§1.4 阶跃函数和冲激函数

函数本身有不连续点(跳变点)或其导数与积分有不连续点的一类函数统称为奇异信号或奇异函数。

- 阶跃函数
- 冲激函数

是两个典型的奇异函数。

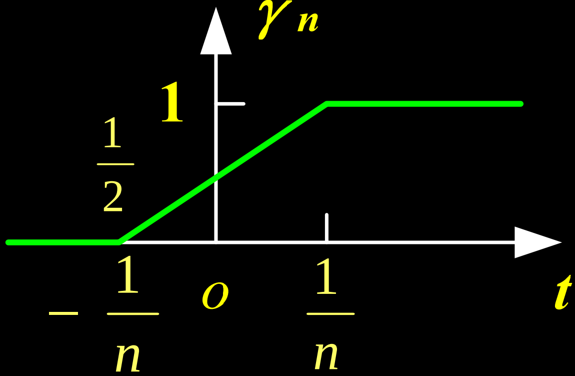
- 阶跃序列和单位样值序列

一、单位阶跃函数

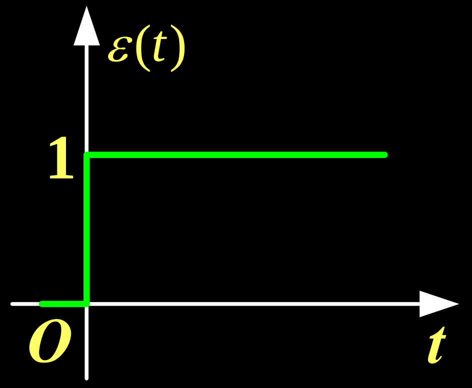
1. 定义

下面采用求函数序列极限的方法定义阶跃函数。

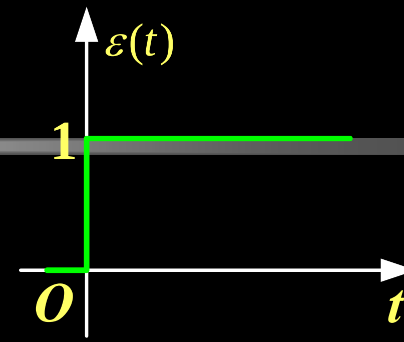
选定一个函数序列 $\gamma_n(t)$如图所示。



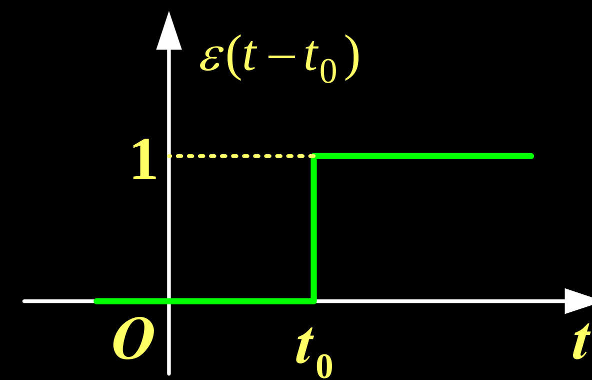
$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$



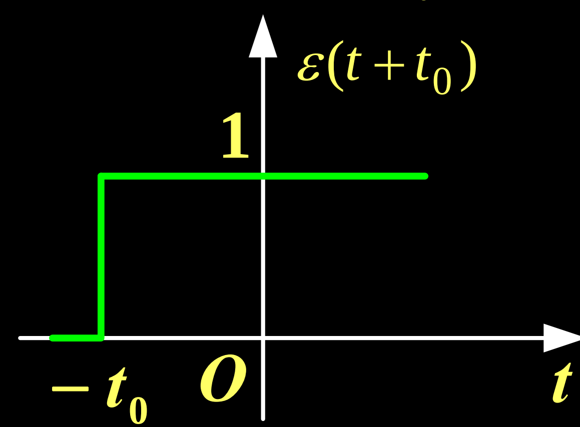
2. 延迟单位阶跃信号



$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0 \\ 1 & t>t_0\end{cases},\quad t_0>0$$



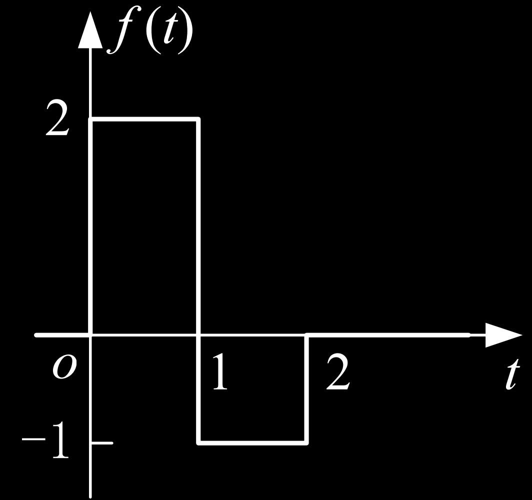
$$\varepsilon(t+t_0)=\begin{cases}0 & t<-t_0 \\ 1 & t>-t_0\end{cases},\quad t_0>0$$



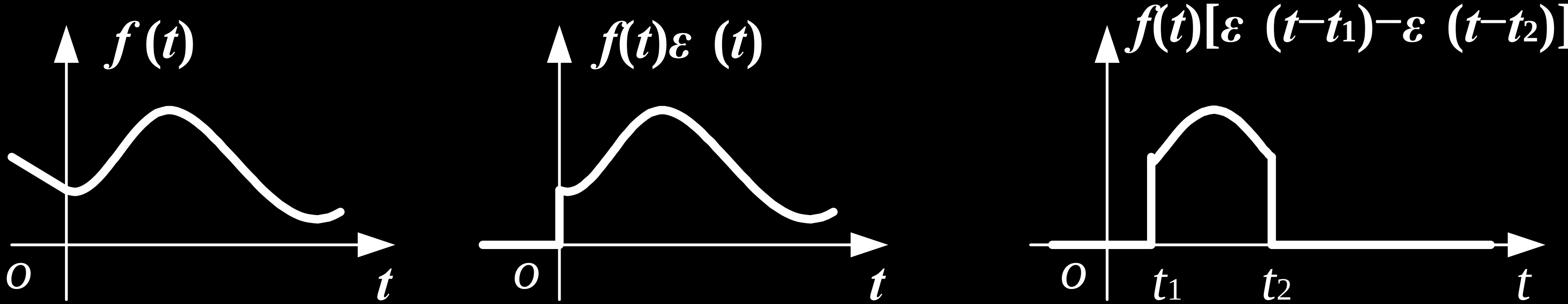
3. 阶跃函数的性质

（1）可以方便地表示某些信号

$$f(t) = 2\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t-2)$$



（2）用阶跃函数表示信号的作用区间



(a) (b) (c)

（3）积分 $\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = t\varepsilon(t)$

二. 单位冲激函数

单位冲激函数是个奇异函数，它是对强度极大，作用时间极短一种物理量的理想化模型。

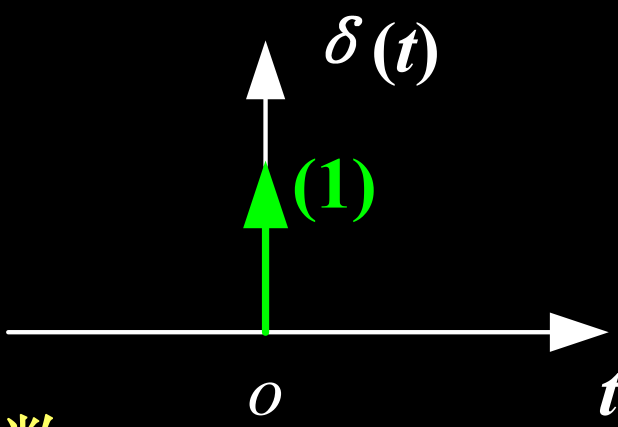
- 狄拉克(Dirac)定义
- 函数序列定义 $\delta(t)$
- 冲激函数与阶跃函数关系
- 冲激函数的性质

1. 狄拉克 (Dirac) 定义

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$

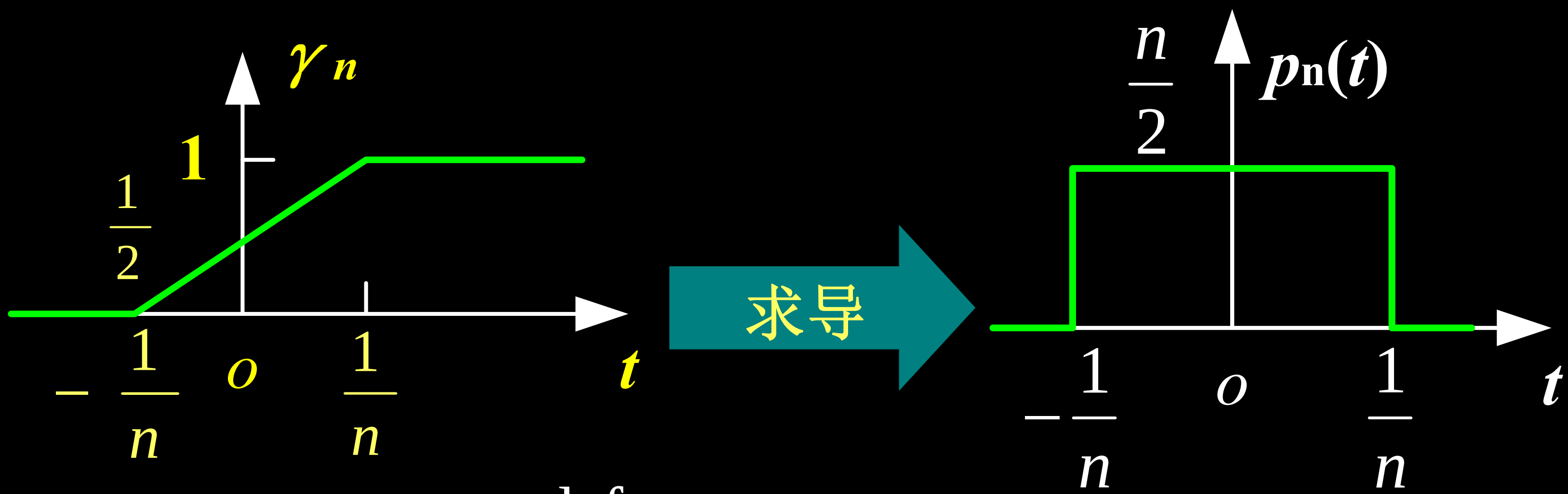
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\,\mathrm{d}t$$

- 函数值只在$t = 0$时不为零；
- 积分面积为1；
- $t = 0$ 时，$\delta(t) \to \infty$，为无界函数。



2.函数序列定义 $\delta(t)$

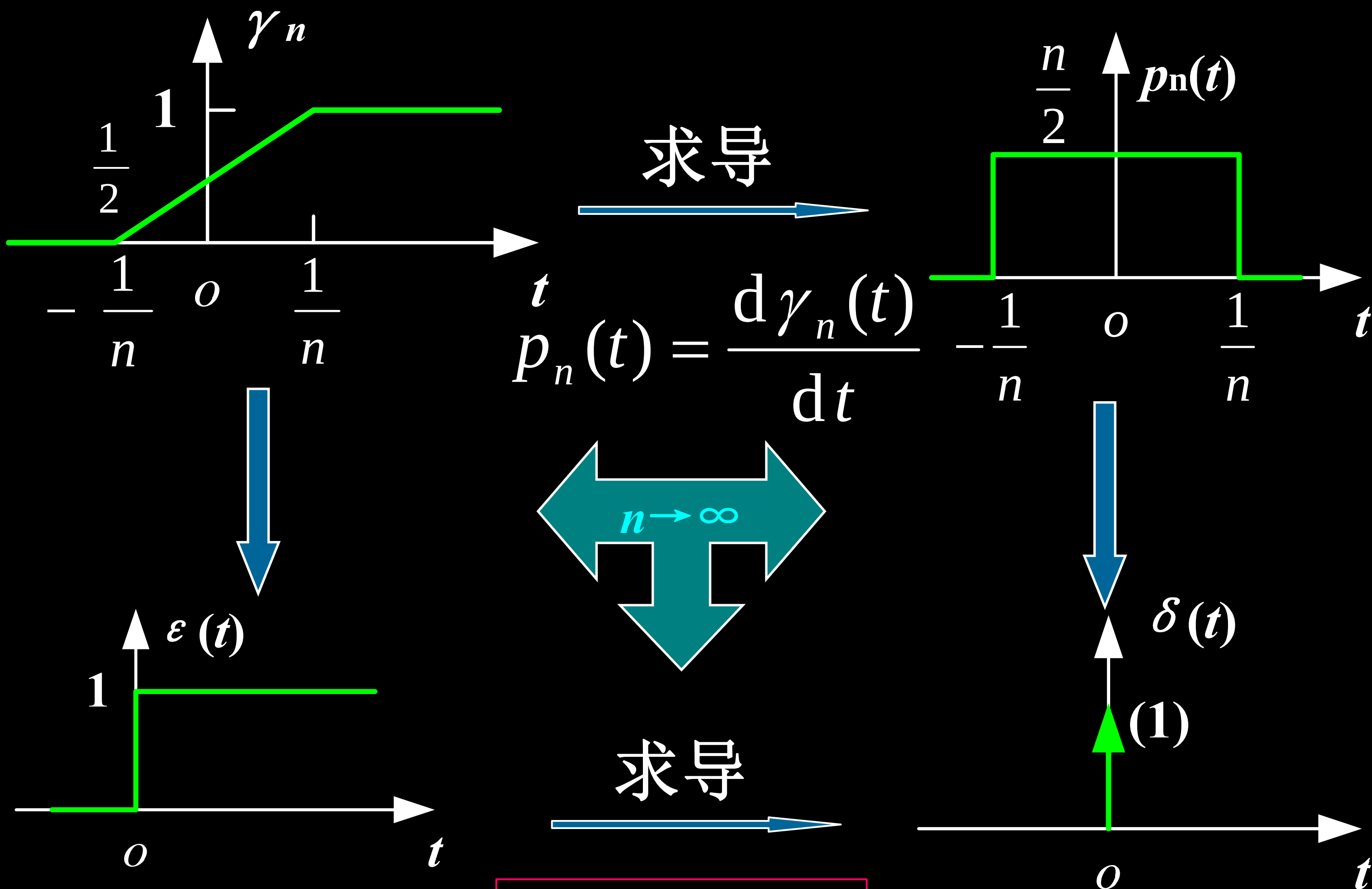
对 $\gamma_n(t)$求导得到如图所示的矩形脉冲$p_n(t)$ 。



$$\delta(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} p_n(t)$$

高度无穷大，宽度无穷小，面积为1的对称窄脉冲。

3. $\varepsilon(t)$ 与 $\delta(t)$的关系

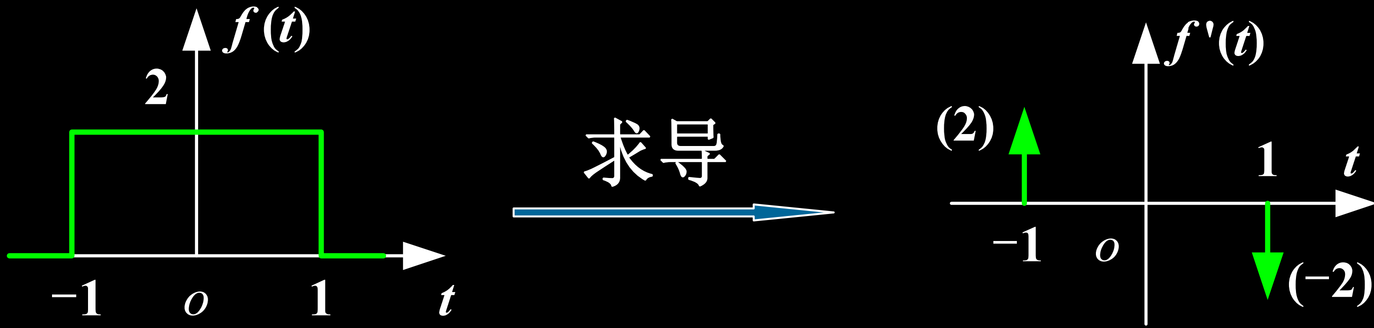


$$p_n(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma_n(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

$$\boxed{\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}}$$

引入冲激函数之后，间断点的导数也存在



$$f(t) = 2\,\varepsilon(t+1) - 2\,\varepsilon(t-1) \qquad f'(t) = 2\,\delta(t+1) - 2\,\delta(t-1)$$

三. 冲激函数的性质

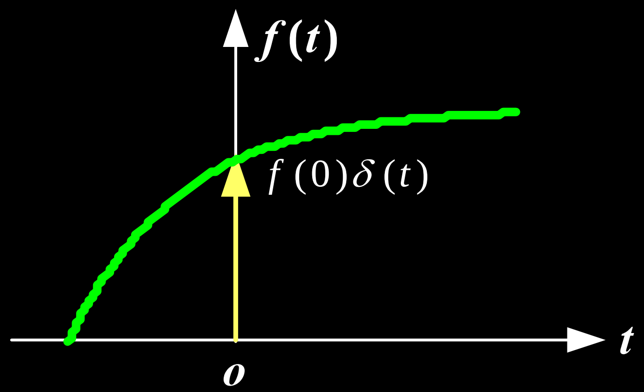
- 取样性
- 冲激偶
- 尺度变换
- 复合函数形式的冲激函数

1. 取样性(筛选性)

如果$f(t)$在$t = 0$处连续，且处处有界，则有

$$\delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0)$$



证明

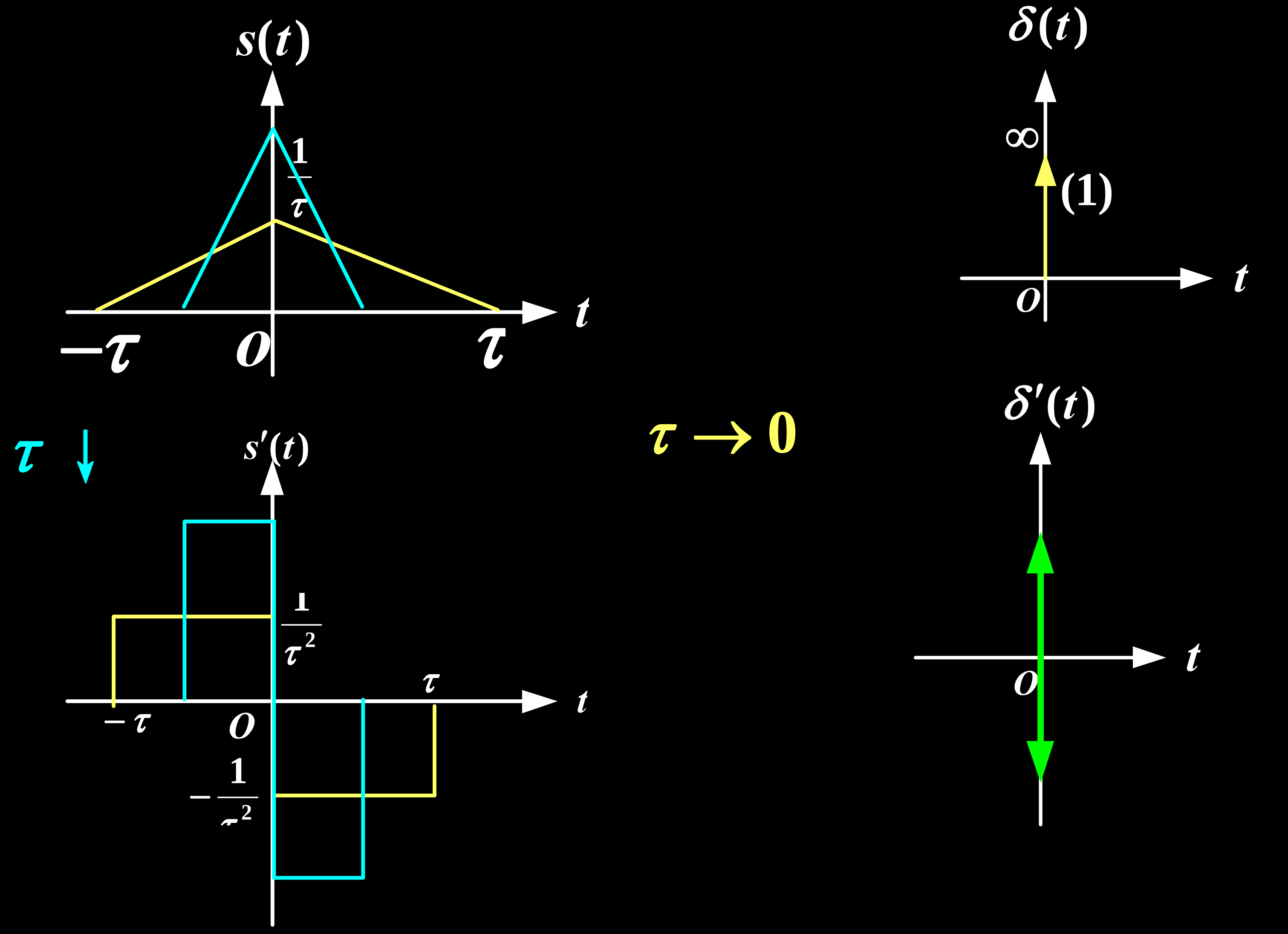
对于平移情况：

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

举例

2. 冲激偶



$s(t)$
$\frac{1}{\tau}$
t
$-\tau$
O
τ
$\tau \downarrow$
$s'(t)$
$\frac{1}{\tau^2}$
τ
t
$-\tau$
O
$-\frac{1}{\tau^2}$
$\tau \to 0$
$\delta(t)$
∞
(1)
t
O
$\delta'(t)$
t
O

冲激偶的性质

① $f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$ 证明

② $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$ 证明

$\delta^{(n)}(t)$的定义： $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$

$\delta'(t)$的平移： $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$

③ $\int_{-\infty}^{t}\delta'(t)\,\mathrm{d}t = \delta(t)$

例 $\int_{-\infty}^{\infty}(t-2)^2\delta'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-2)^2]\Big|_{t=0} = -2(t-2)\Big|_{t=0} = 4$

3. 对$\delta(t)$的尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

证明 举例

$$\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t) \qquad \delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$$

推论:

(1) $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$ $\delta(2t) = 0.5\,\delta(t)$

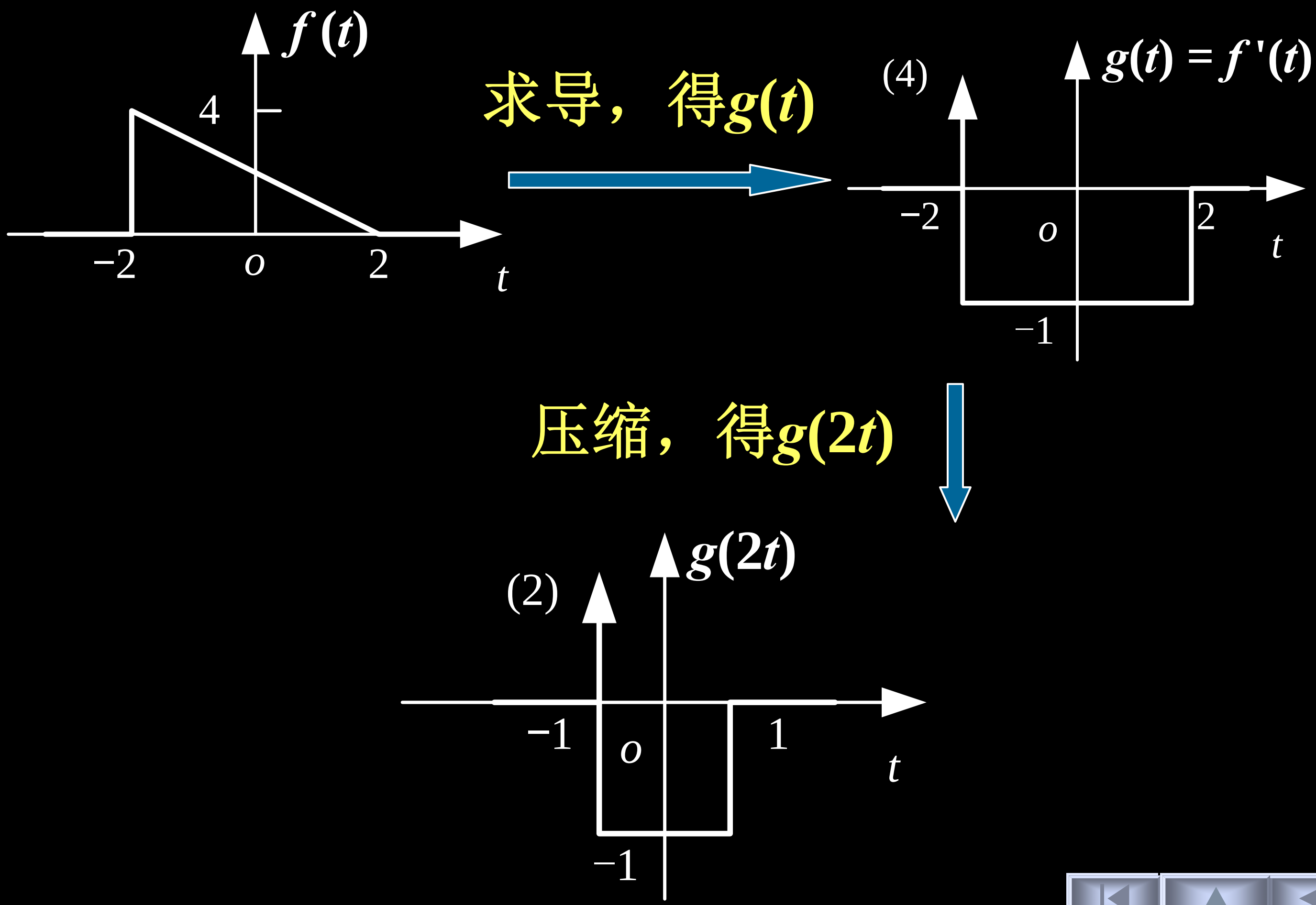
(2) 当$a = -1$时 $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$

所以， $\delta(-t) = \delta(t)$ 为偶函数，

$\delta'(-t) = -\delta'(t)$为奇函数

举例

已知$f(t)$，画出$g(t) = f'(t)$和 $g(2t)$

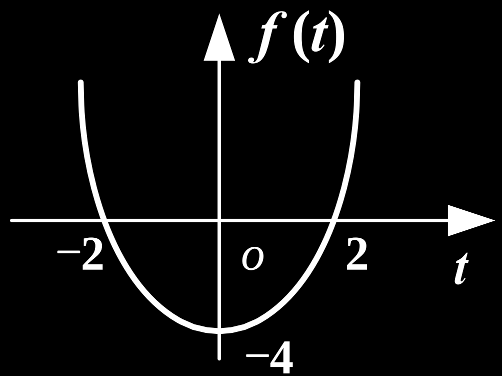


4. 复合函数形式的冲激函数

实际中有时会遇到形如 δ [*f*(*t*)]的冲激函数，其中*f*(*t*)是普通函数。并且*f*(*t*) = 0有*n*个互不相等的实根 t_i (*i*=1，2，…，*n*)

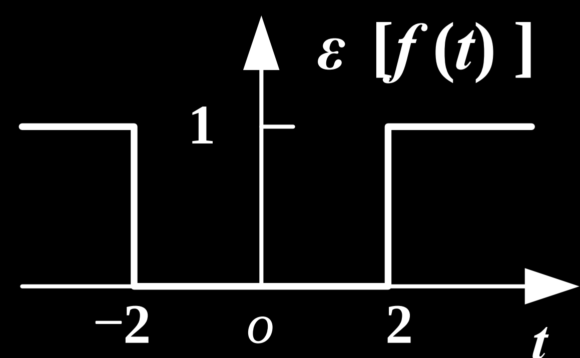
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\}=\delta[f(t)]\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\delta[f(t)]=\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\}$$



ε [*f*(*t*)]图示说明：　例*f*(*t*)= $t^2 – 4$

$\varepsilon(t^2 – 4)=1 – \varepsilon(t+2)+ \varepsilon(t – 2)$



$\varepsilon(t^2-4)=1-\varepsilon(t+2)+\varepsilon(t-2)$

$$\delta[t^2-4]=\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon(t^2-4)]=\frac{1}{2t}[-\delta(t+2)+\delta(t-2)]$$

$$=\frac{1}{2\times 2}\delta(t+2)+\frac{1}{2\times 2}\delta(t-2)=\frac{1}{4}\delta(t+2)+\frac{1}{4}\delta(t-2)$$

一般地， $$\boxed{\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)}$$

这表明， $\delta[f(t)]$是位于各t_i处，强度为$\frac{1}{|f'(t_i)|}$的n个冲激函数构成的冲激函数序列。

$$\delta(4t^2-1)=\frac{1}{4}\delta(t+\frac{1}{2})+\frac{1}{4}\delta(t-\frac{1}{2})$$

注意：如果$f(t)=0$有重根， $\delta[f(t)]$无意义。

#

冲激函数的性质总结

（1）取样性

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

（2）奇偶性

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

（3）比例性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

（4）微积分性质

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t)$$

（5）冲激偶

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = \delta(t)$$

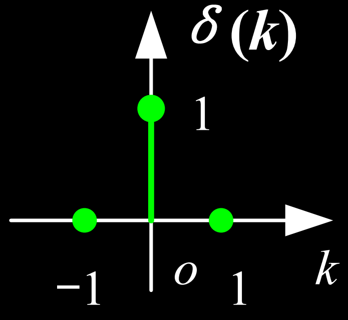
$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

四. 序列 $\delta(k)$和 $\varepsilon(k)$

这两个序列是普通序列。

1. 单位(样值)序列 $\delta(k)$



•定义

$$\delta(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

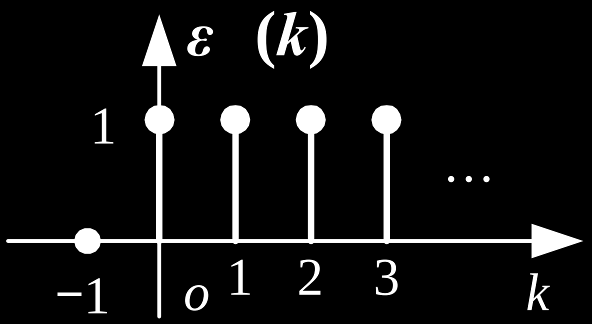
•取样性质：$f(k)\,\delta(k) = f(0)\,\delta(k)$

$$f(k)\,\delta(k-k_0) = f(k_0)\,\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

2. 单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$ 定义

• 定义 $\varepsilon(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$



• $\varepsilon(k)$与 $\delta(k)$的关系

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i)$$

或

$$\varepsilon(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j)$$

$$\varepsilon(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \ldots$$

取样性质举例

$$\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t)=\sin(\frac{\pi}{4})\delta(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-3}^{0}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t-1)\,\mathrm{d}t=? \quad \mathbf{0} \qquad \int_{-1}^{9}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t=? \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-1}^{1}2\tau\delta(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau=? \quad \begin{cases}2t, & -1<t<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad \int_{-1}^{t}(\tau-1)^2\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=? \quad \boldsymbol{\varepsilon(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\right]=\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)=\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

冲激信号尺度变换举例

例1　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(5t)(t-2)^2\mathrm{d}t=?$　$\dfrac{4}{5}$

例2　已知信号 $f(5-2t)$ 的波形，请画出 $f(t)$ 的波形。