第2章 信号与系统的时域分析

系统特性分析与框图表示

内容回顾

01 离散时间序列的时域分解

02 卷积和定义及计算

03 离散LTI时间系统时域分析

主要内容

CONTENTS

01 LTI系统的性质

即时系统与动态系统

即时系统：任何时刻的输出仅取决于该时刻的输入

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

即时系统：$k\neq n,\quad h(n-k)=0\quad$ 等价于$n\neq 0,\quad h(n)=0$

单位冲激/脉冲响应

即时系统的单位冲激响应，只能是一个加权单位冲激函数。
即时系统的单位脉冲响应，只能是一个加权单位脉冲函数。

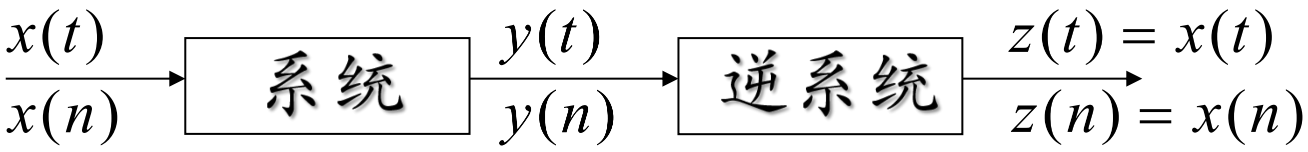
离散LTI即时系统：$h(n)=c\delta(n)$

连续LTI即时系统：$h(t)=c\delta(t)$

恒等系统：$h(n)=\delta(n)\quad h(t)=\delta(t)$

可逆性

可逆系统：存在一个系统与之级联后构成恒等系统



$$h(t)*h_{\mathrm{I}}(t)=\delta(t)$$

$$h(n)*h_{\mathrm{I}}(n)=\delta(n)$$

例

例： 离散LTI系统的单位脉冲响应：$h(n)=u(n)$

逆系统的单位脉冲响应：$h_{\mathrm{I}}(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$

$$\begin{aligned}h(n)*h_{\mathrm{I}}(n)&=u(n)*\delta(n)-u(n)*\delta(n-1)\\&=u(n)-u(n-1)=\delta(n)\end{aligned}$$

因果性

因果系统：在任意时刻的输出只取决于该时刻及该时刻之前的输入

离散LTI系统输出：$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$

因果系统:$\underline{n<0\text{时}h\left(n\right)=0}$ $\Rightarrow$ $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)$

连续LTI系统输出：$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

因果系统:$\underline{t<0,\ \ h\left(t\right)=0}$ $\Rightarrow$ $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

例： $h(n)=(-1)^{n-1}u(n-1)$

$h(n)=14\delta(n)+(2^{n-1}+12\times5^{n-1})u(n-1)$

稳定性

稳定系统：对于任何有界的输入，输出也有界

$$y(n)=x(n)*h(n)\xrightarrow{x(n)\text{有界}}\left|x(n)\right|\le B$$

系统输出的绝对值：$\left|y(n)\right|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\right|$

$$\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|\left|x(n-k)\right|\le B\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|$$

离散LTI系统稳定的充分必要条件：单位脉冲响应绝对可和 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|<\infty$

连续LTI系统稳定的充分必要条件：单位冲激响应绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt<\infty$

02 系统框图

离散LTI系统之框图表示-分解法

通式：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

分解为：$y(n) = \frac{1}{a_0}[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)]$

引入：$\boxed{w(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)}$

则：$y(n) = \frac{1}{a_0}[w(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)]$

引入辅助变量

$y(n) \sim x(n)$

$w(n)$

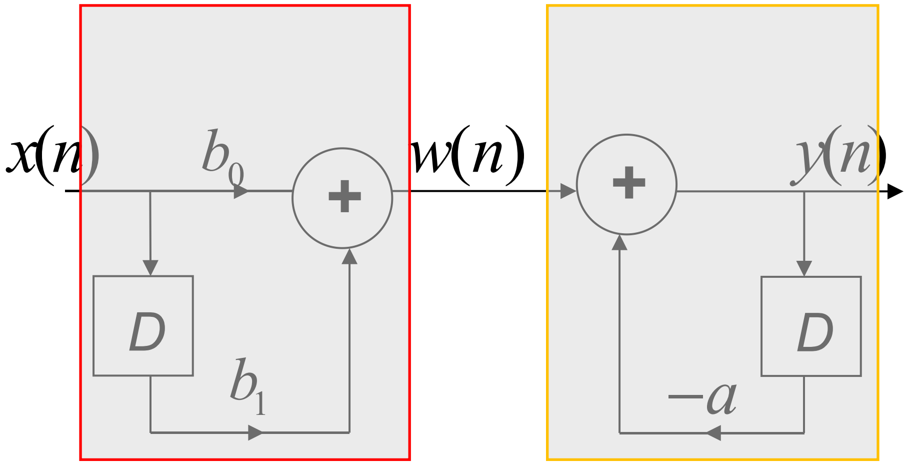
$$y(n)+ay(n-1)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$$

$$y(n)=\underbrace{-ay(n-1)}_{\text{第一部分}}+\underbrace{b_0x(n)+b_1x(n-1)}_{\text{第二部分}}$$

引入：$w(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$

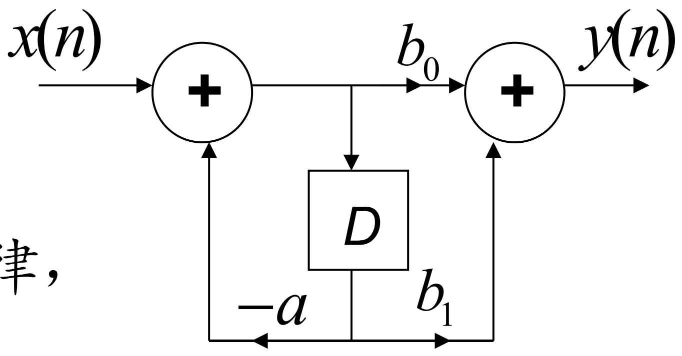
则：$y(n)=-ay(n-1)+w(n)$

由此可以得出框图



直接Ⅰ型结构

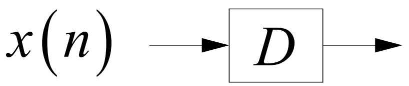
根据LTI系统的交换律，可以交换子系统顺序。



直接Ⅱ型结构

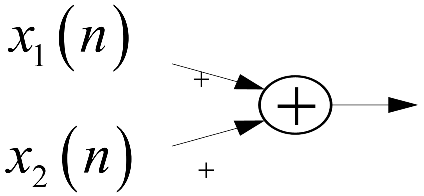
框图表示单元

单位移序器



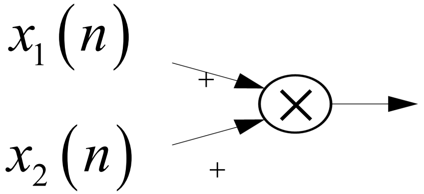
$y(n)=x(n-1)$

加法器

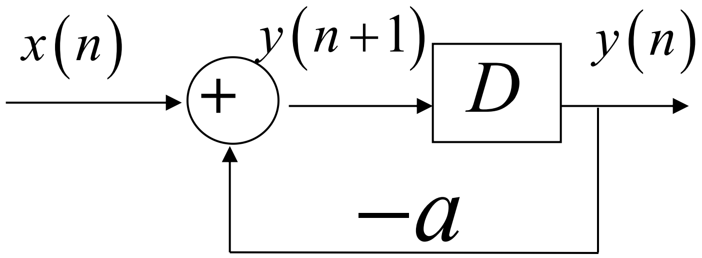


$y(n)=x_1(n)+x_2(n)$

乘法器



$y(n)=x_1(n)\times x_2(n)$



$$y(n+1)=x(n)-ay(n)$$

例：画出下面差分方程的模拟框图

$$y(n+2)+a_1y(n+1)+a_2y(n)=x(n+2)+x(n+1)+x(n)$$

(1)表示为移位算子形式：$y(n)=\dfrac{s^2+s+1}{s^2+a_1s+a_2}x(n)$

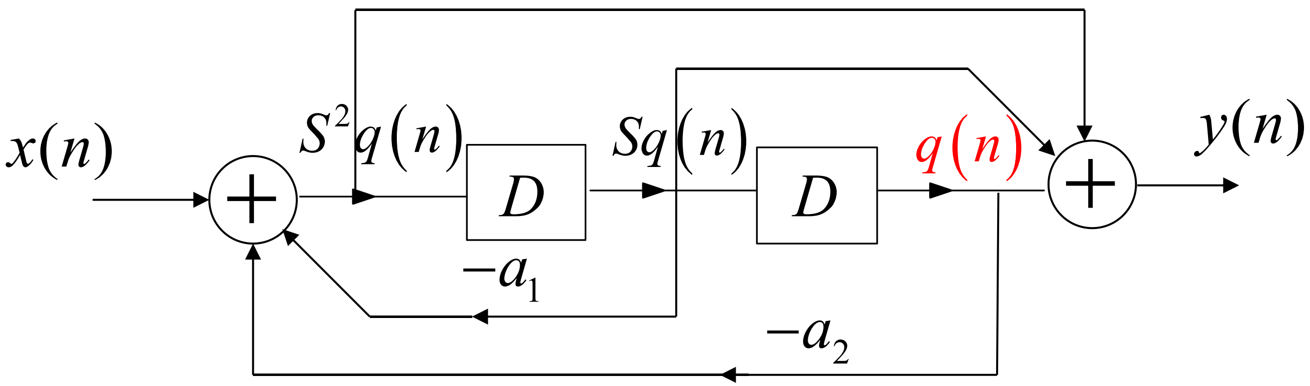
(2)设辅助变量$q(n)=\dfrac{1}{s^2+a_1s+a_2}x(n)$

则：$\left.\begin{aligned}x(n)&=(s^2+a_1s+a_2)q(n)\\ y(n)&=(s^2+s+1)q(n)\end{aligned}\right\}$ $s^2q(n)=x(n)-(a_1s+a_2)q(n)$

引入移位算子

$$y(n)\sim x(n)$$

$$q(n)$$



例： 画出下面差分方程的模拟框图

$$y(n)+ay(n-1)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$$

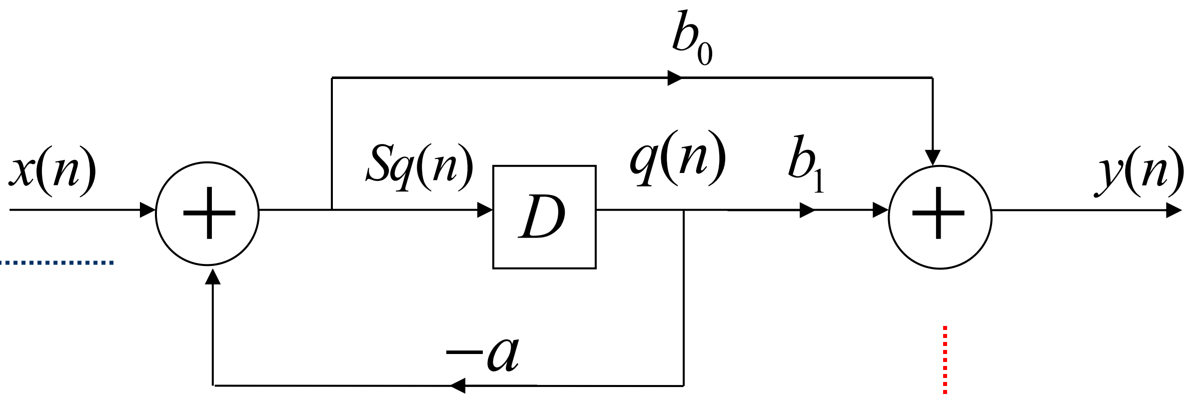
(1)将后向差分方程转化为前向差分方程：

$$y(n+1)+ay(n)=b_0x(n+1)+b_1x(n)$$

(2)表示为位移算子形式：$y(n)=\dfrac{b_0S+b_1}{S+a}x(n)$

(3)设辅助变量：$q(n)=\dfrac{1}{S+a}x(n)$

则：
$$\left.\begin{aligned} y(n)&=(b_0S+b_1)q(n)\\ x(n)&=(S+a)q(n)\end{aligned}\right\}\ \boxed{Sq(n)}=x(n)-aq(n)$$



通式：$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ （假设$N > M$）

令：$y_{(0)}(t) = y(t)$ $\quad x_{(0)}(t) = x(t)$

$$y_{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} y_{(0)}(\tau)d\tau \qquad x_{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x_{(0)}(\tau)d\tau$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{t} y_{(k-1)}(\tau)d\tau \qquad x_{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x_{(k-1)}(\tau)d\tau$$

将微分方程两边同时进行N次积分，可得:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{(M-k)}(t)$$

电路中积分器更容易实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{(M-k)}(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left[\boxed{\sum_{k=0}^{M} b_k x_{(M-k)}(t)} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

$$令: w(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{(M-k)}(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left[\boxed{w(t)} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

绘制积分形式框图

例：画出以下LTI系统的模拟框图

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)+\frac{dx(t)}{dt}+3\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

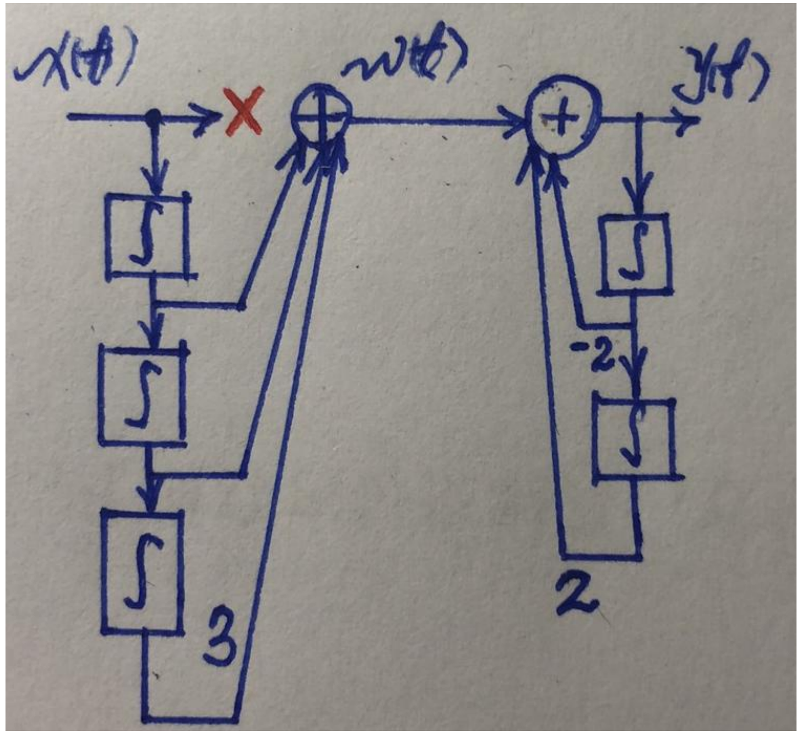
(1)等式两边，各进行2次积分，得到：

$$y_{(0)}(t)+2y_{(1)}(t)-2y_{(2)}(t)=x_{(2)}(t)+x_{(1)}(t)+3x_{(3)}(t)$$

(2)通过移项，得到：

$$y(t)=x_{(2)}(t)+x_{(1)}(t)+3x_{(3)}(t)-2y_{(1)}(t)+2y_{(2)}(t)$$

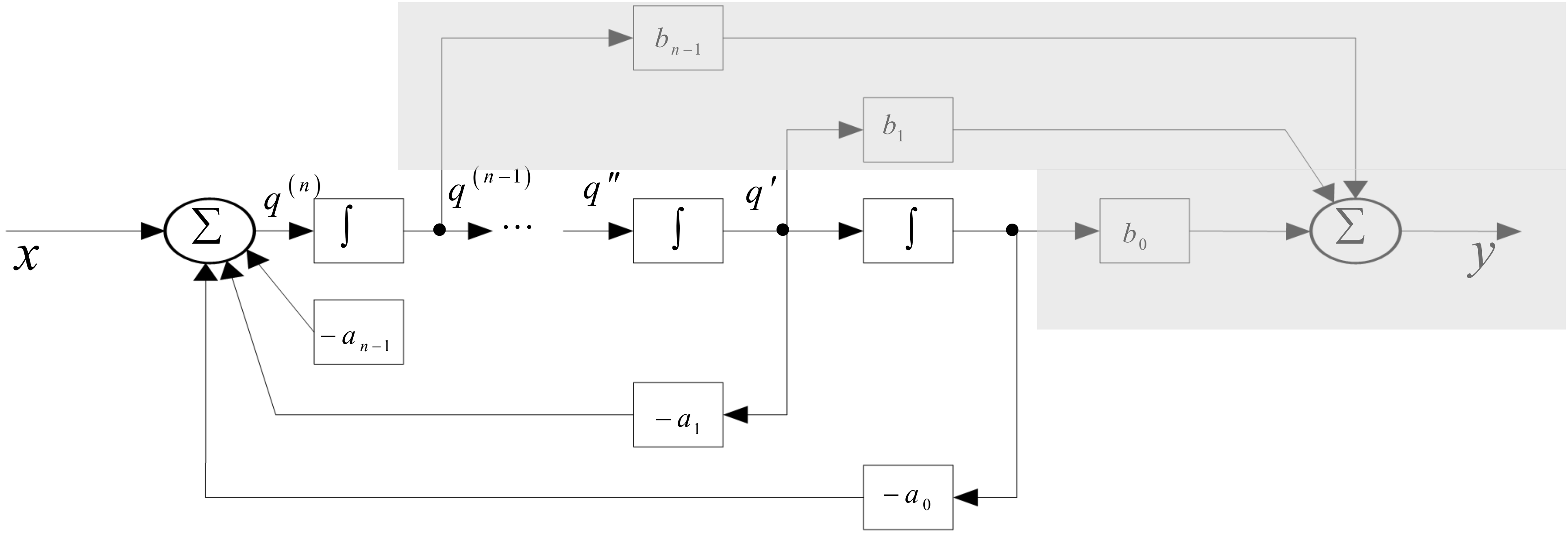
(3)引入$w(t)\Rightarrow\begin{cases}\boxed{w(t)=x_{(2)}(t)+x_{(1)}(t)+3x_{(3)}(t)}\\ y(t)=w(t)-2y_{(1)}(t)+2y_{(2)}(t)\end{cases}$



$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+b_1x'+b_0x$$

$$\boxed{q^{(n)}}+a_{n-1}q^{(n-1)}+\cdots+a_1q'+a_0q=x$$

$$y=b_{n-1}q^{(n-1)}+\cdots+b_1q'+b_0q$$



连续LTI系统之框图表示-微分算子法

例：$\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)+\dfrac{dx(t)}{dt}+3\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

(1)等式两边微分得到：

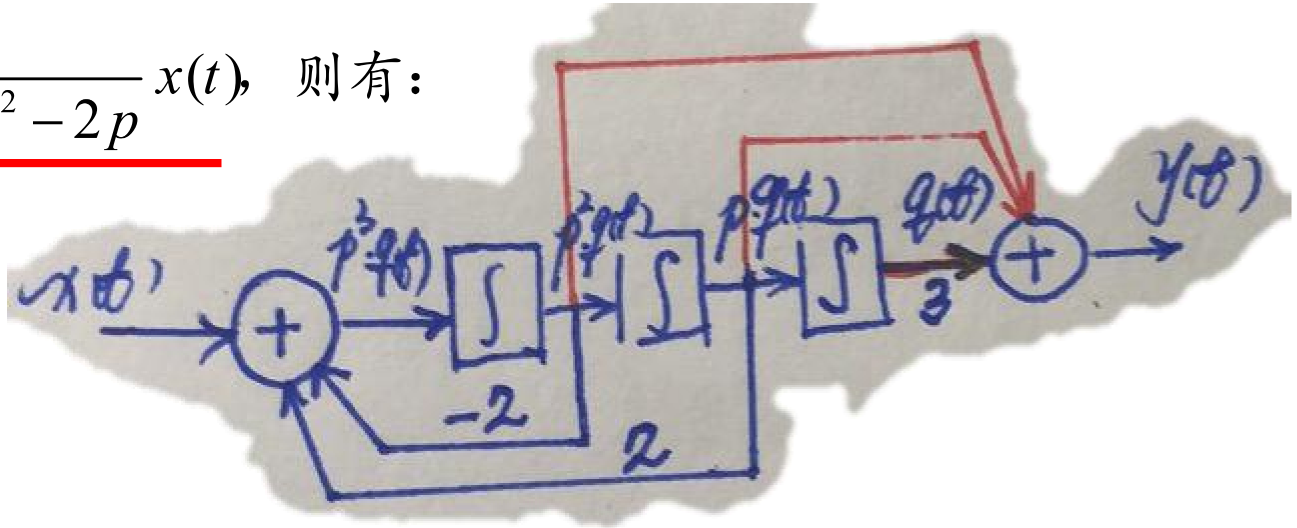
$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2\frac{dy(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

(2)采用微分算子表示法：

$$(p^3+2p^2-2p)y(t)=(p^2+p+3)x(t)\Rightarrow y(t)=\frac{p^2+p+3}{p^3+2p^2-2p}x(t)$$

(3)引入辅助变量$q(t)$，令：$q(t)=\dfrac{1}{p^3+2p^2-2p}x(t)$，则有：

$$\begin{cases}y(t)=(p^2+p+3)q(t)\\x(t)=(p^3+2p^2-2p)q(t)\end{cases}$$



作业

- 2.8
- 2.16
- 2.17