§1.5 系统的特性与分类

- 系统的定义
- 系统的分类及性质

一、系统的定义

- 系统：

　　具有特定功能的总体，可以看作信号的变换器、处理器。

　　电系统是电子元器件的集合体。

　　电路侧重于局部，系统侧重于整体。
　　电路、系统两词通用。

二. 系统的分类及性质

可以从多种角度来观察、分析研究系统的特征，提出对系统进行分类的方法。常用的分类有：

- 连续系统与离散系统
- 动态系统与即时系统
- 单输入单输出系统与多输入多输出系统
- 线性系统与非线性系统
- 时不变系统与时变系统
- 因果系统与非因果系统
- 稳定系统与不稳定系统

1. 连续系统与离散系统

- **连续(时间)系统：** 系统的激励和响应均为连续信号。
- **离散(时间)系统：** 系统的激励和响应均为离散信号。
- **混合系统：**

系统的激励和响应一个是连续信号，一个为离散信号。如**A/D**，**D/A**变换器。

2. 动态系统与即时系统

动态系统也称为记忆系统。

若系统在任一时刻的响应不仅与该时刻的激励有关，而且与它过去的历史状况有关，则称为动态系统或记忆系统。

含有记忆元件(电容、电感等)的系统是动态系统。

否则称即时系统或无记忆系统。

3. 单输入单输出系统与多输入多输出系统

- 单输入单输出系统：
  系统的输入、输出信号都只有一个。

- 多输入多输出系统：
  系统的输入、输出信号有多个。

4. 线性系统与非线性系统

- **线性系统**：指满足线性性质的系统。

- **线性性质**：齐次性和可加性

$$y(\cdot) = \mathrm{T}[f(\cdot)]$$

$$f(\cdot) \to y(\cdot)$$

齐次性：

$$f(\cdot) \to y(\cdot) \quad \Longrightarrow \quad a\,f(\cdot) \to a\,y(\cdot)$$

可加性：

$$\left.\begin{aligned} f_1(\cdot) &\to y_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) &\to y_2(\cdot) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f_1(\cdot)+f_2(\cdot) \to y_1(\cdot)+y_2(\cdot)$$

综合，**线性性质**：

$$af_1(\cdot)+bf_2(\cdot) \to ay_1(\cdot)+by_2(\cdot)$$

动态系统是线性系统的条件

动态系统不仅与激励{ $f(\cdot)$ }有关，而且与系统的初始状态{$x(0)$}有关。初始状态也称“内部激励”。

$$y(\cdot) = T[\{ f(\cdot) \}, \{x(0)\}],$$

$$y_{zs}(\cdot) = T[\{ f(\cdot) \}, \{0\}], \qquad y_{zi}(\cdot) = T[\{0\}, \{x(0)\}]$$

①可分解性： $y(\cdot) = y_{zs}(\cdot) + y_{zi}(\cdot)$

②零状态线性：

$$\mathrm{T}[\{af_1(t) + bf_2(t)\}, \{0\}] = a\mathrm{T}[\{ f_1(\cdot) \}, \{0\}] + b\mathrm{T}[\{ f_2(\cdot) \}, \{0\}]$$

③零输入线性：

$$\mathrm{T}[\{0\},\{ax_1(0) + bx_2(0)\}] = a\mathrm{T}[\{0\},\{x_1(0)\}] + b\mathrm{T}[\{0\},\{x_2(0)\}]$$

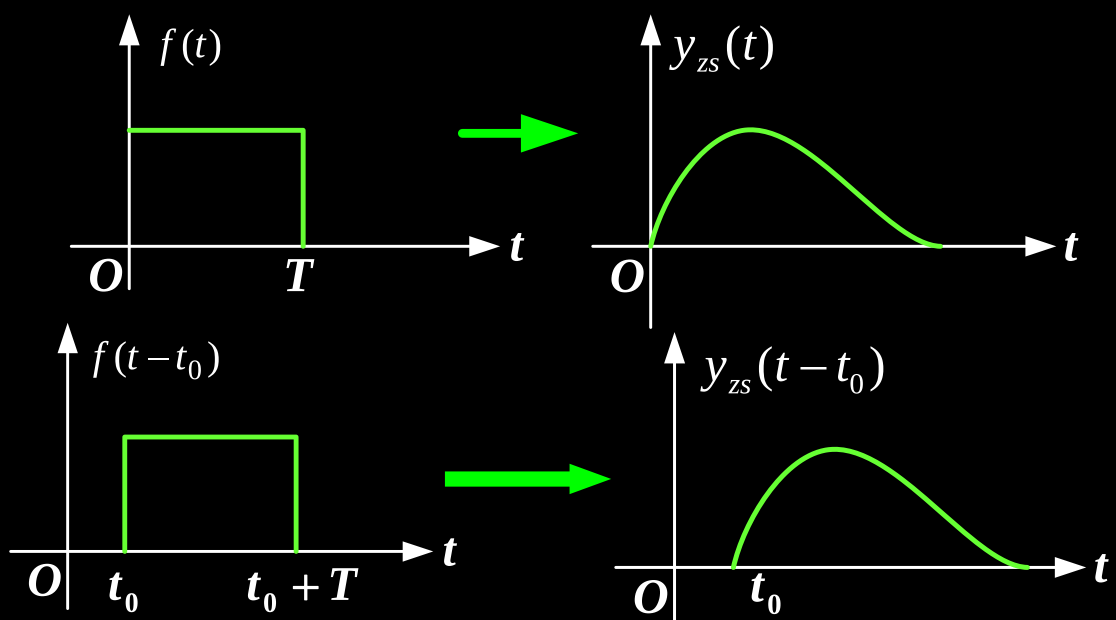
举例1　举例2

5. 时不变系统与时变系统

• **时不变系统：** 指满足时不变性质的系统。

• **时不变性（或移位不变性）：**

$$f(t) \rightarrow y_{zs}(t) \longrightarrow f(t-t_d) \rightarrow y_{zs}(t-t_d)$$



举例

LTI连续系统的微分特性和积分特性

本课程重点讨论线性时不变系统(Linear Time-Invariant)，简称LTI系统。

① 微分特性：

若 $f(t) \rightarrow y_{zs}(t)$ ， 则 $f'(t) \rightarrow y'_{zs}(t)$ 证明

② 积分特性：

若 $f(t) \rightarrow y_{zs}(t)$ ， 则 $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \rightarrow \int_{-\infty}^{t} y_{zs}(x)\,\mathrm{d}x$

6. 因果系统与非因果系统

- **因果系统：**

  指零状态响应不会出现在激励之前的系统。

  即对因果系统，

  当$t < t_0$，$f(t) = 0$时，有$t < t_0$，$y_{zs}(t) = 0$。

- **判断方法：**

  输出不超前于输入。

举例

综合举例

- 实际的物理可实现系统均为因果系统

　　非因果系统的概念与特性也有实际的意义，如信号的压缩、扩展，语音信号处理等。

　　若信号的自变量不是时间，如位移、距离、亮度等为变量的物理系统中研究因果性显得不很重要。

- 因果信号

$\boldsymbol{t = 0}$接入系统的信号称为因果信号。

可表示为：$f(t) = f(t)\varepsilon(t)$　　相当于$t < 0,\ f(t) = 0$

7. 稳定系统与不稳定系统

一个系统，若对有界的激励$f(.)$所产生的零状态响应$y_{zs}(.)$也是有界时，则称该系统为**有界输入有界输出稳定**，简称**稳定**。即 若 $|f(.)|<\infty$，其 $|y_{zs}(.)|<\infty$ 则称系统是稳定的。

如$y_{zs}(k) = f(k) + f(k-1)$是稳定系统；而

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$ 是不稳定系统。

因为，当$f(t) = \varepsilon(t)$有界，

$$\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = t\varepsilon(t)$$ 当$t\to\infty$时，它也$\to\infty$，无界。

判断线性系统举例

例1：判断下列系统是否为线性系统？

（1） $y(t) = 3x(0) + 2f(t) + x(0)f(t) + 1$

（2） $y(t) = 2x(0) + |f(t)|$

（3） $y(t) = x^2(0) + 2f(t)$

解： （1） $y_{zs}(t) = 2f(t) + 1$， $y_{zi}(t) = 3x(0) + 1$

显然， $y(t) \neq y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$ 不满足可分解性，故为非线性

（2） $y_{zs}(t) = |f(t)|$， $y_{zi}(t) = 2x(0)$

$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$ 满足可分解性；

由于 $T[\{a f(t)\}, \{0\}] = |af(t)| \neq a\, y_{zs}(t)$ 不满足零状态线性。故为非线性系统。

（3） $y_{zi}(t) = x^2(0)$， $T[\{0\},\{a\,x(0)\}] = [a\,x(0)]^2 \neq a\,y_{zi}(t)$ 不满足零输入线性。故为非线性系统。

例2：判断下列系统是否为线性系统？

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\,x(0) + \int_0^t \sin(x)\,f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

解：$y_{zi}(t) = \mathrm{e}^{-t}\,x(0)$, $y_{zs}(t) = \int_0^t \sin(x)\,f(x)\,\mathrm{d}\,x$

$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$ ， 满足可分解性；

$\mathrm{T}[\{a\,f_1(t) + b\,f_2(t)\}, \{0\}]$

$= a\mathrm{T}[\{f_1(t)\}, \{0\}] + b\mathrm{T}[\{f_2(t)\}, \{0\}]$，满足零状态线性；

$\mathrm{T}[\{0\},\{a x_1(0) + b x_2(0)\}]$
$= \mathrm{e}^{-t}[a x_1(0) + b x_2(0)] = a\mathrm{e}^{-t}x_1(0) + b\mathrm{e}^{-t}x_2(0)$
$= a\mathrm{T}[\{0\},\{x_1(0)\}] + b\mathrm{T}[\{0\},\{x_2(0)\}]$， 满足零输入线性；

所以，该系统为线性系统。

判断时不变系统举例

例：判断下列系统是否为时不变系统?

（1） $y_{zs}(k) = f(k) f(k-1)$

（2） $y_{zs}(t) = t f(t)$

（3） $y_{zs}(t) = f(-t)$

解 (1) 令 $g(k) = f(k-k_d)$

$T[g(k), \{0\}] = g(k) g(k-1) = f(k-k_d) f(k-k_d-1)$

而 $y_{zs}(k-k_d) = f(k-k_d) f(k-k_d-1)$

显然 $T[f(k-k_d), \{0\}] = y_{zs}(k-k_d)$ 故该系统是时不变的。

(2) 令 $g(t) = f(t-t_d)$， $T[g(t), \{0\}] = t\, g(t) = t f(t-t_d)$

而 $y_{zs}(t-t_d) = (t-t_d) f(t-t_d)$

显然 $T[f(k-k_d), \{0\}] \neq y_{zs}(t-t_d)$ 故该系统为时变系统。

(3) 令$g(t) = f(t - t_d)$，

$$T[g(t), \{0\}] = g(-t) = f(-t - t_d)$$

而 $y_{zs}(t - t_d) = f[-(t - t_d)]$，显然

$$T[f(k - k_d), \{0\}] \neq y_{zs}(t - t_d)$$

故该系统为时变系统。

直观判断方法：

若$f(\cdot)$前出现变系数，或有反转、展缩变换，则系统为时变系统。

因果系统判断举例

如下列系统均为因果系统：

$$y_{zs}(t) = 3f(t-1) \qquad y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

而下列系统为非因果系统：

(1) $y_{zs}(t) = 2f(t+1)$ 因为，令t=1时，有$y_{zs}(1) = 2f(2)$

(2) $y_{zs}(t) = f(2t)$

因为，若$f(t) = 0$， $t < t_0$，有$y_{zs}(t) = f(2t)=0$, $t < 0.5\, t_0$ 。

综合举例

例 某LTI因果连续系统，起始状态为$x(0_)$。已知，当$x(0_)=1$，输入因果信号$f_1(t)$时，全响应

$$y_1(t) = e^{-t} + \cos(\pi t),\quad t>0;$$

当$x(0_)=2$，输入信号$f_2(t)=3f_1(t)$时，全响应

$$y_2(t) = -2e^{-t} + 3\cos(\pi t),\quad t>0;$$

求输入$f_3(t) = \dfrac{\mathrm{d}\, f_1(t)}{\mathrm{d}\, t} + 2f_1(t-1)$时，系统的零状态响应$y_{3f}(t)$。

解 设当$x(0_)=1$，输入因果信号$f_1(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应分别为$y_{1zi}(t)$、$y_{1zs}(t)$。当$x(0_)=2$，输入信号$f_2(t)=3f_1(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应分别为$y_{2zi}(t)$、$y_{2zs}(t)$。

由题中条件，有

$y_1(t) = y_{1zi}(t) + y_{1zs}(t) = e^{-t} + \cos(\pi t)$，$t>0$　　（1）

$y_2(t) = y_{2zi}(t) + y_{2zs}(t) = -2e^{-t} + 3\cos(\pi t)$，$t>0$　　（2）

根据线性系统的齐次性，$y_{2zi}(t) = 2y_{1zi}(t)$，

$y_{2zs}(t) = 3y_{1zs}(t)$，代入式（2）得

$y_2(t) = 2y_{1zi}(t) + 3y_{1zs}(t) = -2e^{-t} + 3\cos(\pi t)$，$t>0$　（3）

式(3)– 2×式(1)，得

$$y_{1zs}(t) = -4e^{-t} + \cos(\pi t),\ t>0$$

由于$y_{1zs}(t)$ 是因果系统对因果输入信号$f_1(t)$的零状态响应，故当$t<0$，$y_{1zs}(t)=0$；因此$y_{1zs}(t)$可改写成

$$y_{1zs}(t) = [-4e^{-t} + \cos(\pi t)]\varepsilon(t) \qquad (4)$$

$$f_1(t) \rightarrow y_{1zs}(t) = [-4e^{-t} + \cos(\pi t)]\,\varepsilon(t)$$

根据LTI系统的微分特性

$$\frac{\mathrm{d}\, f_1(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\, y_{zs1}(t)}{\mathrm{d}t} = -3\,\delta(t) + [4e^{-t} - \pi \sin(\pi t)]\,\varepsilon(t)$$

根据LTI系统的时不变特性

$$f_1(t-1) \rightarrow y_{1zs}(t-1) = \{-4e^{-(t-1)} + \cos[\pi(t-1)]\}\,\varepsilon(t-1)$$

由线性性质，得：当输入$f_3(t) = \frac{\mathrm{d}\, f_1(t)}{\mathrm{d}t} + 2f_1(t-1)$，

$$y_{3zs}(t) = \frac{\mathrm{d}\, y_1(t)}{\mathrm{d}t} + 2y_1(t-1) = -3\,\delta(t) + [4e^{-t} - \pi \sin(\pi t)]\,\varepsilon(t) + 2\{-4e^{-(t-1)} + \cos[\pi(t-1)]\}\,\varepsilon(t-1)$$