§4.7　周期信号的傅里叶变换

周期信号：$f(t) \longleftrightarrow$ 傅里叶级数 F_n　离散谱

非周期信号：$f(t) \longleftrightarrow$ 傅里叶变换 $F(j\omega)$　连续谱

周期信号的傅里叶变换如何求？与傅里叶级数的关系？

$$f(t)\left\{\begin{matrix}\text{周期}\\ \text{非周期}\end{matrix}\right\}\text{统一的分析方法：傅里叶变换}$$

- 正、余弦的傅里叶变换
- 一般周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶系数与傅里叶变换

一. 正、余弦的傅里叶变换

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

已知 $1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$

由频移特性得

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

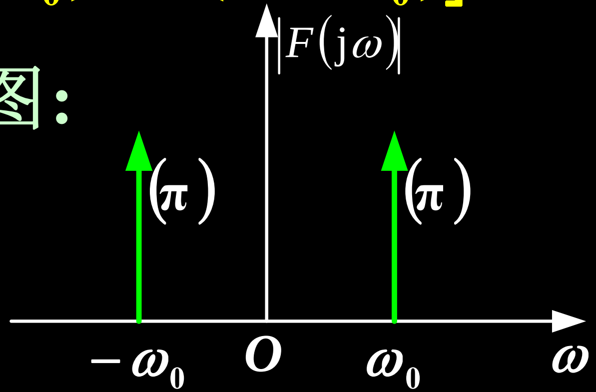
$$\therefore \cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right]=\pi\,\delta(\omega+\omega_0)+\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

同理 $\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi\,\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$

频谱图

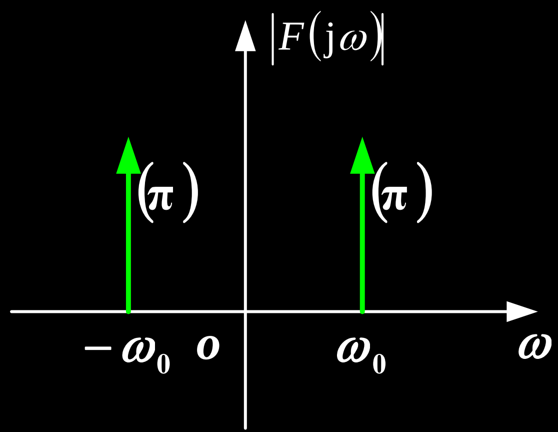
$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

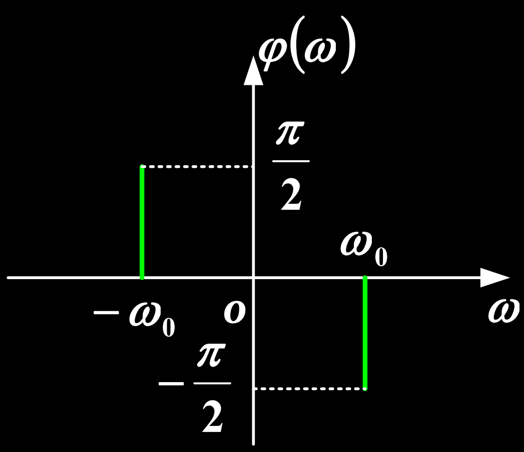
$\cos\omega_0 t$ 频谱图：



$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi\,\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

$\sin\omega_0 t$ 频谱图：





二、一般周期信号的傅里叶变换

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega\,t}\qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega\,t}\,\mathrm{d}t$$

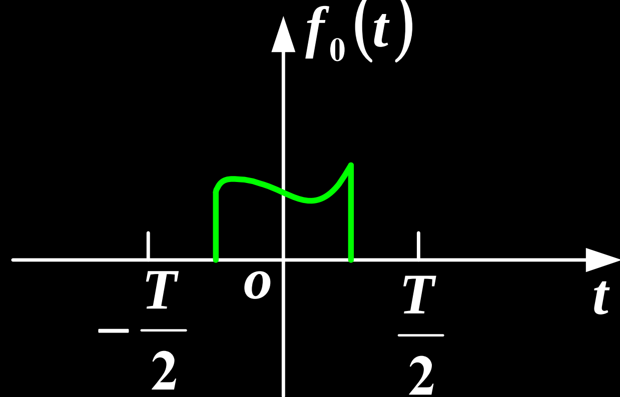
$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega\,t}\longleftrightarrow F_T(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)\qquad \mathbf{(1)}$$

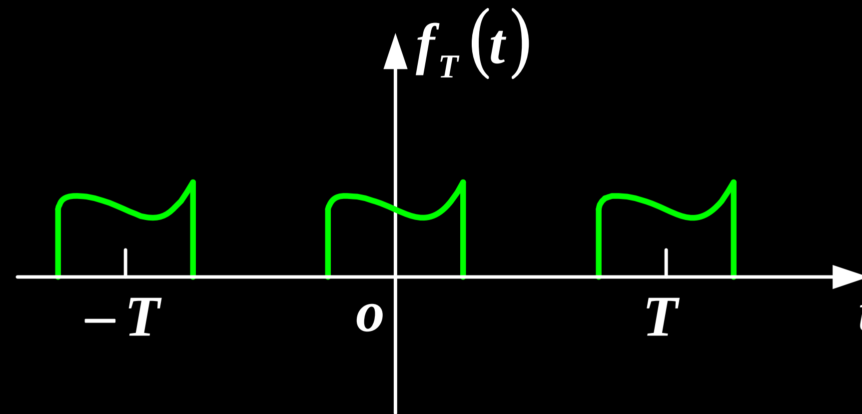
说明： (1)周期信号$f_T(t)$的傅氏变换由冲激序列组成，冲激函数仅存在于谐波频率处；

(2)谱线的幅度不是有限值，因为$F(j\omega)$代表频谱密度。

三、傅里叶系数与傅里叶变换关系

推导：第一个周期单脉冲$f_0(t)$的傅氏变换$F_0(j\omega)$与周期信号$f_T(t)$的傅氏系数F_n的关系：





设 $f_0(t) \leftrightarrow F_0(j\omega)$

$$F_0(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) e^{-j\omega t} \, dt \qquad (1)$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\Omega t} \, dt \qquad (2)$$

比较(1)(2)

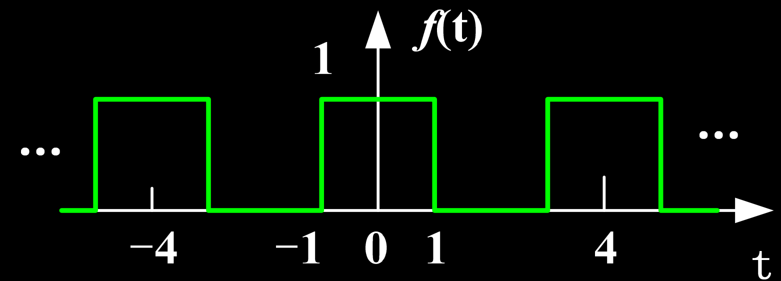
$\omega \leftrightarrow n\Omega$

$f_0(t) \leftrightarrow f_T(t)$

$$F_n = \frac{1}{T} F_0(j\omega)\Big|_{\omega = n\Omega}$$

周期信号傅氏变换例1

例1：周期信号如图，求其傅里叶变换。



解：周期信号$f(t)$也可看作一时限非周期信号$f_0(t)$的周期拓展。即

$$f(t) = \delta_T(t) * f_0(t)$$

$$F(j\omega) = \Omega\,\delta_\Omega(\omega)\,F_0(j\omega) = \Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\Omega)\delta(\omega - n\Omega)$$

本题 $f_0(t) = g_2(t) \longleftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$ $\quad \Omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

$$F(j\omega) = \Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\mathrm{Sa}(n\Omega)\delta(\omega - n\Omega) = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)$$