§4.3　周期信号的频谱

- 信号频谱的概念
- 周期信号频谱的特点
- 频带宽度

一、信号频谱的概念

从广义上说，信号的某种特征量随信号频率变化的关系，称为信号的频谱，所画出的图形称为信号的频谱图。

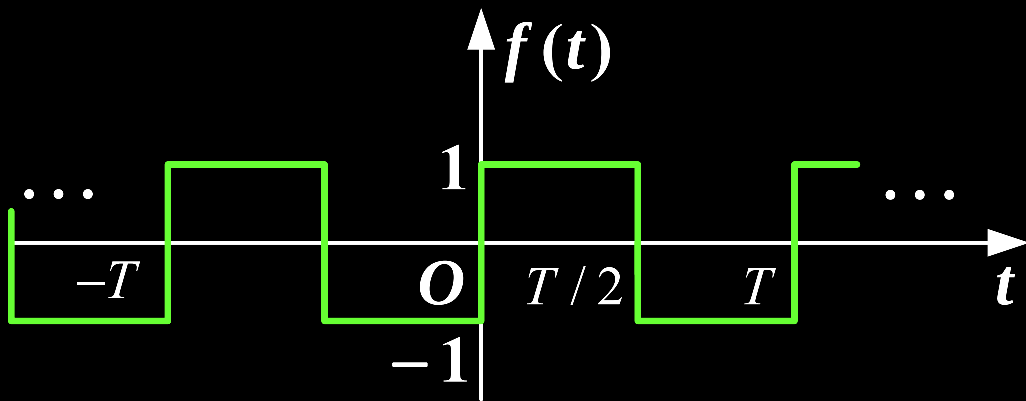
周期信号的频谱是指周期信号中各次谐波幅值、相位随频率的变化关系，即

将$A_n \sim \omega$和$\varphi_n \sim \omega$的关系分别画在以ω为横轴的平面上得到的两个图，分别称为振幅频谱图和相位频谱图。因为$n \geq 0$，所以称这种频谱为单边谱。

也可画$|F_n| \sim \omega$和$\varphi_n \sim \omega$的关系，称为双边谱。若F_n为实数，也可直接画F_n。

图示

频谱概念演示



频谱概念演示

既是奇函数又是奇谐函数
只含奇次谐波，且为正弦波.
P121 例4.2-1

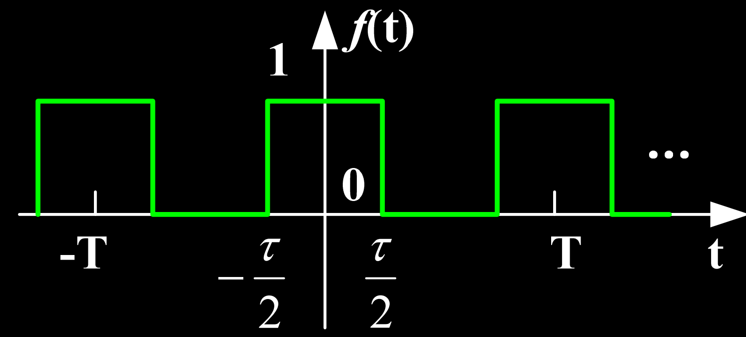
例1

对于双边频谱，负频率，只有数学意义，而无物理意义。为什么引入负频率？

$f(t)$是实函数，分解成虚指数，必须有共轭对$e^{jn\Omega t}$和$e^{-jn\Omega t}$，才能保证$f(t)$的实函数的性质不变。

二、周期信号频谱的特点

举例：有一幅度为1，脉冲宽度为τ的周期矩形脉冲，其周期为T，如图所示。求频谱。



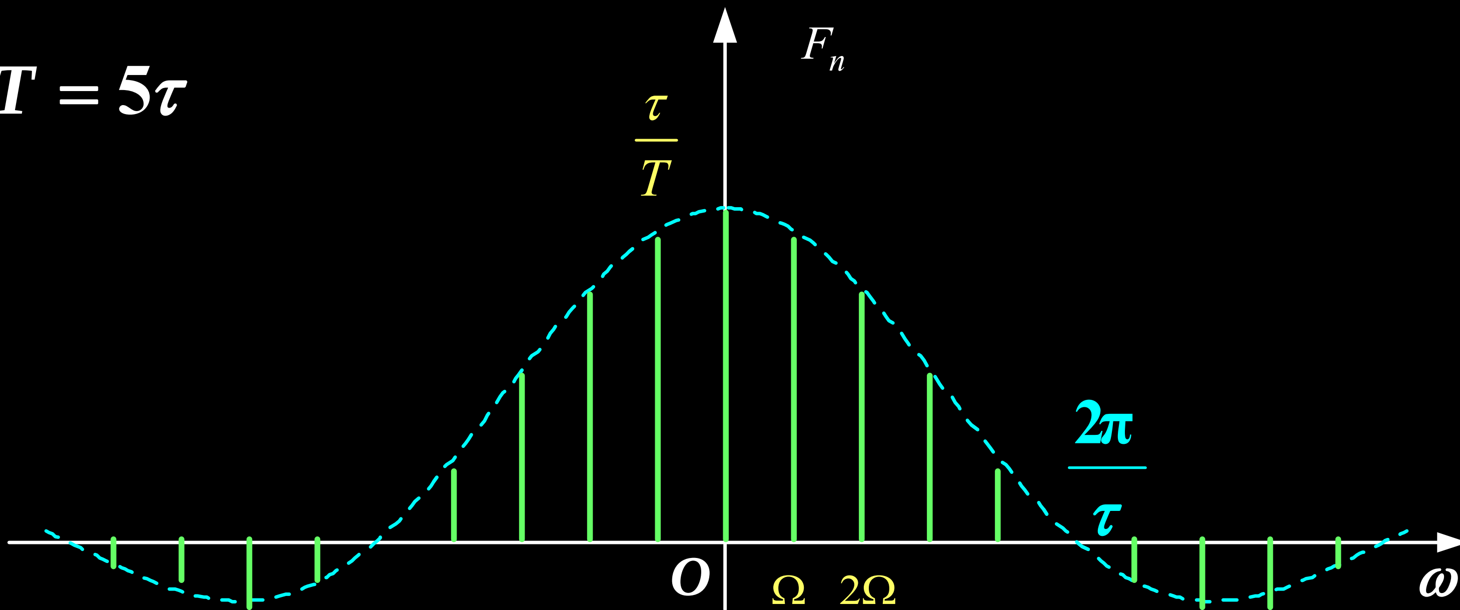
$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\left.\frac{\mathrm{e}^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{n\Omega} = \frac{\tau}{T}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

令Sa(x)=sin(x)/x (取样函数）

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \quad , n = 0, \pm 1, \quad \pm 2, \quad \ldots$$

图中$T = 5\tau$



(1) 包络线形状：抽样函数　(2)其最大值在 $n = 0$处，为$\frac{\tau}{T}$。

(3) 离散谱（谐波性）　(4)第一个零点坐标：$\frac{2\pi}{\tau}$

当$\omega = n\Omega$时取值　令$\frac{n\Omega\tau}{2} = \pi \rightarrow \omega = n\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$

(5) F_n是复函数（此处为实函数），幅度/相位

$F_n > 0$，相位为 0，$F_n < 0$，相位为$\pm\pi$。

周期信号频谱的特点

(1)周期信号的频谱具有谐波(离散)性。谱线位置是基频Ω的整数倍；(2)一般具有收敛性。总趋势减小。

谱线的结构与波形参数的关系

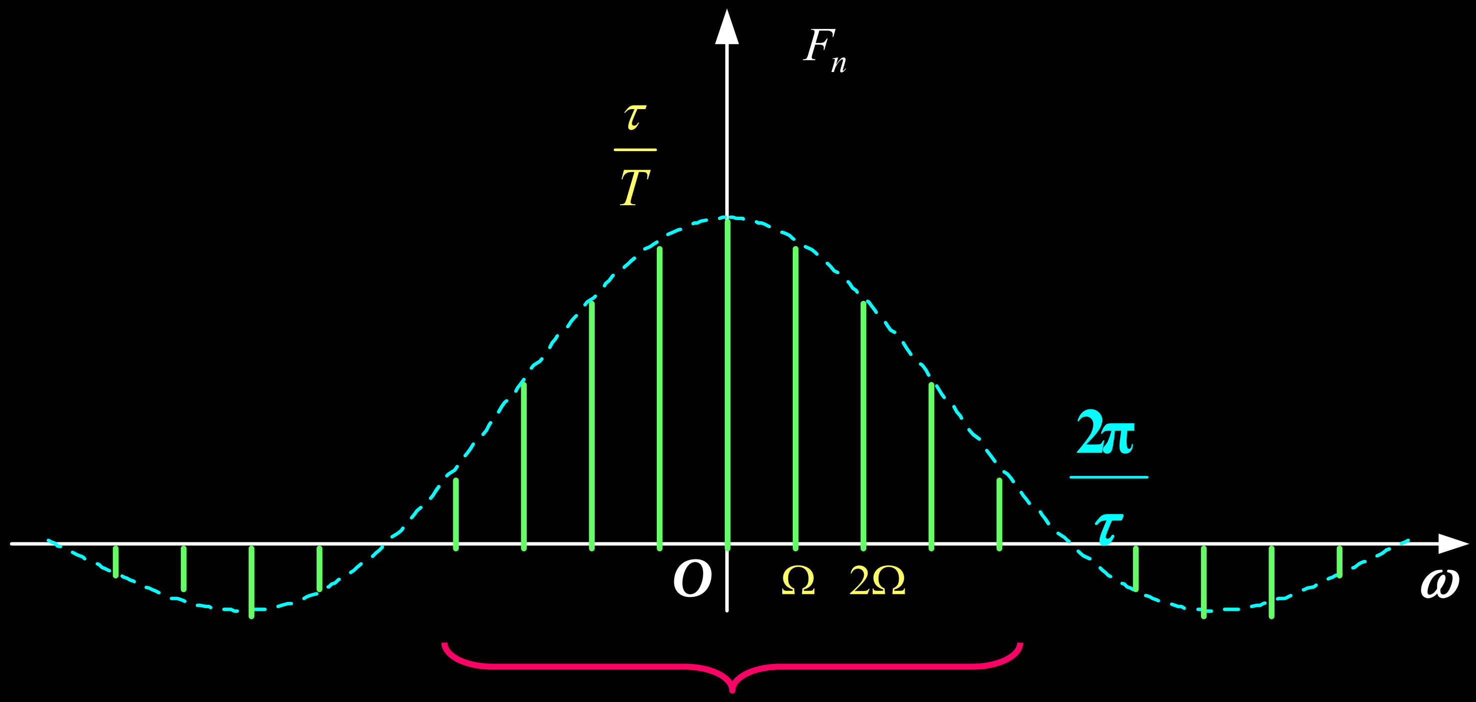
➢T一定，τ变小，此时Ω（谱线间隔）不变。两零点之间的谱线数目：$\omega_1/\Omega=(2\pi/\tau)/(2\pi/T)=T/\tau$ 增多。

➢ τ一定，T增大，间隔Ω减小，频谱变密。幅度减小。

如果周期T无限增长（这时就成为非周期信号），那么，谱线间隔将趋近于零，周期信号的**离散频谱**就过渡到非周期信号的**连续频谱**。各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

三. 频带宽度

1. 问题提出



第一个零点集中了信号绝大部分能量（平均功率）

由频谱的收敛性可知，信号的功率集中在低频段。

周期矩形脉冲信号的功率

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

以$\tau = \frac{1}{10}s, T = 1s$例，取前5次波，P133，例4.3-1

$$P_{5n} = F_0^2 + |F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 + |F_{-1}|^2 + |F_{-2}|^2 + |F_{-3}|^2 + |F_{-4}|^2$$

$$= 0.181$$

而总功率 $P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t = 0.2$

二者比值 $\frac{P_{5n}}{P} = 90.5\%$

2. 频带宽度

在满足一定失真条件下，信号可以用某段频率范围的信号来表示，此频率范围称为**频带宽度**。

★一般把第一个零点作为信号的频带宽度。记为：

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \text{或} B_f = \frac{1}{\tau}$$，带宽与脉宽成反比。

★ 对于一般周期信号，将幅度下降为$0.1|F_n|_{max}$的频率区间定义为频带宽度。

3. 系统的通频带>信号的带宽，才能不失真

语音信号	频率大约为	300~3400Hz，
音乐信号		50~15,000Hz，
扩音器与扬声器	有效带宽约为	15~20,000Hz。

频谱图示（单边）

幅度频谱

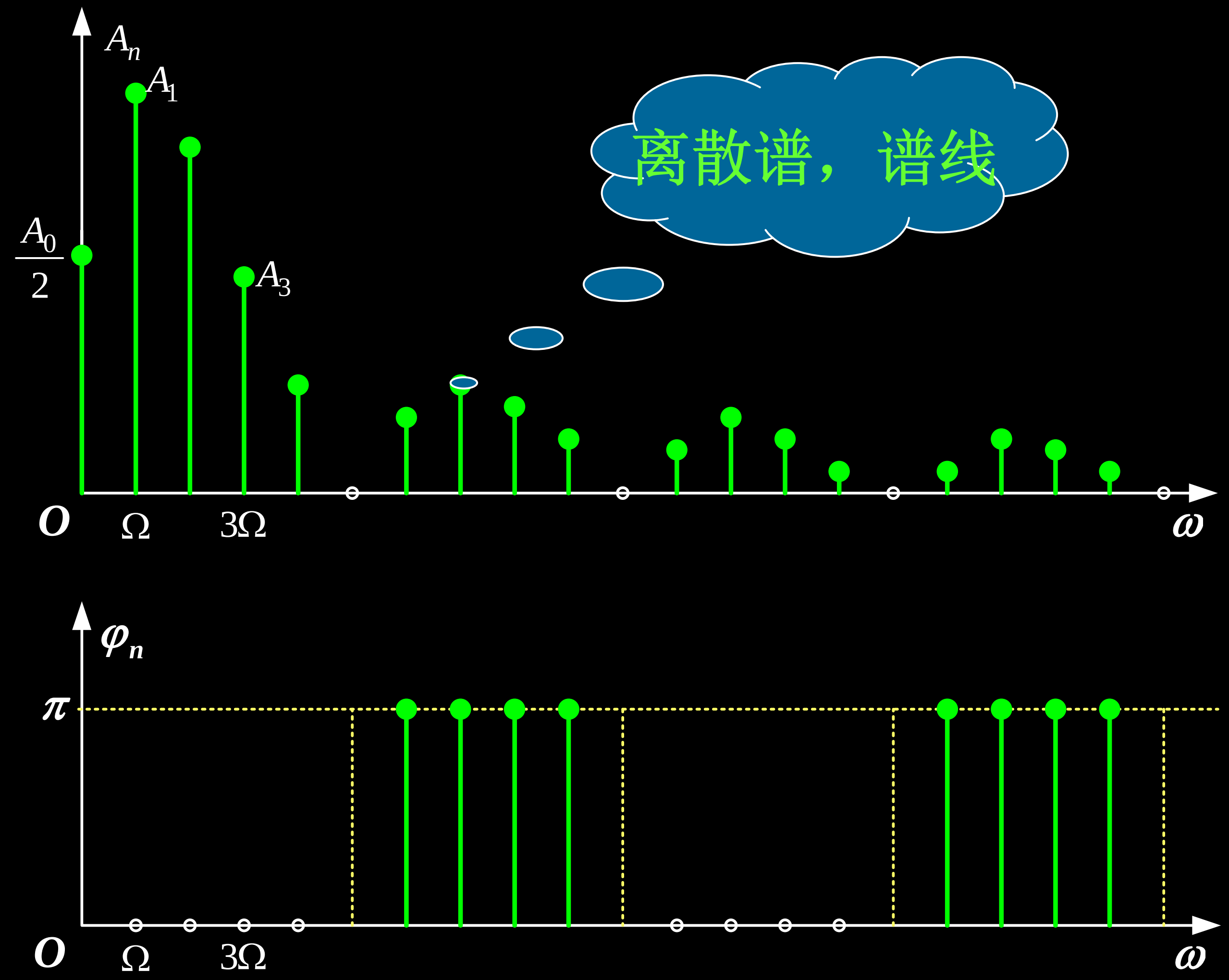
$A_n \sim \omega$

或

$|F_n| \sim \omega$曲线

相位频谱

$\varphi_n \sim \omega$曲线



单边频谱图例1

例：周期信号 $f(t) = 1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$

试求该周期信号的基波周期T，基波角频率 Ω，画出它的单边频谱图，并求$f(t)$ 的平均功率P。

解 首先应用三角公式改写$f(t)$的表达式，即

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$$

显然1是该信号的直流分量。

$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期$T_1 = 8$ $\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的周期$T_2 = 6$

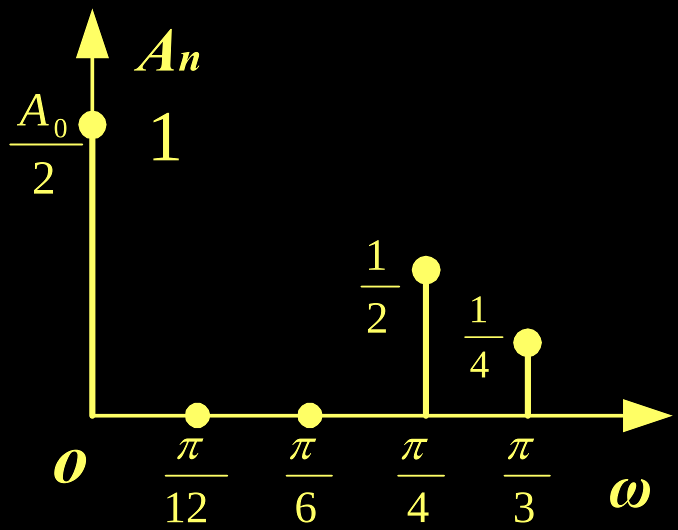
所以$f(t)$的周期T = 24，基波角频率 $\Omega = 2\pi/T = \pi/12$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

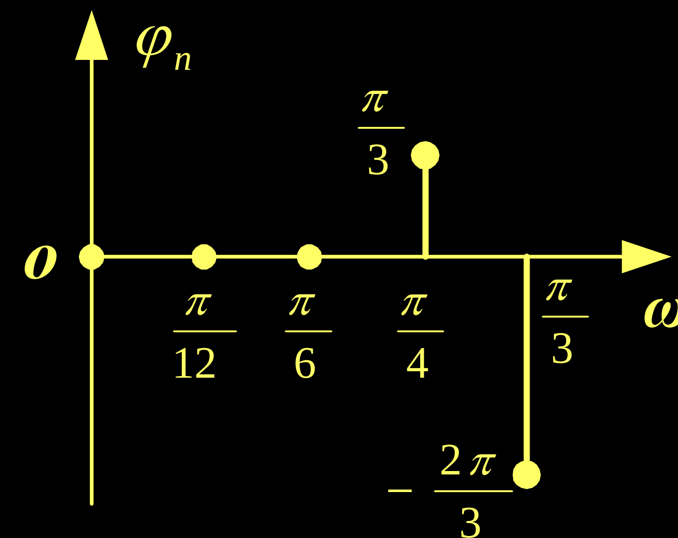
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ 是f(t)的(π /4)/(π /12)=3次谐波分量；

$\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{2\pi}{3}\right)$ 是f(t)的(π /3)/(π /12)=4次谐波分量；

画出$f(t)$的单边振幅频谱图、相位频谱图如图



(a)



(b)

$$P = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{37}{32} \qquad \text{式(4.3-11)}$$

已知$f(t)=1+\sin\omega_1 t+2\cos\omega_1 t+\cos\left(2\omega_1 t+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

例2 请画出其幅度谱和相位谱。

解：化为余弦形式

$$f(t)=1+\sqrt{5}\cos(\omega_1 t-0.15\pi)+\cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)$$

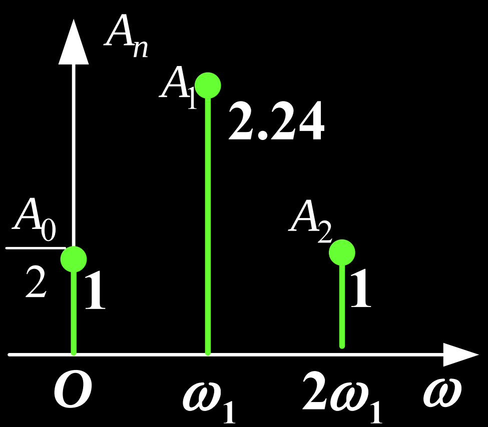
三角函数形式的傅里叶级数的谱系数

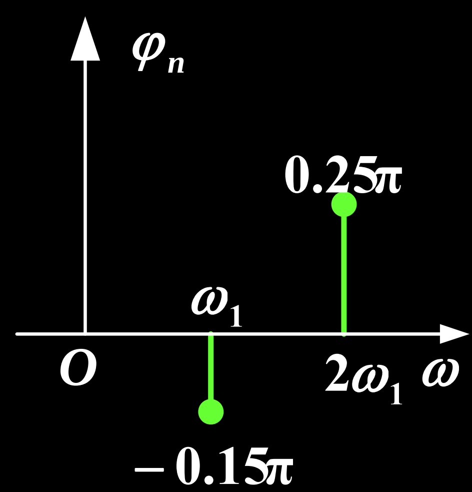
$\dfrac{A_0}{2}=1$　　$\varphi_0=0$

$A_1=\sqrt{5}=2.236$　　$\varphi_1=-0.15\pi$

$A_2=1$　　$\varphi_2=0.25\pi$

单边频谱图





双边频谱图

$$f(t)=1+\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}\right)+\frac{2}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}\right)+\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\left(2\mathrm{j}\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)}+\mathrm{e}^{-\left(2\mathrm{j}n\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

整理 $f(t)=1+\left(1+\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}+\left(1-\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_1 t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_1 t}$

$$=\sum_{n=-2}^{2}F_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\qquad F_1=\left(1+\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)=1.12\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.15\pi}\qquad F_{-1}=\left(1-\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)=1.12e^{\mathrm{j}0.15\pi}$$

$$F_0=1\qquad F_2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\qquad F_{-2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$