信号处理导论:

概念：消息（message）、信息（signal）、信号（information 信息的载体）
时域（连续/离散信号），频域
激励（输入信号）——系统——响应（输出信号）
通信系统：信息源->发送->信道（**噪声**）->接收->受信者

信号

描述：信息的物理体现，按物理属性分为：电,非电信号
分类：确定/随机，连续/离散，周期/非周期，能量/功率，一维/多维信号
确定：可用确定**时间函数**表示
随机：取值具有不确定性
伪随机：按照严格规律产生的随机信号
连续：连续时间范围内有定义的信号（t 为连续时间变量）
离散：仅在一些离散瞬间才有定义的信号（k 为离散时间序列 等间隔）
模拟信号（时幅连续）-抽样-抽样信号（时间离散）-量化-数字信号（时幅离散）
周期信号：f(t)=f(t+ m T))，m = 0,±1,±2,⋯（T 为信号周期，抽样信号的间隔与周期的比为有理数）
连续周期信号和：T1/T2 为有理数，取最小公倍数

$\mathrm{E} = \sum \mathrm{f(t)}^2 \quad \mathrm{P} = \lim \frac{1}{\mathrm{T}} \sum \mathrm{f(t)}^2$

能量信号：f(t)的能量有界 P=0 功率信号：f(t)的功率有界 E->∞
一维/多维：描述信号的自变量数
指数信号：对时间的微，积分仍为指数形式
Sampling Signal：f(t)=sin(t)/t 抽样信号
先平移，后反转和展缩 逆运算反之
奇异信号：函数本身或其导数有不连续点的信号
阶跃函数：
可表示锯齿型信号（累加），可对信号进行截取（与被截相乘）

$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0\ (t < 0) \\ \varepsilon(t) = \frac{1}{2}\ (t = 0) \\ \varepsilon(t) = 1\ (t > 0) \end{cases}$（阶跃点）

延迟单位：将阶跃函数平移
阶跃函数-∞~0 的积分=t δ(t)
冲击函数（狄拉克）：
高度无穷大，宽度无穷小，对称窄脉冲

$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1 \\ \delta(t) = 0\ (t \neq 0) \end{cases}$

取样性：δ(t)f(t)=f(0) δ(t)
冲击偶：冲击函数的一阶导数 (奇函数)
f(t) δ'(t)=f(0) δ'(t)=f'(0) δ(t)
复合函数形式冲击函数：
δ[f(t)]且 f(t)=0 有 n 个**互不相等**的实根
f(t) ≠ 0 时 δ[f(t)]=0，f(t)=0 时 δ[f(t)]=1

单位冲击序列：δ(k) k=0 时为 1 k≠0 时为 0
单位阶跃序列：ε(k)=0（k<0） ε(k)=1（k>0）（离散点集）

系统：特定功能的总体

连续(**t**)，离散(**k**)，混合系统（系统激励一个是连续，一个是离散信号）
动态（记忆，**内部激励**{f()}，**初始状态**{x(0)}）
单/多 输入输出
线性：输出、输入序列均为一次关系项（**齐次性，可加性**/可分解，零状态，零输入性）
时不变：输入时间加减 td，输出仅相应平移 td f(t-td)->y(t-td)（出现变系数或反转展缩则为时变）
Linear Time-Invariant 线性时不变：f(t)->y(t)微分与积分相等
因果系统：输出晚于输入 t<t0，f(t)=0 有 yzs(t)=0（t=0 时输入信号为因果信号）
稳定系统：**有界输入输出** |f(t)|, |y(t)|<∞
系统描述：
数学模型：物理特性数学抽象
框图模型：功能的形象表示
连续系统描述：**微分**方程 **离散**系统描述：**差分**方程（y(k)-(1+β)y(k-1) = f(k)）
通过框图，消去中间变量，得到输入输出关系
系统分析方法：外部法（时域分析，变换域法（连续，离散）），内部法
零输入，零状态响应分开，多个基本信号作用于线性系统等效于各个基本信号引起响应之和

连续系统时域分析：

LT1：时域分析（涉及函数变量均为时间 t 微分方程：全解=齐次解+特解）
齐次解激励函数无关：**自有响应**，
特解激励函数相关：**强迫响应**
$\boldsymbol{y^{(j)}(0_+)}$：接入 f(t)后的系统，$\boldsymbol{y^{(j)}(0_-)}$：接入 f(t)前系统状态
系数匹配法分析

零输入响应：$y_{zi}^{(j)}(\mathbf{0}_+) = y_{zi}^{(j)}(\mathbf{0}_-) = \boldsymbol{y^{(j)}(0_-)}$

零状态响应：$y_{zs}^{(j)}(\mathbf{0}_-) = \mathbf{0}$

冲激响应：δ(t)引起的**零状态响应**
阶跃响应：冲激响应的积分（因果$\boldsymbol{0_- \sim t}$）
卷积积分：
信号分解：任意信号可由无限个门函数拟合（门函数在门宽→0 时变为阶跃函数）

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积积分：$\mathrm{y_{zs}}(t) = f(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) * \hbar(t)$（交换律）

卷积过程（**换元**$\mathrm{t}\to\tau$，**反转平移**$f_2(\tau)\to f_2(\mathrm{t}-\tau)$，**乘积**，**积分**）（选取简单函数进行反转平移，注意积分区间）
信号与冲激函数的时延/冲激函数导数卷积=信号本身时延/求导

卷积：$f(t) * \delta(t-t0) = f(t-t0)$　乘积：$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$

阶跃函数乘积：$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$

系统并联：总系统冲激响应=各系统之和
系统级联：总系统冲激响应=各系统响应的卷积
时移特性：信号卷积**时移可换**

$f1(t-t1) * f2(t-t2) = f1(t-t1-t2) * f2(t) = f1(t) * f2(t-t1-t2)$

(1) 定义式 (2) 图解法 (3) 积分性质

相关函数：$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f1(x) * f2(x-t)dx$（f1,f2 为实偶函数与卷积相同）

离散系统时域分析：

差分：前向（$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$），**后向**（$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$）
二阶差分：$\nabla^2 f(k) = \nabla[\nabla f(k)] = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$（进行 n 次差分）
零输入响应：齐次解（$c(\lambda)^k$）（将$f(k) = 0$代入求特征根与 C）
零状态响应：齐次解+特解 / 卷积法（$k < 0, y_{zs}(k) = 0$，求出齐次解与特解）

单位序列响应：$h(k) = T[\delta(k), \{0\}]$（$h(-i) = 0$）　　阶跃响应：$g(k) = T[\varepsilon(k), \{0\}]$

卷积和：$y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$ 卷积：$f(k) = f1(k) * f2(k)$

图解法：换元，反转平移，乘积，求和
不进位乘法：序列卷积使用大乘法，前后为 0（非零个数$(n_1 + n_3) \le k \le (n_2 + n_4)$）
交换律，分配率，结合律

傅里叶变换与频域分析：

将任意输入信号分解为不同频率正弦信号与虚指数信号和

矢量正交：$V_x V_y^T = \sum_{i=1}^{3} v_{xi} v_{yi} = 0$ *则*$V_x = (v_{x1}, v_{x2}, v_{x3})$*与*$V_y = (v_{y1}, v_{y2}, v_{y3})$正交

(t_1, t_2)内两个信号正交：$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2^*(t)dx = 0$

正交函数集：，$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dx = \begin{cases} 0 \ (i \ne j) \\ K_i \ne 0 \ (i = j) \end{cases}$（区间$(t_1, t_2)$）

完备正交函数集：不存在集合之外正交函数（$\{1, \sin(\Omega t), \sin(2\Omega t) \ldots\}, \{e^{j\Omega t}, e^{2j\Omega t} \ldots\}$）

均方误差：$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(t)]^2 dt$（f(t)与近似函数$C_j\varphi_j(t)$间误差）

$\boldsymbol{C_i = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\varphi_i(t)dt}$ **（方向）** $\mathbf{K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)\,dt}$

帕斯瓦尔能量：$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 K_j$（总能量=方向*分能量之和）

傅里叶级数：$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$（$a_n(0,1..), b_n(1,2..)$）

傅里叶系数：$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,dt$，$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,dt$

其它形式：$\mathrm{f(n)}=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$（$\mathrm{A_n}=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$）

周期信号可分解为：$\frac{\mathrm{A_0}}{2}$ *直流分量*，$A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$ n*次谐波*（$\mathrm{A_1}$为基波）

指数形式：$\mathrm{f(t)}=\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty}\mathrm{F}_n e^{jn\Omega t}$　　复傅里叶系数：$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{jn\Omega t}dt$

偶函数：$\mathbf{a_n},\boldsymbol{A_n},|\boldsymbol{F_n}|$　　**奇函数：$\mathbf{b_n},\boldsymbol{\varphi_n}$**

周期信号平均功率：$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\,dt=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2=\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty}|\mathrm{F_n}|^2$

频谱：幅值，相位随频率变化关系

周期信号频谱：谐波（离散）性，收敛性。

频带宽度：$\mathrm{B}_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$（第一个零点）

零点之间谐波数：$\frac{\omega_1}{\Omega}=\frac{T}{\tau}$（T 无限大，周期信号离散谱过度到非周期信号连续谱）

傅里叶正反变换：$\mathrm{F(j\omega)}\Leftrightarrow\mathrm{f(t)}$（频谱密度⇔原函数）

频谱密度：$\mathrm{F(j\omega)}=\lim_{\mathrm{T}\to\infty}F_nT=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

使用单边/双边指数函数逼近，对不满足绝对可积的函数进行变换

Tips：$\delta(t)\Leftrightarrow 1$，$1\Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$，$\mathrm{sgn(t)}\Leftrightarrow\frac{2}{j\omega}$（符号函数）

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{\boldsymbol{j\omega_0 t}}+e^{-\boldsymbol{j\omega_0 t}}\right)\Leftrightarrow\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}\left(e^{\boldsymbol{j\omega_0 t}}-e^{-\boldsymbol{j\omega_0 t}}\right)\Leftrightarrow j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

双边指数函数 $\mathrm{e}^{-a|t|}\Leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}$，门函数 $\mathrm{g}_2(t)\Leftrightarrow 2Sa(\omega)=\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$

傅里叶变换性质：

非周期信号频谱密度：$\boldsymbol{F(j\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f(t)e^{j\omega t}dt}$（分解为虚指数函数和）

时域与频域（傅里叶域）关系：$\mathbf{f(t)}\Leftrightarrow\boldsymbol{F(j\omega)}$

时域乘积，频域卷积且乘$\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}}$

线性：$\mathrm{af_1}(t)\Leftrightarrow a\mathrm{F_1}(j\omega)$，偶实奇虚

对称性：$\mathrm{f(t)}\Leftrightarrow F(j\omega)\to\mathrm{F(jt)}\Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$（t->w, w->-w）

尺度变换：$\mathrm{f(at)}\Leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})$（$\mathrm{f}(-\mathrm{t})\Leftrightarrow F(-j\omega)$）

时移特性：$\mathrm{f(t-t_0)}\Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$，$\mathrm{f(t+t_0)}\Leftrightarrow e^{j\omega t_0}F(j\omega)$

频移特性：$e^{j\omega_0 t}f(t)\Leftrightarrow\mathrm{F(j(\omega-\omega_0))}$，$e^{-j\omega_0 t}f(t)\Leftrightarrow\mathrm{F(j(\omega+\omega_0))}$

调制：将信号频谱搬移至高频段，方便信号发送（接收搜索范围广）

微积分：

时域：$f^{(n)}(t)\Leftrightarrow(\mathrm{j\omega})^{\mathrm{n}}F(j\omega)$，$\int_{-\infty}^{t}f(x)\,dx\Leftrightarrow\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}F(j\omega)$

频域：$(-\mathrm{jt})^{\mathrm{n}} f(t) \Leftrightarrow F^{n}(j\omega)$，$\pi f(0)\delta(t) + -\frac{1}{jt} f(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx$

相关定理：$\mathrm{F}[\mathrm{R}_{12}(\tau)] = F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)$，$\mathrm{F}[\mathrm{R}_{21}(\tau)] = F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$，

$\mathrm{F}[R(\tau)] = |F(j\omega)|^2$

能量功率谱：

能量谱：单位信号频率能量$\mathrm{E}(\omega)$，$\mathrm{E}(\omega) = |\mathrm{F}(\mathrm{j}\omega)|^2$

功率谱：单位频率信号功率$\mathrm{P}(\omega)$，$\mathrm{R}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathrm{F_T}(j(\omega))|^2}{T}$

$\mathrm{R}(\tau) \Leftrightarrow E(\omega)$ ，$\mathrm{R}(\tau) \Leftrightarrow P(\omega)$（相关函数与能量/功率谱均为傅里叶变换）

$\mathrm{E_y}(\omega) = |H(j\omega)|^2 E_f(\omega)$，$\mathrm{P_y}(\omega) = |\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{P_f}(\omega)$（能量功率的激励与响应关系）

$$\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{H(\mathrm{j}\omega)}$$

周期信号傅里叶变换：

周期信号可由复指数信号组成，复指数信号的频谱为冲激函数

$e^{\boldsymbol{j\omega_0 t}} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，$e^{\boldsymbol{-j\omega_0 t}} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

傅里叶系数为傅里叶变换的 1/T，$F_n = \frac{1}{T} F_0(j\omega)|_{\omega=n\Omega}$

LT1 系统：$\mathrm{Y}(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{F}(\mathrm{j}\omega)$（也可由时域卷积定理得出）

求系统输出时，转到时域算乘积再反变换得到输出

无失真传输：输入与输出信号仅**幅度**和**出现顺序**变化，波形不变

频响函数：$\mathrm{Y}(\mathrm{j}\omega) = Ke^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{t_d}} F(j\omega)$

理想条件：$\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{Y}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{F}(\mathrm{j}\omega)} = \mathrm{K}e^{-\mathrm{j}\omega \mathrm{t_d}}$

滤波器：选择函数，仅保留相应频段信息

理想低通：冲激（不可实现的非因果 $\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \mathrm{Sa}(\omega_\mathrm{c}(t-t_d))$），阶跃（$\mathrm{g}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\omega_\mathrm{c}(t-t_d))$ t_d为系统延时）

物理可实现条件：时域（响应在激励以后 $\mathrm{h}(\mathrm{t}) = 0\ (t<0)$），频域（平方绝对可积）

取样定理：

CFS 连续周期 → CTFT 连续非周期

DFS 离散周期 → DTFT 离散非周期

取样：利用**取样脉冲序列** s(t)，从连续信号抽取离散样本值

冲激信号取样：$\omega_\mathrm{s} \geq 2\omega_\mathrm{m}$，频谱不发生混叠，便于信号恢复（奈奎斯特 $\mathrm{f}_{取样} \geq 2\mathrm{f}$）

信号恢复：低通滤波（原信号<截止频率<取样频率）

序列分析：

离散傅里叶级数展开：$\mathrm{dfs}[\mathrm{F_n}(K)] = F_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)W^{nk}$

$\mathrm{DTFT}[\mathrm{f}(\mathrm{k})] = \mathrm{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_N(k)e^{-jk\theta}$

DFT：时域频域均为离散有限长序列（0~N-1）

$\mathrm{DFT}[\mathrm{f(k)}] = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k) e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$

性质: 线性, 对称性 ($\mathrm{F(k)} \Leftrightarrow N\mathrm{f}((-\mathrm{n}))$, 时移 ($\mathrm{DFT}\left[\mathrm{f}\big((\mathrm{k}-\mathrm{m})\big)_{\mathrm{N}} G_n(k)\right] = W^{mn}F(n)$ 周期延拓后反转)，时域循环（$\mathrm{f}_1(k) * f_2(k)$*卷积* $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} f_1(m) * f_2\big((k-m)\big)_N$)，频域循环（$\mathrm{f}_1(k) f_2(k) \Leftrightarrow \frac{1}{N} F_1(n) * F_2(n)$*卷积*)，巴塞瓦尔（在频率带限内，功率谱与能量正比）

连续系统 s 域分析:

连续时间系统傅里叶变换拓展到复频域 s=a+ jω（增加实常数$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \rightarrow e^{s}$）

$\mathrm{H}(.) = \frac{\mathrm{B}(.)}{\mathrm{A}(.)}$（上 0 零点，下 0 极点）