第3章 连续时间信号与系统的频域分析

傅里叶变换之基本性质

内容回顾

主要内容

CONTENTS

为表述方便，采用$\mathscr{F}\left\{x(t)\right\}$表示$X(\Omega)$，用$\mathscr{F}^{-1}\left\{X(\Omega)\right\}$表示$x(t)$

傅立叶变换对表示为：$x(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X(\Omega)$

线性特性：

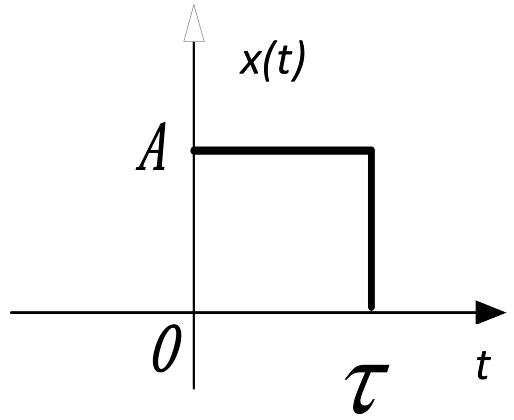
如果 $x_1(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X_1(\Omega)$; $x_2(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X_2(\Omega)$

则 $a\cdot x_1(t)+b\cdot x_2(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}a\cdot X_1(\Omega)+b\cdot X_2(\Omega)$

线性组合而成的信号的傅里叶变换等于各个组成信号的傅里叶变换的线性组合。$\mathscr{F}$

主观题 10分 设置

请给出如图所示信号的傅里叶变换。(利用线性性质表示，无需最终结果)



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

实信号

$$X^*(\Omega)=\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt\right]^*=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{j\Omega t}dt$$

$$\because x(t)\text{为实信号}\quad \therefore x^*(t)=x(t)$$

$$\Rightarrow X^*(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\Omega t}dt=X(-\Omega)$$

$$\left(\text{对比周期信号：}A_k^*=A_{-k}\right)$$

将$X(\Omega)$表示为实部与虚部：$X(\Omega)=X_R(\Omega)+jX_I(\Omega)$

则：$X(-\Omega)=X_R(-\Omega)+jX_I(-\Omega)$ $\quad X^*(\Omega)=X_R(\Omega)-jX_I(\Omega)$

可以得到：$\boxed{\underbrace{X_R(\Omega)}_{\Omega\text{的偶函数}}=X_R(-\Omega)\qquad \underbrace{X_I(\Omega)}_{\Omega\text{的奇函数}}=-X_I(-\Omega)}$

共轭对称性

将$X(\Omega)$表示为模和相角：$X(\Omega)=\left|X(\Omega)\right|e^{j\theta(\Omega)}$

则$\left|X(\Omega)\right|$为Ω的偶函数，$\theta(\Omega)$为Ω的奇函数

实偶信号

若$x(t)$为实偶函数

$$\because X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(-t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{j\Omega\tau}d\tau=X(-\Omega)$$

$\therefore$若$x(t)$为实偶函数，则$X(\Omega)$是偶函数

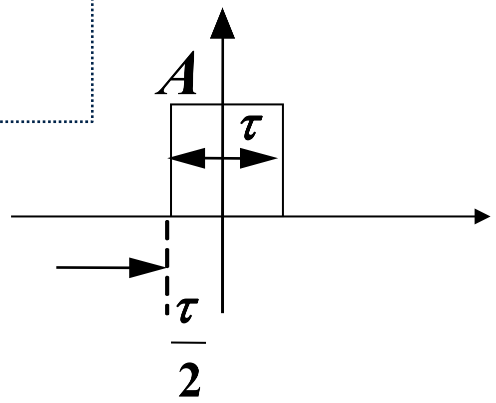
信号可以分解为偶函数与奇函数之和：$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$

$$x(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X(\Omega)\qquad x_e(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X_R(\Omega)\qquad x_o(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}jX_I(\Omega)$$

若 $\quad x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$

则 $\quad x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$

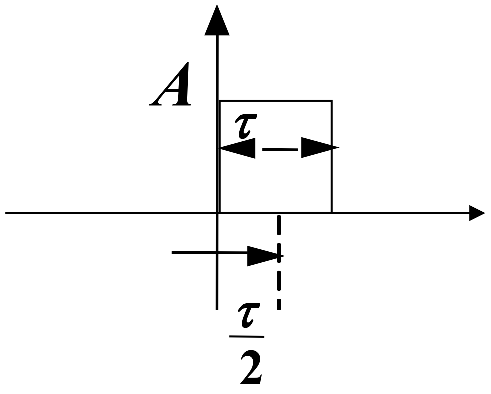
信号在时域的时移不改变幅度频谱只会使频谱的相位产生附加的<u>线性相移</u>



例： $x(t) = A[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})]$

$$X(\Omega) = A(e^{j\Omega\tau/2} - e^{-j\Omega\tau/2})(\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega})$$

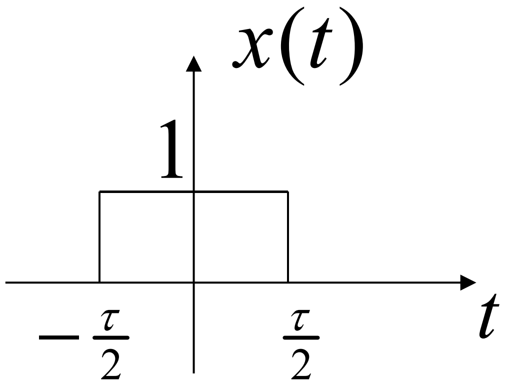
$$= 2A\sin(\Omega\tau/2)/\Omega = A\tau Sa(\Omega\tau/2)$$



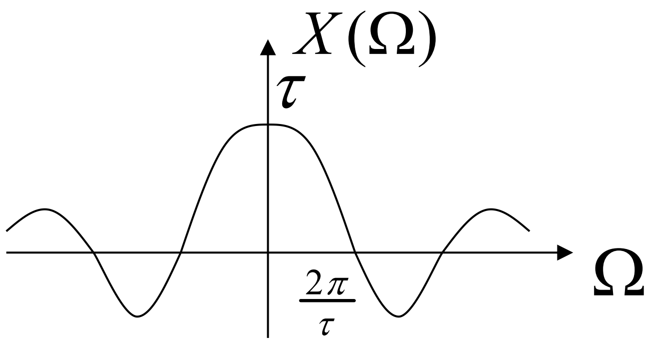
$$X_1(\Omega) = A\tau Sa(\Omega\tau/2)e^{-j\Omega\tau/2}$$

$$|X_1(\Omega)| = |X(\Omega)| \qquad \phi_1(\Omega) = \phi(\Omega) - \Omega\tau/2$$

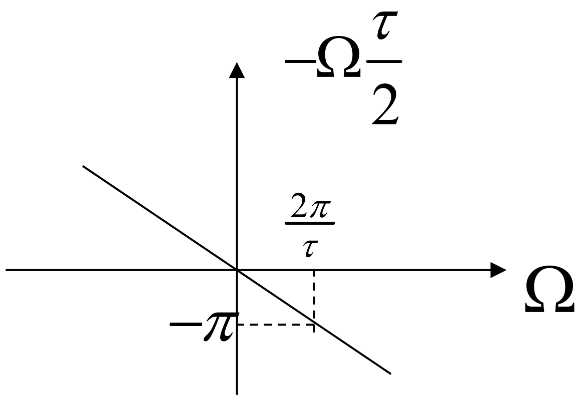
时移特性



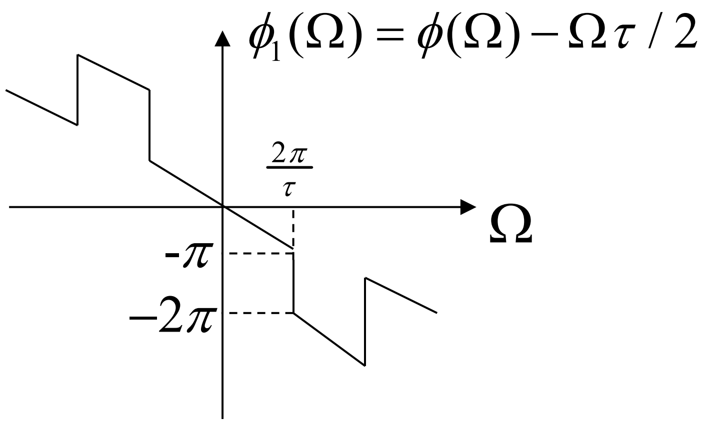
$x(t)$
1
$-\frac{\tau}{2}$
$\frac{\tau}{2}$
t



$X(\Omega)$
τ
$\frac{2\pi}{\tau}$
Ω



$-\Omega\frac{\tau}{2}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$-\pi$
Ω

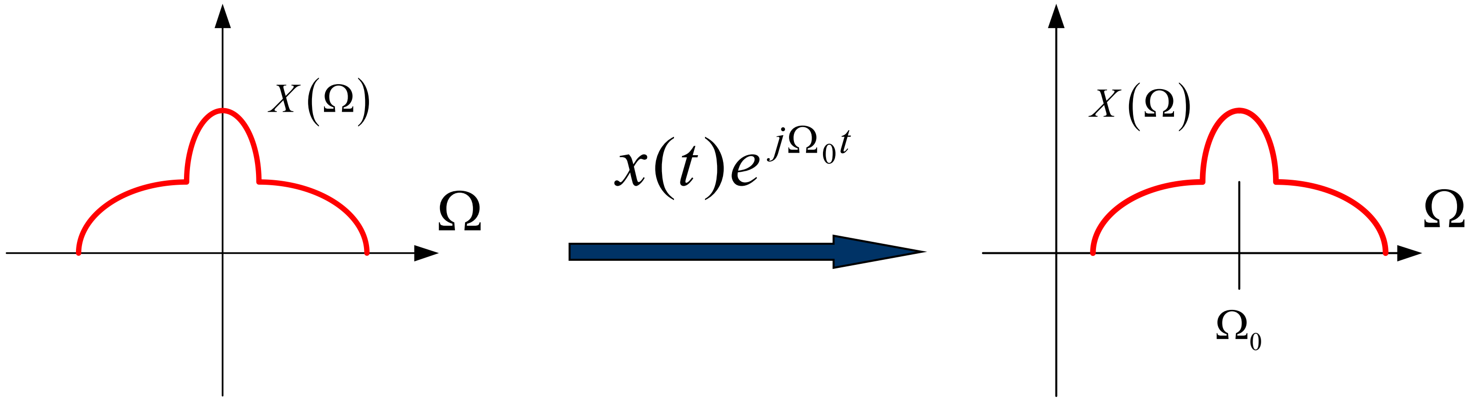


$\phi_1(\Omega) = \phi(\Omega) - \Omega\tau / 2$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$-\pi$
-2π
Ω

若 $x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$

则 $x(t)e^{j\Omega_0 t} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega-\Omega_0)$

信号在时域中与因子$e^{j\Omega_0 t}$相乘，等效于在频域中将整个频谱向频率增加方向平移Ω_0

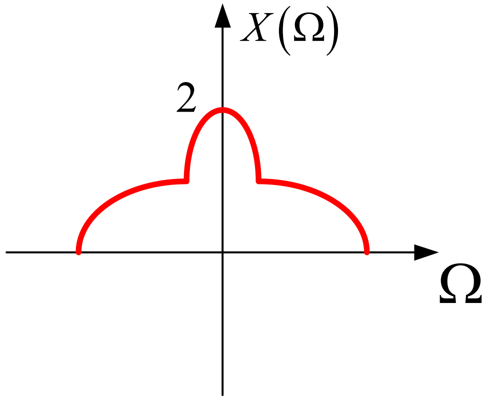


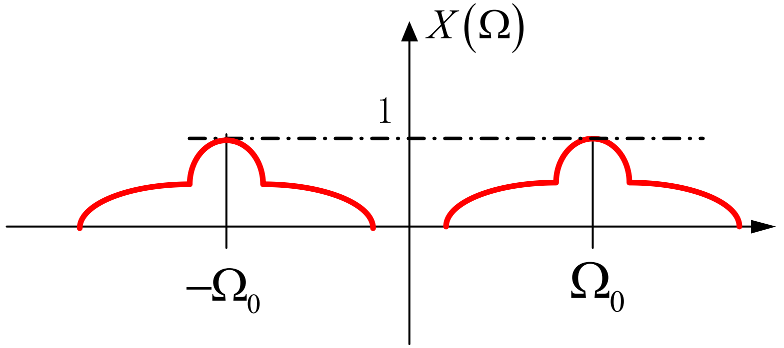
$$x(t)\cos(\Omega_0 t)=x(t)\frac{1}{2}(e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t})=\frac{1}{2}\left[x(t)e^{j\Omega_0 t}+x(t)e^{-j\Omega_0 t}\right]$$

三角函数表现形式：

$$x(t)\cos(\Omega_0 t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\frac{1}{2}\left[X(\Omega+\Omega_0)+X(\Omega-\Omega_0)\right]$$

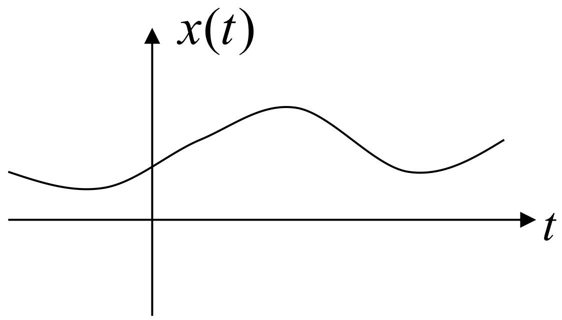
信号在时域中与$\cos(\Omega_0 t)$相乘，等效于在频域中将整个频谱同时向频率正负方向平移Ω_0



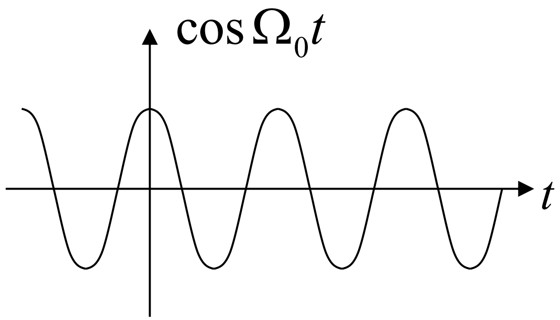


信号调幅

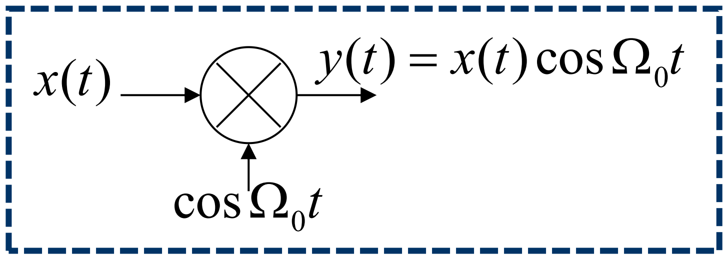
频移特性

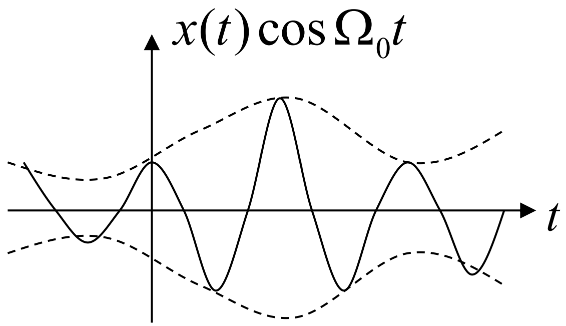


调制（基带）信号

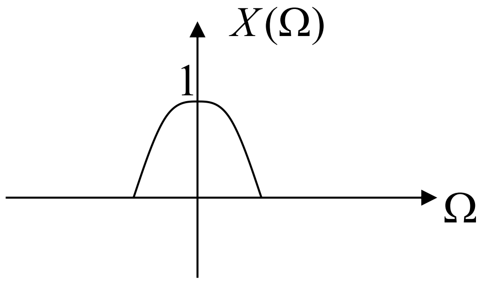


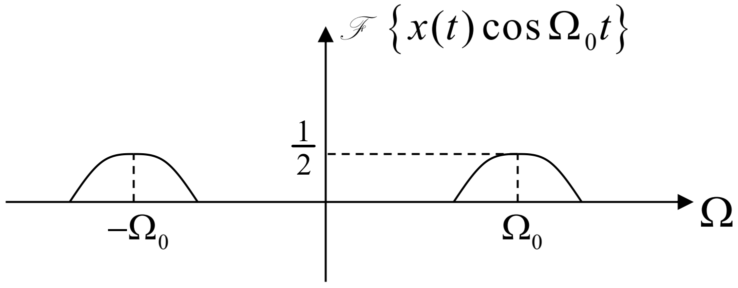
受调（载波）信号



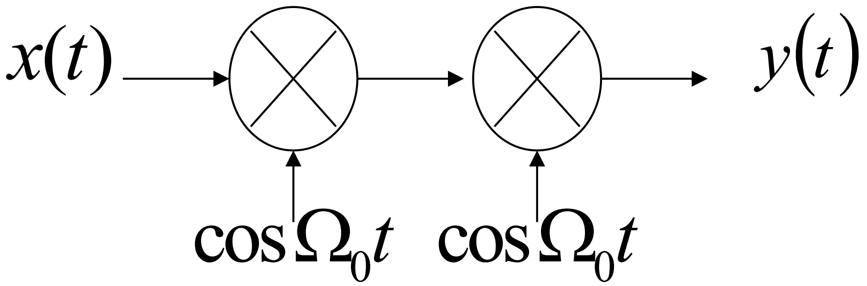


调幅波





当输入信号频谱为 $X(\Omega)=\delta(\Omega)$ 时，试分析图示系统的输出信号的频谱。



若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$

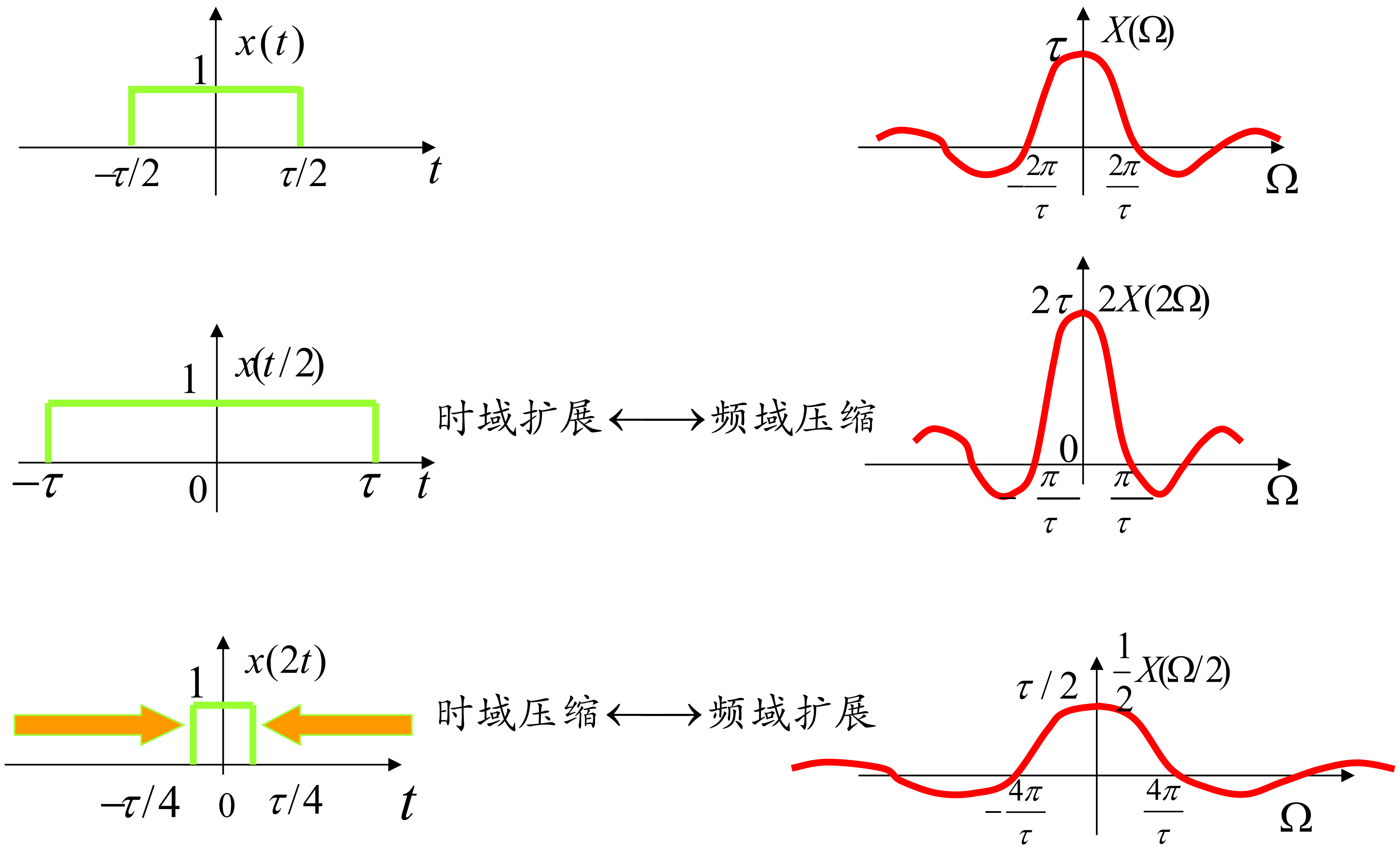
则 $x(at) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{|a|} X(\frac{\Omega}{a})$

证明：$\mathscr{F}\left[x(at)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\Omega t} dt \xrightarrow{\text{变量代换：}\tau = at}$

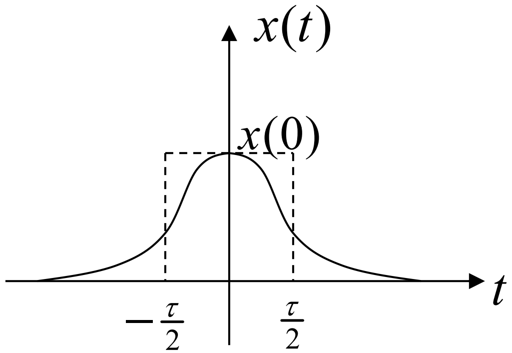
$$\mathscr{F}\left[x(at)\right] = \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\Omega}{a}\tau} d\tau & a > 0 \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\Omega}{a}\tau} d\tau & a < 0 \end{cases}$$

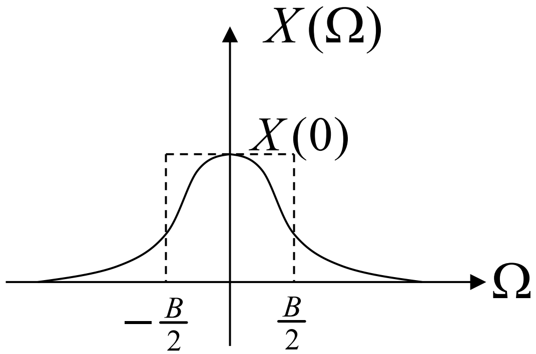
推论：$a = -1 \quad x(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(-\Omega)$

尺度变换



x(t)
1
−τ/2
τ/2
t
X(Ω)
τ
2π/τ
Ω
x(t/2)
1
−τ
0
τ
t
时域扩展⟷频域压缩
2τ
2X(2Ω)
0
π/τ
Ω
x(2t)
1
−τ/4
0
τ/4
t
时域压缩⟷频域扩展
τ/2
1/2 X(Ω/2)
4π/τ
Ω





由上图可见，两矩形的面积分别为

$$\tau \cdot x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = [\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt]_{\Omega=0} = X(0)$$

$$B \cdot X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)d\Omega = [\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega]_{t=0} = 2\pi x(0)$$

所以有

$$B \cdot \tau = 2\pi \qquad B = \frac{2\pi}{\tau}$$

脉冲宽度和频带宽度成反比关系，且其乘积为常数

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \qquad x(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(-\Omega)$$

例：

1、$u(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \pi\delta(\Omega) - \dfrac{1}{j\Omega}$

2、$1 = u(t) + u(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\Omega)$

3、$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} = u(t) - u(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \dfrac{2}{j\Omega}$

4、$e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \dfrac{2a}{a^2 + \Omega^2}$

例：若$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$,求$x(at-t_0)$的傅立叶变换

分析：$x(t) \xrightarrow{\text{延时}} x(t-t_0) \xrightarrow{\text{尺度变换}} x(at-t_0)$

解一：$x(t) \xrightarrow{\text{延时}} x(t-t_0) \xrightarrow{\text{尺度变换}} x(at-t_0)$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$X(\Omega) \qquad X(\Omega)e^{-j\Omega t_0} \qquad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)e^{-j\frac{\Omega}{a}t_0}$$

解二：$x(t) \xrightarrow{\text{尺度变换}} x(at) \xrightarrow{\text{延时}} x(a(t-t_0/a))$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$X(\Omega) \qquad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right) \qquad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)e^{-j\frac{\Omega}{a}t_0}$$

若: $x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$

则: $X(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi x(-\Omega)$

证明：$x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \xrightarrow{\text{交换}t\text{与}\Omega} 2\pi x(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j\Omega t} dt$

$\longrightarrow 2\pi x(-\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\Omega t} dt$

推论:1、若$x(t)$为实偶函数，则$X(\Omega)$为实偶函数，其傅立叶变换为：

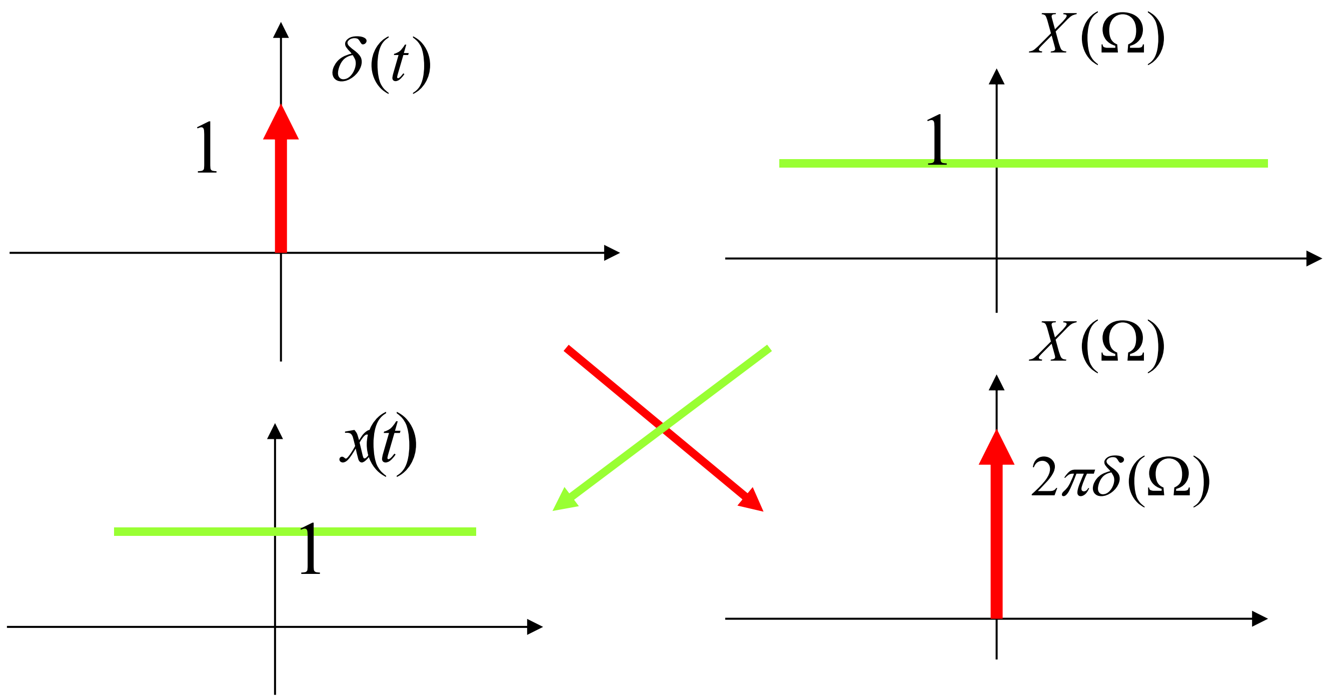
$X(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi x(\Omega)$

2、若$x(t)$为实奇函数，则$X(\Omega)$为虚奇函数，其傅立叶变换为：

$X(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} -2\pi x(\Omega)$

3、$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\Omega)$

意义：在一次傅立叶变换的基础上，再进行一次傅立叶变换，则等于原函数乘以2π，并将t替换为$-\Omega$。



实偶函数：$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\Omega)$

利用对偶特性证明频移特性：$x(t)e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega-\Omega_0)$

证明：

根据对偶特性得到：$x(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$

$$\Rightarrow \quad X(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi x(-\Omega)$$

根据时移特性有：$X(t-\Omega_0) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi x(-\Omega)e^{-j\Omega_0\Omega}$

再次利用对偶特性得到：$2\pi x(-t)e^{-j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi X(-\Omega-\Omega_0)$

根据尺度变换：$x(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(-\Omega)$

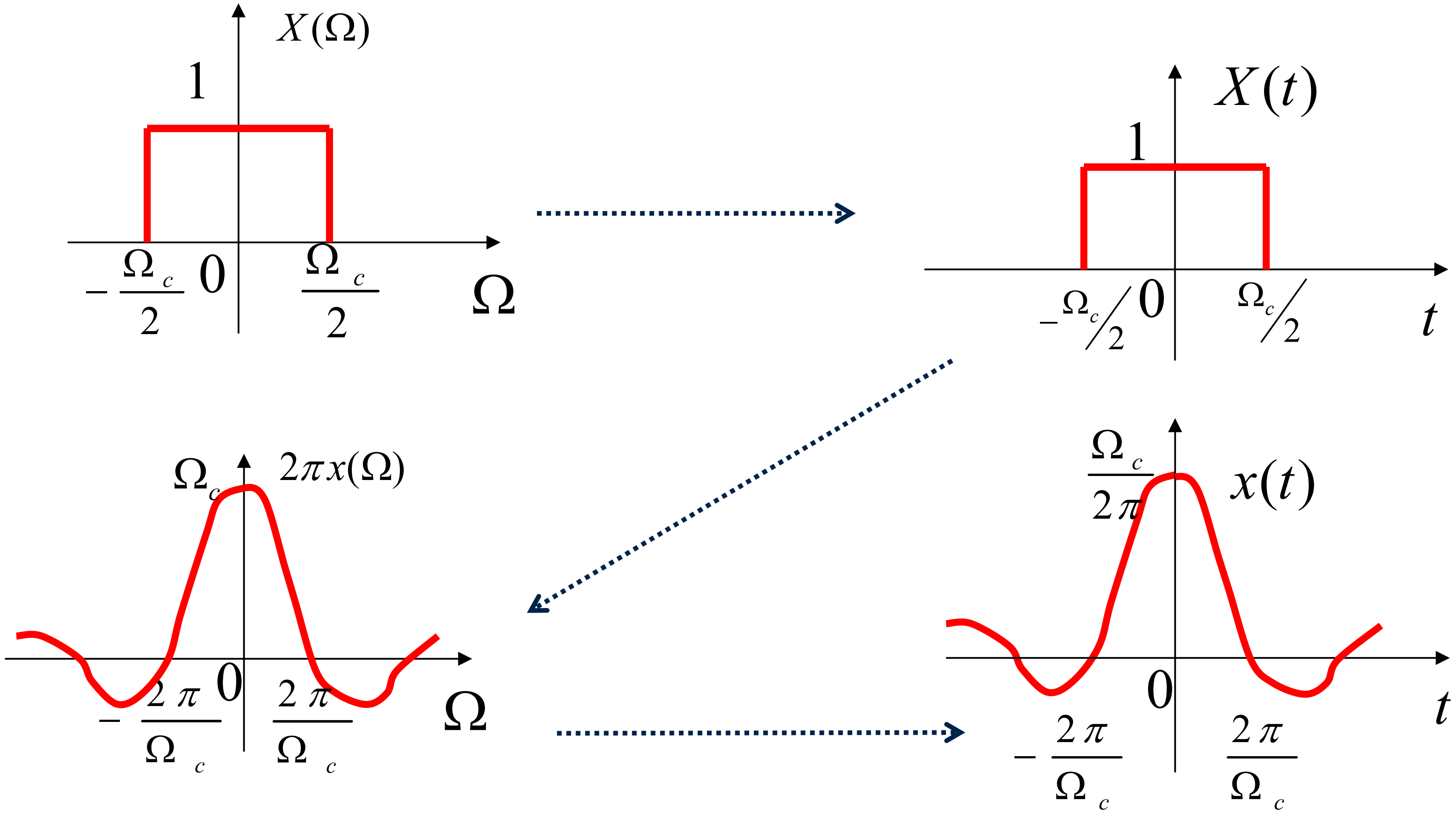
$$\Downarrow$$

$$x(t)e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega-\Omega_0)$$

对偶性质

例：已知$X(\Omega)$求$x(t)$

$$X(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(\Omega) = \Omega_c Sa(\frac{\Omega_c \Omega}{2})$$



$$\Rightarrow \ x(t) = \frac{\Omega_c}{2\pi} Sa(\frac{\Omega_c t}{2})$$

对偶性质

例： 已知$X(\Omega)$求$x(t)$

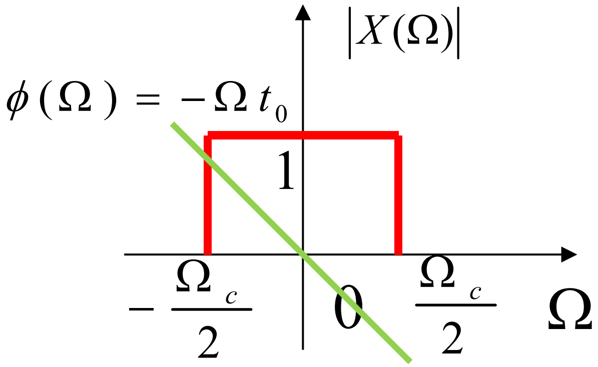
由图得到：$X(\Omega)=|X(\Omega)|e^{-j\Omega t_0}$ ，设$\hat{x}(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}|X(\Omega)|$则$\xrightarrow{\text{不考虑相移项}}$

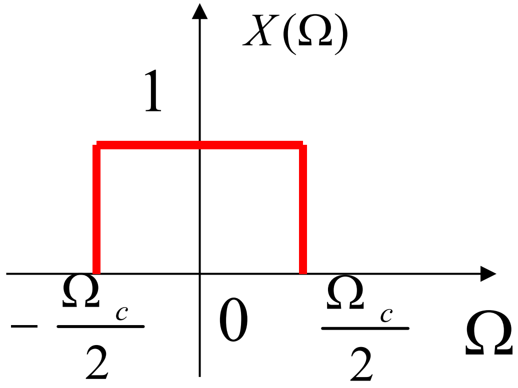
$$|X(t)|\xleftrightarrow{\mathscr{F}}2\pi\hat{x}(\Omega)=\Omega_c Sa\left(\frac{\Omega_c\Omega}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(t)=\frac{\Omega_c}{2\pi}Sa\left(\frac{\Omega_c t}{2}\right)$$

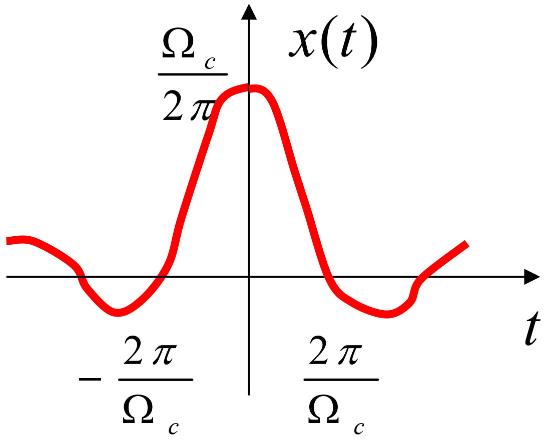
思路:

分别考虑幅度与相位

根据时移特性$\Rightarrow x(t)=\dfrac{\Omega_c}{2\pi}Sa\left[\dfrac{\Omega_c(t-t_0)}{2}\right]$







作业

- 3.8(a) (c)
- 3.11(b)(c)(e)
- 3.13(a)(b)(c)