第2章 信号与系统的时域分析

LTI离散时间系统的时域分析

内容回顾

主要内容

CONTENTS

01 离散时间信号的时域分解

单位脉冲函数

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \qquad \delta(n-k)=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n) \qquad x(n)\delta(n-k)=x(k)\delta(n-k)$$

分解表示

$$x(n)=\cdots+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

LTI系统单位脉冲响应

$$\delta(n) \xrightarrow{\text{响应}} h(n)$$

$h(n)$称为系统的**单位脉冲响应**

时不变

$$\delta(n-k) \xrightarrow{\text{响应}} h(n-k)$$

齐次性

$$x(k)\delta(n-k) \xrightarrow{\text{响应}} x(k)h(n-k)$$

离散时间LTI系统对输入$x(n)$的响应：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \xrightarrow{\text{响应}} y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

02 卷积和

卷积和

定义

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)$$

因果系统

对于有始信号： $k<0,\quad x(k)=0$

因果系统中，$h(n)$也是有始信号，即$k>n$，$h(n-k)=0$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}x(n)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

例1:某LTI离散因果系统的单位脉冲响应为：$h(n)=0.5^n u(n)$

系统激励信号：$x(n)=0.2^n u(n)$，求系统的零状态响应

解： $y(n)=x(n)*h(n)$

$$=\sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{n} 0.2^k \cdot 0.5^{n-k}$$

$$=0.5^n\sum_{k=0}^{n} 0.2^k \cdot 0.5^{-k}=0.5^n\sum_{k=0}^{n} 0.4^k$$

$$=0.5^n \cdot \frac{1-0.4^{n+1}}{1-0.4}u(n)=\frac{0.5^{n+1}-0.2^{n+1}}{0.3}u(n)$$

根据定义基于求和公式运算

图解法步骤

(1) 反转：将$h(k)$以纵轴为对称轴反转得到$h(-k)$

(2) 平移：将$h(-k)$随参变量n平移得到$h(n-k)$

(3) 相乘：将$x(k)$与$h(n-k)$各对应点相乘；

(4) 求和：将相乘后的各点值相加，即求$\sum_{(k)} x(k)h(n-k)$

例2：$x(n)=\{2,1,5\}$　$h(n)=\{1,2,3\}$　求$y(n)=x(n)*h(n)$

$$
\begin{array}{lccccccccccl}
x(n): & & & 2 & 1 & 5 & & & & & & y(n) \\
h(n): & & & 1 & 2 & 3 & & & & & & \\
h(-n): & 3 & 2 & 1 & & & & & & & & \rightarrow y(0)=2 \\
h(1-n): & & 3 & 2 & 1 & & & & & & & \rightarrow y(1)=5 \\
h(2-n): & & & 3 & 2 & 1 & & & & & & \rightarrow y(2)=13 \\
h(3-n): & & & & 3 & 2 & 1 & & & & & \rightarrow y(3)=13 \\
h(4-n): & & & & & 3 & 2 & 1 & & & & \rightarrow y(4)=15 \\
h(5-n): & & & & & & 3 & 2 & 1 & & & \rightarrow y(5)=0 \\
h(6-n): & & & & & & & 3 & 2 & 1 & & \rightarrow y(6)=0
\end{array}
$$

例3：$x(n)=\{2,1,5\}$　$h(n)=\{1,2,3\}$ 求$y(n)=x(n)*h(n)$

$$
\begin{array}{cccccc}
x(n) & & & 2 & 1 & 5 \\
\times h(n) & & & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & & & 6 & 3 & 15 \\
= & & 4 & 2 & 10 & \\
 & 2 & 1 & 5 & & \\
\hline
\sum & 2 & 5 & 13 & 13 & 15 \\
y(n) & y(0) & y(1) & y(2) & y(3) & y(4)
\end{array}
$$

填空题 4分

设置

计算两个序列{2,3,4}和{1,3}的卷积和为{[填空1]， [填空2] ， [填空3] ，[填空4] }。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

03 卷积和的性质

交换律

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

结合律

$$x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)$$

分配律

$$x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=\left[x(n)*h_1(n)\right]+\left[x(n)*h_2(n)\right]$$

长度有限性

有限长序列$A(n)$和$B(n)$,其序列长度分别为N_A和N_B

则$C(n)=A(n)*B(n)$为有限长序列，且满足:

1、卷积和的序列长=N_A+N_B-1

2、卷积和的上下限$=A$、B上下限值和

若 $A(n)$ $,n_1 \le n \le n_2, B(n), n_3 \le n \le n_4,$
则序列$C(n)$ 满足$n_1+n_3 \le n \le n_2+n_4$

与单位脉冲序列的卷积

$$x(n)*\delta(n)=x(n)$$

$$x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$

$$x(n-n_1)*\delta(n-n_2)=x(n-n_1-n_2)$$

与单位阶跃序列的卷积

$$x(n)*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

$$u(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)=s(n)$$

$$\boxed{h(n)=s(n)-s(n-1)}$$

延时性质

$$x(n)*h(n)=y(n)$$

$$x(n-n_1)*h(n-n_2)=y(n-n_1-n_2)$$

04 离散LTI系统时域分析

差分方程

表示离散序列中相邻若干数据点之间满足的数学关系

输入：$x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots.$

输出：$y(n), y(n-1), y(n-2), \ldots.$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

后向差分方程：减序形式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n+k)$$

前向差分方程：增序形式

差分方程概念

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n+k) \xrightarrow{\text{展开得到}}$$

$$y(n+N)+a_{N-1}y(n+N-1)+\ldots+a_1y(n+1)+a_0y(n)$$
$$=b_Mx(n+M)+b_{M-1}x(n+M-1)+\ldots+b_1x(n+1)+b_0x(n)$$

差分方程阶数：差分方程的阶定义为响应最大移序与最小移序之差

线性时不变系统：与连续时间系统中的结论相似，可以用一个常系数差分方程描述。

初始条件：零输入零输出特性 $\Rightarrow$ 零初始条件

数值解 可以很方便地用计算机求其数值解

所以很多微分方程可以近似为差分方程求近似数值解

例4 $$y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)$$

求该差分方程描述的系统的单位脉冲响应

$$y(n)=\frac{1}{3}y(n-1)+x(n)$$

$$h(n)=\frac{1}{3}h(n-1)+\delta(n) \leftarrow$$ 将输入信号$x(n)$替换为$\delta(n)$

$$h(0)=\frac{1}{3}h(-1)+\delta(0)=1 \qquad h(1)=\frac{1}{3}h(0)+\delta(1)=\frac{1}{3}$$

$$h(2)=\frac{1}{3}h(1)+\delta(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdots h(n)=\frac{1}{3}h(n-1)+\delta(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$n\geq 0$$

移位算子S

$$S\cdot y(k)=y(k+1)$$

n阶离散时间系统的差分方程一般形式:

$$\left(S^{N}+a_{N-1}S^{N-1}+\ldots+a_{1}S^{1}+a_{0}\right)y(n)$$
$$=\left(b_{M}S^{M}+b_{M-1}S^{M-1}+\ldots+b_{1}S^{1}+b_{0}\right)x(n)$$

转移算子$H(S)$

$$H\left(S\right)=\frac{b_{M}S^{M}+b_{M-1}S^{M-1}+\ldots+b_{1}S^{1}+b_{0}}{S^{N}+a_{N-1}S^{N-1}+\ldots+a_{1}S^{1}+a_{0}}$$
$$\Rightarrow y\left(n\right)=H\left(S\right)x\left(n\right)$$

$M<N$,且$H(S)$极点均为单阶

$$H(S)=\frac{b_M S^M+b_{M-1}S^{M-1}+\cdots+b_0}{S^N+a_{N-1}S^{N-1}+\cdots+a_0}$$

$$=\frac{A_1}{S-v_1}+\frac{A_2}{S-v_2}+\cdots+\frac{A_N}{S-v_N}$$

设$h_r(n)$为转移算子$\dfrac{A_r}{S-v_r}$的一阶子系统的单位脉冲响应，则：

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)+\cdots+h_N(n)$$

$$H(S)=\frac{A}{S-v}$$

一阶离散系统

$$H(S)=\frac{A}{S-v} \dashrightarrow y(n+1)-vy(n)=Ax(n)$$

当$x(n)=\delta(n)$时，$h(n)=y(n)$

$$\Rightarrow h(n+1)-vh(n)=A\delta(n)$$

当$n\geq 0$时，系统的响应为：

$$\left.\begin{aligned} h(0)&=vh(-1)+A\delta(-1)=0\\ h(1)&=vh(0)+A\delta(0)=A\\ h(2)&=vh(1)+A\delta(1)=Av\\ h(3)&=vh(2)+A\delta(2)=Av^2\\ &\cdots \end{aligned}\right\}\Rightarrow h(n)=Av^{n-1}u(n-1)$$

因果系统

当$n<0, x(n)=0$时$, y(n)=0$

$M<N$

a、如果特征方程没有重根，则：

$$\left.\begin{aligned} H(S) &= \frac{A_1}{S-v_1}+\frac{A_2}{S-v_2}+\cdots+\frac{A_N}{S-v_N} \\ &= H_1(S)+H_2(S)+\cdots+H_N(S) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)+\cdots+h_N(n)=\sum_{r=1}^{N} A_r v^{n-1} u(n-1)$$

b、如果特征方程有重根，假设v_r是l阶重根，则：

$$\text{若} H_r(S)=\frac{A_r}{(S-v_r)^l} \Rightarrow h_r(n)=\frac{A(n-1)!}{(l-1)!(n-l)!} v_r^{n-l} u(n-1)$$

$M=N$

先通过长除，变成一个常数和真分式之和，然后再求解

$$H(S)=A_0+\frac{A_1}{S-v_1}+\frac{A_2}{S-v_2}+\cdots+\frac{A_N}{S-v_N}$$

$$=A_0+H_1(S)+H_2(S)+\cdots+H_N(S)$$

$$\Downarrow$$

$$h(n)=A_0\delta(n)+\sum_{r=1}^{N}A_r v^{n-1}u(n-1)$$

$M>N$

$$\text{假设转移算子}H(S)=S$$

$$\Downarrow$$

$$h(n)=S\delta(n)=\delta(n+1)$$

$$\Downarrow$$

系统为**非因果**系统，不作考虑

例5 求以下差分方程所示系统的单位脉冲响应：

$$y(n+2)-y(n)=x(n+1)-x(n)$$

1、表示为移位算子形式：

$$\left(S^2-1\right)y(n)=(S-1)x(n)$$

2、系统的转移算子：

$$H(S)=\frac{S-1}{S^2-1}=\frac{1}{S+1}$$

3、根据系统的移位算子（只有1阶）得到系统的单位脉冲响应

$$h(n)=(-1)^{n-1}u(n-1)$$

例6

求以下差分方程所示系统的单位脉冲响应：

$$y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)=x(n) \qquad (\text{后向差分方程})$$

1、将后向差分方程转化为前向差分方程(两边乘以S)

$$y(n+1)-\frac{1}{3}y(n)=x(n+1)$$

2、表示为移位算子形式：$\left(S-\frac{1}{3}\right)y(n)=Sx(n)$

3、系统的转移算子：$H(S)=\dfrac{S}{S-\frac{1}{3}}=1+\dfrac{\frac{1}{3}}{S-\frac{1}{3}}$

4、根据系统的移位算子（只有1阶）得到系统的单位脉冲响应

$$h(n)=\delta(n)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$$

例7 已知一个因果系统的差分方程是二阶常系数差分方程，

当$x(n)=u(n)$时的响应为：

$$S(n)=\left(2^n+3\times5^n+10\right)u(n)$$

求： 1、系统单位脉冲响应 2、差分方程

$$\because\ \delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$\therefore\ h(n)=S(n)-S(n-1)$$

$$=14\delta(n)+(2^{n-1}+12\times5^{n-1})u(n-1)$$

根据单位脉冲响应$h(n)$，可以得到系统的转移算子：

$$H(S)=14+\frac{1}{S-2}+\frac{12}{S-5}=\frac{14S^2-85S+111}{S^2-7S+10}$$

$$y(n+2)-7y(n+1)+10y(n)=14x(n+2)-85x(n+1)+111x(n)$$

作业

- 2.2 （a） （c） （d）
- 2.7
  - 输入变更为 $x(n)=\delta(n)-a\delta(n-1)$
- 2.15