§4.6　能量谱和功率谱

- 帕斯瓦尔关系**Parseval's Relation**
- 能量谱
- 功率谱
- 能量谱和功率谱分析

一. 帕塞瓦尔关系Parseval's Relation

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|^{2}\mathrm{d}\omega$$

Proof

Example

二. 能量谱密度（能量谱）

- **定义** 能量谱指单位频率的信号能量，记为E（ω）

在频带df内信号的能量为E(ω) df，因而信号在整个频率范围的总能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}(\omega)\,\mathrm{d}f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

由帕塞瓦尔关系可得

$$\mathrm{E}(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|^2$$

$$R(\tau)\longleftrightarrow \mathrm{E}(\omega)$$

能量谱函数与自相关函数是一对傅里叶变换对。

三、 功率谱 $f(t)$ 是功率有限信号

令 $f_T(t)=\begin{cases} f(t) & \left(|t|\le \dfrac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(|t|> \dfrac{T}{2}\right)\end{cases}$

$$f_T(t)\leftrightarrow F_T(\mathrm{j}\omega)$$

则 $f(t)$ 的平均功率为：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{2}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\mathrm{j}\omega)|^2}{T}\mathrm{d}\omega$$

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)f_T(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}f_T(t)*f_T(-t)$$

定义

功率谱指单位频率的信号功率，记为P（ω）

在频带df内信号的功率为P(ω) df，因而信号在整个频率范围的总功率

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

因此

$$\mathrm{P}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|F_{\mathrm{T}}(\mathrm{j}\omega)|^{2}}{T}$$

$$R(\tau)\longleftrightarrow\mathrm{P}(\omega)$$

维纳-欣钦关系式

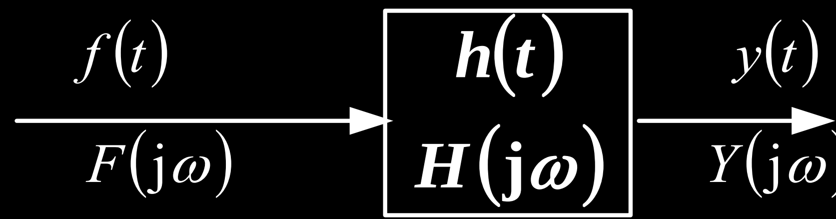
功率有限信号的功率谱与自相关函数是一对傅里叶变换。

例1 例2

四、能量谱和功率谱分析

时域 $y(t)=h(t)*f(t)$

频域 $Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)\cdot F(\mathrm{j}\omega)$



假定$f(t)$是能量有限信号，$f(t)$的能量谱密度为$\varepsilon_f(\omega)$,

$y(t)$的能量谱密度为$\varepsilon_y(\omega)$

$\varepsilon_{\mathrm{f}}(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|^2$ $\varepsilon_{\mathrm{y}}(\omega)=|Y(\mathrm{j}\omega)|^2$ 显然 $|Y(\mathrm{j}\omega)|^2=|H(\mathrm{j}\omega)|^2|F(\mathrm{j}\omega)|^2$

因此 $\boxed{\varepsilon_{\mathrm{y}}(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2\varepsilon_{\mathrm{f}}(\omega)}$

物理意义：响应的能谱等于激励的能谱与$|H(\mathrm{j}\,\omega)|^2$的乘积。

同样，对功率信号有 $\boxed{P_y(\omega)=|H(\mathrm{j}\,\omega)|^2 P_f(\omega)}$

例