§4.11　离散傅里叶变换及其性质

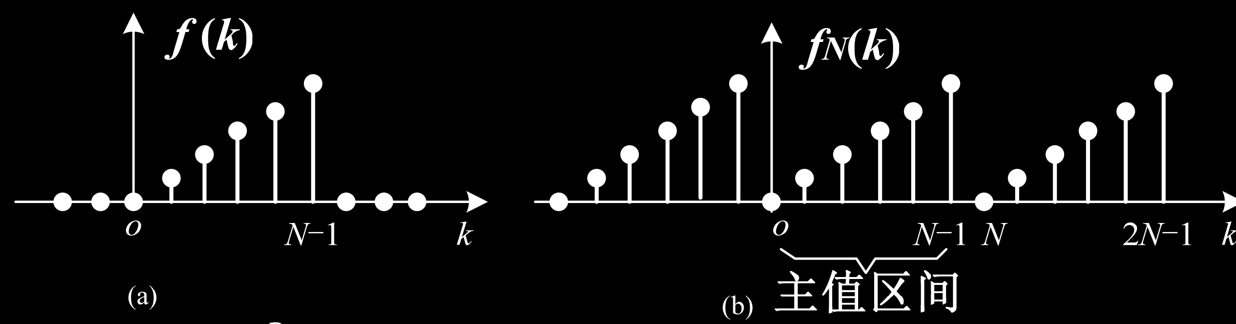
离散信号分析和处理的主要手段是利用计算机去实现，然而序列$f(k)$的离散时间傅里叶变换$F(e^{j\theta})$是θ的连续函数。为便于计算机去实现，引入离散傅里叶变换(**Discrete Fourier Transform,DFT**)

- 离散傅里叶变换DFT
- DFT与DTFT、DFS的关系
- DFT的性质

一．离散傅里叶变换(DFT)

借助周期序列DFS的概念导出有限长序列的DFT。
将有限长序列$f(k)$延拓成周期为N的周期序列$f_N(k)$

$$f_N(k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(k+lN)$$



$$F(n)=\mathrm{DFT}[f(k)]=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)W^{kn}\quad(0\le n\le N-1)$$

$$f(k)=\mathrm{IDFT}[F(n)]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(n)W^{-kn}\quad(0\le k\le N-1)$$

若将$f(k)$，$F(n)$分别理解为$f_N(k)$，$F_N(n)$的主值序列，那么，DFT变换对与DFS变换对的表达式完全相同。

例

二、DFT与DTFT、DFS的关系

（1）离散傅里叶变换DFT是为了便于用计算机近似计算离散时间傅里叶变换DTFT而引入的。因此，DFT与DTFT存在一定关系，其关系为$F(n)$是对$F(e^{j\theta})$在2π周期内进行N次均匀取样的样值，即

$$F(n)=F(e^{j\theta})\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{N}n}$$

例

（2）若周期序列$f_N(k)$看作有限长序列$f(k)$以N为周期拓展而成，则$f_N(k)$离散傅里叶级数DFS的$F_N(n)$与$f(k)$离散傅里叶变换DFT 的$F(n)$在$0\sim N-1$范围相等。

三、离散傅里叶变换的性质

1. 线性

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(n)$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(n)$

则 $a_1 f_1(k)+a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(n)+a_2 F_2(n)$

2. 对称性

若 $f(k) \longleftrightarrow F(n)$

则 $F(k) \longleftrightarrow N\, f((-n))$

$f((-n))$应是$f(n)$周期拓展之后反转——称**圆周反转**。

3. 时移特性

• **圆周位移（循环位移）：**

将有限长序列$f(k)$周期拓展成周期序列$f_N(k)$，再右移m位，得到时移序列$f_N(k-m)$，最后取其主值而得到的序列称为$f(k)$的**圆周位移**序列，记为

$$f((k-m))_N G_N(k)$$

• **时移特性**

若 $f(k) \longleftrightarrow F(n)$

则 $f((k-m))_N G_N(k) \longleftrightarrow W^{mn} F(n)$

证明

4. 频移特性（调制）

若 $f(k) \longleftrightarrow F(n)$

则 $W^{-lk} f(k) \longleftrightarrow F((n-l))_N G_N(n)$

5. 时域循环卷积（圆卷积）定理

- **线卷积：**

有限长序列$f_1(k)$和$f_2(k)$的长度分别为N和M，则两序列的卷积和$f(k)$(称为**线卷积**)仍为有限长序列序列，长度为**N+M –1**。

- **循环卷积：**

有限长序列$f_1(k)$和$f_2(k)$的长度相等，均为N，则$f_1(k)$与$f_2(k)$的循环卷积定义为

$$f_1(k)\Theta f_2(k)=\sum_{m=0}^{N-1}f_1(m)f_2((k-m))_N=\sum_{m=0}^{N-1}f_2(m)f_1((k-m))_N$$

循环卷积结果的长度仍为N。若两序列长度不等，采用补零法。

例

•借助循环卷积计算线卷积

循环卷积便于利用数字计算机进行计算。
为借助循环卷积求线卷积，要使循环卷积的结果与线卷积结果相同，可以采用补零的方法，使

$f_1(k)$与$f_2(k)$的长度均为$L \geqslant N+M-1$

则循环卷积与线卷积的结果相同。

时域循环卷积定理

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(n)$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(n)$

则 $f_1(k) \circledast f_2(k) \longleftrightarrow F_1(n)F_2(n)$

6. 频域循环卷积定理

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(n)$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(n)$

则 $f_1(k)\, f_2(k) \longleftrightarrow \frac{1}{N} F_1(n) \circledast F_2(n)$

7. 巴塞瓦尔定理

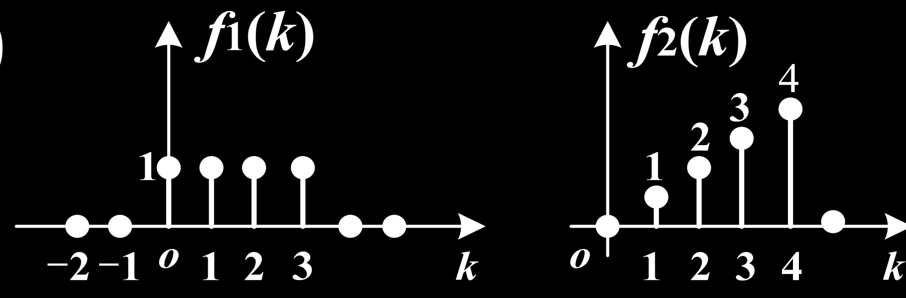
若 $f(k) \longleftrightarrow F(n)$

则 $$\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F(n)|^2$$

表明，在一个频域带限之内，功率谱之和与信号的能量成比例。

循环卷积例

例 求图 (a)和(b)所示$f_1(k)$与$f_2(k)$的循环卷积$f(k)$。

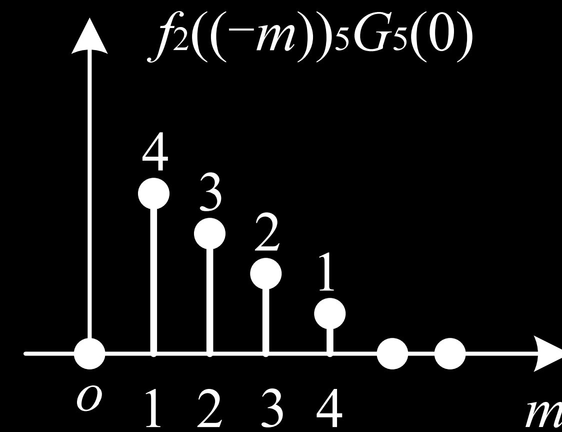


(a) (b)

解 将$f_1(k)$补一个零点，使$f_1(k)$与$f_2(k)$的长度均为5。

$$f(k)=\sum_{m=0}^{4} f_1(m)\, f_2((k-m))_5 G_5(k)$$

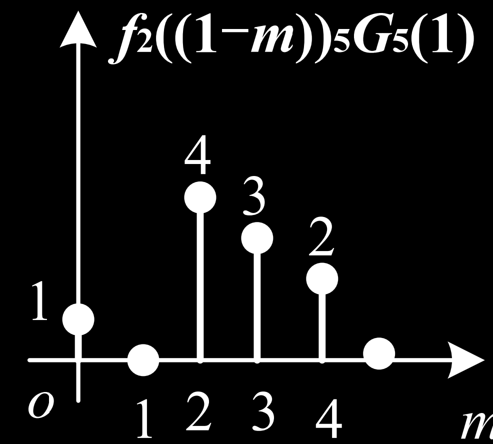
$$f(0)=\sum_{m=0}^{4} f_1(m)\, f_2((-m))_5 G_5(0)$$



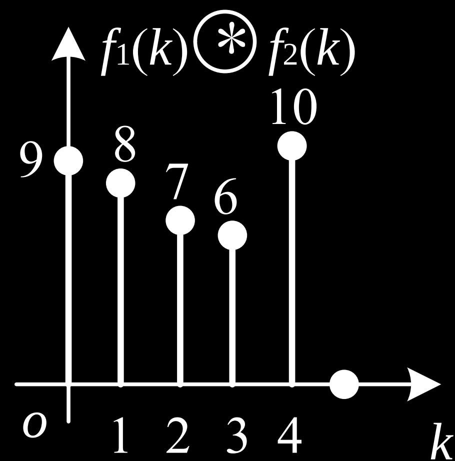
$$f(0)= f_1(0)\, f_2((0)) + f_1(1)\, f_2((-1)) + f_1(2)\, f_2((-2)) + f_1(3)\, f_2((-3)) + f_1(4)\, f_2((-4)) =0+4+3+2+0=9$$

$$f(1)=\sum_{m=0}^{4} f_1(m)\, f_2((1-m))_5 G_5(1)$$

$$f(1)= f_1(0)\, f_2((1)) + f_1(1)\, f_2((0)) + f_1(2)\, f_2((-1)) + f_1(3)\, f_2((-2)) + f_1(4)\, f_2((-3)) =1+0+4+3+0=8$$



……



DFT举例

例： 求下列矩形脉冲序列的离散傅里叶变换。

$$f(k)=R_N(k)=\begin{cases}1, & k=0,1,\ldots N-1\\ 0, & k\text{其他}\end{cases}$$

解 $\boldsymbol{F(n)=\mathrm{DFT}[f(k)]=}\sum_{k=0}^{N-1}R_N(k)W^{kn}=\sum_{k=0}^{N-1}W^{kn}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n}{N}}\right)^k$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-(\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n}{N}})^N}{1-(\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n}{N}})}, & (\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n}{N}}\neq 1)\\ N, & (\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n}{N}}=1)\end{cases}$$

仅当$\boldsymbol{n=0}$时，

$\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi n}{N}}=1$ $\quad\boldsymbol{F(0)=N}$

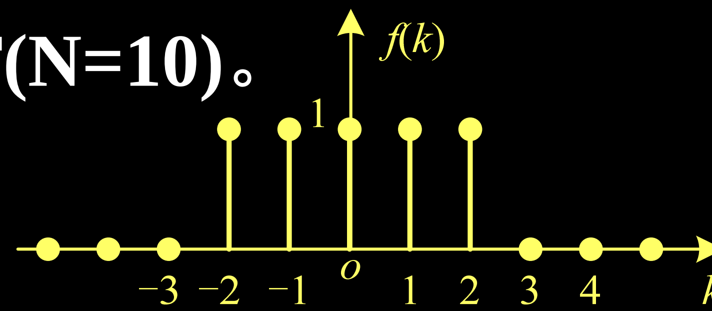
当$\boldsymbol{n=1}$，**2**，**…**，$\boldsymbol{N-1}$时，

$(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n}{N}})^N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}=1$ $\quad\boldsymbol{F(n)=0}$

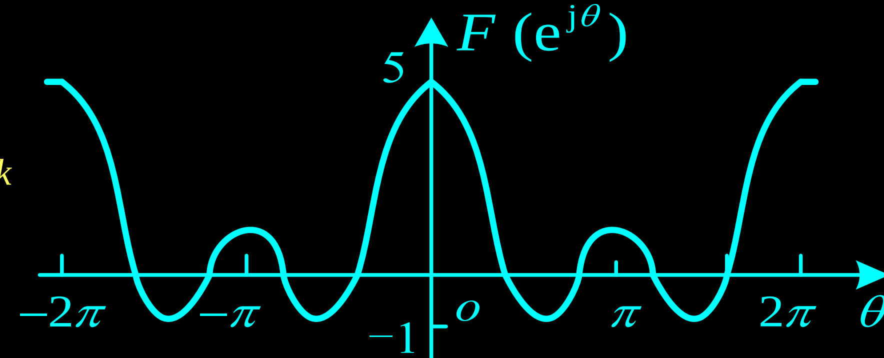
$$\boxed{\boldsymbol{F(n)=N\,\delta(n)}}$$

DTFT与DFT举例

例： 求矩形脉冲序列的DTFT和DFT(N=10)。



$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\sum_{k=-2}^{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k}=\frac{\sin\left(\dfrac{5\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$



$$F(n)=\sum_{k=<N>}f(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{5}kn}=\sum_{k=-2}^{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{5}n}\right)^{k}$$

$$=\frac{\sin(\dfrac{\pi}{2}n)}{\sin(\dfrac{\pi}{10}n)}$$