§4.10 序列的傅里叶分析

将傅里叶级数和傅里叶变换的分析方法应用于离散时间信号称为序列的傅里叶分析 。

- 周期序列的离散傅里叶级数(DFS)
- 非周期序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)
- 四种傅里叶变换的特点和关系

一．周期序列的离散傅里叶级数(DFS)

周期序列记为$f_N(k)$，N为周期，数字角频率为 $\Omega=\dfrac{2\pi}{N}$

由于 $e^{jn\frac{2\pi}{N}k}$ 也是周期为N的序列，即

$$e^{jn\frac{2\pi}{N}k}=e^{j(n+lN)\frac{2\pi}{N}k}\quad(l\text{为整数})$$

则$f_N(k)$可展开为

$$f_N(k)=\sum_{n=0}^{N-1}C_n\,e^{jn\Omega k}=\sum_{n=0}^{N-1}C_n\,e^{jn\frac{2\pi}{N}k}$$

$$C_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_N(k)\,e^{-jn\Omega k}$$

推导

注意：e^{jk}是周期为2π的周期函数。

DFS定义

令 $$F_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega k}$$ **$F_N(n)$**称为离散傅里叶系数。

则 $$f_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_N(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega k}$$

例

称为周期序列的离散傅里叶级数(**Discrete Fourier Series, DFS**)。

令 $W=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}$ 则

$$\boxed{\mathrm{DFS}[f_N(k)]=F_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)W^{nk}}$$

$$\boxed{\mathrm{IDFS}[F_N(n)]=f_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_N(n)W^{-nk}}$$

离散傅里叶级数变换对

注意：**$f_N(k)$**只有***N***个谐波分量。

二、非周期序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)

1. 引出 $N \to \infty$

周期序列$f_N(k)$ ➡ 非周期序列$f(k)$

$F_N(n)$谱线间隔 $\Omega = \frac{2\pi}{N}$ ➡ **0**

离散谱 ➡ 连续谱;

$n\Omega = n\frac{2\pi}{N}$ ➡ θ

定义非周期序列$f(k)$的离散时间傅里叶变换(**Discrete Time Fourier Transform, DTFT**)为

$$\boxed{F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=<N>} f_N(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\theta}}$$

逆变换的导出

$$f_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F_N(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega k}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}F_N(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega k}\frac{2\pi}{N}$$

$N\to\infty$ $\quad n\Omega=n\frac{2\pi}{N}\to\theta$ $\quad \frac{2\pi}{N}\to\mathrm{d}\theta$

$f_N(k)\to f(k)$ $\quad F_N(n)\to F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$

由于n的取值周期为N，2π n/N的周期为2π，所以θ 周期为2π。

$$\boxed{f(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta k}\mathrm{d}\theta}$$

非周期序列的离散时间傅里叶逆变换

表示

$$\mathrm{DTFT}[f(k)] = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\theta}$$

$$\mathrm{IDTFT}[F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})] = f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta k}\,\mathrm{d}\theta$$

说明：

- $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$是 θ 的连续周期函数，周期为2 π 。
- DTFT存在的充分条件是$f(k)$满足绝对可和，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)| < \infty$$

例

三、四种傅里叶变换的特点和关系

类别	时域特点	频域特点
(连续)傅里叶级数(CFS)	连续、周期信号$f_T(t)$（周期为T）	离散、非周期频谱F_n (离散间隔为$\Omega=2\pi/T$)
(连续时间)傅里叶变换(CTFT)	连续、非周期信号$f(t)$	连续、非周期频谱$F(j\omega)$
离散傅里叶级数(DFS)	离散、周期序列 $f_N(n)$（周期为N）	离散、周期频谱$F_N(n)$（周期为N,离散间隔为$\Omega=2\pi/N$)
离散时间傅里叶变换(DTFT)	离散、非周期序列 $f(k)$	连续、周期频谱$F(e^{j\theta})$（周期为2π）

一般说来，在一个域中为连续的表示，在另一个域中就是非周期性的表示；与此对比，在一个域中为离散的表示，在另一个域中就是周期性的表示。

关系

➤ $f_T(t)$的傅里叶级数(CFS)与$f(t)$的傅里叶变换(CTFT)的关系

$$F_n = \frac{1}{T} F(j\omega)\Big|_{\omega=n\Omega} \quad F(j\omega) = TF_n\Big|_{n\Omega=\omega} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$f(t)$为剪裁$f_T(t)$主周期得到的非周期信号。

➤ $f_N(k)$的离散傅里叶级数(DFS)与$f(k)$的离散时间傅里叶变换(DTFT)的关系

$$F_N(n) = F(e^{j\theta})\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{N}n} \text{，} \quad F(e^{j\theta}) = F_N(n)\Big|_{\frac{2\pi}{N}n=\theta}$$

$f(k)$为剪裁$f_N(k)$主周期得到的非周期序列。

DTFT举例

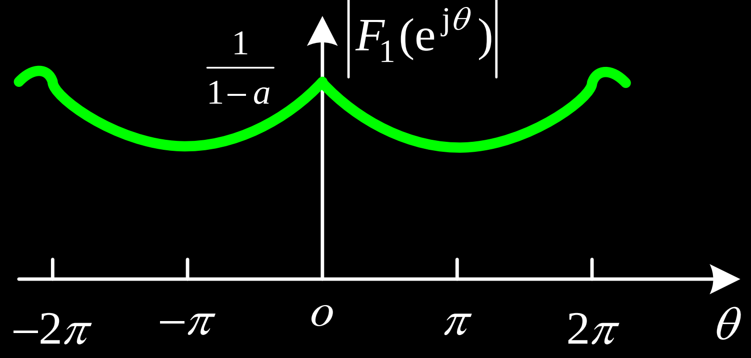
例：求下列序列的离散时间傅里叶变换。

单边指数序列 $f_1(k)=\begin{cases} a^k, & k\ge 0 \\ 0, & k<0 \end{cases}(0<a<1)$

解 $\boldsymbol{F_1(e^{j\theta}) = \mathrm{DTFT}[f_1(k)]} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\theta k} = \dfrac{1}{1-a\,e^{-j\theta}} = |F_1(e^{j\theta})|\,e^{j\varphi_1(\theta)}$

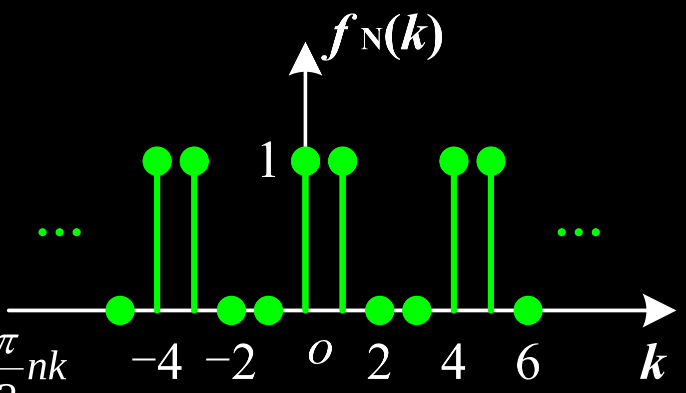
$$|F_1(e^{j\theta})| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos(\theta)}}$$

$$\varphi_1(\theta) = -\arctan\left(\frac{a\sin\theta}{1-a\cos\theta}\right)$$



离散傅里叶级数例

例 求图所示周期脉冲序列的离散傅里叶级数展开式。



解 周期$N=4$，$\Omega=2\pi/N=\pi/2$，求和范围取为[0，3]

$$F_N(n)=\sum_{k=0}^{3} f_N(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}nk}$$

$$F_N(0)=\sum_{k=0}^{3} f_N(k)=1+1=2$$

$$F_N(1)=\sum_{k=0}^{3} f_N(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k}=1-\mathrm{j}1$$

$$F_N(2)=\sum_{k=0}^{3} f_N(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}=0$$

$$F_N(3)=\sum_{k=0}^{3} f_N(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}k}=1+\mathrm{j}1$$

$$f_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_N(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}k}$$

$$f_N(k)=[2+(1-\mathrm{j}1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.5\pi k}+(1+\mathrm{j}1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}1.5\pi k}]/4$$

$$=0.5[1+\cos(0.5\pi k)+\sin(0.5\pi k)]$$