§4.9 取样定理

取样定理论述了在一定条件下，一个连续信号完全可以用离散样本值表示。这些样本值包含了该连续信号的全部信息，利用这些样本值可以恢复原信号。可以说，取样定理在连续信号与离散信号之间架起了一座桥梁。为其互为转换提供了理论依据。

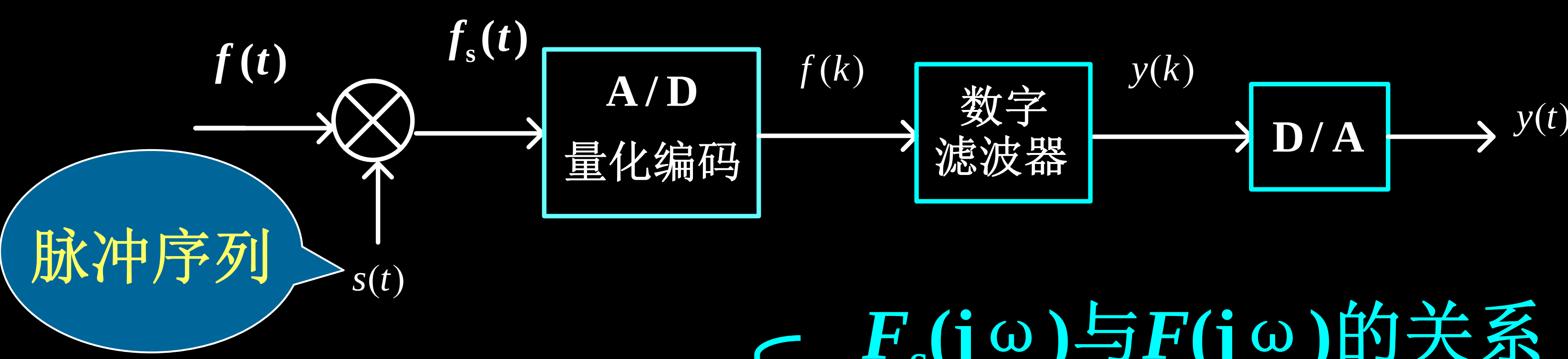
一．信号的取样

所谓“取样”就是利用取样脉冲序列$s(t)$从连续信号$f(t)$中“抽取”一系列离散样本值的过程。

这样得到的离散信号称为取样信号$f_s(t)$。

它是对信号进行数字处理的第一个环节。

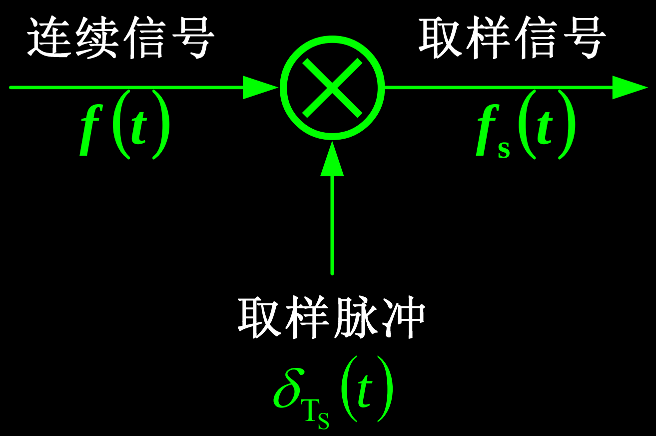
数字处理过程：



需要解决的问题：

- $F_s(j\omega)$与$F(j\omega)$的关系
- 由$f_s(t)$能否恢复$f(t)$?

1. 理想取样（周期单位冲激取样）



$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)\ (-\omega_m < \omega < \omega_m)$$

$$s(t) \longleftrightarrow S(j\omega)$$

$$f_s(t) \longleftrightarrow F_s(j\omega)$$

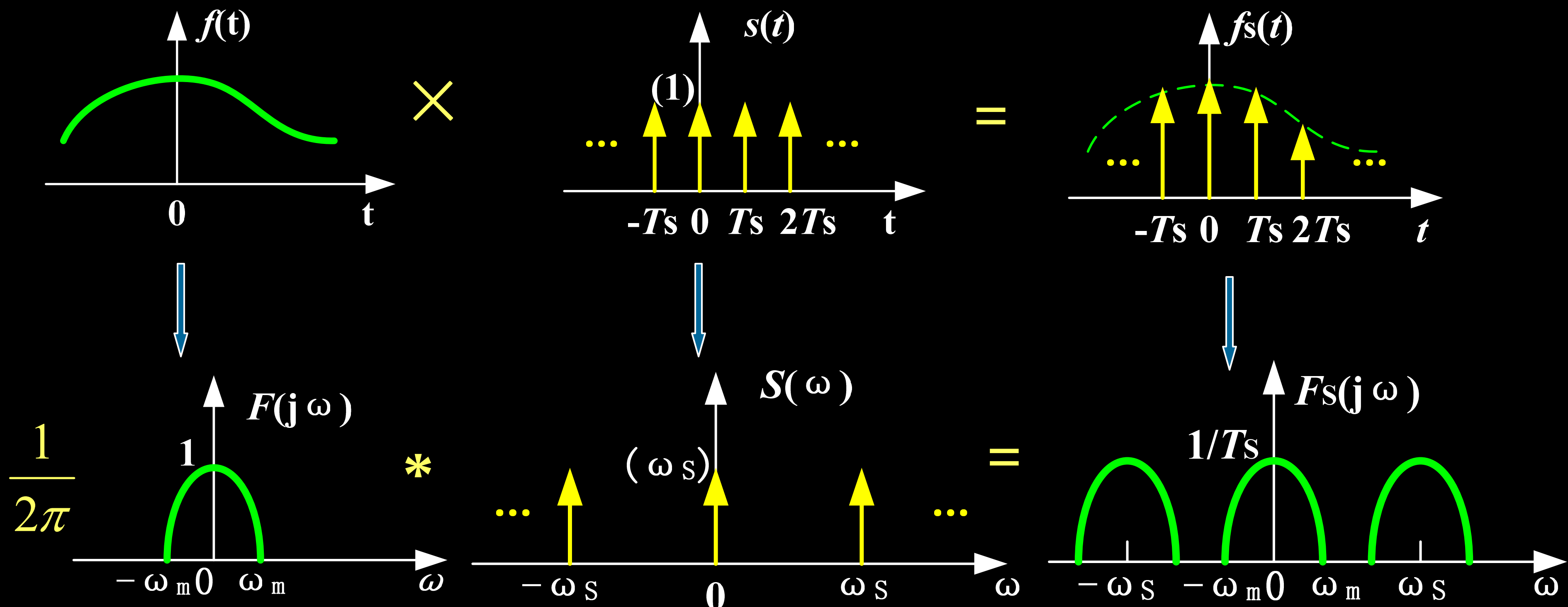
$$s(t) = \delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow S(j\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$F_s(j\omega) = \mathbf{F}\left[f(t)\delta_{T_S}(t)\right] = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_S \delta_{\omega_S}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

2. 冲激取样信号的频谱

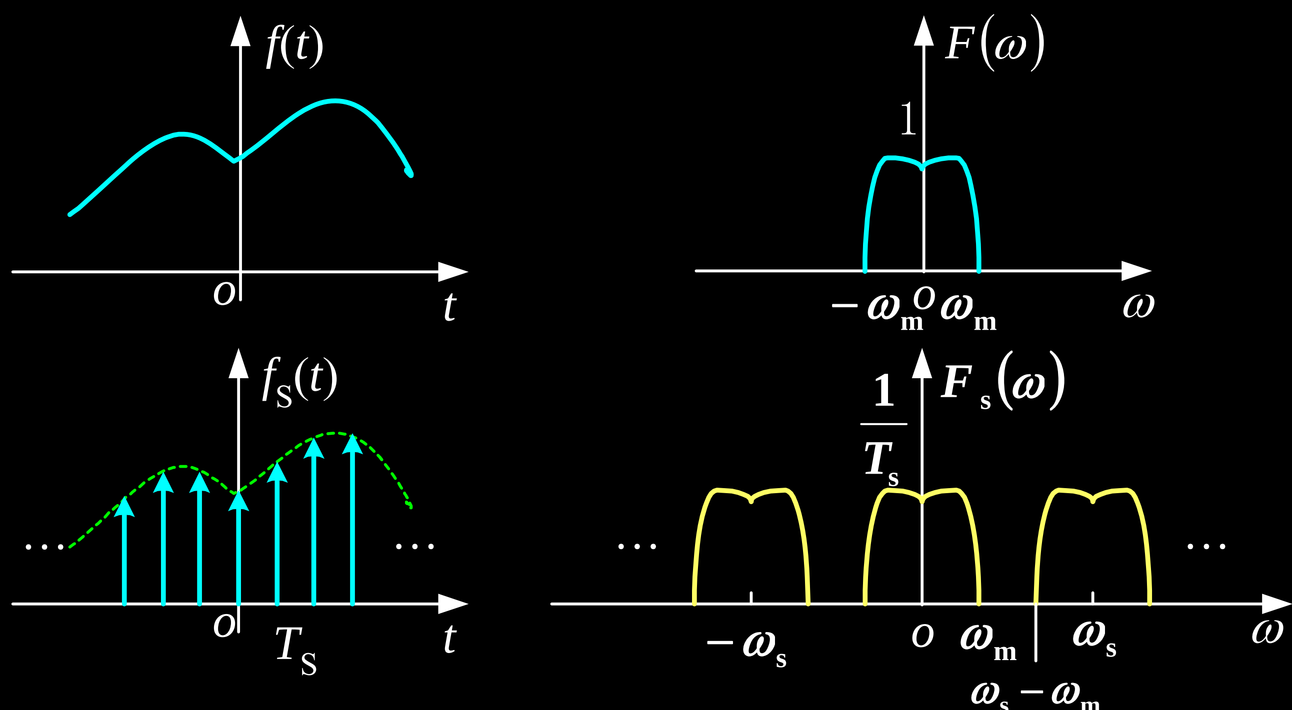
T_S 取样间隔
ω_S 取样角频率



画$f_S(t)$的频谱时， 设定$\omega_S \geq 2\omega_m$，这时其频谱不发生混叠，因此能设法(如利用低通滤波器)，从$F_S(j\omega)$中取出$F(j\omega)$，即从$f_S(t)$中恢复原信号$f(t)$；否则将发生混叠。

二、时域取样定理

一个频谱在区间（$-\omega_m$，ω_m)以外为0的**带限信号** $f(t)$，可唯一地由其在均匀间隔 $T_s\,[T_s \leqslant 1/(2f_m)]$ 上的**样点值** $f(kT_s)$ 确定。



恢复

奈奎斯特（*Nyquist*） 频率和间隔

注意：为恢复原信号，必须满足两个条件：

（1）f(t)必须是带限信号；

（2）取样频率不能太低，必须$f_s \geq 2f_m$，

或者说，取样间隔不能太大，必须$T_s \leq 1/(2f_m)$;

否则将发生混叠。

通常把最低允许的取样频率$f_s=2f_m$称为奈奎斯特（**Nyquist**)频率；

把最大允许的取样间隔$T_s=1/(2f_m)$称为奈奎斯特间隔。

频域取样定理

根据时域与频域的对偶性，可推出频域取样定理：

一个在时域区间（$-t_m$，t_m）以外为0的时限信号$f(t)$的频谱函数$F(j\omega)$，可唯一地由其在均匀频率间隔f_s [$f_s \leqslant 1/(2t_m)$]上的样值点$F(jn\omega_s)$确定。

$$F(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(j\frac{n\pi}{t_m}\right)\mathrm{Sa}(\omega t_m-n\pi) \qquad ,t_m=\frac{1}{2f_s}$$

由取样信号恢复原信号

理想低通滤波器

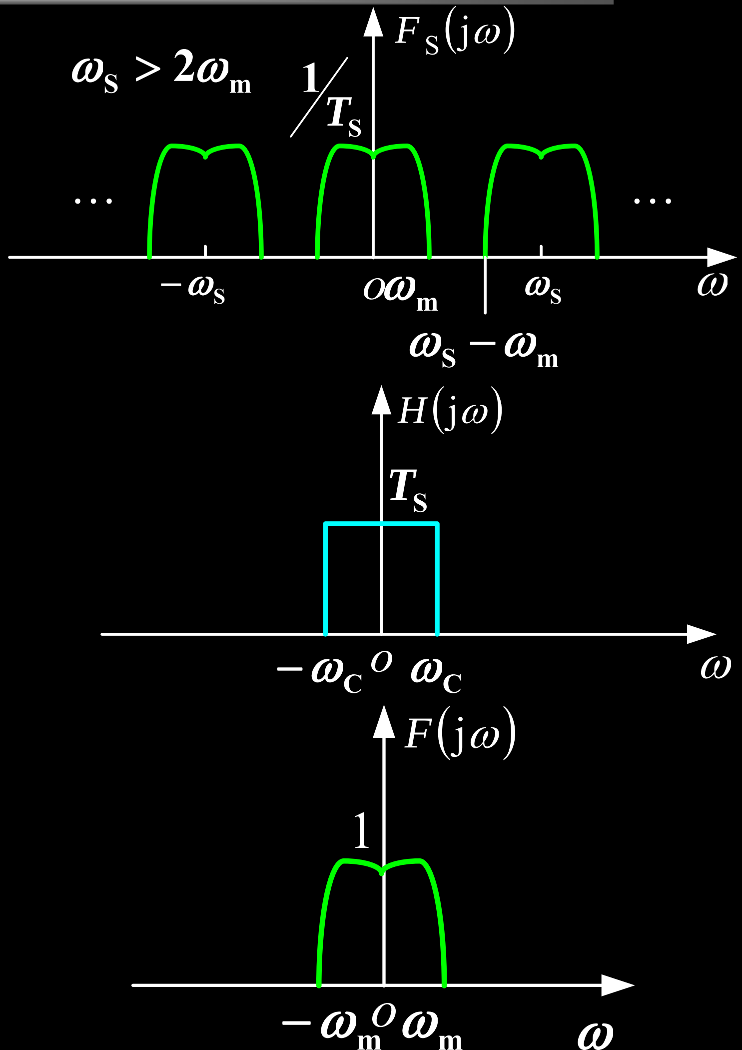
$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}T_s & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=F_s(\mathrm{j}\omega)\cdot H(\mathrm{j}\omega)\leftrightarrow f(t)=f_s(t)*h(t)$$

滤除高频成分，即可恢复原信号

对ω_C要求：$\omega_m\leqslant\omega_C\leqslant\omega_S-\omega_m$

从时域运算解释



时域运算

以理想抽样为例

时域： $f_s(t)=f(t)\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

频域： $F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*S(\omega)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega-n\omega_s)]$

理想低通滤波器：

频域：$H(j\omega)=\begin{cases} T_s & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases} \leftrightarrow$ 时域：$h(t)=T_s\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)$

$$f(t)=f_s(t)*h(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]*\left[T_s\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)\right]$$

$$=T_s\frac{\omega_c}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_c(t-nT_s)]$$

说明

$$f(t)=T_s\frac{\omega_c}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_c(t-nT_s)]$$

- 连续信号$f(t)$可以展开成Sa函数的无穷级数，级数的系数等于取样值$f(nT_s)$。
- 也可以说在取样信号$f_s(t)$的每个取样值上画一个峰值为$f(nT_s)$ 的Sa函数波形，由此合成的信号就是$f_s(t)$ 。

当$\omega_s=2\omega_m$，则有 $\omega_c=\omega_m$, $T_s=\frac{2\pi}{\omega_s}=\frac{\pi}{\omega_c}$

$$此时f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_c(t-nT_s)]$$