# §4.8　LTI系统的频域分析

傅里叶分析是将任意信号分解为无穷多项不同频率的虚指数函数之和。

对周期信号：$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

对非周期信号：$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

其基本信号为 $e^{j\omega t}$

- 基本信号 $e^{j\omega t}$ 作用于LTI系统的响应
- 一般信号 $f(t)$ 作用于LTI系统的响应
- 频率响应 $H(j\omega)$ 的求法
- 无失真传输与滤波

# 一．基本信号$e^{j\omega t}$作用于LTI系统的响应

设LTI系统的冲激响应为$h(t)$，当激励是角频率$\omega$的基本信号$e^{j\omega t}$时，其响应

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega t}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{j\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\cdot\mathrm{e}^{j\omega t}$$

而上式积分 $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$ 正好是$h(t)$的傅里叶变换，记为$H(j\omega)$，称为系统的**频率响应函数**。

$$y(t) = H(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

$H(j\omega)$反映了响应$y(t)$的幅度和相位随频率变化情况。

# 二、一般信号$f(t)$作用于LTI系统的响应

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)\,e^{j\omega t}$$

齐次性

$$F(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \longrightarrow F(j\omega)H(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

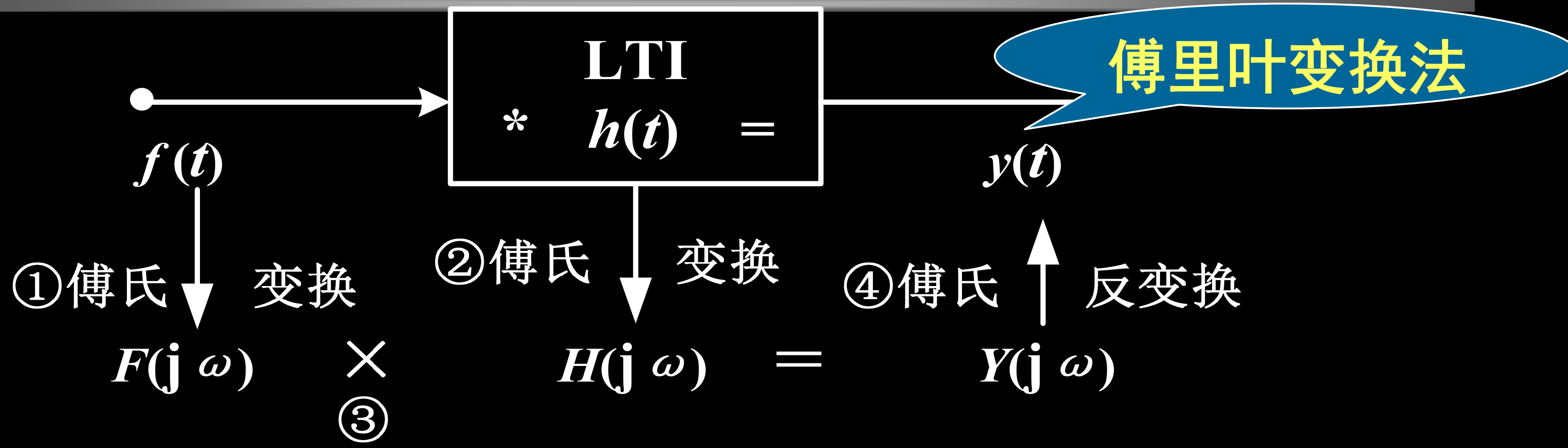
可加性

$$\|\qquad\qquad\qquad\|$$

$$f(t) \longrightarrow y(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)H(j\omega)]$$

$$\boxed{Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)}$$

# 频域分析法步骤：




频率响应$H(j\omega)$可定义为系统零状态响应的傅里叶变换$Y(j\omega)$与激励$f(t)$的傅里叶变换$F(j\omega)$之比，即

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \qquad H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}=\frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}e^{j[\varphi_y(\omega)-\varphi_f(\omega)]}$$

$|H(j\omega)|$称为幅频特性（或幅频响应）； $\theta(\omega)$称为相频特性（或相频响应）。$|H(j\omega)|$是ω的偶函数， $\theta(\omega)$是ω的奇函数。

# 对周期信号还可用傅里叶级数法

周期信号 $$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega\,t}$$

$$y(t)=h(t)*f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n[h(t)*\mathrm{e}^{jn\Omega\,t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nH(jn\Omega)\,\mathrm{e}^{jn\Omega\,t}$$

若 $$f_T(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

则可推导出

$$y(t)=\frac{A_0}{2}H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,|\,H(jn\Omega)\,|\cos[n\Omega t+\varphi_n+\theta(n\Omega)]$$

例

# 三、频率响应H(jω)的求法

1. $H(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$

2. $H(\mathrm{j}\omega) = Y(\mathrm{j}\omega)/F(\mathrm{j}\omega)$

由微分方程求，对微分方程两边取傅里叶变换。

例1

# 四、无失真传输与滤波

系统对于信号的作用大体可分为两类：

- 信号的传输
- 滤波

传输要求信号尽量不失真，而滤波则滤去或削弱不需要有的成分，必然伴随着失真。

## 1、无失真传输

（1）定义：信号无失真传输是指系统的输出信号与输入信号相比，只有幅度的大小和出现时间的先后不同，而没有波形上的变化。即

输入信号为$f(t)$，经过无失真传输后，输出信号应为

$$y(t) = K\,f(t-t_d)$$

其频谱关系为 $Y(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}F(j\omega)$

# (2)无失真传输条件：

系统要实现无失真传输，对系统$h(t)$，$H(j\omega)$的要求是：

(a)对$h(t)$的要求：

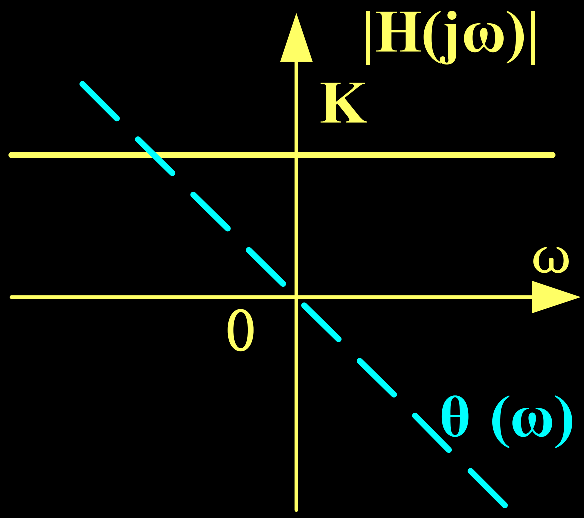
$$h(t)=K\delta(t-t_d)$$

(b)对$H(j\omega)$的要求：

$$H(j\omega)=Y(j\omega)/F(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}$$

即

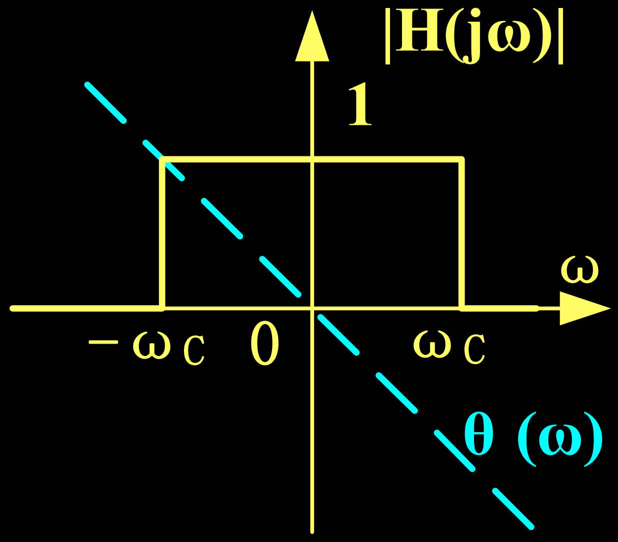
$$|H(j\omega)|=K\ ,\ \theta(\omega)=-\omega t_d$$




上述是信号无失真传输的理想条件。当传输有限带宽的信号是，只要在信号占有频带范围内，系统的幅频、相频特性满足以上条件即可。

# 2、理想低通滤波器

具有如图所示幅频、相频特性的系统称为理想低通滤波器。$\omega_c$称为截止角频率。

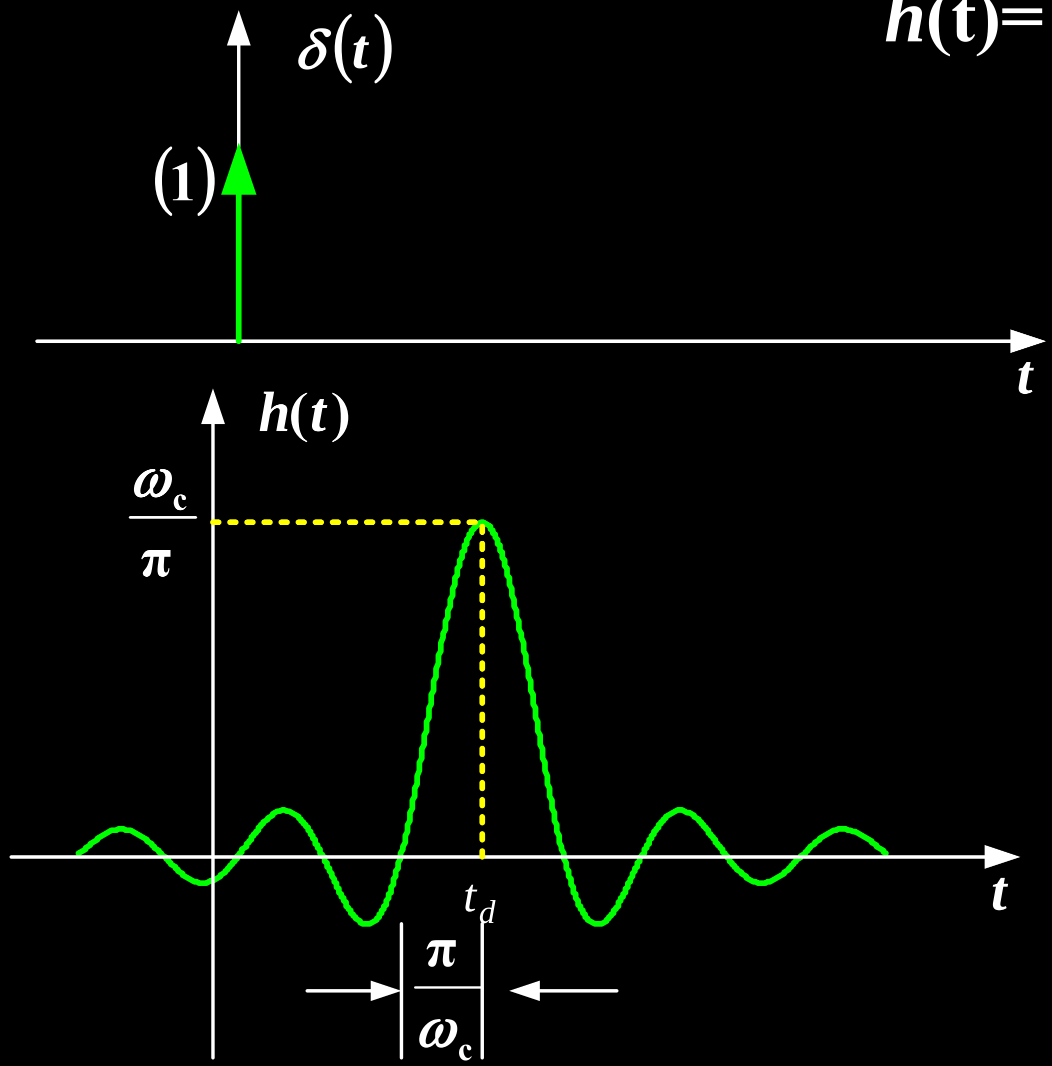



理想低通滤波器的频率响应可写为：

$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega|<\omega_C \\ 0, & |\omega|>\omega_C \end{cases} = g_{2\omega_C}(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

● $\omega$在$0\sim\omega_c$的低频段内，传输信号无失真。

# •理想低通的冲激响应




$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}[g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}] = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_d)]$$

可见，它实际上是不可实现的非因果系统。

# •理想低通的阶跃响应

$$g(t)=h(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(\tau-t_d)]}{\omega_c(\tau-t_d)}\mathrm{d}\tau$$

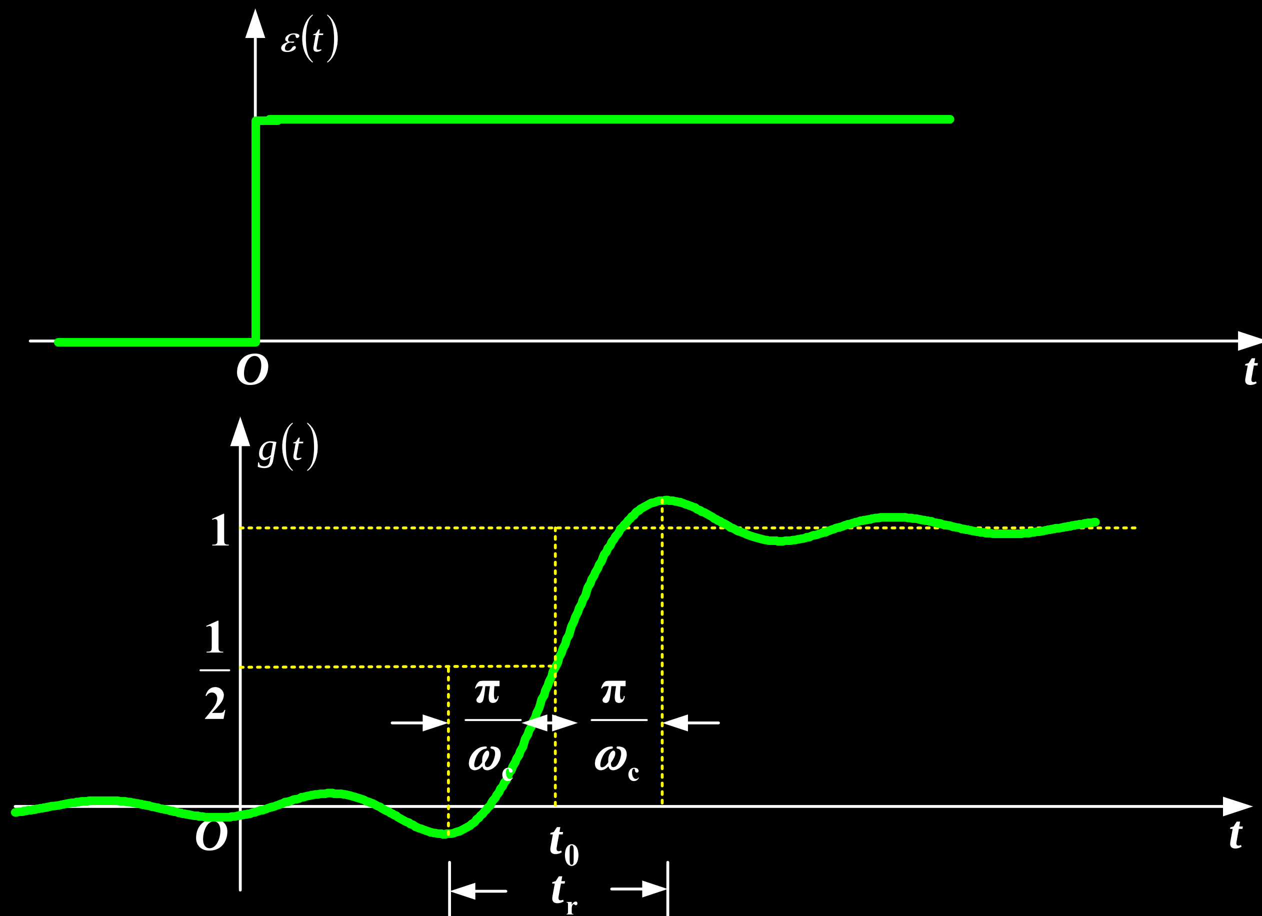
经推导，可得

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_c(t-t_d)}\frac{\sin x}{x}dx$$

$\mathrm{Si}(y)=\int_0^y \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 称为正弦积分

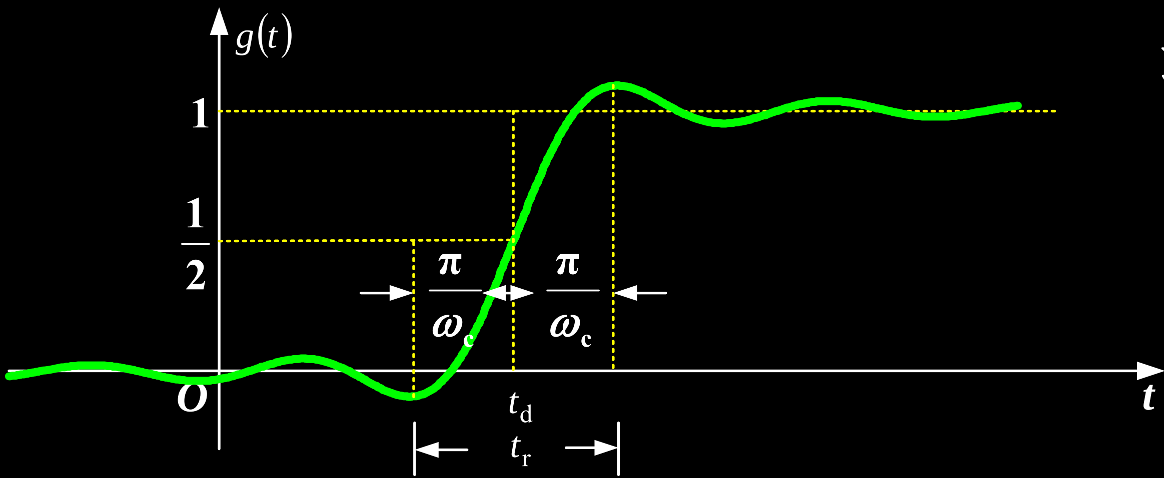
$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_C(t-t_d)]$$

# 阶跃响应波形




$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t-t_d)]$$

# 说明




最大值位置：$t_d + \dfrac{\pi}{\omega_c}$

最小值位置：$t_d - \dfrac{\pi}{\omega_c}$

$t_d$为系统延迟时间

（1）上升时间：输出由最小值到最大值所经历的时间，记作 $t_r$：

$$t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c}$$

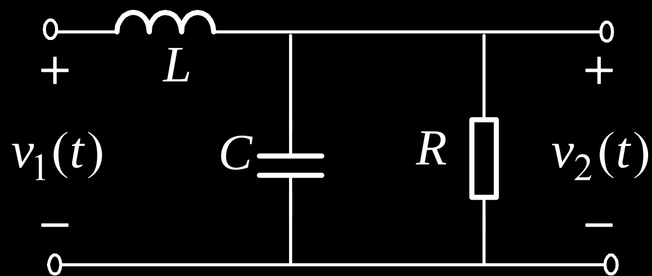
$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t - t_d)]$$

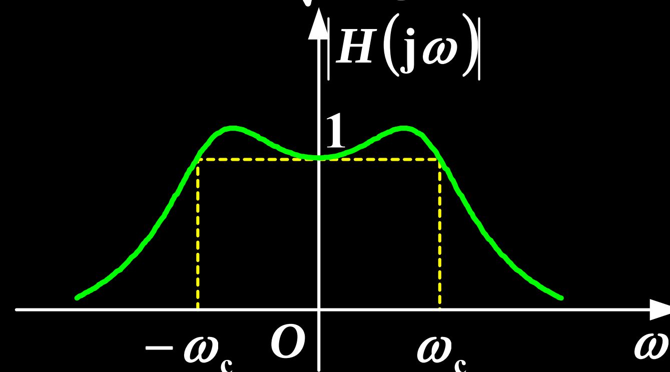
（2）有明显失真，只要$\omega_c<\infty$，其过冲比稳态值高约9%。这一由频率截断效应引起的振荡现象称为吉布斯现象。

$g_{max}=0.5+\mathrm{Si}(\pi)/\pi=1.0895$

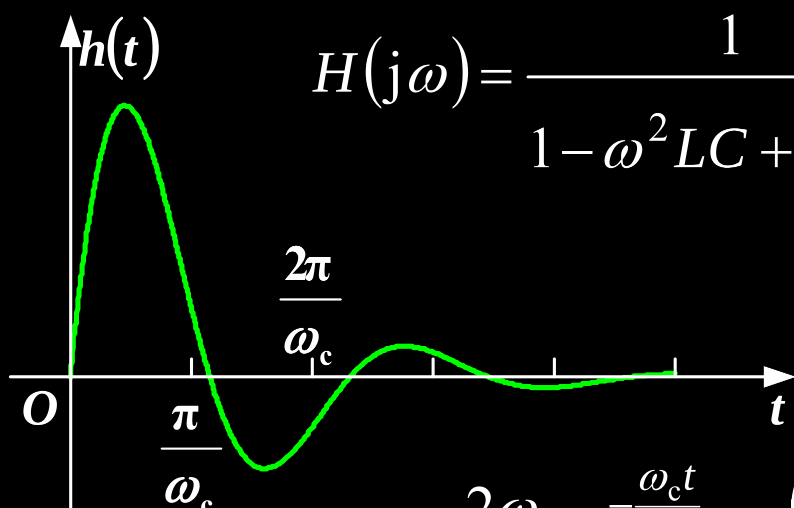
# 一种可实现的低通

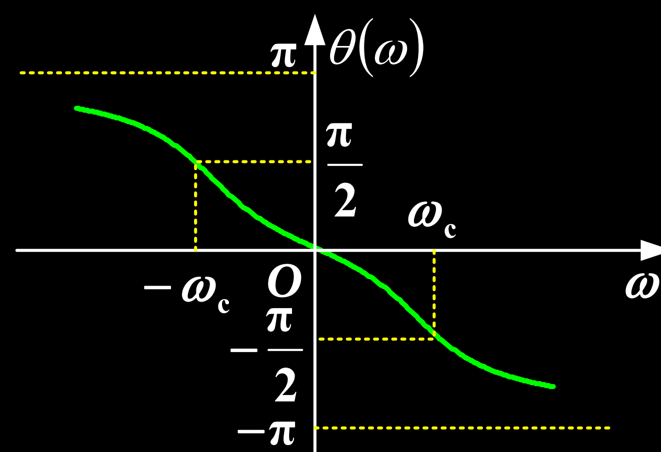
理想低通滤波器在物理上是不可实现的，近似理想低通滤波器的实例 $R=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$时，且令$\omega_c=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$




$$H(j\omega)=\frac{1}{1-\omega^2LC+j\omega\dfrac{L}{R}}$$




$$h(t)=\frac{2\omega_c}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\omega_c t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right)$$

# 3、物理可实现系统的条件

就时域特性而言，一个物理可实现的系统，其冲激响应在$t$<0时必须为0，即 $h(t)=0\ ,t<0$

即 响应不应在激励作用之前出现。

就频域特性来说，佩利（Paley)和维纳（Wiener)证明了物理可实现的幅频特性必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^{2}d\omega<\infty \quad 并且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^{2}}d\omega<\infty$$

称为佩利-维纳准则。（必要条件）

从该准则可看出，对于物理可实现系统，其幅频特性可在某些孤立频率点上为0，但不能在某个有限频带内为0。

# 频率响应例1

例1：某系统的微分方程为

$$y'(t) + 2y(t) = f(t)$$

求$f(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$时的响应$y(t)$。

解：微分方程两边取傅里叶变换

$$j\omega Y(j\omega) + 2Y(j\omega) = F(j\omega) \qquad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{1}{j\omega+2}$$

$$f(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

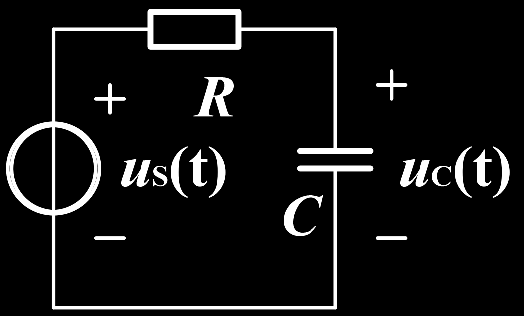
$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{j\omega+2}$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\,\varepsilon(t)$$

# 频率响应例2

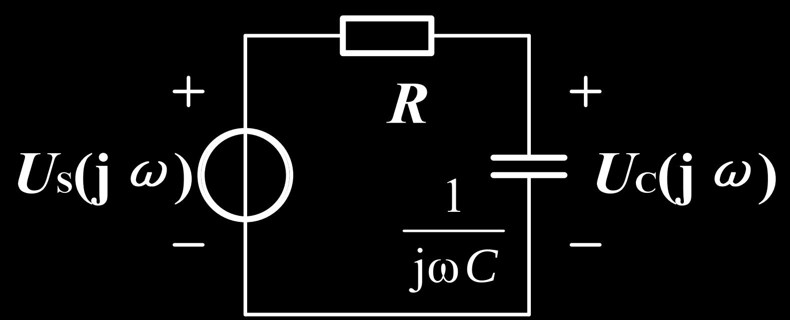
**例：** 如图电路，$R$=1Ω，$C$=1F，以$u_C(t)$为输出，求其$h(t)$。

若$u_S(t)=2\cos(t)$，求$u_C(t)$=？




**解：** 画电路频域模型

$$H(j\omega)=\frac{U_C(j\omega)}{U_S(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{j\omega+1}$$



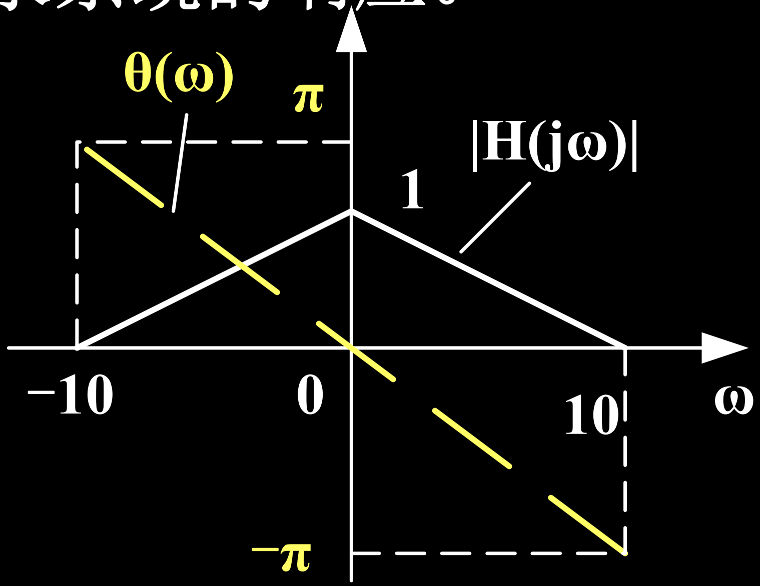

$h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

由于 $H(j1)=\frac{1}{j1+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle-45°$　　$u_C(t)=\sqrt{2}\cos(t-45°)\,\mathrm{V}$

# 频域分析例

例：某LTI系统的 $|H(j\omega)|$ 和 $\theta(\omega)$ 如图，

若 $f(t)= 2 + 4\cos(5t) + 4\cos(10t)$，求系统的响应。




解法一：用傅里叶变换

$$F(j\omega) = 4\pi\,\delta(\omega) + 4\pi[\delta(\omega-5) + \delta(\omega+5)] + 4\pi[\delta(\omega-10) + \delta(\omega+10)]$$

$$H(j\omega)= |H(j\omega)|\, e^{j\theta(\omega)}$$

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) =$$

$$4\pi\,\delta(\omega)\,H(0) + 4\pi[\delta(\omega-5)\,H(j5) + \delta(\omega+5)\,H(-j5)] + 4\pi[\delta(\omega-10)\,H(j10) + \delta(\omega+10)\,H(-j10)]$$

$$= 4\pi\,\delta(\omega) + 4\pi[-j0.5\,\delta(\omega-5) + j0.5\,\delta(\omega+5)]$$

$y(t) = F^{-1}[Y(j\omega)] = 2 + 2\sin(5t)$

# 解法二：用三角傅里叶级数

$f(t)$的基波角频率$\Omega$=5rad/s

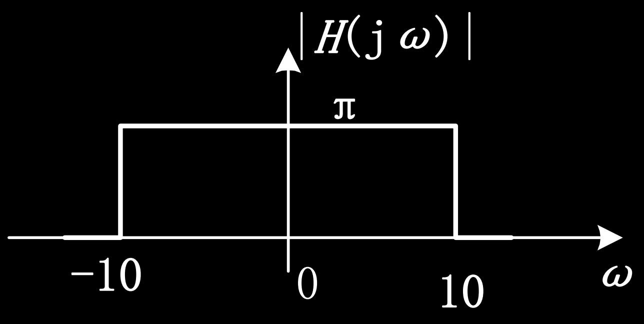
$f(t) = 2 + 4\cos(\Omega t) + 4\cos(2\Omega t)$

$H(0) = 1$， $H(j\Omega) = 0.5e^{-j0.5\pi}$， $H(j2\Omega) = 0$

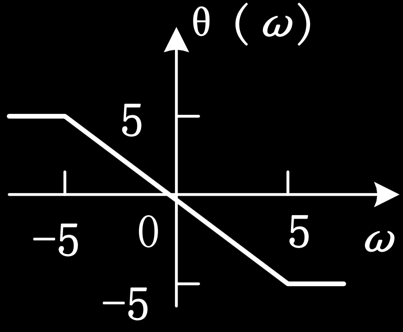
$$y(t) = 2 + 4 \times 0.5\cos(\Omega t - 0.5\pi)$$
$$= 2 + 2\sin(5t)$$

# 无失真例

**例：** 系统的幅频特性 $|H(j\,\omega)|$ 和相频特性如图(a)(b)所示，则下列信号通过该系统时，不产生失真的是




(a)




(b)

(A) $f(t) = \cos(t) + \cos(8t)$

(B) $f(t) = \sin(2t) + \sin(4t)$

(C) $f(t) = \sin(2t)\sin(4t)$

(D) $f(t) = \cos^2(4t)$