§ 2.3 卷积积分

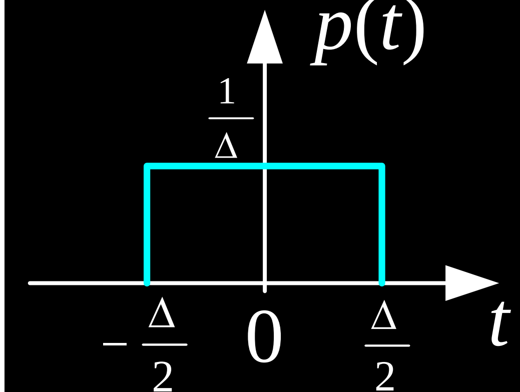
- 信号的时域分解与卷积积分
- 卷积的图解法

一、信号的时域分解与卷积积分

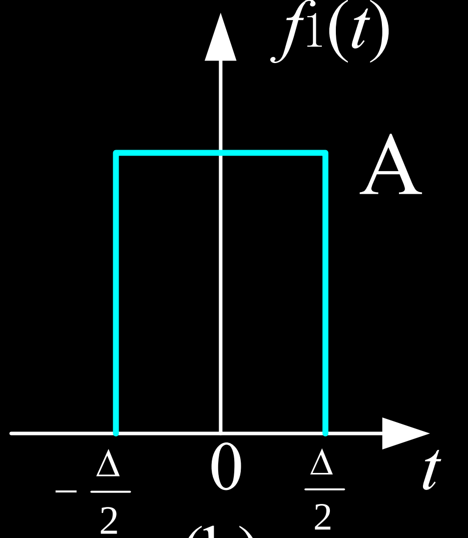
1．信号的时域分解

- 预备知识

问 $f_1(t) = ?\ p(t)$



(a)



(b)

直观看出

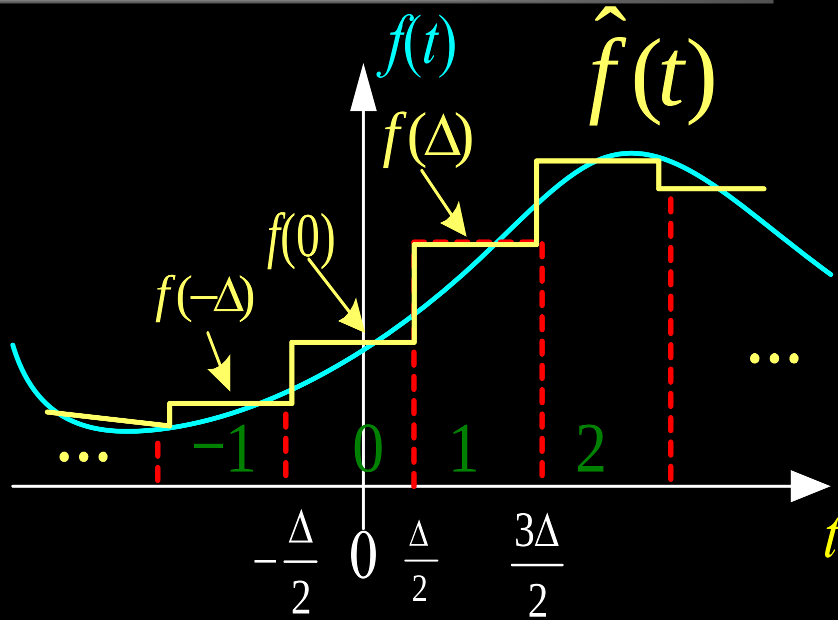
$$\boxed{f_1(t) = \mathrm{A}\Delta\ p(t)}$$

•任意信号分解

“0”号脉冲高度$f(0)$,宽度为△，用$p(t)$表示为：$f(0)\ \triangle\ p(t)$

“1”号脉冲高度$f(\triangle)$,宽度为△，用$p(t-\triangle)$表示为：

$f(\triangle)\ \triangle\ \ p(t-\triangle)$



“−1”号脉冲高度$f(-\triangle)$ 、宽度为△，用$p(t+\triangle)$表示为：

$f(-\triangle)\ \triangle\ \ p(t+\ \triangle)$

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\Delta p(t-n\Delta)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t)=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

2 .任意信号作用下的零状态响应

$f(t) \longrightarrow$ LTI系统 零状态 $\longrightarrow y_{zs}(t)$

根据$h(t)$的定义： $\delta(t) \Rightarrow h(t)$

由时不变性： $\delta(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\,\delta(t-\tau) \Rightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

由叠加性： $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = y_{zs}(t)$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 卷积积分

3 .卷积积分的定义

已知定义在区间（–∞，∞）上的两个函数f_1(t)和f_2(t)，则定义积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

为f_1(t)与f_2(t)的卷积积分，简称卷积；记为

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

注意：积分是在虚设的变量τ下进行的，τ为积分变量，*t*为参变量。结果仍为*t*的函数。

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)*h(t)$$

例

二、卷积的图解法

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元： t换为 τ →得 $f_1(\tau)$， $f_2(\tau)$

（2）反转平移：由$f_2(\tau)$反转→ $f_2(-\tau)$右移t → $f_2(t-\tau)$

（3）乘积： $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$

（4）积分： τ 从 $-\infty$到∞对乘积项积分。

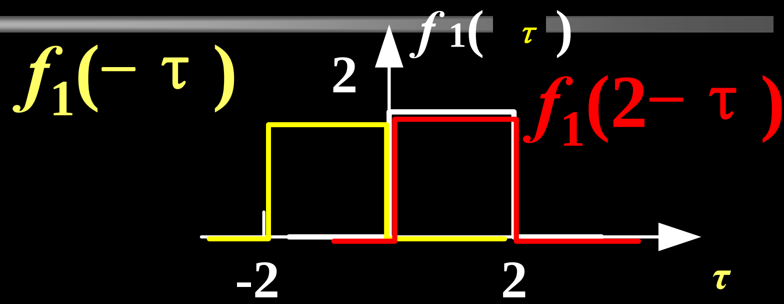
注意：t为参变量。

例

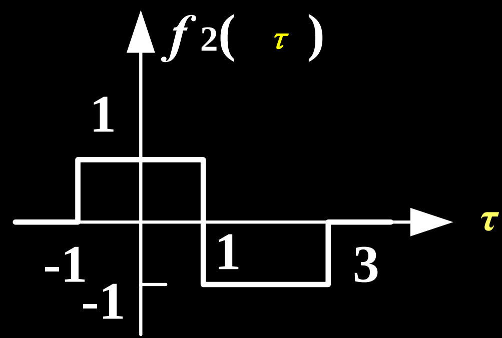
求某一时刻卷积值

图解法一般比较繁琐，确定积分的上下限是关键。

但若只求某一时刻卷积值时还是比较方便的。



例：$f_1(t)$、$f_2(t)$如图所示，已知 $f(t) = f_2(t) * f_1(t)$，求$f(2) = ?$



解：$f(2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(2-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

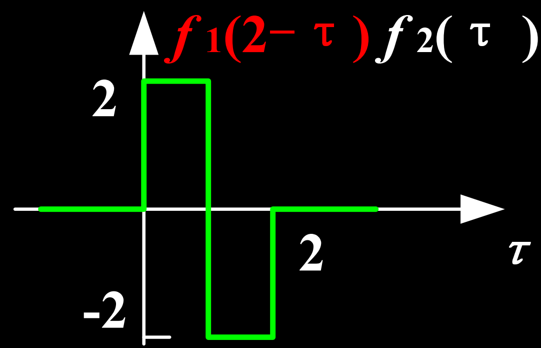
（1）换元

（2）$f_1(\tau)$得$f_1(-\tau)$

（3）$f_1(-\tau)$右移2得$f_1(2-\tau)$

（4）$f_1(2-\tau)$乘$f_2(\tau)$

（5）积分，得$f(2) = 0$（面积为0）



用定义计算卷积举例

例：$f(t) = \mathrm{e}^{t}$,（$-\infty<t<\infty$），$h(t) = (6\mathrm{e}^{-2t} - 1)\ \varepsilon(t)$，求$y_{zs}(t)$。

解： $y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\tau}[6\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} - 1]\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

当$t < \tau$，即 $\tau > t$时，$\varepsilon(t - \tau) = 0$

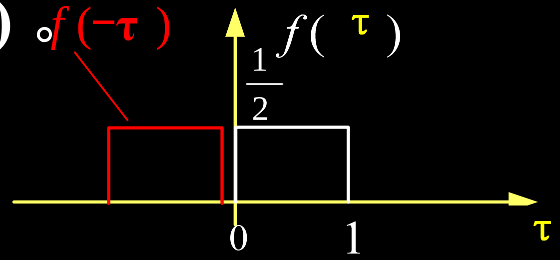
$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\tau}[6\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} - 1]\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} (6\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{3\tau} - \mathrm{e}^{\tau})\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{t}(6\mathrm{e}^{3\tau})\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= \mathrm{e}^{-2t}\cdot 2\mathrm{e}^{3\tau}\Big|_{-\infty}^{t} - \mathrm{e}^{\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = 2\mathrm{e}^{-2t}\cdot\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{t} = \mathrm{e}^{t}$$

图解法计算卷积举例

例 $f(t)$,$h(t)$ 如图所示，求$y_{zs}(t)= h(t) * f(t)$ 。

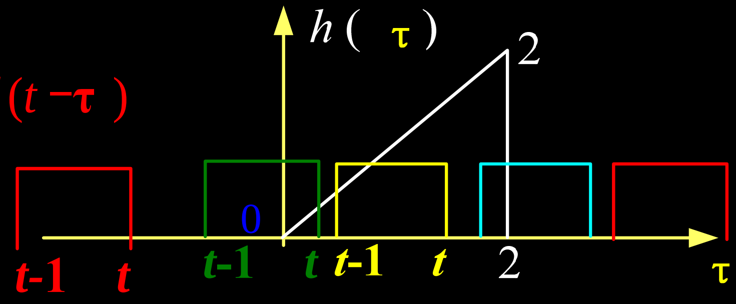


[解]　　采用图形卷积　。

$h(t)$函数形式复杂 → 换元为$h(\tau)$。

$f(t)$换元 → $f(\tau)$

$f(\tau)$反折 → $f(-\tau)$平移t → $f(t-\tau)$

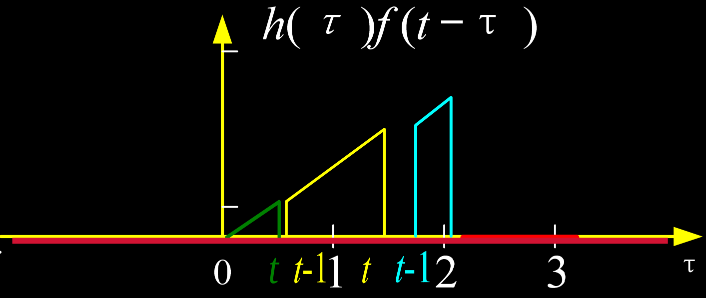


① $t<0$时，$f(t-\tau)$向左移

$f(t-\tau)h(\tau)=0$，故　$y_{zs}(t)=0$

② $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$f(t-\tau)$向右移

$$y_{zs}(t)=\int_0^t \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{4}t^2$$

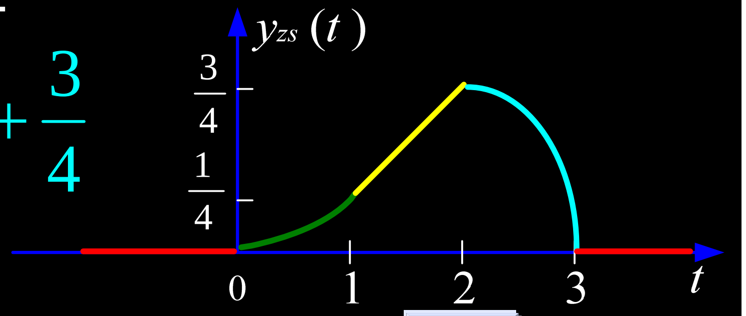


③ $1\leqslant t\leqslant 2$时

$$y_{zs}(t)=\int_{t-1}^t \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$$

④ $2\leqslant t\leqslant 3$ 时

$$y_{zs}(t)=\int_{t-1}^2 \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}$$



⑤ $3\leqslant t$ 时

$f(t-\tau)h(\tau)=0$，故　$y_{zs}(t)=0$