信号处理导论:

概念：消息（message）、信息（signal）、信号（information 信息的载体）
时域（连续/离散信号），频域
激励（输入信号）——系统——响应（输出信号）
通信系统：信息源->发送->信道（**噪声**）->接收->受信者

信号

描述：信息的物理体现，按物理属性分为：电,非电信号
分类：确定/随机，连续/离散，周期/非周期，能量/功率，一维/多维信号
确定：可用确定**时间函数**表示
随机：取值具有不确定性
伪随机：按照严格规律产生的随机信号
连续：连续时间范围内有定义的信号（t 为连续时间变量）
离散：仅在一些离散瞬间才有定义的信号（k 为离散时间序列 等间隔）
模拟信号（时幅连续）-抽样-抽样信号（时间离散）-量化-数字信号（时幅离散）
周期信号：f(t)=f(t+ m T))，m = 0,±1,±2,⋯（T 为信号周期，抽样信号的间隔与周期的比为有理数）
连续周期信号和：T1/T2 为有理数，取最小公倍数

$$E=\sum f(t)^2 \quad P=\lim\frac{1}{T}\sum f(t)^2$$

能量信号：f(t)的能量有界 P=0 功率信号：f(t)的功率有界 E->∞
一维/多维：描述信号的自变量数
指数信号：对时间的微，积分仍为指数形式
Sampling Signal：f(t)=sin(t)/t 抽样信号
先平移，后反转和展缩 逆运算反之
奇异信号：函数本身或其导数有不连续点的信号
阶跃函数:
可表示锯齿型信号（累加），可对信号进行截取（与被截相乘）

$$\begin{cases}\varepsilon(t)=0\ (t<0)\\ \varepsilon(t)=\frac{1}{2}\ (t=0)\ \text{（阶跃点）}\\ \varepsilon(t)=1\ (t>0)\end{cases}$$

延迟单位：将阶跃函数平移
阶跃函数-∞~0 的积分=t δ(t)
冲击函数（狄拉克）:
高度无穷大，宽度无穷小，对称窄脉冲

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1\\ \delta(t)=0\ (t\neq 0)\end{cases}$$

取样性：$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$
冲击偶：冲击函数的一阶导数 (奇函数)

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)=f'(0)\delta(t)$$

复合函数形式冲击函数:
δ[f(t)]且 f(t)=0 有 n 个**互不相等**的实根
f(t) ≠ 0 时 δ[f(t)]=0，f(t)=0 时 δ[f(t)]=1

单位冲击序列：δ(k) k=0 时为 1 k≠0 时为 0

单位阶跃序列：ε(k)=0（k<0） ε(k)=1（k>0）（离散点集）

系统：特定功能的总体

连续(**t**)，离散(**k**)，混合系统（系统激励一个是连续，一个是离散信号）

动态（记忆，**内部激励**{f()}，**初始状态**{x(0)}）

单/多 输入输出

线性：输出、输入序列均为一次关系项（**齐次性，可加性**/可分解，零状态，零输入性）

时不变：输入时间加减 td，输出仅相应平移 td f(t-td)->y(t-td)（出现变系数或反转展缩则为时变）

Linear Time-Invariant 线性时不变：f(t)->y(t)微分与积分相等

因果系统：输出晚于输入 t<t0，f(t)=0 有 yzs(t)=0（t=0 时输入信号为因果信号）

稳定系统：**有界输入输出** |f(t)|, |y(t)|<∞

系统描述：

数学模型：物理特性数学抽象

框图模型：功能的形象表示

连续系统描述：**微分**方程 **离散**系统描述：**差分**方程（y(k)-(1+β)y(k-1) = f(k)）

通过框图，消去中间变量，得到输入输出关系

系统分析方法：外部法（时域分析，变换域法（连续，离散）），内部法

零输入，零状态响应分开，多个基本信号作用于线性系统等效于各个基本信号引起响应之和

连续系统时域分析：

LT1：时域分析（涉及函数变量均为时间 t 微分方程：全解=齐次解+特解）

齐次解激励函数无关：**自有响应**,

特解激励函数相关：**强迫响应**

$\boldsymbol{y^{(j)}(0_+)}$：接入 f(t)后的系统，$\boldsymbol{y^{(j)}(0_-)}$：接入 f(t)前系统状态

系数匹配法分析

零输入响应：$y_{zi}^{(j)}(\boldsymbol{0_+}) = y_{zi}^{(j)}(\boldsymbol{0_-}) = \boldsymbol{y^{(j)}(0_-)}$

零状态响应：$y_{zs}^{(j)}(\boldsymbol{0_-}) = \boldsymbol{0}$

冲激响应：δ(t)引起的**零状态响应**（f(t)=δ(t)求解响应方程，引入微分算子/）

阶跃响应：$\varepsilon(t)$引起的零状态响应（因果$\boldsymbol{0_-\sim t}$）

卷积积分：

信号分解：任意信号可由无限个门函数拟合（门函数在门宽→0 时变为阶跃函数）

冲激函数与其它函数卷积为函数本身

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积积分：$\mathrm{y_{zs}}(t) = f(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) * \hbar(t)$（交换律）

卷积过程（**换元**$\mathrm{t}\to\tau$，**反转平移**$f_2(\tau)\to f_2(\mathrm{t}-\tau)$，**乘积**，**积分**）（$\tau$直接取代 t，选取简单函数进行反转平移，注意积分区间）

卷积性质：交换，结合，分配律

信号与冲激函数卷积=信号本身

信号与冲激函数的时延/冲激函数导数卷积=信号本身时延/求导

卷积：$f(t) * \delta(t-t0) = f(t-t0)$　乘积：$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$

阶跃函数乘积：$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$

卷积的微分=微分后卷积（等号左右微分算子可交换）

微分算子：$e^{-2t}\varepsilon(t) = \frac{1}{\rho+2}\delta(t)$

$(\rho+2)e^{-2t}\varepsilon(t) = e^{-2t}\delta(t)$

$e^{-2t}\varepsilon(t) = \frac{1}{\rho+2}e^{-2t}\delta(t) = \frac{1}{\rho+2}\delta(t)$（$e^{-2t}\delta(t) = e^{0}\delta(t)$）

系统并联：总系统冲激响应=各系统之和

系统级联：总系统冲激响应=各系统响应的卷积

时移特性：信号卷积**时移可换**

$f1(t-t1) * f2(t-t2) = f1(t-t1-t2) * f2(t) = f1(t) * f2(t-t1-t2)$

(1) 定义式 (2) 图解法 (3) 积分性质

相关函数：$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f1(x) * f2(x-t)dx$（f1,f2 为实偶函数与卷积相同）

离散系统时域分析：

差分：前向（$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$），**后向**（$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$）

二阶差分：$\nabla^2 f(k) = \nabla[\nabla f(k)] = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$（进行 n 次差分）

零输入响应：齐次解（$c(\lambda)^k$）（将$f(k) = 0$代入求特征根与 C）

零状态响应：齐次解+特解 / 卷积法（$k < 0, y_{zs}(k) = 0$，求出齐次解与特解）

单位序列响应：$h(k) = T[\delta(k), \{0\}]$（$h(-i) = 0$）　阶跃响应：$g(k) = T[\varepsilon(k), \{0\}]$

卷积和：将激励信号分为一系列冲激响应，相加得到系统零状态响应

$y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$ 卷积：$f(k) = f1(k) * f2(k)$（符合交换律）

图解法：换元，反转平移，乘积，求和

不进位乘法：序列卷积使用大乘法，前后为 0（非零个数$(n_1+n_3) \le k \le (n_2+n_4)$）

交换律，分配率，结合律

傅里叶变换与频域分析：

将任意输入信号分解为不同频率正弦信号与虚指数信号和

矢量正交：$V_x V_y^T = \sum_{i=1}^{3} v_{xi}v_{yi} = 0$ *则*$V_x = (v_{x1}, v_{x2}, v_{x3})$*与*$V_y = (v_{y1}, v_{y2}, v_{y3})$正交

(t_1, t_2)内两个信号正交：$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2^*(t)dx = 0$

正交函数集：，$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dx = \begin{cases} 0\ (i \ne j) \\ K_i \ne 0\ (i = j) \end{cases}$（区间$(t_1, t_2)$）

完备正交函数集：不存在集合之外正交函数（$\{1,\sin(\Omega t),\sin(2\Omega t)\ldots\}$，$\{e^{j\Omega t},e^{2j\Omega t}\ldots\}$）

信号分解：用 n 个正交函数线性组合近似表示$f(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\,\varphi_j(t)$

均方误差：$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2dt$（f(t)与近似函数$C_j\varphi_j(t)$间误差）

$\boldsymbol{C_i=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,\varphi_i(t)dt}$**（方向）** $\mathbf{K_i=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,dt}$

帕斯瓦尔能量：$\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)\,dt=\sum_{j=1}^{\infty}C_j^2K_j$（总能量=方向*分能量之和）

傅里叶级数：$\mathrm{f(t)}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$（$a_n(0,1..)$，$b_n(1,2..)$）

傅里叶系数：$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,dt$，$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,dt$

其它形式：$\mathrm{f(n)}=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$（$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$）

周期信号可分解为：$\frac{A_0}{2}$ *直流分量*，$A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$ n*次谐波*（A_1为基波）

指数形式：$\mathrm{f(t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,e^{jn\Omega t}$ 复傅里叶系数：$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{jn\Omega t}dt$

偶函数：$\mathbf{a_n},\boldsymbol{A_n},|\boldsymbol{F_n}|$ **奇函数：$\mathbf{b_n},\boldsymbol{\varphi_n}$**

周期信号平均功率：$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\,dt=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$

频谱：幅值，相位随频率变化关系

周期信号频谱：谐波（离散）性，收敛性。

频带宽度：$B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$（第一个零点）

零点之间谐波数：$\frac{\omega_1}{\Omega}=\frac{T}{\tau}$（T 无限大，周期信号离散谱过度到非周期信号连续谱）

傅里叶正反变换：$F(j\omega)\Leftrightarrow f(t)$（频谱密度⇔原函数）

频谱密度：$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{jn\Omega t}dt$，$\mathrm{f(t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}$

使用单边/双边指数函数逼近，对不满足绝对可积的函数进行变换

Tips：$\delta(t)\Leftrightarrow 1$，$1\Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$，$\mathrm{sgn(t)}\Leftrightarrow\frac{2}{j\omega}$（符号函数）

$$\cos\omega_0t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0t}+e^{-j\omega_0t}\right)\Leftrightarrow\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\sin\omega_0t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0t}-e^{-j\omega_0t}\right)\Leftrightarrow j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

双边指数函数 $e^{-a|t|}\Leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}$，门函数 $g_2(t)\Leftrightarrow 2Sa(j\omega)=\frac{2\sin(j\omega)}{\omega}$

傅里叶变换性质：

非周期信号频谱函数：$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}F_nT=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$（分解为虚指数函数和）

线性：$af_1(t)\Leftrightarrow aF_1(j\omega)$

偶实奇虚：$\begin{cases} R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt\ (实部) \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt\ (虚部) \end{cases}$

对称性：$\mathrm{f(t)} \Leftrightarrow F(j\omega) \to \mathrm{F(jt)} \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$（t->ω，ω->-ω）

尺度变换：$\mathrm{f(at)} \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{j\omega}{a})$（$\mathrm{f(-t)} \Leftrightarrow F(-j\omega)$）

时移特性：$\mathrm{f(t-t_0)} \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$，$\mathrm{f(t+t_0)} \Leftrightarrow e^{j\omega t_0}F(j\omega)$

频移特性：$e^{j\omega_0 t}f(t) \Leftrightarrow \mathrm{F(j(\omega-\omega_0))}$，$e^{-j\omega_0 t}f(t) \Leftrightarrow \mathrm{F(j(\omega+\omega_0))}$

调制：将信号频谱搬移至高频段，方便信号发送（接收搜索范围广）

卷积定理：$\mathrm{f_1(t)} * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(j\omega)\mathrm{F_2}(j\omega)$，$\mathrm{f_1(t)}f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * \mathrm{F_2}(j\omega)$

微积分：

时域：$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow (j\omega)^{\mathrm{n}}F(j\omega)$，$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \Leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$

频域：$(-\mathrm{j}t)^{\mathrm{n}}f(t) \Leftrightarrow F^{n}(j\omega)$，$\pi f(0)\delta(t) + -\frac{1}{jt}f(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx$

相关定理：$\begin{cases} \mathrm{R_{12}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt \\ \mathrm{R_{21}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(t)dt \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{F[R_{12}}(\tau)] = F_1(j\omega)F_2^*(j\omega) \\ \mathrm{F[R_{21}}(\tau)] = F_1^*(j\omega)F_2(j\omega) \end{cases}$

$$\mathrm{F}[R(\tau)] = |F(j\omega)|^2$$

能量功率谱：

能量谱：单位信号频率能量$\mathrm{E(\omega)}$，$\mathrm{E(\omega) = |F(j\omega)|^2}$

功率谱：单位频率信号功率$\mathrm{P(\omega)}$，$\mathrm{P(\omega)} = \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathrm{F_T}(j(\omega))|^2}{T}$

$\mathrm{R}(\tau) \Leftrightarrow E(\omega)$ ，$\mathrm{R}(\tau) \Leftrightarrow P(\omega)$（相关函数与能量/功率谱均为傅里叶变换）

$\mathrm{E_y(\omega)} = |H(j\omega)|^2 E_f(\omega)$，$\mathrm{P_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 P_f(\omega)}$（能量功率的激励与响应关系）

$$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{Y(\mathrm{j\omega})}{H(\mathrm{j\omega})}$$

周期信号傅里叶变换：

周期信号可由复指数信号组成，复指数信号的频谱为冲激函数

$e^{\boldsymbol{j\omega_0 t}} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，$e^{\boldsymbol{-j\omega_0 t}} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

傅里叶系数为傅里叶变换的 1/T，$F_n = \frac{1}{T}F_0(j\omega)|_{\omega=n\Omega}$

LT1 系统：$\mathrm{Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)}$（也可由时域卷积定理得出）

求系统输出时，转到时域算乘积再反变换得到输出

无失真传输：输入与输出信号仅**幅度**和**出现顺序**变化，波形不变

频响函数：$\mathrm{Y(j\omega)} = Ke^{-\mathrm{j\omega t_d}}F(j\omega)$

理想条件：$\mathrm{H(j\omega)} = \frac{\mathrm{Y(j\omega)}}{\mathrm{F(j\omega)}} = \mathrm{Ke^{-j\omega t_d}}$

滤波器：选择函数，仅保留相应频段信息

理想低通：冲激（不可实现的非因果 $\mathrm{h(t) = Sa(\omega_c}(t-t_d)))$，阶跃（$\mathrm{g(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}Si(\omega_{\mathrm{c}}(t-t_d))$ t_d为系统延时）

物理可实现条件：时域（响应在激励以后 $h(t)=0\ (t<0)$），频域（平方绝对可积）

取样定理：

CFS 连续周期 → CTFT 连续非周期

DFS 离散周期 → DTFT 离散非周期

取样：利用**取样脉冲序列** s(t)，从连续信号抽取离散样本值

冲激信号取样：$\omega_s \geq 2\omega_m$，频谱不发生混叠，便于信号恢复（奈奎斯特 $f_{取样} \geq 2f$）

信号恢复：低通滤波（原信号<截止频率<取样频率）

序列分析：

离散傅里叶级数展开：$\mathrm{dfs}[F_n(K)] = F_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k) W^{nk}$

$\mathrm{DTFT}[f(k)] = F(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_N(k) e^{-jk\theta}$

DFT：时域频域均为离散有限长序列（0~N-1）

$\mathrm{DFT}[f(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k) e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$

性质：线性，对称性（$F(k) \Leftrightarrow Nf((-n))$），时移（$\mathrm{DFT}\left[f\left((k-m)\right)_N G_n(k)\right] = W^{mn}F(n)$ 周期延拓后反转），时域循环（$f_1(k) * f_2(k)卷积 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} f_1(m) * f_2\left((k-m)\right)_N$），频域循环（$f_1(k)f_2(k) \Leftrightarrow \frac{1}{N} F_1(n) * F_2(n)卷积$），巴塞瓦尔（在频率带限内，功率谱与能量正比）

连续系统 s 域分析：

连续时间系统傅里叶变换拓展到复频域 s=a+ jω（增加实常数$e^{j\omega} \rightarrow e^{s}$）

$H(.) = \frac{B(.)}{A(.)}$（上 0 零点，下 0 极点）