第2章 信号与系统的时域分析

LTI连续时间系统的时域分析

内容回顾

01 信号分解

02 卷积积分的定义及计算

03 卷积积分的性质

04 卷积积分性质的应用

主要内容
CONTENTS

01 理解单位冲激响应

02 掌握单位冲激响应的求解

03 掌握单位阶跃响应的求解

01 单位冲激响应

单位冲激响应

系统对单位冲激信号的**零状态**响应。

$x(t)$ → 系统 → $y(t)$

$\delta(t)$ → 零初始状态 → $h(t)$

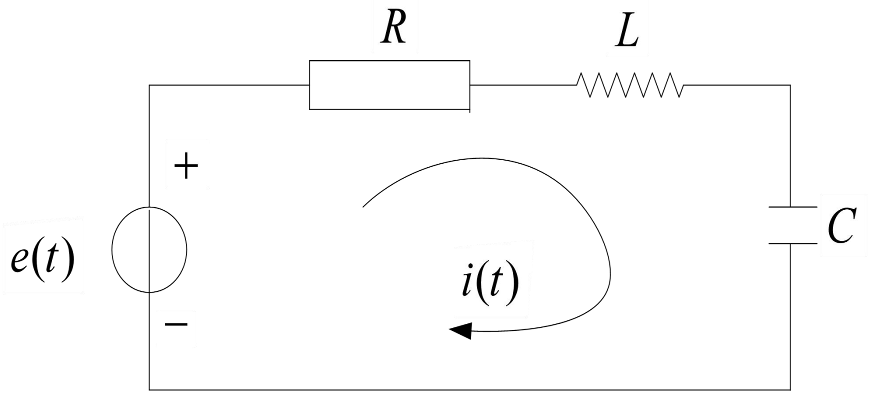
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

已知系统的某种描述或表示

输入输出方程

二阶模型：基尔霍夫定理

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$



二阶通式：微分方程

$$y''+a_1 y'+a_0 y=b_1 x'+b_0 x$$

N阶通式：常系数微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1 y'+a_0 y=b_m x^m+\cdots+b_1 x'+b_0 x$$

常系数微分方程求解

N阶通式 $$y^{(n)}+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1y'+a_0y=b_mx^m+\cdots+b_1x'+b_0x$$

求和形式 $$\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^n}{dt^n}y(t)=\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^k}{dt^k}x(t)$$

根据微分方程求解方法得出

$$y(t)=y_1(t)(\text{通解})+y_2(t)(\text{特解})$$

齐次方程　非齐次方程

常系数微分方程：通解

齐次方程：$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^n}{dt^n} y(t) = 0$ （等价于输入为0）

当特征方程的特征根全为单根λ_k时：

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{\lambda_k t}$$

零输入响应

先对等式两边求$1 \sim (n-1)$阶导数

再代入初始条件：$y(0), y'(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$,

可以计算得到C_k

常系数微分方程：通解

LTI因果系统

$$x(t)=0$$

输入为0则输出为0

$$y(t)=0, y'(t)=0, \cdots, y^{(n-1)}(t)=0$$

$$C_k=0$$

仅需考虑特解

常系数微分方程：特解

仅考虑输入$x(t)$时的系统输出

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^n}{dt^n} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

微分算子p表示法

$$\frac{d}{dt} = p, \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n, \quad \int_{-\infty}^{t} (\quad) d\tau = \frac{1}{p}$$

将时域的微分算子符号：$\frac{d}{dt}$和$\frac{d^n}{dt^n}$以及积分符号$\int_{-\infty}^{t} d\tau$用p来代替

$$\frac{dx}{dt} = px, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = p^n x, \quad \int_{-\infty}^{t} x d\tau = \frac{1}{p} x \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \left[p^k y(t)\right] = \sum_{k=0}^{m} b_k \left[p^k x(t)\right]$$

微分算子运算规则

$$1: mp + np = (m+n)p \qquad m,n\text{为任意整数}$$

$$2: p^m p^n = p^{m+n} \qquad m,n\text{同为正数或负数}$$

$$p\frac{1}{p} \overset{?}{=} \frac{1}{p}p \qquad px(t) = py(t) \xrightarrow{?} x(t) = y(t)$$

积分与微分的次序不能调换 $p\frac{1}{p} \neq \frac{1}{p}p$

$px(t) = py(t)$ 不能推导出 $x(t) = y(t)$

如：$x(t) = y(t) + C$

$$px(t) = py(t)$$

$$x(t) \neq y(t)$$

微分算子表示常系数微分方程

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)y(t) =$$
$$(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)x(t)$$

$$D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$
$$N(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0$$

$$D(p)y(t) = N(p)x(t)$$

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

$$y(t) = H(p)x(t)$$

微分算子分类计算特解

$$y(t)=H(p)x(t) \quad \Rightarrow \quad h(t)=H(p)\delta(t)$$

(当输入信号为$\delta(t)$时的输出)

当$n>m$时：

$$h(t)=H(p)\delta(t)$$

$$=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}\delta(t)$$

$$=\left(\frac{k_1}{\underline{p-\lambda_1}}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}\right)\delta(t)$$

$$h_1(t)=\frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t) \quad \Rightarrow \quad h(t)=\sum_{i=1}^{n} h_i(t)$$

微分算子分类计算特解

$$h_1(t)=\frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t)\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}h_1(t)-\lambda_1h_1(t)=k_1\delta(t)$$

为解此微分方程，左右同乘以$e^{-\lambda_1 t}$

$$\Rightarrow e^{-\lambda_1 t}\frac{d}{dt}h_1(t)-\lambda_1e^{-\lambda_1 t}h_1(t)=k_1e^{-\lambda_1 t}\delta(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[e^{-\lambda_1 t}h_1(t)\right]=k_1e^{-\lambda_1 t}\delta(t)$$

将此等式左右两边从0^-至t积分

$$\Rightarrow e^{-\lambda_1 t}h_1(t)-h_1(0^-)=k_1\int_{0^-}^{t}e^{-\lambda_1\tau}\delta(\tau)d\tau$$

$\because$因果系统 $\quad\therefore h_1\left(0^-\right)=0$

$$\boxed{\begin{aligned}h_1(t)&=\int_{0^-}^{t}k_1e^{\lambda_1(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau\\&=k_1e^{\lambda_1 t}u(t)\end{aligned}}$$

微分算子分类计算特解

$$h_1(t)=\int_{0^-}^{t} k_1 e^{\lambda_1(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau$$
$$=k_1 e^{\lambda_1 t}u(t)$$

$$\Rightarrow \quad h(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t}u(t)$$

若λ_i为k阶重根：

$$h_i(t)=\left(A_1+A_2 t+\cdots+A_k t^{k-1}\right)e^{\lambda_i t}u(t)$$

微分算子分类计算特解

当$n=m$时：

$$h(t)=H(p)\delta(t)$$
$$=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}\delta(t)$$
$$=\boxed{b_m\delta(t)}+\frac{b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}\delta(t)$$

n>m

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[k_i e^{\lambda_i t}u(t)\right]+b_m\delta(t)$$

微分算子分类计算特解

当$n < m$时：

$$h(t) = H(p)\delta(t)$$
$$= \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}\delta(t)$$
$$= A_0 \delta^{(m-n)}(t) + \cdots + A_{m-n}\delta(t)$$
$$+ \frac{b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}\delta(t)$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[k_i e^{\lambda_i t} u(t)\right] + A_0 \delta^{(m-n)}(t) + \cdots + A_{m-n}\delta(t)$$

指数函数　冲激函数的各阶导数　冲激函数

求系统

$$\frac{d^2}{dt}y(t)+3\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=\frac{d^3}{dt}x(t)+4\frac{d^2}{dt}x(t)-5x(t)$$

的冲激响应

解：$H(p)=\dfrac{p^3+4p^2-5}{p^2+3p+2}=p+1+\dfrac{-2}{p+1}+\dfrac{-3}{p+2}$　　引入微分算子，改写方程

$y(t)=px(t)+x(t)+\dfrac{-2}{p+1}x(t)+\dfrac{-3}{p+2}x(t)$　　套用分类，分解表示

由$x(t)=\delta(t)$，且$n<m$得到：　　写出时域解

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)-(2e^{-t}+3e^{-2t})u(t)$$

02 单位阶跃响应

- 单位阶跃函数与单位冲激函数之间的关系：

  1.微 分：　$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

  2.积 分：　$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

- 需解决的问题：
  - 单位阶跃响应与单位冲激响应之间的关系？
  - 若已知系统的阶跃响应，系统的零状态响应？

单位阶跃响应与单位冲激响应之间的关系

线性系统：$x_1(t) \to y_1(t) \qquad x_2(t) \to y_2(t)$

$$k_1x_1(t)+k_2x_2(t) \to k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$$

时不变系统：$x(t) \to y(t) \qquad x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

线性时不变系统：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t)-y(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) \to \frac{d}{dt}y(t)$$

$\because$ 单位冲激函数是单位阶跃函数的导数

$\therefore$ 单位冲激响应是单位阶跃响应的导数

单位阶跃响应与单位冲激响应之间的关系

同理: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$

$\because$ 单位阶跃函数是单位冲激函数的积分

$\therefore$ 单位阶跃响应是单位冲激响应的积分

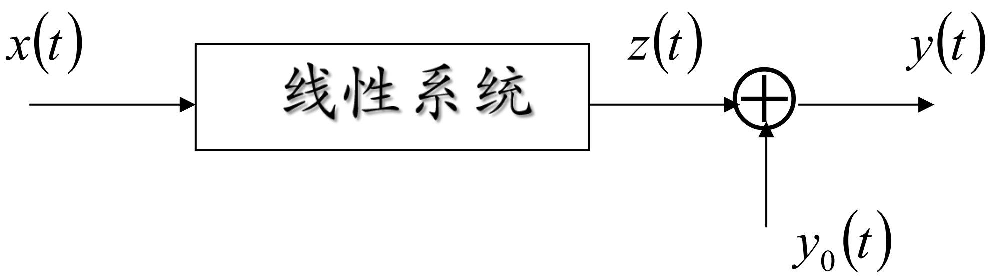
单位冲激响应: $h(t)$ $\quad h(t)=\dfrac{d}{dt}s(t)$

单位阶跃响应: $s(t)$ $\quad s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$

LTI连续时间系统时域分析

$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{d}{dt}x(t)*s(t)=x(t)*\frac{d}{dt}s(t)$$

03 增量线性系统时域分析

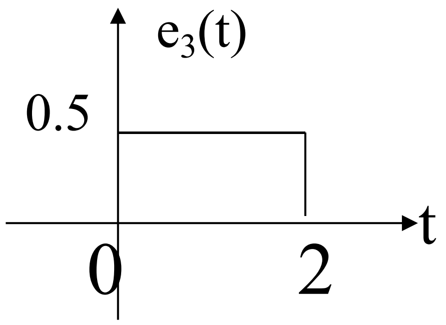


$z(t)$ 零状态响应

$y_0(t)$ 零输入响应

全响应 $y(t) = z(t) + y_0(t)$

已知某增量线性时不变系统在相同初始条件下，
当$e_1(t)=u(t)$时，全响应为$r_1(t)=(2e^{-t}+2e^{-2t}-\cos 3t)\,u(t)$;
若$e_2(t)=3u(t)$时，全响应为$r_2(t)=(4e^{-t}+2e^{-2t}-3\cos 3t)\,u(t)$;
求该系统的单位冲激响应$h(t)$;
若激励为$e_3(t)$如图示时，求系统的零状态响应。



分析：深刻理解系统零输入和零状态响应，以及利用不同响应之间的关系求冲激响应。

作业

- 2.9
- 复习三角函数、指数函数的微积分

一般求导规则

$$\frac{\mathrm{d}Mf}{\mathrm{d}x} = M\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}(f \pm g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}fg}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$