第二章 连续系统的时域分析

§2.1 LTI连续系统的响应

LTI连续系统的时域分析，归结为：

建立并求解线性微分方程

由于在其分析过程涉及的函数变量均为**时间*t***，故称为**时域分析法**。这种方法比较直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础。

- 微分方程的经典解
- 关于0-和0+初始值
- 零输入响应和零状态响应

一、微分方程的经典解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t)$$
$$= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 f^{(1)}(t) + b_0 f(t)$$

微分方程的经典解：完全解 = 齐次解 + 特解。

1. 齐次解

由特征方程→求出特征根→写出齐次解形式

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \, \mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

注意重根情况处理方法。

举例

2. 特解

根据微分方程右端函数式形式，设含待定系数的特解函数式→代入原方程，比较系数定出特解。

举例

激励$f(t)$	响应$y(t)$的特解$y_p(t)$
F(常数)	P(常数)
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$(特征根均不为0) $t^r (P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0)$(有$r$重为0的特征根)
$\mathrm{e}^{\alpha t}$	$P\mathrm{e}^{\alpha t}$(α不等于特征根) $(P_1 t + P_0)\mathrm{e}^{\alpha t}$($\alpha$等于特征单根) $(P_r t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \cdots + P_0)\mathrm{e}^{\alpha t}$($\alpha$等于$r$重特征根)
$\cos(\beta t)$　$\sin(\beta t)$	$P_1 \cos(\beta t) + P_2 \sin(\beta t)$(特征根不等于$\pm \mathrm{j}\beta$)

3. 全解

完全解 = 齐次解 + 特解

由初始值定出齐次解中的待定常数C_i。

举例

- **齐次解**的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励$f(t)$的函数形式无关，称为系统的**固有响应**或**自由响应**；

- **特解**的函数形式由激励确定，称为**强迫响应**。

二．关于0-和0+初始值

若输入$f(t)$是在t=0时接入系统，则确定待定系数C_i时用t = 0_+时刻的**初始值**，即$y^{(j)}(0_+)$ (j=0,1,2…，n−1)。

而$y^{(j)}(0_+)$包含了输入信号的作用，不便于描述系统的历史信息。

在t=0-时，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(j)}(0_-)$反映了**系统的历史情况**而与激励无关。称这些值为**初始状态**或**起始值**。

通常，需要从已知的初始状态$y^{(j)}(0_-)$设法求得$y^{(j)}(0_+)$。

例1　例2

➤**当微分方程右端含有冲激函数时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。否则不会跃变。**

三.零输入响应和零状态响应

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$,也可以分别用经典法求解。

注意：对t=0时接入激励$f(t)$的系统，初始值 $y_{zi}^{(j)}(0+)$, $y_{zs}^{(j)}(0+)$ (j = 0，1，2，…，n-1)的计算。

$$y^{(j)}(0-)= y_{zi}^{(j)}(0-)+ y_{zs}^{(j)}(0-)$$

$$y^{(j)}(0+)= y_{zi}^{(j)}(0+)+ y_{zs}^{(j)}(0+)$$

对于**零输入响应**，由于激励为零，故有

$$y_{zi}^{(j)}(0+)= y_{zi}^{(j)}(0-) = y^{(j)}(0-)$$

对于**零状态响应**，在t=0-时刻激励尚未接入，故应有

$$y_{zs}^{(j)}(0-)=0$$

$y_{zs}^{(j)}(0+)$的求法下面举例说明。 例1

齐次解举例

求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t)+7\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+16\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+12y(t)=f(t)$ 的齐次解。

解：系统的特征方程为

$$\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=0$$

特征根

$$(\lambda+2)^2(\lambda+3)=0$$

$$\lambda_1=-2(\text{重根}),\ \lambda_2=-3$$

对应的齐次解为

$$y_h(t)=(C_1t+C_2)\mathrm{e}^{-2t}+C_3\mathrm{e}^{-3t}$$

特解举例

例：给定微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)$

如果已知： $(1)\ f(t)=t^2$; $(2)\ f(t)=\mathrm{e}^t$， 分别求两种情况下此方程的特解。

解: **(1)**由于$f(t)=t^2$，故特解函数式为

$$y_{\mathrm{p}}(t)=P_2t^2+P_1t+P_0$$

这里，P_2， P_1， P_0， 将此式代入方程得到

$$3P_2t^2+(4P_2+3P_1)t+(2P_2+2P_1+3P_0)=t^2+2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，于是有

$$\begin{cases} 3P_2 = 1 \\ 4P_2 + 3P_1 = 2 \\ 2P_2 + 2P_1 + 3P_0 = 0 \end{cases}$$

联解得到

$$P_2 = \frac{1}{3},\ P_1 = \frac{2}{9},\quad P_0 = -\frac{10}{27}$$

所以，特解为

$$y_{\mathrm{p}}(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$$

(2) 当$f(t)=e^t$时

特解为$y_p(t)=P\,e^t$，这里，P是待定系数。

代入方程后有：

$$Pe^t+2Pe^t+3Pe^t=e^t+e^t$$

$$P=\frac{1}{3}$$

于是，特解为 $\frac{1}{3}e^t$。

全解举例

例 描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$$

求（1）当$f(t) = 2e^{-t}$，$t \geqslant 0$；$y(0)=2$，$y'(0)= -1$时的全解；

（2）当$f(t) = e^{-2t}$，$t \geqslant 0$；$y(0)= 1$，$y'(0)=0$时的全解。

解: (1) 特征方程为$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ 其特征根$\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -3$。齐次解为 $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

当$f(t) = 2e^{-t}$时，其特解可设为 $y_p(t) = Pe^{-t}$

将其代入微分方程得

$$Pe^{-t} + 5(-Pe^{-t}) + 6Pe^{-t} = 2e^{-t}$$ 解得 $P=1$

于是特解为 $y_p(t) = e^{-t}$

全解为： $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + e^{-t}$

其中 待定常数C_1,C_2由初始条件确定。

$$y(0) = C_1+C_2+ 1 = 2，y'(0) = -2C_1 - 3C_2 - 1= -1$$

解得 $C_1 = 3$， $C_2 = -2$

最后得全解 $y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}$ ，$t\geqslant 0$

（2）齐次解同上。当激励$f(t)=e^{-2t}$时，其指数与特征根之一相重。故其特解为

$$y_p(t) = (P_1t + P_0)e^{-2t}$$

代入微分方程可得 $P_1e^{-2t} = e^{-2t}$

所以 $P_1= 1$ 但P_0不能求得。特解为

$$y_p(t) = (t + P_0)e^{-2t}$$

全解

全解为

$y(t)= C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + te^{-2t} + P_0e^{-2t}$

$= (C_1+P_0)e^{-2t} +C_2e^{-3t} + te^{-2t}$

将初始条件代入，得

$y(0) = (C_1+P_0) + C_2=1$， $y'(0)= -2(C_1+P_0) -3C_2+1=0$

解得 $C_1 + P_0 = 2$,$C_2= -1$ 最后得微分方程的全解为

$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}$, $t\geqslant 0$

上式第一项的系数$C_1+P_0= 2$，不能区分C_1和P_0，因而也不能区分自由响应和强迫响应。

0-和0+初始值举例1

例1：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知$y(0-)=2$，$y'(0-)= 0$，$f(t)= \varepsilon(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$。

解：将输入$f(t)= \varepsilon(t)$代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t) \qquad （1）$$

利用系数匹配法分析：上式对于t=0-也成立，在$0-<t<0_+$区间等号两端$\delta(t)$项的系数应相等。

由于等号右端为$2\delta(t)$，故$y''(t)$应包含冲激函数，从而$y'(t)$在$t= 0$处将发生跃变，即$y'(0+)\neq y'(0-)$。

但$y'(t)$不含冲激函数，否则$y''(t)$将含有$\delta'(t)$项。由于$y'(t)$中不含$\delta(t)$，故$y(t)$在$t=0$处是连续的。

故 $$y(0+) = y(0-) = 2$$

对式(1)两端积分有

$$\int_{0-}^{0+} y''(t)dt + 3\int_{0-}^{0+} y'(t)dt + 2\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 2\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt + 6\int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt$$

由于积分在无穷小区间[0-，0_+]进行的，且y(t)在t=0连续，故

$$\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 0, \int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt = 0$$

于是由上式得

$$[y'(0_+) - y'(0-)] + 3[y(0_+) - y(0-)]=2$$

考虑 y(0+) = y(0-)=2，所以

$y'(0_+) - y'(0-) = 2$ ， $y'(0+) = y'(0-) + 2 =2$

0-和0+初始值举例2

例2：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)= 0$，$f(t)= \delta'(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$。

解：将输入$f(t)= \delta'(t)$代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta''(t) + \delta'(t) \qquad （1）$$

利用系数匹配法分析：

令$y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+C\delta(t)+r_1(t)$， $r_1(t)$中不含冲激

$y'(t)= a\delta'(t)+b\delta(t)+ r_2(t)$， $r_2(t)=C\varepsilon(t)+ r_1^{(-1)}(t)$

$y(t)= a\delta(t)+ r_3(t)$， $r_3(t)=b\varepsilon(t)+ r_2^{(-1)}(t)$

将上述关系代入式（1），并整理得

$$a\delta''(t)+b\delta'(t)+C\delta(t)+r_1(t)$$
$$+3a\delta'(t)+3b\delta(t)+3r_2(t)$$
$$+2a\delta(t)+2r_3(t)=2\delta''(t)+\delta'(t)$$

比较等式两边冲激项系数，有

$$a=2$$
$$b+3a=1$$
$$c+3b+2a=0$$

解得：$a=2$，$b=-5$，$c=11$，故

$$y''(t)=2\delta''(t)-5\delta'(t)+11\delta(t)+r_1(t),$$
$$y'(t)=2\delta'(t)-5\delta(t)+r_2(t),$$
$$y(t)=2\delta(t)+r_3(t),$$

对y”(t)从0-到0+积分得

$y'(0_+)-y'(0_-)=11$，　$y'(0_+)=y'(0_-)+11=11$

对y’(t)从0-到0+积分得

$y(0_+)-y(0_-)=-5$，　$y(0_+)=y(0_-)-5=2-5=-3$

零输入响应和零状态响应举例

例：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知y(0-)=2，y'(0-)=0，f(t)= ε (t)。求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）**零输入响应$y_{zi}(t)$** 激励为0，故$y_{zi}(t)$满足

$$y_{zi}''(t) + 3y_{zi}'(t) + 2y_{zi}(t) = 0$$

$$y_{zi}(0+)= y_{zi}(0-)= y(0-)=2$$

$$y_{zi}'(0+)= y_{zi}'(0-)= y'(0-)=0$$

该齐次方程的特征根为–1，– 2，故

$$y_{zi}(t) = C_{zi1}e^{-t} + C_{zi2}e^{-2t}$$

代入初始值并解得系数为$C_{zi1}=4$,$C_{zi2}= -2$，代入得

$$y_{zi}(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t} \quad ,t > 0$$

（2）零状态响应$y_{zs}(t)$ 满足

$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$ 并有

$y_{zs}(0_-) = y_{zs}'(0_-) = 0$

由于上式等号右端含有δ(t)，故$y_{zs}''(t)$含有δ(t)，从而$y_{zs}'(t)$跃变，即$y_{zs}'(0_+)\neq y_{zs}'(0_-)$，而$y_{zs}(t)$在$t = 0$连续，即$y_{zs}(0_+) = y_{zs}(0_-) = 0$，积分得

$$[y_{zs}'(0_+)- y_{zs}'(0_-)]+ 3[y_{zs}(0_+)- y_{zs}(0_-)]+2\int_{0_-}^{0_+} y_{zs}(t)\,\mathrm{d}t = 2+6\int_{0_-}^{0_+}\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

因此，$y_{zs}'(0_+)= 2 + y_{zs}'(0_-)=2$

对$t>0$时，有 $y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 6$

不难求得其齐次解为$C_{zs1}e^{-t} + C_{zs2}e^{-2t}$，其特解为常数3，

于是有 $y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t} + C_{zs2}e^{-2t} + 3$

代入初始值求得 $y_{zs}(t)= -4e^{-t} + e^{-2t} + 3$，$t\geqslant 0$