第3章 连续时间信号与系统的频域分析

信号的频域分解-2

内容回顾

01 周期信号分解

02 傅里叶级数

主要内容

CONTENTS

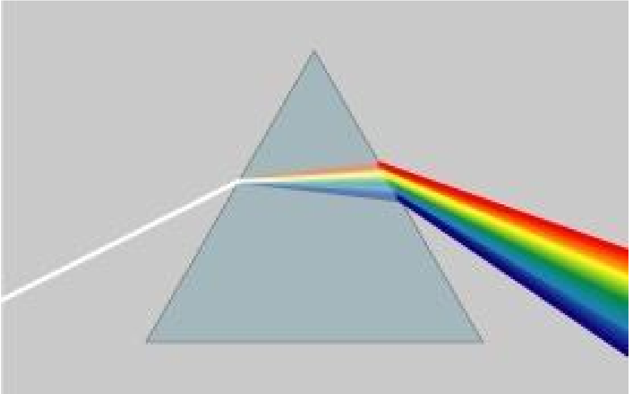
01 周期信号的频谱

傅立叶级数的三种表现形式：

$$x(t) = \dot{A}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{ \dot{A}_k e^{j(k\Omega_0 t + \theta_k)} \right\}$$ 指数表示法

$$= A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$ 相位表示法

$$= A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos k\Omega_0 t - b_k \sin k\Omega_0 t \right]$$ 分解表示法

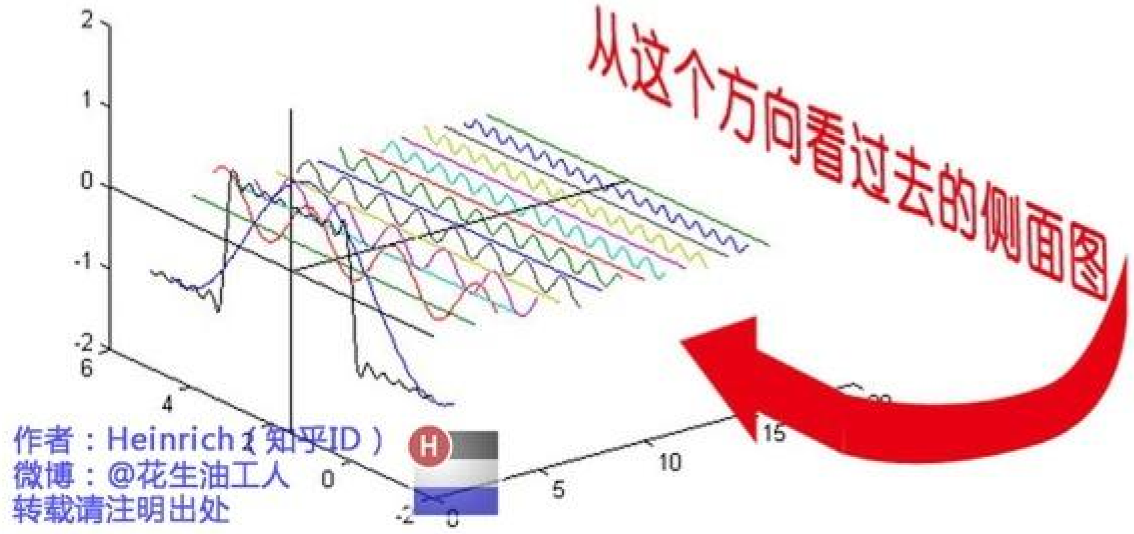


所有谐波分量的复振幅随频率的分布称为：信号的频谱

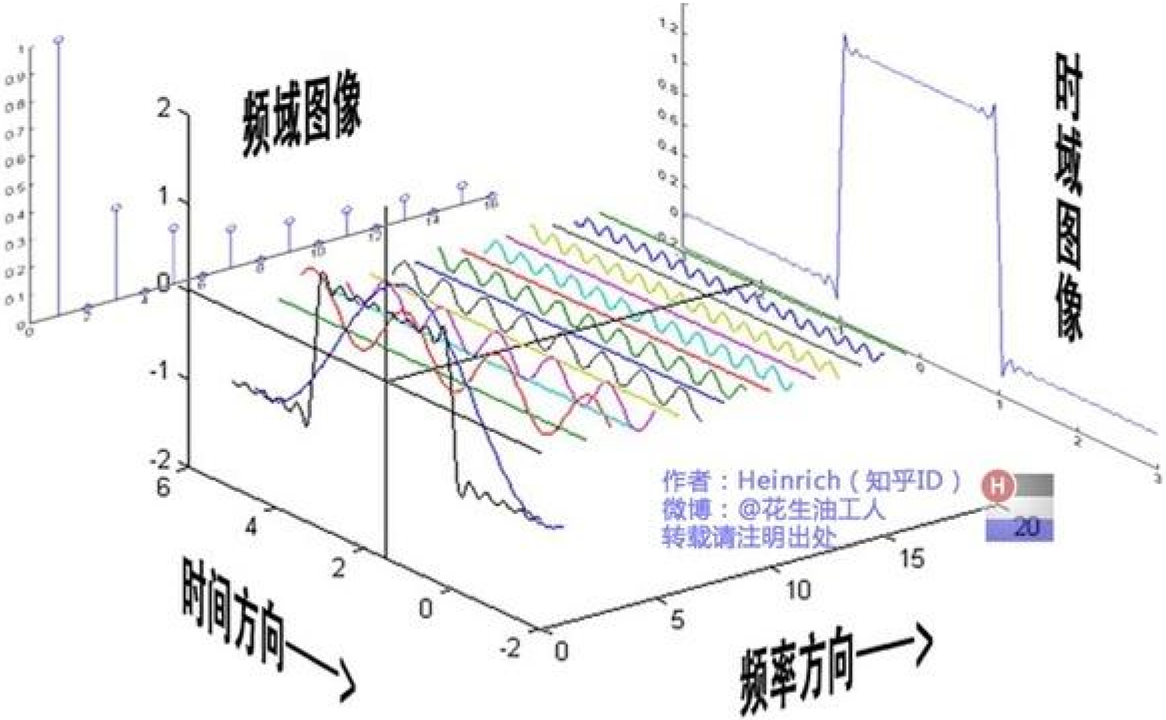
确定了频谱，则确定了信号本身。

$$\begin{cases} \text{振幅频谱：} A_k \\ \text{相位频谱：} \theta_k \end{cases}$$ 都是$\Omega = k\Omega_0$的函数

周期信号的频谱

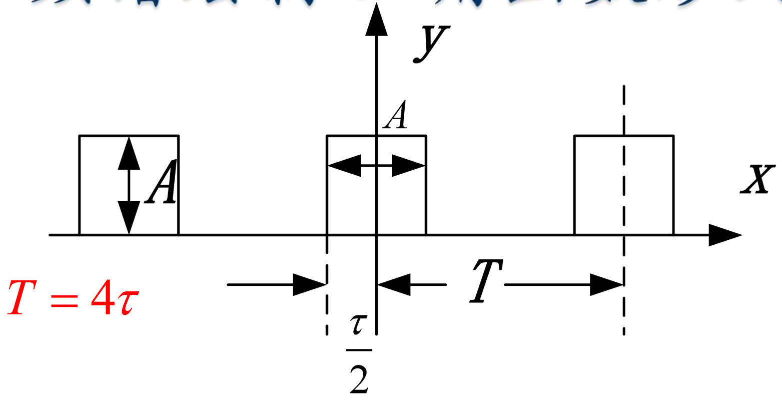


从这个方向看过去的侧面图
作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处



频域图像
时域图像
时间方向
频率方向
作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处

频谱绘制-三角函数形式

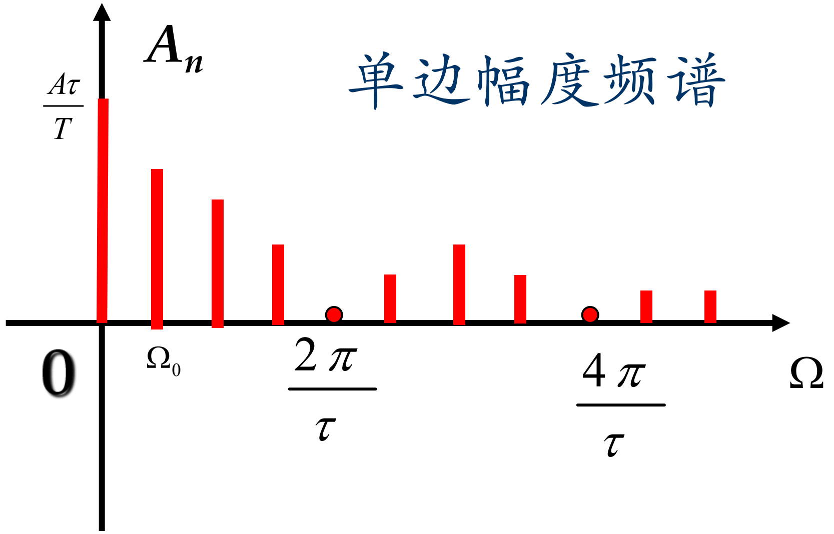


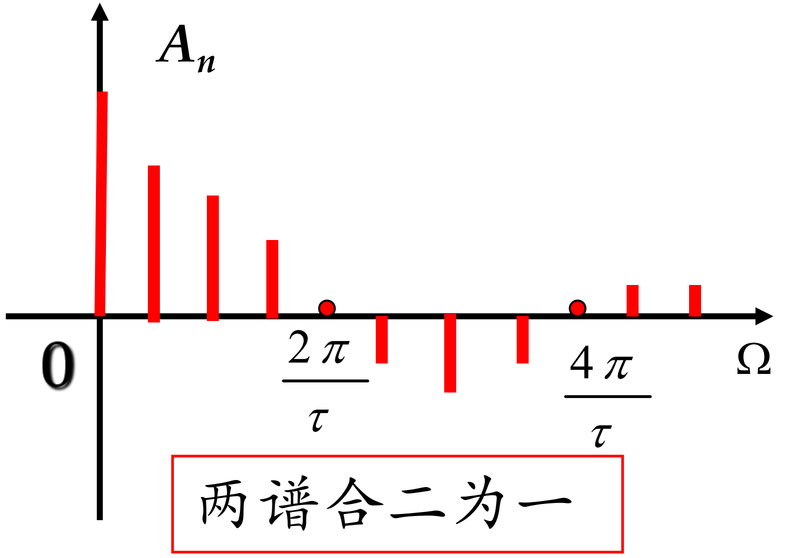
三角函数形式:

$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}\cos k\Omega_0 t\right]$$

$$\begin{cases} A_k=\dfrac{2A\tau}{T}\cdot\left|\dfrac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}\right| \\ \theta_k=\begin{cases}0\\ \pm\pi\end{cases}\end{cases}$$

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$$





频谱绘制-三角函数形式

$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}\cos k\Omega_0 t\right]$$

只有$k\Omega_0$坐标处有意义(离散);

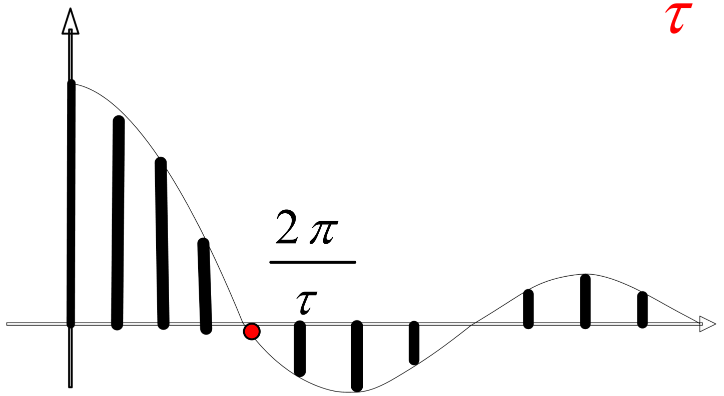
$\because$ 当$\sin(k\Omega_0\tau/2)=0$时，$A_k=0$

$\therefore$ 第n个过零点处有：$k\Omega_0\tau/2=n\pi$

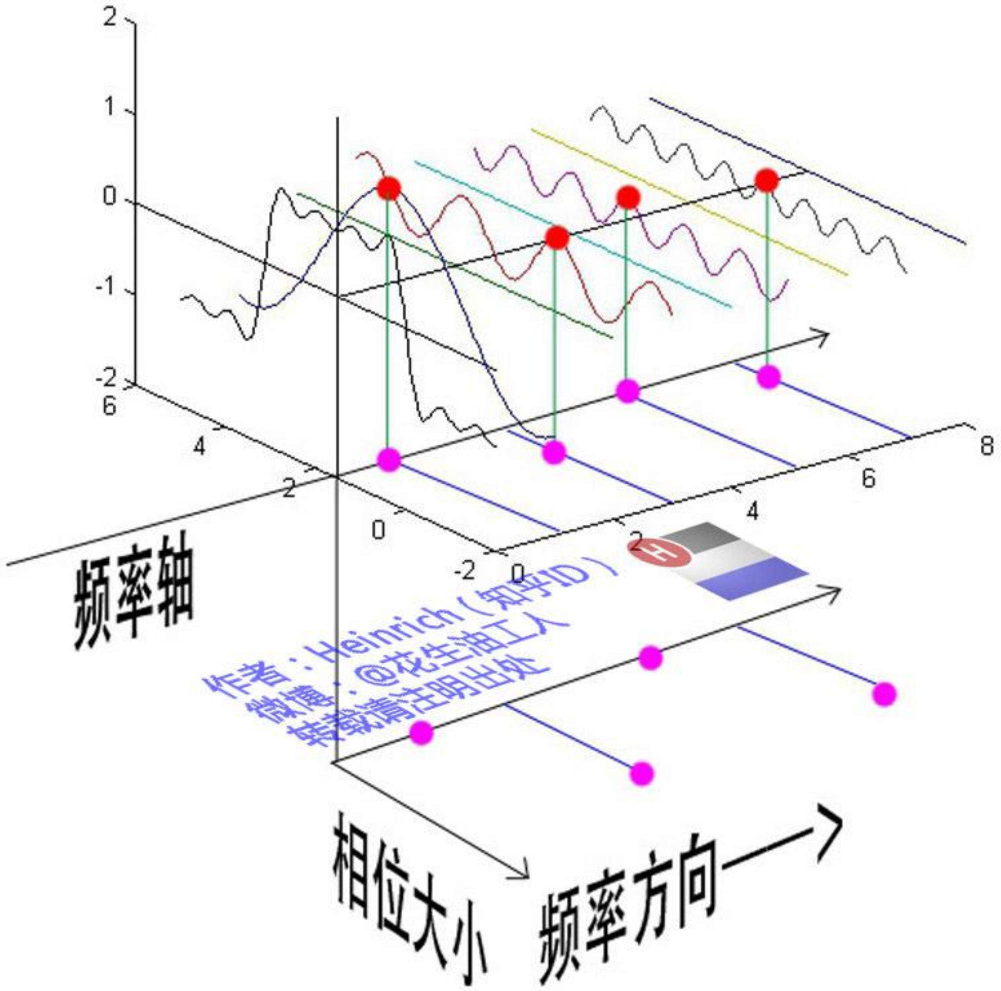
$$\Rightarrow k=\frac{2n\pi}{\Omega_0\tau}=\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{2n\pi}{\tau}=\frac{nT}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \text{所有过零点满足：} k=\frac{nT}{\tau}$$

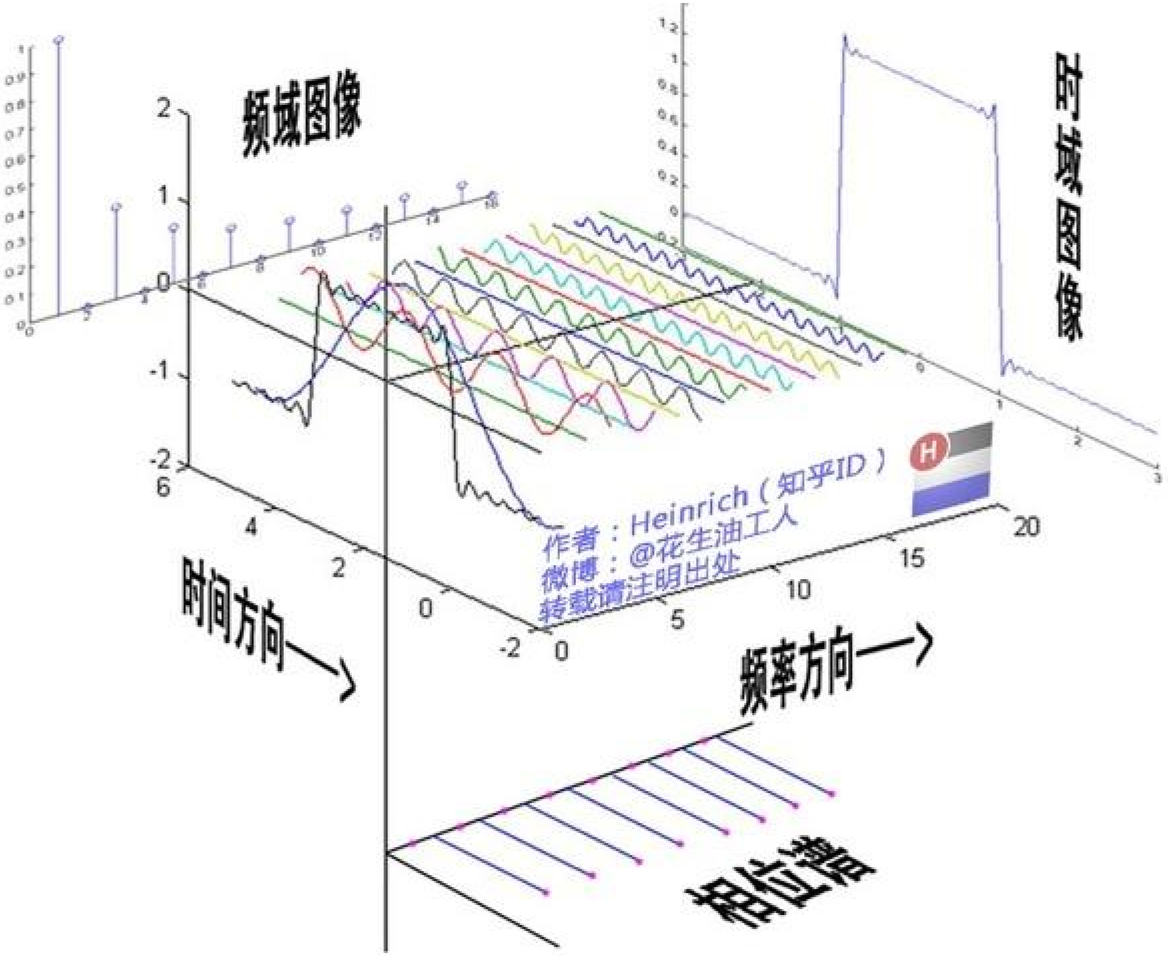
$$=4 \quad (\text{第一个过零点})$$

$$\therefore k\Omega_0=k\frac{2\pi}{T}=4\frac{2\pi}{4\tau}=\frac{2\pi}{\tau}$$



频谱绘制-三角函数形式


频率轴
相位大小
频率方向
作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处

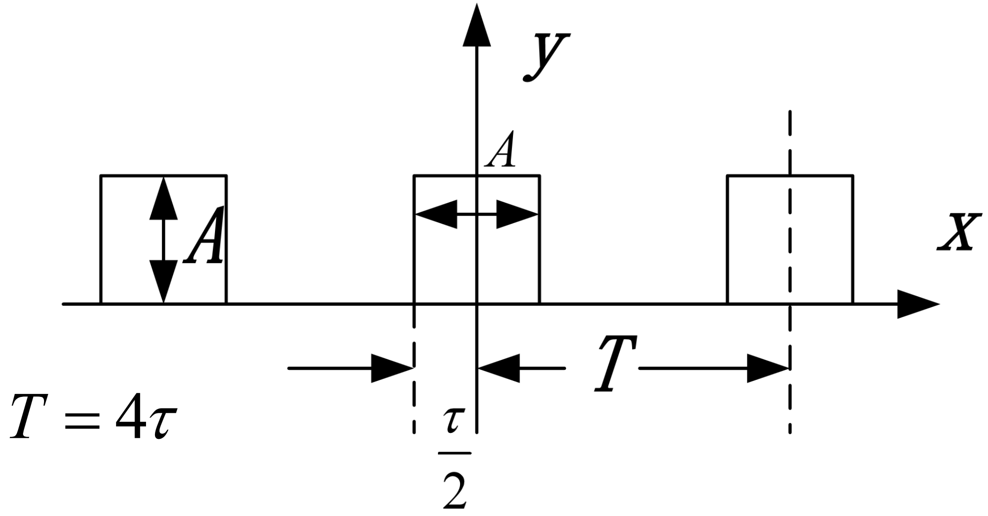

频域图像
时域图像
时间方向
频率方向
相位谱
作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处

频谱绘制-指数形式

指数形式：

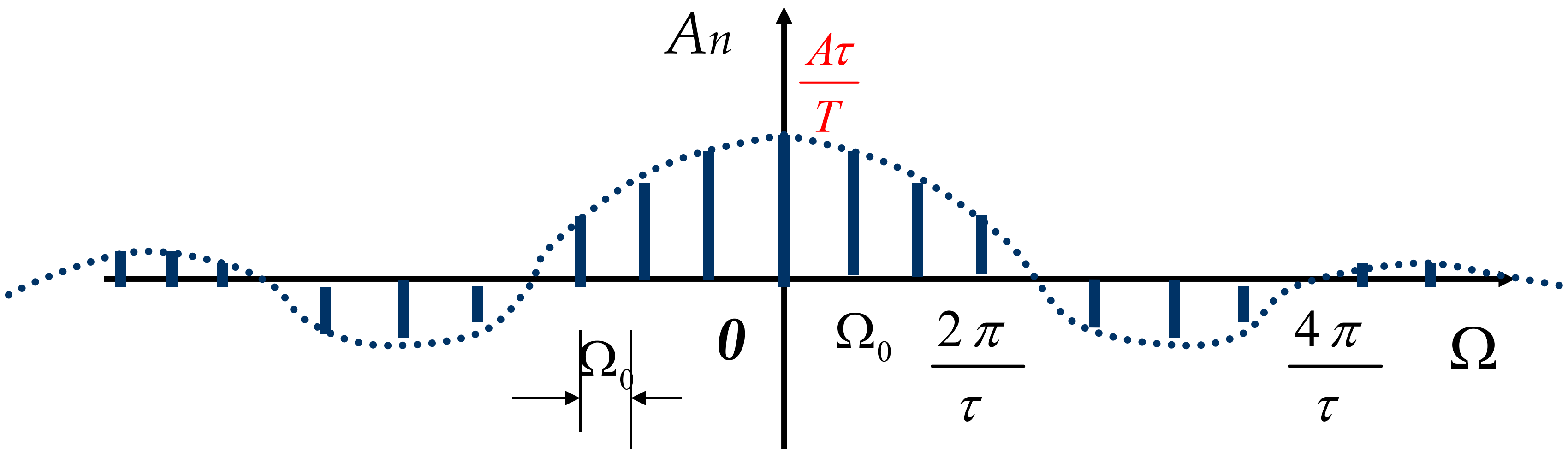
$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}e^{jk\Omega_0 t}$$

双边



$$\dot{A}_k=\frac{A\tau}{T}\cdot\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}\Rightarrow\begin{cases}A_k=\frac{A\tau}{T}\cdot\left|\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}\right|\\ \theta_k=\begin{cases}0\\ \pm\pi\end{cases}\end{cases}$$

频谱绘制-指数形式



双边频谱（两谱合一）

频谱特点

- 离散性：它由不连续的线条组成；
- 谐波性：线条只出现在基波频率的整数倍点上；
- 收敛性：实际信号的幅频特性总是随频率趋向无穷大而趋向于零。

主观题 10分

设置

请绘制信号的频谱 $x(t)=\sin 2t+\sin 5t$

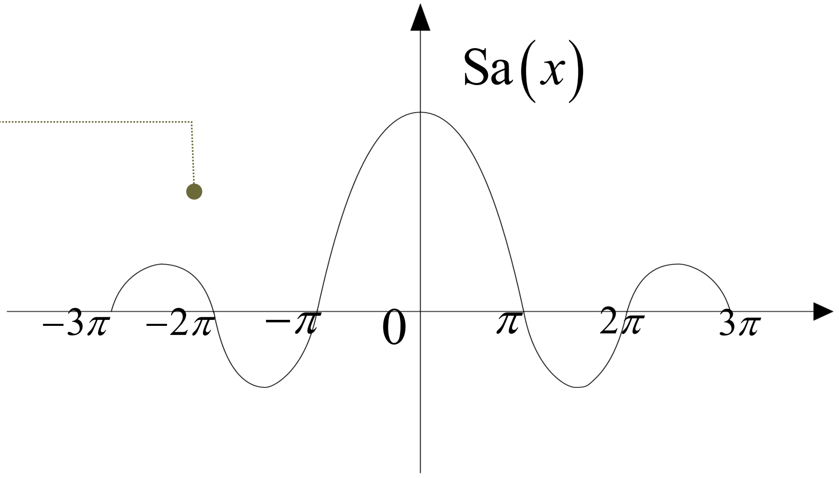
正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

抽样函数：

$$\mathrm{Sa}(x)=\frac{\sin x}{x}$$

包络

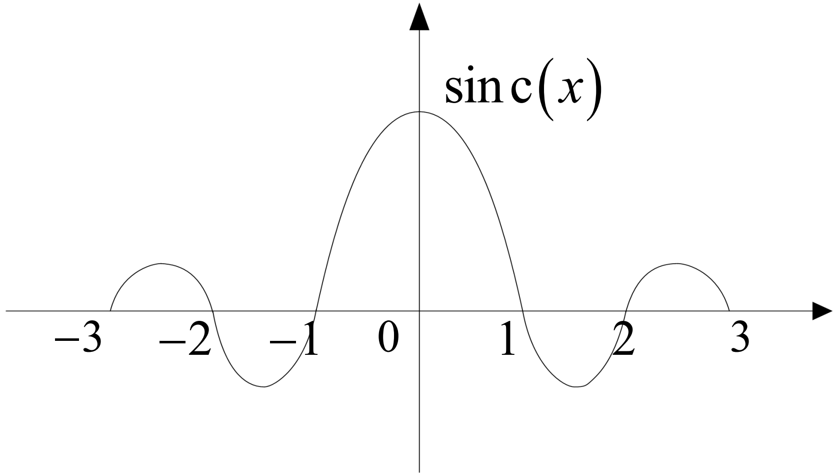


$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\boxed{\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}}e^{jk\Omega_0 t}$$

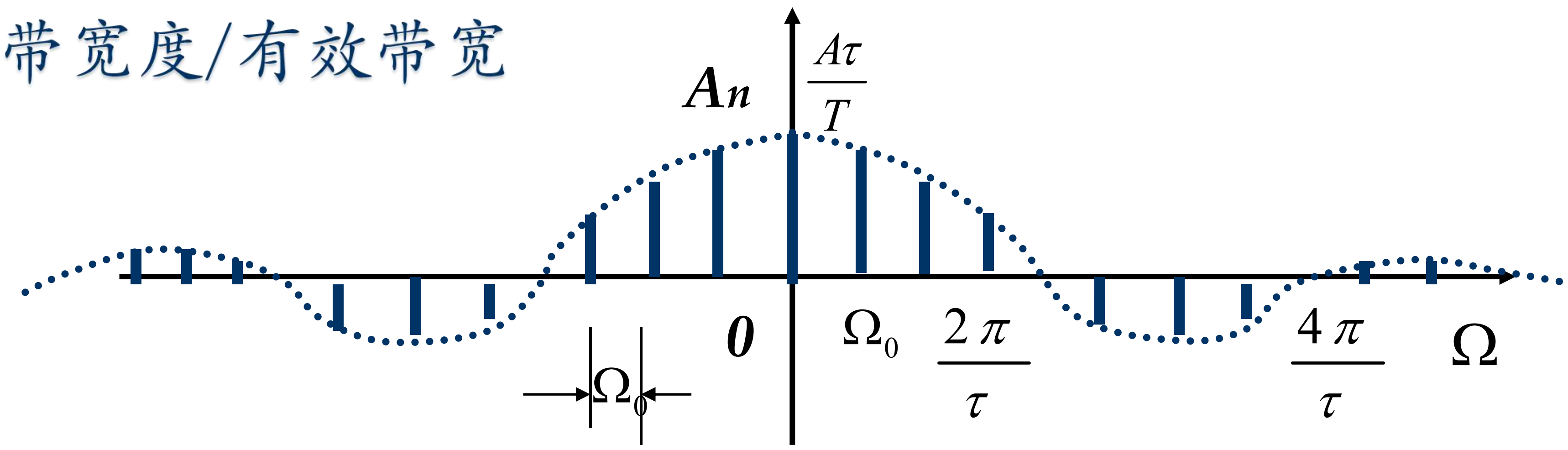
$$=\frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(k\Omega_0\tau/2)e^{jk\Omega_0 t}\ \left(k\Omega_0\text{为自变量，}\tau\text{为常数}\right)$$

归一化抽样函数：

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\mathrm{Sa}(\pi x)$$



频带宽度/有效带宽



信号的频带有多种定义方法：

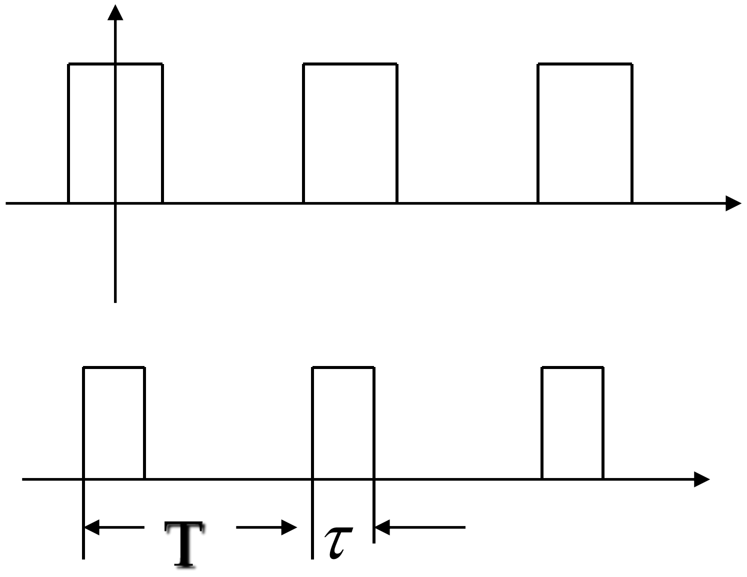
1、以信号振幅频谱中的第一个过零点为限，零点以外部分忽略不计；

2、以频谱最大幅度的$\frac{1}{\sqrt{2}}$为限，其它部分忽略不计；

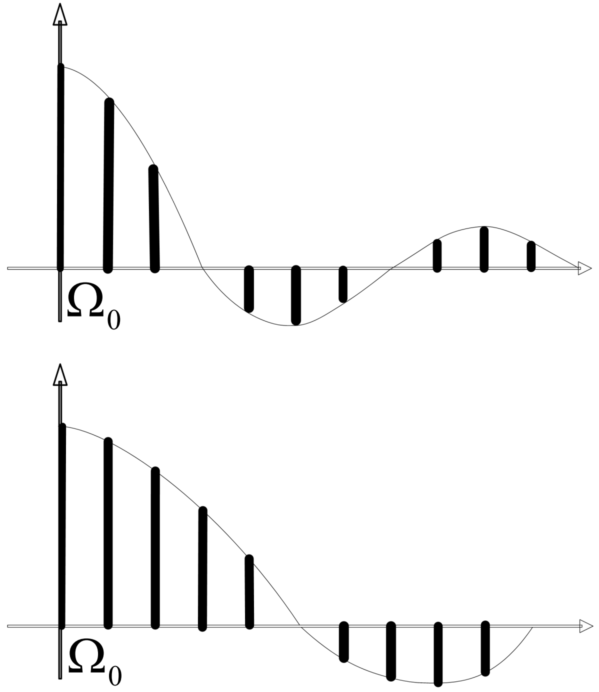
3、以频谱最大幅度的$\frac{1}{10}$为限，其它部分忽略不计；

4、以包含信号总能量的90%处为限，其余部分忽略不计。

波形变化与频谱变化的关系



$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2A\tau}{T} \cdot \left| \dfrac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2} \right| \\ \theta_k = \begin{cases} 0 \\ -\pi \end{cases} \end{cases}$$



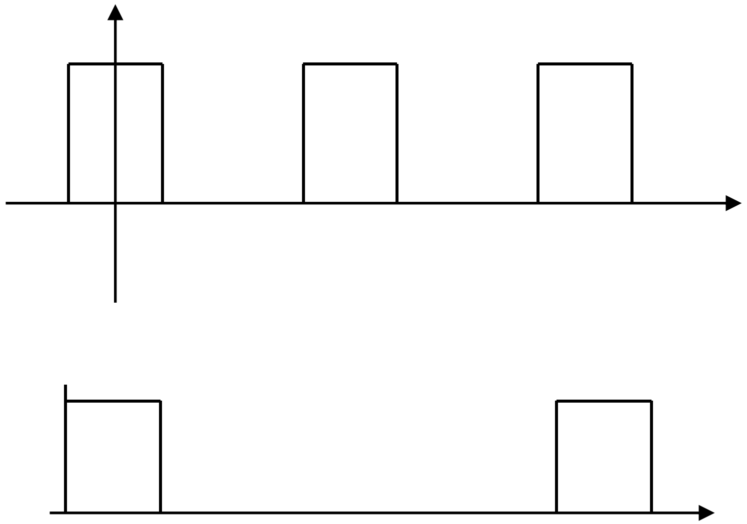
<u>T不变、τ变小</u>：Sa函数发生改变

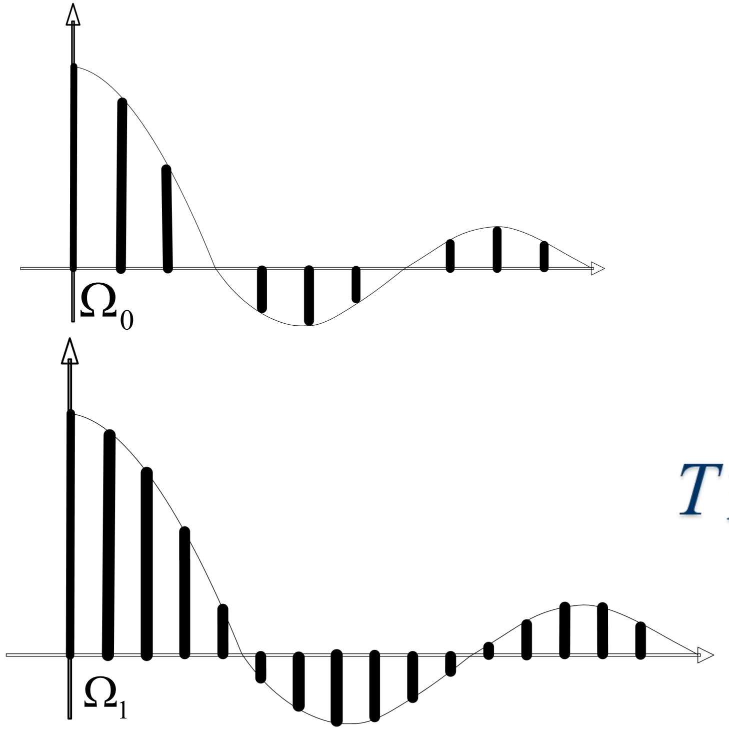
因为T不变，所以Ω_0不变，谱线密度不变；

因为τ变小，所以包络展宽，信号频带变大

因为信号功率变小，所以频谱幅度下降

波形变化与频谱变化的关系





T变大到无穷时?

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2A\tau}{T} \cdot \left| \dfrac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2} \right| \\ \theta_k = \begin{cases} 0 \\ -\pi \end{cases} \end{cases}$$

T变大、τ不变:

因为T变大，所以Ω_0变小，谱线变密;

因为τ不变，所以包络不变，Sa函数不变

因为信号功率变小，所以频谱幅度下降

波形变化与频谱变化的关系

$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(k\Omega_0\tau/2)e^{jk\Omega_0 t}=\frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\Omega\tau/2)e^{j\Omega t}$$

$$\dot{A}_k=\frac{A\tau}{T}\mathrm{Sa}(k\Omega_0\tau/2)\Rightarrow\boxed{T\dot{A}_k=A\tau\mathrm{Sa}(k\Omega_0\tau/2)=A\tau\mathrm{Sa}(\Omega\tau/2)}$$

Sa函数中，Ω为自变量，τ为常数

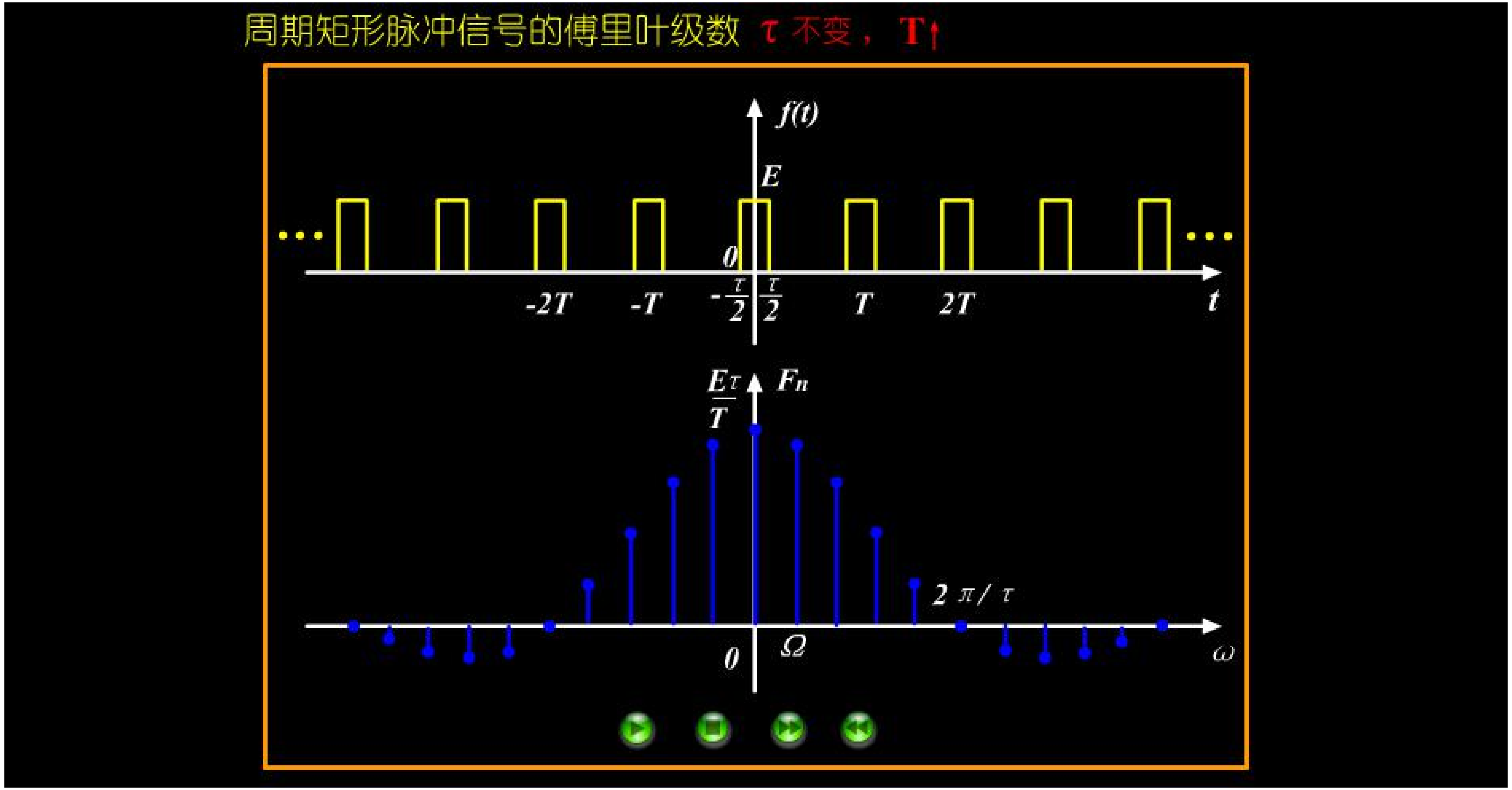
$\therefore$ Sa函数为包络，一旦τ确定，则整个包络确定；

T的改变，对Sa函数没有影响；

T决定了对此包络的采样频率(间隔)；

当$T\to\infty$时，采样间隔越来越密，$T\dot{A}_k$趋近于包络函数。

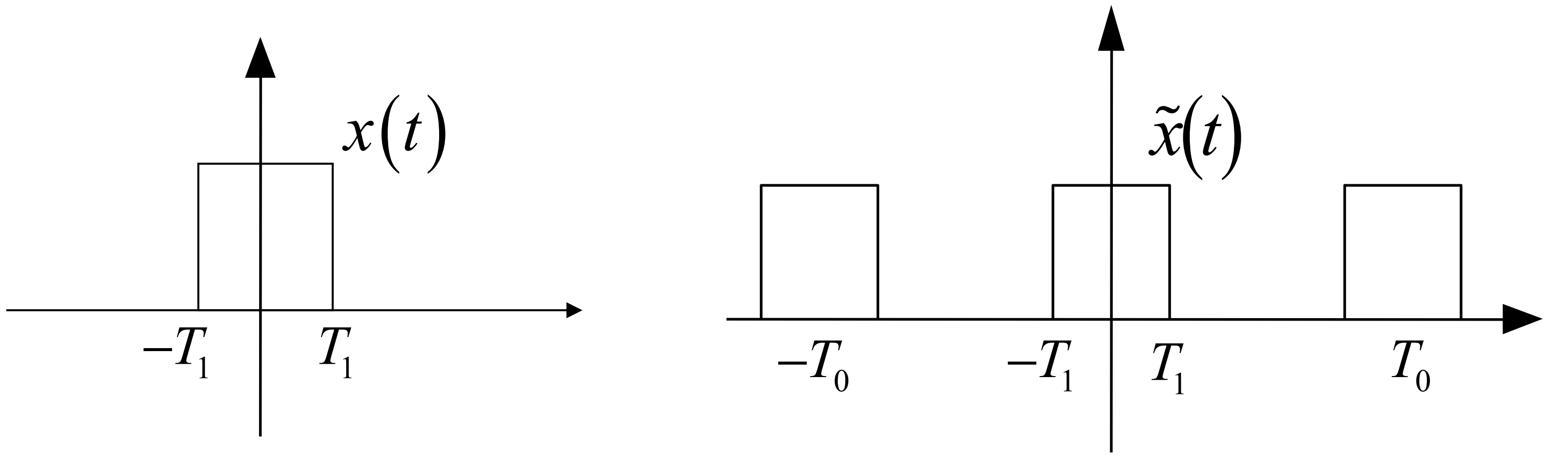
波形变化与频谱变化的关系



02 非周期信号的傅里叶变换

思路：当我们把非周期信号$x(t)$看作是相应的周期信号$\tilde{x}(t)$周期趋于无穷大时的极限，则可以通过考查$\tilde{x}(t)$的傅立叶在此时的极限，来建立非周期信号$x(t)$的频谱。

(图中非周期信号的宽度为$2T_1$，T_0为周期信号的周期)



非周期信号 —— 周期信号

傅里叶变换 —— 傅里叶级数

将周期信号$\tilde{x}(t)$展开为傅立叶级数：

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} \qquad \dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\tilde{x}(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$\because -T_0/2\le t\le T_0/2$区间内，有$\tilde{x}(t)=x(t)$

$$\therefore T_0\dot{A}_k=\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

当$T_0\to\infty$时，$\Omega_0\to 0$，$\dot{A}_k$的自变量$k\Omega_0$变为连续变量Ω;

$T_0\dot{A}_k$变为连续函数（采样间隔无限小）将其记作$X(\Omega)$:

$$\boxed{X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt}$$

$X(\Omega)$称为非周期信号的频谱密度函数，简称频谱。

对应于周期信号，可以得到：

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} X(k\Omega_0)$$

将其代回周期信号$\tilde{x}(t)$的傅立叶展开：

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \Omega_0 \qquad \left(\because \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \right)$$

当$T_0 \to \infty$时，$\tilde{x}(t) \to x(t)$，$\Omega_0 \to d\Omega$，$k\Omega_0 \to \Omega$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (\text{傅立叶反变换})$$

<u>非周期信号可以分解为连续频率分布的复指数信号之和</u>

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$ 傅立叶变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$ 傅立叶反变换

傅立叶变换存在条件：狄利赫利条件

充分条件

1、$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$

2、在任何有限区间内只有有限个极值点，且极值有限

3、在任何有限区间内只有有限个间断点，且不连续值有限

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt=\left|X(\Omega)\right|e^{j\phi(\Omega)}$$

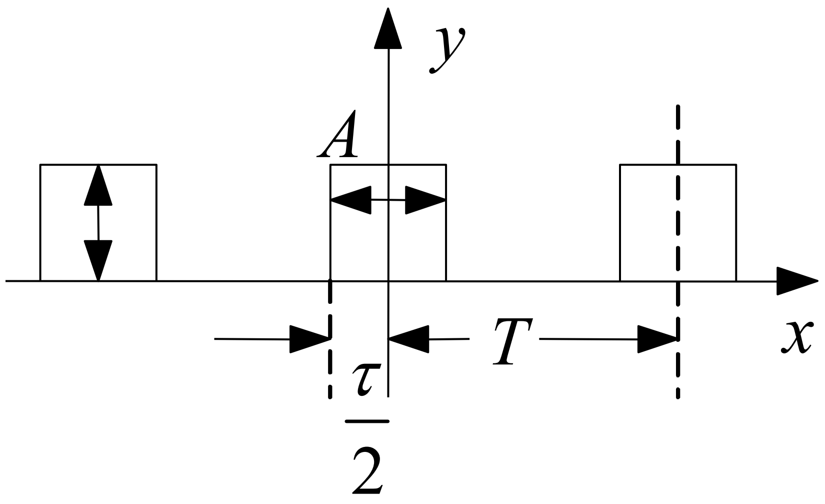
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\Omega)|e^{j(\Omega t+\phi)}d\Omega}_{\text{复指数表现形式}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|X(\Omega)|\cos(\Omega t+\phi)d\Omega}_{\text{三角函数表现形式}}$$

相同点：都可以分解为不同频率的正弦分量

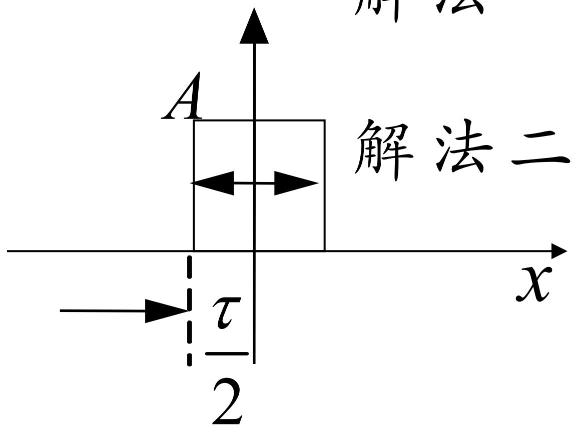
不同点：非周期信号的正弦分量包含一切频率成分

$\left|X(\Omega)\right|$：幅度频谱　　　$\phi(\Omega)$：相位频谱



傅立叶级数:

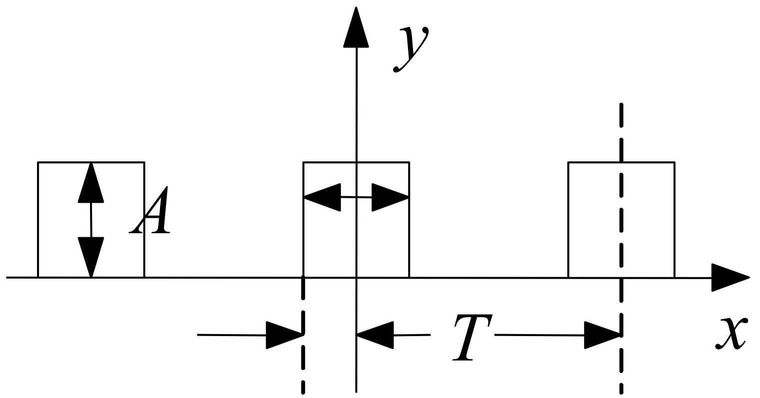
$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right)e^{jk\Omega_0 t}$$

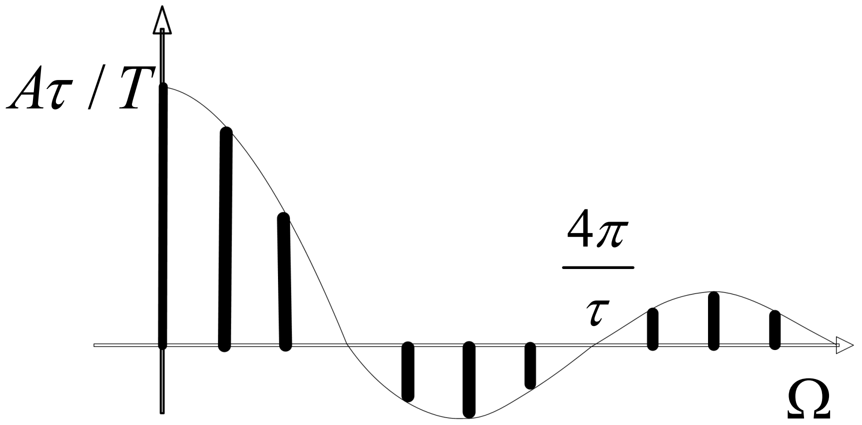


解法一： $X(\Omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\left(T\cdot\dot{A}_k\right)=A\tau Sa(\tau\Omega/2)$

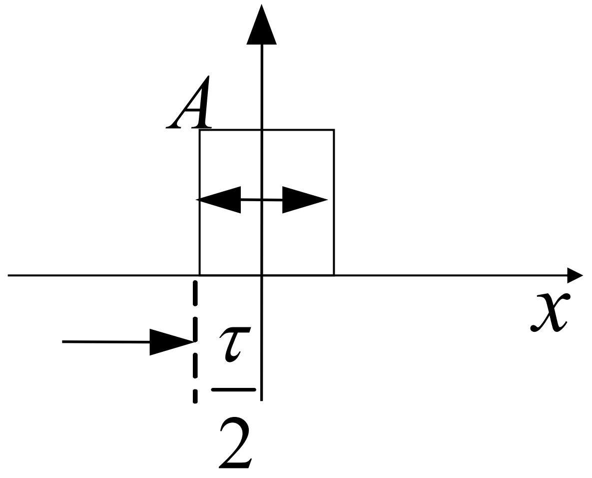
解法二： $X(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$

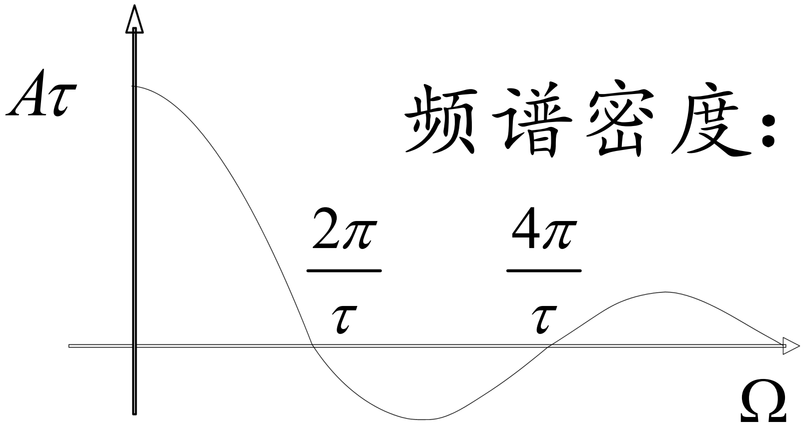
$$=\frac{A}{-j\Omega}e^{-j\Omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=A\tau Sa(\tau\Omega/2)$$





傅立叶级数：$x(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{k\Omega_0 \tau}{2}) e^{jk\Omega_0 t}$





频谱密度：$X(\Omega) = A\tau Sa(\tau\Omega / 2)$

1、时域非周期 $\rightarrow$ 频域连续　　　时域周期 $\rightarrow$ 频域离散

2、包络一致性

$$X(\Omega) = T \cdot \dot{A}_k \Big|_{k\Omega_0 = \Omega} \qquad \dot{A}_k = \frac{1}{T} X(\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$$

3、收敛性(非周期信号有效频宽)

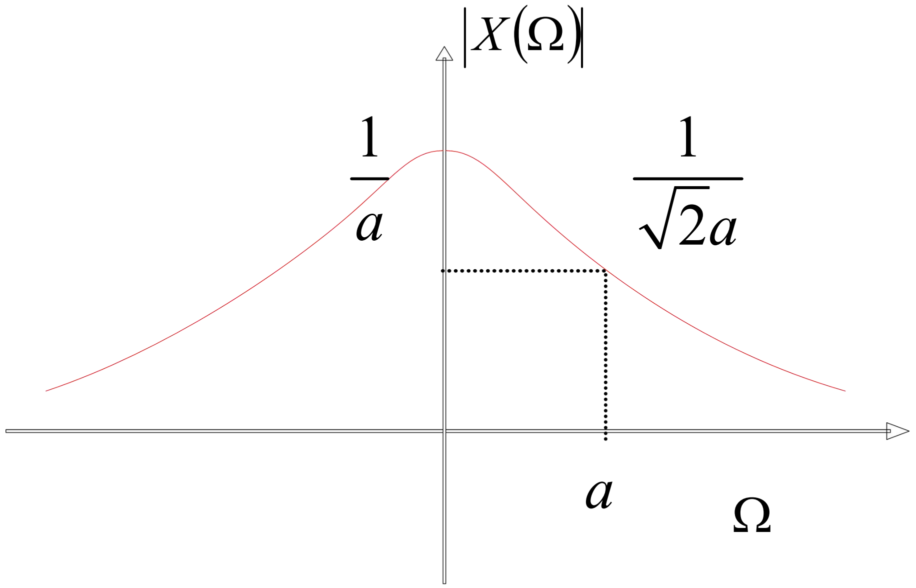
以信号振幅频谱中的第一个过零点为限

以频谱最大幅度的$\dfrac{1}{10}$为限

以包含信号总能量的90%处为限

03 常用信号的傅里叶变换

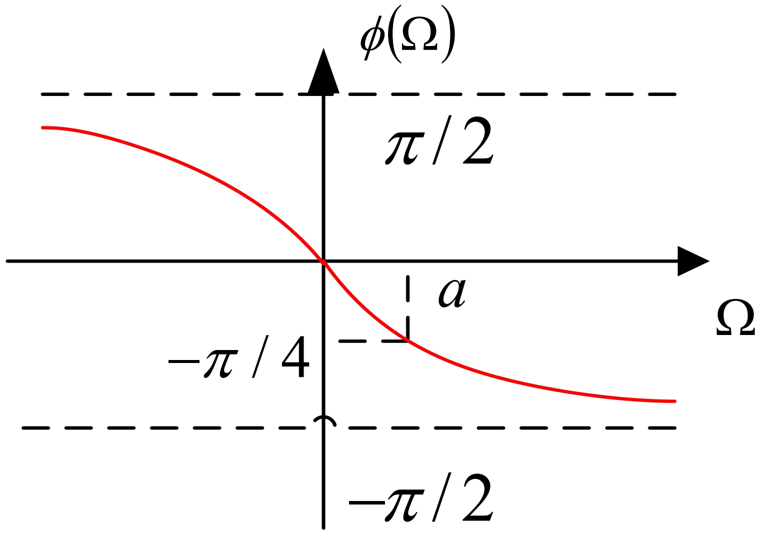
$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$$



$$X(\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{a + j\Omega}$$

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \Omega^2}}$$

$$\phi(\Omega) = -arctg(\frac{\Omega}{a})$$



正变换：

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\Omega t}dt=1$$

$\delta(t)$信号中所有频率分量的强度均相等，频带具有无限宽度。

反变换：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{j\Omega t}d\Omega$$

因常数频谱1不满足绝对可积条件，

所以上式不能直接得到结果

单位冲激信号傅里叶变换

$$\because X(\Omega)=1=\lim_{\beta\to 0} e^{-\beta|\Omega|}$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\beta\to 0} e^{-\beta|\Omega|}\cdot e^{j\Omega t}\,d\Omega=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-\beta\Omega}\cdot e^{j\Omega t}\,d\Omega+\int_{-\infty}^{0} e^{\beta\Omega}\cdot e^{j\Omega t}\,d\Omega\right)$$

$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\beta-jt}+\frac{1}{\beta+jt}\right)=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\beta}{\beta^2+t^2}\right)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$ ：幅度上

冲激强度：$$\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\beta}{\beta^2+t^2}\right)dt=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}d\left(\frac{t}{\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\beta\to 0}\arctan\left(\frac{t}{\beta}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=1$$

∴满足$\delta(t)$的两个条件 $$\therefore x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t}\,d\Omega=\delta(t)$$

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-j\Omega t}dt \quad (\text{不满足绝对可积})$$

借助于单边指数函数：$x(t)=e^{-at}u(t)\Leftrightarrow X(\Omega)=\dfrac{1}{a+j\Omega}$

$$\Downarrow \text{令} u(t)=\lim_{a\to 0}e^{-at}u(t)$$

$$X(\Omega)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a+j\Omega}=\lim_{a\to 0}\left(\frac{a}{a^2+\Omega^2}-\frac{j\Omega}{a^2+\Omega^2}\right)=A(\Omega)+jB(\Omega)$$

$$\left.\begin{aligned} A(\Omega) &= \lim_{a\to 0}\frac{a}{a^2+\Omega^2} = 0 \qquad \Omega \neq 0 \\ A(\Omega) &= \lim_{a\to 0}\frac{a}{a^2+\Omega^2} \to \infty \qquad \Omega = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} A(\Omega)\,d\Omega = \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left(\frac{\Omega}{a}\right)}{1+\left(\frac{\Omega}{a}\right)^2} = \lim_{a\to 0}\arctan\left(\frac{\Omega}{a}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$\therefore A(\Omega)$为冲激函数，冲激强度为π

$$B(\Omega) = -\lim_{a\to 0}\frac{\Omega}{a^2+\Omega^2} = -\frac{1}{\Omega}$$

$$\therefore X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) = \pi\delta(\Omega) - j\frac{1}{\Omega} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

复指数信号傅里叶变换

$$x(t)=e^{j\Omega_0 t} \quad \rightarrow \quad X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}dt \;\text{(不满足绝对可积)}$$

考虑到：$\delta(t)\leftrightarrow 1$，其反变换为$x_\delta(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t}d\Omega=\delta(t)$

因此有：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t}d\Omega=2\pi\delta(-t)=2\pi\delta(t)$

$\Downarrow$(进行变量代换：$\Omega\rightarrow t$，$t\rightarrow\Omega-\Omega_0$)

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}dt=2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

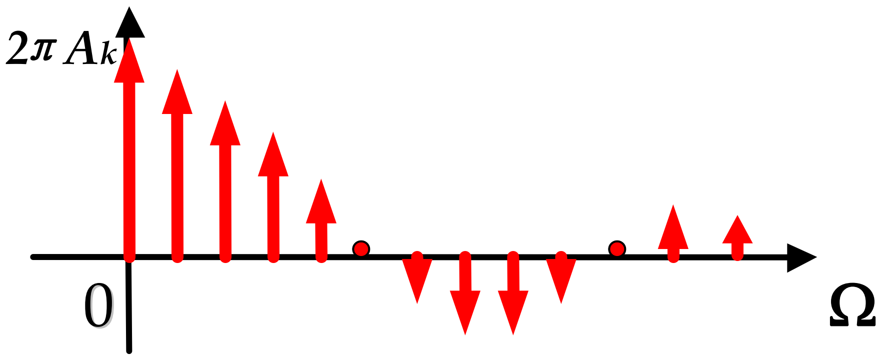
由$\boxed{e^{j\Omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)}$引申出：$\begin{cases}\boxed{1\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)} \quad \text{(利用欧拉公式推导)} \\ \cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow \pi[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)] \\ \sin(\Omega_0 t)\leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega+\Omega_0)-\delta(\Omega-\Omega_0)]\end{cases}$

周期信号可以展开为谐波分量：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\cdot e^{jk\Omega_0 t},\quad \Omega_0=\frac{2\pi}{T_0},\quad \dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

由于$e^{j\Omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$

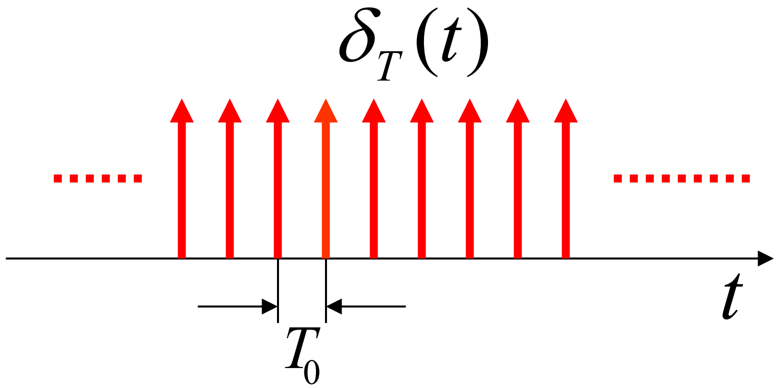
则$x(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\delta(\Omega-k\Omega_0)$



- 由一些冲激组成离散频谱
- 各个冲激位于信号的谐波处（$k\Omega_0$）
- 每个谐波分量的大小有限，但占据的频带无穷小

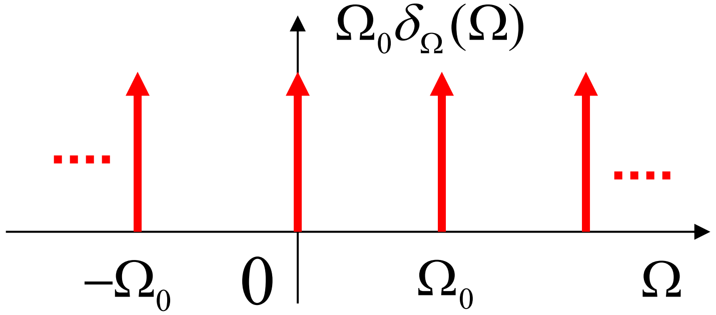
例：求周期冲激序列的傅立叶变换

$$\delta_T(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



解：$\dot{A}_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$

$$X(\Omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n\delta(\Omega-n\Omega_0)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\Omega_0)=\Omega_0\delta_\Omega(\Omega)$$



作业

- 3.7
- 补充作业：
  - 1：求下图非周期信号的傅立叶变换，
  - 2：将此信号扩展为周期T信号f (t)，求f (t)傅立叶级数（扩展后的信号无重叠）