§2.2 冲激响应和阶跃响应

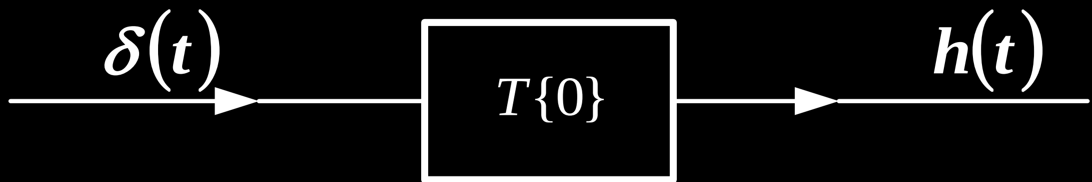
- 冲激响应
- 阶跃响应

一、冲激响应

1．定义

由单位冲激函数δ(t)所引起的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，记为$h(t)$。

$$h(t)=T[\{0\},\delta(t)]$$



2. 系统冲激响应的求解

•冲激响应的数学模型

对于LTI系统，可以用一***n***阶微分方程表示

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 y(t)=$$

$$b_m\frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} f(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+b_0 f(t)$$

响应及其各阶导数(最高阶为***n***次)

激励及其各阶导数(最高阶为***m***次)

令 ***f*(*t*)=*δ*(*t*)**

则 ***y*(*t*)=*h*(*t*)**

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h^{(1)}(t)+a_0h(t)$$

$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)$$

• $h(t)$解答的形式

由于$\delta(t)$及其导数在 $t \geqslant 0_+$ 时都为零，因而方程式右端的自由项恒等于零，这样原系统的冲激响应形式与齐次解的形式相同。

①与特征根有关

例:当特征根均为单根时

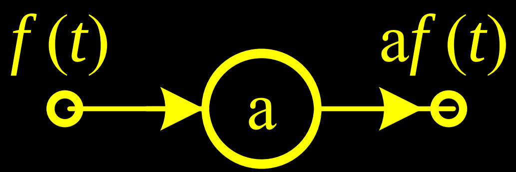
$$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}\right]\varepsilon(t)$$

举例

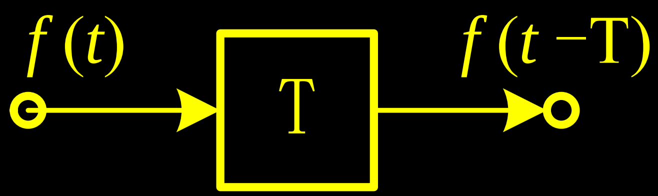
②与n, m相对大小有关

- 当$n>m$时，$h(t)$不含$\delta(t)$及其各阶导数；
- 当$n=m$时，$h(t)$中应包含$\delta(t)$;
- 当$n<m$时，$h(t)$应包含$\delta(t)$及其各阶导数。

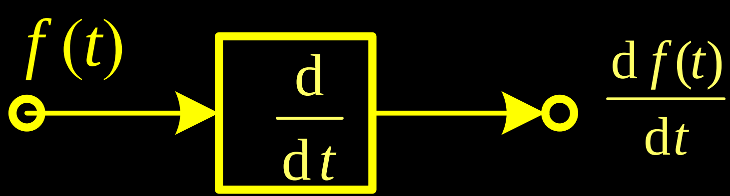
3. 基本单元的冲激响应



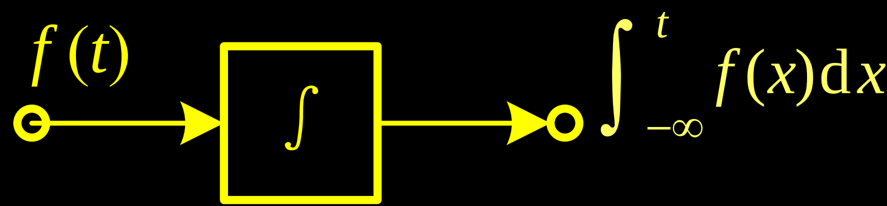
(a) 数乘器$h(t) = \text{a}\,\delta(t)$



(b) 延时器$h(t) = \delta(t-\text{T})$



(c) 微分器$h(t) = \delta'(t)$



(d) 微分器$h(t) = \varepsilon(t)$

二. 阶跃响应

$$g(t) = T[\ \varepsilon(t)\ ,\ \{0\}]$$

线性时不变系统满足微、积分特性

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,\mathrm{d}t$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad ,h(t) = \frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}t}$$

阶跃响应是冲激响应的积分，注意积分限：

$\int_{-\infty}^{t}$,对因果系统：$\int_{0_-}^{t}$

冲激响应求解举例

求系统 $\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2}+4\dfrac{d\,y(t)}{dt}+3y(t)=\dfrac{d\,f(t)}{dt}+2f(t)$ 的冲激响应。

解：将$f(t)\to\delta(t)$， $y(t)\to h(t)$

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2}+4\frac{d\,h(t)}{dt}+3h(t)=\frac{d\,\delta(t)}{dt}+2\delta(t)$$

求特征根 $\lambda^2+4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$

$n=2,m=1,n>m$ $h(t)$中不包含冲激项

带 $\varepsilon(t)$

冲激响应 $h(t)=(C_1 e^{-t}+C_2 e^{-3t})\varepsilon(t)$

两种求待定系数方法：•求0_+法 • 奇异函数项相平衡法

法一：求0_+值确定系数

设 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2} = a\delta'(t) + b\delta(t) + r_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = a\delta(t) + r_2(t) \\ h(t) = r_3(t) \end{cases}$

$\therefore \quad \boldsymbol{h(0_+) = 1 \;,\; h'(0_+) = -2}$

代入$h(t)$，确定系数C_1, C_2，得

$$h(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

法二：用奇异函数项相平衡法求待定系数

$$h(t)=\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned}h'(t)&=\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\delta(t)+\left(-C_1\mathrm{e}^{-t}-3C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)\\&=\left(C_1+C_2\right)\delta(t)+\left(-C_1\mathrm{e}^{-t}-3C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)\end{aligned}$$

$$h''(t)=\left(C_1+C_2\right)\delta'(t)+\left(-C_1-3C_2\right)\delta(t)+\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+9C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

将$h(t),h'(t),h''(t)$代入原方程

$$\left(C_1+C_2\right)\delta'(t)+\left(3C_1+C_2\right)\delta(t)+0\cdot\varepsilon(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

根据系数平衡，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\3C_1+C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{1}{2}\\C_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

解法三：线性时不变性质法

求系统 $$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+2f(t)$$ 的冲激响应。

解： 设$\boldsymbol{h_1(t)}$满足简单方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 h_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}\,h_1(t)}{\mathrm{d}t}+3h_1(t)=\delta(t)$$

$$h_1(t)=\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t) \qquad h_1'(0_+)=1 \qquad h_1(0_+)=0$$

将边界条件代入$\boldsymbol{h_1(t)}$式，解得 **C$_1$=1/2， C$_2$=−1/2，**

$$h_1(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

则由系统的线性时不变特性

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t}+2h_1(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

冲激响应求解举例2

例2 描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)= f''(t) + 2f'(t) + 3f(t)$$

求其冲激响应h(t)。

解 根据h(t)的定义 有

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta''(t)+ 2\delta'(t)+3\delta(t) \quad (1)$$

$$h'(0-) = h(0-) = 0$$

先求h'(0+)和h(0+)。

由方程可知， h(t) 中含 δ(t)

故令 $h''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t)+ r_1(t)$

$$h'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + r_2(t)$$

$h(t) = a\delta(t) + r_3(t)$ [$r_i(t)$ 为不含 δ(t) 的某函数]

代入式(1)，有

$$a\,\delta''(t) + b\,\delta'(t) + c\,\delta(t) + r_1(t) + 5[a\,\delta'(t) + b\,\delta(t) + r_2(t)]$$
$$+ 6[a\,\delta(t) + r_3(t)] = \delta''(t) + 2\,\delta'(t) + 3\,\delta(t)$$

整理得

$$a\,\delta''(t) + (b+5a)\,\delta'(t) + (c+5b+6a)\,\delta(t) + r_1(t) + 5\,r_2(t) + 6\,r_3(t)$$
$$= \delta''(t) + 2\,\delta'(t) + 3\,\delta(t)$$

利用 $\delta(t)$ 系数匹配，得 $a=1$， $b=-3$， $c=12$

所以 $h(t) = \delta(t) + r_3(t)$ （2）

$h'(t) = \delta'(t) - 3\,\delta(t) + p_2(t)$ （3）

$h''(t) = \delta''(t) - 3\,\delta'(t) + 12\,\delta(t) + r_1(t)$ （4）

对式(3)从0-到0+积分得 $h(0_+) - h(0_-) = -3$

对式(4)从0-到0+积分得 $h'(0_+) - h'(0_-) = 12$

故 $h(0_+) = -3$， $h'(0_+) = 12$

对$t>0$时，有 $h''(t) + 6h'(t) + 5h(t) = 0$

微分方程的特征根为-2，-3。故系统的冲激响应为

$$h(t)= C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}, \quad t>0$$

代入初始条件

$$h(0+) = -3, \quad h'(0+) =12$$

求得$C_1=3$，$C_2=-6$, 所以

$$h(t)= 3e^{-2t} - 6e^{-3t}, \quad t > 0$$

结合式(2)得

$$h(t)= \delta(t) + (3e^{-2t} - 6e^{-3t})\varepsilon(t)$$