随机事件及其概率

随机实验事件：E（可重复，偶然性，结果在预期范围）

基本事件集合：（ω1，ω2，ω3…）

样本空间：Ω

随机事件本身Ω必然发生，φ不含任何样本点

频率：f(A)=A 发生次数/总次数 n（n->∞）

概率：

非负性：0<=P(A)<=1

规范性：P(Ω 全集)=1

可列可加性：P(事件合集)=∑P(Ai)（事件两两**互不相容**，分割全集）

P(φ)=0

对立事件：A 并 B=Ω，A 交 B=φ（**P(A)=1-P(B)**）

概率加法：P(A 并 B)=P(A)+P(B)-P(A 交 B)

P(A 并 B 并 C)=P(A)+P(B)+P(C)- P(A 交 B（A,B,C 任意选两）)+P(A 交 B 交 C)

……

古典概率模型：样本空间中有限多个基本事件发生概率等可能

条件概率：

Monty Hall Problem 山羊问题：P(换+win)=2/3, P(留+win)=1/3

P(A|B)=P(AB)/P(B) （P(B)>0）

P(B)=P(A)P(B|A) / P(A|B)

P(B)=∑P(Ai) P(B |Ai)（Ai 为样本空间划分）

贝叶斯：**P(Ai |B)=P(Ai)P(B| Ai) / ∑P(Ai)P(B |Ai)**

事件独立性：

定义：P(AB)=P(A)P(B)（A，B 相互独立 Ω φ 与所有事件**相互独立**）

1. P(A|B)=P(A)，P(B|A)=P(B)（互不影响）
2. **{非 A，B}，{A，非 B}，{非 A,非 B}相互独立**
3. A1, A2…An 相互独立 等价于 非 A1，A2，…非 An 相互独立(任意两个取非事件)

随机变量及其分布

随机变量：对于每个{ω}，有唯一实数 X(ω)与之对应（ω->实数单向)，X 称为随机变量

分布函数：**F(x)**=P(X ≤x)（x 属于 R）(F(x)概率累加)

单调不减，右连续(跳跃点**左空右实** **F(x+0)=F(x))，F(-∞)=0，F(∞)=1**

P(X≤ b)=F(b)，P(a< X≤ b)=F(b)-F(a)，P(X> b)=1- F(b)，P(X< B)=F(b-0)

离散型：取值仅有有限个，分布函数为阶梯型，**离散型数列的所有和为 1**

分布列：出现某种情况的概率（可能为 0）

F(x)=P(X≤x)=∑pk(k=1,2…)

二项和公式：$(a+b)^n = \Sigma\left(C_n^k a^k * b^{(n-k)}\right)$

离散随机变量分布：二项，泊松，负二项，超几何，几何分布

二项分布：$\mathbf{X\sim b(n,p)}$: $\boldsymbol{P(x=k)=C_n^k P^k (1-p)^{n-k}}$

(每次实验出现结果有限个，相互不影响)

x 取 k 的概率为：

n 重伯努利实验成功次数：X~B（n ，p）(p=P(A))

最可能成功次数 X：(n+1)*p 为整数 X=(n+1)*p 或(n+1)*p-1，非整数 X=(n+1)*p

泊松定理：$\mathbf{X\sim P(\lambda)}: P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$当 n 非常大时（n≥100,np≤10），

二项分布的极限分布$(\boldsymbol{np}\to\boldsymbol{\lambda})$

几何分布：$\mathbf{X\sim G(p)}: P(x=k)=(1-p)^{k-1}p$事件成功时已做实验个数

超几何分布： $\mathrm{X\sim H(k,N,M,n)}: \mathrm{p(x=k)}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

负二项分布：$\mathrm{X\sim Nb(r,p)}: \mathrm{P(X=k)}=C_{k-1}^{r-1}P^r(1-p)^{k-r}$

第 r 次发生已进行的实验次数，最后一次必然为 p

连续随机变量：

分布函数：$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$（**非负可积**）

1. 非降性：F(x)为不减函数
2. 有界性：$0\le \mathrm{F(x)}\le 1; \mathrm{F}(-\infty)=0;\ \mathrm{F}(+\infty)=1$
3. 右连续性：$\mathrm{F(x)=F(x+0)}$

概率密度：随机变量 X 的分布函数$F(x)$，如果存在非负可积函数 f(x)，使得对任意实数 x，有$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$，f(x)为 X 的概率密度

1. 非负性：$\mathrm{F(x)>0\ (x\in(-\infty,+\infty))}$
2. 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$

均匀分布：$\boldsymbol{X\sim U(a,b)}: f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}(a\le x\le b\\ 0\end{cases}$ ，F(x)=(x-a)/(b-a) （x~[a, b]）

指数分布：$\boldsymbol{X\sim e(\lambda)}: f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\ \ (X>0)\\ \ \ 0\ (其它)\end{cases}$，F(x)=1-$e^{-\lambda x}$（x>0）

无记忆性：$\mathrm{P(X>n+k\,|\,X>n)=P(X>k)}$

正态分布： $\boldsymbol{X\sim N(\mu,\sigma^2)}: f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$\sigma$形状 μ对称轴

标准正态分布：$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$）分布函数：$\boldsymbol{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{x^2}{2}}dx}$

对称性，**分布函数=面积累积**

P（$\mathrm{X>x_a}$）$=\alpha$ $\mathrm{x_a}$为随机变量上侧α分位点

随机变量函数分布：

已知离散随机变量 X 的分布律，求 Y=g(X)分布律（随机事件等价性）

已知连续型随机变量 f(x)概率密度，求 Y=g(X)概率密度

求出分布函数$\boldsymbol{F_Y(y)=P(g(x)\le y)}=\int_{\{\mathbf{x|g(x)\le y}\}}\mathbf{f(x)\,dx}$ ，**求导**得出概率密度

指数函数$Y=X^n$分奇偶$Y=X^n$开 n 次根时分**奇偶（寻找断点）**

$$\begin{cases} 0\ (\text{为偶函数且} y<0) \\ FY(y)=P\left(-y^{\frac{1}{n}}\le x\le y^{\frac{1}{n}}\right)\ (\text{其它}) \end{cases}$$

$\begin{cases} f_{min}(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z) \\ f_{max}(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z) \end{cases}$，n 为样本自由度

min($\mathrm{P}(\min\{X_1^n\}=N\le z)=1-\mathrm{P}(N>z)$利用对立事件概率性质以及联合分布函数求出

多维随机向量

联合分布函数：$\mathbf{F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)}$（，=&& 随机变量落入方格**概率**≥0）

1. $p_{ij}\ge 0\ (i,j=0,1\ldots)$，$\mathrm{f(x,y)}\ge 0$
2. $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=1$

$F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0\quad F(+\infty,+\infty)=1$

二维随机向量：$\boldsymbol{F(x,y)}=\sum_{y_i\le y}^{\infty}\sum_{x_i\le x}^{\infty}p_{ij}(\text{离散型})=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f(u,v)\,dudv}$(***连续型***
)

边缘分布：$F_X(x)=F(x,+\infty)$，$p_{i.}$，$p_{.j}$

边缘密度：$\begin{cases} \mathrm{f_X}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \\ \mathrm{f_Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx \end{cases}$

离散型：$P(X=x_i)=p_{i.}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$（i 不变，遍历 j 所有取值，等比数列求和）

连续型：$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx$（**注意定义域**）

二维正态的边缘分布为一维正态分布
三项分布的边缘分布为二项分布

条件分布：$\mathrm{P}(Y\le y|X=x)=\frac{P(X=x|Y\le y)}{P(X=x)}=\frac{P_{ij}}{p_{i.}}=\frac{\text{联合}}{\text{边缘}}$（分母为 0 时对分布函数取极限）

向量独立：$\mathrm{F(x,y)}=F_X(x)*F_Y(y)$（利用公式证明独立性，找反例证明不独立）
相互独立的事件的条件与无条件分布相同：$\mathbf{F}_{\boldsymbol{X|Y}}\boldsymbol{(x|y)}=\boldsymbol{F_X(x)}$
分布加法：
边缘分布：$F_{x_1,x_2}(x_1,x_2)=F_{x_1}(x_1)+F_{x_2}(x_2)$
独立性：$\mathrm{F}([\mathrm{x_1},\mathrm{x_2},\cdots\mathrm{x_n}],[\mathrm{y_1},y_2,\cdots y_\mathrm{n}])=F_X([\mathrm{x_1},\mathrm{x_2},\cdots\mathrm{x_n}])*F_Y([\mathrm{y_1},y_2,\cdots y_\mathrm{n}])$
泊松分布可加性
正态分布可加性：

1. $\mathbf{X+Y\sim N}\ (\boldsymbol{\mu_1+\mu_2,{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2})$
2. $\mathbf{X\sim N}\ (\boldsymbol{\mu,\sigma^2})\rightarrow\mathbf{-X\sim N}\ (\boldsymbol{-\mu,\sigma^2})$
3. $\mathbf{X\sim N}\ (\mathbf{0,1})\rightarrow\mathbf{-X\sim N}\ (\mathbf{0,1})$

Gamma 分布：$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{x}^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx$

$\Gamma(\alpha)$的密度函数 $\Gamma(\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{x}^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\mathrm{x}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$关于参数$\alpha$具有可加性

Tips：$\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}}$，$\boldsymbol{\Gamma(n)=(n-1)}!$

随机变量数字特性：

X 分布列：$p(x=x_i)=p_i$

若$\sum_{1=0}^{n}|x_i|p_i \,/\, \int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\,dx$绝对收敛，数学期望$Ex=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}x_ip_i & \textit{离散随机变量}\\ \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx & \textit{连续随机变量}\end{cases}$

随机变量函数：数学期望$Eg(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}g(x_i)p_i & \textit{离散随机变量函数}\\ \int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\,dx & \textit{连续随机变量函数}\end{cases}$

1. $Ec=c$
2. $E(ax+b)=aEx+b$
3. $E(X+Y)=EX+EY$
4. $E(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_iEX_i$
5. $E\frac{X}{Y}=EXEY^{-1}$，$EXY=EXEY$（XY 相互独立）
6. $\mathrm{Eg(x)H(Y)=Eg(x)EH(Y)}$

方差：$Dx=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}(x_k-Ex)^2P_k\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-Ex)^2f(x)\,dx\end{cases}=\mathrm{Ex^2-Ex}$（描述函数的变化程度）

1. $\mathrm{Dc}=0$
2. $\mathrm{D(ax+b)=a^2}D(x)$
3. $D(x+y)=Dx+Dy$（x，y 独立）

切比雪夫不等式：$\mathrm{P(|x-\mu|>\varepsilon)\le\frac{Dx}{\varepsilon^2}}$

协方差：$\mathrm{Cov(X,Y)=E(X-Ex)(Y-Ey)=EXY-EXEY}$

1. $\mathrm{Cov(X,X)}=Dx$
2. $\mathrm{Cov(aX,Y)}=a\mathrm{Cov(X,Y)}$
3. $\mathrm{Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)}$
4. $\mathrm{D(X\pm Y)=DX+DY\pm Cov(X,Y)}$

相关系数：$\mathrm{P_{xy}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DxDy}}$（$\left|\mathrm{P_{xy}}\right|\le 1$，若$\mathrm{P_{xy}}=0$不相关，$\mathrm{P_{xy}}=1$线性相关）

X，Y 独立（$\mathrm{f(x,y)=f_x}(x)*f_y(y)$）->不相关$\mathrm{P_{xy}}=0$，反之不正确

$$\begin{cases} X\sim(0,1): EX=p\ Dx=p(1-p)\ \text{零一分布} \\ X\sim b(x,p): \boldsymbol{Ex=np\ Dx=np(1-p)}\left(P(x=k)=C_n^k P^k(1-p)^{n-k}\right)\text{二项} \\ X\sim P(\lambda): \boldsymbol{Ex=\lambda\ \ Dx=\lambda}\left(P(x=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\text{泊松} \\ X\sim U(a,b): \boldsymbol{Ex=\dfrac{a+b}{2}\ \ Dx=\dfrac{(a-b)^2}{12}}\ \left(f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & (a\le x\le b) \\ 0\end{cases}\right.\text{均匀} \\ X\sim N(\mu,\sigma^2): \boldsymbol{Ex=\mu\ Dx=\sigma^2}\left(f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)\text{正态} \\ X\sim e(\lambda): \boldsymbol{Ex=\dfrac{1}{\lambda}\ Dx=\dfrac{1}{\lambda^2}}\ \left(f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda} & (X>0) \\ 0\end{cases}\right)\text{指数} \end{cases}$$

极限定理：

大数法则：$\bar{x}_n -\overset{P}{-}-> E\bar{x}_n$（数无限多时，X 算术平均=期望的算术平均）

大数法则（X_i为相互独立随机变量序列）：

切比雪夫：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}EX_i\right|\ge\varepsilon\right)=0$（和的平均收敛期望和平均）

辛钦：$\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}X_i-\mu\right|<\varepsilon)=1$（X 和的平均收敛于有限数学期望$\mu=EX_n$）

伯努利：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n}-P\right|<\varepsilon\right)=1$（实际频率收敛于概率）

中心极限：

林德伯格：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right)=\phi(x)$（独立同分布）

拉普拉斯：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\le x\right)=\phi(x)$（二项分布）

独立同分布与二项分布极限均为标准正态分布

标准正态分布上位点：$u_{0.025}=1.96$（$1-\phi(x)<0.025$ x=1.96）

抽样分布：

简单随机抽样：来自样本 X，独立同分布且具有相同分布函数($X_1,X_2\dots X_n$)

统计量：不含未知量的 n 元连续函数（观察后成为数值）

均值：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，方差：$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$，中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

样本总体：$E\bar{X}=\mu$（期望），$D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}$（方差），$ES_n^2=\sigma^2$

χ^2-分布（$\chi^2\sim\chi^2(n)$）：$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$（$X\sim N(0,1)$，和服从自由度为 n 卡方分布）

可加性（$\chi^2(m)+\chi^2(n)\sim\chi^2(m+n)$），$\chi^2(m)\sim\Gamma(\frac{m}{2},\frac{1}{2})$, $E\chi^2=n$, $D\chi^2=2n$

$t-$分布（$T\sim t(n)$）：$T=\frac{X}{Y/N}$（$X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$）

概率密度为偶函数，收敛于标准正态；上侧分位点α：$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

$F-$分布（$F\sim F(m,n)$）：$F(m,n)=\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$（$X\sim\chi^2(n),Y\sim\chi^2(n)$）

$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$，上侧分位点α：$F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$

正态分布统计量：服从正态分布的简单随机抽样的统计量

1. $U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$，$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$　　2. 均值与方差独立

3. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$，　$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

参数估计：

样本中含未知参数θ，用样本估计θ

估计值：不显示依赖θ的统计量$\hat{\theta}(x_1,x_2\dots x_n)$，观察样本后变为具体值

矩估计：

r 阶原点矩：$A_r=a_r(\theta_1,\theta_2\dots\theta_n)=EX^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^n$

二阶中心矩：$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

Tips：$\sqrt{\hat{\theta}^2}=\hat{\theta}$（使用连续函数$g(k)=\sqrt{k}$）

最大似然估计：

估计值：$L(\theta_1\theta_2\dots\theta_n)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i;\theta_1\theta_2\dots\theta_k)$（参数$\theta_1\sim\theta_k$的似然方程）

求解方式：似然估计方程 – 取对数 – 求极值（单调函数$g^{\wedge}(\theta)=g(\hat{\theta})$）

无偏性：$E\hat{\theta}(X_1,X_2\dots X_n)=\hat{\theta}$

有效性：$E\hat{\theta}=\hat{\theta}$，若$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$则$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效

Tips：$X\sim U(0,\theta)$，$f_{max}(t)\begin{cases}\frac{nt^{n-1}}{\theta^n} & 0<t<\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$（$\theta=\max\{X_1,X_2\dots X_n\}$）

相合性：$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\hat{\theta}(x_1x_2\dots x_n)-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$

Tips: $E\bar{X}\sim\mu,D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{N},EB_2\sim\sigma^2,ES^2\sim\sigma^2$

区间估计：

$P\left(\hat{\theta}_1(x_1x_2\dots x_n)<\theta<\hat{\theta}_2(x_1x_2\dots x_n)\right)=1-\alpha$

置信区间(置信下限，置信上限)：$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$，置信度：$1-\alpha$

估计置信区间：

1. 构造不依赖于θ的枢轴量$H(x_1x_2\dots x_n;\theta)$
2. $P(a<H(x_1x_2\dots x_n;\theta)<b)=1-\alpha$
3. 根据 a，b 化为等价形式：$P(\hat{\theta}_1(x_1x_2\dots x_n)<\theta<\hat{\theta}_2(x_1x_2\dots x_n)=1-\alpha$
4. $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$为置信区间（注意已知与未知量）

假设检验：

检验步骤：

1. 提出原假设$\mathrm{H_0}$和对立假设$\mathrm{H_1}$
2. 选取合适统计量，$\mathrm{H_0}$成立下统计量分布
3. $P\left(拒绝H_0 \parallel H_0成立\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X_1} \ldots \mathrm{X_n} \epsilon \mathrm{S} \parallel H_0成立) \leq \alpha$（确定拒绝域 S）
4. 样本落入 S 则拒绝，否则接受（拒绝域为小概率事件发生的区间）

检验错误：第一类（错误拒绝H_0，$\mathrm{P} = \alpha$），第二类（错误拒绝$\mathrm{H_0}$）

单正态总体：

双边：$\mathrm{H_0}: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

单右：$\mathrm{H_0}: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

单左：$\mathrm{H_0}: \mu \geq \mu_0, \mathrm{H_1}: \mu < \mu_0$