§4.2 傅里叶级数

- 傅里叶级数的三角形式
- 波形的对称性与谐波特性
- 傅里叶级数的指数形式
- 周期信号的功率——Parseval等式

一、傅里叶级数的三角形式

1. 三角函数集

{ 1, cos($n\Omega$ t)， sin($n\Omega$ t)， n=1,2,…}

在一个周期内是一个完备的正交函数集。

由积分可知 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\Omega t)\cdot\sin(m\Omega t)dt = 0$, 所有的$m, n$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\Omega t)\cdot\cos(m\Omega t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \\ T, & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\Omega t)\cdot\sin(m\Omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

2．级数形式

设周期信号$f(t)$，其周期为T，角频率$\Omega=2\pi/T$，当满足狄里赫利(Dirichlet)条件时，它可分解为如下三角级数—— 称为$f(t)$的傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

系数a_n , b_n称为**傅里叶系数**

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

可见， a_n 是n的偶函数， b_n是n的奇函数。

其他形式　将上式同频率项合并，可写为

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

式中，$A_0=a_0$　$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$　$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$

可见：A_n是n的偶函数，φ_n是n的奇函数。

$a_n=A_n\cos\varphi_n$，$b_n=-A_n\sin\varphi_n$，$n=1,2,\ldots$

上式表明，周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

- $A_0/2$为直流分量
- $A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)$称为基波或一次谐波，其角频率与原周期信号相同
- $A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)$称为二次谐波，其频率是基波的2倍

一般而言，$A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$称为$n$次谐波。

二、波形的对称性与谐波特性

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}\,t \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}\,t$$

1．*f*(t)为偶函数——对称纵坐标

$$f(t) = f(-t)$$

b_n=0，展开为余弦级数。

2．*f*(t)为奇函数——对称于原点

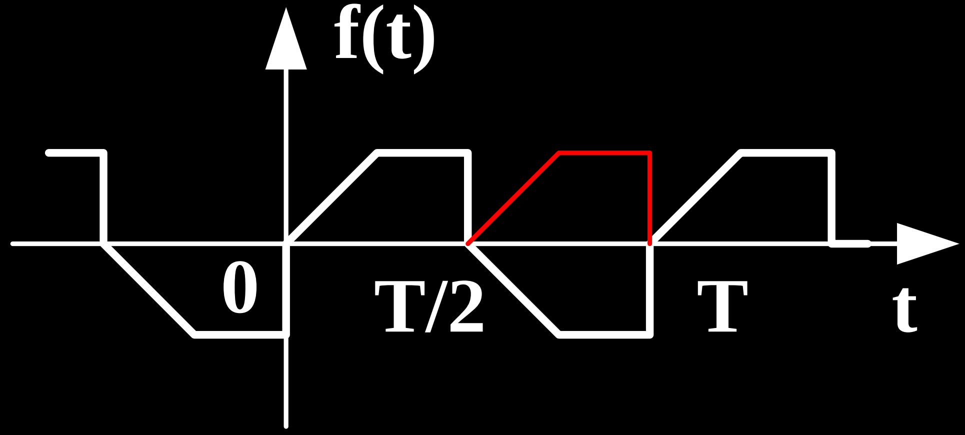
$$f(t) = -f(-t)$$

a_n=0，展开为正弦级数。

例

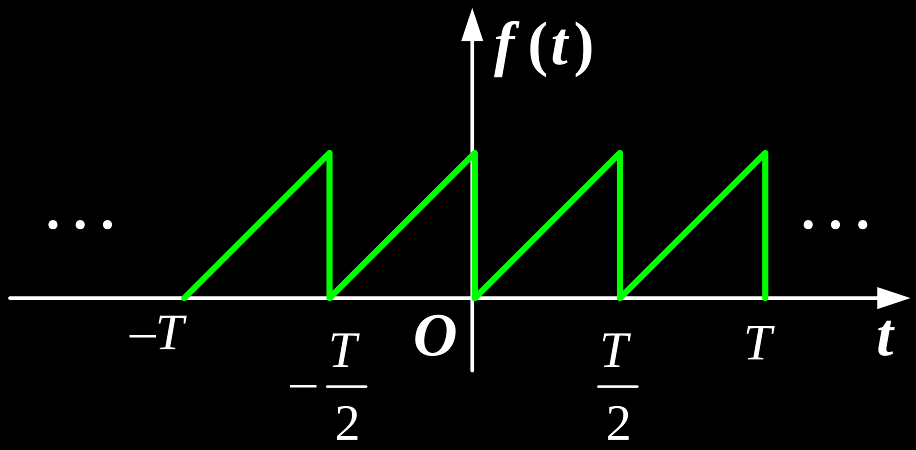
3 .f(t)为奇谐函数——$f(t) = -f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中
只含奇次谐波分量，而
不含偶次谐波分量即
$a_0=a_2=\ldots=b_2=b_4=\ldots=0$
P121 例4.2-1



4. f(t)为偶谐函数——$f(t) = f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中
只含偶次谐波分量，而
不含奇次谐波分量即
$a_1=a_3=\ldots=b_1=b_3=\ldots=0$
P125 例4.2-2 （a）



三、傅里叶级数的指数形式

三角形式的傅里叶级数，含义比较明确，但运算常感不便，因而经常采用指数形式的傅里叶级数。

虚指数函数集$\{e^{jn\Omega t}$，$n=0$，±1，±2，$\ldots\}$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,e^{jn\Omega t}$$

系数F_n 称为复傅里叶系数

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}\,dt$$

利用 $\cos x=(e^{jx}+e^{-jx})/2$可从三角形式推出：

推导

傅里叶系数之间关系

$$F_n = |F_n| e^{\varphi_n} = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \qquad a_n = A_n \cos\varphi_n$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \qquad b_n = -A_n \sin\varphi_n$$

***n*的偶函数：** a_n， A_n， $|F_n|$

***n*的奇函数：** b_n， φ_n

四、周期信号的功率——Parseval等式

周期信号一般是功率信号，其平均功率为

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = (\frac{A_0}{2})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

直流和n次谐波分量在1Ω电阻上消耗的平均功率之和。

$n \geqslant 0$时， $|F_n| = A_n/2$。

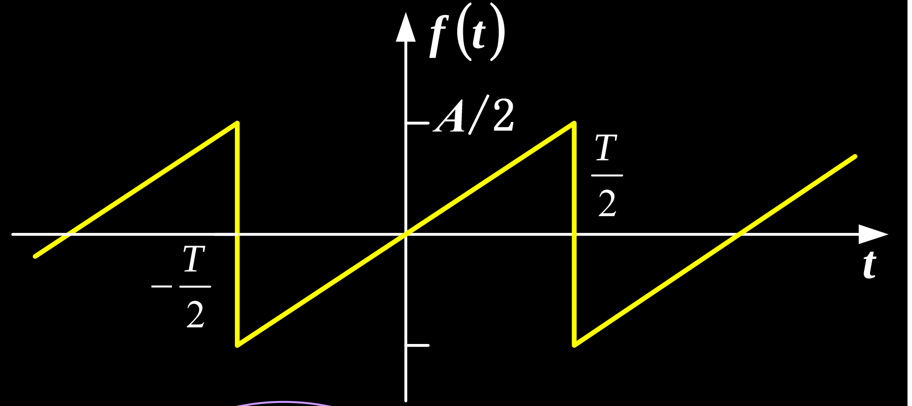
证明

这是Parseval定理在傅里叶级数情况下的具体体现。

求周期锯齿波的三角函数形式的傅里叶级数展开式。

解：

$$f(t)=\frac{A}{T}t \qquad \left(-\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}\right)$$



$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{A}{T}t\,\mathrm{d}t=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{A}{T}t\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t=0$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{A}{T}t\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t=\frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad n=1,2,3\cdots$$

周期锯齿波的傅里叶级数展开式为

$$f(t)=0+\frac{A}{\pi}\sin\Omega t-\frac{A}{2\pi}\sin 2\Omega t-\cdots$$

直流　　基波　　二次谐波