第三章 离散系统的时域分析

§3.1 LTI离散系统的响应

注意离散系统与连续系统分析方法上的联系、区别、对比，与连续系统有并行的相似性。

- 差分与差分方程
- 差分方程的经典解
- 零输入响应和零状态响应

一、差分与差分方程

设有序列$f(k)$，则

…，$f(k+2)$，$f(k+1)$，…，$f(k-1)$，$f(k-2)$…等称为$f(\mathrm{k})$的移位序列。

仿照微分运算，定义离散信号的差分运算。

1. 差分运算

$$\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f(k)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t)-f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

离散信号的变化率有两种表示形式：

$$\frac{\Delta f(k)}{\Delta k}=\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k} \qquad \frac{\nabla f(k)}{\nabla k}=\frac{f(k)-f(k-1)}{k-(k-1)}$$

定义差分

（1）一阶前向差分定义：$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

（2）一阶后向差分定义：$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

式中，Δ和∇称为差分算子，无原则区别。本书主要用后向差分，简称为**差分**。

（3）差分的线性性质：

$$\nabla[af_1(k) + bf_2(k)] = a\nabla f_1(k) + b\nabla f_2(k)$$

（4）二阶差分定义：

$$\nabla^2 f(k) = \nabla[\nabla f(k)] = \nabla[f(k) - f(k-1)] = \nabla f(k) - \nabla f(k-1)$$

$$= f(k) - f(k-1) - [f(k-1) - f(k-2)] = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

（5）m阶差分：

$$\nabla^m f(k) = f(k) + b_1 f(k-1) + \ldots + b_m f(k-m)$$

2. 差分方程

包含未知序列y(k)及其各阶差分的方程式称为**差分方程**。

将差分展开为移位序列，得一般形式

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \ldots + a_0 y(k-n) = b_m f(k) + \ldots + b_0 f(k-m)$$

差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。

例 差分方程的迭代解法

一般不易得到解析形式的(闭合)解。

二、差分方程的经典解

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \ldots + a_0 y(k-n) = b_m f(k) + \ldots + b_0 f(k-m)$$

与微分方程经典解类似，$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$

1. 齐次解：

齐次方程

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \ldots + a_0 y(k-n) = 0$$

特征方程

$$1 + a_{n-1}\lambda^{-1} + \ldots + a_0\lambda^{-n} = 0\ ,$$

即

$$\lambda^{n} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

其根 λ_i(i = 1，2，…，n)称为差分方程的特征根。

根据特征根，齐次解的两种情况

1. 无重根　　$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$　　n阶方程

$$y_h(k) = C_1(\lambda_1)^k + C_2(\lambda_2)^k + \cdots + C_n(\lambda_n)^k$$

例

2. 有重根　　特征根 λ 为r重根时

$$y_h(k) = (C_{r-1}k^{r-1} + C_{r-2}k^{r-2} + \cdots + C_1 k + C_0)\lambda^k$$

例

2. 特解$y_p(k)$:

特解的形式与激励的形式类似 例

激励$f(k)$	响应$y(k)$的特解$y_p(k)$
F(常数)	P(常数)
k^m	$P_m k^m + P_{m-1}k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0$(特征根均不为0） $k^r(P_m k^m + P_{m-1}k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0)$(有$r$重为0的特征根）
a^k	Pa^k(a不等于特征根） （$P_1 k + P_0)a^k$(a等于特征单根） （$P_r k^r + P_{r-1}k^{r-1} + \cdots + P_0)a^k$($a$等于$r$重特征根）
$\cos(\beta k)$ $\sin(\beta k)$	$P_1\cos(\beta k) + P_2\sin(\beta k)$(特征根不等于 $e^{\pm j\beta}$)

三、零输入响应和零状态响应

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$$

1. 零输入响应：输入为零，差分方程为齐次解

齐次解形式： $C(\lambda)^k$

C由初始状态定（相当于0_-的条件）

2. 零状态响应：初始状态为0，即

$$y_{zs}(-1) = y_{zs}(-2) = \ldots = 0$$

例1 例2

求解方法
- 经典法：齐次解+特解
- 卷积法

差分方程迭代解举例

例：若描述某系统的差分方程为

$$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = f(k)$$

已知初始条件$y(0)=0, y(1)=2$，激励$f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求$y(k)$。

解：$y(k) = -3y(k-1) - 2y(k-2) + f(k)$

k=2 $y(2) = -3y(1) - 2y(0) + f(2) = -2$

k=3 $y(3) = -3y(2) - 2y(1) + f(3) = 10$

k=4 $y(4) = -3y(3) - 2y(2) + f(4) = -10$

……

差分方程齐次解单根例

求解二阶差分方程$y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = 0$
已知$y(0) = 2$， $y(1) = 1$，求$y(k)$ 。

解：特征方程 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

特征根 $\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = 3$

齐次解 $y(k) = C_1(2)^k + C_2(3)^k$

定C_1， C_2

$k = 0 \quad y(0) = C_1 + C_2 = 2$

$k = 1 \quad y(1) = 2C_1 + 3C_2 = 1$

解出 $C_1 = 5,\ C_2 = -3$ $y(k) = 5(2)^k - 3(3)^k$

差分方程齐次解重根例

求差分方程y(k) + 6y(k – 1) + 12y(k – 2) +8y(k – 3) = 0 的解。

解：特征方程 $\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8=0 \qquad (\lambda+2)^3=0$

三重特征根 $\lambda_{1,2,3}=-2$

齐次解 $y(k)=(C_2k^2+C_1k+C_0)(-2)^k$

由初始条件定C_1，C_2，C_3

差分方程全解举例

例：系统方程 $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$

已知初始条件$y(0)=0$，$y(1)=-1$；激励$f(k)=2^k$，$k\geqslant 0$。

求方程的全解。

解：特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$

可解得特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，其齐次解

$$y_h(k)=(C_1k+C_2)(-2)^k$$

特解为 $y_p(k)=P(2)^k$，$k\geqslant 0$

代入差分方程得 $P(2)^k+4P(2)^{k-1}+4P(2)^{k-2}=f(k)=2^k$，

解得 $P=1/4$

所以得特解：$y_p(k)=2^{k-2}$，$k\geqslant 0$

故全解为 $y(k)=y_h+y_p=(C_1k+C_2)(-2)^k+2^{k-2}$，$k\geqslant 0$

代入初始条件解得 $C_1=1$，$C_2=-1/4$

零输入响应举例

系统的方程 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)+f(k-1)$

$$f(k)=(-2)^k\varepsilon(k) \qquad y(0)=y(1)=0$$

求系统的零输入响应。

解： 零输入响应$y_{zi}(k)$，即当$f(k)=0$时的解。

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=0$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \qquad \lambda_1=-2, \qquad \lambda_2=-1$$

$$y_{zi}(k)=C_1(-2)^k+C_2(-1)^k$$

求初始状态

题中$y(0)=y(1)=0$ ，是激励加上以后的，不能说明状态为0，需迭代求出 $y(-1)$， $y(-2)$ 。

$$n=1 \quad y(1)+3y(0)+2y(-1)=(-2)\varepsilon(1)+(-2)^0\varepsilon(0)$$

$$0+0+2y(-1)=(-2)+1=-1$$

$$\text{所以} y(-1)=-\frac{1}{2}$$

$$n=0 \quad y(0)+3y(-1)+2y(-2)=(-2)^0\varepsilon(0)+(-2)^{-1}\varepsilon(-1)$$

$$0+3y(-1)+2y(-2)=1$$

$$\text{所以} y(-2)=\frac{5}{4}$$

由初始状态确定C_1，C_2

以$y(-1), y(-2)$代入方程

$$\begin{cases} y_{zi}(-1) = C_1(-2)^{-1} + C_2(-1)^{-1} = -\dfrac{1}{2} \\ y_{zi}(-2) = C_1(-2)^{-2} + C_2(-1)^{-2} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_{zi}(k) = -3(-2)^k + 2(-1)^k$$

零输入零状态举例

例： 系统方程为 $y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = f(k)$

已知激励$f(k)=2^k$ ，$k\geqslant 0$，初始状态$y(-1)=0$, $y(-2)=1/2$,

求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

解： （1）$y_{zi}(k)$满足方程

$$y_{zi}(k) + 3y_{zi}(k-1)+ 2y_{zi}(k-2)= 0$$

$$y_{zi}(-1)= y(-1)= 0,\ y_{zi}(-2) = y(-2) = 1/2$$

首先递推求出初始值$y_{zi}(0)$, $y_{zi}(1)$,

$$y_{zi}(k)= -3y_{zi}(k-1) -2y_{zi}(k-2)$$

$$y_{zi}(0)= -3y_{zi}(-1) -2y_{zi}(-2)= -1$$

$$y_{zi}(1)= -3y_{zi}(0) -2y_{zi}(-1)=3$$

特征根为 $\lambda_1= -1$， $\lambda_2= -2$

解为 $y_{zi}(k)=C_{zi1}(-1)^k+C_{zi2}(-2)^k$

将初始值代入 并解得 $C_{zi1}=1$, $C_{zi2}=-2$

$$y_{zi}(k)=(-1)^k-2(-2)^k \quad , k\geqslant 0$$

（2）零状态响应$y_{zs}(k)$ 满足

$$y_{zs}(k)+3y_{zs}(k-1)+2y_{zs}(k-2)=f(k)$$

$$y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=0$$

递推求初始值 $y_{zs}(0)$, $y_{zs}(1)$,

$$y_{zs}(k)=-3y_{zs}(k-1)-2y_{zs}(k-2)+2^k \ , k\geqslant 0$$

$$y_{zs}(0)=-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)+1=1$$

$$y_{zs}(1)=-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)+2=-1$$

分别求出齐次解和特解，得

$$y_{zs}(k) = C_{zs1}(-1)^k + C_{zs2}(-2)^k + y_p(k)$$
$$= C_{zs1}(-1)^k + C_{zs2}(-2)^k + (1/3)2^k$$

代入初始值求得

$$C_{zs1} = -1/3 \ , C_{zs2}=1$$
$$y_{zs}(k) = -(-1)^k/3 + (-2)^k + (1/3)2^k \ , k \geqslant 0$$