第3章 连续时间信号与系统的频域分析

信号的频域分解-1

内容回顾

01 LTI系统性质

02 LTI系统框图表示

主要内容

CONTENTS

01 信号分解

对子信号的要求

完备性：任意函数都可以分解为该子信号的和

简单性：容易求得系统对该子信号的响应

相似性：不同子信号的响应具有内在联系,可以类推

复指数信号

$$x(t) = e^{st}$$

输入信号 $: x(t) = e^{st}$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

复指数响应：$y(t)=x(t)*h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{\text{由}s\text{确定的复常数}}$$

令:$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ （只与系统有关的复常数）

$\Rightarrow$ 复指数响应：$y(t)=H(s)e^{st}$

LTI系统对复指数信号的响应仍然是指数信号，只是改变了信号的幅度和相位。

定义

- 如果系统对一个信号所产生的响应，仅仅是将该信号与一个复常数相乘，则称该信号为此系统的特征函数。
- 与此特征函数对应的复常数，称为与此特征函数相对应的特征值.

$$y(t) = H(s)e^{st} \qquad e^{st}\text{为特征函数}, H(s)\text{为特征值}$$

e^{st}是一切连续时间LTI系统的特征函数。

输入信号分解为：$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t} + \cdots$

每一个信号分量的响应为：

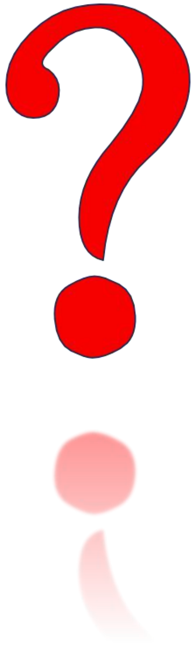
$$a_1 e^{s_1 t} \to a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$
$$a_2 e^{s_2 t} \to a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$
$$a_3 e^{s_3 t} \to a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

总输出为：$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t} + \cdots$

$\Downarrow$ 求和形式

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \to y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t} \xrightarrow{h(t)} y(t)=\sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$



a_k

$H(s_k)$

$e^{s_k t}$

02 周期信号的傅里叶级数

麦克斯韦尔（Maxwell）盛赞傅立叶级数为“一首伟大的数学史诗”。

周期信号：$x(t)=x(t+T)$

基波周期：满足上式的最小T，记作T_0

周期信号$e^{j\Omega_0 t}$： $\longleftarrow$ $s=j\Omega_0 t$

$$\text{基波周期}\ T_0=\frac{2\pi}{\Omega_0}$$

$$\text{基波频率}\ \Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

成谐波关系的复指数信号集

- 每一个信号都是周期的，均以T_0为周期。
- 每个信号的频率都是基波频率的整数倍.

$$\phi_k(t)=\left\{e^{jk\Omega_0 t}\right\} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

将$\phi_k(t)$中的复指数信号线性组合起来，

构成连续时间信号$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$

则$x(t)$也一定是以T_0为周期的

指数形式的傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

其中：

$\dot{A}_k \rightarrow$ 傅立叶系数，通常为复数

$\Omega_0 \rightarrow$ 基波频率，正实数

$k \rightarrow k=\pm N$，称为N次谐波分量

傅里叶级数的系数

傅立叶级数：$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$

两边同乘以$e^{-jn\Omega_0 t}$，n为整数：

$$x(t)e^{-jn\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}e^{-jn\Omega_0 t}$$

对等式两边从0到T_0积分:

$$\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\boxed{\int_0^{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}e^{-jn\Omega_0 t}dt}$$

交换等式右边积分与求和的顺序：

$$\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\int_0^{T_0}e^{j(k-n)\Omega_0 t}dt}$$

当$k\neq n$时：

$$\int_0^{T_0}e^{j(k-n)\Omega_0 t}dt=\left.\frac{e^{j(k-n)\Omega_0 t}}{j(k-n)\Omega_0}\right|_0^{T_0}=0$$

当$k=n$时：

$$\int_0^{T_0}e^{j(k-n)\Omega_0 t}dt=T_0$$

傅里叶级数的系数

将此式代回原等式右边，得出：

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\Omega_0 t}dt$$

$$= \dot{A}_n T_0$$

$$\Rightarrow \dot{A}_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

其中：$(T_0 = \dfrac{2\pi}{\Omega_0})$

共轭性

如果$x(t)$为实信号$\Rightarrow x^*(t)=x(t)$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}=x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k^* e^{-jk\Omega_0 t}$$

以$-k$替代k，得到：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}=x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_{-k}^* e^{jk\Omega_0 t}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{A}_k=\dot{A}_{-k}^* \qquad \dot{A}_{-k}=\dot{A}_k^* \qquad A_0\text{为实数}$$

$k=N$和$k=-N$两项的系数互为共轭

此两项合并，才真正代表了信号中的一个正弦谐波分量

指数形式

将$k=N$和$k=-N$两项合并：

$$x(t)=\dot{A}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}+\dot{A}_{-k}e^{-jk\Omega_0 t}\right]$$

$$\because\ \dot{A}_{-k}=\dot{A}_k^*,\quad e^{-jk\Omega_0 t}=\left(e^{jk\Omega_0 t}\right)^*$$

$$\therefore\ \dot{A}_{-k}e^{-jk\Omega_0 t}=\left(\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}\right)^*$$

$$\therefore\ x(t)=\dot{A}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}+\left(\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}\right)^*\right]$$

$$=\dot{A}_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}\right\}$$

三角函数形式

复系数 $\dot{A}_k = \left|\dot{A}_k\right| e^{j\theta_k} = A_k e^{j\theta_k} = a_k + jb_k$

$$x(t) = \dot{A}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{A_k e^{j(k\Omega_0 t+\theta_k)}\right\}$$

$$= A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$ 相位表示法

$$= A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos k\Omega_0 t - b_k \sin k\Omega_0 t\right]$$ 分解表示法

三角函数形式

$$A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos k\Omega_0 t - b_k \sin k\Omega_0 t\right]$$ 分解表示法

由于：$\dot{A}_k = \dot{A}^*_{-k}$

则：$A_k = A_{-k}$　$\theta_k = -\theta_{-k}$　$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$　$a_k = A_k \cos\theta_k$

$a_k = a_{-k}$　$b_k = -b_{-k}$　$\theta_k = arctan\dfrac{b_k}{a_k}$　$b_k = A_k \sin\theta_k$

实周期信号的傅立叶级数系数，模为偶函数，相位为奇函数

余弦分量的系数为偶函数，正弦分量的系数为奇函数

三角函数形式

$$A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos k\Omega_0 t - b_k \sin k\Omega_0 t\right]$$ 分解表示法

a_k与b_k的计算方法:

$$\dot{A}_0 = A_0 = a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt$$ （直流分量，通过平均计算）

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\left(\cos k\Omega_0 t - j\sin k\Omega_0 t\right)dt$$

$$\because \dot{A}_k = (a_k + jb_k) \qquad \dot{A}_{-k} = (a_k - jb_k)$$

$$\therefore a_k = \frac{1}{2}(\dot{A}_k + \dot{A}_{-k}) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cdot\cos k\Omega_0 t\,dt$$

$$b_k = \frac{1}{2j}(\dot{A}_k - \dot{A}_{-k}) = -\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cdot\sin k\Omega_0 t\,dt$$

三角函数形式

$$A_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\Omega_0 t-b_k\sin k\Omega_0 t]$$ 分解表示法

简化表示形式:

$$x(t)=A_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\Omega_0 t-b_k\sin k\Omega_0 t]$$

$$\Downarrow(\text{引入}a_k'=2a_k,\ b_k'=2b_k)$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k'\cos k\Omega_0 t-b_k'\sin k\Omega_0 t]$$

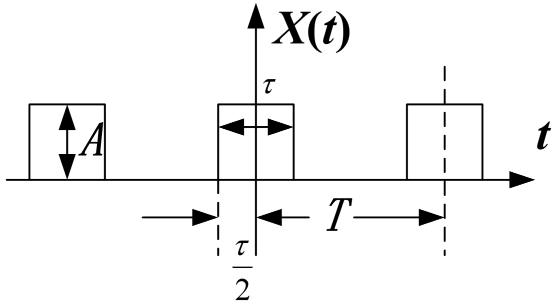
$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^{T_0}x(t)dt$$ 直流分量

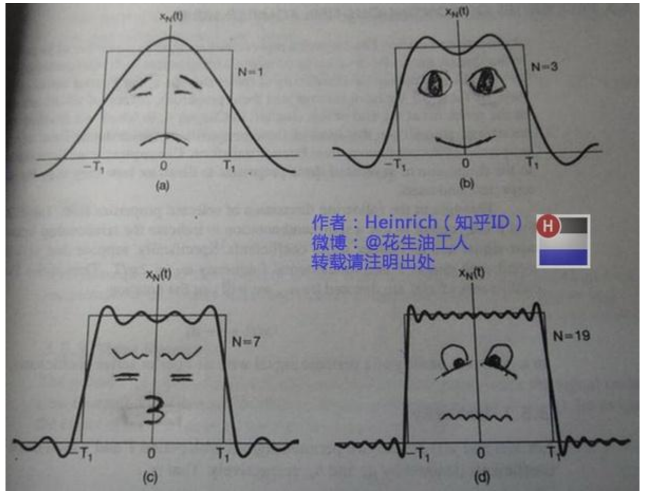
$$a_k'=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\cdot\cos k\Omega_0 tdt \qquad b_k'=-\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\cdot\sin k\Omega_0 tdt$$

当$k=1$时：$a_1'\cos(\Omega_0 t)-b_1'\sin(\Omega_0 t)$ 基波分量

当$k>1$时：$a_k'\cos(k\Omega_0 t)-b_k'\sin(k\Omega_0 t)$ 谐波分量

例：一周期矩形脉冲信号，高度为A，周期为T，脉宽为τ，求此信号的三角函数形式的傅立叶级数





解：$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt=\frac{A\tau}{T}$

$$a_n'=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos n\Omega_0 t dt=\frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}A\cos n\Omega_0 t dt$$

$$=\frac{2A\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega_0\tau/2)}{n\Omega_0\tau/2}$$

$$b_n'=-\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin n\Omega_0 t dt=0$$

$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\Omega_0\tau/2)}{n\Omega_0\tau/2}\cos n\Omega_0 t\right]$$

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

03 函数奇偶性与谐波分量

实函数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$ 如果$x(t)$为偶函数$x(t)=x(-t)$：

$$x(-t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{-jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_{-k} e^{jk\Omega_0 t}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{A}_k^*=\dot{A}_{-k}=\dot{A}_k \quad \Rightarrow \quad \dot{A}_k^*=\dot{A}_k$$

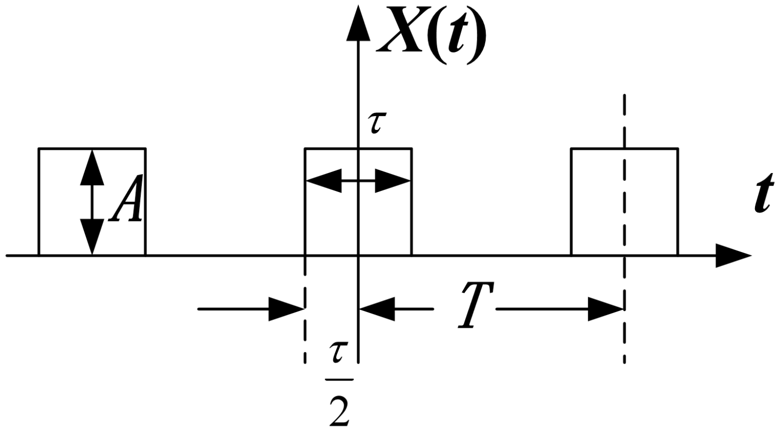
$\therefore$实偶信号的傅立叶系数，为实函数，且为偶函数

同理，如果$x(t)$为奇函数：

$$\dot{A}_k=-\dot{A}_{-k} \qquad \dot{A}_k=-\dot{A}_k^*$$

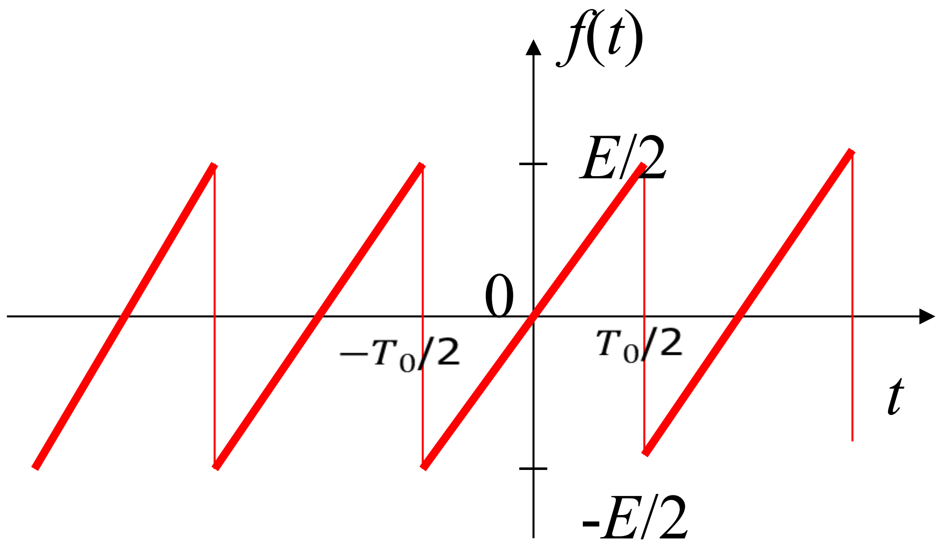
$\therefore$实奇信号的傅立叶系数，为纯虚函数，且为奇函数

偶函数



$$x(t)=\frac{A\tau}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}\cos k\Omega_0 t\right]\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

奇函数



$$f(t)=\frac{E}{\pi}(\sin\Omega_0 t-\frac{1}{2}\sin 2\Omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega_0 t-....)$$

任意实信号

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$$

$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)] \qquad x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

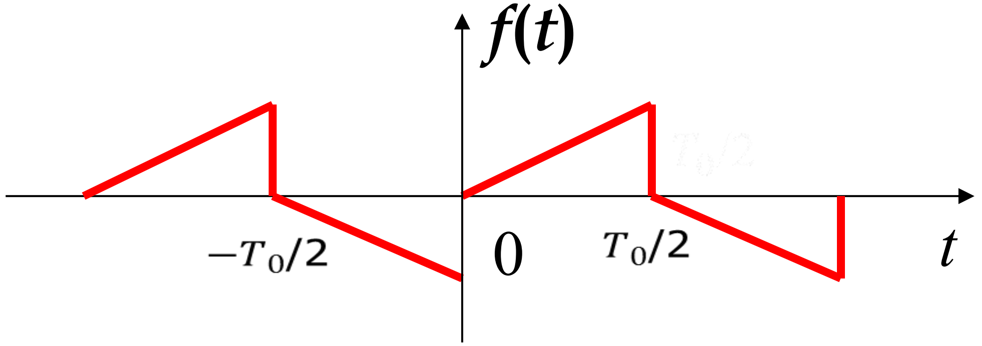
- A_k 是实信号$x(t)$的傅里叶系数，则有

  a_k 是偶信号$x_e(t)$的傅里叶系数

  jb_k 是偶信号$x_o(t)$的傅里叶系数

奇谐信号

周期为T的函数，任意半个周期的波形可由将前半周期波形沿t轴反转得到。

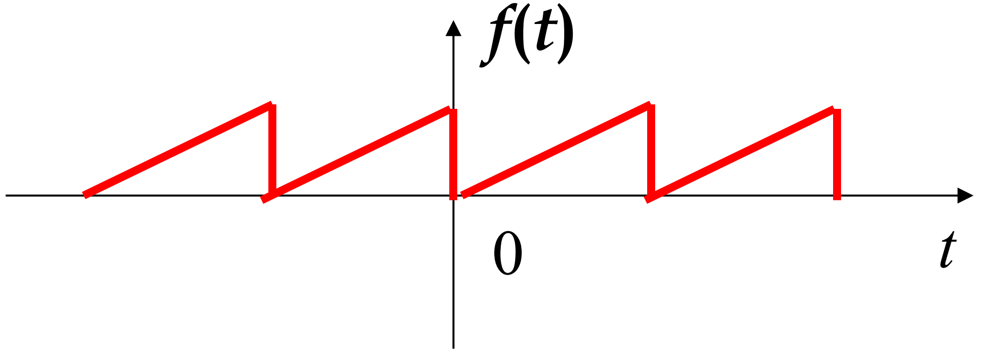


$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_0}{2}\right)$$

$$f(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\Omega_0 t - b_k \sin k\Omega_0 t] \qquad \left.\begin{matrix} a_{2k} \\ b_{2k} \end{matrix}\right\} = 0$$

偶谐信号

将**奇谐**函数的负半周沿t轴反转为正半周，此时的函数为偶谐函数。



$$f(t)=f(t\pm\frac{T_0}{2})$$

$$f(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos k\Omega_0 t-b_k\sin k\Omega_0 t\right] \qquad \left.\begin{matrix}a_{2k+1}\\ b_{2k+1}\end{matrix}\right\}=0$$

便于我们迅速计算傅立叶系数，以及判断波形的性质

作业

- 3.2(a)(b)(d)(e)
- 补充作业：

  假如信号$f(t)$是周期为T的周期性信号，则对于$f(t)+f(t+2.5T)$的傅立叶级数包含什么分量?