个字符构成的字符集 Σ ，以及各字符的出现频率	143
表6.1 图ADT支持的边操作接口	153
表6.2 图ADT支持的顶点操作接口	153
表8.1 双红修正算法所涉及局部操作的统计	232
表8.2 双黑修正算法所涉及局部操作的统计	237
表9.1 词典ADT支持的标准操作接口	247
表9.2 词典结构操作实例	247
表9.3 基数排序实例	280
表10.1 优先级队列ADT支持的操作接口	283
表10.2 优先级队列操作实例：选择排序（当前的最大元素以方框示意）	284
表11.1 串ADT支持的操作看接口	307
表11.2 串操作实例	307
表11.3 next表实例：假想地附加一个通配符P[-1]	313
表11.4 next表仍有待优化的实例	315
表11.5 改进后的next表实例	316
表11.6 模式串 $P = "DATA STRUCTURES"$ 及其对应的BC表	319
表11.7 模式串 $P = "ICED RICE PRICE"$ 对应的GS表	322
表11.8 模式串 $P = "ICED RICE PRICE"$ 对应的SS表	323

算法索引

算法1.1 过直线上给定点作直角	3
算法1.2 三等分给定线段	3
算法1.3 取非极端元素	12
算法2.1 从三个苹果中选出重量不同者	57
算法4.1 RPN表达式求值	97
算法4.2 利用队列结构实现的循环分配器	107
算法8.1 构造2d-树	242
算法8.2 基于2d-树的平面范围查询	244
算法12.1 线性时间的k-选取	348
算法12.2 希尔排序	351

代码索引

代码1.1 整数数组的起泡排序	5
代码1.2 整数二进制展开中数位1总数的统计	13
代码1.3 数组元素求和算法sumI()	13
代码1.4 幂函数算法（蛮力迭代版）	14
代码1.5 数组求和算法（线性递归版）	17
代码1.6 数组倒置算法的统一入口	19
代码1.7 数组倒置的递归算法	20
代码1.8 优化的幂函数算法（线性递归版）	21
代码1.9 由递归版改造而得的数组倒置算法（迭代版）	22
代码1.10 进一步调整代码1.9的结构，消除goto语句	22
代码1.11 通过二分递归计算数组元素之和	23
代码1.12 通过二分递归计算Fibonacci数	24
代码1.13 通过线性递归计算Fibonacci数	25
代码1.14 基于动态规划策略计算Fibonacci数	26
代码2.1 向量模板类Vector	31
代码2.2 基于复制的向量构造器	32
代码2.3 重载向量赋值操作符	33
代码2.4 向量内部数组动态扩容算法expand()	34
代码2.5 向量内部功能shrink()	36
代码2.6 重载向量操作符[]	37
代码2.7 向量整体置乱算法permute()	37
代码2.8 向量区间置乱接口unsort()	38
代码2.9 重载比较器以便比较对象指针	38
代码2.10 无序向量元素查找接口find()	39
代码2.11 向量元素插入接口insert()	40
代码2.12 向量区间删除接口remove(lo, hi)	41
代码2.13 向量单元素删除接口remove()	41
代码2.14 无序向量清除重复元素接口deduplicate()	42
代码2.15 向量遍历接口traverse()	43
代码2.16 基于遍历实现increase()功能	44
代码2.17 有序向量甄别算法disordered()	45
代码2.18 有序向量uniquify()接口的平凡实现	45
代码2.19 有序向量uniquify()接口的高效实现	46
代码2.20 有序向量各种查找算法的统一search()接口	47
代码2.21 二分查找算法（版本A）	48

代码2.22 Fibonacci查找算法	53
代码2.23 二分查找算法（版本B）	55
代码2.24 二分查找算法（版本C）	56
代码2.25 向量排序器接口	60
代码2.26 向量的起泡排序	60
代码2.27 单趟扫描交换	60
代码2.28 向量的归并排序	62
代码2.29 有序向量的二路归并	63
代码3.1 列表节点模板类	68
代码3.2 列表模板类	70
代码3.3 列表类内部方法init()	71
代码3.4 重载列表类的下标操作符	72
代码3.5 无序列表元素查找接口find()	72
代码3.6 列表节点插入接口	73
代码3.7 ListNode::insertAsPred()算法	73
代码3.8 ListNode::insertAsSucc()算法	74
代码3.9 列表类内部方法copyNodes()	74
代码3.10 基于复制的列表构造方法	75
代码3.11 列表节点删除接口remove()	75
代码3.12 列表析构方法	76
代码3.13 列表清空方法clear()	76
代码3.14 无序列表剔除重复节点接口deduplicate()	76
代码3.15 列表遍历接口traverse()	77
代码3.16 有序列表剔除重复节点接口uniquify()	77
代码3.17 有序列表查找接口search()	78
代码3.18 有序列表基于排序的构造方法	78
代码3.19 列表的插入排序	80
代码3.20 列表的选择排序	81
代码3.21 列表最大节点的定位	82
代码3.22 有序列表的二路归并	82
代码3.23 列表的归并排序	83
代码4.1 Stack模板类	88
代码4.2 进制转换算法（递归版）	90
代码4.3 进制转换算法（迭代版）	91
代码4.4 括号匹配算法（递归版）	92
代码4.5 括号匹配算法（迭代版）	93
代码4.6 运算符优先级关系的定义	94
代码4.7 表达式的求值及RPN转换	95

代码4.8 皇后类	100
代码4.9 N皇后算法	101
代码4.10 迷宫格点类	102
代码4.11 查询相邻格点	103
代码4.12 转入相邻格点	103
代码4.13 迷宫寻径	103
代码4.14 Queue模板类	106
代码4.15 顾客对象	107
代码4.16 银行服务模拟	108
代码4.17 查找最短队列	108
代码5.1 二叉树节点模板类BinNode	117
代码5.2 以宏的形式对基于BinNode的操作做一归纳整理	119
代码5.3 二叉树节点左、右孩子的插入	119
代码5.4 二叉树中序遍历算法的统一入口	120
代码5.5 二叉树模板类BinTree	121
代码5.6 二叉树节点的高度更新	121
代码5.7 二叉树根、左、右节点的插入	122
代码5.8 二叉树子树的接入	122
代码5.9 二叉树子树的删除	123
代码5.10 二叉树子树的分离	123
代码5.11 二叉树先序遍历算法（递归版）	124
代码5.12 二叉树后序遍历算法（递归版）	125
代码5.13 二叉树中序遍历算法（递归版）	126
代码5.14 二叉树先序遍历算法（迭代版#2）	128
代码5.15 二叉树中序遍历算法（迭代版#1）	129
代码5.16 二叉树节点直接后继的定位	130
代码5.17 二叉树中序遍历算法（迭代版#2）	130
代码5.18 二叉树中序遍历算法（迭代版#3）	131
代码5.19 二叉树后序遍历算法（迭代版）	133
代码5.20 二叉树层次遍历算法	134
代码5.21 基于二叉树的PFC编码	136
代码5.22 实现PFC编码所需的数据结构	137
代码5.23 初始化PFC森林	137
代码5.24 构造PFC编码树	138
代码5.25 生成PFC编码表	138
代码5.26 PFC编码	138
代码5.27 PFC解码	139
代码5.28 基于二叉树的Huffman编码	145

代码5.29 HuffChar结构	145
代码5.30 Huffman编码树结构	145
代码5.31 Huffman森林结构	145
代码5.32 Huffman二进制编码串	145
代码5.33 Huffman编码表	146
代码5.34 Huffman算法：字符出现频率的样本统计	146
代码5.35 初始化Huffman森林	146
代码5.36 构造Huffman编码树	147
代码5.37 生成Huffman编码表	147
代码5.38 Huffman编码	148
代码5.39 Huffman解码	148
代码6.1 图ADT操作接口	154
代码6.2 基于邻接矩阵实现的图结构	157
代码6.3 BFS算法	160
代码6.4 DFS算法	162
代码6.5 基于DFS搜索框架实现拓扑排序算法	167
代码6.6 基于DFS搜索框架实现双连通域分解算法	170
代码6.7 优先级搜索算法框架	173
代码6.8 Prim算法的顶点优先级更新器	177
代码6.9 Dijkstra算法的顶点优先级更新器	179
代码7.1 词条模板类Entry	183
代码7.2 由BinTree派生的二叉搜索树模板类BST	185
代码7.3 二叉搜索树searchIn()算法的递归实现	186
代码7.4 二叉搜索树search()接口	186
代码7.5 二叉搜索树insert()接口	188
代码7.6 二叉搜索树remove()接口	190
代码7.7 二叉搜索树removeAt()算法	190
代码7.8 基于BST定义的AVL树接口	194
代码7.9 用于简化AVL树算法描述的宏	194
代码7.10 恢复平衡的调整方案，决定于失衡节点的更高孩子、更高孙子节点的方向	196
代码7.11 AVL树节点的插入	197
代码7.12 AVL树节点的删除	199
代码7.13 “3 + 4”重构	201
代码7.14 AVL树的统一重平衡	201
代码8.1 基于BST定义的伸展树接口	208
代码8.2 伸展树节点的调整	210
代码8.3 伸展树节点的查找	210
代码8.4 伸展树节点的插入	211

代码8.5 伸展树节点的删除	212
代码8.6 B-树节点	215
代码8.7 B-树	216
代码8.8 B-树关键码的查找	217
代码8.9 B-树关键码的插入	219
代码8.10 B-树节点的上溢处理	221
代码8.11 B-树关键码的删除	222
代码8.12 B-树节点的下溢处理	226
代码8.13 基于BST定义的红黑树接口	230
代码8.14 用以简化红黑树算法描述的宏	230
代码8.15 红黑树节点的黑高度更新	230
代码8.16 红黑树insert()接口	231
代码8.17 双红修正solveDoubleRed()	233
代码8.18 红黑树remove()接口	234
代码8.19 双黑修正solveDoubleBlack()	238
代码9.1 词典结构的操作接口规范	248
代码9.2 SkipList模板类	249
代码9.3 QuadList模板类	251
代码9.4 QuadListNode模板类	251
代码9.5 QuadList对象的创建	252
代码9.6 SkipList::get()查找	252
代码9.7 SkipList::skipSearch()查找	253
代码9.8 SkipList::put()插入	255
代码9.9 QuadList::insertAfterAbove()插入	257
代码9.10 QuadListNode::insertAsSuccAbove()插入	257
代码9.11 SkipList::remove()删除	258
代码9.12 QuadList::remove()删除	258
代码9.13 基于散列表实现的映射结构	265
代码9.14 散列表构造	265
代码9.15 确定散列表的素数表长	266
代码9.16 散列表析构	266
代码9.17 散列表的查找	271
代码9.18 散列表的查找probe4Hit()	271
代码9.19 散列表元素删除 (采用懒惰删除策略)	271
代码9.20 散列表元素插入	272
代码9.21 散列表的查找probe4Free()	272
代码9.22 散列表的重散列	273
代码9.23 散列码转换函数hashCode()	276

代码10.1 优先级队列标准接口	284
代码10.2 利用统一的优先级队列接口，实现通用的Huffman编码	285
代码10.3 为简化完全二叉堆算法的描述及实现而定义的宏	288
代码10.4 完全二叉堆接口	288
代码10.5 完全二叉堆getMax()接口	289
代码10.6 完全二叉堆insert()接口的主体框架	289
代码10.7 完全二叉堆的上滤	290
代码10.8 完全二叉堆delMax()接口的主体框架	291
代码10.9 完全二叉堆的下滤	292
代码10.10 Floyd建堆算法	294
代码10.11 基于向量的就地堆排序	297
代码10.12 左式堆PQ_LeftHeap模板类定义	298
代码10.13 左式堆合并接口merge()	302
代码10.14 左式堆节点删除接口delMax()	303
代码10.15 左式堆节点插入接口insert()	304
代码11.1 蛮力串匹配算法（版本一）	309
代码11.2 蛮力串匹配算法（版本二）	310
代码11.3 KMP主算法	313
代码11.4 next表的构造	314
代码11.5 改进的next表构造算法	316
代码11.6 BM主算法	317
代码11.7 BC表的构造	319
代码11.8 GS表的构造	326
代码11.9 Karp-Rabin算法相关的预定义	328
代码11.10 Karp-Rabin算法主体框架	329
代码11.11 指纹相同时还需逐个字符地比对	330
代码11.12 串指纹的快速更新	331
代码11.13 提前计算 $M^{(m-1)}$	331
代码12.1 向量的快速排序	335
代码12.2 轴点构造算法（版本A）	336
代码12.3 轴点构造算法（版本B）	340
代码12.4 众数查找算法主体框架	342
代码12.5 候选众数核对算法	342
代码12.6 候选众数选取算法	343
代码12.7 中位数蛮力查找算法	343
代码12.8 等长有序向量归并后中位数算法	344
代码12.9 不等长有序向量归并后中位数算法	346
代码12.10 基于快速划分的k-选取算法	348

关键词索引

(按关键词中各汉字的声母及各英文单词的首字母排序, 比如“大O记号”对应于“DOJH”)

A

AVL树 (AVL tree)	194
-------------------------	-----

B

边 (edge)	110, 150
八叉树 (octree)	204
波峰集 (frontier)	159
比较树 (comparison tree)	58
遍历 (traversal)	124, 150
遍历树 (traversal tree)	159
编码 (encoding)	114
Boyer-Moore算法 (Boyer-Moore Algorithm)	317
B-树 (B-tree)	214
闭散列 (closed hashing)	268
不稳定算法 (unstable algorithm)	61, 337
半线性结构 (semi-linear structure)	110, 150

C

层 (level)	250
出边 (outgoing edge)	151
成本 (cost)	174
层次遍历 (level-order traversal)	133
出度 (out-degree)	151
出队 (dequeue)	105
词典 (dictionary)	246, 247, 248
持久性结构 (persistent structure)	204
串模式匹配 (string pattern matching)	308
插入排序 (insertionsort)	79, 353
初始化 (initialization)	32
重散列 (rehashing)	273

常数时间复杂度算法 (constant-time algorithm)	12
词条 (entry)	183, 246, 283
槽位 (slot)	267
错误 (error)	42
重写 (override)	121, 185, 279
抽象数据类型 (abstract data type, ADT)	26
除余法 (division method)	262
出栈 (pop)	87
重载 (overload)	20, 37, 100, 145, 276, 285
查找长度 (search length)	50, 191, 269
查找链 (probing chain)	269

D

堆 (heap)	286
底层 (bottom)	250
顶层 (top)	250
对称二叉B-树 (symmetric binary B-tree)	228
多重继承 (multiple inheritance)	249, 288, 298
多槽位法 (multiple slots)	267
顶点 (vertex)	110, 150
迭代式后序遍历 (iterative postorder traversal)	132
迭代式先序遍历 (iterative preorder traversal)	126
迭代式中序遍历 (iterative inorder traversal)	128
递归调用 (recursive call)	16
递归跟踪 (recursion trace)	17, 63, 83, 89, 168, 303
递归基 (base case of recursion)	17
递归式后序遍历 (recursive postorder traversal)	125
递归式先序遍历 (recursive preorder traversal)	124
递归式中序遍历 (recursive inorder traversal)	126
递减增量 (diminishing increment)	351
队列 (queue)	105
多路递归 (multi-way recursion)	23
独立链 (separate chaining)	267
多路搜索树 (multi-way search tree)	213
大Ω记号 (big-omega notation)	10
大O记号 (big-O notation)	9
堆排序 (heapsort)	295

带权图 (weighted graph)	152
度数 (degree)	111, 151
对数多项式时间复杂度算法 (polylogarithmic-time algorithm)	13
Dijkstra算法 (Dijkstra Algorithm)	178
对数时间复杂度算法 (logarithmic-time algorithm)	13
队头 (front)	105
递推方程 (recurrence equation)	19, 52, 64
动态规划 (dynamic programming)	25
大 Θ 记号 (big-theta notation)	11
队尾 (rear)	105
对外功能接口 (interface)	26
低位字段优先 (least significant digit first)	279
多项式时间复杂度算法 (polynomial-time algorithm)	14
多项式散列码 (polynomial hash code)	276
调用栈 (call stack)	89
地址空间 (address space)	259

E

二叉编码树 (binary encoding tree)	116
二叉树 (binary tree)	111
二叉树节点 (binary tree node)	117
二叉搜索树 (binary search tree)	184
二分查找 (binary search)	48, 49, 50, 54, 55, 56, 183, 217, 239, 240
二分递归 (binary recursion)	23

F

封闭定址 (closed addressing)	268
Fibonacci查找 (Fibonaccian search)	52
分而治之 (divide-and-conquer)	22, 23
符号表 (symbol table)	246
返回地址 (return address)	89
父节点 (parent)	111, 112
Floyd算法 (Floyd Algorithm)	293
分摊分析 (amortized analysis)	35, 53, 204, 206, 227, 273, 315
分摊运行时间 (amortized running time)	35
范围查询 (range query)	239

非线性结构 (non-linear structure)	150
复杂度下界 (lower bound)	58

G

割 (cut)	175
根 (root)	110
归并排序 (mergesort)	61, 83
高度 (height)	111
广度优先搜索 (Breadth-First Search, BFS)	159
广度优先搜索树 (BFS tree)	160
广度优先搜索森林 (BFS forest)	161
公共溢出区 (overflow area)	268
关节点 (articulation point)	168
关键码 (key)	61, 137, 146, 213, 246, 248, 283, 327
关联 (incident)	151
关联数组 (associative array)	247
根通路串 (root path string)	116
构造函数 (constructor)	32

H

弧 (arc)	150
Huffman编码树 (Huffman encoding tree)	143
后代 (descendant)	111
黑高度 (black height)	118, 228, 230
红黑树 (red-black tree)	228
混合图 (mixed graph)	151
好后缀 (good suffix)	321
后继 (successor)	28, 67
画家算法 (painter's algorithm)	320, 324
后进先出 (last-in-first-out, LIFO)	87, 90
环路 (cycle)	152
h-排序 (h-sorting)	354
回溯 (backtracking)	99
黑深度 (black depth)	228
后向边 (back edge)	163
活跃函数实例 (active function instance)	89

活跃期 (active duration)	163
h-有序 (h-ordered)	354
后缀 (suffix)	28, 67, 306
后缀表达式 (postfix)	97
坏字符 (bad character)	318
孩子节点 (child)	111

J

节点 (node)	66, 67, 110, 112, 150, 186
建堆 (heapification)	292
节点的分裂 (split)	219
节点的合并 (merge)	61, 224
简单环路 (simple cycle)	152
就地算法 (in-place algorithm)	12
简单图 (simple graph)	151
简单通路 (simple path)	152
减而治之 (decrease-and-conquer)	17, 48, 185, 343, 344
几何分布 (geometric distribution)	254
聚集 (clustering)	263
渐进分析 (asymptotic analysis)	9
解码 (decoding)	114
计算机科学 (computer science)	2
计算科学 (computing science)	2
基数排序 (radixsort)	279
具体实现 (implementation)	26
极小支撑树 (minimal spanning tree, MST)	175
记忆 (memoization)	25
基于比较式算法 (comparison-based algorithm, CBA)	58, 59, 82, 246, 277, 278
剪枝 (pruning)	99

K

跨边 (cross edge)	160, 163
空串 (null string)	306
k叉树 (k-ary tree)	112
可达分量 (reachable component)	159
kd-树 (kd-tree)	242

开放定址 (open addressing)	268
客户 (client)	107
空节点路径长度 (null path length)	118, 299
空间复杂度 (space complexity)	11
可计算性 (computability)	7
可扩充向量 (extendable vector)	33, 34
KMP算法 (KMP Algorithm)	311
Karp-Rabin算法 (Karp-Rabin Algorithm)	327
快速划分 (quick partitioning)	336
开散列 (open hashing)	268
快速排序 (quicksort)	334
k-选取 (k-selection)	341
跨越边 (crossing edge)	175
可有效求解的 (tractable)	14

L

列表 (list)	28, 66
链表 (linked list)	66
鲁棒性 (robustness)	7
连通分量 (connected component)	159
懒惰删除 (lazy removal)	270
邻接 (adjacent)	151
链接 (link)	66
路径 (path)	151
邻接表 (adjacency list)	158, 174
邻接矩阵 (adjacency matrix)	155
离线算法 (offline algorithm)	57
旅行商问题 (traveling salesman problem)	99
轮值 (round robin)	107

M

MAD法 (multiply-add-divide method)	263
满二叉树 (full binary tree)	135, 192, 293, 294, 300
末节点 (last node)	71, 131, 251
模式定位 (pattern location)	308
模式检测 (pattern detection)	308

模式计数 (pattern counting)	308
模式枚举 (pattern enumeration)	308

N

内部节点 (internal node)	111
逆波兰表达式 (reverse Polish notation, RPN)	96
难解的 (intractable)	15
难解性 (intractability)	8
逆序对 (inversion)	355

O

欧拉环路 (Eulerian tour)	152
----------------------------	-----

P

排队论 (queuing theory)	107
PFC编码树 (PFC encoding tree)	116
平凡后缀 (trivial suffix)	306
平凡前缀 (trivial prefix)	306
平方取中法 (mid-square)	264
平方试探 (quadratic probing)	274
平凡子串 (trivial substring)	306
平衡二叉搜索树 (balanced binary search tree, BBST)	192
平衡因子 (balance factor)	194
平均情况 (average case)	10
平均运行时间 (average running time)	35
平面范围查询 (planar range query)	240
Prim算法 (Prim Algorithm)	175
排序 (sorting)	4
偏序 (partial order)	282

Q

桥 (bridge)	175
起点 (origin)	151
起点 (source)	178

切割节点 (cut vertex)	168
清理 (cleanup)	33
起泡排序 (bubblesort)	4, 5, 9, 10, 14, 60
前驱 (predecessor)	28, 67
期望运行时间 (expected running time)	35
全序 (full order)	282
前向边 (forward edge)	163
前缀 (prefix)	28, 67, 306
权重 (weight)	152
前缀无歧义编码 (prefix-free code)	115

R

入边 (incoming edge)	151
入度 (in-degree)	151
入队 (enqueue)	105
入栈 (push)	87

S

树边 (tree edge)	160, 162
哨兵节点 (sentinel node)	71, 73, 74, 75, 239, 250
输出 (output)	5
输出敏感的 (output sensitive)	240, 241
四叉树 (quadtree)	204
深度 (depth)	111
深度优先搜索 (Depth-First Search, DFS)	162
深度优先搜索树 (DFS tree)	163
深度优先搜索森林 (DFS forest)	163
双黑 (double black)	234
双红 (double red)	231
随机存储机 (Random Access Machine, RAM)	9
首节点 (first node)	71, 76, 83, 135, 251, 253
时间复杂度 (time complexity)	8
数据局部性 (data locality)	204, 269, 274
随机生成 (randomly generated)	191
随机组成 (randomly composed)	191
散列 (hashing)	259

上滤 (percolate up)	289
四联表 (quadlist)	250
散列表 (hashtable)	146, 259
散列冲突 (collision)	261
散列地址 (hashing address)	259
散列函数 (hash function)	259
散列码 (hash code)	275
双连通域 (bi-connected component)	168
势能分析法 (potential analysis)	208
输入 (input)	5
输入敏感的 (input sensitive)	39, 353
搜索 (search)	183
试探 (probing)	99
顺序查找 (sequential search)	39
上溢 (overflow)	33, 219
伸展 (splaying)	205
数组 (array)	28
数字分析法 (selecting digits)	264
伸展树 (splay tree)	204

T

塔 (tower)	250
图 (graph)	150
桶 (bucket)	259
头顶点 (head)	151
退化 (degeneracy)	7
头节点 (header)	71
通路 (path)	151
图灵机 (Turing Machine, TM)	9
拓扑排序 (topological sorting)	166
桶排序 (bucketsort)	277
图搜索 (graph search)	159
桶数组 (bucket array)	259
跳转表 (skip list)	249

W

- 外部节点 (external node) 111, 186, 214
尾顶点 (tail) 151
尾递归 (tail recursion) 22
伪对数的 (pseudo-logarithmic) 16
稳定算法 (stable algorithm) 61, 80, 277
稳定性 (stability) 55, 61, 280
尾节点 (trailer) 71, 255
网络 (network) 152
完美散列 (perfect hashing) 260
完全二叉堆 (complete binary heap) 286
完全二叉树 (complete binary tree) 135, 194, 286, 287, 293, 298
伪随机试探法 (pseudo-random probing) 275
无向边 (undirected edge) 150
无向图 (undigraph) 151
伪线性的 (pseudo-linear) 16
无序向量 (unsorted vector) 39
位异或法 (xor) 264
位置 (position) 28, 66, 118

X

- 希尔排序 (Shellsort) 350
析构函数 (destructor) 33
循关键码访问 (call-by-key) 183, 185
先进先出 (first-in-first-out, FIFO) 105, 107, 282
相邻 (adjacent) 151
下滤 (percolate down) 291
向量 (vector) 28, 29
序列 (sequence) 28
循链接访问 (call-by-link) 66
选取 (selection) 341
稀疏图 (sparse graph) 158
循位置访问 (call-by-position) 66
线性递归 (linear recursion) 17
线性结构 (linear structure) 110

线性时间复杂度算法 (linear-time algorithm)	14
线性试探 (linear probing)	268
线性数组 (linear array)	28
下溢 (underflow)	36, 223
循优先级访问 (call-by-priority)	282
循值访问 (call-by-value)	246
循秩访问 (call-by-rank)	29, 66, 157
循秩访问 (call-by-rank)	344
选择排序 (selectionsort)	80, 283

Y

源点 (source)	178
有根树 (rooted tree)	110
叶节点 (leaf)	111
易解的 (tractable)	14
叶节点带权平均深度 (weighted average leaf depth)	141
叶节点平均深度 (average leaf depth)	139
有穷性 (finiteness)	6
映射 (map)	246
意外 (exception)	42
有向边 (directed edge)	150
有序二叉树 (ordered binary tree)	111
优先级 (priority)	283
优先级队列 (priority queue)	283
优先级数 (priority number)	173
优先级搜索 (Priority-First Search, PFS)	173
有序列表 (sorted list)	77
有序树 (ordered tree)	113
有向图 (digraph)	151
有向无环图 (directed acyclic graph, DAG)	152, 166
有序向量 (sorted vector)	29, 44
野指针 (wild pointer)	34

387

Z

栈 (stack)	86
秩 (rank)	28, 29

帧 (frame)	89
制表 (tabulation)	25
子串 (substring)	306
支撑树 (spanning tree)	174
栈底 (stack bottom)	87
栈顶 (stack top)	87
终点 (destination)	151
轴点 (pivot)	335
折叠法 (folding)	264
最低共同祖先 (lowest common ancestor, LCA)	241
最大间隙 (maximum gap)	278
最短路径树 (shortest-path tree)	178
字典序 (lexicographical order)	61, 113, 279
真二叉树 (proper binary tree)	111, 228
字符表 (alphabet)	306
字符串 (string)	306
字符集 (alphabet)	114, 116, 136, 139
最高连通祖先 (highest connected ancestor, HCA)	169
最高左侧可见叶节点 (highest leaf visible from left, HLVFL)	132
自环 (self-loop)	151
组合 (combination)	354
真后代 (proper descendant)	111
最好情况 (best case)	10
最坏情况 (worst case)	10
最坏情况下最优的 (worst-case optimal)	58
栈混洗 (stack permutation)	91
真后缀 (proper suffix)	306
直接后继 (intermediate successor)	28, 67
直接前驱 (intermediate predecessor)	28, 67
最佳优先搜索 (Best-First Search, BFS)	173
增量 (increment)	350
正确性 (correctness)	6
真前缀 (proper prefix)	306
众数 (majority)	342
子树 (subtree)	111
左式堆 (leftist heap)	298
再散列 (double hashing)	275
指数时间复杂度算法 (exponential-time algorithm)	15

装填因子 (load factor)	33, 261, 272
自调整列表 (self-adjusting list)	205
指纹 (fingerprint)	328
中位点 (median point)	242
中位数 (median)	341
祖先 (ancestor)	111
在线算法 (online algorithm)	57, 116
执行栈 (execution stack)	89
最小支撑树 (minimum spanning tree, MST)	175
最优编码树 (optimal encoding tree)	139
最右侧通路 (rightmost path)	300
中缀表达式 (infix)	97
真子串 (proper substring)	306
最左侧通路 (leftmost path)	127
真祖先 (proper ancestor)	111

内容简介

本书按照面向对象程序设计的思想，根据作者多年教学积累，系统地介绍各类数据结构的功能、表示和实现，对比各类数据结构适用的应用环境；结合实际问题展示算法设计的一般性模式与方法、算法实现的主流技巧，以及算法效率的评判依据和分析方法；以高度概括的体例为线索贯穿全书，并通过对比和类比揭示数据结构与算法的内在联系，帮助读者形成整体性认识。

配套《习题解析》涵盖验证型、拓展型、反思型、实践型和研究型习题，总计**290**余道大题、**525**多道小题，激发读者的求知欲，培养自学能力和独立思考习惯。本书及《习题解析》共计配有**340**多组、**400**余幅插图结合简练的叙述，**40**多张表格列举简明的规范、过程及要点，**280**余段代码及算法配合详尽而简洁的注释，使深奥抽象的概念和过程得以具体化且便于理解和记忆；推荐**20**余册经典的专著与教材，提供**40**余篇重点的学术论文，便于读者进一步钻研和拓展。

结合学生基础、专业方向、教学目标及允许课时总量等各种因素，本书推荐了若干种典型教学进度及学时分配方案，供授课教师视具体情况参考和选用。

勘误表、插图、代码以及配套讲义等相关教学资料，均以电子版形式向公众开放，读者可从本书主页直接下载：<http://dsa.cs.tsinghua.edu.cn/~deng/ds/dsacpp/>

清华大学计算机系列教材

本套教材已伴随着计算机科学与技术的发展茁壮成长了三十余年，获得了中华人民共和国教育部科技进步奖、普通高等学校优秀教材全国特等奖、全国优秀畅销书金奖等三十多项部级以上奖励，被近千所高校选用教材，教学效果非常好。本套教材经过多次修订改版和增加新品种、新内容、新技术，基本涵盖了本科生和硕士研究生的主要课程。本套教材的作者全部是清华大学计算机系的教师，教材的内容、语言特点、课时安排体现了他们治学严谨的特点，概念表述严谨，逻辑推理严密，语言精炼。同时，本套教材体系完整、结构严谨，理论结合实际，注重素质培养。

内容简介

本书按照面向对象程序设计的思想，根据作者多年教学积累，系统地介绍各类数据结构的功能、表示和实现，对比各类数据结构适用的应用环境；结合实际问题展示算法设计的一般性模式与方法、算法实现的主流技巧，以及算法效率的评判依据和分析方法；以高度概括的体例为线索贯穿全书，并通过对比和类比揭示数据结构与算法的内在联系，帮助读者形成整体性认识。

配套的习题解析涵盖验证型、拓展型、反思型、实践型和研究型习题，总计290余道大题、525多道小题，激发读者的求知欲，培养自学能力和独立思考习惯。本书及《习题解析》共计配有340多组、400余幅插图结合简练的叙述，40多张表格列举简明的规范、过程及要点，280余段代码及算法配合详尽而简洁的注释，使深奥抽象的概念和过程得以具体化且便于理解和记忆；推荐20余册经典的专著与教材，提供40余篇重点的学术论文，便于读者进一步钻研和拓展。

结合学生基础、专业方向、教学目标及允许课时总量等各种因素，本书推荐了若干种典型教学进度及学时分配方案，供授课教师视具体情况参考和选用。

勘误表、插图、代码以及配套讲义等相关教学资料，均以电子版形式向公众开放，读者可从本书主页直接下载：<http://dsa.cs.tsinghua.edu.cn/~deng/ds/dsacpp/>

作者介绍



邓俊辉 清华大学计算机系副教授。1993年、1997年分别于清华大学计算机系获工学学士和工学博士学位。主要研究方向为科学计算可视化、计算几何及计算机图形学。长期承担清华大学计算机本科生专业基础课程“数据结构”和研究生基础理论课“计算几何”的教学工作，编著的《数据结构与算法（Java描述）》入选“北京市高等教育精品教材”，参与编著的《数据结构（用面向对象方法与C++语言描述）》入选“国家级高等教育精品教材”，曾获清华大学“青年教师教学优秀奖”、清华大学“教书育人奖”、清华大学“教学成果奖”二等奖、清华大学“教学成果奖”一等奖、中国高校科学技术奖二等奖、宝钢教育基金“宝钢教育奖”。

清华大学 计算机系列教材

邓俊辉 编著

数据结构习题解析

(第3版)



清华大学出版社

清华大学985名优教材立项资助

数据结构习题解析（C++语言版）

第 3 版

邓俊辉

清华大学出版社

2013年9月 · 北京

目录

第1章 绪论

1

[1-1]	2
[1-2]	2
[1-3]	4
[1-4]	4
[1-5]	5
[1-6]	5
[1-7]	6
[1-8]	7
[1-9]	7
[1-10]	7
[1-11]	7
[1-12]	8
[1-13]	10
[1-14]	10
[1-15]	11
[1-16]	12
[1-17]	12
[1-18]	13
[1-19]	13
[1-20]	14
[1-21]	15
[1-22]	16
[1-23]	17
[1-24]	18
[1-25]	19
[1-26]	21
[1-27]	22
[1-28]	22
[1-29]	23
[1-30]	23
[1-31]	24
[1-32]	24

第2章 向量

35

[2-1]	36
[2-2]	36
[2-3]	36
[2-4]	37
[2-5]	37
[2-6]	38
[2-7]	39
[2-8]	40
[2-9]	41
[2-10]	41
[2-11]	42
[2-12]	42
[2-13]	44
[2-14]	45
[2-15]	45
[2-16]	46
[2-17]	46
[2-18]	46
[2-19]	48
[2-20]	48
[2-21]	50
[2-22]	51
[2-23]	52
[2-24]	53
[2-25]	56
[2-26]	57
[2-27]	57
[2-28]	58
[2-29]	58
[2-30]	59
[2-31]	60
[2-32]	61

[2-33]	61
[2-34]	61
[2-35]	65
[2-36]	66
[2-37]	68
[2-38]	68
[2-39]	68
[2-40]	69
[2-41]	70

第3章 列表

73

[3-1]	74
[3-2]	74
[3-3]	74
[3-4]	75
[3-5]	75
[3-6]	76
[3-7]	76
[3-8]	77
[3-9]	77
[3-10]	78
[3-11]	79
[3-12]	79
[3-13]	81
[3-14]	81
[3-15]	83
[3-16]	84
[3-17]	84
[3-18]	84
[3-19]	86

第4章 栈与队列

87

[4-1]	88
[4-2]	89
[4-3]	89
[4-4]	91
[4-5]	91

[4-6]	92
[4-7]	92
[4-8]	93
[4-9]	93
[4-10]	95
[4-11]	95
[4-12]	96
[4-13]	97
[4-14]	97
[4-15]	99
[4-16]	99
[4-17]	99
[4-18]	100
[4-19]	100
[4-20]	101
[4-21]	101
[4-22]	101
[4-23]	102
[4-24]	102
[4-25]	102
[4-26]	102

第5章 二叉树

103

[5-1]	104
[5-2]	104
[5-3]	105
[5-4]	106
[5-5]	106
[5-6]	106
[5-7]	107
[5-8]	107
[5-9]	107
[5-10]	108
[5-11]	108
[5-12]	109
[5-13]	110
[5-14]	110

[5-15]	110
[5-16]	110
[5-17]	112
[5-18]	112
[5-19]	113
[5-20]	113
[5-21]	114
[5-22]	114
[5-23]	114
[5-24]	115
[5-25]	115
[5-26]	116
[5-27]	116
[5-28]	116
[5-29]	117
[5-30]	118

第6章 图

119

[6-1]	120
[6-2]	121
[6-3]	121
[6-4]	122
[6-5]	122
[6-6]	124
[6-7]	124
[6-8]	125
[6-9]	125
[6-10]	126
[6-11]	127
[6-12]	127
[6-13]	128
[6-14]	128
[6-15]	128
[6-16]	128
[6-17]	130
[6-18]	130
[6-19]	131

[6-20]	131
[6-21]	132
[6-22]	133
[6-23]	134
[6-24]	134
[6-25]	135
[6-26]	135
[6-27]	136
[6-28]	136
[6-29]	138
[6-30]	138
[6-31]	141
[6-32]	142

第7章 搜索树

145

[7-1]	146
[7-2]	146
[7-3]	146
[7-4]	147
[7-5]	147
[7-6]	148
[7-7]	148
[7-8]	148
[7-9]	148
[7-10]	149
[7-11]	150
[7-12]	150
[7-13]	150
[7-14]	151
[7-15]	151
[7-16]	152
[7-17]	153
[7-18]	154
[7-19]	154
[7-20]	155

第8章 高级搜索树

157

[8-1]	158
[8-2]	158
[8-3]	160
[8-4]	160
[8-5]	162
[8-6]	163
[8-7]	165
[8-8]	165
[8-9]	166
[8-10]	167
[8-11]	167
[8-12]	167
[8-13]	168
[8-14]	169
[8-15]	170
[8-16]	170
[8-17]	172
[8-18]	172
[8-19]	173
[8-20]	176

第9章 词典

179

[9-1]	180
[9-2]	180
[9-3]	180
[9-4]	181
[9-5]	181
[9-6]	182
[9-7]	183
[9-8]	183
[9-9]	183
[9-10]	183
[9-11]	184
[9-12]	184
[9-13]	184

[9-14]	184
[9-15]	185
[9-16]	186
[9-17]	186
[9-18]	188
[9-19]	189
[9-20]	189
[9-21]	190
[9-22]	190
[9-23]	190
[9-24]	192
[9-25]	192
[9-26]	193

第10章 优先级队列

195

[10-1]	196
[10-2]	196
[10-3]	197
[10-4]	197
[10-5]	198
[10-6]	199
[10-7]	199
[10-8]	199
[10-9]	200
[10-10]	200
[10-11]	200
[10-12]	201
[10-13]	201
[10-14]	201
[10-15]	201
[10-16]	202
[10-17]	202
[10-18]	204
[10-19]	206
[10-20]	207
[10-21]	208
[10-22]	210

第11章 串

211

[11-1]	212
[11-2]	212
[11-3]	212
[11-4]	214
[11-5]	214
[11-6]	214
[11-7]	215
[11-8]	217
[11-9]	217
[11-10]	218

第12章 排序

219

[12-1]	220
[12-2]	221
[12-3]	222
[12-4]	222
[12-5]	223

[12-6]	223
[12-7]	223
[12-8]	224
[12-9]	224
[12-10]	225
[12-11]	225
[12-12]	226
[12-13]	226
[12-14]	228

附录

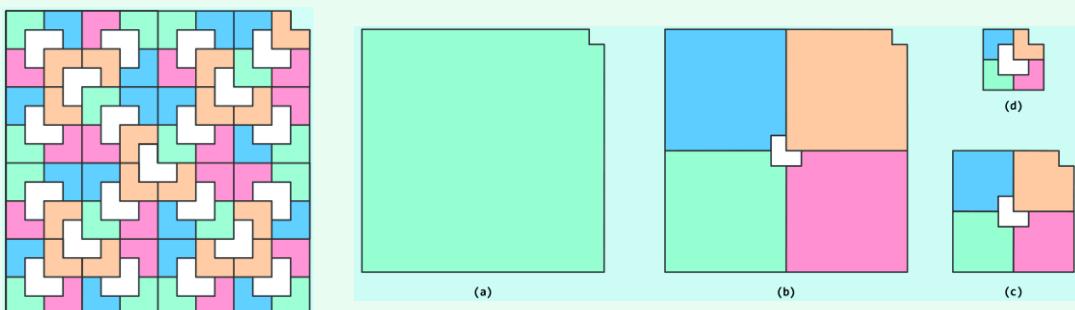
229

参考文献	230
插图索引	234
表格索引	237
算法索引	238
代码索引	239
关键词索引	241

第1章

绪论

[1-24] 如图x1.4所示，考查缺失右上角（面积为 $4^n - 1$ ）的 $2^n \times 2^n$ 棋盘， $n \geq 1$ 。



图x1.4 使用85块L形积木，可以恰好覆盖缺失一角的16×16棋盘

图x1.5 采用分治策略，将大棋盘的覆盖问题转化为四个小棋盘的覆盖问题

a) 试证明，使用由三个 1×1 正方形构成、面积为3的L形积木，可以恰好覆盖此类棋盘；

【解答】

将n称作此类棋盘的阶次，并对n做数学归纳。作为归纳基， $n = 1$ 时显然。

故假设阶次低于n的此类棋盘都可被L形积木覆盖，考查如图x1.5(a)所示的n阶棋盘。先将一块L形积木摆放至棋盘中心处，缺口方向与棋盘缺口一致。

于是如图(b)所示，棋盘的剩余部分可以划分为四个n - 1阶的棋盘。由归纳假设，它们均可被L形积木覆盖，故原n阶棋盘亦是如此。

b) 试给出一个算法，对于任意 $n \geq 1$ ，给出覆盖方案；

【解答】

参照以上归纳证明的思路，即可得出构造覆盖方案的如下递归算法。

```

1 // 覆盖基准点在(x, y)的n ≥ 1阶棋盘
2 // 四种缺口方向，由(dx, dy)指定：(+1, +1)东北、(+1, -1)东南、(-1, +1)西北、(-1, -1)西南
3 // 算法的起始调用入口为cover(n, 0, 0, 1, 1)：基准点在(0, 0)、缺口朝向东北的n阶棋盘
4 void cover(int n, int x, int y, int dx, int dy) {
5     int s = 1 << (n-1); //子棋盘的边长：2^(n-1)
6     place(x + dx * (s - 1), y + dy * (s - 1), dx, dy); //首先用一块L形积木覆盖中心
7     if (1 < n) { //只要棋盘仍未完全覆盖，则继续递归地覆盖四个子棋盘
8         cover(n - 1, x, y, -dx, -dy); //递归：覆盖西南方子棋盘
9         cover(n - 1, x + dx * s, y + dy * s, -dx, -dy); //递归：覆盖东北方子棋盘
10        cover(n - 1, x + dx * (2*s - 1), y, -dx, dy); //递归：覆盖东南方子棋盘
11        cover(n - 1, x, y + dy * (2*s - 1), dx, -dy); //递归：覆盖西北方子棋盘
12    }
13 }
```

算法x1.2 缺角棋盘的覆盖算法

有兴趣的读者，不妨尝试实现与该递归算法对应的迭代版本。

c) 该算法的时间复杂度是多少 ?

【解答】

以上算法的每一递归实例本身只需常数时间，根据算法流程可得如下递推式：

$$T(1) = O(1)$$

$$T(n) = 4 \cdot T(n - 1) + O(1)$$

两式联合求解，即得：

$$T(n) = O(4^n)$$

若以棋盘的边长 $N = 2^n$ (而非棋盘的阶次 n) 为依据，则有

$$T(N) = O(N^2)$$

若以棋盘的面积 $M = 4^n - 1$ 为依据，则有

$$T(M) = O(M)$$

也可从另一角度简便而精准地估计出本算法的时间复杂度。为此，需要注意到以下事实：

每个递归实例，都对应于覆盖方案中的某一块L形积木，反之亦然

这就意味着，递归实例的总数恰好等于所用L形积木的总数，后者恰为棋盘面积的三分之一，渐进地即是 $O(M)$ 。

[1-25] 《九章算术》记载的“中华更相减损术”可快速地计算正整数 a 和 b 的最大公约数，其过程如下：

- 1 令 $p = 1$
- 2 若 a 和 b 不都是偶数，则转5)
- 3 令 $p = p \times 2$, $a = a / 2$, $b = b / 2$
- 4 转2)
- 5 令 $t = |a - b|$
- 6 若 $t = 0$ ，则返回并输出 $a \times p$
- 7 若 t 为奇数，则转10)
- 8 令 $t = t / 2$
- 9 转7)
- 10 若 $a \geq b$ ，则令 $a = t$ ；否则，令 $b = t$
- 11 转5)

a) 按照上述流程，编写一个算法 `int gcd(int a, int b)`，计算 a 和 b 的最大公约数；

【解答】

运用“中华更相减损术”的最大公约数算法，可实现如代码 x1.14 所示。

```
1 __int64 gcdCN(__int64 a, __int64 b) { //assert: 0 < min(a, b)
2     int r = 0; //a和b的2^r形式的公因子
3     while (!(a & 1) || (b & 1))) { //若a和b都是偶数
4         a >>= 1; b >>= 1; r++; //则同时除2(右移)，并累加至r
5     } //以下，a和b至多其一为偶
```

```

6   while (1) {
7       while (!(a & 1)) a >>= 1; //若a偶( b奇 )，则剔除a的所有因子2
8       while (!(b & 1)) b >>= 1; //若b偶( a奇 )，则剔除b的所有因子2
9       (a > b) ? a = a - b : b = b - a; //简化为：gcd(max(a, b) - min(a, b), min(a, b))
10      if (0 == a) return b << r; //简化至平凡情况：gcd(0, b) = b
11      if (0 == b) return a << r; //简化至平凡情况：gcd(a, 0) = a
12  }
13 }
```

代码x1.14 运用“中华更相减损术”的最大公约数算法

b) 与功能相同的欧几里得算法相比，这一算法有何优势？

【解答】

不妨将两个算法分别简称作“中”和“欧”。

首先可以证明，算法“中”的渐进时间复杂度依然是 $\mathcal{O}(\log(a + b))$ 。

考查该算法的每一步迭代，紧接于两个内部**while**循环之后设置一个断点，观察此时的a和b。实际上，在a和b各自剔除了所有因子2之后，此时它们都将是奇数。接下来，无论二者大小如何，再经一次互减运算，它们必然将成为一奇一偶。比如，不失一般性地设 $a > b$ ，则得到：

$$\begin{array}{ll} a - b & (\text{偶}) \\ b & (\text{奇}) \end{array}$$

再经一步迭代并重新回到断点时，前者至多是：

$$(a - b)/2$$

两个变量之和至多是：

$$(a - b)/2 + b \leq (a + b)/2$$

可见，每经过一步迭代， $a + b$ 至少减少一半，故总体迭代步数不超过：

$$\log_2(a + b)$$

另外，尽管从计算流程来看，算法“中”的步骤似乎比算法“欧”更多，但前者仅涉及加减、位测试和移位（除2）运算，而不必做更复杂的乘除运算。因此，前者更适于在现代计算机上编程实现，而且实际的计算效率更高。

反之，无论是图灵机模型还是RAM模型^②，除法运算在底层都是通过减法实现的。因此，对于算法“欧”所谓的“除法加速”效果，不可过于乐观——而在输入整数大小悬殊时，尤其如此。

最后，较之算法“欧”，算法“中”更易于推广至多个整数的情况。

^② 关于这两种典型的计算模型的定义、性质及其关系，建议读者阅读文献[4]的第一章。

[1-26] 试设计并实现一个就地的算法 `shift(int A[], int n, int k)`，在 $O(n)$ 时间内将任一数组 $A[0, n)$ 中的元素整体循环左移 k 位。例如，数组 $A[] = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ 经 `shift(A, 6, 2)` 之后，有 $A[] = \{ 3, 4, 5, 6, 1, 2 \}$ 。（提示：利用教材 20 页代码 1.7 中 `reverse()` 算法）

【解答】

一个可行的算法，如代码 x1.15 所示。

```
1 int shift2(int* A, int n, int k) { //借助倒置算法，将数组循环左移k位，O(3n)
2     k %= n; //确保k <= n
3     reverse(A, k); //将区间A[0, k)倒置：O(3k/2)次操作
4     reverse(A + k, n - k); //将区间A[k, n)倒置：O(3(n - k)/2)次操作
5     reverse(A, n); //倒置整个数组A[0, n)：O(3n/2)次操作
6     return 3 * n; //返回累计操作次数，以便与其它算法比较：3/2 * (k + (n - k) + n) = 3n
7 }
```

代码 x1.15 借助 `reverse()` 算法在 $O(n)$ 时间内就地移位

若在原向量 V 中前 k 个元素组成的前缀为 L ，剩余的（后缀）部分为 R ，则如图 x1.6 所示，经整体左移之后的向量应为：

$$R + L$$

这里约定，任意向量 V 整体倒置后的结果记作 V' 。于是该算法的原理来自如下恒等式：

$$R + L = (L' + R')$$

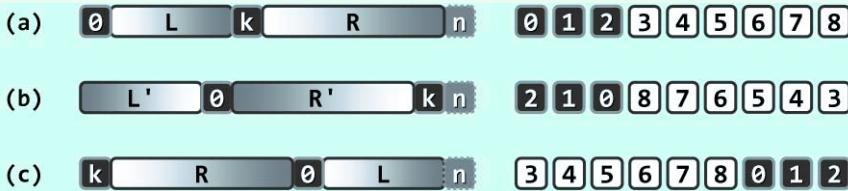


图 x1.6 借助 `reverse()` 算法在 $O(n)$ 时间内就地移位的过程及原理

该算法的运行时间主要消耗于元素的互换操作。在整个三轮兑换中，每个元素至多参与两次互换操作。通常，每一对元素的互换需要 3 次移动操作，因此移动操作的累计次数不超过：

$$n \times 2 \times 3 / 2 = 3n$$

该算法的其它版本有可能只需更少的交换操作，故单就此指标而言，似乎更加“优于”以上版本。然而就实际的计算效率而言，以上版本却要远远优于其它版本。

究其原因在于，`reverse()` 之类的操作所涉及的数据元素，在物理上是连续分布的，因此操作系统的缓存机制可以轻易地被激活，并充分发挥作用；其它版本的交换操作尽管可能更少，但数据元素在空间往往相距很远，甚至随机分布，缓存机制将几乎完全失效。

在实际的算法设计与编程中，这些方面也是首先必须考虑的因素；在当下，面对规模日益膨胀的大数据，这方面的技巧对算法的实际性能更是举足轻重。在教材的 8.2 等节，我们还将结合 B-树等数据结构，就此深入讨论。

[1-27] 试实现一个递归算法，对任意非负整数 m 和 n ，计算以下 Ackermann 函数值：

$$\text{Ackermann}(m, n) = \begin{cases} n + 1 & (\text{若 } m = 0) \\ \text{Ackermann}(m - 1, 1) & (\text{若 } m > 0 \text{ 且 } n = 0) \\ \text{Ackermann}(m - 1, \text{Ackermann}(m, n - 1)) & (\text{若 } m > 0 \text{ 且 } n > 0) \end{cases}$$

对于每一 (m, n) 组合，这个算法是否必然终止？

【解答】

以上定义本身就是递归式的，故不难将其转换为一个递归算法。请读者独立完成这一任务。

在可计算性理论中，Ackermann 函数是典型的非原始递归的递归函数。尽管其定义和计算过程较为复杂，依然可以证明其计算过程必然终止，故对任何 (m, n) 参数组合均有明确的定义。以下，可以采用超限数学归纳法（transfinite induction）来证明上述论断。

为此，我们首先需要在所有非负整数的组合 (m, n) 之间，定义如下次序：

对于任何 (m_1, n_1) 与 (m_2, n_2) ，若 $m_1 < m_2$ ，或者 $m_1 = m_2$ 且 $n_1 < n_2$ ，则称前者小于后者，记作 $(m_1, n_1) < (m_2, n_2)$

实际上，所有的 (m, n) 组合与平面上第一象限内的整点一一对应。不难看出，任何两个整点都可按照这一定义比较大小，故这是一个全序。更重要地，该整点集的任何一个子集，都有最小元素——即该子集中的最左最低点（leftmost-then-lower point）。其中特别地，全集的最小元素即为坐标原点 $(0, 0)$ 。因此，如上定义的次序 “ $<$ ”，的确是一个良序（well order）。

由定义，任意形如 $(0, n)$ 的输入都会立即终止——这可作为归纳基础。

作为归纳假设，不妨假定：对于任意小于 (m, n) 的输入，Ackermann 函数均能终止。现考查输入参数为 (m, n) 时，该函数的可终止性。

依然由定义可见，此时可能引发的递归实例无非三类：

$\text{Ackermann}(m - 1, 1)$
 $\text{Ackermann}(m - 1, *)$
 $\text{Ackermann}(m, n - 1)$

可见，根据如上约定的次序，其对应的参数组合均小于 (m, n) 。故由归纳假设，以此参数组合对该函数的调用，亦必然会终止。

[1-28] 考查所谓咖啡罐游戏（Coffee Can Game）：在咖啡罐中放有 n 颗黑豆与 m 颗白豆，每次取出两颗：若同色，则扔掉它们，然后放入一颗黑豆；若异色，则扔掉黑豆，放回白豆。

a) 试证明，该游戏必然终止（当罐中仅剩一颗豆子时）；

【解答】

尽管游戏的每一步都有（同色或异色）两个分支，但不难验证：无论如何，每经过一次迭代，罐中豆子的总数 $(n + m)$ 必然减一。因此就总体而言，罐中豆子的数目必然不断地单调递减，直至最终因不足两颗而终止。

b) 对于哪些(n , m)的组合 , 最后剩下的必是白豆 ?

【解答】

类似地, 尽管这里有两个分支, 但无论如何迭代, 罐中白色豆子总数 (m) 的奇偶性始终保持不变。因此若最终仅剩一颗白豆, 则意味着白色豆子始终都是奇数颗。反之, 只要初始时白豆共计奇数颗, 则最终剩余的也必然是一颗白豆。

[1-29] 序列 Hailstone(n)是从 n 开始, 按照以下规则依次生成的一组自然数 :

$$\text{Hailstone}(n) = \begin{cases} \{1\} & (\text{若 } n = 1) \\ \{n\} \cup \text{Hailstone}(n/2) & (\text{若 } n \text{ 为偶数}) \\ \{n\} \cup \text{Hailstone}(3n+1) & (\text{若 } n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

比如 :

Hailstone(7) = { 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 }

试编写一个非递归程序^③, 计算 Hailstone(n)的长度 $\text{hailstone}(n)$ 。

【解答】

由题中所给的定义, 可以直接导出该算法的递归实现。

该算法的一种可行的非递归实现方式, 则如代码x1.16所示。

```
1 template <typename T> struct Hailstone { //函数对象 : 按照Hailstone规则转化一个T类对象
2     virtual void operator()(T& e) { //假设T可直接做算术运算
3         int step = 0; //转换所需步数
4         while (1 != e) { //按奇、偶逐步转换, 直至为1
5             (e % 2) ? e = 3 * e + 1 : e /= 2;
6             step++;
7         }
8         e = step; //返回转换所经步数
9     }
10};
```

代码x1.16 计算Hailstone(n)序列长度的“算法”

正如教材中已经指出的, “序列Hailstone(n)长度必然有限”的结论至今尚未得到证明, 故以上程序未必总能终止, 因而仍不能称作是一个真正的算法。

[1-30] 在分析并界定其渐进复杂度时, 迭代式算法往往体现为级数求和的形式, 递归式算法则更多地体现为递推方程的形式。针对这两类主要的分析技巧, 参考文献[7]做了精辟的讲解和归纳。试研读其中的相关章节。

【解答】

请读者独立完成研读任务, 并根据自己的理解进行归纳总结。

^③ 据作者所知, “序列Hailstone(n)长度必然有限”的结论尚未得到证明, 故你编写的程序可能并非一个真正的算法。

[1-31] 试针对教材 20 页代码 1.7 中的 reverse() 算法和 21 页代码 1.8 中的 power2() 算法，运用递归跟踪法分析其时间复杂度。

【解答】

reverse() 算法的递归跟踪过程，如图 x1.7 所示。

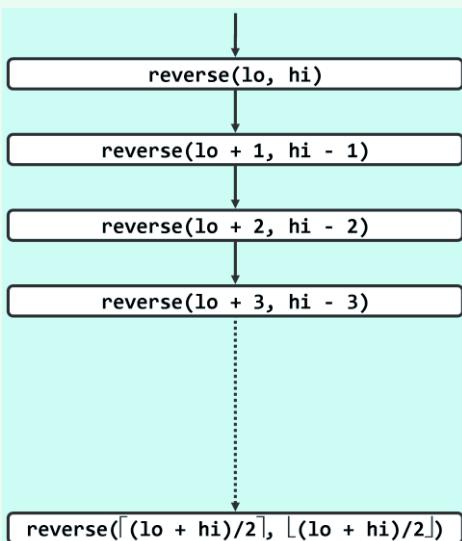


图 x1.7 reverse() 算法的递归跟踪

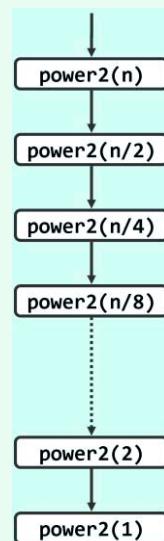


图 x1.8 power2() 算法的递归跟踪

从中可以清楚地看出，每递归深入一层，入口参数 lo 和 hi 之间的差距必然缩小 2，因此递归深度（亦即时间复杂度）为：

$$(hi - lo) / 2 = n/2 = O(n)$$

power2() 算法的递归跟踪过程，如图 x1.8 所示。

类似地也可看出，每递归深入一层，入口参数 n 即缩小一半，因此递归深度（亦即时间复杂度）应为：

$$\log_2 n = O(\log n)$$

若按教材中的定义，将参数 n 所对应二进制展开的宽度记作 $r = \log n$ ，则由图 x1.8 看出，每递归深入一层，r 都会减一，因此递归深度（亦即时间复杂度）应为：

$$O(r) = O(\log n)$$

这与上述分析殊途同归。

[1-32] 若假定机器字长无限，移位操作只需单位时间，递归不会溢出，且 rand() 为理想的随机数发生器。

试分析以下函数 F(n)，并以大 O 记号的形式确定其渐进复杂度的紧上界。

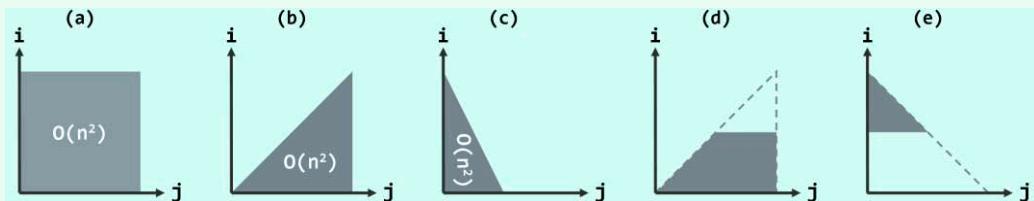
```
1 void F(int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < n; j++);
}
```

【解答】

这是最基本的二重循环模式，其特点是循环控制变量均按算术级数变化。内循环的每次迭代只需 $\mathcal{O}(1)$ 时间，故执行时间取决于总体的迭代次数。因外、内循环的范围分别是 $i \in [0, n]$ 和 $j \in [0, n]$ ，故累计迭代次数为：

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} n = n \times n = \mathcal{O}(n^2)$$

实际上在如图x1.9(a)所示的(i, j)坐标平面上，此二重循环的执行过程对应于匀速地自下而上、由左到右逐行扫过矩形 $[0, n] \times [0, n]$ 。因此，这一过程所需的时间也就对应于该矩形的面积，就渐进意义而言即是 $\mathcal{O}(n^2)$ 。



图x1.9 二重循环执行时间的对应图形

相对于以上严格的计算，基于这一图形式理解的估算不仅更加简捷，而且可以更好地体现通过大 \mathcal{O} 记号刻画渐进复杂度总体趋势的要义。而对于接下来更为复杂的情况，这种方法的上述优势则尤为突出。

```
2 void F(int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = i; j < n; j++);
}
```

【解答】

这也是一种典型的二重循环模式，循环控制变量仍然按算术级数变化。与上例相比，外循环的范围依然是 $i \in [0, n]$ ，但内循环的范围则变成 $j \in [i, n]$ ，故累计迭代次数为：

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) = \sum_{(k=n-i)=1}^n k = n(n+1)/2 = \mathcal{O}(n^2)$$

也可套用以上基于图形的估算方法，在如图x1.9(b)所示的(i, j)坐标平面上，此二重循环的执行过程对应于匀速地自下而上、由左到右逐行扫过三角形 $[0, n] \times [i, n]$ 。该三角形的面积大致为原矩形的一半——就渐进意义而言，时间复杂度依然是 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

```
3 void F(int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < i; j += 2013);
}
```

【解答】

这里，外循环的范围依然是 $i \in [0, n]$ ，但内循环控制变量 j 递增的步长改为 2013 ，对应的范围变成 $j * 2013 \in [0, i]$ 。

套用以上基于图形的估算方法，在如图x1.9(c)所示的(i, j)坐标平面上，此二重循环的执行过程对应于匀速地自下而上、由左到右逐行扫过一个三角形。该三角形的高仍保持为 n ，底边压缩了 2013 倍，故其面积大致为原矩形的 $1/2/2013 = 1/4026$ 倍——就渐进意义而言，时间复杂度依然是 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

```
4 void F(int n) {
    for (int i = 0; i < n/2; i++)
        for (int j = i; j < n; j++);
}
```

【解答】

这里，外循环和内循环的范围分别改为 $i \in [0, n/2]$ 和 $j \in [i, n]$ 。

依然沿用以上基于图形的估算方法，在如图x1.9(d)所示的(i, j)坐标平面上，此二重循环的执行过程对应于匀速地自下而上、由左到右逐行扫过一个梯形。该梯形的上底和下底分别长为 $n/2$ 和 n ，高度为 $n/2$ ，故其面积大致为原矩形的 $3/8$ 倍——就渐进意义而言，其时间复杂度依然是 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

```
5 void F(int n) {
    for (int i = n/2; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < n - i; j++);
}
```

【解答】

这里，外循环的范围改为 $i \in [n/2, n]$ ，内循环的范围是 $j \in [0, i]$ 。

依然沿用以上基于图形的估算方法，在如图x1.9(e)所示的(i, j)坐标平面上，此二重循环的执行过程对应于匀速地自下而上、由左到右逐行扫过一个小三角形。该三角形的底和高均为 $n/2$ ，故其面积大致为原矩形的 $1/8$ 倍——就渐进意义而言，其时间复杂度依然是 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

```
6 void F(int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 1; j < n; j <= 1);
}
```

【解答】

请注意，在此二重循环模式中，尽管外循环的控制变量*i*仍在[0, n)内按算术级数变化，但内循环的控制变量*j*在[1, n)内却是按（以2为倍数的）几何级数变化，故累计迭代次数为：

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(k=\log j)=0}^{\log n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} (\log n - 1) = n \log n - n = O(n \log n)$$

这里所采用的左移操作，不仅因为可以便捷地实现控制变量*j*的倍增，同时更为重要的是，这也为复杂度的快速估算提供了线索和依据。我们知道，任意正整数的二进制展开的宽度，与其数值呈对数关系。具体地，数值的加倍对应于其展开宽度加一，反之亦然。

从这一角度考查此处的内循环可见，随着*j*以2为倍数不断递增，*j*的二进制展开宽度将以1为步长不断递增。每一轮内循环的迭代次数既然等于*j*从1至n的倍增次数，也应该就是n的二进制展开宽度，即 $\log n$ 。因此，n轮内循环共计耗时 $O(n \log n)$ 。

```
7 void F(int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 1; j < 2013; j <= 1);
}
```

【解答】

此处内循环的控制变量*j*尽管也是按几何级数递增，但其变化范围固定在[1, 2013)内。因此每一轮内循环只做常数($\log 2013$)次的迭代。故总体时间复杂度仅取决于外循环，为 $O(n)$ 。

```
8 void F(int n) {
    for (int i = 1; i < n; i++)
        for (int j = 0; j < n; j += i);
}
```

【解答】

此处内循环的控制变量*j*尽管是在[0, n)内按算术级数递增，但步长并不固定。具体地，第*i*轮内循环采用的步长即为*i*，故需做 n/i 次迭代。于是，所有循环的累计迭代次数为：

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(k=\frac{j}{i})=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} = O(n \log n)$$

这里需要借助关于调和级数的以下性质：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \Theta\left(\frac{1}{2n}\right)$$

其中， $\gamma \approx 0.577216$ 为欧拉常数。

```
9 void F(int n) { for (int i = 0, j = 0; i < n; i += j, j++); }
```

【解答】

这里的变量*i*和*j*均从0开始不断递增，每经过一步迭代，*i*递增*j*，*j*递增1。

表x1.1 函数F(n)中变量i和j随迭代不断递增的过程

迭代次序t	0	1	2	3	4	...
变量i	0	0 + 0	0 + 0 + 1	0 + 0 + 1 + 2	0 + 0 + 1 + 2 + 3	...
变量j	0	1	2	3	4	...

具体地，这一过程可以归纳如表x1.1所示。故经过k次迭代后，必有：

$$i = \sum_{t=0}^{k-1} t = k(k-1)/2$$

在循环退出之前，必有：

$$i = k(k-1)/2 < n, \text{ 或等价地, } k < \frac{1 + \sqrt{1 + 8n}}{2}$$

故该函数的时间复杂度为 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 。

```
10 void F(int n) { for (int i = 1, r = 1; i < n; i <= r, r *= 2); }
```

【解答】

这里的变量*i*和*r*均从1开始不断递增，每经过一步迭代，*i*递增为*i*· 2^r ，*r*递增为 $2 \cdot r$ 。

表x1.2 函数F(n)中变量i和r随迭代不断递增的过程

迭代次序t	0	1	2	3	4	...
变量i	2^0	$2^{(0+1)}$	$2^{(0+1+2)}$	$2^{(0+1+2+4)}$	$2^{(0+1+2+4+8)}$...
变量r	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$...

具体地，这一过程可以归纳如表x1.2所示。故经过k次迭代后，必有

$$i = \prod_{t=0}^{k-1} 2^{\binom{2^t}{2^t}} = 2^{\sum_{t=0}^{k-1} 2^t} = 2^{\binom{2^k - 1}{2^k}}$$

在循环退出之前，必有

$$i = 2^{\binom{2^k - 1}{2^k}} < n$$

亦即

$$2^k - 1 < \log n$$

$$2^k \leq \log n$$

$$k \leq \log \log n$$

故该函数的时间复杂度为 $\mathcal{O}(\log \log n)$ 。

同样地，这里通过左移操作实现变量递增的方式，也为我们快捷地估算时间复杂度提供了新的视角和线索。从二进制展开的角度来看，变量*r*的展开宽度每次增加一位，而变量*i*则每次增加*r*位。也就是说，变量*i*的宽度将以（大致）加倍的指数速度膨胀，直至刚好超过 $\log n$ 。因此，总体的迭代次数应不超过 $\log n$ 的对数，亦即 $\mathcal{O}(\log \log n)$ 。

```
11 void F(int n) { for (int i = 1; i < n; i = 1 << i); }
```

【解答】

每经一次迭代，*i*即增长至 2^i 。设经过*k*次迭代之后，因*i* $\geq n$ 而退出迭代。

现颠倒原迭代的方向，其过程应等效于反复令 $n = \log_2 n$ ，并经*k*次迭代之后有 $n \leq 1$ 。由此可知，若对*n*反复取对数直至其不大于1，则*k*等于其间所做对数运算的次数，记作 $k = \log^* n$ ，读作“ \log -星-*n*”。

我们知道，指数函数增长的速度本来就很快，而按照 $i = 2^i$ 规律增长的速度更是极其地快。因此不难理解，作为反函数的 $T(n) = \mathcal{O}(\log^* n)$ 尽管依然是递增的，但增长的速度应极其地慢。

另一方面，既然此前习题[1-12]介绍的 $\mathcal{O}(\log \log n)$ 通常可以视作常数，则 $\mathcal{O}(\log^* n)$ 更应该可以。

不妨仍以人类目前所能感知的宇宙范围内，所有基本粒子的总数 $N = 10^{81} = 2^{270}$ 为例，不难验证有：

$$\log^* N < 5$$

```
12 int F(int n) { return (n > 0) ? G(G(n - 1)) : 0; }
    int G(int n) { return (n > 0) ? G(n - 1) + 2*n - 1 : 0; }
```

【解答】

首先，需要分析这两个函数的功能语义。不难验证， $G(n) = n^2$ 实现了整数的平方运算功能；相应地， $F(n) = ((n - 1)^2)^2 = (n - 1)^4$ 。

接下来为分析时间复杂度，这里及以下将 $F(n)$ 和 $G(n)$ 的时间复杂度分别记作 $f(n)$ 和 $g(n)$ 。

$G(n)$ 属于线性递归（linear recursion），其原理及计算过程实质上可以表示为：

$$n^2 = (2n - 1) + (2n - 3) + \dots + 5 + 3 + 1$$

也就是说，经递归*n*层计算前*n*个奇数的总和。因此，其运行时间为 $g(n) = \mathcal{O}(n)$ 。

请注意，这里的 $F()$ 并非递归函数，其本身只消耗 $\mathcal{O}(1)$ 时间。不过， $F(n)$ 会启动 $G()$ 的两次递归，入口参数分别为 $n - 1$ 和 $(n - 1)^2$ 。故综合而言，总体运行时间应为：

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathcal{O}(1) + g(n - 1) + g((n - 1)^2) \\ &= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(n - 1) + \mathcal{O}((n - 1)^2) \\ &= \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

需要强调的是，既然 $G((n - 1)^2)$ 的递归深度为 $(n - 1)^2$ ，故在实际运行时此类代码比较容易因递归过深而导致存储空间的溢出。

```
13 void F(int n) { for (int i = 1; i < n/G(i, 0); i ++); }
    int G(int n, int k) { return (n < 1) ? k : G(n - 2*k - 1, k + 1); }
```

【解答】

同样地，首先需要分析这两个函数的功能语义。不难验证， $G(n, 0) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ 实现了整数的开方运算功能；相应地， $F(n)$ 只不过是以1为步长，令变量*i*从1递增到 $n/\lceil \sqrt{n} \rceil$ 。

$G(n)$ 属于线性递归（linear recursion），其原理实质上与前一题相同，只不过计算过程相反——从1开始，依次从n中扣除各个奇数，直至n不再是正数。因此与前一题同理，共需递归 $\lceil \sqrt{n} \rceil$ 层，其运行时间亦为：

$$g(n) = O(\lceil \sqrt{n} \rceil)$$

这里的 $F()$ 本身只是一个基本的迭代，递增的控制变量*i*初始值为1。在迭代终止时，应有：

$$i \geq n/\lceil \sqrt{i} \rceil$$

亦即：

$$i = \Theta(n^{2/3})$$

需要特别留意的是，函数 $F()$ 中的循环每做一步迭代，都需要调用一次 $G(i, 0)$ 以核对终止条件。故综合而言，总体运行时间应为：

$$\begin{aligned} f(n) &= O(\sqrt{1}) + O(\sqrt{2}) + O(\sqrt{3}) + \dots + O(\sqrt{n^{2/3}}) \\ &= O\left(\int_0^{n^{2/3}} \sqrt{x} \right) \\ &= O(n) \end{aligned}$$

即便计入 $f()$ 自身所需的 $O(n^{1/3})$ 时间，已不足以影响这一结论。

在以上分析的基础上稍加体会即不难理解，对于函数 $F()$ 而言，循环的终止条件实际上完全取决于输入参数n——迭代过程等效于变量*i*从1逐步递增至 $n^{1/3}$ 。故就此问题而言，为提高算法的整体效率，应该直接估算出 $n^{1/3}$ ，然后将其作为越界点。为此，只需改写函数 $G(n)$ 并使之返回 $G(n) = n^{1/3}$ ，即可使得 $F()$ 仅需调用一次 $G()$ 。

实际上只要实现得法，具有以上新的操作语义的函数 $G(n)$ 只需运行 $O(n^{1/3})$ 时间。请读者根据提示，独立完成此项任务。

```
14 int F(int n) { return (n > 0) ? G(2, F(n - 1)) : 1; }
    int G(int n, int m) { return (m > 0) ? n + G(n, m - 1) : 0; }
```

【解答】

同样地，首先需要分析这两个函数的功能语义。不难验证有：

$G(n, m) = n * m$ ，实现了整数的乘法运算功能

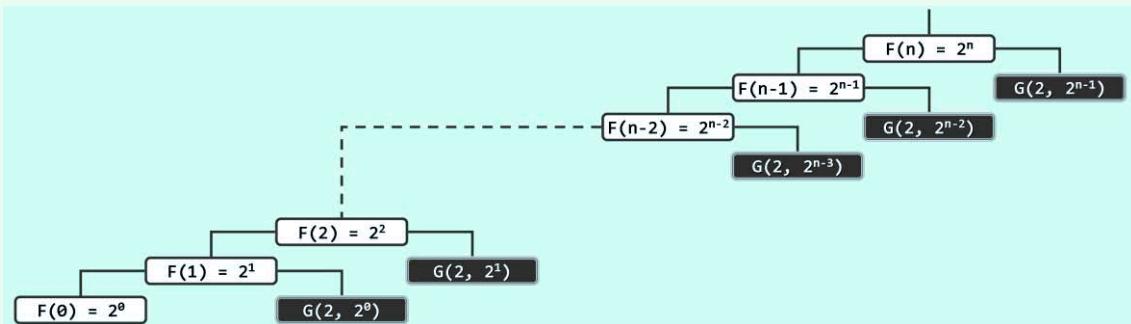
$F(n) = 2^n$ ，实现了2的整数次幂运算功能

接下来，分析这两个函数的时间复杂度。

$G(n, m)$ 的计算过程，实质上就是将n累加m次，故其运行时间为：

$$g(n, m) = O(m)$$

从 $F(n)$ 入口的递归跟踪过程，如图x1.10所示。



图x1.10 联合递归函数 $F(n)$ 和 $G(n)$ 的递归跟踪图

实质上该过程的功能就是，通过对 $G()$ 的 n 次调用，实现对 n 个2的累乘。其中，函数 $F()$ 共计出现过 $n + 1$ 个递归实例（在图中以白色矩形示意），各自需要 $\mathcal{O}(1)$ 时间。

在整个计算过程中，函数 $G()$ 的递归实例可以分为 n 组，各组的起始实例所对应的入口参数 m 依次从 2^{n-1} 开始不断折半，直至 $2^0 = 1$ 。这些起始实例，在图中以黑色矩形示意；为简洁起见，由其引发的后续实例则未予标出。

根据以上分析， $G()$ 属于单分支的线性递归，递归深度取决于入口参数 m 。因此，各组递归实例的数目也从 2^{n-1} 开始反复折半，直至最终的 $2^0 = 1$ 。根据几何级数的特性，其总和应与最高项渐进地同阶，为 $\mathcal{O}(2^n)$ 。

综合考虑 $F()$ 和 $G()$ 两类递归实例，总体时间复杂度取决于 $G()$ ，亦为 $\mathcal{O}(2^n)$ 。

也可采用递推方程法，来界定 $g()$ 和 $f()$ 。

首先考查 $g()$ 。根据以上分析，可以得出如下边界条件和递推关系：

$$g(n, 0) = \mathcal{O}(1)$$

$$g(n, m) = g(n, m - 1) + \mathcal{O}(1)$$

两式联合求解，即得：

$$g(n, m) = \mathcal{O}(m)$$

至于 $f()$ ，根据以上分析，也可以得出如下边界条件和递推关系：

$$f(0) = \mathcal{O}(1)$$

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n - 1) + g(2, 2^{n-1}) \\ &= f(n - 1) + \mathcal{O}(2^{n-1}) \end{aligned}$$

两式联合求解，即得：

$$f(n) = \mathcal{O}(2^n)$$

同样地请注意， $G()$ 最大的递归深度为 2^m 。这就意味着，递归深度将随着 m 的扩大急剧增加，故在实际运行时，此类代码极其容易因递归过深而导致存储空间的溢出。因此，在设计和实现算法时，应尽力避免这类形式的递归。

```
15 int F(int n) { return (n > 3) ? F(n >> 1) + F(n >> 2) : n; }
```

【解答】

该 $F(n)$ 函数属于典型的二分递归，以下采用递推方程法，对其做一分析。

根据该函数的定义，可以得出如下边界条件和递推关系：

$$\begin{aligned} f(0) &= f(1) = f(2) = f(3) = 1 \\ f(4) &= 3 \\ f(n) &= f(n/2) + f(n/4) + 1 \end{aligned}$$

若令

$$s(m) = f(2^m)$$

则以上方程可等价地转换为：

$$\begin{aligned} s(0) &= 1 \\ s(1) &= 1 \\ s(2) &= 3 \\ s(m) &= s(m - 1) + s(m - 2) + 1 \end{aligned}$$

再令

$$t(m) = (s(m) + 1)/2$$

则可进一步转换为：

$$\begin{aligned} t(0) &= 1 \\ t(1) &= 1 \\ t(2) &= 2 \\ t(m) &= t(m - 1) + t(m - 2) \end{aligned}$$

与 Fibonacci 数列做一对比，即可知有：

$$t(m) = \text{fib}(m + 1) = O(\Phi^m)$$

其中， $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618$

于是有：

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 \cdot t(\log n) - 1 \\ &= 2 \cdot O(\Phi^{\log n}) - 1 \\ &= O(\Phi^{\log n}) \\ &= O(n^{\log \Phi}) \\ &= O(n^{0.694}) \end{aligned}$$

饶有趣味的是，尽管该函数的形式属于二分递归，但经以上分析可见，其计算过程中出现的递归实例却远不足 $O(n)$ 个，其复杂度亦远低于线性。

从分治策略的角度看，该算法模式意味着，每个规模为 n 的问题，均可在 $O(1)$ 时间内分解为规模分别为 $n/2$ 和 $n/4$ 的两个子问题。实际上其复杂度之所以仅为 $O(n)$ ，关键在于两个子问题的规模总和 ($3n/4$) 已经严格地小于原问题的规模 (n)。

```
16 void F(int n) {
    for (int i = n; 0 < i; i --)
        if (!(rand() % i))
            for (int j = 0; j < n; j ++);
}
```

【解答】

这是一种典型的随机算法 (**randomized algorithm**) 模式，其中通过随机数 `rand()` 决定程序执行的去向，因此通常需要从概率期望的角度来界定其运行时间。

以下不妨基于随机均匀分布的假定条件（即 `rand()` 在整数范围内取任意值的概率均等），来分析该程序的平均运行时间。

这里的外循环共迭代 n 步。在每一步中，只有当随机数 `rand()` 整除外循环的控制变量 i 时，方可执行内循环。内循环的长度与变量 i 无关，共执行 n 步。若内循环执行，则其对总体时间复杂度的贡献即为 n ；否则，贡献为 0 。

既然假定属于均匀随机分布，故 `rand()` 能够整除变量 i 的概率应为 $1/i$ 。这就意味着，与每个变量 i 相对应的内循环被执行的概率为：

$$1/i$$

反过来，内循环不予执行的概率即为：

$$(i - 1)/i$$

故就概率期望的角度而言，对应于变量 i 的内循环平均迭代 n/i 步。

于是根据期望值的线性律 (**linearity of expectation**)，整个程序执行过程中内循环迭代步数的期望值，应该等于在每一步外循环中内循环迭代步数期望值的总和，亦即：

$$\begin{aligned} f(n) &= (1/n + 1/(n - 1) + \dots + 1/3 + 1/2 + 1) \times n \\ &= \text{expected-}\mathcal{O}(n\log n) \end{aligned}$$

这里同样需要借助关于调和级数的以下性质：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \Theta\left(\frac{1}{2n}\right)$$

其中， $\gamma \approx 0.577216$ 为欧拉常数。

即便再计入 n 步外循环本身所需的 $\mathcal{O}(n)$ 时间，总体的渐进复杂度亦是如此。

第2章

向量

[2-25] 对于几乎有序的向量，如教材代码 2.26 (60 页) 和代码 2.27 (60 页) 所示的起泡排序算法，都显得效率不足。

比如，即便乱序元素仅限于 $A[0, \sqrt{n}]$ 区间，最坏情况下仍需调用 `bubble()` 做 $\Omega(\sqrt{n})$ 次调用，共做 $\Omega(n)$ 次交换操作和 $\Omega(n^{3/2})$ 次比较操作，因此累计运行 $\Omega(n^{3/2})$ 时间。

a) 试改进原算法，使之在上述情况下仅需 $\mathcal{O}(n)$ 时间；

【解答】

可改进如代码x2.3和代码x2.4所示：

```
1 template <typename T> //向量的起泡排序
2 void Vector<T>::bubbleSort(Rank lo, Rank hi) //assert: 0 <= lo < hi <= size
3 { while (lo < (hi = bubble(lo, hi))); } //逐趟做扫描交换，直至全序
```

代码x2.3 向量的起泡排序（改进版）

```
1 template <typename T> Rank Vector<T>::bubble(Rank lo, Rank hi) { //一趟扫描交换
2     Rank last = lo; //最右侧的逆序对初始化为 [lo - 1, lo]
3     while (++lo < hi) //自左向右，逐一检查各对相邻元素
4         if (_elem[lo - 1] > _elem[lo]) { //若逆序，则
5             last = lo; //更新最右侧逆序对位置记录，并
6             swap(_elem[lo - 1], _elem[lo]); //通过交换使局部有序
7         }
8     return last; //返回最右侧的逆序对位置
9 }
```

代码x2.4 单趟扫描交换（改进版）

较之教材中的代码2.26和2.27，这里将逻辑型标志 `sorted` 改为秩 `last`，以记录各趟扫描交换所遇到的最后（最右）逆序元素。如此，在乱序元素仅限于 $A[0, \sqrt{n}]$ 区间时，仅需一趟扫描交换，即可将问题范围缩减至这一区间。累计耗时：

$$\mathcal{O}(n + (\sqrt{n})^2) = \mathcal{O}(n)$$

b) 继续改进，使之在如下情况下仅需 $\mathcal{O}(n)$ 时间：乱序元素仅限于 $A[n - \sqrt{n}, n]$ 区间；

【解答】

仿照a) 的思路与技巧，将扫描交换的方向调换为自后（右）向前（左），记录最前（最左）逆序元素。请读者独立完成这一改进。

c) 综合以上改进，使之在如下情况下仅需 $\mathcal{O}(n)$ 时间：乱序元素仅限于任意的 $A[m, m+\sqrt{n}]$ 区间。

【解答】

综合以上a) 和b) 的思路与技巧，方向交替地执行扫描交换，同时动态地记录和更新最左和最右的逆序元素。请读者独立完成这一改进。

[2-26] 根据教材 2.8.3 节所给递推关系以及边界条件试证明 ,如教材 62 页代码 2.28 所示 mergeSort() 算法的运行时间 $T(n) = \Theta(n \log n)$ 。

【解答】

教材中已针对该算法, 给出了如下边界条件及递推方程:

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 2 \times T(n/2) + \Theta(n) \end{aligned}$$

或等价地

$$T(n)/n = T(n/2)/(n/2) + \Theta(1)$$

以下若令:

$$S(n) = T(n)/n$$

则有:

$$\begin{aligned} S(1) &= \Theta(1) \\ S(n) &= S(n/2) + \Theta(1) \\ &= S(n/4) + \Theta(2) \\ &= \dots \\ &= S(n/2^k) + \Theta(k) \\ &= \Theta(\log n) \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned} T(n) &= n \cdot S(n) \\ &= \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

归并排序的边界条件及递推方程, 在算法复杂度分析中非常典型, 以上解法也极具有代表性。因此, 读者不妨记住这一递推模式, 并在今后作为基本结论直接应用。

[2-27] 如教材 62 页代码 2.28 所示 mergeSort() 算法, 即便在最好情况下依然需要 $\Omega(n \log n)$ 时间。

实际上略微修改这段代码, 即可使之在(子)序列业已有序时仅需线性时间。为此, mergeSort() 的每个递归实例仅需增加常数的时间, 且其它情况下的总体计算时间仍然保持 $\Theta(n \log n)$ 。

试给出你的改进方法, 并说明其原理。

【解答】

只需将原算法中的

```
merge(lo, mi, hi);
```

一句改为:

```
if (_elem[mi - 1] > _elem[mi]) merge(lo, mi, hi);
```

实际上按照原算法的流程, 在即将调用 `merge()` 接口对业已各自有序的向量区间 `[lo, mi]` 和 `[mi, hi]` 做二路归并之前, `_elem[mi - 1]` 即是前一 (左侧) 区间的末 (最靠右) 元素, 而 `_elem[mi]` 则是后一 (右侧) 区间的首 (最靠左) 元素。

于是，若属于本题所指（业已整体有序）的情况，则必有 $_elem[mi - 1] \leq _elem[mi]$ ；反之亦然。因此只需加入如上的比较判断，即可在这种情况下省略对`merge()`的调用。

不难看出，如此并不会增加该算法的渐进时间复杂度。

[2-28] 教材 63 页代码 2.29 中的二路归并算法 `merge()`，反复地通过 `new` 和 `delete` 操作申请和释放辅助空间。然而实验统计表明，这类操作的实际时间成本，大约是常规运算的 100 倍，故往往成为制约效率提高的瓶颈。

a) 试改写该算法，通过尽量减少此类操作，进一步优化整体效率；

【解答】

可以在算法启动时，统一申请一个足够大的缓冲区作为辅助向量`B[]`，并作为全局变量为所有递归实例公用；归并算法完成之后，再统一释放。

如此可以将动态空间申请的次数降至 $O(1)$ ，而不再与递归实例的总数 $O(n)$ 相关。当然，这样会在一定程度上降低代码的规范性和简洁性，代码调试的难度也会有所增加。

b) 试通过实测，对比并验证你的改进效果。

【解答】

请读者独立完成实验测试，并给出验证结论。

[2-29] 二路归并算法 `merge()`（教材 63 页代码 2.29）中的循环体内，两条并列语句的判断逻辑，并非完全对称。

a) 若将后一句中的“`C[k] < B[j]`”改为“`C[k] <= B[j]`”，对算法将有何影响？

【解答】

经如此调整之后，虽不致影响算法的正确性（仍可排序），但不再能够保证各趟二路归并的稳定性，整个归并排序算法的稳定性也因此不能保证。

原算法的控制逻辑可以保证稳定性。实际上，若两个子区间当前接受比较的元素分别为`B[j]`和`C[k]`，则唯有在前者严格大于后者时，才会将后者转移至`A[i++]`；反之，只要前者不大于后者（包含二者相等的情况），都会优先转移前者。由此可见，无论是子区间内部（相邻）的重复元素，还是子区间之间的重复元素，在归并之后依然能够保持其在原向量中的相对次序。

b) 若将前一句中的“`B[j] <= C[k]`”改为“`B[j] < C[k]`”，对算法将有何影响？

【解答】

当待归并的子向量之间有重复元素时，循环体内的两条处理语句均会失效，两个子向量的首元素都不会被转移，算法将在此处进入死循环。

c) 若同时做以上修改，对算法又将有何影响？

【解答】

不影响算法的正确性，仍可排序。然而每经过一趟归并，子向量之间的重复元素都会颠倒前后的次序，从而进一步地破坏整个归并排序算法的稳定性。

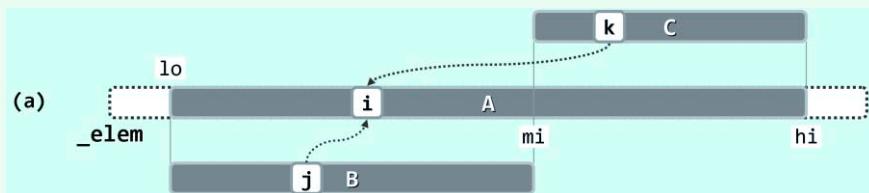
[2-30] 二路归并算法 `merge()` (教材 63 页代码 2.29) 中的循环体，虽然形式上简洁，但流程控制逻辑却较为复杂。

a) 试分情况验证并解释该算法的正确性；

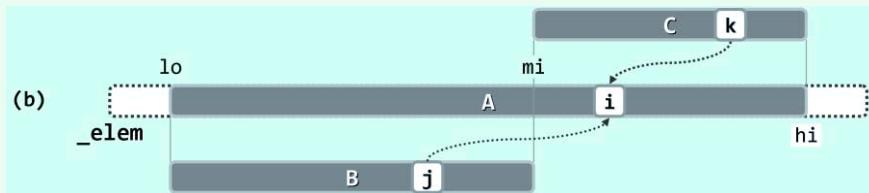
【解答】

这里之所以引入了较为复杂的控制逻辑，目的是为了统一对不同情况的处理。尽管如此可使代码在形式上更为简洁，但同时也会在一定程度上造成运行效率的下降。

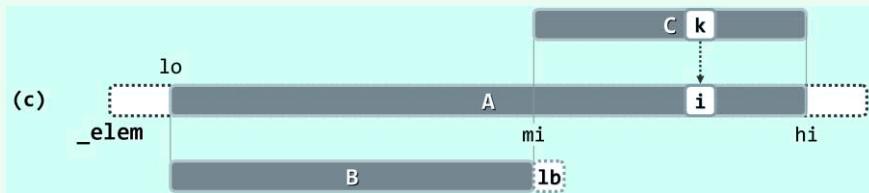
实际上，二路归并算法过程中可能出现的情况，如图x2.10至图x2.13所示无非四种。



图x2.10 B[]和C[]中的元素均未耗尽，且已转入A[]的元素总数i ≤ 1b



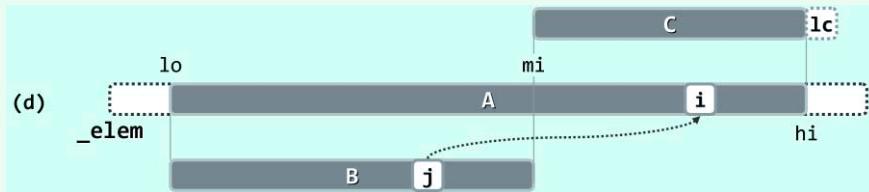
图x2.11 B[]和C[]中的元素均未耗尽，且已转入A[]的元素总数i > 1b



图x2.12 B[]中的元素先于C[]耗尽

就本章特定的二路归并而言，在情况(c)下C[]中剩余元素已不必移动。

此时，为更好地理解循环体内的控制逻辑 “ $1b \leq j \text{ || } (C[k] < B[j])$ ”，不妨假想地设置一个哨兵 $B[1b] = +\infty$ 。如此，“ $1b \leq j$ ”即可作为特殊情况归入 “ $C[k] < B[j]$ ”。



图x2.13 C[]中的元素先于B[]耗尽

类似地，此时为更好地理解循环体内的控制逻辑 “ $1c \leq k \text{ || } (B[j] \leq C[k])$ ”，不妨假想地设置一个哨兵 $C[1c] = +\infty$ ，即可将 “ $1c \leq k$ ” 作为特殊情况归入 “ $B[j] \leq C[k]$ ”。

b) 基于以上理解，该循环体可以如何简化？

【解答】

可以考虑精简为如下形式（为便于对比，这里插入了一些空格）：

```
for (Rank i = 0, j = 0, k = 0; j < 1b; ) { //将B[j]和C[k]中的小者续至A末尾
    if ( (k < 1c) && (C[k] < B[j]) ) A[i++] = C[k++];
    if ( (1c <= k) || (B[j] <= C[k]) ) A[i++] = B[j++];
}
```

代码x2.5 有序向量二路归并算法的简化

请读者对照以上所列各种情况独立验证，尽管这里交换了循环体内两句的次序，同时删除了一些判断条件，却并不影响该算法的正确性和稳定性。

c) 如果从代码可维护性及运行效率的角度出发，该算法应该如何实现？

【解答】

不难看出，上述四种情况的发生次序，必然首先是(a)，然后（可能会）经过(b)，最后以(c)或(d)结束。因此从代码可维护性及运行效率的角度出发，不妨将(a和b)与(c或d)分为两个阶段，分别处理。如此虽然会增加代码量，但因判断逻辑可以进一步精简，反而会在一定程度上提高运行效率。

[2-31] 找到 (v2.4 之前版本) Python 的 `bisect` 模块，阅读其中 `bisect_right()` 接口的实现代码。

a) 试以增加注释的形式，说明该接口的输入输出、功能语义、实现策略和算法实现；

【解答】

`bisect`模块增加注释之后的源代码，如代码x2.6所示：

```
def bisect_right(a, x, lo=0, hi=None): # 在有序向量区间a[lo, hi)中，采用二分策略查找x
    if hi is None: # hi未予明确指定时，默认值取作
        hi = len(a) # a的长度——因lo默认取作0，故默认时等效于对整个向量做查找
    while lo < hi: # 每步迭代仅需做一次比较判断，有两个分支
        mid = (lo+hi)//2 # 以中点为轴点
        if x < a[mid]: hi = mid # 经一比较后，若x小于轴点，则向左深入[lo, mi)
        else: lo = mid + 1 # 否则向右深入(mi, hi)
    return lo # lo为x在a[lo, hi)中适当的插入位置
```

代码x2.6 增加注释后，Python的bisect**模块中**bisect_right**接口的源代码**

需说明的是，出于效率的考虑，在Python v2.4之后版本中，该接口已改用C语言实现。

b) 就以上方面而言，该接口与本章向量的哪个接口基本类似？同时，又有什么区别？

【解答】

`bisect_right()`的功能语义、算法原理及流程，与`Vector::binsearch()`的版本C（教材56页代码2.24）几乎如出一辙。二者之间的差异无非在于，前者返回的秩比后者大一。

[2-32] 自学 C++ STL 中 vector 容器的使用方法，阅读对应的源代码。

【解答】

请读者独立完成相关代码的阅读和分析。

[2-33] 自学 Java 语言中的 `Java.util.ArrayList` 和 `java.util.Vector` 类，并阅读对应的源代码。

【解答】

请读者独立完成相关代码的阅读和分析任务。

[2-34] 位图 (Bitmap) 是一种特殊的序列结构，可用以动态地表示由一组 (无符号) 整数构成的集合。

其长度无限，且其中每个元素的取值均为布尔型 (初始均为 false)，支持的操作接口主要包括：

```
void set(int i); //将第i位置为true ( 将整数i加入当前集合 )
void clear(int i); //将第i位置为false ( 从当前集合中删除整数i )
bool test(int i); //测试第i位是否为true ( 判断整数i是否属于当前集合 )
```

a) 试给出 Bitmap 类的定义，并具体实现以上接口；

【解答】

一种可行的实现方式，如代码x2.7所示。

```
1 class Bitmap { //位图Bitmap类
2 private:
3     char* M; int N; //比特图所存放的空间M[]，容量为N*sizeof(char)*8比特
4 protected:
5     void init(int n) { M = new char[N = (n + 7) / 8]; memset(M, 0, N); }
6 public:
7     Bitmap(int n = 8) { init(n); } //按指定(或默认)规模创建比特图(为测试暂时选用较小的默认值)
8     Bitmap(char* file, int n = 8) //按指定(或默认)规模，从指定文件中读取比特图
9     { init(n); FILE* fp = fopen(file, "r"); fread(M, sizeof(char), N, fp); fclose(fp); }
10    ~Bitmap() { delete [] M; M = NULL; } //析构时释放比特图空间
11
12    void set (int k) { expand(k);         M[k >> 3] |=  (0x80 >> (k & 0x07)); } //插入
13    void clear(int k) { expand(k);        M[k >> 3] &= ~(0x80 >> (k & 0x07)); } //删除
14    bool test (int k) { expand(k); return M[k >> 3] &  (0x80 >> (k & 0x07)); } //测试
15
16    void dump (char* file) //将位图整体导出至指定的文件，以便对此后的新位图批量初始化
17    { FILE* fp = fopen(file, "w"); fwrite(M, sizeof(char), N, fp); fclose(fp); }
18    char* bits2string(int n) { //将前n位转换为字符串——
19        expand(n - 1); //此时可能被访问的最高位为bitmap[n - 1]
20        char* s = new char[n + 1]; s[n] = '\0'; //字符串所占空间，由上层调用者负责释放
21        for (int i = 0; i < n; i++) s[i] = test(i) ? '1' : '0';
22        return s; //返回字符串位置
23    }
```

```

24 void expand(int k) { //若被访问的Bitmap[k]已出界，则需扩容
25     if (k < 8 * N) return; //仍在界内，无需扩容
26     int oldN = N; char* oldM = M;
27     init(2 * k); //与向量类似，加倍策略
28     memcpy_s(M, N, oldM, oldN); delete [] oldM; //原数据转移至新空间
29 }
30 };

```

代码x2.7 位图Bitmap类

这里使用了一段动态申请的连续空间M[], 并依次将其中的各比特位与位图集合中的各整数一一对应：若集合中包含整数k，则该段空间中的第k个比特位为1；否则该比特位为0。

在实现上述一一对应关系时，这里借助了高效的整数移位和位运算。鉴于每个字节通常包含8个比特，故通过移位运算：

`k >> 3`

即可确定对应的比特位所属字节的秩；通过逻辑位与运算：

`k & 0x07`

即可确定该比特位在此字节中的位置；通过移位操作：

`0x80 >> (k & 0x07)`

即可得到该比特位在此字节中对应的数值掩码（mask）。

得益于这种简明的对应关系，只需在局部将此字节与上述掩码做逻辑或运算，即可将整数k所对应的比特位设置为1；将此字节与上述掩码做逻辑与运算，即可测试该比特位的状态；将此字节与上述掩码的反码做逻辑位与运算，即可将该比特位设置为0。

这里还提供了一个dump()接口，可以将位图整体导出至指定的文件，以便对此后的新位图批量初始化。例如在后面9.3节实现高效的散列表结构时，经常需要快速地找出不小于某一整数的最小素数。为此，可以借助Eratosthenes算法，事先以位图形式筛选出足够多个候选素数，并通过dump()接口将此集合保存至文件。此后在使用散列表时，可一次性地读入该文件，即可按照需要反复地快速确定合适的素数。

与可扩充向量一样，一旦即将发生溢出，这里将调用expand()接口扩容。可见，这里采用的也是“加倍”的扩容策略。

b) 试针对你的实现，分析各接口的时间和空间复杂度；

【解答】

根据以上分析，`set()`、`clear()`和`test()`等接口仅涉及常数次基本运算，故其时间复杂度均为 $O(1)$ 。可见，这种实现方式巧妙地发挥了向量之“循秩访问”方式的优势。

此外，相对于四则运算等常规运算，这里所涉及的整数移位和位运算更为高效，因此该数据结构实际的运行效率非常高，该结构也是一种典型的实用数据结构。

这里，位图向量所占的空间线性正比于集合的取值范围——在很多应用中，这一范围就是问题本身的规模，故通常不会导致渐进空间复杂度的增加。

c) 创建 Bitmap 对象时，如何节省下为初始化所有元素所需的时间？(提示：参考文献[4][9])

【解答】

首先考查简单的情况：位图结构只需提供`test()`和`set()`接口，暂且不需要`clear()`接口。针对此类需求，一种可行的方法大致如代码x2.8所示。

```

1 class Bitmap { //位图Bitmap类：以空间作为补偿，节省初始化时间（仅允许插入，不支持删除）
2 private:
3     Rank* F; Rank N; //规模为N的向量F，记录[k]被标记的次序（即其在栈T[]中的秩）
4     Rank* T; Rank top; //容量为N的栈T，记录被标记各位秩的栈，以及栈顶指针
5
6 protected:
7     inline bool valid(Rank r) { return (0 <= r) && (r < top); }
8
9 public:
10    Bitmap(Rank n = 8) //按指定（或默认）规模创建比特图（为测试暂时选用较小的默认值）
11    { N = n; F = new Rank[N]; T = new Rank[N]; top = 0; } //在O(1)时间内隐式地初始化
12    ~Bitmap() { delete [] F; delete [] T; } //析构时释放空间
13
14 // 接口
15    inline void set(Rank k) { //插入
16        if (test(k)) return; //忽略已带标记的位
17        F[k] = top++; T[ F[k] ] = k; //建立校验环
18    }
19    inline bool test(Rank k) //测试
20    { return valid(F[k]) && (k == T[ F[k] ]); }
21 };

```

代码x2.8 可快速初始化的Bitmap对象（仅支持set()操作）

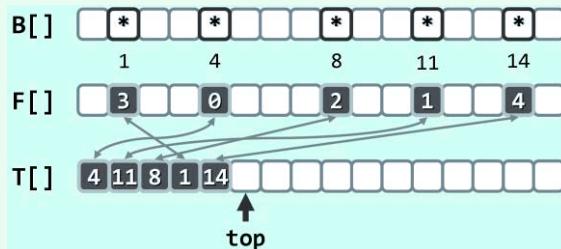
首先，将代码x2.7中`Bitmap`类的内部空间`M[]`，代替换为一对向量`F[]`和`T[]`，其中元素均为`Rank`类型，其规模`N`均与（逻辑上的）位图结构`B[]`相同。实际上，`T[]`的工作方式将等效于栈，栈顶由`top`指示，初始`top = 0`。

请注意，与代码x2.7的版本相比，这里对两个向量均未做显式的初始化。

此后，每当需要调用`set(k)`标记新的`B[k]`位时，即可将`k`压入栈`T[]`中，并将该元素（当前的顶元素）在栈中的秩存入`F[k]`。

如此产生的效果是，在`k`与`T[F[k]]`之间建立了一个校验环路。也就是说，当`F[k]`指向栈`T[]`中的某个有效元素（`valid(F[k])`），而且该元素`T[F[k]]`恰好就等于`k`时，在逻辑上必然等效于`B[k] = true`；更重要的是，反之亦然。因此如代码x2.8所示，`test(k)`接口只需判断以上两个条件是否同时成立。

经如此改造之后，位图结构的一个运转实例如图x2.14所示。



图x2.14 通过引入两个等长的向量，在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内初始化Bitmap对象

按以上方法，首先在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内对该位图结构做初始化。接下来，依次标记：

$B[4], B[11], B[8], B[1], B[14], \dots$

相应地依次压入栈 $T[]$ 中的分别是：

$T[0] = 4, T[1] = 11, T[2] = 8, T[3] = 1, T[4] = 14, \dots$

向量 $F[]$ 中依次存入的秩为：

$F[4] = 0, F[11] = 1, F[8] = 2, F[1] = 3, F[14] = 4, \dots$

不难看出，整个过程中，凡可通过`test(k)`逻辑的任何比特位 k ，均被标记过；反之亦然。

由上同时可见，经如上改造之后的`test()`和`set()`接口，各自仍然仅需 $\mathcal{O}(1)$ 时间。

当然，以上方法仅限于标记操作`set()`，尚不支持清除操作`clear()`。如需兼顾这两个接口，就必须有效地辨别两种无标记的位：从未标记过的，以及曾经一度被标记后来又被清除的。否则，每次为无标记的位增加标记时，若简单地套用目前的`set()`接口为其增加一个校验环，则栈 $T[]$ 的规模将线性正比于累积的操作次数，从而无法限制在 N 以内（尽管向量 $F[]$ 仍可以），整个结构的空间复杂度也将随着操作次数的增加严格单调的增加。

能够有效区分以上两种无标记位的一种`Bitmap`类，可实现如代码x2.9所示。

```

1 class Bitmap { //位图Bitmap类：以空间作为补偿，节省初始化时间（既允许插入，亦支持删除）
2 private:
3     Rank* F; Rank N; //规模为N的向量F，记录[k]被标记的次序（即其在栈T[]中的秩）
4     Rank* T; Rank top; //容量为N的栈T，记录被标记各位秩的栈，以及栈顶指针
5
6 protected:
7     inline bool valid(Rank r) { return (0 <= r) && (r < top); }
8     inline bool erased(Rank k) //判断[k]是否曾被标记过，且后来又被清除
9     { return valid(F[k]) && !(T[ F[k] ] + 1 + k); } //这里约定，此类[k]满足：T[ F[k] ] = -1 - k
10
11 public:
12     Bitmap(Rank n = 8) //按指定（或默认）规模创建比特图（为测试暂时选用较小的默认值）
13     { N = n; F = new Rank[N]; T = new Rank[N]; top = 0; } //在O(1)时间内隐式地初始化
14     ~Bitmap() { delete [] F; delete [] T; } //析构时释放空间

```

```

15
16 // 接口
17     inline void set(Rank k) { //插入
18         if (test(k)) return; //忽略已带标记的位
19         if (!erased(k)) F[k] = top++; //若系初次标记，则创建新校验环
20         T[ F[k] ] = k; //若系曾经标记后被清除，则恢复原校验环
21     }
22     inline void clear(Rank k) //删除
23     { if (test(k)) T[ F[k] ] = -1 - k; } //忽略不带标记的位
24     inline bool test(Rank k) //测试
25     { return valid(F[k]) && (k == T[ F[k] ]); }
26 };

```

代码x2.9 可快速初始化的Bitmap对象（兼顾set()和clear()操作）

这里的clear()接口并非简单地破坏原校验环，而是将T[F[k]]取负之后再减一。也就是说，可以在与正常校验环不相冲突的前提下，就地继续保留原校验环的信息。

基于这一约定，set(k)接口只需调用erase(k)，即可简明地判定[k]究竟属于哪种类型。若系从未标记过的，则按此前的方法新建一个校验环；否则可以直接恢复原先的校验环。

不难再次确认，在扩充后的版本中，各接口依然保持常数的时间复杂度。

最后，考查经改进之后Bitmap结构的空间复杂度。尽管表面上看，F[]和T[]的规模均不超过N，但这并不意味着整个结构所占空间的总量渐进不变。关键在于，两个向量的元素类型已不再是比特位或逻辑位，而是秩。二者的本质区别在于，前一类元素自身所占空间与整体规模无关，而后者有关。具体来说，这里Rank类型的取值必须足以涵盖Bitmap的规模；反之，可用Bitmap的最大规模也不能超越Rank类型的取值范围。比如，若Rank为四个字节的整数，则Bitmap的规模无法超过 $2^{31} - 1 = \mathcal{O}(10^9)$ ，否则Rank自身的字宽必须相应加大。所幸，目前的多数应用尚不致超越这个规模，因此仍可近似地认为以上改进版Bitmap具有线性的空间复杂度。

与之相关的另一问题是，目前的版本仍不支持动态扩容。我们将这一任务留给读者，并请读者对可扩容版Bitmap结构的空间、时间复杂度做一分析。

[2-35] 利用Bitmap类设计算法，在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内剔除n个ASCII字符中的重复字符，各字符仅保留一份。

【解答】

将非重复的ASCII字符视作一个集合，并将其组织为一个Bitmap结构——ASCII编码为k的字符，对应于其中第k个比特位。

初始时，该集合为空，Bitmap结构中的所有比特位均处于0状态。以下，只需在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内遍历所有的输入字符，并对ASCII编码为k的字符，通过set(k)接口将其加入集合。

请注意，这里使用的Bitmap结构只需128个比特位。因此，最后只需再花费 $\mathcal{O}(128) = \mathcal{O}(1)$ 时间遍历一趟所有的比特位，并输出所有通过test()测试的比特位，即可完成字符集的去重。

[2-36] 利用 Bitmap 类设计算法，快速地计算不大于 10^8 的所有素数。（提示：Eratosthenes 筛法）

【解答】

比如，可以采用Eratosthenes^④筛法。该算法一种可行的实现方式如代码x2.10所示。

```

1 #include "../Bitmap/Bitmap.h" //引入Bitmap结构
2
3 /*************************************************************************/
4 * 筛法求素数
5 * 计算出不大于n的所有素数
6 * 不计内循环，外循环自身每次仅一次加法、两次判断，累计O(n)
7 * 内循环每趟迭代O(n/i)步，由素数定理至多n/ln(n)趟，累计耗时不过
8 *      n/2 + n/3 + n/5 + n/7 + n/11 + ...
9 *      < n/2 + n/3 + n/4 + n/6 + n/7 + ... + n/(n/ln(n))
10 *     = O(n(ln(n/ln(n)) - 1))
11 *     = O(nln(n) - nln(ln(n)) - 1)
12 *     = O(nlog(n))
13 * 如下实现做了进一步优化，内循环从i * i而非i + i开始，迭代步数由O(n / i)降至O(max(1, n / i - i))
14 */
15 void Eratosthenes(int n, char* file) {
16     Bitmap B(n); B.set(0); B.set(1); //0和1都不是素数
17     for (int i = 2; i < n; i++) //反复地，从下一
18         if (!B.test(i)) //可认定的素数i起
19             for (int j = __min(i, 46340) * __min(i, 46340); j < n; j += i) //以i为间隔
20                 B.set(j); //将下一个数标记为合数
21     B.dump(file); //将所有整数的筛选标记统一存入指定文件，以便日后直接导入
22 }
```

代码x2.10 Eratosthenes素数筛选算法

这里的Bitmap结构B，相当于Eratosthenes的羊皮纸。初始时，（除0和1之外的）所有整数都有可能是素数，正如羊皮纸在开始前是完好无损的。

算法的主循环启动之后，将逐一检测各整数i（即与之对应的比特位[i]）。若当前的整数i已可被判定为合数（即B.test(i) = true，亦相当于羊皮纸上对应的方格已穿洞），则忽略之。否则，整数i应为素数，故须从2i开始以i为间隔，将后续所有形如j = ki ($k \geq 2$) 的整数j逐一标记为合数（即B.set(j)，亦相当于在羊皮纸上对应方格中穿孔）。

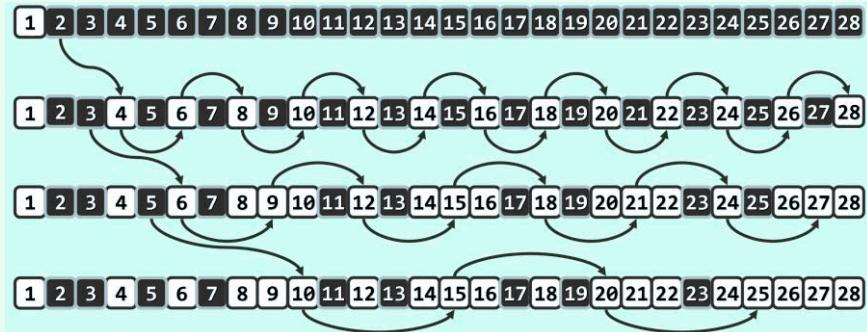
图x2.15逐行地依次给出了该算法在初始状态以及前三次迭代之后，Bitmap位图结构（Eratosthenes筛子）所对应的内部组成和状态。其中，白色的比特位（有穿孔的方格）所对应的整数已确认为合数；跨行的箭头联线，表示在确认了一个新的素数i之后，开始从2i开始筛

^④ Eratosthenes (276-194 B.C.)，埃拉托斯特尼，古希腊先哲。经纬坐标系的发明者。

其对地球半径简捷而精准地计算，也是封底估算方法的经典实例。

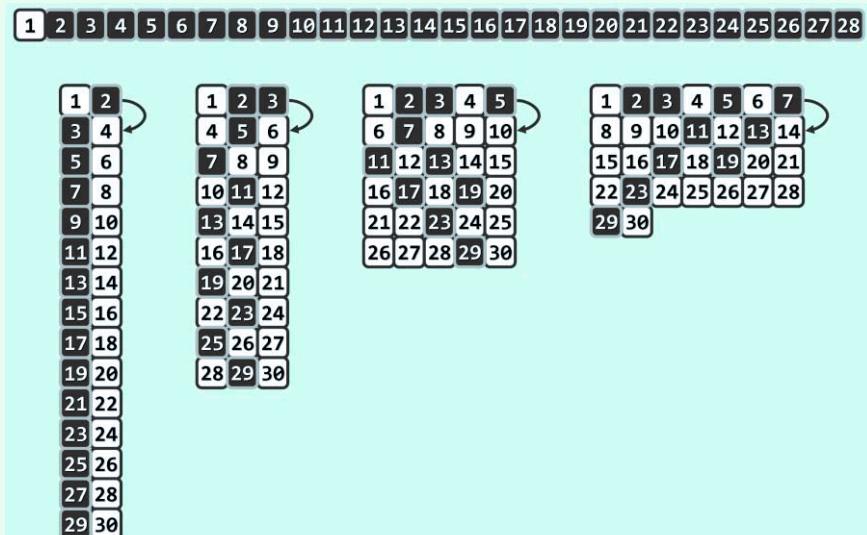
此处实现的算法也源自于他，并被形象地称作埃拉托斯特尼的筛子（the sieve of Eratosthenes）。

除其所有的整倍数；而同行内的箭头，则对应于逐个筛除其整倍数的过程。



图x2.15 Eratosthenes算法的实例

通过不断重排所有整数，我们可以更好地理解该算法的原理及过程。在算法确认了一个新的素数*i*之后，不妨将所有整数以*i*为单位顺次排成*i*列的矩阵（当然，应有无穷行）。如此，各次迭代所对应的重排结果应如图x2.16所示，依次为2列、3列、5列、7列、……。

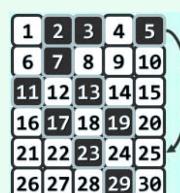


图x2.16 Eratosthenes算法：每次迭代中所筛除的整数，恰好就是重排矩形的最右侧一列。

该算法可在 $O(n \log n)$ 时间内计算出不超过n的所有素数，具体分析可参见代码所附注释。

实际上，这里所实现的版本已在以上思路的基础上做了改进（尽管不是渐进意义上的改进）。

不难发现，在从对应于素数*i*的重排矩阵中，筛除其最右侧一列时，完全可以直接从 i^2 （而不是 $2i$ ）出发。以*i = 5*为例，如图x2.17所示完全可以从25（而不是10）出发。实际上，该列中介于 $[2i, i^2)$ 之间的整数，均应该已经在此前的某次迭代中被筛除了。



图x2.17 Eratosthenes算法的改进

[2-37] 教材 12 页算法 1.3 中，在选出三个数之后还需对它们做排序。试证明：

a) 至多只需比对元素的大小三次，即可完成排序；

【解答】

首先，任取两个数并比较大小，记作 $a < b$ 。如此，整个数轴被分为三个区间：

$$(-\infty, a) \quad (a, b) \quad (b, +\infty)$$

此后，至多再做两次比较，即可确定第三个数落在其中哪个区间。

b) 在最坏情况下，的确至少需要比对元素的大小三次，才能完成排序。

【解答】

3 个数的排序结果，共有 $3! = 6$ 种。也就是说，该问题的任何一个算法所对应的比较树 (comparison tree) 中，至少应有 6 个叶节点，故树高不致低于：

$$\lceil \log_2 6 \rceil = 3$$

[2-38] 代数判定树 (algebraic decision tree, ADT) 是比较树的推广，其中的节点分别对应于根据某一代数表达式做出的判断。例如，比较树中各节点所对应的“ $a == b$ ”式判等以及“ $a < b$ ”式比较，均可统一为根据一次代数表达式“ $a - b$ ”取值符号的判断。

a) 对应于教材 2.7.4 节所列比较树的性质，代数判定树有哪些相仿的性质？

【解答】

与比较树类似地，代数判定树也具有如下性质：

- ① 每一内部节点各对应于一次（基于代数计算数值正负符号的）判定操作
- ② 内部节点的左、右分支，分别对应于在不同的数值符号下的执行方向
- ③ 叶节点（亦即，根到叶节点的路径）对应于算法某次执行的完整过程及输出
- ④ 反过来，算法的每一运行过程都对应于从根到某一叶节点的路径

b) 2.7.5 节中基于比较树模型的下界估计方法^{[27][28]}，可否推广至代数判定树？如何推广？

【解答】

完全可以推广。

需要特别注意的是，对一般代数式的求值本身未必仍然属于基本操作，故不见得可以在常数时间内完成。例如在高维空间中，为计算两个点之间的欧氏距离所需的时间应线性正比于空间的维度 d ，若不将 d 视作常数，则此时欧氏距离的计算即不属于基本操作。

因此在代数判定树中，应根据各节点所对应代数计算操作的复杂度，以根节点到叶节点通路的加权长度，来度量各种输出所对应的计算成本。

[2-39] 任给 12 个互异的整数，其中 10 个已组织为一个有序序列，现需要插入剩余的两个以完成整体排序。若采用 CBA 式算法，最坏情况下至少需做几次比较？为什么？

【解答】

对于该问题的任一算法，都可以将其中所有的分支描述为一棵代数判定树。根据排列组合中

基础知识，可能的输出数目应为：

前一整数可能的插入位置数 \times 后一整数可能的插入位置数 $= 11 \times 12 = 132$
这也是该判定树应含叶节点数目的下限。

于是对应地，判定树的高度应至少是：

$$\lceil \log_2 132 \rceil = 8$$

这也是此类算法在最坏情况下需做比较操作次数的下限。

[2-40] 经过至多 $(n - 1) + (n - 2) = 2n - 3$ 次比较，不难从任何存有 n 个整数的向量中找出最大者和次大者。试改进这一算法，使所需的比较次数（即便在最坏情况下）也不超过 $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 。

【解答】

可以采用分治策略，通过二分递归解决该问题。

算法的具体过程为：将原问题划分为两个子问题，分别对应于向量的前半部分和后半部分。以下，在递归地求解两个子问题（即找出两个子向量各自的最大和次大元素）后，只需两次比较操作，即可得到原问题的解（即确定整个向量中的最大和次大元素）。

实际上，若前一子向量中的最大、次大元素分别为 a_1 和 a_2 ，后一子向量中的最大、次大元素分别为 b_1 和 b_2 ，则全局的最大元素必然选自 a_1 和 b_1 之间。不失一般性地，设：

$$a_1 = \max(a_1, b_1)$$

于是全局的次大元素必然选自 a_2 和 b_1 ，亦即：

$$\max(a_2, b_1)$$

若将该算法的运行时间记作 $T(n)$ ，则根据以上分析，可得边界条件及递推方程如下：

$$T(2) = 1$$

$$T(n) = 2*T(n/2) + 2$$

若令：

$$S(n) = [T(n) + 2]/n$$

则有：

$$S(n) = S(n/2) = S(n/4) = \dots = S(2) = 3/2$$

故有：

$$T(n) = \lceil 3n/2 \rceil - 2$$

比如，若利用以上算法从任意8个整数中找出最大、次大元素，则即便是在最坏情况下，也只需 $T(8) = 10$ 次比较操作。

请注意，这里的关键性技巧在于，为合并子问题的解，可以仅需2次而不是3次比较操作。
否则，对应的递推关系应是：

$$T(n) = 2*T(n/2) + 3$$

解之即得：

$$T(n) = 2n - 3$$

仍以8个整数为例，在最坏情况下可能需要进行13次比较操作。

[2-41] 试证明，对于任一 $n \times m$ 的整数矩阵 M ，若首先对每一列分别排序，则继续对每一行分别排序后，其中的各列将依然有序（一个实例如图x2.18所示）。（提示：只需考查 $n = 2$ 的情况）

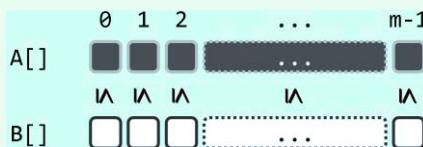
5	8	7	3	5	0	3	1	3	2	0	1	2	3	3
1	5	2	8	8	1	5	2	4	5	1	2	4	5	5
0	9	4	6	2	5	8	4	6	7	4	5	6	7	8
6	3	1	4	7	6	9	7	8	8	6	7	8	8	9

图x2.18 4×5的矩阵实例：经逐列排序再逐行排序后，每行、每列均各自有序

【解答】

因各行的排序独立进行，故只需证明以上命题对任意两行成立。

在已逐列排序的矩阵中，任取两行 $A[\theta, m)$ 和 $B[\theta, m)$ 。如图x2.19所示，不妨设 $A[]$ 位于 $B[]$ 之上方，于是在经逐列排序之后，对所有的 $\theta \leq k < m$ 均有 $A[k] \leq B[k]$ 成立。



图x2.19 只需考查沿纵向捉对有序的任意两行

以下将通过两种方法证明，在继而再做逐行排序之后，两行的元素沿纵向依然捉对有序。

【证法A】

不妨假想地采用起泡排序算法，同步地对各行实施排序。如此只需证明，该算法每向前迭代一步， A 和 B 中的元素沿纵向依次捉对的有序性，依然继续保持。



图x2.20 起泡排序的每一步，都是考查一对相邻元素

实际上如图x2.20所示，在每一步迭代中，该算法都仅逐行考查同一对相邻元素，比如：

$$A[k] = a \text{ 和 } A[k + 1] = x$$

$$B[k] = b \text{ 和 } B[k + 1] = y$$

不妨假设，在此之前已有：

$$a \leq b \text{ 和 } x \leq y$$

经过此步迭代之后，尽管 a 和 x 可能互换位置， b 和 y 也可能互换位置，但总体而言无非四种情况。其中，对于两行均无交换和同时交换的情况，命题显然成立。

第3章

列表

[3-1] 考查列表结构的查找操作。

- a) 试针对教材 72 页代码 3.5 中的 `List::find()`, 以及 78 页代码 3.17 中的 `List::search()`, 就其在最好、最坏和平均情况下的效率做一分析对比;

【解答】

二者的效率完全一致: 在最好情况下, 均只需 $\mathcal{O}(1)$ 时间; 在最坏情况下, 均需要 $\mathcal{O}(n)$ 时间; 平均而言, 二者均需 $\mathcal{O}(n)$ 时间。

b) 有序性对于列表查找操作效率的提高有多大作用?

【解答】

由上可见, 即便附加了有序性的条件, 列表的查找效率也不能有实质的提高。究其原因在于, 列表结构是通过位置来访问其中的元素——即“循位置访问”(`call-by-position`), 这与向量的“循秩访问”(`call-by-rank`)迥然不同。

[3-2] 考查如教材 73 页代码 3.7 和 74 页代码 3.8 所示的列表节点插入算法 `ListNode::insertAsPred()` 和 `ListNode::insertAsSucc()`。

- a) 在什么情况下, 新插入的节点既是首节点也是末节点?

【解答】

若将某元素插入当时为空的列表, 则插入之后列表仅含单个节点(列表规模为1), 该节点将同时扮演首节点和末节点的角色。

b) 此时, 这两种算法是否依然适用? 为什么? 试通过实测验证你的结论。

【解答】

教材所给的算法实现, 在以上特殊情况下依然可行, 能够顺利地完成插入操作。

之所以能够如此, 是得益于这里在内部统一设置的哨兵节点(`sentinel node`)。如此插入的新节点, 在列表内部居于头节点和尾节点之间。

[3-3] 考查如教材 75 页代码 3.11 所示的 `List::remove()` 算法。

当待删除的节点既是首节点也是末节点(即列表仅含单个节点)时, 该算法是否依然适用?

为什么?

【解答】

教材所给的算法实现, 在以上特殊情况下依然可行, 能够顺利地完成删除操作。

之所以能够如此, 也是得益于内部的哨兵节点。当最后一个节点被删除之后, 头节点和尾节点在列表内部彼此相邻, 互为前驱和后继。

[3-4] 考查如教材 76 页代码 3.14 所示的 `List::deduplicate()` 算法。**a) 给出其中循环体所具有的不变性，并通过数学归纳予以证明；****【解答】**

这里的不变性是：在迭代过程中的任意时刻，当前节点 p 的所有前驱互不相同。

算法启动之初， p 没有前驱，以上命题自然成立。

以下假定在当前迭代之后，不变性依然成立，考查随后的下一步迭代。

在此步迭代过程中，首先转至下一节点 p ，并通过 `find()` 接口，在其前驱中查找与之雷同者。既然此前不变性是满足的，则与 p 雷同的元素至多仅有一个。这个雷同元素 q 若果真存在，则必然会被找到，并随即通过 `remove(q)` 接口被剔除。于是无论如何，以上不变性必然再次成立。

因此根据数学归纳原理，这一不变性将始终保持，直至算法结束。那时， p 即是列表的尾哨兵元素，其余元素均为它的前驱，由不变性可知它们必然互异。由此可见，该算法是正确的。

b) 试举例说明，该算法在最好情况下仅需 $\mathcal{O}(n)$ 时间；**【解答】**

当所有元素均彼此雷同时，即属于该算法的最好情况。此时，`deduplicate()` 算法依然需要执行 $\mathcal{O}(n)$ 步迭代，但可以证明每一步只需 $\mathcal{O}(1)$ 时间。

实际上，根据以上所指出的不变性，当前节点 p 始终只有 1 个前驱（并且与之雷同）。因此，每步迭代中的 `find()` 操作仅需常数时间。

由此也可顺便得出最坏情况——所有元素彼此互异。在此种情况下，当前节点 p 的前驱数目（亦即各次 `find()` 操作所对应的时间）将随着迭代的推进线性地递增，平均为 $\mathcal{O}(n)$ ，算法总体的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

c) 试改进该算法，使其时间复杂度降至 $\mathcal{O}(n \log n)$ ；**【解答】**

最简明的一种改进方法是：首先调用 `sort()` 接口，借助高效的算法在 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间内将其转换为有序列表；进而调用 `uniquify()` 接口，在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内剔除所有雷同元素。

d) $\mathcal{O}(n \log n)$ 的效率是否还有改进的余地？为什么？**【解答】**

就最坏情况下复杂度的意义而言，以上方法已属最优。

为证明这一结论，只需构造一个从元素唯一性（Element Uniqueness）问题，到列表排序问题的线性归约。请读者仿照此前第 2 章习题 [2-12]，自行给出具体的构造方法。

[3-5] 试基于列表的遍历接口 `traverse()` 实现以下操作（假定数据对象类型支持算术运算）：**a) `increase()`：所有元素数值加一；****【解答】**

一种可行的实现方式，如代码 x3.1 所示。

```

1 template <typename T> struct Increase //函数对象：递增一个T类对象
2   { virtual void operator()(T& e) { e++; } }; //假设T可直接递增或已重载++
3
4 template <typename T> void increase(List<T> & L) //统一递增列表中的各元素
5 { L.traverse(Increase<T>()); } //以Increase<T>()为基本操作进行遍历

```

代码x3.1 基于遍历实现列表的increase()功能

与教材代码2.16中向量increase()接口的实现方式同理，这里也是将同一名为Increase()的函数对象作为基本操作，并通过遍历接口对列表的所有元素逐一处理。

b) half()：所有元素数值减半。

【解答】

一种可行的实现方式，如代码x3.2所示。

```

1 template <typename T> struct Half //函数对象：减半一个T类对象
2   { virtual void operator()(T& e) { e /= 2; } }; //假设T可直接减半
3
4 template <typename T> void half(List<T> & L) //统一减半列表中的各元素
5 { L.traverse(Half<T>()); } //以Half<T>()为基本操作进行遍历

```

代码x3.2 基于遍历实现列表的half()功能

与以上Increase的实现方式相仿，这里的键依然在于定义一个名为Half的函数对象。

[3-6] 对数据结构的操作，往往都集中于数据元素的一个较小子集。因此对列表而言，若能将每次被访问的节点及时转移至查找长度更短的前端，则整体效率必将大为提高。这种能够自适应调整的列表，即所谓的自调整列表（self-adjusting list）。

试通过改造本章的List模板类，实现自适应列表结构。

【解答】

读者可以按照以下操作准则，独立完成改进：

- 1) 新元素总是作为首节点被插入；
- 2) 已有的元素一旦接受访问，也随即将其转移至最前端（作为首元素）。

通常的应用环境都具有较强甚至极强的数据局部性（**data locality**）——在其生命周期的某一区间内，对列表结构的访问往往集中甚至限定于某一特定的元素子集。引入以上策略之后，子集中元素所对应的节点，很快会“自适应地”集中至列表的前端。在此后相当长的一段时间内，其余的元素几乎可以忽略。于是，在此期间此类列表的访问效率，将主要取决于该子集（而非整个全集）的规模，因此上述改进的实际效果非常好（参见教材8.1.1节）。

[3-7] 自学C++ STL中list容器的使用方法，阅读对应的源代码。

【解答】

请读者独立完成阅读任务。

[3-8] 考查插入排序算法。

a) 仿照教材 80 页代码 3.19 , 针对向量实现插入排序算法 `Vector::insertionSort()` ;

【解答】

请读者独立完成算法的设计与实现任务。

b) 你实现的插入排序算法是稳定的吗 ? 为什么 ?

【解答】

请读者根据具体的实现方法, 给出分析及结论。

[3-9] 考查选择排序算法。

a) 仿照教材 81 页代码 3.20 , 试针对向量结构实现选择排序算法 `Vector::selectionSort()` ;

【解答】

一种可行的实现方式, 如代码x3.3所示。

```
1 template <typename T> //向量选择排序
2 void Vector<T>::selectionSort(Rank lo, Rank hi) { //assert: 0 < lo <= hi <= size
3     while (lo < --hi)
4         swap(_elem[max(lo, hi)], _elem[hi]); //将[hi]与[lo, hi]中的最大者交换
5 }
6
7 template <typename T>
8 Rank Vector<T>::max(Rank lo, Rank hi) { //在[lo, hi]内找出最大者
9     Rank mx = hi;
10    while (lo < hi--) //逆向扫描
11        if (_elem[hi] > _elem[mx]) //且严格比较
12            mx = hi; //故能在max有多个时保证后者优先, 进而保证selectionSort稳定
13    return mx;
14 }
```

代码x3.3 向量的选择排序算法

b) 你实现的选择排序算法是稳定的吗 ? 为什么 ?

【解答】

是稳定的。

这里在未排序子向量中查找最大元素时, 总是自后向前地逆向扫描; 相应地, 唯有遇到严格更大的元素时, 才更新最大元素的记录。如此, 即便最大元素有重复的多个, 每次都必定会选中其中最靠后者(并进而将其转移至已排序子向量)。于是, 每一组重复的元素, 都将按照其在原向量中的相对位置依次转移, 从而最终保持它们之间的相对位置。

[3-10] 假定序列中 n 个元素的数值为独立均匀地随机分布，试证明：

a) 列表的插入排序算法平均需做约 $n^2/4 = \Theta(n^2)$ 次元素比较操作；

【解答】

首先，平均意义下的比较操作次数，也就是概率意义下比较操作的期望次数。

该算法共需执行 $\Theta(n)$ 步迭代，故根据期望值的线性律（linearity of expectation），比较操作总次数的期望值，应该等于各步迭代中比较操作次数的期望值之和。

该算法中的比较操作，主要消耗于对有序子列表的 `search()` 查找过程。

由3.4.2节的分析结论，`search()` 接口具有线性的平均复杂度。这就意味着，各步迭代内的 `search()` 过程所涉及的比较操作次数，应从 0 到 $n - 1$ 按算术级数线性递增，故其总和应为：

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k/2) = n \cdot (n - 1)/4 = \Theta(n^2)$$

b) 向量的插入排序算法平均需做约 $n^2/4 = \Theta(n^2)$ 次元素移动操作；

【解答】

与列表不同，向量的插入排序中 `search()` 查找接口可以采用二分查找之类的算法，从而使其复杂度从线性降低至 $\Theta(\log n)$ 。

然而另一方面，在确定适当位置之后为将新元素插入已排序的子序列，尽管列表只需 $\Theta(1)$ 时间，但向量在最坏情况下我们不得移动 $\Theta(n)$ 个节点，而且平均而言亦是如此。故与 a) 同理，总体而言，平均共需执行 $\Theta(n^2)$ 次元素移动操作。

由这个例子，可清楚地看出两种数据访问方式各自的长处：循秩访问的方式更适宜于静态的查找操作，但在频繁动态修改的场合却显得效率低下；循位置访问的方式更适宜于动态修改，却不能高效地支持静态查找。

向量结构与列表结构所呈现的这种对称性，既非常有趣，更耐人寻味。

c) 序列的插入排序算法过程中平均有 $\Theta(\log n)$ 个元素无需移动。

【解答】

同样地，既然该算法由多步迭代构成，故其间无需移动的元素的期望数目，就应该等于各步迭代中，待插入元素无需移动的概率总和。

根据该算法的原理，对于任意 $k \in [0, n)$ ，在第 k 步迭代启动之初，当前元素 $A[k]$ 的 k 个前驱应该业已构成一个有序的子序列 $A[0, k]$ 。不难看出，若 $A[k]$ 无需移动即使得 $A[0, k]$ 仍为有序子序列，则其充要条件是， $A[k]$ 在 $A[0, k]$ 中为最大元素。

既然假定所有元素都符合独立且均匀的随机分布，故作为前 $k + 1$ 个输入元素中的普通一员， $A[k]$ 在其中为最大元素的概率应与其它元素均等，都是 $1/(k + 1)$ 。于是，这一概率的总和即为：

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1/(k + 1) = \sum_{k=1}^n 1/k = \Theta(\log n)$$

[3-11] 序列中元素 $A[i]$ 和 $A[j]$ 若满足 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$ ，则称之为一个逆序对（inversion）。

考查如教材 80 页代码 3.19 所示的插入排序算法 `List::insertionSort()`，试证明：

a) 若所有逆序对的间距均不超过 k ，则运行时间为 $O(kn)$ ；

【解答】

算法进入到 $A[j]$ 所对应的那步迭代时，该元素（在输入序列中）的所有前驱应该业已构成一个有序子序列 $A[0, j]$ 。既然其中至多只有 k 个元素与 $A[j]$ 构成逆序对，故查找过程 `search()` 至多扫描其中的 k 个元素，即可确定适当的插入位置，对应的时间不超过 $O(k)$ 。

实际上，每一步迭代均具有如上性质，故累计运行时间不超过 $O(kn)$ 。

在教材 12.3 节对希尔排序高效性的论证中，这一结论将至关重要。

b) 特别地，当 k 为常数时，插入排序可在线性时间内完成；

【解答】

这也就是 a) 中结论的一个自然推论。

c) 若共有 I 个逆序对，则关键码比较的次数不超过 $O(I)$ ；

【解答】

这里定义的每一逆序对，均涉及两个元素。为便于分析，这里约定将其计入后者的“账”上。因此，所有元素的逆序前驱的数目总和，应恰好等于 I 。

将 a) 中的分析方法作一般化推广，即不难看出：每个元素所涉及比较操作的次数，应恰好等于其逆序前驱的数目；整个算法过程中所执行的比较操作的总数，应恰好等于所有元素的逆序前驱的数目总和，亦即 I 。

d) 若共有 I 个逆序对，则运行时间为 $O(n + I)$ 。

【解答】

由以上分析，算法过程中消耗于比较操作的时间可由 $O(I)$ 界定，而消耗于移动操作的时间可由 $O(n)$ 界定，二者累计即为 $O(n + I)$ 。

既然此处实际的运行时间更多地取决于逆序对的数目，而不仅仅是输入序列的长度，故插入排序亦属于所谓输入敏感的（`input sensitive`）算法。

实际上更为精确地，每步迭代中的查找都是以失败告终——或者找到不大于当前元素者，或者抵达 $A[-1]$ 越界。若将这两类操作也归入比较操作的范畴，则还有一个 $O(n)$ 项。好在就渐进意义而言，这一因素可以忽略。

79

[3-12] 如教材 80 页代码 3.19 所示，考查插入排序算法 `List::insertionSort()`。

a) 若输入列表为 { 61, 60, 59, ..., 5, 4, 3, 2, 0, 1, 2 }，则共需要做多少次关键码比较？

【解答】

这里的关键在于，如何统计出查找过程 `search()`（教材 78 页代码 3.17）在该算法各步迭代中所执行的比较操作次数。

具体如表x3.1所示，列表结构中的头、尾哨兵，分别等效于元素 $-\infty$ 和 $+\infty$ ；已排序的子序列，用阴影表示；在当前迭代步经查找并归入排序子序列的元素，用方框注明。

就此例而言，共计63个元素，故对应于63步迭代，依次从0至62编号，各对应于一行。

表x3.1 列表{ 61, 60, 59, ..., 5, 4, 3, 2, 0, 1, 2 }的插入排序过程

迭代 编号	列表元素													比较 次数		
0	$-\infty$	61	60	59	58	...	5	4	3	2	0	1	2	$+\infty$	1	
1	$-\infty$	60	61	59	58	...	5	4	3	2	0	1	2	$+\infty$	2	
2	$-\infty$	59	60	61	58	...	5	4	3	2	0	1	2	$+\infty$	3	
3	$-\infty$	58	59	60	61	...	5	4	3	2	0	1	2	$+\infty$	4	
...	$-\infty$								$+\infty$...
56	$-\infty$	5	6	7	8	...	61	4	3	2	0	1	2	$+\infty$	57	
57	$-\infty$	4	5	6	7	...	60	61	3	2	0	1	2	$+\infty$	58	
58	$-\infty$	3	4	5	6	...	59	60	61	2	0	1	2	$+\infty$	59	
59	$-\infty$	2	3	4	5	...	58	59	60	61	0	1	2	$+\infty$	60	
60	$-\infty$	0	2	3	4	...	57	58	59	60	61	1	2	$+\infty$	61	
61	$-\infty$	0	1	2	3	...	56	57	58	59	60	61	2	$+\infty$	61	
62	$-\infty$	0	1	2	2	...	55	56	57	58	59	60	61	$+\infty$	60	

由该表可以看出，第0步迭代经过一次（当前元素61与头哨兵 $-\infty$ 的）比较，即可确定其适当的插入位置——当然，此步的插入操作其实可以省略，但为简化控制逻辑，算法中不妨统一处理。实际上，从第0步至第60步迭代所插入的元素，在当时都是最小的，故每一查找过程search()都会终止于头哨兵 $-\infty$ ，而新元素都会被转移至最前端作为首元素。由此可见，这些迭代步所对应的比较次数，应从1至61逐步递增。

最后两步迭代原理一样，但过程与结果略有区别。第61步迭代中的查找过程search()需做61次比较，最后终止于节点0。第62步迭代中的查找过程search()需做60次比较，最后终止于节点2。请特别留意，最后一步迭代对两个雷同元素2的处理方式——既然search()算法是稳定的，故后一元素2应被插入于前一元素2之后。

累计以上各步迭代，比较操作的总次数应为：

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 60 + 61) + 61 + 60 = 2012$$

利用此前“插入排序算法复杂度主要取决于逆序对总数”的结论，也可得到同一结果。诚如前言，我们不难验证：以上各步迭代中所做比较操作的次数，恰好就是（在输入序列中）与当前元素构成逆序对的前驱总数。具体地，对于前61个元素：

$$\{ 61, 60, 59, \dots, 3, 2, 0 \}$$

而言，逆序前驱数依次为：

$$\{ 0, 1, 2, \dots, 58, 59, 60 \}$$

第4章

栈与队列

[4-1] a) 试基于 3.2.2 节的列表模板类 `List`，实现栈结构；

【解答】

仿照教材中由 `Vector` 类派生 `Stack` 类的方法，也可如代码 x4.1 所示由 `List` 类派生 `Stack` 类。

```

1 #include "../List/List.h" //以列表为基类，派生出栈模板类
2 template <typename T> class Stack: public List<T> { //将列表的首/末端作为栈顶/底
3 public: //size()、empty()以及其它开放接口，均可直接沿用
4     void push(T const& e) { insertAsLast(e); } //入栈：等效于将新元素作为列表的首元素插入
5     T pop() { return remove(last()); } //出栈：等效于删除列表的首元素
6     T& top() { return last()->data; } //取顶：直接返回列表的首元素
7 };

```

代码x4.1 由List类派生Stack类

这里直接将列表结构视作栈结构，并借助 `List` 类已有的操作接口，实现 `Stack` 类所需的操作接口。具体地，列表的头部对应于栈底，尾部对应于栈顶。于是，栈顶元素总是与列表的末节点相对应；为将某个元素压入栈中，只需将其作为末节点加至列表尾部；反之，为弹出栈顶元素，只需删除末节点，并返回其中存放的元素。

请注意，这里还同时默认地继承了 `List` 类的其它开放接口，但它们的语义与 `Vector` 类所提供的同名操作接口可能不尽相同。比如查找操作，`List::find()` 通过返回值（位置）为 `NULL` 来表示查找失败，而 `Vector()` 则是通过返回值（秩）小于零来表示查找失败。因此在同时还使用了这些接口的算法中，需要相应地就此调整代码实现。

比如，在基于栈结构实现的八皇后算法 `placeQueens()`（教材 101 页代码 4.9）中，（局部）解存放于栈 `solu` 中，一旦经过 `solu.find(q)` 操作确认没有冲突，即加入一个皇后。教材中所实现版本中的栈结构派生自 `Vector` 类，故可通过检查 `find()` 所返回的秩是否非负来判定查找是否成功。若改由 `List` 类派生出栈结构，则需相应地调整此句——我们将此留给读者独立完成。

另外，将列表节点与栈元素之间的对应次序颠倒过来，从原理上讲也是可行的。但是，同样出于以上考虑，我们还是更加倾向于采用以上的对应次序。如此，栈中元素的逻辑次序与它们在向量或列表中的逻辑次序一致，从而使得栈的标准接口之外的接口具有更好的兼容性。

以 `hanoi()` 算法（17 页代码 x1.13）为例，为了显示盘子移动的过程，必须反复地遍历栈中的元素（盘子）。若采用与代码 x4.1 相反的对应次序，则针对栈基于 `Vector` 和 `List` 的两种实现，需要分别更改显示部分的代码；反之，则可以共享同一份代码。

b) 按照你的实现方式，栈 ADT 各接口的效率如何？

【解答】

对于如代码 x4.1 所示实现的栈结构，各操作接口均转换为常数次列表的基本操作，故与基于向量派生的栈结构一样，所有接口各自仅需 $O(1)$ 时间。

[4-2] a) 试基于 2.2.3 节的向量模板类 `Vector`，实现队列结构；

【解答】

仿照以上基于 `List` 实现栈结构的方法与技巧，请读者独立完成。

b) 在实现过程中你遇到了哪些困难？你是如何解决的？

【解答】

请读者结合自己的实现过程，独立给出解答。

[4-3] 设 B 为 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的任一排列。

a) 试证明， B 是 A 的一个栈混洗，当且仅当对于任意 $1 \leq i < j < k \leq n$ ， B 中都不含如下模式：

$\{ \dots, k, \dots, i, \dots, j, \dots \}$

【解答】

先证明“仅当”。为此可以采用反证法。

首先请注意，对于输入序列中的任意三个元素，其在输出序列中是否存在一个可行的相对排列次序，与其它元素无关。因此不妨只关注这三个元素 $\{i, j, k\}$ 。

接下来可注意到，无论如何，元素 i 和 j 必然先于 k （弹出栈 A 并随即）压入中转栈 S 。若输出序列 $\{k, i, j\}$ 存在，则意味着在此三个元素中， k 必然首先从栈 S 中弹出。而在 k 即将弹出之前的瞬间， i 和 j 必然已经转入栈 S ；而且根据“后进先出”的规律，三者在栈 S 中（自顶向下）的次序必然是 $\{k, j, i\}$ 。这就意味着，若要 k 率先从栈 S 中弹出，则三者压入输出栈 B 的次序必然是 $\{k, j, i\}$ ，而不可能是 $\{k, i, j\}$ 。

既然以上规律与其它元素无关， $\{k, i, j\}$ 即可视作判定整体输出序列不可行的一个特征，我们不妨称之为“禁形”（*forbidden pattern*）。

再证明“当”。

实际上只要按照算法 x4.1，则对于不含任何禁形的输出序列，都可给出其对应的混洗过程。

```
stackPermutation(B[1, n]) { //B[] 为待甄别的输出序列，其中不含任何禁形
    Stack S; //辅助中转栈
    int i = 1; //模拟输入栈A(的栈顶元素)
    for k = 1 to n { //通过迭代，依次输出每一项B[k]
        while (S.empty() || B[k] != S.top()) //只要B[k]仍未出现在S栈顶
            S.push(i++); //就反复地从栈A中取出顶元素，并随即压入栈S
        //assert: 只要B[]的确不含任何禁形，则以上迭代就不可能导致栈A的溢出
        //assert: 以上迭代退出时，S栈必然非空，且S的栈顶元素就是B[k]
        S.pop(); //因此，至此只需弹出S的栈顶元素，即为我们所希望输出的B[k]
    }
}
```

算法x4.1 确认不含任何禁形的序列都是栈混洗

该算法尽管包含两重循环，但其中实质的push()和pop()操作均不超过 $\mathcal{O}(n)$ 次，故其总体时间复杂度应线性正比于输入序列的长度。

算法x4.1只需略作修改，即可实现对栈混洗的甄别：对于{ 1, 2, 3, …, n }的任一排列，判定其是否为栈混洗。请读者参照以上分析以及注释，独立完成此项工作。当然，你所改进的算法，必须依然具有 $\mathcal{O}(n)$ 的时间复杂度。

b) 若对任意 $1 \leq i < j < n$, B 中都不含模式：

{ …, j + 1, …, i, …, j, … }

则 B 是否必为 A 的一个栈混洗？若是，试给出证明；否则，试举一反例。

【解答】

可以证明此类序列B必为A的一个栈混洗，故亦可将：

{ j + 1, i, j }

视作新的一类禁形。为此，不妨将：

{ k, i, j }

{ j + 1, i, j }

分别称作“915”式禁形、“615”式禁形。

显然，此类禁形是a)中禁形的特例，故只需证明“当”：只要B中含有“915”式禁形，则必然也含有“615”式禁形——当然，两类禁形中的i和j未必一致。

以下做数学归纳。假定对于任何的 $k - i < d$ ，以上命题均成立，考查 $k - i = d$ 的情况。

不妨设 $i < j < k - 1$ ，于是元素 $k - 1$ 在 B 中相对于 i 的位置无非两种可能：

1) $k - 1$ 居于 i 的左侧（前方）

此时，{ k - 1, i, j }即为“915”式禁形，由归纳假设，必然亦含有“615”式禁形。

2) $k - 1$ 居于 i 的右侧（后方）

此时，{ k, i, k - 1 }即构成一个“615”式禁形。

c) 若对任意 $1 < j < k \leq n$, B 中都不含模式

{ …, k, …, j - 1, …, j, … }

则 B 是否必为 A 的一个栈混洗？若是，试给出证明；否则，试举一反例。

【解答】

此类序列B未必是A的一个栈混洗，故不能将“945”式特征：

{ k, j - 1, j }

称作禁形。作为反例，不妨考查序列：

B[] = { 2, 4, 1, 3 }

不难验证，其中不含任何的“945”式模式 ({ 3, 1, 2 }, { 4, 1, 2 }, { 4, 2, 3 })。但反过来，若对序列B[]应用算法x4.1，却将导致错误（请读者独立验证这一点，并指出错误的位置及原因），这说明该序列并非A的栈混洗。

当然，作为对b) 中结论的又一次验证，不难看出该序列的确包含“615”式禁形：

{ 4, 1, 3 }

[4-4] 设 $S = \{ 1, 2, 3, \dots, n \}$ ，试证明：

a) S 的每个栈混洗都分别对应于由 n 对括号组成的一个合法表达式，且反之亦然；

【解答】

采用数学归纳法。

假设以上命题对少于 n 对括号的表达式（以及长度短于 n 的序列）均成立，现考查 n 的情况。

我们令混洗操作序列中的 **push/pop** 操作，与表达式中的左/右括号彼此对应。于是，在任意合法的表达式中，必然存在一对紧邻的左、右括号；相应地，在栈混洗对应的栈操作序列中，也必然存在一对紧邻的 **push** 和 **pop** 操作。进一步地，将这对括号从表达式中删除后，依然得到一个表达式——只不过长度减二；将这对 **push** 和 **pop** 操作删除后，也依然得到一个栈混洗所对应的栈操作序列——其长度亦减二。由归纳假设，缩短后的表达式与栈混洗彼此对应。

b) S 共有 $Catalan(n) = (2n)!/(n + 1)!/n!$ 个栈混洗。

【解答】

根据以上结论，只需统计 n 对括号所能组成的合法表达式数目 $T(n)$ 。

由 n 对括号组成的任一合法表达式 S_n ，都可唯一地分解和表示为如下形式：

$$S_n = (S_k)S_{n-k-1}$$

其中， S_k 和 S_{n-k-1} 均为合法表达式，且分别由 k 和 $n - k - 1$ 对括号组成。

鉴于 k 的取值范围为 $[0, n]$ ，故有如下边界条件和递推式：

$$T(0) = T(1) = 1$$

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \cdot T(n-k-1)$$

这是典型的Catalan数式递推关系，解之即得题中结论。

[4-5] Internet 超文本 HTML 文档，由成对出现的标志 (tag) 划分为不同的部分与层次。

类似于括号，与起始标志 `<myTag>` 相对应地，结束标志为 `</myTag>`。

常用的 HTML 标志有：文档体 (`<body>` 和 `</body>`)、节的头部 (`<h1>` 和 `</h1>`)、左对齐 (`<left>` 和 `</left>`)、段落 (`<p>` 和 `</p>`)、字体 (`` 和 ``) 等。

a) 试拓展 `paren()` 算法（教材 93 页代码 4.5），以支持对以上 HTML 标志的嵌套匹配检查；

【解答】

增加 `switch` 结构的分支，对每一种 HTML 标志，都相应地增加一条 `case` 语句，且处理方式与 `paren()` 算法已给出的分支完全一致。具体的实现请读者独立完成。

91

b) 继续扩展，以支持对任意 “`<myTag>...</myTag>`” 形式标志的嵌套匹配检查。

【解答】

此时，实际上需要处理的匹配括号有无数种，故显然不能简单地逐个增加一条语句。

一种可行的方法需要借助栈结构。具体地，每当遇到一个<myTag>标记，即令其入栈（相当于左括号）。每当遇到一个</myTag>标记，即与当前栈顶处的标记比对。倘若二者匹配，则弹出栈顶标记，然后继续读入并处理下一标记；否则，即可断定该文本（至少）在此处出现失配。

当然，待整个HTML文本扫描完毕，还需再次检查辅助栈。此时唯有栈为空，方可判定整个文本中的标记完全匹配。

[4-6] 教材 95 页代码 4.7 中的 evaluate() 算法，需借助 readNumber() 函数，根据当前字符及其后续的若干字符，解析出当前的操作数。试实现该函数。

【解答】

一种可行的实现方式，如代码x4.2所示。

```
1 void readNumber(char*& p, Stack<float>& stk) { //将起始于p的子串解析为数值，并存入操作数栈
2     stk.push((float)(*p - '0')); //当前数位对应的数值进栈
3     while (isdigit(*(++p))) //只要后续还有紧邻的数字（即多位整数的情况），则
4         stk.push(stk.pop() * 10 + (*p - '0')); //弹出原操作数并追加新数位后，新数值重新入栈
5     if ('.' != *p) return; //此后非小数点，则意味着当前操作数解析完成
6     float fraction = 1; //否则，意味着还有小数部分
7     while (isdigit(*(++p))) //逐位加入
8         stk.push(stk.pop() + (*p - '0')*(fraction /= 10)); //小数部分
9 }
```

代码x4.2 操作数的解析

[4-7] 教材 95 页代码 4.7 中的 evaluate() 算法，需借助 orderBetween(op1, op2) 函数，判定操作符 op1 和 op2 之间的优先级关系。试利用如代码 4.6（教材 94 页）所示的优先级表，实现该函数。

【解答】

一种可行的实现方式，如代码x4.3所示。

```
1 Operator optr2rank(char op) { //由运算符转译出编号
2     switch (op) {
3         case '+': return ADD; //加
4         case '-': return SUB; //减
5         case '*': return MUL; //乘
6         case '/': return DIV; //除
7         case '^': return POW; //乘方
8         case '!': return FAC; //阶乘
9         case '(': return L_P; //左括号
10        case ')': return R_P; //右括号
11        case '\0': return EOE; //起始符与终止符
12        default : exit(-1); //未知运算符
13    }
14 }
```

```

15
16 char orderBetween(char op1, char op2) //比较两个运算符之间的优先级
17 { return pri[optr2rank(op1)][optr2rank(op2)]; }

```

代码x4.3 运算符优先级关系的判定

[4-8] 教材 95 页代码 4.7 中的 evaluate() 算法 , 为将常规表达式转换为 RPN 表达式 , 需借助 append() 函数将操作数或运算符追加至字符串 rpn 的末尾。

试实现该函数。 (提示 : 需针对浮点数和字符 , 分别重载一个接口)

【解答】

一种可行的实现方式 , 如代码 x4.4 所示。

```

1 void append(char*& rpn, float opnd) { //将操作数接至RPN末尾
2     int n = strlen(rpn); //RPN当前长度 (以'\0'结尾 , 长度n + 1)
3     char buf[64];
4     if (opnd != (float)(int)opnd) sprintf(buf, "%.2f \0", opnd); //浮点格式 , 或
5     else                     sprintf(buf, "%d \0", (int)opnd); //整数格式
6     rpn = (char*) realloc(rpn, sizeof(char) * (n + strlen(buf) + 1)); //扩展空间
7     strncat(rpn, buf); //RPN加长
8 }
9
10 void append(char*& rpn, char optr) { //将运算符接至RPN末尾
11    int n = strlen(rpn); //RPN当前长度 (以'\0'结尾 , 长度n + 1)
12    rpn = (char*) realloc(rpn, sizeof(char) * (n + 3)); //扩展空间
13    sprintf(rpn + n, "%c ", optr); rpn[n + 2] = '\0'; //接入指定的运算符
14 }

```

代码x4.4 将操作数或操作符统一接至RPN表达式末尾

这里 , 在接入每一个新的操作数或操作符之前 , 都要调用 realloc() 函数以动态地扩充 RPN 表达式的容量 , 因此会在一定程度上影响时间效率。

在十分注重这方面性能的场合 , 读者可以做适当的改进——比如 , 仿照教材 2.4.2 节中可扩充向量的策略 , 凡有必要扩容时即令容量加倍。

[4-9] 试以表达式 "(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))" 为例 , 给出 evaluate() 算法的完整执行过程。

【解答】

该表达式的求值过程 , 如表 x4.1 所示。其中每一步所对应的当前字符 , 均以方框注明 ; 表达式的结束标识 '\0' , 则统一用 \$ 示意 ; 各行左侧为栈底 , 右侧为栈顶。

请参考对应的注解 , 体会运算符栈和操作数栈随算法执行的演变过程及规律。

表x4.1 表达式求值算法实例

表达式	运算符栈	操作数栈	注解
$(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$		表达式起始标识入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (左括号入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (0		操作数0入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (! 0		运算符'!'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (+ 1		运算符'+'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (+ 1	1	运算符'+'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (+ 1 1		操作数1入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (+ 2		运算符'+'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)\boxed{2}^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ (2	2	左括号出栈
$(\boxed{0!}+1)\boxed{2}^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * 2		运算符'*'入栈
$(\boxed{0!}+1)\boxed{2}^(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * 2 2		操作数2入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ 2 2		运算符'^'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ (2 2	2	左括号入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ (2 2 3		操作数3入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ (! 2 2 3		运算符'!'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ (2 2 6		运算符'!'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ (+ 2 2 6		运算符'+'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ (+ 2 2 6 4		操作数4入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)\boxed{)-}(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ (2 2 10		运算符'+'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)\boxed{)-}(5!-67-(8+9))$$	\$ * ^ 2 2 10		左括号出栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)\boxed{-}(5!-67-(8+9))$$	\$ * 2 1024		运算符'^'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)\boxed{-}(5!-67-(8+9))$$	\$ 2048		运算符'*'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)\boxed{-}(5!-67-(8+9))$$	\$ - 2048		运算符'-'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-\boxed{5}(5!-67-(8+9))$$	\$ - (2048		左括号入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}(5!-67-(8+9))$$	\$ - (2048 5		操作数5入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-67-(8+9))$$	\$ - (! 2048 5		运算符'!'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-67-(8+9))$$	\$ - (2048 120		运算符'!'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7-(8+9))$$	\$ - (- 2048 120		运算符'-'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7-(8+9))$$	\$ - (- 2048 120 67		操作数67入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7\boxed{-}(8+9))$$	\$ - (- 2048 53		运算符'-'出栈执行
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7\boxed{-}(8+9))$$	\$ - (- (2048 53		左括号入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7-(\boxed{8}+9))$$	\$ - (- (2048 53 8		操作数8入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7-(\boxed{8}+9))$$	\$ - (- (+ 2048 53 8		运算符'+'入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7-(\boxed{8}+\boxed{9}))$$	\$ - (- (+ 2048 53 8 9		操作数9入栈
$(\boxed{0!}+1)*2^{\boxed{3}}(3!+4)-(\boxed{5}!-\boxed{6}7-(\boxed{8}+\boxed{9})\boxed{)}$$	\$ - (- (2048 53 17		运算符'+'出栈执行

表达式	运算符栈	操作数栈	注解
$(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - (-	2048 53 17	左括号出栈
$(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ - (2048 36	运算符 '-' 出栈执行
$(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$ -	2048 36	左括号出栈
$(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$	\$	2012	运算符 '-' 出栈执行
$(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$		2012	表达式起始标识出栈
$(0!+1)*2^(3!+4)-(5!-67-(8+9))\$$			返回唯一的元素 2012

[4-10] 教材 95 页代码 4.7 中的 evaluate() 算法，对乘方运算符“^”的求值采用了向左优先结合律，比如表达式“ 2^3^5 ”将被理解为“ $(2^3)^5$ ”。

试按照通常习惯，将该运算符调整为满足向右优先结合律，比如上例应被理解为“ $2^{(3^5)}$ ”。要求对该算法的修改尽可能小。

【解答】

就此类问题而言，与其去修改代码 4.7 中的 evaluate() 算法，不如直接调整代码 4.6 中的优先级表。实际上，只需将其中的 `pri['^']['^']` 由 '`>`' 改作 '`<`'。

经过如此调整之后，当表达式当前扫描至操作符 '^'，且此时的操作符栈顶元素亦为 '^' 时，后者不会随即执行计算，而是令前者入栈。从优先级的角度来看，如此可保证靠后（而非靠前）的 '^' 运算符优先执行计算。

[4-11] 教材 95 页代码 4.7 中 evaluate() 算法执行过程中的某一时刻，设操作符栈共存有 502 个括号。

- a) 此时栈的规模（含栈底的 '\0'）至多可能多大？为什么？
- b) 请示意性地画出当时栈中的内容。

【解答】

由该算法的原理不难看出，在其执行过程中的任何时刻，操作符栈中所存每一操作符相对于其直接后继（若存在）的优先级都要（严格地）更高。

当然，这一性质只对相邻操作符成立，故并不意味着其中所有的操作符都按优先级构成一个单调序列。在该算法中，（左）括号扮演了重要的角色——无论它是栈顶操作符，或者是表达式中的当前操作符，都会（因对应的 `pri[][]` 表项为 '`<`' 而）执行压栈操作。就效果而言，如此等价于将递增的优先级复位，从而可以开始新一轮的递增。对照如代码 4.6 所示的优先级表即不难验证，其它操作符均无这一特性。

因此，在（左）括号数固定的情况下，为使操作符栈中容纳更多的操作符，必须使每个（左）括号的上述特性得以充分发挥。具体地，在每个（左）括号入栈之前，应使每个优先级别的操作符都出现一次（当然，也至多各出现一次）。这里， '+' 和 '-' 同处一级， '*' 和 '/' 同处一级， '^' 自成一级， '!' 也自成一级。

需特别注意的是，根据代码 4.6 中的优先级表，任何时刻操作符 '!' 在操作符栈中只可能存在一个，而且必定是栈顶。对于合法的表达式，此后出现的下一操作符不可能是 '('。而无论接下来出现的是何种操作符（即便是 '!' 本身），该操作符都会随即出栈并执行对应的计算。

综合以上分析，为使操作符栈的规模最大，其中所存的操作符应大致排列表x4.2所示。

表x4.2 (左) 括号数固定时，运算符栈的最大规模

θ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	2008	2009	2010	2011	2012
$\setminus\theta$	+	*	/	\wedge	(+	*	/	\wedge	(+	*	/	(+	*	/	\wedge
θ				1				2				3		502				503

不难看出，此时操作符栈的规模为：

$$(502 + 1) \times 4 + 1 = 2013$$

[4-12] 对异常输入的处置能力是衡量算法性能的重要方面，即教材 1.1.4 节所谓的鲁棒性。为考查教材 95 页代码 4.7 中 evaluate() 算法的这一性能，现以非正常的表达式“(12)3+!4*+5”作为其输入。

a) 试给出在算法退出之前，操作数栈和操作符栈的演化过程；

【解答】

evaluate() 算法对该“表达式”的求值过程，如表x4.3所示。其中，运算符栈和操作数栈的栈底/栈顶都在左侧/右侧。

表x4.3 非法表达式“(12)3+!4*+5”的“求值”过程

表达式	运算符栈	操作数栈	注解
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$		表达式起始标识入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ (左括号入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ (12		操作数12入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ 12		左括号出栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ 12 3		操作数3入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ + 12 3		运算符'+'入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ + ! 12 3		运算符'!'入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ + ! 12 3 4		操作数4入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ + 12 3 24		运算符'!'出栈执行
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ + * 12 3 24		运算符'*'入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ + 12 72		运算符'*'出栈执行
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ 84		运算符'+'出栈执行
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ + 84		运算符'+'入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ 84 5		操作数5入栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ 89		运算符'+'出栈执行
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$	\$ 89		表达式起始标识出栈
(1 2) 3 + ! 4 * + 5 \$			返回唯一的元素89

第5章

二叉树

[5-17] 考查中序遍历迭代式算法的第三个版本（教材 131 页代码 5.18）。

试继续改进该算法，使之不仅无需辅助栈，而且也无需辅助标志位。

【解答】

一种可行的改进方式，如代码x5.2所示。

```

1 template <typename T, typename VST> //元素类型、操作器
2 void travIn_I4(BinNodePosi(T) x, VST& visit) { //二叉树中序遍历算法（迭代版#4，无需栈或标志位）
3     while (true)
4         if (HasLChild(*x)) //若有左子树，则
5             x = x->lChild; //深入遍历左子树
6         else { //否则
7             visit(x->data); //访问当前节点，并
8             while (!HasRChild(*x)) //不断地在无右分支处
9                 if (!(x = x->succ())) return; //回溯至直接后继节点（在没有后继的末节点处，直接退出）
10            else visit(x->data); //访问新的当前节点
11            x = x->rChild; //（直至有右分支处）转向非空的右子树
12        }
13 }
```

代码x5.2 二叉树中序遍历算法（迭代版#4）

可以看到，这里同样需要调用succ()接口确定回溯的位置。

请读者参照注释，验证该算法的正确性，并就其时、空效率做一分析。

[5-18] 考查实现如 134 页代码 5.20 所示的层次遍历算法，设二叉树共含 n 个节点。

a) 试证明，只要辅助队列 Q 的容量不低于 $\lceil n/2 \rceil$ ，就不致于出现中途溢出的问题；

【解答】

可以证明：在该算法执行过程中的每一步迭代之后，若当前已经有n个节点入过队，则仍在队中的至多有 $\lceil n/2 \rceil$ 个——当然，相应地，至少已有 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个已经出队。

实际上，对该算法稍加观察即不难发现：每次迭代都恰有一个节点出队；若该节点的度数为d ($0 \leq d \leq 2$)，则随即会有d个节点入队。通过对已出队节点的数目做数学归纳，即不难证明以上事实。我们将此项工作留给读者。

b) 在规模为 n 的所有二叉树中，哪些的确会需要如此大容量的辅助队列？

【解答】

在算法过程中的任一时刻，辅助队列的规模均不致小于仍应在队列中节点的数目。考查这些节点在目前已入过队的节点中所占的比重。由以上观察结果，可以进一步推知：为使这一比重保持为尽可能大的 $\lceil n/2 \rceil/n$ ，此前所有出队节点的度数都必须取作最大的2；且中途一旦某个节点只有1度甚至0度，则不可能恢复到这一比重。

由此可见，若果真需要如此大容量的辅助队列，则在最后一个节点入队之前，所有出队节点都必须是2度的。由此可见，其对应的充要条件是，这是一棵规模为n的完全二叉树。

c) 在层次遍历过程中，若 Q 中节点的总数的确会达到这么多，则至多可能达到多少次？

【解答】

按照层次遍历的次序，若将树中各节点依次记作：

$$x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor n/2 \rfloor}; x_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \dots, x_n$$

则其中 $x_1 \sim x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 为内部节点，共计 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个； $x_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \sim x_n$ 为叶节点，共计 $\lceil n/2 \rceil$ 个。

根据以上分析，若 n 为奇数，则必然是一棵真完全二叉树，此时的最大规模 $\lceil n/2 \rceil = (n+1)/2$ 仅在 $x_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ 处于队首时出现一次。若 n 为偶数，则只有最后一个内部节点 $x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 的度数为 1，此时的最大规模 $\lceil n/2 \rceil = n/2$ 在 $x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 和 $x_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ 处于队首时各出现一次。

[5-19] 参考图 5.26 (教材 135 页) 和图 5.27 (教材 135 页) 中的实例，考查对规模为 n 的完全二叉树 (含满二叉树) 的层次遍历。

a) 试证明：在整个遍历过程中，辅助队列的规模变化是单峰对称的，即

$$\{ 0, 1, 2, \dots, (n+1)/2, \dots, 2, 1, 0 \} \quad (n \text{ 为奇数时}) \text{ 或}$$

$$\{ 0, 1, 2, \dots, n/2, n/2, \dots, 2, 1, 0 \} \quad (n \text{ 为偶数时})$$

【解答】

根据上题的分析结论，显然成立。

b) 非完全二叉树的层次遍历过程，是否也可能具有这种性质？为什么？

【解答】

仍由上题的分析结论，在对非完全二叉树的遍历过程中，辅助队列的规模不可能达到 $\lceil n/2 \rceil$ 。

[5-20] 在完全二叉树的层次遍历过程中，接入队（亦即出队）次序从 0 起将各节点 X 编号为 $r(X)$ 。

a) 试证明：对于任一节点 X 及其左、右孩子 L 和 R （如果存在），必然有

$$r(L) = 2 * r(X) + 1$$

$$r(X) = \lfloor (r(L) - 1)/2 \rfloor = (r(L) - 1)/2$$

$$r(R) = 2 * r(X) + 2$$

$$r(X) = \lfloor (r(R) - 1)/2 \rfloor = r(R)/2 - 1$$

【解答】

由图 10.2（教材 287 页）中的实例，直接易见。

b) 试证明：任一编号 $r \in [0, n]$ 都唯一对应于某个节点；

【解答】

由图 10.2（教材 287 页）中的实例，直接易见。

c) 很多应用往往只涉及完全二叉树，此时，如何利用上述性质提高对树的存储和处理效率？

【解答】

将所有节点存入向量结构，各节点 X 的秩 $rank(X)$ 即为其编号 $r(X)$ 。

d) 根据以上编号规则 , 如何判断任何一对节点之间是否存在 “祖先-后代” 关系 ?

【解答】

令 $s(X) = r(X) + 1$, $s(X)$ 为 $r(X)$ 的二进制展开, 于是有:

- (1) 节点A是D的祖先, 当且仅当 $s(A)$ 是 $s(D)$ 的前缀。其中特别地,
- (2) 节点A是D的父亲, 当且仅当 $s(A)$ 是 $s(D)$ 的前缀且 $|s(A)| + 1 = |s(D)|$

以图10.2 (教材287页) 中的节点1、8和18为例, 即可验证上述结论:

$$\begin{aligned}s(1) &= r(1) + 1 = 2 = 10_{(2)} \\ s(8) &= r(8) + 1 = 9 = 1001_{(2)} \\ s(18) &= r(18) + 1 = 19 = 10011_{(2)}\end{aligned}$$

[5-21] 采用 “父节点 + 孩子节点” 方式表示和实现有根的有序多叉树, 隶属于同一节点的孩子节点互为兄弟, 且此处的有序性可以理解为 “左幼右长” ——位置偏左者为弟, 偏右者为兄。实际上, 这只是现代意义上对 “弟” 和 “兄” 的理解, 具体到学源上师生关系, 可对应于师弟、师兄。

但按中国传统文化, 就此的理解与约定却有所不同: 凡同辈之间, 无论长幼均统一互称为 “兄”; 而所谓 “弟”, 则用以指称后辈, 大抵相当于 “弟子” 或 “徒弟”。

试问: 若照此传统惯例, 将 “子” 改称作 “弟”, 将 “兄弟” 统一作 “兄”, 则多叉树的 “父节点 + 孩子节点” 表示法, 将恰好对应于二叉树的哪种表示法?

【解答】

“长子-兄弟” 表示法。

[5-22] 考查借助二叉树, 表示(有根有序)多叉树的长子-兄弟表示法: 分别以左/右孩子作为长子/兄弟。

- a) 试基于 `BinTree` 模板类 (教材 121 页代码 5.5), 派生出 `Tree` 模板类;
- b) 试结合应用, 测试你的 `Tree` 模板类。

【解答】

请读者参照教材第5.1.3节关于 “长子-兄弟” 表示法之原理的讲解, 以及这里所给的提示, 独立完成设计、编码及测试工作。

[5-23] 试在 `BinTree` 模板类 (教材 121 页代码 5.5) 的基础上, 扩展 `BinTree::swap()` 接口, 在 $O(n)$ 时间将二叉树中每一个节点的左、右孩子 (其中之一可能为空) 互换, 其中 n 为树中的节点总数。

【解答】

在教材所给的递归版先序、中序或后序遍历算法的基础上, 在每个递归实例中, 交换当前节点的左、右孩子 (子树)。

请读者照此思路, 独立完成算法的编码和调试。

虽经如上扩充, 但每个递归实例渐进地仍然仅需常数时间, 故总体时间复杂度依然为 $O(n)$ 。当然, 为了提高实际的运行效率, 可以进一步改为迭代形式。此项任务, 由读者独立完成。

[5-24] 设二叉树共含 n 个节点，且各节点数据项的类型支持大小比较和线性累加(类似于整数或浮点数)。

a) 试设计并实现一个递归算法，在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内判断是否该树中所有节点的数值均不小于其真祖先的数值总和。对于没有真祖先的树根节点，可认为“真祖先”的数值总和为 0；

【解答】

仍以教材所给的递归版先序、中序或后序遍历算法，作为基础框架。

引入一个辅助栈，用以记录从根节点到当前节点的（唯一）通路，当然，沿途节点亦即当前节点的所有祖先。另设一个累加器，动态记录辅助栈中所有节点数据项的总和。

为此，递归每深入一层，即将当前节点压入辅助栈中，同时累计其数据项；反之，递归每返回一层，即弹出辅助栈的顶部节点，并从累加器中扣除其数据项。对于每个当前节点，都将其数据项与累加器做一比较。一旦确认前者小于后者，即可立刻报告“NO”并退出。若直到辅助栈重新变空，都未发生上述情况，即最终可报告“YES”并退出。

请读者照此思路，独立完成算法的编码和调试。

同样地，以上扩充既不致增加递归实例的数量，亦不会增加各递归实例的渐进执行时间，故总体的时间复杂度依然为 $\mathcal{O}(n)$ 。

b) 试将以上算法改写为等价的迭代形式，且运行时间依然为 $\mathcal{O}(n)$ ；

【解答】

请读者参照教材中各种迭代版遍历算法的实现方式和技巧，独立完成这一改进。

c) 迭代版需要多少空间？

【解答】

因为省去了由系统隐式维护的递归调用栈，故迭代版只要实现得当，实际占用的空间将大为减少——尽管渐进的空间复杂度依然是线性的。

[5-25] 设二叉树共含 n 个节点，且各节点数据项的类型支持大小比较 (类似于整数或浮点数)。

a) 试设计并实现一个递归算法，在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内将每个节点的数值替换为其后代中的最大数值。

【解答】

以教材所给的递归版后序遍历算法为基础框架，做必要的扩充。

首先，需要调整接口约定，使每个递归实例都有返回值——亦即，当前节点更新后的数据项。

作为递归基，空树可返回可能的最小值（比如对于整数，可取 `INT_MIN`）。这样，按照后序遍历的次序，只要当前节点的左、右子树均已遍历（左、右孩子的数据项均已更新），即可从二者当中取其更大者，并相应地更新当前节点的数据项，最后再返回更新后的数据项。

请读者照此思路，独立完成算法的编码和调试任务。

同样地，以上扩充既不致增加递归实例的数量，亦不会增加各递归实例的渐进执行时间，故总体的时间复杂度依然为 $\mathcal{O}(n)$ 。

b) 试将以上算法改写为等价的迭代形式，且运行时间依然为 $\mathcal{O}(n)$ ；

【解答】

请读者参照教材中各种迭代版后序遍历算法的实现方式和技巧，独立完成这一改进。

c) 迭代版需要多少空间？

【解答】

因为省去了由系统隐式维护的递归调用栈，故迭代版只要实现得当，实际占用的空间将大为减少——尽管渐进的空间复杂度依然是线性的。

[5-26] 设二叉树共含 n 个节点，且各节点数据项的类型支持线性累加（类似于整数或浮点数）。

试设计并实现一个递归算法，按照如下规则，在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内为每个节点设置适当的数值：

树根为 0

对于数值为 k 的节点，其左孩子数值为 $2k + 1$ ，右孩子数值为 $2k + 2$

【解答】

不难看出，对于完全二叉树，题中的要求实际上等效于，按照层次遍历的次序，为树中的各节点顺序编号。而一般的二叉树作为其子树，各节点的编号也与完全二叉树完全吻合。因此可以教材所给的层次遍历算法为基础框架，并做必要的扩充。

具体地，在根节点首先入队之前，将其数据项置为 0。此后的每一步迭代中，若出队节点的编号为 k ，则入队的左、右孩子节点（若存在）的数值，可分别取作 $2k + 1$ 、 $2k + 2$ 。

请读者照此思路，独立完成编码和调试任务。

以上扩充并不会增加各步迭代的渐进执行时间，故总体时间复杂度依然为 $\mathcal{O}(n)$ 。

[5-27] 试证明，在考虑字符的出现频率之后，最优编码树依然具有双子性。

【解答】

与不考虑出现频率时的情况相仿，依然可以反证。

假若某棵最优编码树不是真二叉树，则通过收缩变换消除其中的单分支节点，同时平均编码长度亦必然缩短。矛盾。

[5-28] 试证明，5.5.4 节所述 Huffman 编码算法的原理，对任意字符集均成立。

【解答】

可以证明：

由Huffman算法所生成的编码树，的确是最佳编码树

为此，可以对字符集的规模 $|\Sigma|$ 做归纳。作为归纳基，对单字符集 ($|\Sigma| = 1$) 而言显然。故不妨在 $|\Sigma| < n$ 时以上命题均成立，现考查 $|\Sigma| = n$ 的情况。

按照Huffman算法的流程，首先从 Σ 中取出频率最低的两个字符 x 和 y ，并将其合并为一个新的超字符 z 。而在算法此后的执行过程中，可以等效地认为 x 和 y 已被删除，并被代以 z ——亦即，

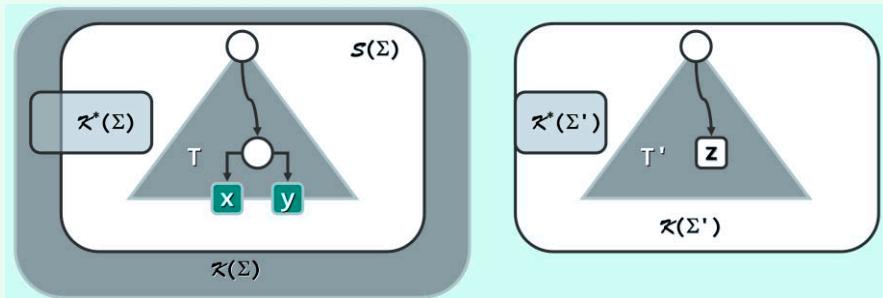
字符集相当于被替换为：

$$\Sigma' = (\Sigma \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$$

其中

$$w(z) = w(x) + w(y)$$

考查字符集 Σ 和 Σ' 各自的所有编码树，如图x5.6所示，令其分别构成集合 $\mathcal{K}(\Sigma)$ 与 $\mathcal{K}(\Sigma')$ ，其中的最优编码树分别为其中的子集 $\mathcal{K}^*(\Sigma)$ 与集合 $\mathcal{K}^*(\Sigma')$ 。



图x5.6 频率最低的兄弟节点合并之后，最优编码树必对应于合并之前的最优编码树

鉴于最优编码树必然具有层次性，故在 $\mathcal{K}^*(\Sigma)$ 中只需考虑 x 和 y 在底层互为兄弟的那些编码树，不妨令其构成集合 $\mathcal{S}(\Sigma)$ 。于是如图x5.6所示，在按照以上方法统一合并 x 和 y 之后，即在 $\mathcal{S}(\Sigma)$ 与 $\mathcal{K}^*(\Sigma')$ 之间建立起了一一对应的关系。

考查如此对应的任意两棵树 $T \in \mathcal{S}(\Sigma)$ 和 $T' \in \mathcal{K}^*(\Sigma')$ ，二者的编码总长之差为：

$$n * \text{ald}(T) - (n - 1) * \text{ald}(T') = w(x) + w(y) = w(z)$$

对于固定的字符集 Σ 而言，这个差异 $w(z)$ 即是一个常数。因此， $\mathcal{K}^*(\Sigma')$ 中的最优编码树，亦必然对应于 $\mathcal{S}(\Sigma) \cap \mathcal{K}^*(\Sigma')$ 中的最优编码树。故归纳假设可以推广至 $|\Sigma| = n$ 的情况。

[5-29] 5.5.4 节针对 Huffman 树构造算法的讲解中，暂时忽略了歧义情况。比如，有些字符的出现频率可能恰好相等；或者虽然最初的字符权重互异，但经过若干次合并之后，森林 F 也可能会出现权重相等的子树。另外，每次选出的一对（超）字符在合并时的左右次序也没有明确说明。

a) 试证明，以上歧义并不影响所生成编码树的最优化，即它仍是 Huffman 编码树之一；

【解答】

上题所给的证明，并未排除字符 x 和 y 权重相同的情况，故其结论足以覆盖本题。

b) 参照教材所给代码，了解并总结在实现过程中处理这类歧义的一般性方法。

【解答】

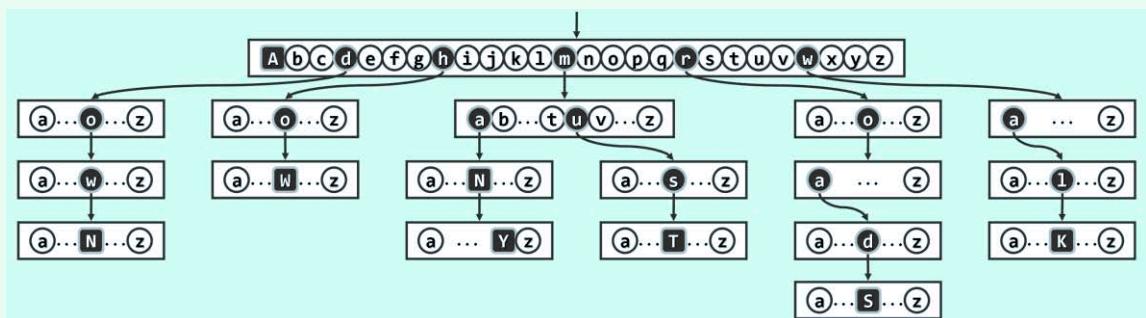
这里实际上是将此类歧义情况的处理，转交给具体实现Huffman森林的数据结构，比如采用列表结构（教材138页代码5.24），或者采用优先级队列结构（教材285页代码10.2）。

目前这些结构对歧义情况均未强制地处理，而多是依照其在逻辑序列中的次序，确定等权重（超）字符的合并次序。反之，若需要显示地消除此类歧义，亦可从这些方面入手。

[5-30] 设字符表为 Σ ($|\Sigma| = r$)。任一字符串集 S 都可如图 x5.7 所示，表示为一棵键树（trie）^①。

键树是有根有序树，其中的每个节点均包含 r 个分支。深度为 d 的节点分别对应于长度为 d 的字符串，且祖先所对应字符串必为后代所对应字符串的前缀。键树只保留与 S 中字符串（及其前缀）相对应的节点（黑色），其余的分支均标记为 NULL（白色）。

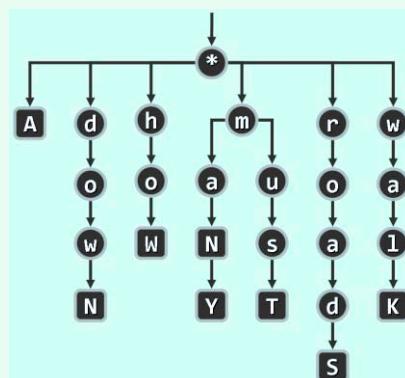
注意，因为不能保证字符串相互不为前缀（如“man”与“many”），故对应于完整字符串的节点（黑色方形、大写字母）未必都是叶子。



图x5.7 字符串集{ "how", "many", "roads", "must", "a", "man", "walk", "down" }对应的键树

试按照如图 x5.7 所示的构思，实现对应的 Trie 模板类。同时要求提供一个接口 `find(w)`，在 $O(|w|) = O(h)$ 的时间内判断 S 是否包含字符串 w ，其中 $|w|$ 为该字符串的长度， h 为树高。

（提示：每个节点都实现为包含 r 个指针的一个向量，各指针依次对应于 Σ 中的字符： S 包含对应的字符串（前缀），当且仅当对应的指针非空。此外，每个非空指针都还需配有一个 `bool` 类型的标志位，以指示其是否对应于 S 中的某个完整的字符串。于是，键树的整体逻辑结构可以抽象为如图 x5.8 所示的形式。其中，黑色方形元素的标志位为 `true`，其余均为 `false`。）



图x5.8 键树的紧凑表示与实现

【解答】

请读者根据以上介绍和提示，独立完成编码和调试任务。

^① 由R. de la Briandais于1959年发明^[53]。名字源自单词re[TRIE]val，发音上为区别于tree，改读作[trai]

第6章



[6-1] **关联矩阵 (incidence matrix)** 是描述和实现图算法的另一重要方式。对于含有 n 个顶点、 e 条边的图，对应的关联矩阵 $I[][]$ 共有 n 行 e 列。在无向图中，对于任意的 $0 \leq i < n$ 和 $0 \leq j < e$ ，若第 i 个顶点与第 j 条边彼此关联，则定义 $I[i][j] = 1$ ；否则，定义 $I[i][j] = 0$ 。

a) 关联矩阵与邻接矩阵有何联系？

【解答】

就无向图而言（不考虑自环等情况），既然每一条边均恰好与两个顶点关联，故该矩阵中的每一列都应恰好包含两个1，总和均为2。

考查关联矩阵与其转置的乘积 $B = I \cdot I^T$ 。该矩阵对角线上的任意元素 $B[i][i]$ ，都应满足：

$$B[i][i] = I[i] \cdot I[i]^T = \text{顶点 } i \text{ 的度数}$$

而对于对角线以外的任意元素 $B[i][j]$ ， $i \neq j$ ，都有

$$B[i][j] = I[i] \cdot I[j]^T = \text{顶点 } i \text{ 与顶点 } j \text{ 之间公共的关联边数}$$

也就是说， $B[i][j]$ 等于1/0当且仅当顶点 i 与顶点 j 是/否彼此邻接。

b) 有向图的关联矩阵应如何定义？

通常的定义方式为，对于任意的 $0 \leq i < n$ 和 $0 \leq j < e$ ，若第 j 条边从第 i 个顶点发出（即顶点 i 为边 j 之尾），则定义 $I[i][j] = -1$ ；若第 j 条边进入第 i 个顶点（即顶点 i 为边 j 之头），则定义 $I[i][j] = +1$ ；否则，定义 $I[i][j] = 0$ 。

c) 有向图的关联矩阵，与邻接矩阵又有何联系？

与无向图类似地，有向图关联矩阵中的每一列应包含+1和-1各一个，总和应均为0。

为发现此时两种矩阵之间的联系，不妨依然考查关联矩阵与其转置的乘积 $B = I \cdot I^T$ 。

对于该矩阵对角线上的任意元素 $B[i][i]$ ，都有

$$B[i][i] = I[i] \cdot I[i]^T = \text{顶点 } i \text{ 的（出、入总）度数}$$

而对于对角线以外的任意元素 $B[i][j]$ ， $i \neq j$ ，都有

$$-B[i][j] = -I[i] \cdot I[j]^T = \text{顶点 } i \text{ 与顶点 } j \text{ 之间公共的关联（有向）边数}$$

也就是说， $B[i][j]$ 等于0当且仅当顶点 i 与顶点 j 互不邻接； $B[i][j]$ 等于-1或-2，当且仅当在顶点 i 与顶点 j 之间，联接有1或2条有向边。

d) 基于关联矩阵，可以解决哪些问题？试举一例。

【解答】

以参考文献[20]为例，其中的24.4节针对线性规划（linear programming）问题的一种特例——差分约束系统（system of difference constraints）——介绍了一个高效算法。该算法中最为重要的一个步骤，就是将差分约束系统转化为有向带权图：将差分约束变量视作顶点，将差分约束矩阵视作关联矩阵。如此，原问题即可转化为有向带权图的最短路径问题。

[6-2] 试说明，即便计入向量扩容所需的时间，就分摊意义而言，`GraphMatrix::insert(v)`算法的时间复杂度依然不超过 $\mathcal{O}(n)$ 。

【解答】

首先请注意，**GraphMatrix**类（教材157页代码6.2）在底层，是基于可扩充向量，以二维**Vector**结构的形式来实现邻接矩阵。

按照第2.4节的实现方法及其分析结论，每一向量（即邻接矩阵的每一行）的单次插入操作，在分摊意义上只需 $\mathcal{O}(1)$ 时间。这里，在每一节点的插入过程中， n 个向量的操作（含扩容操作）完全同步，故总体的运行时间不超过分摊的 $\mathcal{O}(n)$ 。

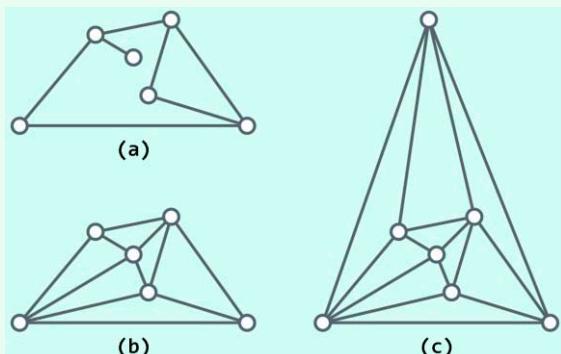
当然，为插入一个顶点，在最坏情况下可能需要访问和修改整个邻接矩阵，共需 $O(n^2)$ 时间。

[6-3] 所谓平面图，即可以将 n 个顶点映射为平面上的 n 个点，并且顶点之间的所有联边只相交于其公共端点，而不相交于边的内部。

试证明，平面图必满足 $e = \theta(n)$ ，亦即，边数与顶点数同阶。（提示：平面图必然遵守欧拉公式 $n - e + f - c = 1$ ，其中 n 、 e 、 f 和 c 分别为平面图的顶点、边、面和连通域的数目）

【解答】

不妨设这里所讨论的平面图，如图x6.1(a)所示，至少包含3个顶点；自然地，同时也包含 $c \geq 1$ 个连通域。考查其中各边与各面之间的关联关系，将其总数记作I。



图x6.1 (a)平面图、(b)三角剖分以及
(c)外面亦为三角形的三角剖分

首先不难看出，悬边仅与一张面关联，其余各条边均与两张面相关联。因此，每条边对 I 的贡献至多为 2，故有：

$$I \leq 2e \dots \dots \dots \quad (1)$$

另一方面，平面图中仅有一张无界的面——即所谓的外面（outer face）——它对T的贡献至少为3。此外其余的各张面，均由至少三条边围成，对T的贡献也至少为3，故有：

$$3f \leq I \dots \dots \dots \quad (2)$$

联立不等式(1)和(2), 即有:

$$3f < 2e$$

$$f \leq 2\pi/3 \quad (3)$$

将不等式(3)代入欧拉公式, 则有:

$$1 = n - e + f - c \leq n - e + 2e/3 - 1$$

稍作整理，即得：

由以上证明也可进一步推知, 不等式(4)取等号, 当且仅当不等式(1~3)均取等号。

此时，每张面（包括外面）应恰好由三条边围成。也就是说，该平面图不仅如图x6.1(b)所示，是习题[6-32]中定义的三角剖分（triangulation），而且如图x6.1(c)所示，外面也必须是一个三角形。

[6-4] a) 试通过将无向图的二维邻接矩阵映射至一维向量，提高空间利用率。

【解答】

无向图的邻接矩阵必然对称，亦即， $A[i][j] = A[j][i]$ 对合法的任意*i*和*j*均成立。因此，邻接矩阵的上或下半角完全可以不必记录，并将剩余部分转化并压缩为一维向量A'。

这里，不妨仅保存其中的下半三角区域（含对角线），即所有满足 $0 \leq j \leq i < n$ 的元素 $A[i][j]$ 。于是如图x6.2所示不难验证，可以在这些元素与向量A'之间建立如下一一对应关系：

$$A[i][j] \leftrightarrow A'[i(i+1)/2 + j]$$

或者等价地：

$$A'[k] \leftrightarrow A[i][k - i(i+1)/2], \text{ 其中 } i = \lfloor (\sqrt{8k+1} - 1) / 2 \rfloor$$

如此所得一维向量A'的长度为 $n(n+1)/2$ ，大致为未压缩之前的一半。但就渐进意义而言，空间复杂度依然为 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

0	0
1	1 2
2	3 4 5
3	6 7 8 9
4	10 11 12 13 14

图x6.2 将 5×5 的对称矩阵压缩至长度为15的一维向量

b) 采用你所提出的方法，需额外增加多少处理时间？

【解答】

就从A中元素到A'中元素的映射而言，以上转换均属于基本操作，各自仅需 $\mathcal{O}(1)$ 时间。

c) 采用你所提出的方法，是否会影响到图 ADT 各接口的效率？

【解答】

既然以上转换均属于基本操作，故在顶点集保持不变的情况下，各接口所需时间将保持不变。然而在图的规模可能发生改变的场合，无论是新顶点的引入还是原顶点的删除，都有可能需要移动A'中的所有元素，从而造成巨大的额外时间开销，因此得不偿失。

[6-5] a) 试按照 158 页 6.4 节的思路，以邻接表的形式实现图 ADT 的各操作接口；

【解答】

一种可行的实现方式大致如下。首先，将原定义的整体框架：

```
#include "../Vector/Vector.h" //引入向量
/* ... */
template <typename Tv, typename Te> //顶点类型、边类型
class GraphMatrix : public Graph<Tv, Te> { //基于向量，以邻接矩阵形式实现的图
private:
    Vector<Vertex<Tv>> V; //顶点集（向量）
    Vector<Vector<Edge<Te>*>> E; //边集（邻接矩阵）
    /* ... */
}
```

调整为

```
#include "../Vector/Vector.h" //引入向量
#include "../List/List.h" //引入列表
/* ... */
template <typename Tv, typename Te> //顶点类型、边类型
class GraphList : public Graph<Tv, Te> { //基于向量和列表，以邻接表形式实现的图
private:
    Vector<Vertex<Tv>> V; //顶点集（向量）
    Vector<List<Edge<Te>*>> E; //边集（邻接表）
    /* ... */
}
```

可见，所有顶点依然构成一个向量，且分别将各自的关联边组织为一个列表（即所谓边表）。既然同一条边内的边都关联于同一顶点，故为了便于查找另一关联顶点，接下来还需相应地在原Edge边结构的基础上，再增加一个域v：

```
template <typename Te> struct Edge { //边对象
    Te data; int weight; EStatus status; //数据、权重、状态
    int v; //关联顶点
    Edge(Te const& d, int w) : data(d), weight(w), status(UNDETERMINED) {} //构造新边
};
```

对于有向图，可以统一约定各边分别归属于其尾顶点所对应的边表（出边表），或统一归属于其头顶点（入边表）。而为了提高查找效率，甚至可以同时为各顶点设置出边表和入边表。

Graph各标准接口的具体实现，也要做相应的调整，凡涉及边表的操作都要将此前Vector结构的操作替换为List结构的操作。请读者独立完成这些工作。

b) 分析这一实现方式的时间、空间效率，并与基于邻接矩阵的实现做一对比。

【解答】

在空间复杂度方面，邻接表可以动态地与图结构的实际规模相匹配，而不再是固定的 $\Theta(n^2)$ 。具体地，若当时的图结构共含n个顶点、e条边，则实际的空间消耗应不超过 $\mathcal{O}(n + e)$ 。

与邻接矩阵相比，多数针对顶点的操作的时间复杂度几乎不变，但涉及边的操作则不尽相同。

在这里，边确认操作exists(i, j)的作用至关重要。改为邻接表之后，我们需要遍历顶点i所对应的边表，方可判定其中是否存在与顶点j相关联者，因此其所需时间由 $\mathcal{O}(1)$ 增加至 $\mathcal{O}(\deg(i)) = \mathcal{O}(n)$ 。相应地，涉及exists()操作的顶点删除操作remove(i)也需要更多的时间。此外，在改用邻接表之后，边删除操作remove(i, j)也需要以类似的方式确认边(i, j)的确存在，并在存在时确定该边记录的存放位置，因此该操作也将不能在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内完成。

请读者根据自己的具体实现方式，对其他操作接口时间效率的变化补充分析。

[6-6] 试基于BFS搜索设计并实现一个算法，在 $\mathcal{O}(n + e)$ 时间内将任一无向图分解为一组极大连通域。

【解答】

反观如教材160页代码6.3所示的广度优先搜索算法，其子算法BFS(v)只有在访遍顶点v所属的极大连通域之后，方可返回；此后，若还有其它尚未访问的连通域，则算法主入口bfs()中的循环必然会继续检查其余的所有顶点，而一旦发现尚处于UNDISCOVERED状态的顶点，即会再次调用子算法BFS()并遍历该顶点所属的极大连通域。

由此可见，只需按照BFS()的各次调用顺序，分批输出所访问的顶点以及边，即可实现无向图的极大连通域分解。

相对于基本的广度遍历算法，除了顶点和边的输出，该算法并未引入更多操作，因此其时间复杂度依然是 $\mathcal{O}(n + e)$ 。

实际上，上述分析以及结论，同样适用于如教材162页代码6.4所示的深度优先遍历算法。

[6-7] 若在图G中存在从顶点s通往顶点v的道路，则其中最短道路的长度称作s到v的（最小）距离，记作 $\pi(v)$ ；不存在通路时，取 $\pi(v) = +\infty$ 。试证明，在起始于s的广度优先搜索过程中：

a) 波峰集中的各顶点，始终按其在BFS树中的深度，在辅助队列中单调排列，且彼此相差不超过一；

【解答】

采用数学归纳法，证明该不变性在每一顶点入队后都成立。初始时队列为空，自然成立。

考查下一入队顶点u，其在BFS树中的深度 $\text{depth}(u)$ ，是在其入队的同时确定的。就在u入队的那一步迭代中，此前必有某一顶点v刚刚出队，且在BFS树中u是v的孩子，故有：

$$\text{depth}(u) = \text{depth}(v) + 1$$

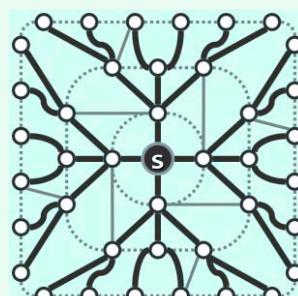
因此，倘若题中所述不变性在该步迭代之前成立，则在v出队、u入队后应该继续成立。

b) 所有顶点按其在BFS树中的深度，以非降次序接受访问。

【解答】

根据以上分析，如图x6.3所示，BFS树是在广度优先搜索的过程中自上而下逐层生成的，各顶点也是以其在树中的深度为序逐个被发现的；反过来，对原图的广度优先搜索过程，完全等同于对BFS树的层次遍历过程。

原图的各边所联接的顶点，在BFS中的深度之差不超过1；由树边联接的顶点，在BFS树中的深度之差恰好为1。



图x6.3 图的BFS搜索，等效于BFS树的层次遍历

c) 所有顶点按其到s的距离，以非降次序接受访问。

【解答】

由上，只需证明每一顶点u都满足 $\pi(u) = \text{depth}(u)$ 。

反证，假设至少有一个顶点不满足这一性质。以下，考查此类顶点中 $\pi(\cdot)$ 值最小者 u 。

既然在BFS树（原图的子图）中已有一条长度为 $\text{depth}(u)$ 的通路联接于 s 和 u 之间，故必有：

$$\pi(u) \leq \text{depth}(u)$$

因此，不妨假定：

在原图中，考查 s 到 u 的（任何一条）最短路径，其长度即为 $\pi(u)$ 。显然 $u \neq s$ ，故 u 在该通路上的直接前驱顶点存在。将次前驱顶点记作 v ，则 v 应满足：

根据 u 之 $\pi(\cdot)$ 值的最小性，这就意味着 v 必然满足：

综合(1)、(2)和(3), 即得:

$$\text{depth}(v) + 1 < \text{depth}(u)$$

然而，这一不等式不可能成立。实际上，在顶点 v 出队时，作为 v 的邻接顶点之一， u 必然会在同步迭代中入队，并且同时确定其在BFS树中的深度为：

$$\text{depth}(u) = \text{depth}(v) + 1$$

需要强调的是，以上分析过程及结论，对于有向图同样适用。

[6-8] 若无向图中所有边的权重均相等，试基于广度优先搜索的框架设计并实现一个算法，在 $\theta(n + e)$ 时间内计算出某一起始顶点到其余顶点的（最小）距离和一条（最短）通路。

【解答】

根据上题的结论，经过广度优先搜索之后，各顶点在BFS树中的深度值，即是在原图中从始顶点到它们的（最小）距离。因此，只需套用该算法，在每个顶点入队时随即输出其所确定的深度值；而在最终生成的BFS树中，从树根到各顶点的（唯一）通路，即是对应的（最短）通路。

需要强调的是，在原图中，任意两个顶点之间的（最短）通路可能不止一条，但它们的长度必然相同。

[6-9] 在无向连通图中，最长的通路称作其直径（diameter）。试基于广度优先搜索的框架，设计并实现一个查找直径的算法，要求时间复杂度为 $O(n + e)$ 。

【解答】

算法的主题流程如下：首先从任一顶点 v 出发，经过一趟广度优先搜索，找到与之距离最远的顶点 a ；然后从 a 出发，再经过一趟广度优先搜索，找到与之距离最远的顶点 b 。不难证明，在后一棵BFS树中， ab 之间的通路即是原图的直径。

请读者根据以上介绍，在教材所提供的代码基础上，独立完成该算法的编码和调试任务。

当然，按照题中所给定义，同一无向连通图的直径可能不止一条。有兴趣的读者不妨进一步拓展以上算法，从任一无向连通图中找出所有的直径。

[6-10] 试基于深度优先搜索的框架设计并实现一个算法，在 $O(n + e)$ 时间判定任一无向图是否存在欧拉环路；并且在存在时，构造出一条欧拉环路。

【解答】

根据图论的基本结论，只需遍历全图确定其连通性，再核对各顶点的度数。若连通且没有奇度数的顶点，则必然存在欧拉环路；否则，不存在欧拉环路。其中特别地，若奇度数的顶点恰有两个，则必然存在以这两个顶点为起点、终点的欧拉通路。

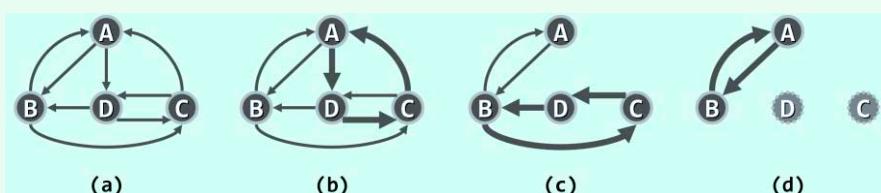
构造欧拉环路的一种算法，过程大致如下。从任一顶点出发做一趟深度优先搜索，依次记录沿途经过的各边并随即将其从图中删除；一旦有顶点度数归零，也随即将此顶点删除。一旦回到起点，即得到一条欧拉子环路。此时若还存在已访问但尚未被删除的顶点，则任选其一并从它出发，再做一趟深度优先搜索，过程相同。每次所得新的子环路，都需要在搜索的起始点处与此前的子环路合并为一条更大的子环路。当不剩任何顶点时，算法结束，当前的子环路即为原图的一条欧拉环路。

如果采用邻接表实现图结构，则以上算法中的每一基本操作（访问或删除当前顶点的一条关联边、访问度数非零的顶点、删除度数为零的顶点、将两条子环路在公共顶点处合并等）都可以在常数时间内完成，故总体运行时间线性正比于原图自身的规模。

上述关于欧拉环路存在性的判定依据以及环路的构造算法不仅适用于无向图，实际上也不难推广至有向图。

考查如图x6.4(a)所示的有向图实例——也就是教材152页图6.4(a)中的实例。

首先，经核对确认各顶点的出、入度数分别相等，故可判定该有向图存在欧拉环路。



图x6.4 构造有向图的欧拉环路：各子环路加粗示意，删除的边不再画出，删除的顶点以灰色示意

接下来，从任一顶点出发做深度优先搜索。比如，若从顶点C出发，可能如图(b)所示得到一条子环路：

{ C A D }

删除已访问过的边，并继续从顶点C出发做深度优先搜索，即可能如图(c)所示得到子环路：

{ C D B }

并与上一子环路在顶点C处合并为：

{ C D B C A D }

删除已访问过的边，并删除度数为零的顶点C和D之后，继续从已经访问但尚未删除的任一顶点出发做深度优先搜索。实际上此时只能从顶点B出发，得到子环路{ B, A }，并与上一子环路在顶点B处合并为：

{ C D B A B C A D }

[6-11] BFS 算法（教材 160 页代码 6.3）的边分类，采用了简化的策略：

树边（TREE）之外，统一归为跨边（CROSS）

试分别针对无向图和有向图，讨论跨边的可能情况。

【解答】

根据此前的分析，无向图中任意一对邻接顶点在BFS树中的深度之差至多为1。因此在经过广度优先搜索之后，无向图的各边无非两类：树边，亦即被BFS树采用的边；跨边，亦即联接于来自不同分支、深度相同或相差一层的两个顶点之间的边。

类似地，有向图中的每一条边 (v, u) 均必然满足：

$$\text{depth}(u) \leq \text{depth}(v) + 1$$

这一不等式取等号时， (v, u) 即是（由 v 指向 u 的）一条树边。

若满足：

$$\text{depth}(u) = \text{depth}(v)$$

则 v 和 u 在BFS树中分别属于不同的分支， (v, u) 跨越于二者之间。

若满足：

$$\text{depth}(u) < \text{depth}(v)$$

则在BFS树中， u 既可能与 v 属于不同的分支，也可能就是 v 的祖先。

[6-12] 考查采用 DFS 算法（教材 162 页代码 6.4）遍历而生成的 DFS 树。试证明：

a) 顶点 v 是 u 的祖先，当且仅当

$$[\text{dTime}(v), \text{fTime}(v)] \supseteq [\text{dTime}(u), \text{fTime}(u)]$$

【解答】

先证明“仅当”。若 v 是 u 的祖先，则遍历过程的次序应该是“ v 被发现... u 被发现... u 被访问完毕... v 被访问完毕”。也就是说， u 的活跃期包含于 v 的活跃期中。由此也可得出一条推论：在任一顶点 v 刚被发现的时刻，其每个后代顶点 u 都应处于UNDISCOVERED状态。

反之，若 u 的活跃期包含于 v 的活跃期中，则意味着当 u 被发现（由UNDISCOVERED状态转入DISCOVERED状态）时， v 应该正处于DISCOVERED状态。因此， v 既不可能与 u 处于不同的分支，也不可能 u 的后代。故“当”亦成立。

实际上由以上分析可进一步看出，此类顶点活跃期之间是严格的包含关系。

b) v 与 u 无承袭关系，当且仅当

$$[\text{dTime}(v), \text{fTime}(v)] \cap [\text{dTime}(u), \text{fTime}(u)] = \emptyset$$

【解答】

作为a)的推论，“当”显然成立，故只需证明“仅当”。考查没有承袭关系的顶点 v 与 u ，且不妨设 $\text{dTime}(v) < \text{dTime}(u)$ 。于是根据a)，只需证明 $\text{fTime}(v) < \text{dTime}(u)$ 。

否则，若 $\text{dTime}(u) < \text{fTime}(v)$ ，则意味着当 u 被发现时， v 应该仍处于DISCOVERED状态。此时，必然有一条从 v 通往 u 的路径，且沿途的顶点都处于DISCOVERED状态。此时在DFS()算法的函数调用栈中，沿途各顶点依次分别存有一帧。在DFS树中，该路径上的每一条边都对应于一对父子顶点，故说明 u 是 v 的后代——这与假设矛盾。

[6-13] 在起始于顶点 s 的 DFS 搜索过程中的某时刻，设当前顶点为 v 。试证明：任一顶点 u 处于 DISCOVERED 状态，当且仅当 u 来自 s 通往 v 的路径沿途——或者等效地，在 DFS 树中 u 必为 v 的祖先。

【解答】

由题所述条件，可知必有：

$$dTime(u) < dTime(v) < fTime(u)$$

于是由以上根据顶点活跃期之间相互包含关系的结论，必有：

$$dTime(u) < dTime(v) < fTime(v) < fTime(u)$$

亦即：

$$[dTime(v), fTime(v)] \subseteq [dTime(u), fTime(u)]$$

故知 u 必为 v 的祖先。

由以上规律亦可进一步推知：起始顶点 s 既是第一个转入 DISCOVERED 状态的，也是最后一个转入 VISITED 状态的，其活跃期纵贯整个 DFS() 算法过程的始末；在此期间的任一时刻，任何顶点处于 DISCOVERED 状态，当且仅当它属于从起始顶点 s 到当前顶点 v 的通路上——这一通路的作用，也就相当于第 4.4.1 节所介绍的忒修斯的线绳。

[6-14] 通过显式地维护一个栈结构，将 DFS 算法（教材 162 页代码 6.4）改写为迭代版本。

【解答】

实际上，这里引入的栈结构，只需动态记录从起始顶点 s 到当前顶点之间通路上的各个顶点，其中栈顶对应于当前顶点。每当遇到处于 UNDISCOVERED 状态的顶点，则将其转为 DISCOVERED 状态，并令其入栈；一旦当前顶点的所有邻居都不再处于 UNDISCOVERED 状态，则将其转为 VISITED 状态，并令其出栈。

[6-15] 为将顶点及边的状态标志复位，本章所给的 Graph::reset() 需要耗费 $\mathcal{O}(v + e)$ 时间。

试设计一种方法，将这部分时间降低至 $\mathcal{O}(v)$ 。

【解答】

仿照习题[2-34]之 c) 中介绍的技巧，在不增加渐进空间复杂度的前提下，在常数时间内完成各顶点所对应边向量的初始化，从而使这方面总体所需的时间仅线性正比于顶点总数。

特别地，若顶点总数保持不变，则只需为所有顶点的边向量设置一个总体的 Bitmap 结构，该结构的初始化仅需常数时间。

[6-16] a) 试说明，对于整数权重的网络，可通过足够小的扰动，在不影响 Prim 算法正确性、计算过程及复杂度的前提下，消除由（同为某一割的极短跨越边的）重复边引起的歧义。

【解答】

设原图共含 v 个顶点、 e 条边，且不妨假定 $v - 1 \leq e$ 。若各边权重（按输入次序）依次为：

$$W = \{ w_1, w_2, w_3, \dots, w_e \}$$

且不妨设其中各边权重不致完全相等，则可将其替换为：

$$W' = \{ w_1 + 1/e^2, w_2 + 2/e^2, w_3 + 3/e^2, \dots, w_e + e/e^2 = w_e + 1/e \}$$

也就是说，各边的权重均有所增加，且增量为以 $1/e^2$ 为公差的算术级数。

请注意，所有各边权重的扰动量总和不过：

$$(1 + 2 + 3 + \dots + e)/e^2 = (1 + e)/2e < 1$$

更重要的是，即便 W 中可能存在等权的边，在如此构造的 W' 中各边的权重也必然互异。于是，对其采用Prim（以及稍后介绍的Kruskal）算法将不致出现歧义情况，其最小支撑树 T_m' 亦必然唯一确定。也就是说， W' 的任何一棵支撑树 T' 都应满足：

这里的 $|T_m'|$ 和 $|T'|$ 分别表示 T_m' 和 T' 的总权重。特别地，等号仅在 $T' = T_m$ 时成立。

不等式(1)的左、右同时向下取整后，应该依然成立，亦即：

既然 $|W| = |W'| = e$, 故二者的所有支撑树之间必然存在一一对应的关系。

考查如此对应的每一对支撑树 T 和 T' 。既然它们各自都恰好包含 $v - 1$ 条边，故应有：

$$0 < |\mathcal{T}'| - |\mathcal{T}| < (v - 1) \cdot (1/e) \leq 1$$

也就是说，必有：

特别地，若设与 T_m' 对应的（W的）支撑树为 T_m ，则也应有

综合(3)、(1')和(2)可知，对于W的任何一棵支撑树T，都有：

$$|\mathcal{T}_m| = \lfloor |\mathcal{T}'_m| \rfloor \leq \lfloor |\mathcal{T}'| \rfloor = |\mathcal{T}|$$

由此可见, T_m 必然是 W 的(一棵)最小支撑树。

另一种“方法”似乎更加巧妙，但实际上并不可行，故在此特作说明。

仿照以上技巧，将原图各边的权重依次替换为：

$$W' = \{ w_1 + 1/2, w_2 + 1/2^2, w_3 + 1/2^3, \dots, w_e + 1/2^e \}$$

也就是说，各边权重均有所增加，且增量构成以 $1/2$ 为公比的几何级数，其总和不过：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^e} < 1$$

同时，即便 W 中可能存在等权的边，在如此构造的 W' 中各边的权重同样必然互异。因此与上一方法同理，亦可以消除最小支撑树构造过程中的歧义。

然而不幸的是，这种“方法”要求计算机的数值精度达到 $1/2^e$ ——与边数 e 呈负指数相关，或者说数位与 e 呈线性相关。也就是说，随着 e 的增加，计算机的字长很快就会溢出。而反观上一方法，数值精度为 $1/e^2$ ，相对而言不致轻易就溢出。

b) 这种方法可否推广至实数权重的网络?

【解答】

以上方法之所以行之有效，是因为事先能够在不等权的边之间，确定边权重的最小差值(1)，从而既能够保证 W' 中的各权重彼此互异，同时又能保证通过向下取整运算，可以从 $|T'|$ 确定对应的 $|T|$ 。若权重可以取自任意实数，则这两个性质不能直接兼顾。

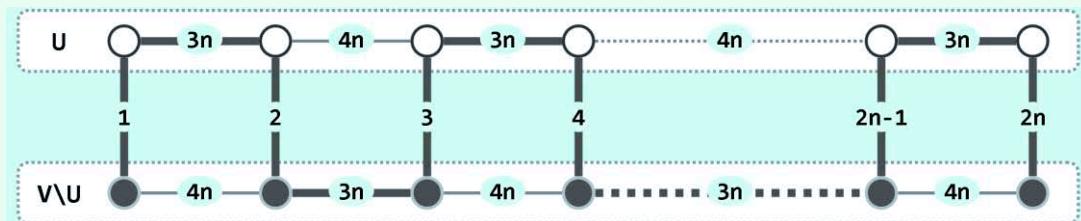
当然，若各边权重均取自浮点数（正如实际计算环境中的情况），则仍可以套用上述方法，只不过需要做必要的预处理——通过统一的放缩，将各边的权重转换为整数。

[6-17] 在教材 176 页图 6.20 中，出于简洁的考虑，将通路 us 和 vt 分别画在构成割的两个子图中。然而这样有可能造成误解，比如读者或许会认为，组成这两条通路的边也必然分别归属于这两个子图。

试举一实例说明， us 或 vt 均可能在两个子图之间穿越多（偶数）次——亦即，除了该割的最短跨越边 uv ，最小支撑树还可能采用同一割的其它跨越边，其长度甚至可能严格大于 $|uv|$ 。

【解答】

一个（组）通用的实例如图x6.5所示。



图x6.5 最小支撑树（粗线条）可能反复地穿越于割的两侧

这里的子集 U 包含 $2n$ 个顶点（白色），其中 $2n - 1$ 条非跨越边的权重依次为：

$$W_U = \{ 3n, 4n, 3n, 4n, \dots, 3n \}$$

补集 $V \setminus U$ 也包含 $2n$ 个顶点（黑色），其中 $2n - 1$ 条非跨越边的权重依次为：

$$W_{V \setminus U} = \{ 4n, 3n, 4n, 3n, \dots, 4n \}$$

在这两个子集之间，共有 $2n$ 条跨越边，其权重依次为：

$$X = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, 2n - 1, 2n \}$$

不难验证，该图的最小支撑树唯一确定，由权重不超过 $3n$ 的所有 $4n - 1$ 条边组成，亦即图 x6.5 中所有的粗边。由图易见，该支撑树就是一条通路，它在割的两侧总共穿越 $2n$ 次——（权重为 1 的）最短跨越边只是其中之一。

实际上， X 中各跨越边的权重未必需要按次序排列。

另外，基于二部图，完全可以构造出更为精简的实例。读者不妨照此思路，独立尝试。

[6-18] 利用“有向无环图中极大顶点入度必为零”的性质，实现一个拓扑排序算法，若输入为有向无环图

则给出拓扑排序，否则报告“非有向无环图”。该算法时间、空间复杂度各是多少？

【解答】

基于这一策略的拓扑排序算法，过程大致如算法x6.1所示。

```

1 将所有入度为零的顶点存入栈S //O(n)
2 取空队列Q //记录拓扑排序序列，O(1)
3 while (!S.empty()) { //O(n)
4     Q.enqueue(v = S.pop()); //栈顶顶点v转入队列Q
5     for each edge(v, u) //考查v的所有邻接顶点u
6         if (inDegree(u) < 2) S.push(u); //凡入度仅为1者，均压入栈S中
7     G = G\{v}; //删除顶点v及其关联边（邻接顶点入度相应地递减）

```

```

8 } //总体O(n + e)
9 return |G| ? Q : "NOT_DAG"; //残留的G空 (Q覆盖所有顶点), 当且仅当原图可拓扑排序 (Q即是排序序列)

```

算法x6.1 基于“反复删除零入度节点”策略的拓扑排序算法

这里，栈S和队列Q的初始化共需 $O(n)$ 时间。主体循环共计迭代 $O(n)$ 步，其中涉及的操作无非以下五类：出、入栈，共计 $O(n)$ 次；入队，共计 $O(n)$ 次；递减邻接顶点的入度，共计 $O(e)$ 次；删除（零入度）顶点，共计 $O(n)$ 个；（删除顶点时一并）删除关联边，共计 $O(e)$ 条。以上各类操作均属于基本操作，故总体运行时间为 $O(n + e)$ ，线性正比于原图的规模。

空间方面，除了原图本身，这里引入了辅助栈S和辅助队列Q，分别用以存放零入度顶点和排序序列。不难看出，无论是S或Q，每个顶点从始至终至多在其中存放一份，故二者的规模始终不超过 $O(n)$ 。实际上，通过更进一步地观察还可以发现，S和Q之间在任何时刻都不可能有公共顶点，因此二者总体所占的空间亦不过 $O(n)$ 。

请注意，既然不是基于深度优先搜索，故亦无需维护各顶点的时间标签及状态、各边的分类。因此相对于基于深度优先搜索的拓扑排序算法而言，这一实现方式所需的附加空间更少——尤其是对于稠密图而言。

[6-19] a) 试从教材 167 页代码 6.5 中，删除与拓扑排序无关的操作，以精简其实现；

【解答】

就拓扑排序这一问题而言，这里并不需要对各边进行分类，也不需要记录各顶点的时间标签，相关的数据项及操作均可删除。顶点的状态虽然仍需区分，却已不必过细，只要足以判定是否已经访问过即可。相应地，循环体内的三个switch分支也只需保留一个。

请读者按照以上思路，独立完成精简工作。

b) 精简之后，整体的渐进复杂度有何变化？

【解答】

经以上精简之后，运行时间虽有所减少，但渐进的复杂度依然保持为 $O(n + e)$ 。

空间方面，因为不必维护各边的分类标签，故除原图本身外仅需使用 $O(n)$ 辅助空间。

[6-20] a) 试从教材 170 页代码 6.6 中，删除与双连通分量分解无关的操作，以精简其实现；

【解答】

就双连通分量分解这一问题而言，这里并不需要对各边进行分类，相关的数据项及操作均可删除。各顶点的时间标签（其中的fTime用作hca）和状态，都仍然需要记录。

请读者按照以上思路，独立完成精简工作。

131

b) 精简之后，整体的渐进复杂度有何变化？

【解答】

经以上精简之后，运行时间虽有所减少，但渐进的复杂度依然保持为 $O(n + e)$ 。

空间方面，因为不必维护各边的分类标签，故除原图本身外仅需使用 $O(n)$ 辅助空间。

[6-21] 试按照PFS搜索的统一框架(教材173页代码6.7),通过设计并实现对应的prioUpdater函数对象,分别实现BFS和DFS算法。

【解答】

BFS算法对应的优先级更新器,可实现如代码x6.1所示。

```
1 template <typename Tv, typename Te> struct BfsPU { //针对BFS算法的顶点优先级更新器
2     virtual void operator()(Graph<Tv, Te>* g, int uk, int v) {
3         if (g->status(v) == UNDISCOVERED) //对于uk每一尚未被发现的邻接顶点v
4             if (g->priority(v) > g->priority(uk) + 1) { //将其到起点的距离作为优先级数
5                 g->priority(v) = g->priority(uk) + 1; //更新优先级(数)
6                 g->parent(v) = uk; //更新父节点
7             } //如此效果等同于,先被发现者优先
8     }
9 };
```

代码x6.1 基于PFS框架的BFS优先级更新器

比如,对于任何一个图结构g,若顶点为char类型,边为int类型,则可以通过如下形式的调用,基于PFS框架完成对g的广度优先搜索。

```
g->pfs(0, BfsPU<char, int>());
```

与Dijkstra算法的顶点优先级更新器DijkstraPU() (教材179页代码6.9)做一对比,即可看出,这里的BfsPU()只不过将 u_k 到邻接顶点v的距离g->weight(uk, v)统一替换为1——也就是说,所谓的广度优先搜索实际上完全等效于,在所有边权重均为1的图中应用Dijkstra算法构造最短路径树。就此意义而言,广度优先搜索也可以视作Dijkstra算法的一个特例。

DFS算法对应的优先级更新器,可实现如代码x6.2所示。

```
1 template <typename Tv, typename Te> struct DfsPU { //针对DFS算法的顶点优先级更新器
2     virtual void operator()(Graph<Tv, Te>* g, int uk, int v) {
3         if (g->status(v) == UNDISCOVERED) //对于uk每一尚未被发现的邻接顶点v
4             if (g->priority(v) > g->priority(uk) - 1) { //将其到起点距离的负数作为优先级数
5                 g->priority(v) = g->priority(uk) - 1; //更新优先级(数)
6                 g->parent(v) = uk; //更新父节点
7                 return; //注意:与BfsPU()不同,这里只要有一个邻接顶点可更新,即可立即返回
8             } //如此效果等同于,后被发现者优先
9     }
10 };
```

代码x6.2 基于PFS框架的DFS优先级更新器

第7章

搜索树

[7-1] 试证明，一棵二叉树是二叉搜索树，当且仅当其中序遍历序列单调非降。

【解答】

考查二叉搜索树中的任一节点 r 。按照中序遍历的约定， r 左（右）子树中的节点（若存在）均应先于（后于） r 接受访问。

按照二叉搜索树的定义， r 左（右）子树中的节点（若存在）均不大于（不小于） r ，故中序遍历序列必然在 r 处单调非降；反之亦然。

鉴于以上所取 r 的任意性，题中命题应在二叉搜索树中处处成立。

由此题亦可看出，二叉搜索树的定义不能更改为“任意节点 r 的左（右）孩子（若存在）均不大于（不小于） r ”——相当于将原定义中的“左（右）后代”，替换为“左（右）孩子”。为强化印象，读者不妨构造一个符合这一“定义”，但却不是二叉搜索树的具体实例。

[7-2] 试证明，由一组共 n 个互异节点组成的二叉搜索树，总共有 $(2n)!/n!(n+1)!$ 棵。

【解答】

我们将 n 个互异节点所能组成二叉搜索树的总数，记作 $T(n)$ 。

由上题结论，尽管由同一组节点组成的二叉搜索树不尽相同，但它们的中序遍历序列却必然相同，不妨记作：

$$\boxed{x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{k-1}} \quad x_k \quad \boxed{x_{k+1} \ x_{k+2} \ \dots \ x_{n-1}}$$

根据所取树根节点的不同，所有搜索树可以分为 n 类。如上所示，对于其中以 x_k 为根者而言，左、右子树必然分别由 $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ 和 $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{n-1}\}$ 组成。

如此，可得边界条件和递推式如下：

$$\begin{aligned} T(0) &= T(1) = 1 \\ T(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \cdot T(n-k-1) \end{aligned}$$

这是典型的Catalan数式递推关系，解之即得题中结论。

[7-3] 试证明，含 n 个节点的二叉树的最小高度为 $\lfloor \log_2 n \rfloor$ ——这也是由 n 个节点组成的完全二叉树高。

【解答】

实际上不难证明，若高度为 h 的二叉树共含 n 个节点，则必有：

$$n \leq 2^{h+1} - 1$$

这里的等号成立，当且仅当是满树。于是有：

$$\begin{aligned} h &\geq \log_2(n+1) - 1 \\ h &\geq \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 = \lfloor \log_2 n \rfloor \end{aligned}$$

[7-4] 与其它算法类似，`searchIn()`算法的递归版（教材 186 页代码 7.3）也存在效率低下的问题。试将该算法改写为迭代形式。请注意保持出口时返回值和 `hot` 的语义。

【解答】

只要注意到该算法的递归形式接近于尾递归，即可实现其迭代版如代码x7.1所示。

```
#define EQUAL(e, v) (!v) || (e == (v)->data) //节点v(或假想的通配哨兵)的关键码等于e
template <typename T> //在以v为根的(AVL、SPLAY、rbTree等)BST子树中查找关键码e
static BinNodePosi(T)& searchIn(BinNodePosi(T)& v, const T& e, BinNodePosi(T)& hot) {
    if (EQUAL(e, v)) return v; hot = v; //退化情况：在子树根节点v处命中
    while (1) { //一般地，反复不断地
        BinNodePosi(T)& c = (e < hot->data) ? hot->lChild : hot->rChild; //确定深入方向
        if (EQUAL(e, c)) return c; hot = c; //命中返回，或者深入一层
    } //hot始终指向最后一个失败节点
} //返回时，返回值指向命中节点(或假想的通配哨兵)，hot指向其父亲(退化时为初始值NULL)
```

代码x7.1 二叉搜索树`searchIn()`算法的迭代实现

不难验证，该迭代版出口时返回值和`hot`的语义，与递归版完全一致。

[7-5] 试证明，采用 `BST::insert()` 算法（教材 188 页代码 7.5），在二叉搜索树中插入节点 `v` 之后

a) 除 `v` 的历代祖先以外，其余节点的高度无需更新；

【解答】

我们知道，节点的高度仅取决于其后代——更确切地，等于该节点与其最深后代之间的距离。因此在插入节点`v`之后，节点`a`的高度可能发生变化（增加），当且仅当`v`是`a`的后代，或反过来等价地，`a`是`v`的祖先。

b) 祖先高度不会降低，但至多加一；

【解答】

插入节点`v`之后，所有节点的后代集不致缩小。而正如前述，高度取决于后代深度的最大值，故不致下降。

另一方面，假定节点`a`的高度由`h`增加至`h'`。若将`v`的父节点记作`p`，则`a`到`p`的距离不大于`a`在此之前的高度`h`，于是必有：

$$h' \leq |ap| + 1 \leq h + 1$$

c) 一旦某个祖先高度不变，更高的祖先也必然高度不变。

【解答】

对于任意节点`p`，若将其左、右孩子分别记作`l`和`r`（可能是空），则必有：

$$\text{height}(p) = 1 + \max(\text{height}(l), \text{height}(r))$$

在插入节点`v`之后，在`l`和`r`之间，至多其一可能会（作为`v`的祖先而）有所变化。一旦该节点的高度不变，`p`以及更高层祖先（如果存在的话）的高度亦保持不变。

[7-6] 试证明，采用 `BST::remove()` 算法（教材 190 页代码 7.6）从二叉搜索树中删除节点，若实际被删除的节点为 x ，则此后：

a) 除 x 的历代祖先以外，其余节点的高度无需更新；

【解答】

同样地，节点的高度仅取决于其后代——更确切地，等于该节点与其最深后代之间的距离。因此在删除节点 x 之后，节点 a 的高度可能发生变化（下降），当且仅当 x 是 a 的后代，或反过来等价地， a 是 x 的祖先。

b) 祖先高度不会增加，但至多减一；

【解答】

假设在删除节点 x 之后，祖先节点 a 的高度由 h 变化为 h' 。现在，我们假想式地将 x 重新插回树中，于是自然地， a 的高度应该从 h' 恢复至 h 。由[7-5]题的结论 b)，必有：

$$h \leq h' + 1$$

亦即：

$$h' \geq h - 1$$

c) 一旦某个祖先高度不变，更高的祖先也必然高度不变。

【解答】

反证，假设在删除节点 x 之后，祖先节点的高度会间隔地下降和不变。

仿照上一问的思路，假想着将 x 重新插回树中。于是，所有节点的高度均应复原，而祖先节点的高度则必然会间隔地上升和不变。这与[7-5]题的结论 c) 相悖。

[7-7] 利用以上事实，进一步改进 `updateHeightAbove()` 方法，提高效率。

【解答】

在逐层上行依次更新祖先高度的过程中，一旦某一祖先的高度不变，便可随即终止。

当然，就最坏情况而言，依然必须更新至树根节点。

[7-8] a) 试按照随机生成和随机组成两种方式，分别进行实际测试，并统计出二叉搜索树的平均高度；

b) 你得到的统计结果，与 7.3.1 节所给的结论是否相符？

【解答】

请读者按照教材中对这两种方式的定义，以及相关的介绍，独立完成编码、调试和实测任务，并根据统计结果给出结论和分析。

[7-9] `BinTree::removeAt()` 算法（教材 190 页代码 7.7）的执行过程中，当目标节点同时拥有左、右孩子时，总是固定地选取直接后继与之交换。于是，从二叉搜索树的整个生命期来看，左子树将越来越倾向于高于右子树，从而加剧整体的不平衡性。

一种简捷且行之有效的改进策略是，除直接后继外还同时考虑直接前驱，并在二者之间随机选取。

a) 试基于习题[5-14]扩展的 `pred()` 接口，实现这一策略；

【解答】

针对这一问题，实现随机选取的一种简明方法是：

调用 `rand()` 取（伪）随机数，根据其奇偶，相应地调用 `succ()` 或 `pred()` 接口

从理论上讲，如此可以保证各有 50% 的概率使用直接后继或直接前驱，从而在很大程度上消除题中指出的“天然”不均衡性。

`BinTree::removeAt()` 算法的其余部分，无需任何修改。

b) 通过实测统计采用新策略之后的平均树高，并与原策略做一对比。

【解答】

请读者按照以上介绍，独立完成编码、调试和实测任务，并根据统计结果给出结论和分析。

[7-10] 为使二叉搜索树结构支持多个相等数据项的并存，需要增加一个 `BST::searchAll(e)` 接口，以查找与指定目标 e 相等的所有节点（如果的确存在）。

a) 试在 BST 模板类（教材 185 页代码 7.2）的基础上，扩充接口 `BST::searchAll(e)`。

要求该接口的时间复杂度不超过 $\mathcal{O}(k + h)$ ，其中 h 为二叉搜索树的高度， k 为命中节点的总数；

【解答】

从后面第 8.4.1 节所介绍范围查询的角度来看，从二叉搜索树中找出所有数值等于 e 的节点，完全等效于针对区间 $(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$ 的范围查找，其中 ε 为某一足够小的正数。

因此，自然可以套用第 8.4.1 节所给的算法框架：针对 $e - \varepsilon$ 和 $e + \varepsilon$ 各做一次查找，并确定查找路径终点的最低公共祖先；在从公共祖先通往这两个终点的路径上，自上而下地根据各层的分支方向，相应地忽略整个分支，或者将整个分支悉数报告出来。

整个算法所拣出的分支，在每一层不超过两个，故总共不会超过 $\mathcal{O}(h)$ 个。借助（任何一种常规的）遍历算法，都可在线性时间内枚举出每个分支中的所有节点；而对所有分支的遍历，累计耗时亦不过 $\mathcal{O}(k)$ 。

需要特别说明的是，这里既不便于也不需要显式地确定 ε 的具体数值。实际上，我们只需要对比较器做适当的调整：针对 $e - \varepsilon$ ($e + \varepsilon$) 的查找过程，与针对 e 的查找过程基本相同，只是在遇到数值为 e 的节点时，统一约定向左（右）侧深入。

b) 同时，改进原有的 `BST::search(e)` 接口，使之总是返回最早插入的节点 e ——即先进先出。

【解答】

在中序遍历序列中，所有数值为 e 的雷同节点，必然依次紧邻地构成一个区间。为实现“先进先出”的规范，需要进一步地要求它们在此区间内按插入次序排列。

为此可以统一约定：在 `BST::insert(e)` 内的查找定位过程中，凡遇到数值相同的节点，均优先向右侧深入；而在 `BST::search(e)` 的查找过程中，凡遇到数值相同的节点，均向左侧深入。

当然，将以上约定的左、右次序颠倒过来，亦同样可行。

[7-11] 考查包含 n 个互异节点的二叉搜索树。

试证明，无论树的具体形态如何，`BST::search()`必然恰有 n 种成功情况和 $n + 1$ 种失败情况。

【解答】

通过对树高做数学归纳，不难证明。请读者独立完成这一任务。

[7-12] 试证明，在高度为 h 的 AVL 树中，任一叶节点的深度均不小于 $\lceil h/2 \rceil$ 。

【解答】

对树高 h 做数学归纳。作为归纳基， $h = 1$ 时的情况显然。假设以上命题对高度小于 h 的 AVL 树均成立，以下考查高度为 h 的 AVL 树。

根据 AVL 树的性质，如图 x7.1 所示，此时左、右子树的高度至多为 $h - 1$ ，至少为 $h - 2$ 。

由归纳假设，在高度为 $h - 1$

的子树内部，叶节点深度不小于：

$$\lceil (h-1)/2 \rceil \geq \lceil h/2 \rceil - 1$$

而在高度为 $h - 2$ 的子树内部，叶节点深度也不小于：

$$\lceil h/2 \rceil - 1$$

因此在全树中，任何叶节点深度都不致小于：

$$1 + (\lceil h/2 \rceil - 1) = \lceil h/2 \rceil$$

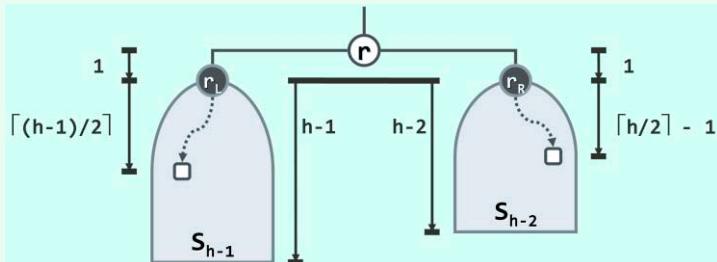


图 x7.1 AVL 树中最浅的叶节点

[7-13] 试证明：

a) 按照二叉搜索树的基本算法在 AVL 树中引入一个节点后，失衡的节点可能多达 $\Omega(\log n)$ 个；

【解答】

首先，引入一类特殊的 AVL 树，它们符合以下条件：其中每个内部节点的左子树，都比右子树在高度上少一。这也就是所谓的 Fib-AVL 树（Fibonaccian AVL tree）。

如图 x7.2(a~d) 所示，即为高度分别为 1、2、3 和 4 的 Fib-AVL 树。通过数学归纳法不难证明，此类 AVL 树的高度若为 h ，则其规模必然是 $\text{fib}(h+3) - 1$ ，故此得名。实际上，Fib-AVL 树也是在高度固定的前提下，节点总数最少的 AVL 树。

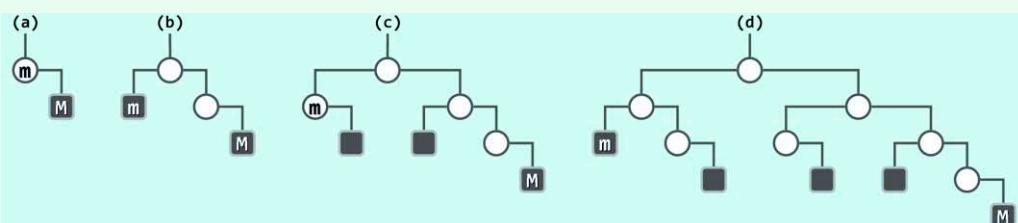


图 x7.2 Fib-AVL 树

考查其中数值最大（中序遍历序列中最靠后）的节点 M 。该节点共计 h 个祖先，而且它们的平衡因子均为 -1 。现在，假设需要将一个词条插入其中，而且该词条大于节点 M 。

第8章

高级搜索树

[8-1] 试扩充 Splay 模板类（教材 208 页代码 8.1），使之支持多个相等数据项的并存。

为此，需要增加 `searchAll(e)` 和 `removeAll(e)` 接口，以查找或删除等于指定目标 `e` 的所有节点。

同时，原先的 `search(e)` 和 `remove(e)` 接口，将转而负责查找或删除等于指定目标 `e` 的任一节点。

【解答】

原理及方法，均与习题[7-10]（149页）和习题[7-16]（152页）完全相同。

请读者独立完成编码和调试任务。

[8-2] 试证明，伸展树所有基本操作接口的分摊时间复杂度，均为 $\Theta(\log n)$ 。

【解答】

关于伸展树可在任意情况下均保持良好的操作效率，教材208页图8.7的实例还不足以作为严格的证明。事实上，伸展树单次操作所需的时间量T起伏极大，并不能始终保证控制在 $\Theta(\log n)$ 以内。故需沿用教材2.4.4节的方法，从分摊的角度做一分析和评判。具体地，可将实际可能连续发生的一系列操作视作一个整体过程，将总体所需计算时间分摊至其间的每一操作，如此即可得到其单次操作的分摊复杂度A，并依此评判伸展树的整体性能。

当然，就具体的某次操作而言，实际执行时间T与分摊执行时间A往往并不一致，如何弥合二者之间的差异呢？

实际上，分摊分析法在教材中已经而且将会多次出现，比如此前第2.4.4节的可扩充向量、第5.4节的各种迭代式遍历算法以及后面第11.3.7节的KMP串匹配算法等。相对而言，伸展树的性能分析更为复杂，以下将采用势能分析法（potential analysis）。

仿照物理学的思想和概念，这里可假想式地认为，每棵伸展树S都具有一定量（非负）的势能（potential），记作 $\Phi(S)$ 。于是，若经过某一操作并相应地通过旋转完成伸展之后S演化为另一伸展树 S' ，则对应的势能变化为：

$$\Delta\Phi = \Phi(S') - \Phi(S)$$

推而广之，考查对某伸展树 S_0 连续实施 $m \gg n$ 次操作的过程。将第*i*次操作后的伸展树记作 S_i ，则有：

$$\Delta\Phi_i = \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq m$$

而从该过程的整体来看，应有

$$\Delta\Phi = \sum_{i=1}^m [\Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})] = \Phi(S_m) - \Phi(S_0)$$

也就是说，整体的势能变化量仅取决于最初和最终状态——这与物理学中势能场的规律吻合。势能函数与物理学中势能的另一相似之处在于，它也可以被看作是能量（计算成本）的一种存在形式。比如，当某一步计算实际所需的时间小于分摊复杂度时，则可理解为通过势能的增加

将提前支出的计算成本存储起来；反之，在前者大于后者时，则可从此前积累的势能中支取相应量用于支付超出的计算成本。

以下，若将第*i*次操作的分摊复杂度取作实际复杂度与势能变化量之和，即

$$A_i = T_i + \Delta\Phi_i$$

则有

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{i=1}^m T_i + [\Phi(S_m) - \Phi(S_0)]$$

如此，总体的实际运行时间 $\sum_{i=1}^m T_i$ ，将不会超过总体的分摊运行时间 $\sum_{i=1}^m A_i$ ，故后者可以视作前者的一个上界。

比如，R. E. Tarjan^[42]使用如下势能函数：

$$\Phi(S) = \sum_{v \in S} \log|v|, \quad \text{其中 } |v| = \text{节点 } v \text{ 的后代数目}$$

证明了伸展树单次操作的分摊时间复杂度为 $\mathcal{O}(\log n)$ 。为此，以下将分三种情况（其余情况不过是它们的对称形式）证明：

在对节点v的伸展过程中，每一步调整所需时间均不超过v的势能变化的3倍，即：

$$3 \cdot [\Phi'(v) - \Phi(v)]$$

情况A) zig

如教材第8.1.3节所述，这种情况在伸展树的每次操作中至多发生一次，而且只能是伸展调整过程的最后一步。作为单旋，这一步调整实际所需时间为 $T = \mathcal{O}(1)$ 。同时由教材207页图8.5，这步调整过程中只有节点v和p的势能有所变化，且v(p)后代增加(减少)势能必上升(下降)，故对应的分摊复杂度为：

$$A = T + \Delta\Phi = 1 + \Delta\Phi(p) + \Delta\Phi(v) \leq 1 + [\Phi'(v) - \Phi(v)]$$

情况B) zig-zag

作为双旋的组合，这一调整实际所需时间为 $T = \mathcal{O}(2)$ 。于是由教材206页图8.4可知：

$$\begin{aligned} A &= T + \Delta\Phi \\ &= 2 + \Delta\Phi(v) + \Delta\Phi(p) + \Delta\Phi(g) \\ &= 2 + \Phi'(g) - \Phi(g) + \Phi'(p) - \Phi(p) + \Phi'(v) - \Phi(v) \\ &= 2 + \Phi'(g) + \Phi'(p) - \Phi(p) - \Phi(v) \dots \quad (\because \Phi'(v) = \Phi(g)) \\ &\leq 2 + \Phi'(g) + \Phi'(p) - 2 \cdot \Phi(v) \dots \quad (\because \Phi(v) < \Phi(p)) \\ &\leq 2 + 2 \cdot \Phi'(v) - 2 - 2 \cdot \Phi(v) \dots \quad (\because \Phi'(g) + \Phi'(p) \leq 2 \cdot \Phi'(v) - 2) \\ &= 2 \cdot [\Phi'(v) - \Phi(v)] \end{aligned}$$

这里的最后一步放大，需利用对数函数 $f(x) = \log_2 x$ 的性质，即该函数属于凹函数（concave function），因此必有：

$$\frac{\log_2 a + \log_2 b}{2} \leq \log_2 \frac{a+b}{2}$$

亦即：

$$\log_2 a + \log_2 b \leq 2 \cdot \log_2 \frac{a+b}{2} = 2 \cdot [\log_2(a+b) - 1] < 2 \cdot (\log_2 c - 1)$$

情况C) zig-zig

作为双旋的组合，这一调整实际所需时间为 $T = O(2)$ 。于是由教材206页图8.3可知

$$\begin{aligned} A &= T + \Delta\Phi \\ &= 2 + \Delta\Phi(v) + \Delta\Phi(p) + \Delta\Phi(g) \\ &= 2 + \Phi'(g) - \Phi(g) + \Phi'(p) - \Phi(p) + \Phi'(v) - \Phi(v) \\ &= 2 + \Phi'(g) + \Phi'(p) - \Phi(p) - \Phi(v) \dots \quad (\because \Phi'(v) = \Phi(g)) \\ &\leq 2 + \Phi'(g) + \Phi'(p) - 2 \cdot \Phi(v) \dots \quad (\because \Phi(v) < \Phi(p)) \\ &\leq 2 + \Phi'(g) + \Phi'(v) - 2 \cdot \Phi(v) \dots \quad (\because \Phi'(p) < \Phi'(v)) \\ &\leq 3 \cdot [\Phi'(v) - \Phi(v)] \dots \quad (\because \Phi'(g) + \Phi(v) \leq 2 \cdot \Phi'(v) - 2) \end{aligned}$$

同样地，其中最后一步放大也需利用对数函数的凹性。

综合以上各种情况可知，无论具体过程如何，伸展操作的每一步至多需要 $3 \cdot [\Phi'(v) - \Phi(v)]$ 时间。因此，若在对伸展树的某次操作中，节点 v 经过一连串这样的调整上升成为根节点 r ，则整趟伸展操作总体所需的分摊时间为：

$$\begin{aligned} A &\leq 1 + 3 \cdot [\Phi(r) - \Phi(v)] \leq 1 + 3 \cdot \Phi(r) \\ &= O(1 + \log n) = O(\log n) \end{aligned}$$

[8-3] 试扩充 RedBlack 模板类（教材 230 页代码 8.13），使之支持多个相等数据项的并存。

为此，需要增加 `searchAll(e)` 和 `removeAll(e)` 接口，以查找或删除等于指定目标 e 的所有节点。

同时，原先的 `search(e)` 和 `remove(e)` 接口，将转而负责查找或删除等于指定目标 e 的任一节点。

【解答】

原理及方法，均与习题[7-10]（149页）和习题[7-16]（152页）完全相同。

请读者独立完成编码和调试任务。

[8-4] 试对于任何指定的 m 和 N ，构造一棵存有 N 个关键码的 m 阶 B 树，使得在其中插入某个特定关键码之后，需要进行 $\Omega(\log_m N)$ 次分裂。

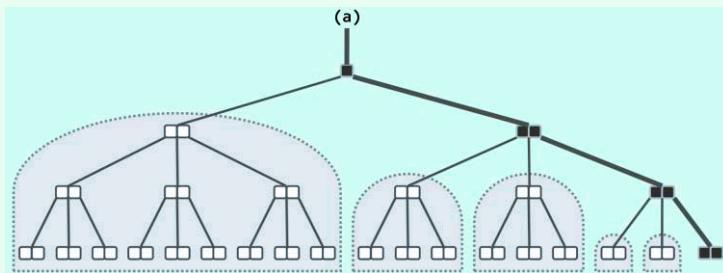
【解答】

不妨设 m 为奇数（偶数的情况方法类似，请读者独立补充）。

首先，考查由尽可能少的关键码组成的高度为 h 的 m 阶 B-树。

例如，如图x8.1所示即是一棵高度 $h = 4$ 的 $m = 5$ 阶 B-树，其使用的关键码总数为：

$$2 \cdot \lceil m/2 \rceil^{h-1} - 1 = 53$$

图x8.1 高度 $h = 4$ 、由53个节点组成的一棵5阶B-树

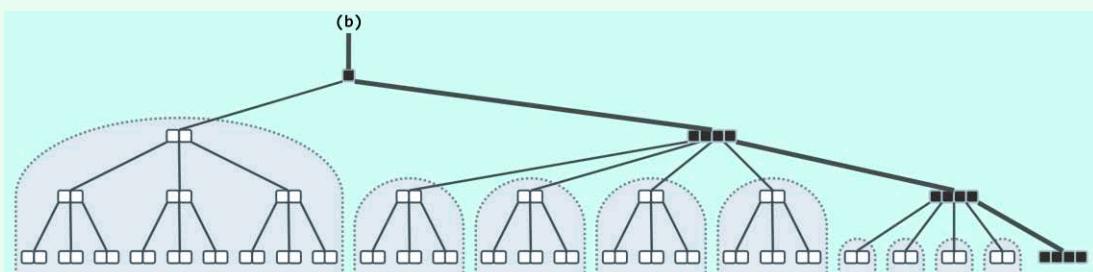
考查该树的最右侧通路。因该通路在图中以粗线条和黑色方格示意，故不妨将沿途的关键码称作黑关键码，其余称作白关键码。于是，如阴影虚框所示，可以将整棵树分割为一系列的子树。

进一步地，如此划分出来的子树，可与最右侧通路上的关键码建立起一一对应的关系：每棵子树的直接后继都是一个黑关键码——亦即不小于该子树的最小关键码。当然特别地，最右侧通路末端节点中的关键码可视作空树的直接后继。

不妨设此树所存的关键码为：

$$\{1, 2, \dots, n\}$$

以下，若从 $n + 1$ 起，按递增次序继续插入关键码，则只能沿最右侧通路发生分裂。而且，在根节点保持只有单个关键码的前提下，全树的高度必然保持不变。考查如此所能得到的规模最大的B-树，除根节点外，其最右侧通路上各节点都应含有 $m - 1$ 个关键码（处于饱和状态）。这样的一个实例，如图x8.2所示。

图x8.2 高度 $h = 4$ 、由79个节点组成的一棵5阶B-树

若将黑、白关键码所属的节点，亦分别称作黑节点、白节点，则此时它们应分别处于上溢和下溢的临界状态。接下来若再插入一个关键码，而且大于目前已有的所有关键码，则必然会沿着最右侧通路（持续）发生 $h - 1$ 次分裂。

161

为统计该树的规模，依然如图中阴影虚框所示，沿着最右侧通路将所有节点分组。进一步地，如此划分出来的子树，同样与最右侧通路上的黑关键码一一对应。

以下，我们将每棵子树与对应的黑关键码归为一组。如此划分之后，考查其中高度为 k 的任一子树所属的分组，不难发现其规模应为：

$$\lceil m/2 \rceil^k$$

因此，全树的总规模应为：

$$\begin{aligned}\hat{N} &= \lceil m/2 \rceil^{h-1} + (m - 1) \cdot (\lceil m/2 \rceil^{h-2} + \lceil m/2 \rceil^{h-3} + \dots + \lceil m/2 \rceil^0) \\ &= [\lceil m/2 \rceil^{h-1} \cdot (m + \lceil m/2 \rceil - 2) - m + 1] / (\lceil m/2 \rceil - 1) \dots \dots \dots (*)\end{aligned}$$

反之，便有：

$$\begin{aligned}h &= 1 + \log_{\lceil m/2 \rceil} [((\lceil m/2 \rceil - 1) \cdot \hat{N} + m - 1) / (m + \lceil m/2 \rceil - 2)] \\ &= \Theta(\log_{\lceil m/2 \rceil} \hat{N}) = \Theta(\log_m \hat{N})\end{aligned}$$

因此，对于任意指定的规模 N ，若令：

$$h = 1 + \lfloor \log_{\lceil m/2 \rceil} [((\lceil m/2 \rceil - 1) \cdot N + m - 1) / (m + \lceil m/2 \rceil - 2)] \rfloor$$

并按(*)式估算出 $\hat{N} \leq N$ ，则可按上述方法构造一棵高度为 h 、规模为 \hat{N} 的 m 阶B-树，且接下来只要再插入一个全局最大关键码，就会沿最右侧通路发生 $h - 1 = \Omega(\log_m \hat{N})$ 次分裂。而其余 $N - \hat{N}$ 个关键码，可在不影响最右侧通路的前提下，作为自关键码适当地插入并散布到各棵子树当中。

[8-5] 现拟将一组共 n 个互异的关键码，插入至一棵初始为空的 m 阶B-树中，设 $m \ll n$ 。

a) 按照何种次序插入这批关键码，可使所得到的B-树高度最大？

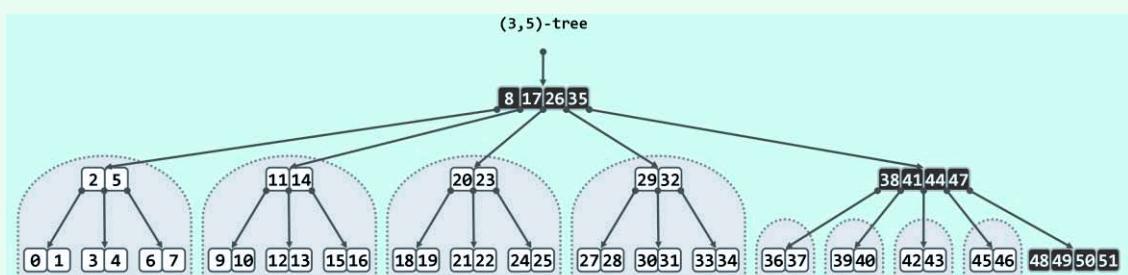
【解答】

保证B-树达到最大高度的一种简明方法，就是按单调次序插入所有关键码。

不妨设 m 为奇数（偶数的情况方法类似，请读者补充）。比如，按单调递增次序将：

{ 0, 1, 2, ..., 51 }

插入初始为空的5阶B-树，所生成B-树的结构应如图x8.3所示。



图x8.3 按递增插入[0, 52)而生成的5阶B-树

一般地，不难验证：在按递增次序插入各关键码的过程中，最右侧通路（沿途节点在图中以黑色示意）以下的所有子树（以虚框包围的各组白色节点），始终都属于“稀疏临界”状态。在处于这种状态的子树中，任一节点的删除，都将引起持续的合并操作，并导致高度的下降。

因此，若阶次为 m ，则此类子树中的每个节点均有 $\lceil m/2 \rceil$ 分支；若其高度为 h ，则其下所含的外部节点总数应为 $\lceil m/2 \rceil^h$ ，内部节点总数应为 $\lceil m/2 \rceil^h - 1$ 。在上例中 $m = 5$ ，于是高度为 $h = 1$ 的（4棵）此类子树必然包含3个外部节点和2个内部节点，高度为 $h = 2$ 的（4棵）此类子树必然包含9个外部节点和8个内部节点。

实际上若采用单调递增的次序，则每次插入的关键码在当前都属最大。因此，插入算法必然沿着最右侧通路做查找并确定其插入位置；而一旦出现上溢现象，也只能沿最右侧通路实施分裂操作。如此，尽管最右侧通路下属的子树可能会增加，但它们始终保持稀疏临界状态。

一般地，仿照教材8.2.4节的分析方法可知：如此插入 $[0, n)$ 而生成的 m 阶B-树，高度应为：

$$h = h_{\max} = \log_{\lceil m/2 \rceil} \lfloor (n + 1)/2 \rfloor + 1$$

仍以上述B-树为例， $m = 5$ ， $n = 52$ ，故树高应为：

$$h = \log_{\lceil 5/2 \rceil} \lfloor (52 + 1)/2 \rfloor + 1 = 3$$

若继续插入下一关键码52，则在持续分裂3次之后，树高将增至：

$$h = \log_{\lceil 5/2 \rceil} \lfloor (53 + 1)/2 \rfloor + 1 = 4$$

依然是此时所能达到的最大树高。

b) 按照何种次序插入这批关键码，可使所得到的B-树高度最小？

【解答】

请读者参照a) 中思路，独立给出解答。

[8-6] 考查任意阶的B-树T。

a) 若T的初始高度为1，而在经过连续的若干次插入操作之后，高度增加至h且共有n个内部节点，则在此过程中T总共分裂过多少次？

【解答】

考查因新关键码的插入而引起的任何一次分裂操作。

被分裂的节点，无非两种类型。若它不是根节点，则树中的节点增加一个，同时树高保持不变，故有：

$$n += 1 \text{ 和 } h += 0$$

否则若是根节点，则除了原节点一分为二，还会新生出一个（仅含单关键码的）树根，同时树的高度也将相应地增加一层，故有：

$$n += 2 \text{ 和 } h += 1$$

可见，无论如何， n 与 h 的差值均会恰好地增加一个单位——因此， $n - h$ 可以视作为分裂操作的一个计数器。该计数器的初始值为 $1 - 1 = 0$ ，故最终的 $n - h$ 即是从初始状态之最后，整个过程中所做分裂操作的总次数。

请注意，以上结论与各关键码的数值大小以及具体的插入过程均无关，仅取决于B-树最初和最终的状态——高度和内部节点数。

b) 在如上过程中，每一关键码的插入，平均引发了多少次分裂操作？

【解答】

由上可见，累计发生的分裂操作次数，不仅取决于连续插入操作的次数，同时也取决于最终的树高。前者亦即树中最终所含关键码的总数N，后者即是h。

若关键码总数固定为N，则为使节点尽可能地多，内部节点各自所含的关键码应尽可能地少。注意到根节点至少包含1个关键码，其余内部节点至少包含 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个关键码，故必有：

$$n \leq 1 + (N - 1) / (\lceil m/2 \rceil - 1)$$

因此，在如上连续的N次插入操作中，分裂操作的平均次数必然不超过：

$$(n - h) / N < n / N < 1 / (\lceil m/2 \rceil - 1)$$

可见，平均而言，大致每经过 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 次插入，才会发生一次分裂。

根据习题[8-4]的结论，某一关键码的插入，在最坏情况下可能引发多达 $\Omega(\log_m N)$ 次的分裂。对照本题的结论可知，这类最坏情况发生的概率实际上极低。

c) 若 T 的初始高度为 h 且含有 n 个内部节点，而在经过连续的若干次删除操作之后高度下降至 1，则在此过程中 T 总共合并过多少次？

【解答】

与a) 同理，若合并后的节点不是树根，则有

$$n = 1 \text{ 和 } h = 0$$

否则若是根节点，则有：

$$n = 2 \text{ 和 } h = 1$$

可见，无论如何，n与h的差值 $n - h$ 均会恰好地减少一个单位。既然最终有：

$$n = h = 1 \text{ 或等价地 } n - h = 0$$

故其间所发生合并操作的次数，应恰好等于 $n - h$ 的初值。

同样请注意，以上结论与各关键码的数值大小以及具体的删除过程均无关，仅取决于B-树最初和最终的状态——高度和内部节点数。

d) 设 T 的初始高度为 1，而且在随后经过若干次插入和删除操作——次序任意，且可能彼此相间。

试证明：若在此期间总共做过 s 次分裂和 m 次合并，且最终共有 n 个内部节点，高度为 h，则必有：

$$s - m = n - h$$

【解答】

综合a) 和c) 的结论可知：在B-树的整个生命期内， $n - h$ 始终忠实反映了分裂操作次数与合并操作次数之差。

需要特别说明的是，以上前三问只讨论了连续插入和连续删除的情况，其结论并不适用于本问的情况——两种操作可以任意次序执行。下题将要考查的，即是其中的极端情况。

[8-7] 设 $m \geq 3$ 为奇数。试对任意的 $h > 0$ ，构造一棵高度为 h 的 m 节 B-树，使得若反复地对该树交替地执行插入、删除操作，则每次插入或删除操作都会引发 h 次分裂或合并。

【解答】

若从一棵空的 m 节 B-树开始，按单调顺序依次插入以下关键码：

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, N\}, \quad \text{其中, } N = 2 \cdot [((m+1)/2)^h - 1]$$

则易见，树高恰好为 h ，而且最右侧通路上的节点均有 m 个分支，其余节点各有 $(m+1)/2$ 个分支。

于是，接下来若继续插入关键码 $N + 1$ ，则会沿最右侧通路发生 h 次分裂，全树增高一层；接下来若再删除关键码 $N + 1$ ，则会沿着最右侧通路发生 h 次合并，全树降低一层。

更重要的是，如此经过一轮插入和删除，该树宏观的结构以及各节点的组成，都将完全复原。这就意味着，若反复地如此交替地插入和删除，则每一次操作都会在该树中引发 h 处结构性改变。

当然，此类最坏情况在实际应用中出现的概率同样极低，平均而言，B-树节点分裂与合并的次数依然极少。

[8-8] 对比本章所介绍的 B-树插入与删除算法后不难发现，二者并不完全对称。

比如，删除关键码时若发生下溢，则可能采用旋转（通过父亲间接地向兄弟借得一个关键码）或者合并两种手段进行修复；然而，插入关键码时若发生上溢，却只是统一通过分裂进行修复。

实际上从理论上讲，也可优先通过旋转来修复上溢：

只要某个兄弟仍处于非饱和状态，即可通过父亲，间接地向该兄弟借得一个关键码

a) 仿照代码 8.12（教材 226 页），在代码 8.10（教材 221 页）的基础上做扩充，按上述思路优先通过旋转来修复上溢；

【解答】

这种修复上溢的方法，原理与教材的图 8.17（223 页）或图 8.18（223 页）相同，过程恰好相反。请读者根据以上介绍和提示，独立完成编码和调试任务。

b) 在实际应用中，为何不倾向于采用这种手段，而是更多地直接通过分裂来修复上溢？

【解答】

表面上看，B-树的插入操作与删除操作方向相反、过程互逆，但二者并非简单的对称关系。在删除操作的过程中若当前节点发生下溢，未必能够通过合并予以修复——除非其兄弟节点亦处于下溢的临界状态。而在插入操作的过程中若当前节点发生上溢，则无论其兄弟节点的状态和规模如何，总是可以立即对其实施分裂操作。

实际上就算法的控制逻辑而言，优先进行分裂更为简明。而根据习题[8-6]的分析结论，在 B-树的生命期内，分裂操作通常都不致过于频繁地发生。因此，不妨直接采用优先进行分裂的策略来修复上溢节点。

另外，优先进行分裂也不致于导致空间利用率的显著下降。实际上无论分裂多少次，无论分裂出多少个节点，根据 B-树的定义，其空间利用率最差也不致低于 50%。

最后，优先分裂策略也不致于导致树高——决定 I/O 负担以及访问效率的主要因素——的明显增加。实际上根据教材 8.2.4 节的分析结论，B-树的高度主要取决于所存关键码的总数，而与其中节点的数目几乎没有关系。

[8-9] 极端情况下，B-树中根以外所有节点只有 $\lceil m/2 \rceil$ 个分支，空间使用率大致仅有 50%。而若按照教材 8.2 节介绍的方法，简单地将上溢节点一分为二，则有较大的概率会出现或接近这种极端情况。

为提高空间利用率，可将内部节点的分支数下限从 $\lceil m/2 \rceil$ 提高至 $\lceil 2m/3 \rceil$ 。于是，一旦节点 v 发生上溢且无法通过旋转完成修复，即可将 v 与其（已经饱和的某一）兄弟合并，再将合并节点等分为三个节点。采用这一策略之后，即得到了 B-树的一个变种，称作 B^* -树 (B^* -tree)^{[39][40]}。

当然，实际上不必真地先合二为一，再分为三。可通过更为快捷的方式，达到同样的效果：从来自原先两个节点及其父节点的共计 $m + (m - 1) + 1 = 2m$ 个关键码中，取出两个上交给父节点，其余 $2m - 2$ 个则尽可能均衡地分摊给三个新节点。

a) 按照上述思路，实现 B^* -树的关键码插入算法；

【解答】

如题中所述，若对空间利用率和树的高度十分在意，也不妨采用优先旋转的策略：一旦发生上溢，首先尝试从上溢节点将部分关键码转移至（尚未饱和的）兄弟节点。

请读者参照以上介绍和提示，独立完成编码和调试任务。

b) 与 B-树相比， B^* -树的关键码删除算法又有何不同？

【解答】

与插入过程对称地，从节点 v 中删除关键码后若发生下溢，且其左、右兄弟均无法借出关键码，则先将 v 与左、右兄弟合并，再将合并节点等分为两个节点。同样地，实际上不必真地先合三为一，再分为而。可通过更为快捷的方式，达到同样的效果：从来自原先三个节点及其父节点的共计：

$$(\lceil m/2 \rceil - 1) + 1 + (\lceil m/2 \rceil - 2) + 1 + (\lceil m/2 \rceil - 1) = 3 \cdot \lceil m/2 \rceil - 2$$

个关键码中，取一个上交给父节点，其余 $3 \cdot \lceil m/2 \rceil - 3$ 个则尽可能均衡地分摊给两个新节点。

注意，以上所建议的方法，不再是每次仅转移单个关键码，而是一次性地转移多个——效于上溢或下溢节点与其兄弟平摊所有的关键码。采用这一策略，可以充分地利用实际应用中普遍存在的高度数据局部性，大大减少读出或写入节点的 I/O 操作。

不难看出，单关键码的转移尽管也可以修复上溢或下溢的节点，但经如此修复之后的节点将依然处于上溢或下溢的临界状态。接下来一旦继续插入或删除近似甚至重复的关键码（在局部性较强的场合，这种情况往往会反复出现），该节点必将再次发生上溢或下溢。由此可见，就修复效果而言，多关键码的成批转移，相对单关键码的转移更为彻底——尽管还不是一劳永逸。

针对数据局部性的另一改进策略，是使用所谓的页面缓冲池（buffer pool of pages）。这是在内存中设置的一个缓冲区，用以保存近期所使用过节点（页面）的副本。

只要拟访问的节点仍在其中（同样地，在局部性较强的场合，这种情况也往往会反复出现），即可省略 I/O 操作并直接访问；否则，才照常规方法处理，通过 I/O 操作从外存取出对应的节点（页面）。缓冲池的规模确定后，一旦需要读入新的节点，只需将其中最不常用的节点删除即可腾出空间。

实际上，不大的页面缓冲池即可极大地提高效率。请读者通过实验统计，独立作出验证。

c) 按照你的构想，实现 B^* -树的关键码删除算法。

【解答】

请读者参照以上介绍和提示，独立完成编码和调试任务。

[8-10] Java 语言所提供的 `java.util.TreeMap` 类是用红黑树实现的。

试阅读相关的 Java 源代码，并就其实现方式与本章的 C++ 实现做一比较。

【解答】

请读者对照教材中实现的红黑树，独立完成代码阅读和比较任务。

[8-11] H. Olivie 于 1982 年提出的半平衡二叉搜索树 (half-balanced binary search trees)^[47]，

非常类似于红黑树。这里所谓的半平衡 (half-balanced)，是指此树的什么性质？

试阅读参考文献，并给出你的理解。

【解答】

按照定义，在半平衡二叉搜索树中，每个节点 v 都应满足以下条件： v 到其最深后代（叶）节点的距离，不得超过到其最浅后代叶节点距离的两倍。

若半平衡二叉搜索树所含内部节点的总数记作 n ，高度记作 h ，则可以证明必有：

$$h \leq 2 \cdot \log_2(n + 2) - 2$$

请读者在阅读相关文献之后，独立给出自己的理解。

[8-12] 人类所拥有的数字化数据的总量，在 2010 年已经达到 ZB ($2^{70} = 10^{21}$) 量级。

假定其中每个字节自成一个关键码，若用一棵 $m = 256$ 阶的 B-树来存放它们，则

a) 该树的最大高度是多少？

【解答】

首先需要指出的是，鉴于目前常规的字节仅含 8 个比特位，可能的关键码只有 $2^8 = 256$ 种，故数据集中必然含有大量重复，因此若果真需要使用 B- 树来存放该数据集，可参照习题 [7-10] (149 页) 和习题 [7-16] (152 页) 的方法和技巧，扩展 B- 树结构的功能，使之支持重复关键码。

根据教材 8.2.4 节的分析结论，存放 $N < 10^{21}$ 个关键码的 $m = 256$ 阶 B- 树，高度不会超过

$$\begin{aligned} \log_{\lceil m/2 \rceil} \lfloor (N + 1)/2 \rfloor + 1 &= \log_{128} \lfloor (1 + 10^{21})/2 \rfloor + 1 \\ &\sim \log_2 10^{21} / \log_2 128 + 1 \sim 70 / 7 + 1 = 11 \end{aligned}$$

b) 最小呢？

【解答】

同样根据教材 8.2.4 节的分析结论，该 B- 树的高度不会低于

$$\log_m(N + 1) = \log_{256}(10^{21} + 1) \sim \log_2 10^{21} / \log_2 256 \sim \lceil 70 / 8 \rceil = 9$$

实际应用中，多采用 128~256 阶的 B- 树。综合以上分析结论，可以明确地看到，此类 B- 树的高度并不大，而且起伏变化的范围也不大。这也是在多层次存储系统中，该结构可以成功用以处理大规模数据的原因。

[8-13] 考查含有 2012 个内部节点的红黑树。

a) 该树可能的最小黑高度 d_{\min} 是多少 ?

【解答】

将红黑树中内部节点的总数记作 N , 将其黑高度记作 d 。

若考查与之相对应的4阶B-树, 则该B-树中存放的关键码恰有 N 个, 且其高度亦为 d 。于是, 再次根据教材8.2.4节的分析结论, 最小黑高度应为:

$$d_{\min} = \lceil \log_4(N + 1) \rceil = \lceil \log_4 2013 \rceil = 6$$

b) 该树可能的最大黑高度 d_{\max} 是多少 ?

【解答】

与上同理, 最大黑高度应为:

$$\begin{aligned} d_{\max} &= 1 + \lfloor \log_{4/2} \lfloor (N + 1)/2 \rfloor \rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_2 \lfloor 2013/2 \rfloor \rfloor = 1 + \lfloor \log_2 1006 \rfloor = 10 \end{aligned}$$

c) 该树可能的最小高度 h_{\min} 是多少 ?

【解答】

根据习题[7-3], 从常规二叉搜索树的角度看, 树高不低于:

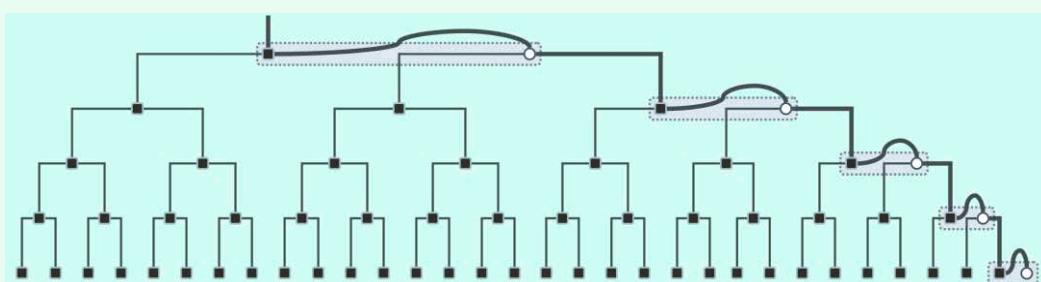
$$h_{\min} = \lfloor \log_2 N \rfloor = \lfloor \log_2 2012 \rfloor = 10$$

当然, 还需具体地构造出这样的一棵红黑树——这项任务请读者独立完成。

d) 该树可能的最大高度 h_{\max} 是多少 ?

【解答】

我们来考查与原问题等价的逆问题: 若高度固定为 h , 红黑树中至少包含多少个节点。不妨仍然考查与红黑树的对应的4阶B-树。



图x8.4 高度(计入扩充的外部节点)为10的红黑树, 至少包含62个节点

先考查 h 为偶数的情况。如图x8.4所示, 该B-树的高度应为 $h/2$; 其中几乎所有节点均只含单关键码; 只有 $h/2$ 个节点包含两个关键码 (分别对应于原红黑树中的一个红、黑节点), 它们在每一高度上各有一个, 且依次互为父子, 整体构成一条路径 (这里不妨以最右侧通路为例)。于是, 该B-树所含关键码 (亦即原红黑树节点) 的总数为:

$$N_{\min} = 2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{h/2 - 1}) = 2^{h/2 + 1} - 2$$

第9章

词典

[9-18] 设散列表容量为 11 且初始为空，采用除余法确定散列地址，采用单向平方试探法排解冲突，采用懒惰策略实现删除操作。

- a) 若通过 `put()` 接口将关键码 { 2012, 10, 120, 175, 190, 230 } 依次插入 `中`，试给出此时各桶单元的内容（提示：仿照教材 274 页图 9.18）；

【解答】

按照除余法，这一组关键码对应的初始试探位置依次为：

{ 10, 10, 10, 10, 3, 10 }

因此整个插入过程应该如下：

2012 可直接存入 10 号桶

10 经过 2 次试探，存入 $(10 + 1) \% 11 = 0$ 号桶

120 经过 3 次试探，存入 $(10 + 1 + 3) \% 11 = 3$ 号桶

175 经过 4 次试探，存入 $(10 + 1 + 3 + 5) \% 11 = 8$ 号桶

190 经过 2 次试探，存入 $(3 + 1) \% 11 = 4$ 号桶

230 经过 6 次试探，存入 $(10 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9) \% 11 = 2$ 号桶

最终结果，如图 x9.3 所示。



图 x9.3 将关键码 { 2012, 10, 120, 175, 190, 230 } , 依次插入长度为11的散列表

- b) 若再执行 `remove(2012)`，试给出此时各桶单元的内容（提示：注意懒惰删除标记）；

【解答】

如图 x9.4 所示，10 号桶被加注懒惰删除标记。



图 x9.4 删除关键码2012，并做懒惰删除标记

- c) 若继续执行 `get(2012)`，会出现什么问题？为什么？

（提示：此时虽只有 5 个关键码，但计入被懒惰删除的桶，等效的装填因子为 $(5 + 1)/11 > 50\%$ ）

【解答】

不难验证，形如：

$$(10 + k^2) \% 11, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

的整数只有 6 种选择：

{ 0, 2, 3, 4, 8, 10 }

它们构成了 2012 所对应的查找链。

然而反观如图 x9.4 所示的当前散列表可见，此时该查找链上所有的桶均非空余——其中 5 个存有关键码，1 个带有懒惰删除标记。因此，对 2012 的查找必然陷入死循环。

d) 为避免此类问题的出现，可以采取什么措施？试给出至少两种方案。

【解答】

首先，在计算装填因子时，可以同时计入带有懒惰删除标记的桶。这样，一旦发现装填因子超过50%，则可通过重散列及时地扩容，令装填因子重新回落至50%以下——根据习题[9-14]的结论，如此即可保证，查找过程必然不致出现死循环。

另外，也可以改用习题[9-17]所建议的双向平方试探法排解冲突。当然，此后如需通过重散列扩容，则散列表的容量M必须与初始的11一样，依然是形如 $4k + 3$ 的素数。

[9-19] a) 试在图结构的邻接表实现方式中，将每一列表替换为散列表；

【解答】

请读者独立完成编码和调试任务。

b) 如此，图 ADT 各操作接口的时间复杂度有何变化？

【解答】

请读者结合自己的具体实现方法，给出分析结论。

c) 总体空间复杂度有何变化？

【解答】

请读者针对自己的具体实现方法，给出分析结论。

[9-20] a) 了解 C# 所提供 GetHashCode() 方法的原理，并尝试利用该方法转换散列码；

【解答】

请读者独立完成代码阅读及相关实验任务。

b) 了解 Java 所提供 hashCode() 方法的原理，并尝试利用该方法转换散列码；

【解答】

对于任意对象x，`x.GetHashCode()`返回的散列码实际上就是x在内存中的地址。因此，可能出现如下奇特的现象：（包括关键码在内）数值完全相等的两个对象，散列码居然不同。

请读者独立完成代码阅读及相关实验任务。

c) 这两个接口存在什么潜在的问题？为此在实际应用中，还需对它们做何调整？

【解答】

请读者独立完成代码阅读及分析任务，并根据自己的理解给出解答。

[9-21] 考查教材 9.4.1 节介绍的基本桶排序算法。

若采用习题[9-11]中的技巧，可将其中散列表初始化所需的时间从 $O(M)$ 优化至常数。

a) 算法的整体时间复杂度，是否因此亦有所改进？

【解答】

因为最后一步仍然需要花费 $O(M)$ 时间遍历整个散列表，故总体的渐进时间复杂度并无改变。

b) 空间方面，需要付出多大的代价？是否会影响到渐进的空间复杂度？

【解答】

按照习题[2-34]中Bitmap类的实现方式，新增的空间与原先所需的空间渐进等量，故亦总体的渐进空间复杂度亦保持不变。

[9-22] 任给来自于 $[0, n^d]$ 范围内的 n 个整数，其中常数 $d > 1$ 。

试设计并实现一个算法，在 $O(n)$ 时间内完成对它们的排序。（提示：基数排序）

【解答】

首先，在 $O(dn) = O(n)$ 时间内，将这些整数统一转换为 n 进制的表示。如此，每个整数均不超过 d 位。若将每一位视作一个域（字段），则这些整数的排序依据，即等效于（由高位至低位）按照这些域的字典序。因此接下来，只需直接套用基数排序算法，即可实现整体排序。

以上基数排序过程包含 d 趟桶排序，累计耗时：

$$d \cdot O(n) = O(dn) = O(n)$$

[9-23] 若将任一有序序列等效地视作有序向量，则其中每个元素的秩，应恰好就等于序列中不大于该元素的元素总数。例如，其中最小、最大元素的秩分别为 0、 $n - 1$ ，可以解释为：分别有 0 和 $n - 1$ 个元素不大于它们。根据这一原理，只需统计出各元素所对应的这一指标，也就确定了它们在有序向量中各自所对应的秩。

a) 试按照以上思路，实现一个排序算法^②；

【解答】

表x9.2 对序列{ 5a, 2a, 3, 2b, 9a, 5b, 9b, 8, 2c }的直接计数排序

输入序列	5a	2a	3	2b	9a	5b	9b	8	2c
更小的元素总数	4	0	3	0	7	4	7	6	0
相等的前驱总数	0	0	0	1	0	1	1	0	2
在排序序列中的秩	4	0	3	1	7	5	8	6	2

为每个元素设置一个计数器，初始值均取作 0。以下对于每个元素，都遍历一趟整个序列，并统计出小于该元素的元素总数，以及在位于该元素之前、与之相等的元素总数。最后，根据以上两项之和，即可确定各元素在排序序列中对应的秩。

^② 亦即，所谓的计数排序 (counting sort) 算法

仍如教材277页图9.21所示，考查待排序序列{ 5a, 2a, 3, 2b, 9a, 5b, 9b, 8, 2c }按照以上算法，每个元素的各项统计数值如表x9.2所示。

对照教材的图9.21可见，排序结果完全一致。

请特别留意这里选择的扫描方向，并体会为何如此可以保证该算法的稳定性。

b) 你的这一算法，时间和空间复杂度各是多少？

【解答】

该算法供需 $\mathcal{O}(n)$ 趟遍历，每趟遍历均需 $\mathcal{O}(n)$ 时间，故累计耗时为 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

除了原输入序列，这里引入的计数器还共需 $\mathcal{O}(n)$ 辅助空间。

c) 改进你的算法，使之能够在 $\mathcal{O}(n + M)$ 时间内对来自 $[0, M]$ 范围内的 n 个整数进行排序，且使用的辅助空间不超过 $\mathcal{O}(M)$ 。

【解答】

计算过程，大致可以描述如算法x9.1所示：

```

1 int* countingSort(int A[0, n))
2   引入一个可计数的散列表 $\mathcal{H}[0, M]$ ，其长度等于输入元素取值范围的宽度M
3   将 $\mathcal{H}[]$ 中所有桶的数值，初始化为0
4   遍历输入序列A[0, n] //遍历计数， $\mathcal{O}(n)$ 
5     对每一项A[k]，令 $\mathcal{H}[A[k]]++$ 
6   遍历散列表 $\mathcal{H}[0, M]$  //逐项累加， $\mathcal{O}(M)$ 
7     对每一项 $\mathcal{H}[i]$ ，令 $\mathcal{H}[i+1] += \mathcal{H}[i]$ 
8   创建序列S[0, n]，用以记录排序结果
9   逆向遍历输入序列A[0, n] //逐项输出， $\mathcal{O}(n)$ 
10  对每一项A[k]
11    令S[ - $\mathcal{H}[A[k]] ] = A[k]$ 
12  返回S[0, n]

```

算法x9.1 整数向量的计数排序算法

同样地，也请读者特别留意这里对输入序列和散列表的扫描方向，并体会为何如此可以保证该算法的稳定性。

其中每个步骤各自所需的时间，如注释所示。总体而言，执行时间不超过 $\mathcal{O}(n + M)$ 。需要特别说明的是，若 $n \gg M$ ，则排序时间为 $\mathcal{O}(n)$ ，优于面向一般情况最优的 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。另外从算法流程这也就是所谓的“小集合、大数据”情况，在当下实际应用中，这已成为数据和信息处理的主流需求类型。

空间方面，除了输出序列S[]，这里只引入了一个规模为 $\mathcal{O}(M)$ 的散列表。

仍以教材277页图9.21中序列为为例。按照以上算法，所有元素各项统计数值如表x9.3所示。

表x9.3 借助散列表对{ 5a, 2a, 3, 2b, 9a, 5b, 9b, 8, 2c }的计数排序(凡“-”项均与其上方项相等)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	输出
$\pi[k]$	$\pi[k]$ 初始值	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	遍历计数之后	0	0	3	1	0	2	0	0	1	2
	逐项累加之后	0	0	3	4	4	6	6	7	9	
	逆序逐项输出	-	-	2	-	-	-	-	-	-	$S[2] = 2c$
		-	-	-	-	-	-	-	6	-	$S[6] = 8$
		-	-	-	-	-	-	-	-	8	$S[8] = 9b$
		-	-	-	-	-	5	-	-	-	$S[5] = 5b$
		-	-	-	-	-	-	-	-	7	$S[7] = 9a$
		-	-	1	-	-	-	-	-	-	$S[1] = 2b$
		-	-	-	3	-	-	-	-	-	$S[3] = 3$
		-	-	0	-	-	-	-	-	-	$S[0] = 2a$
		-	-	-	-	-	4	-	-	-	$S[4] = 5a$

[9-24] 习题[4-18] (100页) 曾指出，同一整数可能同时存在多个费马-拉格朗日 (Fermat-Lagrange) 分解，其中，四个整数之和最小者称作最小分解。比如：

$$\begin{aligned}
 101 &= 0^2 + 0^2 + 1^2 + 10^2 = (0, 0, 1, 10) \\
 &= 0^2 + 1^2 + 6^2 + 8^2 = (0, 1, 6, 8) \\
 &= 0^2 + 2^2 + 4^2 + 9^2 = (0, 2, 4, 9) \\
 &= 0^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = (0, 4, 6, 7) \\
 &= 2^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 = (2, 5, 6, 6)
 \end{aligned}$$

其中(0, 0, 1, 10)即为101的最小费马-拉格朗日分解，因为组成它的四个整数之和11为最小。

a) 试设计并实现一个算法，对任何整数 $n > 0$ ，输出[1, n]内所有整数的最小费马-拉格朗日分解；

【解答】

引入散列表 $\pi[0, n]$ ，记录此区间内各整数当前的最小分解方案。枚举所有可能的分解方案，并不断刷新各散列表项。当然，在枚举的过程中，需充分利用该问题的特点，做有效的剪枝。

请读者根据以上提示，独立完成编码和调试任务。

b) 你的算法需要运行多少时间？空间呢？

【解答】

蛮力算法大致需要运行 $\mathcal{O}((\sqrt{n})^4) = \mathcal{O}(n^2)$ 时间；空间主要消耗于散列表，占用 $\mathcal{O}(n)$ 的辅助空间。请读者根据各自所设计并采用的优化策略，给出更加具体和准确的估计。

[9-25] 散列技术在信息加密领域有着广泛应用，比如数字指纹的提取与验证。试通过查阅资料和编程实践：

a) 了解MD5、SHA等主流数字指纹的定义、功能、原理及算法流程；

【解答】

请读者独立完成相关资料的阅读，以及算法的编码和调试任务。

- b) 以 Python 语言提供的 `hashlib` 模块库为例，学习 `md5()`、`sha1()`、`sha224()`、`sha256()`、`sha384()`、`sha512()` 等接口的使用方法。

【解答】

请读者独立完成相关资料的阅读，并学习相关接口的使用方法。

[9-26] 当元素类型为字符串时，为避免复杂的散列码转换，可以改用键树（trie）结构来实现词典 ADT。

- a) 试在 118 页习题[5-30]的基础上，基于键树结构实现词典的 `get()`、`put()` 和 `remove()` 接口，要求其时间复杂度分别为 $\mathcal{O}(h)$ 、 $\mathcal{O}(hr)$ 和 $\mathcal{O}(hr)$ ，其中 h 为树高， $r = |\Sigma|$ 为字符表规模。

【解答】

请读者根据有关介绍及提示，独立完成编码和调试任务。

- b) `remove()` 接口复杂度中的因子 r 可否消除？（提示：之所以会有因子 r ，是因为在最坏情况下，在删除每个节点之前，都需要花费 $\mathcal{O}(r)$ 的时间，确认对应向量中的每个指针是否都是 `NULL`）

【解答】

若沿用习题[5-30]的方式，用向量实现每个节点，则正如以上提示所指出的原因，无法消除 `remove()` 接口复杂度中的因子 r 。

- c) `put()` 接口复杂度中的因子 r 可否消除？（提示：之所以会有因子 r ，是因为在最坏情况下，在创建每个节点之后，都需要花费 $\mathcal{O}(r)$ 的时间，将对应向量中的每个指针都初始化为 `NULL`）

【解答】

与 b) 同理，若用向量实现键树节点，则 `put()` 接口复杂度中的因子 r 亦难以消除。

- d) 试举例说明，以上实现方式在最坏情况下可能需要多达 $\Omega(nr)$ 的空间，其中 $n = |S|$ 为字符串集的规模。

【解答】

比如，若 S 中的字符串均互不为前缀，则每个字符串都唯一对应于一个叶节点。于是，即便只计入这 n 个叶节点，累计空间总量也至少有 $n \cdot \Omega(r) = \Omega(nr)$ 。

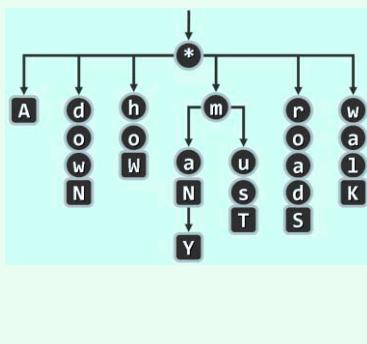
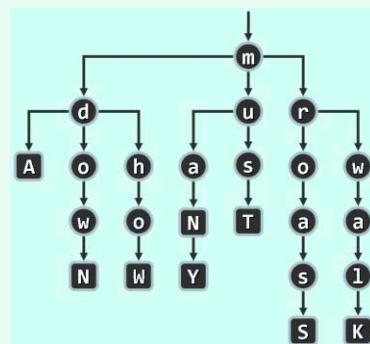
- e) 试改用列表来实现各节点，使所需空间的总量线性正比于 S 中所有字符串的长度总和——当然，`get()` 接口的效率因此会降至 $\mathcal{O}(hr)$ ，其中 h 为树高，同时也是 S 中字符串的最大长度。
(提示：参考文献[54])

【解答】

改用列表实现各节点后，每个节点的规模与实际的分支数成正比，每个字符串的每个字符至多占用 $\mathcal{O}(1)$ 的空间，总体空间消耗量不超过所有字符串的总长。

为此，在每个节点需要 $\mathcal{O}(r)$ 时间做顺序查找，以确定深入的分支方向，总体时间增至 $\mathcal{O}(hr)$ 。
请读者根据以上介绍和提示，并参考建议的文献，独立完成编码和调试任务。

f) 键树中往往包含大量的单分支节点。试如图 x9.5 所示，通过折叠合并相邻的单分支节点，进一步提高键树的时、空效率。改进之后，键树的时、空复杂度各是多少？（提示：参考文献[55]）

图x9.5 PATRICIA树 (PATRICIA tree)^③图x9.6 三叉键树 (ternary trie)^④

【解答】

具体地，也就是将向量的单分支节点合成一个大节点。尽管可以在一定程度上提高时、空效率，但从渐进角度看并无实质改进。

请读者根据以上介绍和提示，并参考建议的文献，独立完成编码和调试任务。

g) 习题[8-19] (173页) 曾介绍过四叉树 (quadtree) 结构，并指出其深度不受限制的缺陷。若将四个象限的二进制编码视作字符，即将字符表取作 $\Sigma = \{00, 01, 10, 11\}$ ，则四叉树可以看作键树的特例。试基于这一理解，仿照以上技巧对四叉树进行压缩，使其深度不致超过 $O(n)$ 。

【解答】

同样地，对于如此表示的四叉树，可以将其中相邻的单分支节点合并为大节点。

如此压缩之后，叶节点的总数固然不超过输入点集的规模n，同时内部节点也不会超过n，故总体的深度可以控制在 $O(n)$ 范围以内。

h) 仿照教材 5.1.3 节将有根有序多叉树等价变换为二叉树的技巧，试如图 x9.6 所示，以三叉树的形式进一步改进键树。其中，任一节点x的左、中、右分支非空，当且仅当s中存在下一字符小于、等于、大于x的字符串。以图中深度为1的节点u为例：其左分支非空，是因为s中存在首字符为m、次字符小于u字符串 ("man"和"many")；反之，其右分支为空，是因为s中不存在首字符为m、次字符大于u的字符串。改进之后，键树的时、空复杂度各是多少？

（提示：参考文献[56]）

【解答】

请读者根据以上介绍和提示，独立完成编码和调试任务，并针对具体的实现方式分析复杂度。

^③ 由D. Morrison于1968年发明^[55]

名字源自“Practical Algorithm To Retrieve Information Coded In Alphanumeric”的缩写

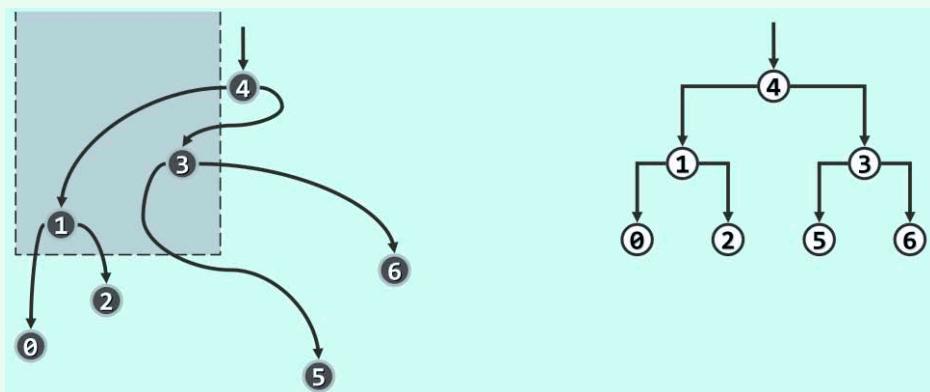
^④ 由J. Bentley和R. Sedgewick于1997年发明^[56]

第10章

优先级队列

[10-18] 所谓半无穷范围查询 (semi-infinite range query)，是教材 8.4 节中所介绍一般性范围查询的特例。具体地，这里的查询区域是某一侧无界的广义矩形区域，比如 $R = [-1, +1] \times [0, +\infty)$ ，即是对称地包含正半 y 坐标轴、宽度为 2 的一个广义矩形区域。当然，对查询的语义功能要求依然不变——从某一相对固定的点集中，找出落在任意指定区域 R 内部的所有点。

范围树 (176 页习题[8-20]) 稍作调整之后，固然也可支持半无穷范围查询，但若能针对这一特定问题所固有的性质，改用优先级搜索树 (priority search tree, PST)^① 之类的数据结构，则不仅可以保持 $\mathcal{O}(r + \log n)$ 的最优时间效率，而且更重要的是，可以将空间复杂度从范围树的 $\mathcal{O}(n \log n)$ 优化至 $\mathcal{O}(n)$ 。



图x10.3 优先级搜索树

如图 x10.3 所示，优先级搜索树除了首先在拓扑上应是一棵二叉树，还需同时遵守以下三条规则。

- ① 首先，各节点的 y 坐标均不小于其左、右孩子（如果存在）
——因此，整体上可以视作为以 y 坐标为优先级的二叉堆
- ② 此外，相对于任一父节点，左子树中节点的 x 坐标均不得大于右子树中的节点
- ③ 最后，互为兄弟的每一对左、右子树，在规模上相差不得超过一^②

a) 试按照以上描述，用 C/C++ 定义并实现优先级搜索树结构；

【解答】

请读者根据以上介绍及提示，独立完成编码和调试任务。

b) 试设计一个算法，在 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间内将平面上的 n 个点组织为一棵优先级搜索树；

【解答】

首先，不妨按照 x 坐标对所有的点排序。然后，根据如上定义，可以递归地将这些点组织为一棵优先级搜索树。

具体地，为构造任一点集对应的子树，只需花费 $\mathcal{O}(n)$ 时间从中找出最高（ y 坐标最大）者，

^① 由 E. M. McCreight 于 1985 年发明^[59]

^② 若无需遵守最后一条规则，则可保证所有节点能够以 x 坐标为序组成一棵（未必平衡的）二叉搜索树

此时，该结构兼具二叉搜索树和堆的操作特性，故亦称作树堆（treap）。treap 一词，源自 tree 和 heap 的组合

并将其作为子树树根。以下，借助x坐标的排序序列，可以在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内将剩余的 $n - 1$ 个点均衡地划分为在空间上分列于左、右的两个子集——二者各自对应的子树，可以通过递归构造。

如此，构造全树所需的时间不超过：

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n \log n)$$

c) 试设计一个算法，利用已创建的优先级搜索树，在 $\mathcal{O}(r + \log n)$ 时间内完成每次半无穷范围查询，其中 r 为实际命中并被报告的点数。

【解答】

查询算法的过程，可大致地递归描述如算法x10.1所示。

```

1 queryPST(PSTNode v, SemiInfrange R) { //R = [x1, x2] × [y, +∞)
2     if (!v || (R.y < v.y)) return; //y-pruning
3     if ((R.x1 < v.x) && (v.x < R.x2)) output(v); //hit
4     if ((R.x1 < v.xm) queryPST(v.lc, R); //recursion & x-pruning
5     if ((v.xm <= R.x2) queryPST(v.rc, R); //recursion & x-pruning
6 }
```

算法x10.1 基于优先级搜索树的半无穷范围查询算法

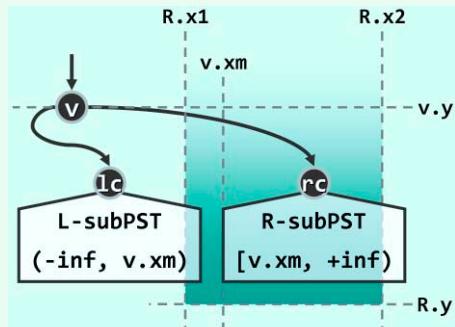
首先，根据y坐标，判断当前子树根节点 v （及其后代）是否已经落在查询范围 R 之外。若是，则可立即在此处返回，不再深入递归——亦即纵向剪枝；否则，才需要继续深入查找。

以下，再检查根节点 v 的x坐标，若落在查询范围之内，则需报告该节点。

最后，若在节点 v 处的横向切分位置为 xm ，则通过将其与 R 的左（ $x1$ ）、右（ $x2$ ）边界相比，即可确认是否有必要继续沿对应的子树分支，继续递归搜索——亦即横向剪枝。

具体地如图x10.4所示，唯有当 $R.x1$ 位于 $v.xm$ 左侧时，才有必要对左子树 $v.lc$ 做递归搜索；唯有当 $R.x2$ 不位于 $v.xm$ 左侧时，才有必要对右子树 $v.rc$ 做递归搜索。

对于任意的查询区域 $R = [x_1, x_2] \times [y, +\infty)$ ，考查被算法queryPST()访问的任一节点，设与之对应的点为 $v = (a, b)$ 。于是， v 无非三种类型：



图x10.4 基于优先级搜索树的半无穷范围查询算法

A) 被访问，且被报告出来

——也就是说， v 落在 R 之内 ($x_1 \leq a \leq x_2$ 且 $y \leq b$)。此类节点恰有 r 个。

B) 虽被访问，却未予报告

——因其x坐标落在 R 之外 ($a < x_1$ 或 $x_2 < a$) 而横向剪枝，不再深入递归。此类节点在每一层上至多只有两个，总数不超过 $\mathcal{O}(2 \cdot \log n)$ 。

C) 虽被访问，却未予报告

——尽管其x坐标落在R之内 ($x_1 \leq a \leq x_2$)，但因其y坐标却未落在R之内 ($b < y$) 而纵向剪枝，也不深入递归。实际上，此类节点的父节点，必然属于A或B类，其总数不超过这两类节点总数的两倍。

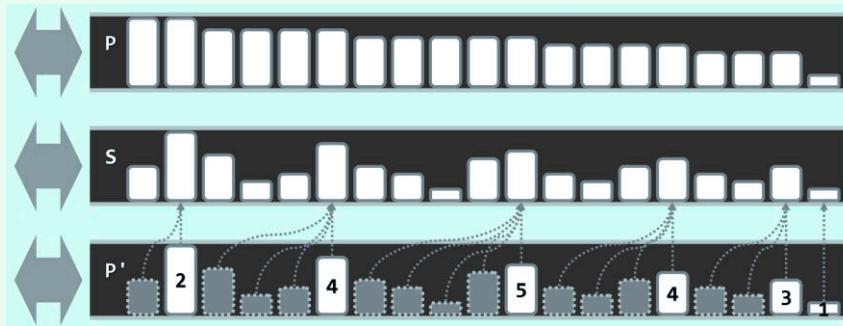
综合以上分析可知，以上queryPST()算法的渐进时间复杂度不超过 $\mathcal{O}(r + \log n)$ 。

[10-19] 试为第4章栈结构增加 Stack::getMax()接口，以在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内定位并读取栈中的最大元素。

要求 Stack::push() 和 Stack::pop() 等接口的复杂度依然保持为 $\mathcal{O}(1)$ 。

【解答】

如图x10.5所示，对于任何一个栈S，可以引入另一个与之孪生的“镜像”栈P。



图x10.5 高效支持getMax()接口的栈

具体地，P中的元素与S中的元素始终保持一一对应，前者的取值，恰好就是后者所有前驱中的最大者。当然，P中元素因此也必然按照单调非降的次序排列。如此，任何时刻栈P的顶元素，都是栈S中的最大元素。

为保持二者如上的对应关系，它们的push()和pop()操作必须同步进行。若执行：

```
S.pop();
```

则只需同步地执行：

```
P.pop();
```

而若执行：

```
S.push(e);
```

则需要同步地执行：

```
P.push(max(e, P.top()));
```

以上方案还可以进一步地优化。

仍如图x10.5所示，可将栈P“压缩”为栈P'。为此，需要注意的是，P中相等的元素必然彼此相邻，并因此可以分为若干组。若假想式地令栈P中的每个元素通过指针指向栈S中对应的元素，而不是保留后者的副本，则可以将P中的同组元素合并起来，共享一个指针。当然，同时还需为合并后的元素增设一个计数器，记录原先同组元素的总数。

如此改进之后的“镜像”结构，如图中的栈P'所示：每一组元素只需保留一份（白色），其余元素（灰色）则不必继续保存。这样，附加空间的使用量可以大为降低。

相应地，在栈S每次执行出栈操作时，栈P（P'）必须同步地执行：

```
if (!(-- P.top().counter)) P.pop();
```

而在栈S每次执行入栈操作时，栈P（P'）也必须同步地执行：

```
(P.top() < e) ? P.push(e), P.top().counter = 1 : P.top().counter ++;
```

可见，S的push()和pop()接口，依然保持 $O(1)$ 的时间效率。

请读者根据以上介绍和提示，独立完成编码和调试任务。

[10-20] 试为第4章的队列结构增加 Queue::getMax() 接口，在 $O(1)$ 时间内定位并读取其中最大元素。

要求 Queue::dequeue() 接口的时间复杂度依然保持为 $O(1)$ ，Queue::enqueue() 接口的时间复杂度不超过分摊的 $O(1)$ ^③。（提示：借助101页习题[4-22]中的双端队列结构 Deque）

【解答】

习题[10-19]针对栈结构的技巧，可以推广至队列结构。比如，可以引入一个双端队列P并依然约定，其中每个元素也是始终指向队列Q中所有其前驱中的最大者。

为保持二者的对应关系，它们的dequeue()和enqueue()操作也必须同步进行。若执行：

```
Q.dequeue();
```

则只需同步地执行：

```
P.removeFront();
```

而若执行：

```
Q.enqueue(e);
```

则只需同步地执行：

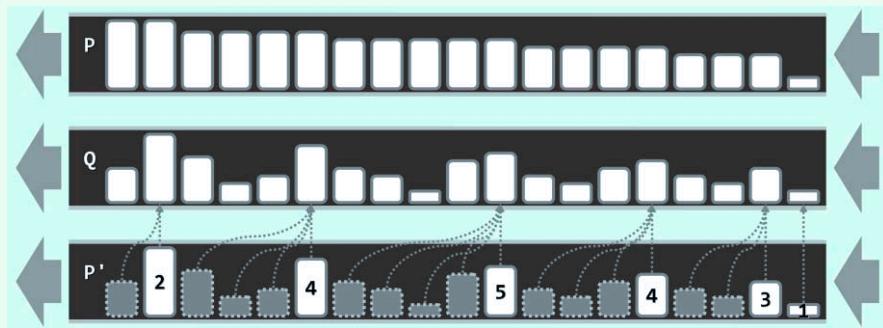
```
P.insertRear(e);
for (x = P.rear(); x && (x.key <= e); x = x.pred) //for each rear element x no greater than e
    x.key = e; //update its maximum record
```

也就是说，除了首先也令e加入队列P，而且还需要将P尾部所有不大于e的元素，统一更新为e。很遗憾，在最坏情况下这需要 $\Omega(n)$ 时间。而且更糟糕的是，这种情况可能持续发生（读者不妨独立构造出这样的一个实例）。

^③ 经如此拓展之后，这一结构同时兼具队列和堆的操作特性，故亦称作队堆（queap）

queap一词，源自queue和heap的组合

造成这一困难的原因在于，队列中任一元素的前驱集，不再如在栈中那样是固定的，而是可能增加，甚至新增的元素非常大。为此，可按照如图x10.6所示的思路进一步改进。



图x10.6 高效支持getMax()接口的队列

具体地，可首先仿照习题[10-19]的改进技巧，通过合并相邻的同组元素，将队列P压缩为队列P'。然后，在队列Q每次执行出队操作时，队列P（P'）必须同步地执行：

```
if (!(-- P.front().counter)) P.removeFront();
```

而在栈S每次执行入栈操作时，栈P（P'）也必须同步地执行：

```
a = 1; //counter accumulator
while (!P.empty() && (P.rear().key <= e) //while the rear element is no greater than e
    a += P.removeRear().counter; //accumulate its counter before removing it
P.insertRear(e); P.rear().counter = a;
```

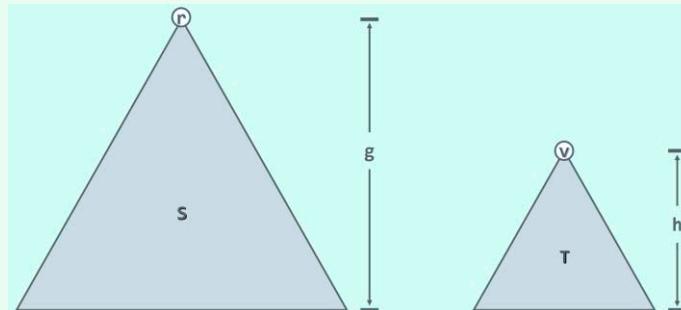
这里的**while**循环，在最坏情况下仍然需要迭代 $\mathcal{O}(n)$ 步，但因为参与迭代的元素必然随即被删除，故就分摊意义而言仅为 $\mathcal{O}(1)$ 步，时间性能大为改善。

另外，这里的队列P'并不需要具备双端队列的所有功能。实际上，它仅使用了**Deque**结构的**removeFront()**、**insertRear()**和**removeRear()**接口，而无需使用**insertFront()**接口——因此形象地说，它只不过是一个“1.5”端队列。

[10-21] 任给高度分别为g和h的两棵AVL树S和T，且S中的节点均不大于T中的节点。

试设计一个算法，在 $\mathcal{O}(\max(g, h))$ 时间内将它们合并为一棵AVL树。

【解答】

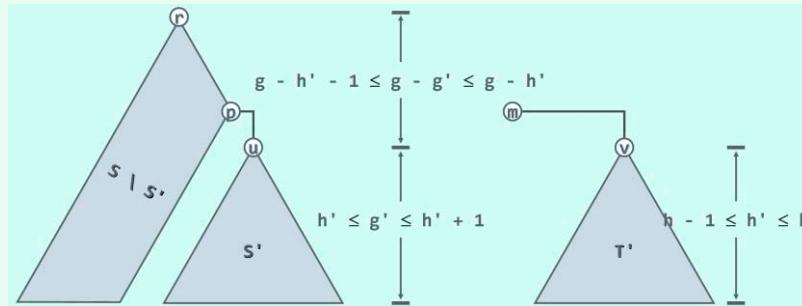


图x10.7 合并AVL树S和T：不妨假定 $g \geq h$

首先如图x10.7所示，不失一般性地，假定S的高度不低于T——否则，以下算法完全对称。

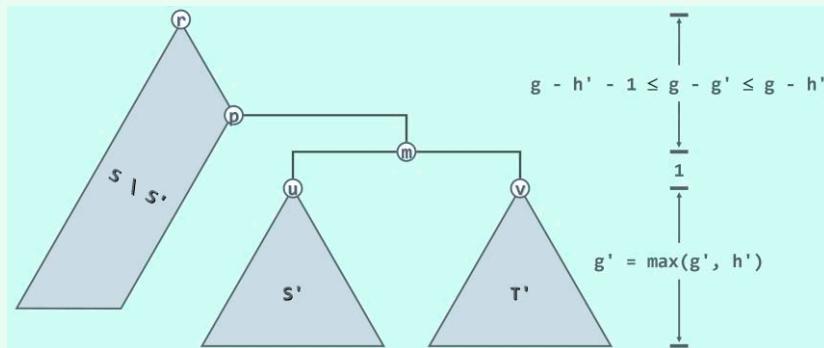
设m为T中的最小节点。若将m从T中摘出，则如图x10.8所示，新得到的AVL树T'的高度h'必然不致增加，而且至多降低一层。

根据AVL树的定义，这里沿着起自根节点的任一通路每下降一层，节点的高度虽必然降低，但至多降低2。因此如图x10.8所示，沿着树S的最右侧通路，必然可以找到某个节点u，其高度不低于h'，而且至多比T'高一层。将子树u记作S'。



图x10.8 合并AVL树S和T：删除T中的最小节点m，在S的最右侧通路上找到与树T'高度接近的节点u

于是接下来如图x10.9所示，只要以节点m为联接点，将S'和T'分别作为其左、右子树，即可拼接成为一棵AVL树。



图x10.9 合并AVL树S和T：以m为结合点合并S'和T'，在整体接入至S

以下，将该AVL树作为子树，并在节点u原先的位置（作为节点p的右子树）接入至树S中。请注意，至此，全树中仅有节点p可能失衡。而且若此时节点p的确失衡，则其平衡因子必然为-2。也就是说，其效果完全等同于将m插入其中之后所造成的失衡。因此，只需从p出发逐层上溯，即可通过不超过 $\mathcal{O}(g - g') = \mathcal{O}(g - h)$ 次的旋转使全树恢复平衡。

再计入删除节点m所需的 $\mathcal{O}(h)$ 时间，以及查找节点u所需的 $\mathcal{O}(g - h)$ 时间，可见以上算法的总体时间复杂度为 $\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(\max(g, h))$ 。

特别地，若节点m已经从T中摘出，且节点u已知，则以上算法只需 $\mathcal{O}(g - h)$ 时间，线性正比于两棵待合并树的高度之差。对于以下的习题[10-22]，这一性质将至关重要。

[10-22] 任给高度为 h 的一棵 AVL 树 A，以及一个关键码 e。

试设计一个算法，在 $O(h)$ 时间内将 A 分裂为一对 AVL 树 S 和 T，且 S 中的节点均小于 e，而 T 中的节点均不小于 e。（提示：借助 AVL 树的合并算法）

【解答】

以关键码 e 查找路径上的各节点为界，可以按照中序遍历次序将全树 A 划分为一系列的子树。

以如图 x10.10 所示的树 A 为例，若 e 的查找路径为：

$t_1, s_1, s_2, t_2, t_3, t_4, s_3, s_4, t_5, \dots$

则相应地划分出来的子树依次是：

$T_1, S_1, S_2, T_2, T_3, T_4, S_3, S_4, T_5, \dots$

不难看出，全树的中序遍历序列应是：

$S_1, s_1; S_2, s_2; S_3, s_3; S_4, s_4; \dots; t_5, T_5; t_4, T_4; t_3, T_3; t_2, T_2; t_1, T_1$

而分裂出的两棵 AVL 子树的中序遍历序列，则应该分别是：

$S = S_1, s_1; S_2, s_2; S_3, s_3; S_4, s_4; \dots$

$T = \dots; t_5, T_5; t_4, T_4; t_3, T_3; t_2, T_2; t_1, T_1$

因此，我们可以自底而上，通过反复的合并构造出 S 和 T。

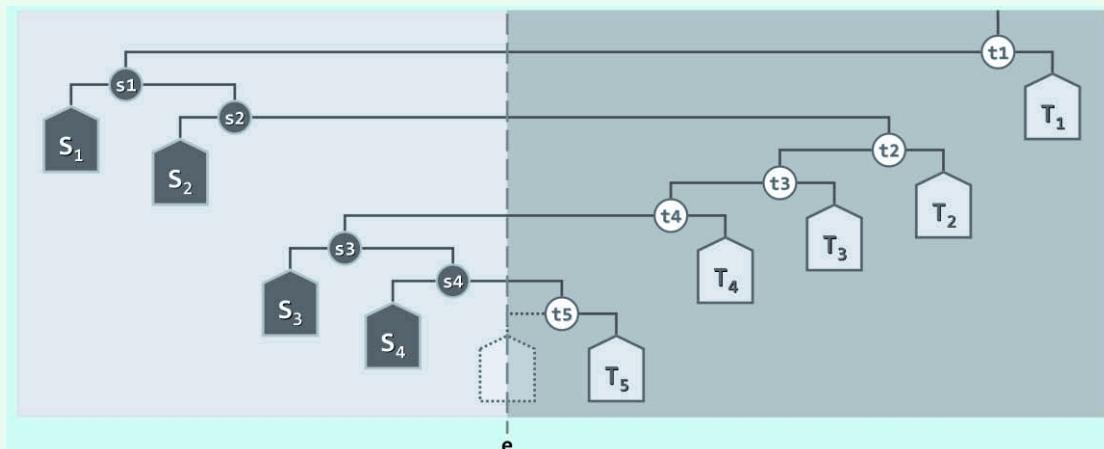


图 x10.10 以任意关键为界，分裂AVL树（这里只是示意性地绘出了各子树，并未严格地反映其高度）

鉴于这两棵树完全对称，这里不妨仅以树 T 为例，介绍具体的合并过程。

一旦以 t_5 为根的 AVL 子树已经构造出来，我们即可以节点 t_4 为联接点，将其与 AVL 子树 T_4 合并，得到一棵更大的 AVL 树；接下来，再以节点 t_3 为联接点，进一步地将其与 AVL 子树 T_3 合并；然后，再以节点 t_2 为联接点，继续将新得到的 AVL 树与树 T_2 合并；最后，以节点 t_1 为联接点，将新得到的 AVL 树与树 T_1 合并。如此，最终即可得到所求的 AVL 树 T。

这里涉及的 AVL 树合并计算，属于习题 [10-21] 所指出的特殊情况：作为联接点的节点 t_k ，均等效于已经从待合并子树中摘出，且接入位置已知。因此每次合并所需的时间，不超过被合并子树的高度之差。考虑到前后项的依次抵消效果，累计时间应渐进地不超过原树高度 $O(h)$ 。

第11章

串

[11-1] 在微软 Office 套件中，Excel 针对字符串操作提供了一系列的函数。

- a) 查阅手册了解 `len(S)`、`left(S, k)`、`right(S, k)`、`mid(S, i, k)` 和 `exact(S, T)` 的功能；
- b) 这些功能分别对应于本章所讨论的哪些问题？

【解答】

`len(S)`:

计算字符串 S 的长度，等效于 `S.length()`。

`left(S, k)`:

在字符串 S 中取长度为 k 的前缀，等效于 `S.prefix(k)`。

`right(S, k)`:

在字符串 S 中取长度为 k 的后缀，等效于 `S.suffix(k)`。

`mid(S, i, k)`:

在字符串 S 中自第 i 个字符起取长度为 k 的子串，等效于 `S.substr(i, k)`。

`exact(S, T)`:

判断字符串 S 和 T 是否相等，等效于 `S.equal(T)`。

[11-2] 考查教材 309 页代码 11.1 和 310 页代码 11.2 中，`match()` 算法的两个版本。

试验证，它们的返回值均为最后一轮比对时串 P 与串 T 的对齐位置，故通过表达式

```
!(strlen(T) < match(P, T) + strlen(P))
```

即可判断匹配是否成功。

【解答】

请读者阅读并分析相关代码，并独立给出结论。

[11-3] 考查由 26 个大写英文字母组成的字母表。

试针对以下模式串，构造对应的 `next[]` 表、改进的 `next[]` 表、`BC[]` 表、`SS[]` 表以及 `GS[]` 表：

"MIAMI"、"BARBARA"、"CINCINNATI"、"PHILADELPHIA"

【解答】

具体解答如以下各表所示。

其中的 `BC[]` 定义于字符集 Σ 上，其长度应等于 $|\Sigma|$ 。然而为简洁起见，这里省略了未在 P 中出现的字符（根据定义其 `BC` 值均为 -1），而仅仅考查了的确在 P 中出现的字符，并标记出其在 P 中的最后一次出现（对应的秩即为该字符对应的 `BC` 值）。

j	0	1	2	3	4
P[j]	M	I	A	M	I
next[j]	-1	0	0	0	1
改进的next[j]	-1	0	0	-1	0
BC[]			A	M	I
SS[j]	0	2	0	0	5
GS[j]	3	3	3	5	1

j	1	1	2	3	4	5	6
P[j]	B	A	R	B	A	R	A
next[j]	-1	0	0	0	1	2	3
改进的next[j]	-1	0	0	-1	0	0	3
BC[]				B		R	A
SS[j]	0	1	0	0	1	0	7
GS[j]	7	7	7	7	7	2	1

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P[j]	C	I	N	C	I	N	N	A	T	I
next[j]	-1	0	0	0	1	2	3	0	0	0
改进的next[j]	-1	0	0	-1	0	0	3	0	0	0
BC[]				C			N	A	T	I
SS[j]	0	1	0	0	1	0	0	0	0	10
GS[j]	10	10	10	10	10	10	10	10	5	1

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P[j]	P	H	I	L	A	D	E	L	P	H	I	A
next[j]	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
改进的next[j]	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	3
BC[]						D	E	L	P	H	I	A
SS[j]	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	12
GS[j]	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	7	1

[11-4] 为评估 KMP 算法的效率，11.3.7 节引入一个随迭代过程严格单调递增的观察量 $k = 2i - j$ ，从而简捷地证明了迭代的次数不可能超过 $\mathcal{O}(n)$ 。这一初等的证明虽无可辩驳，但毕竟未能直观地展示出其与计算成本之间的本质联系。

试证明，在算法执行的整个过程中：

- ① 观察量 i 始终等于已经做过的成功比对（含与最左端虚拟通配符的“比对”）次数；
- ② 观察量 $i - j$ 始终不小于已经做过的失败比对次数。

【解答】

反观 KMP 主算法（教材 313 页代码 11.3），循环中 if 判断语句的两个分支，分别对应于题中所定义的成功和失败比对。其中，只有成功的分支会修改观察量 i ——更准确地说，观察量 i 加一，当且仅当当前的比对是成功的。考虑到观察量 i 的初始值为 0，故在整个算法过程中，它始终忠实地记录着成功比对的次数。

观察量 $i - j$ 的初始值也是 0。对于成功分支，变量 i 和 j 会同时递增一个单位，故 $i - j$ 的数值将保持不变。而在失败分支中，首先观察量 i 保持不变。另一方面，因为必有：

$next[j] < j$

故在将变量 j 替换为 $next[j]$ 之后，观察量 $i - j$ 亦必严格单调地增加。综合以上两种情况，观察量 $i - j$ 必然可以作为失败比对次数的上界。

[11-5] 针对坏字符在模式串 P 中位置太靠右，以至位移量为负的情况，11.4.2 节建议的处理方法是直接将 P 右移一个字符。然而如图 11.10(f) 所示，此后并不能保证原坏字符位置能够恢复匹配。为此，或许你会想到：可在 $P[j]$ 的左侧找到最靠右的字符 'X'，并将其与原坏字符对齐。

a) 试具体实现这种处理方法；

【解答】

请读者按照以上思路，独立完成编码和调试任务。

b) 为什么我们不倾向于使用这种方法？

【解答】

尽管以上思路的实现方式可能不尽相同，但本质上都等效于将原先一维的 $BC[]$ 表，替换为二维的 $BC[][]$ 表。具体地，这是一张 $m \times |\Sigma|$ 的表格，其中 $BC[j]['X']$ 指向“在 $P[j]$ 左侧并与之最近的字符 'X'"。

如此，尽管预处理时间和所需空间的增长量并不大，但匹配算法的逻辑控制却进一步复杂化。最重要的是，此类二维 $BC[][]$ 表若能发挥作用，则当时的好后缀必然很长——此类情况，同时使用的 $GS[]$ 表完全可以替代 $BC[][]$ 表。

214

[11-6] 考查 $GS[]$ 表构造算法（教材 326 页代码 11.8），记模式串的长度 $|P| = m$ 。试证明：

a) $buildSS()$ 过程的运行时间为 $\mathcal{O}(m)$ ；

（提示：尽管其中存在“两重”循环，但内循环的累计执行次数不超过变量 lo 的变化幅度）

【解答】

该算法的运行时间，主要消耗于其中的“两重”循环。

暂且忽略内(`while`)循环，首先考查外(`for`)循环。若将`j`视作其控制变量，则不难验证：

- a. `j`的初始值为 $m - 2$
- b. 每经过一步迭代，`j`都会递减一个单位
- c. 在其它的任何语句中，`j`都没有作为左值被修改
- d. 一旦`j`减至负数，外循环随即终止

由此可知，外循环至多迭代 $O(m)$ 步，累计耗时不超过 $O(m)$ 。

尽管从表面的形式看，外循环的每一步都有可能执行一趟内循环，但实际上所有内循环的累计运行时间也不超过 $O(m)$ 。为此，只需将`lo`视作其控制变量，即不难验证：

- a. `lo`的初始值为 $m - 1$
- b. 每经过一步内循环的迭代，`lo`都会递减一个单位
- c. 在其它部分，`lo`只在“`lo = min(lo, hi)`”一句中作为左值被修改，但仍是非增
- d. 一旦`lo`减至负数，内循环就不再启动

由此可知，内循环累计至多迭代 $O(m)$ 步，相应地累计耗时不超过 $O(m)$ 。

综合以上两项，即得题中结论。

b) `buildGS()`过程的运行时间为 $O(m)$ 。

(提示：尽管其中存在“两重”循环，但内循环的累计执行次数不超过变量`i`的变化幅度)

【解答】

仿照a) 中的分析技巧。只要以`j`作为外循环的控制变量，则可知外循环至多迭代 $O(m)$ 步，耗时 $O(m)$ ；以`i`作为内循环的控制变量，则可知内循环累计至多迭代 $O(m)$ 步，累计耗时 $O(m)$ 。

请读者根据以上实例及提示，独立补充证明的细节。

[11-7] 在模式枚举 (pattern enumeration) 类应用中，需要从主串`T`中找出所有的模式串`P` ($|T| = n$, $|P| = m$)，而且有时允许模式串的两次出现位置之间相距不足 m 个字符。

类似于教材 310 页图 11.3 中的实例，比如在“000000”中查找“000”。若限制多次出现的模式串之间至少相距 $|P| = 3$ 个字符，则应找到 2 处匹配；反之，若不作限制，则将找到 4 处匹配。

a) 试举例说明，若采用后一约定，则教材 11.4.3 节 BM 算法的好后缀策略，可能需要 $\Omega(nm)$ 时间；

【解答】

将题中所举实例一般化，取模式串`P = "00...0"`, $|P| = m$ ，则`P`对应的`GS[]`表应如下：

<code>j</code>	0	1	2	3	4	...	$m - 2$	$m - 1$
<code>GS[j]</code>	1	2	3	4	5	...	$m - 1$	m

再取主串`T = "00000...0"`, $|T| = n \gg m$ 。

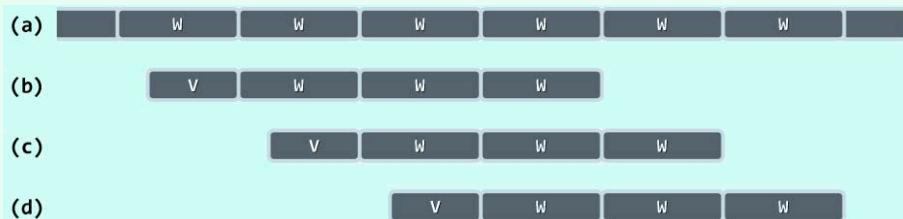
于是自然地，在每一对齐位置，经过 m 次比对之后都可以找到一次完全匹配。然而接下来，只能右移`GS[0] = 1`位并重新对齐，经过 m 次比对之后方可找到下一次完全匹配。

如上过程将反复进行，直到主串被扫描完毕。整个过程共有 $n - m + 1$ 个对齐位置，而且在每个位置都需要经过 m 次比对，方可发现一次完全匹配。鉴于 n 和 m 取值的任意性，在此类最坏情

况下，该算法的累计耗时量应为：

$$(n - m + 1) \times m = \Theta(nm)$$

以上实例仍然非常极端，更具一般性的例子则如图x11.1所示。



图x11.1 BM算法的最坏情况

这里以两个基本的字符串W和V作为“积木”。为简化起见，假定字符串W中的彼此字符互异， $|W| = w$ 为常数；V是W的一个非空子串， $|V| = v \leq w$ 。主串T如图(a)所示，由 n/w 个W顺次串接而成。模式串P如图(b)所示，由一个V和 $(m - v)/w$ 个W顺次串接而成。当然，与通常情况一样，这里也有 $2 \ll m \ll n$ 。

于是，P对应的GS[]表应如下：

$$GS[j] = \begin{cases} \lceil (j+1)/w \rceil \cdot w & (0 \leq j < m-v) \\ m & (m-v \leq j < m-1) \\ 1 & (j = m-1) \end{cases}$$

其中特别地，有：

$$GS[0] = w$$

因此，在每次发现一个完全匹配后，P都会右移w位并与T重新对齐，然后找到下一个完全匹配。如此，总共会有 n/w 个对齐位置（各对应于一个完全匹配）；而重要的是，每次对齐之后都需要经过m次比对。由此可见，整个过程所做比对的次数累计为：

$$n/w \times m = \Theta(nm)$$

b) 试针对这一缺陷改进好后缀策略，使之即便在采用后一约定时，最坏情况下也只需线性时间；

(提示：Galil 规则)

【解答】

反观以上一般性实例可见，其中模式串P每一次右移，都属于如教材321页图11.12(d)所示的情况：在前一轮比对中，成功次数过多，以致好后缀过长（甚至如上例，就是P整体）。

这里的技巧是，在此类对齐位置，不必一直比对至P的最左端。实际上不难看出，一旦自右向左比对到原主串T中好后缀的最右端，即可马上判定是否完全匹配。仍以图x11.1为例，除了第一轮比对，在后续的各轮比对中，均只需比较模式串P中最靠右的w个字符——根据GS[]表的定义，其余的 $m - w$ 个字符必然是匹配的。

利用这一所谓的Galil规则加以改进之后，主串T的每个字符都不再会重复接受比对。既然累计不超过线性次比对，总体耗时也就不致超过线性的规模。

第12章

排序

[12-8] 若输入的有序序列 S_1 和 S_2 以列表（而非向量）的方式实现，则：

a) 如教材 344 页代码 12.8 和 346 页代码 12.9 所示的两个 median() 算法，分别应做哪些调整？

【解答】

这里的关键在于，列表仅支持“循位置访问”的方式，不能像“循秩访问”那样在常数时间内访问任一元素。特别地，在读取每个元素之前，都要沿着列表进行计数查找。

b) 调整之后的计算效率如何？

【解答】

为保证 $|S_1| \leq |S_2|$ 而交换两个序列（的名称），依然只需 $\mathcal{O}(1)$ 时间；然而，序列 S_2 两翼的截短则大致需要 $\mathcal{O}(n_2 - n_1)$ 时间。而更重要的是，在此后的递归过程中，每一次为将问题规模缩减一半，都必须花费线性的时间。

因此，总体需要 $\mathcal{O}(n_1 + n_2)$ 时间——这一效率，已经降低到与蛮力算法 trivialMedian（教材 343 页代码 12.7）相同。

[12-9] 若输入的有序序列 S_1 和 S_2 以平衡二叉搜索树（而非序列）的方式给出，则：

a) 如教材 344 页代码 12.8 和 346 页代码 12.9 所示的两个 median() 算法，分别应做哪些调整？

【解答】

为此，需要给平衡二叉搜索树增加以下接口：

```
template <typename T> BinNodePosi(T) & BBST<T>::search(Rank r); //查找并返回树中第r大的节点
template <typename T> BinNodePosi(T) & BBST<T>::removeMin(int k); //从树中删除最小的k个节点
template <typename T> BinNodePosi(T) & BBST<T>::removeMax(int k); //从树中删除最大的k个节点
```

b) 调整之后的计算效率如何？

【解答】

仿照 quickSelect() 算法（教材 348 页代码 12.10），不难实现一个效率为 $\mathcal{O}(\log n)$ 的 search(r) 接口。然而，高效的 removeMin(k) 和 removeMax(k) 接口并不容易实现。

实际上，一种简明的策略是：首先通过中序遍历，将平衡二叉搜索树中的所有元素转化为有序向量，然后套用以上算法计算中位数。

当然，按照这一策略，运行时间主要消耗于遍历，整体为 $\mathcal{O}(n_1 + n_2)$ ——与教材 343 页代码 12.7 中的蛮力算法 trivialMedian() 相同。

[12-10] a) 基于教材346页代码12.9中的median()算法，添加整型输入参数k，实现在 $S_1 \cup S_2$ 中选取第k个元素的功能；

【解答】

记 $n_1 = |S_1|$ 和 $n_2 = |S_2|$ ，不失一般性，设 $n_1 \leq n_2$ 。

进一步地，不妨设 $2k \leq n_1 + n_2$ ——否则，可以颠倒比较器的方向，原问题即转化为在 $S_1 \cup S_2$ 中选取第 $n_1 + n_2 - k$ 个元素，与以下方法同理。

若 $k \leq n_1 = \min(n_1, n_2)$ ，则只需令：

$$S_1' = S_1[0, k)$$

$$S_2' = S_2[0, k)$$

于是原问题即转换为计算 $S_1' \cup S_2'$ 的中位数。

否则，若 $n_1 < k < n_2$ ，则可令

$$S_1' = S_1[0, n_1)$$

$$S_2' = S_2[0, 2k - n_1)$$

于是原问题即转换为计算 $S_1 \cup S_2'$ 的中位数。

可见，无论如何，针对 $S_1 \cup S_2$ 的k-选取问题总是可以在常数时间内，转换为中位数问题，并进而直接调用相应的算法。

b) 新算法的时间复杂度是多少？

【解答】

由上可见，无论如何，都可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内将原问题转换为中位数的计算问题。借助median()算法，如此只需要 $\mathcal{O}(\log(\min(n_1, n_2)))$ 时间。

[12-11] 考查如教材348页代码12.10所示的quickSelect()算法。

a) 试举例说明，最坏情况下该算法的外循环需要执行 $\Omega(n)$ 次；

【解答】

在最坏情况下，每一次随机选取的候选轴点 $pivot = A[lo]$ 都不是查找的目标，而且偏巧就是当前的最小者或最大者。于是，对向量的每一次划分都将极不均匀，其中的左侧或右侧子向量长度为0。如此，每个元素都会被当做轴点的候选，并执行一趟划分，累计 $\Omega(n)$ 次。

从算法策略的角度来看，原拟定的“分而治之”策略未能落实，实际效果反而等同于采用了“减而治之”策略。

225

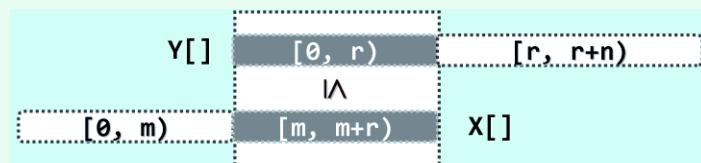
b) 在各元素独立等概率分布的条件下，该算法的平均时间复杂度是多少？

【解答】

仿照教材12.1.5节对quickSort()算法的分析方法，同样可以证明，quickSelect()算法的平均运行时间为 $\mathcal{O}(n)$ ——在平均意义上，与算法12.1（教材348页）相当。

[12-12] 如图x12.2所示，设有向量 $X[\theta, m+r)$ 和 $Y[\theta, r+n)$ ，且满足：

对于任何 $\theta \leq j < r$ ，都有 $Y[j] \leq X[m+j]$



图x12.2 在向量X和Y各自排序后，对齐元素之间的次序依然保持

试证明，在 X 和 Y 分别（按非降次序）排序并转换为 X' 和 Y' 之后（如图x12.3的实例所示），

对于任何 $\theta \leq j < r$ 依然有 $Y'[j] \leq X'[m+j]$ 成立。（提示：习题[2-41]的推广）



图x12.3 (a)排序前有 $Y[0, 3] \leq X[4, 7]$ ，(b)排序后仍有 $Y'[0, 3] \leq X'[4, 7]$

【解答】

对于任意的 $\theta \leq j < r$ ，考查元素 $X'[m+j]$ 。

一方面，在有序的 X' （以及无序的 X ）中，显然应该恰有 $m+j$ 个元素不大于 $X'[m+j]$ 。

而另一方面，由图x12.2可见，其中至少存在 j 个元素，各自不小于无序的 Y （以及有序的 Y' ）中的某一元素，而且 Y （ Y' ）中的这些元素互不重复。也就是说， Y' （ Y ）中至少存在 j 个元素不大于 $X'[m+j]$ ，故必有：

$$Y'[j] \leq X'[m+j]$$

当然，仿照习题[2-41]的两种证明方法，亦可得出同样结论。

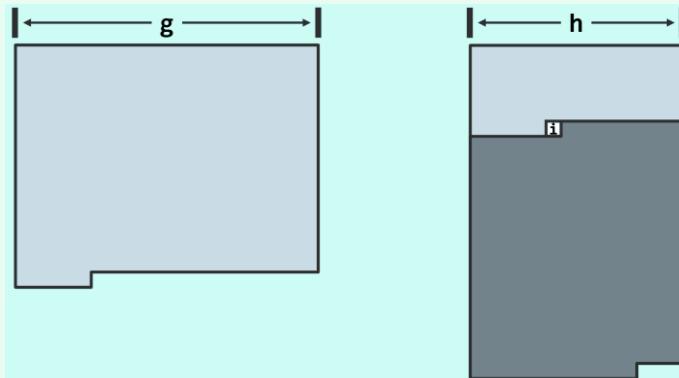
有兴趣的读者，不妨照此提示，从其它角度独立给出证明。

[12-13] 试证明， g -有序的向量再经 h -排序之后，依然保持 g -有序。

【解答】

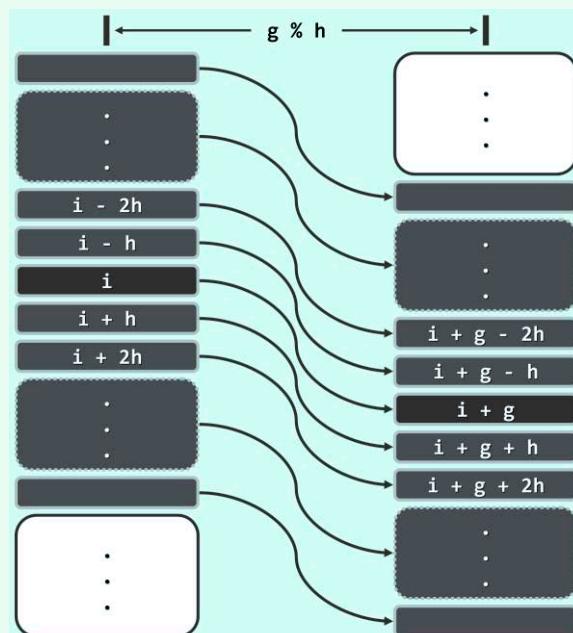
在已经 h -排序之后的向量中，考查任一元素 $A[i]$ ，我们欲证总有 $A[i] \leq A[i+g]$ 。

如图x12.4所示，考查 g -排序以及 h -排序（在逻辑上）各自对应的二维矩阵。于是，在后一矩阵中， $A[i+g]$ 必然落在深色阴影区域内部。我们继续在该矩阵中，考查 $A[i]$ 以及 $A[i+g]$ 各自所属的列。

图x12.4 g -有序的向量 $A[]$ 再经 h -排序后， $A[i + g]$ 必然来自阴影区域

根据 g -有序性，如图x12.5所示，两个列的前缀与后缀必然一一对应地有序，亦即：

$$\begin{aligned} & \dots \\ A[i - 2h] & \leq A[i + g - 2h] \\ A[i - h] & \leq A[i + g - h] \\ A[i] & \leq A[i + g] \\ A[i + h] & \leq A[i + g + h] \\ A[i + 2h] & \leq A[i + g + 2h] \\ & \dots \end{aligned}$$

图x12.5 g -有序的向量 $A[]$ 按照 h 列重排之后， $A[i]$ 所属列的前缀，必然与 $A[i + g]$ 所属列的后缀，逐个元素地对应有序

于是根据本章第[12-12]题的结论，在经过 h -排序之后，这两列的前缀和后缀之间的对应有序关系依然成立， g -有序性得以延续。

[12-14] 设使用 Pratt 序列：

$$\mathcal{H}_{\text{pratt}} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, \dots, 2^p 3^q, \dots \}$$

对长度为 n 的任一向量 s 做希尔排序。

试证明：

a) 若 s 已是(2, 3)-有序，则只需 $\mathcal{O}(n)$ 时间即可使之完全有序；

【解答】

根据教材第12.3.2节的分析结论，在(2, 3)-有序的序列中，逆序元素之间的间距不超过：

$$(2 - 1) \times (3 - 1) - 1 = 1$$

也就是说，整个向量中包含的逆序对不过 $\mathcal{O}(n)$ 个。

于是根据习题[3-11]的结论，此后对该向量的1-排序仅需 $\mathcal{O}(n)$ 时间。

b) 对任何 $h_k \in \mathcal{H}_{\text{pratt}}$ ，若 s 已是 $(2h_k, 3h_k)$ -有序，则只需 $\mathcal{O}(n)$ 时间即可使之 h_k -有序；

【解答】

既然所有元素的秩取值于 $[0, n]$ 范围内，故若照相对于 h_k 的模余值，它们可以划分为 h_k 个同余类；相应地，原整个向量可以“拆分为” h_k 个接近等长的子向量。

不难看出，其中每个子向量都是(2, 3)-有序的，根据上一问的结论，均可在线性时间内转换为各自1-有序的；就其总体效果而言，等同于在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内转换为全局的 h_k -有序。

c) 针对 $\mathcal{H}_{\text{pratt}}$ 序列中的前 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 项，希尔排序算法需要分别迭代一轮；

【解答】

$\mathcal{H}_{\text{pratt}}$ 序列中的各项无非是 2^p 和 3^q 的乘积组合，因此其中不大于 n 项数至多不超过：

$$\log_2 n \times \log_3 n = \mathcal{O}(\log^2 n)$$

d) 总体的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ 。

【解答】

综合 b) 和 c) 的结论，在采用 $\mathcal{H}_{\text{pratt}}$ 序列的希尔排序过程中，每一轮耗时不超过 $\mathcal{O}(n)$ ，累计至多迭代 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 轮，因此，总体耗时不超过 $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ 。



参考文献

- [1] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms* (3rd edn.). Addison-Wesley (1997), ISBN:0-201-89683-1
- [2] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms* (3rd edn.). Addison-Wesley (1997), ISBN:0-201-89684-8
- [3] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching* (2nd edn.). Addison-Wesley (1998), ISBN:0-201-89685-0
- [4] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms* (1st edn.). Addison-Wesley (1974), ISBN:0-201-00029-0
- [5] J. Bentley. *Writing Efficient Programs*. Prentice-Hall (1982), ISBN:0-139-70251-2
- [6] J. Bentley. *More Programming Pearls: Confessions of a Coder*. Addison Wesley (1988), ISBN:0-201-11889-0
- [7] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science* (2nd edn.). Addison-Wesley (1994), ISBN:0-201-55802-5
- [8] 严蔚敏 等. 数据结构 (C语言版) . 北京: 清华大学出版社, 1997年4月第1版, ISBN:7-302-02368-9
- [9] J. Bentley. *Programming Pearls* (2nd edn.). Addison-Wesley (2000), ISBN:0-201-65788-0
- [10] T. Budd. *Classic Data Structures in Java*. Addison-Wesley (2000), ISBN:0-201-70002-6
- [11] J. Hromkovic. *Design And Analysis Of Randomized Algorithms: Introduction to Design Paradigms*. Springer-Verlag (2005), ISBN:3-540-23949-9
- [12] H. Samet. *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures*. Morgan Kaufmann (2006), ISBN:0-123-69446-9
- [13] M. A. Weiss. *Data Structures and Algorithm Analysis in C++* (3rd edn.). Addison Wesley (2006), ISBN:0-321-44146-1
- [14] E. Horowitz, S. Sahni, D. Mehta. *Fundamentals of Data Structures in C++* (2nd edn.). Silicon Press (2006), ISBN:0-929-30637-6
- [15] A. Drozdek. *Data Structures and Algorithms in C++* (2nd edn.). Thomson Press (2006), ISBN:8-131-50115-9
- [16] 殷人昆 等. 数据结构 (C++语言描述) . 北京: 清华大学出版社, 2007年6月第2版, ISBN:7-302-14811-1
- [17] P. Brass. *Advanced Data Structures*. Cambridge University Press, ISBN:0-521-88037-8
- [18] J. Edmonds. *How to Think about Algorithms*. Cambridge University Press (2008), ISBN:0-521-61410-8
- [19] K. Mehlhorn & P. Sanders. *Algorithms and Data Structures: The Basic Tools*. Springer (2008), ISBN:3-540-77977-9
- [20] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein. *Introduction to Algorithms* (3rd edn.). MIT Press (2009), ISBN:0-262-03384-4

- [21] R. Bird. *Pearls of Functional Algorithm Design*. Cambridge University Press (2010), ISBN:0-521-51338-8
- [22] M. L. Hetland. *Python Algorithms: Mastering Basic Algorithms in the Python Language*. Apress (2010), ISBN:1-430-23237-4
- [23] M. T. Goodrich, R. Tamassia, D. M. Mount. *Data Structures and Algorithms in C++* (2nd edn.). John Wiley & Sons (2011), ISBN:0-470-38327-5
- [24] R. Sedgewick & K. Wayne. *Algorithms* (4th edn.). Addison-Wesley (2011), ISBN:0-321-57351-X
- [25] Y. Perl, A. Itai and H. Avni, *Interpolation Search: A $\log(\log(n))$ Search*, Commun. ACM, 21 (1978), pp. 550-553
- [26] A. C. Yao & F. F. Yao. *The Complexity of Searching an Ordered Random Table*. 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (1976), 173-177
- [27] A. C. Yao & J. M. Steele. *Lower Bounds to Algebraic Decision Trees*. Journal of Algorithms (1982), 3:1-8
- [28] A. C. Yao. *Lower Bounds for Algebraic Computation Trees with Integer Inputs*. SIAM J. On Computing (1991), 20:655-668
- [29] L. Devroye. *A Note on the Height of Binary Search Trees*. J. of ACM (1986), 33(3):489-498
- [30] P. Flajolet & A. Odlyzko. *The Average Height of Binary Trees and Other Simple Trees*. Journal of Computer and System Sciences (1982), 25(2):171-213
- [31] J. B. Kruskal. *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem*. Proc. of the American Mathematical Society, 7(1):48-50
- [32] B. W. Arden, B. A. Galler, R. M. Graham. *An Algorithm for Equivalence Declarations*. Communications ACM (1961), 4:310-314
- [33] B. A. Galler, M. J. Fisher. *An Improved Equivalence Algorithm*. Communications ACM (1964), 7:301-303
- [34] R. E. Tarjan. *Efficiency of a Good but not Linear Set Union Algorithm*. Journal of the ACM (1975), 22:215-225
- [35] R. Seidel & M. Sharir. *Top-Down Analysis of Path Compression*. SIAM Journal Computing (2005), 34:515-525
- [36] G. Adelson-Velskii & E. M. Landis. *An Algorithm for the Organization of Information*. Proc. of the USSR Academy of Sciences (1962), 146:263-266
- [37] D. S. Hirschberg. *An Insertion Technique for One-Sided Heightbalanced Trees*. Comm. ACM (1976), 19(8):471-473
- [38] S. H. Zweben & M. A. McDonald. *An Optimal Method for Deletion in One-Sided Height-Balanced Trees*. Commun. ACM (1978), 21(6):441-445
- [39] K. Culik, T. Ottman, D. Wood. *Dense Multiway Trees*. ACM Transactions on Database Systems (1981), 6:486-512
- [40] E. Gudes & S. Tsur. *Experiments with B-tree Reorganization*. SIGMOD (1980), 200-206
- [41] D. D. Sleator & R. E. Tarjan. *Self-Adjusting Binary Trees*. JACM (1985), 32:652-686

- [42] R. E. Tarjan. Amortized Computational Complexity. SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods 6(2):306-318
- [43] R. Bayer & E. McCreight. Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes. Acta Informatica (1972), 1(3):173-189
- [44] R. Bayer. Symmetric Binary B-Trees: Data Structure and Maintenance Algorithms. Acta Informatica (1972), 1(4):290-306
- [45] L. J. Guibas & R. Sedgewick. A Dichromatic Framework for Balanced Trees. Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (1978), 8-21
- [46] J. L. Bentley. Multidimensional Binary Search Trees Used for Associative Searching. Communications of the ACM (1975), 18(9):509-517
- [47] H. J. Olivie. A New Class of Balanced Search Trees: Half Balanced Binary Search Trees. ITA (1982), 16(1):51-71
- [48] J. L. Bentley. Decomposable Searching Problems. Information Processing Letters (1979), 8:244-251
- [49] J. H. Hart. Optimal Two-Dimensional Range Queries Using Binary Range Lists. Technical Report 76-81, Department of Computer Science, University of Kentucky (1981)
- [50] D. E. Willard. New Data Structures for Orthogonal Range Queries. SIAM Journal on Computing (1985), 14:232-253
- [51] H. Samet, An Overview of Quadtrees, Octrees, and Related Hierarchical Data Structures, in R. Earnshaw, ed., Theoretical Foundations of Computer Graphics and Cad, Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 51-68
- [52] W. Pugh. Skip Lists: a Probabilistic Alternative to Balanced Trees. Lecture Notes in Computer Science (1989), 382:437-449
- [53] R. de la Briandais. File Searching Using Variable Length Keys. Proc. of the Western Joint Computer Conference 1959, 295-298
- [54] E. H. Sussenguth. Use of Tree Structures for Processing Files. Communications of the ACM (1963), 6:272-279
- [55] D. R. Morrison. PATRICIA - Practical Algorithm to Retrieve Information Coded in Alphanumeric. Journal of the ACM (1968), 15:514-534
- [56] J. L. Bentley & R. Sedgewick. Fast Algorithms for Sorting and Searching Strings. Proc. of 8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (1997), 360-369
- [57] R. W. Floyd. Algorithm 113: Treesort. Communications of the ACM (1962), 5:434
- [58] C. A. Crane. Linear Lists and Priority Queues as Balanced Binary Trees. PhD thesis, Stanford University (1972)
- [59] E. M. McCreight. Priority Search Trees. SIAM J. Comput. (1985), 14(2):257-276
- [60] D. E. Knuth, J. H. Morris, V. R. Pratt. Fast Pattern Matching in Strings. SIAM Journal of Computing (1977), 6(2):323-350

- [61] R. S. Boyer & J. S. Moore. A Fast String Searching Algorithm. *Communications of the ACM* (1977), 20:762-772
- [62] L. J. Guibas & A. M. Odlyzko. A New Proof of the Linearity of the Boyer-Moore String Search Algorithm. *SIAM Journal on Computing* (1980), 9(4):672-682
- [63] R. Cole. Tight Bounds on the Complexity of the Boyer-Moore Pattern Matching Algorithm. *SIAM Journal on Computing* 23(5):1075-1091
- [64] C. A. R. Hoare. Quicksort. *Computer Journal* (1962), 5(1):10-15
- [65] D. L. Shell. A High-Speed Sorting Procedure. *Communications of the ACM* (1959), 2(7):30-32
- [66] R. Sedgewick, A New Upper Bound for Shellsort, *J. Algorithms*, 7 (1986), pp. 159-173

插图索引

图x1.1 过直线外一点作其平行线	2
图x1.2 《海岛算经》算法原理	3
图x1.3 fib()算法中递归实例fib(k)的两种出现可能	13
图x1.4 使用85块L形积木，可以恰好覆盖缺失一角的16×16棋盘	18
图x1.5 采用分治策略，将大棋盘的覆盖问题转化为四个小棋盘的覆盖问题	18
图x1.6 借助reverse()算法在O(n)时间内就地移位的过程及原理	21
图x1.7 reverse()算法的递归跟踪	24
图x1.8 power2()算法的递归跟踪	24
图x1.9 二重循环执行时间的对应图形	25
图x1.10 联合递归函数F(n)和G(n)的递归跟踪图	31
图x2.1 permute()算法中第k + 1个就位元素，应等概率地随机选自当时的前n - k个元素	39
图x2.2 Brian W. Kernighan和Dennis M. Ritchie所设计随机数发生器的原理	39
图x2.3 无序向量删除算法remove(lo, hi)中，采用自后向前的次序移动可能造成数据丢失	41
图x2.4 从问题A到问题B的线性归约	43
图x2.5 输入规模为4时的归并排序过程	45
图x2.6 二分查找binSearch()算法版本A所对应的比较树，在向量规模递增后的结构变化	47
图x2.7 二分查找失败情况的递归分类	49
图x2.8 Fibonacci查找失败情况的递归分类	50
图x2.9 马鞍查找算法的原理及过程	51
图x2.10 B[]和C[]中的元素均未耗尽，且已转入A[]的元素总数i ≤ 1b	59
图x2.11 B[]和C[]中的元素均未耗尽，且已转入A[]的元素总数i > 1b	59
图x2.12 B[]中的元素先于C[]耗尽	59
图x2.13 C[]中的元素先于B[]耗尽	59
图x2.14 通过引入两个等长的向量，在O(1)时间内初始化Bitmap对象	64
图x2.15 Eratosthenes算法的实例	67
图x2.16 Eratosthenes算法：每次迭代中所筛除的整数，恰好就是重排矩形的最右侧一列。	67
图x2.17 Eratosthenes算法的改进	67
图x2.18 4×5的矩阵实例：经逐列排序再逐行排序后，每行、每列均各自有序	70
图x2.19 只需考查沿纵向捉对有序的任意两行	70
图x2.20 起泡排序的每一步，都是考查一对相邻元素	70
图x2.21 只需考查仅有一行进行交换的两种情况：(a) a和x交换；(b) b和y交换	71
图x2.22 假设逐行排序之后，沿纵向出现一对逆序元素a和b	71
图x4.1 迷宫算法低效的实例	99
图x5.1 n _h 个底层(叶)节点删除后，(次底层叶)节点至少增加 $\lceil n_h/2 \rceil$ 个	105
图x5.2 迭代式先序遍历实例(出栈节点以深色示意)	108

图x5.3 BinNode::succ()的情况一：t拥有右后代，其直接后继为右子树中左分支的末端节点s.....	110
图x5.4 BinNode::succ()的情况二：t没有右后代，其直接后继为以其为直接前驱的祖先s	110
图x5.5 二叉树中序遍历过程中对succ()接口的调用	111
图x5.6 频率最低的兄弟节点合并之后，最优编码树必对应于合并之前的最优编码树	117
图x5.7 字符串集{ "how", "many", "roads", "must", "a", "man", "walk", "down" }对应的键树	118
图x5.8 键树的紧凑表示与实现.....	118
图x6.1 (a)平面图、(b)三角剖分以及(c)外面亦为三角形的三角剖分	121
图x6.2 将 5×5 的对称矩阵压缩至长度为15的一维向量	122
图x6.3 图的BFS搜索，等效于BFS树的层次遍历.....	124
图x6.4 构造有向图的欧拉环路：各子环路加粗示意，删除的边不再画出，删除的顶点以灰色示意	126
图x6.5 最小支撑树（粗线条）可能反复地穿越于割的两侧	130
图x6.6 借助最小支撑树，构造近似的旅行商环路	133
图x6.7 完全由极短跨越边构成的支撑树，未必是极小的	135
图x6.8 在各边权重未必互异时，Prim算法依然正确	136
图x6.9 Kruskal算法的正确性	137
图x6.10 Kruskal算法的最坏情况	138
图x6.11 并查集：初始状态	139
图x6.12 并查集：经union(D, F)和union(G, B)操作之后	139
图x6.13 并查集：经union(D, A)、union(F, H)和union(E, C)操作之后	139
图x6.14 并查集：经union(B, A)操作之后.....	140
图x6.15 并查集：经union(C, F)操作之后（树高未能有效控制）	140
图x6.16 并查集：经union(C, F)操作之后（“低者归入高者”以控制树高）	141
图x6.17 各边权重互异时，最短路径树依然可能不唯一	141
图x6.18 由平面点集依照欧氏距离隐式定义的若干典型的邻近图	142
图x7.1 AVL树中最浅的叶节点	150
图x7.2 Fib-AVL树	150
图x7.3 从AVL-树中删除节点之后，需要重平衡的祖先未必相邻	154
图x7.4 将31个关键码按单调次序插入，必然得到一棵高度为4的满树.....	155
图x8.1 高度 $h = 4$ 、由53个节点组成的一棵5阶B-树	161
图x8.2 高度 $h = 4$ 、由79个节点组成的一棵5阶B-树	161
图x8.3 按递增插入[0, 52]而生成的5阶B-树	162
图x8.4 高度（计入扩充的外部节点）为10的红黑树，至少包含62个节点	168
图x8.5 高度（计入扩充的外部节点）为9的红黑树，至少包含46个节点	169
图x8.6 统计与查询区域边界相交的子区域（节点）总数	171
图x8.7 每次切分之后，都随即将子区域（实线）替换为包围盒（虚线），以加速此后的查找	172
图x8.8 通过递归地将平面子区域均分为四个象限（左），构造对应的四叉树（右）	173
图x8.9 四叉树的空间利用率可能极低	173
图x8.10 利用范围树，可以实现更加高效的范围查询	176

图x8.11 通过分散层叠，进一步提高范围树的查找性能.....	178
图x9.1 表长与公差有非平凡公因子时，会出现大量的冲突	182
图x9.2 双向平方试探法	186
图x9.3 将关键码{ 2012, 10, 120, 175, 190, 230 }，依次插入长度为11的散列表	188
图x9.4 删除关键码2012，并做懒惰删除标记.....	188
图x9.5 PATRICIA树 (PATRICIA tree)	194
图x9.6 三叉键树 (ternary trie)	194
图x10.1 字符权重已排序时，可在线性时间内构造出Huffman编码树	200
图x10.2 三叉堆：(a)逻辑结构及(b)物理结构	202
图x10.3 优先级搜索树	204
图x10.4 基于优先级搜索树的半无穷范围查询算法	205
图x10.5 高效支持getMax()接口的栈	206
图x10.6 高效支持getMax()接口的队列.....	208
图x10.7 合并AVL树S和T：不妨假定 $g \geq h$	208
图x10.8 合并AVL树S和T：删除T中的最小节点 m ，在S的最右侧通路上找到与树T'高度接近的节点 u	209
图x10.9 合并AVL树S和T：以 m 为结合点合并S'和T'，在整体接入至S	209
图x10.10 以任意关键为界，分裂AVL树（这里只是示意性地绘出了各子树，并未严格地反映其高度）	210
图x11.1 BM算法的最坏情况	216
图x12.1 轴点构造算法（版本C）	220
图x12.2 在向量X和Y各自排序后，对齐元素之间的次序依然保持	226
图x12.3 (a)排序前有 $Y[0, 3] \leq X[4, 7]$ ，(b)排序后仍有 $Y'[0, 3] \leq X'[4, 7]$	226
图x12.4 g-有序的向量A[]再经h-排序后， $A[i + g]$ 必然来自阴影区域.....	227
图x12.5 g-有序的向量A[]按照h列重排之后， $A[i]$ 所属列的前缀，必然与 $A[i + g]$ 所属列的后缀，逐个元素地对应有序.....	227

表格索引

表x1.1 函数F(n)中变量i和j随迭代不断递增的过程	28
表x1.2 函数F(n)中变量i和r随迭代不断递增的过程	28
表x3.1 列表{ 61, 60, 59, ..., 5, 4, 3, 2, 0, 1, 2 } 的插入排序过程	80
表x4.1 表达式求值算法实例	94
表x4.2 (左) 括号数固定时, 运算符栈的最大规模	96
表x4.3 非法表达式"(12)3+!4*+5"的“求值”过程	96
表x9.1 n个人中存在生日巧合的概率	183
表x9.2 对序列{ 5a, 2a, 3, 2b, 9a, 5b, 9b, 8, 2c }的直接计数排序	190
表x9.3 借助散列表对{ 5a, 2a, 3, 2b, 9a, 5b, 9b, 8, 2c }的计数排序(凡“-”项均与其上方项相等) .	192

算法索引

算法x1.1 过直线外一点作其平行线	2
算法x1.2 缺角棋盘的覆盖算法.....	18
算法x2.1 马鞍查找	51
算法x4.1 确认不含任何禁形的序列都是栈混洗	89
算法x6.1 基于“反复删除零入度节点”策略的拓扑排序算法	131
算法x9.1 整数向量的计数排序算法	191
算法x10.1 基于优先级搜索树的半无穷范围查询算法	205

代码索引

代码x1.1 《海岛算经》中计算海岛高度的算法	3
代码x1.2 《海岛算经》中计算海岛距离的算法	3
代码x1.3 包含循环、分支、子函数调用甚至递归结构，但具有常数时间复杂度的算法	6
代码x1.4 countOnes()算法的改进版	8
代码x1.5 countOnes()算法的再改进版	9
代码x1.6 power2BF_I()算法的递归版	10
代码x1.7 power2()算法的迭代版	10
代码x1.8 通用的迭代版幂函数算法	11
代码x1.9 数组最大值算法（迭代版）	11
代码x1.10 数组最大值算法（线性递归版）	11
代码x1.11 数组最大值算法（二分递归版）	12
代码x1.12 Fib类的实现	16
代码x1.13 Hanoi塔算法	17
代码x1.14 运用“中华更相减损术”的最大公约数算法	20
代码x1.15 借助reverse()算法在O(n)时间内就地移位	21
代码x1.16 计算Hailstone(n)序列长度的“算法”	23
代码x2.1 基于遍历实现向量的decrease()功能	44
代码x2.2 基于遍历实现向量的double()功能	45
代码x2.3 向量的起泡排序（改进版）	56
代码x2.4 单趟扫描交换（改进版）	56
代码x2.5 有序向量二路归并算法的简化	60
代码x2.6 增加注释后，Python的bisect模块中bisect_right接口的源代码	60
代码x2.7 位图Bitmap类	62
代码x2.8 可快速初始化的Bitmap对象（仅支持set()操作）	63
代码x2.9 可快速初始化的Bitmap对象（兼顾set()和clear()操作）	65
代码x2.10 Eratosthenes素数筛选算法	66
代码x3.1 基于遍历实现列表的increase()功能	76
代码x3.2 基于遍历实现列表的half()功能	76
代码x3.3 向量的选择排序算法	77
代码x3.4 列表倒置算法的第一种实现	85
代码x3.5 列表倒置算法的第二种实现	85
代码x3.6 列表倒置算法的第三种实现	85
代码x4.1 由List类派生Stack类	88
代码x4.2 操作数的解析	92
代码x4.3 运算符优先级关系的判定	93

代码x4.4 将操作数或操作符统一接至RPN表达式末尾	93
代码x4.5 PostScript语言的绘图程序	98
代码x5.1 二叉树先序遍历算法（迭代版#1）	108
代码x5.2 二叉树中序遍历算法（迭代版#4）	112
代码x6.1 基于PFS框架的BFS优先级更新器	132
代码x6.2 基于PFS框架的DFS优先级更新器	132
代码x7.1 二叉搜索树searchIn()算法的迭代实现	147
代码x7.2 power2BF_I()算法的递归版	152
代码x12.1 轴点构造算法（版本C）	221

关键词索引

(按关键词中各汉字的声母及各英文单词的首字母排序, 比如“大O记号”对应于“DOJH”)

A

凹函数 (concave function)	159
埃拉托斯特尼的筛子 (the sieve of Eratosthenes)	66

B

并查集 (union-find set)	138
八叉树 (octree)	175
波峰集 (frontier)	124
比较树 (comparison tree)	45, 46, 47, 68, 107
伯努利实验 (Bernoulli trial)	217
半平衡二叉搜索树 (half-balanced binary search trees)	167
包围盒 (bounding-box)	172
半无穷范围查询 (semi-infinite range query)	204
B^* -树 (B^* -tree)	166
标志 (tag)	91

C

差分约束系统 (system of difference constraints)	120
超限数学归纳法 (transfinite induction)	22
插值查找 (interpolation search)	53

D

多层搜索树 (multi-level search tree)	178
队堆 (queap)	207
递归跟踪 (recursion trace)	12, 24, 31
独立集 (disjoint set)	138
独立性 (independence)	40
Dijkstra算法 (Dijkstra Algorithm)	134, 202
Delaunay三角剖分 (Delaunay triangulation)	142

- 代数判定树 (algebraic decision tree, ADT) 68
队头 (front) 101
递推方程 (recurrence equation) 13, 23, 31, 55, 69, 84
队尾 (rear) 101

E

- 二分查找 (binary search) 46, 47, 48
二分递归 (binary recursion) 32, 107
 ε -间距问题 (ε -closeness) 143

F

- Fib-AVL树 (Fibonaccian AVL tree) 150, 153
封底估算 (back-of-the-envelope calculation) 5, 66
分而治之 (divide-and-conquer) 32, 225
费马平方和定理 (Two-Square Theorem of Fermat) 187
分散层叠 (fractional cascading) 178
Floyd算法 (Floyd Algorithm) 201
分摊分析 (amortized analysis) 36, 37, 158, 201
范围树 (range tree) 176, 204

G

- 割 (cut) 128, 130, 135, 136, 137, 138
归并排序 (mergesort) 45
高度 (height) 105
关联矩阵 (incidence matrix) 120
关联树 (associative tree) 176
Gabriel图 (Gabriel graph) 143

H

- 多叉堆 (d-heap) 202
合成数 (composite number) 134, 201
好后缀 (good suffix) 214
后进先出 (last-in-first-out, LIFO) 108
活跃期 (active duration) 127

J

减而治之 (decrease-and-conquer)	51, 225
几何分布 (geometric distribution)	199, 217
键树 (trie)	118, 193, 194
计数排序 (counting sort)	190
禁形 (forbidden pattern)	89
基于比较式算法 (comparison-based algorithm, CBA)	68, 107, 199

K

kd-树 (kd-tree)	52
咖啡罐游戏 (Coffee Can Game)	22
Kruskal算法 (Kruskal Algorithm)	137, 138, 140, 142
快速排序 (quicksort)	36
k-选取 (k-selection)	222
空圆性质 (empty-circle property)	143

L

鲁棒性 (robustness)	96
路径压缩 (path compression)	141
邻接表 (adjacency list)	122, 189
邻接矩阵 (adjacency matrix)	120
邻近图 (proximity graph)	142
良序 (well order)	22
旅行商环路 (traveling salesman tour)	133

M

马鞍查找 (saddleback search)	51
末节点 (last node)	74, 86, 111
模式枚举 (pattern enumeration)	215

243

N

NP完全的 (NP-complete)	12
-----------------------------	----

逆序对 (inversion) 4, 79

O

欧拉环路 (Eulerian tour) 126

欧拉通路 (Eulerian path) 126

欧氏最小支撑树 (Euclidean Minimum Spanning Tree, EMST) 142

P

PATRICIA树 (PATRICIA tree) 194

Prim算法 (Prim Algorithm) 128, 134, 136, 142, 202

Q

起泡排序 (bubblesort) 5

期望值的线性律 (linearity of expectation) 33, 78, 83

R

RNG图 (relative neighborhood graph) 143

S

哨兵节点 (sentinel node) 74, 196

三叉键树 (ternary trie) 194

四叉树 (quadtree) 52, 173, 194

树堆 (treap) 204

双端队列 (deque) 101

首节点 (first node) 74, 86, 153

数据局部性 (data locality) 76, 166

三角剖分 (triangulation) 121, 142

随机生成 (randomly generated by) 148

随机算法 (randomized algorithm) 33

随机组成 (randomly composed of) 148

散列表 (hashtable) 62, 182, 183, 184, 185, 188, 189

势能 (potential) 158

势能分析法 (potential analysis) 36, 158

输入敏感的 (input sensitive)	79
伸展树 (splay tree)	36

T

跳转表 (skip list)	180
-----------------------	-----

W

尾递归 (tail recursion)	223
稳定性 (stability)	191
外面 (outer face)	121
完全二叉堆 (complete binary heap)	196
完全二叉树 (complete binary tree)	146

X

斜堆 (skew heap)	200
循环节 (cycle)	82
循环列表 (Circular list)	86
先进先出 (first-in-first-out, FIFO)	149, 153, 180
小 ω 记号 (small-omega notation)	43
小 O 记号 (small-O notation)	43
循位置访问 (call-by-position)	74, 78
线性递归 (linear recursion)	29, 30, 31
线性规划 (linear programming)	120
线性时间归约 (linear-time reduction)	43, 75, 199
循秩访问 (call-by-rank)	62, 74

Y

叶节点平均深度 (average leaf depth)	107
掩码 (mask)	62
页面缓冲池 (buffer pool of pages)	166
元素唯一性 (Element Uniqueness)	44, 75
优先级搜索 (Priority-First Search, PFS)	202, 203
优先级搜索树 (priority search tree, PST)	204
元字符 (meta-character)	97

Z

- 最短路径树 (shortest-path tree) 132, 134, 141
字典序 (lexicographical order) 45, 46, 134
真二叉树 (proper binary tree) 105, 107, 116
直径 (diameter) 125
最近点对 (nearest pair) 143
最近邻图 (nearest neighbor graph) 143
众数 (majority) 222
主树 (main tree) 176
指数查找 (exponential search) 50
自调整列表 (self-adjusting list) 76
中位点 (median point) 170, 173
中位数 (median) 222
中缀表达式 (infix) 97
最左侧通路 (leftmost path) 151
最左最低点 (leftmost-then-lower point) 22