

第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

§ 4.0 引言

时域分析，以冲激函数为基本信号，任意输入信号可分解为一系列冲激函数之和；而

$$y_{zs}(t) = h(t) * f(t)。$$

本章将以正弦信号和虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 为基本信号，任意输入信号可分解为一系列不同频率的正弦信号或虚指数信号之和。

用于系统分析的独立变量是频率，故称为频域分析。

频域分析

从本章开始由时域转入变换域分析，首先讨论傅里叶变换。傅里叶变换是在傅里叶级数正交函数展开的基础上发展而产生的，这方面的问题也称为傅里叶分析（频域分析）。将信号进行正交分解，即分解为三角函数或复指数函数的组合。

频域分析将时间变量变换成频率变量，揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系，从而导出了信号的频谱、带宽以及滤波、调制等重要概念。

发展历史

- **1822年**，法国数学家傅里叶(J.Fourier,1768-1830)在研究热传导理论时发表了“热的分析理论”，提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了傅里叶级数的理论基础。
- **泊松(Poisson)、高斯(Guass)等人**把这一成果应用到电学中去，得到广泛应用。
- **进入20世纪以后**，谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为正弦函数与傅里叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。
- **在通信与控制系统、天文、生物医学工程（医学图像和信号处理）等领域**的理论研究和工程实际应用中，傅里叶变换法具有很多的优点。
- **“FFT”**快速傅里叶变换为傅里叶分析法赋予了新的生命力。

第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

§ 4.1 信号分解为正交函数

- 矢量正交与正交分解
- 信号正交与正交函数集
- 信号的正交分解

一、矢量正交与正交分解

- 矢量正交的定义：

指矢量 $\mathbf{V}_x = (v_{x1}, v_{x2}, v_{x3})$ 与 $\mathbf{V}_y = (v_{y1}, v_{y2}, v_{y3})$ 的内积为0。
即

$$\mathbf{V}_x \mathbf{V}_y^T = \sum_{i=1}^3 v_{xi} v_{yi} = 0$$

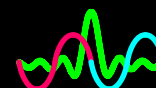
- 正交矢量集：指由两两正交的矢量组成的矢量集合

如三维空间中，以矢量

$\mathbf{v}_x = (2, 0, 0)$ 、 $\mathbf{v}_y = (0, 2, 0)$ 、 $\mathbf{v}_z = (0, 0, 2)$
所组成的集合就是一个正交矢量集。且完备。

矢量 $\mathbf{A} = (2, 5, 8)$ 表示为 $\mathbf{A} = \mathbf{v}_x + 2.5 \mathbf{v}_y + 4 \mathbf{v}_z$

- 矢量空间正交分解的概念可推广到信号空间。



二、信号正交与正交函数集

1. 信号正交:

定义在 (t_1, t_2) 区间的 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) \varphi_2^*(t) dt = 0 \quad (\text{两函数的内积为0})$$

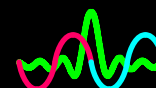
则称 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内**正交**。

2. 正交函数集:

若 n 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 构成一个函数集, 这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间 (t_1, t_2) 的**正交函数集**。



3. 完备正交函数集:

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ 之外, 不存在函数 $\phi(t)(\neq 0)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi^*(t) \varphi_i(t) dt = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则称此函数集为**完备正交函数集**。

例如:

三角函数集 $\{1, \cos(n \Omega t), \sin(n \Omega t), n=1, 2, \dots\}$

虚指数函数集 $\{e^{jn \Omega t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

是两组**典型**的在区间 $(t_0, t_0+T)(T=2\pi/\Omega)$ 上的**完备正交函数集**。

三、信号的正交分解

设有 n 个函数 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 构成一个正交函数空间。将任一函数 $f(t)$ 用这 n 个正交函数的线性组合来近似, 可表示为

$$f(t) \approx C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n$$

如何选择各系数 C_j 使 $f(t)$ 与近似函数之间误差在区间 (t_1, t_2) 内为最小。

通常使误差的方均值(称为**均方误差**)最小。均方误差为

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t)]^2 dt$$

为使上式最小

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t)]^2 dt = 0$$

展开上式中的被积函数，并求导。上式中只有两项不为0，写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_{t_1}^{t_2} [-2C_i f(t) \varphi_i(t) + C_i^2 \varphi_i^2(t)] dt = 0$$

$$\text{即} \quad -2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt + 2C_i \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt = 0$$

所以系数

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt$$

代入，得最小均方误差（推导过程见教材）

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j \right] \geq 0$$

在用正交函数去近似 $f(t)$ 时，所取得项数越多，即 n 越大，则均方误差越小。当 $n \rightarrow \infty$ 时（为完备正交函数集），均方误差为零。此时有

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 K_j$$

上式称为**(Parseval)帕斯瓦尔公式**，表明：在区间 (t_1, t_2) $f(t)$ 所含能量恒等于 $f(t)$ 在完备正交函数集中分解的各正交分量能量的之和。

函数 $f(t)$ 可分解为无穷多项正交函数之和 $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j(t)$

小结

函数 $f(t)$ 可分解为无穷多项正交函数之和

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(t)$$

$$C_i = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt \quad K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt$$

帕斯瓦尔能量公式

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 K_i$$