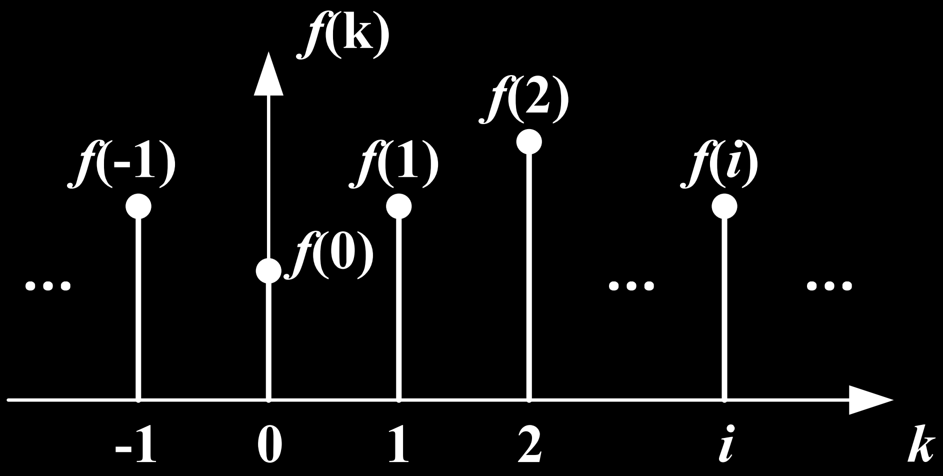
§ 3.3 卷积和

- 卷积和
- 卷积和图解法
- 不进位乘法求卷积
- 卷积和的性质

一、卷积和

1. 序列的时域分解



任意序列$f(k)$ 可表示为

$$f(k)=\ldots+f(-1)\,\delta(k+1)+f(0)\,\delta(k)+f(1)\,\delta(k-1)+f(2)\,\delta(k-2)$$

$$+\ldots+f(i)\,\delta(k-i)+\ldots$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)$$

2 .任意序列作用下的零状态响应

$f(k)$ → LTI系统 零状态 → $y_{zs}(k)$

根据h(k)的定义： $\delta(k) \longrightarrow h(k)$

由时不变性： $\delta(k-i) \longrightarrow h(k-i)$

由齐次性： $f(i)\,\delta(k-i) \longrightarrow f(i)\,h(k-i)$

由叠加性： $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) \longrightarrow \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) = f(k)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = y_{zs}(k)$$

$$y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$$

卷积和

3 .卷积和的定义

已知定义在区间（– ∞， ∞）上的两个函数f_1(k)和f_2(k)，则定义和

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\,f_2(k-i)$$

为f_1(k)与f_2(k)的**卷积和**，简称**卷积**；记为

$$f(k)= f_1(k)*f_2(k)$$

注意：求和是在虚设的变量 *i* 下进行的， *i* 为求和变量，k 为参变量。结果仍为k 的函数。

$$\boxed{y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)= f(k)*h(k)}$$

举例

二、卷积的图解法

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\, f_2(k-i)$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元： k换为 i→得 $f_1(i)$， $f_2(i)$

（2）反转平移：由$f_2(i)$反转→ $f_2(-i)$右移k → $f_2(k-i)$

（3）乘积： $f_1(i)\, f_2(k-i)$

（4）求和： i 从 $-\infty$到∞对乘积项求和。

注意：k 为参变量。

举例

三、不进位乘法求卷积

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\, f_2(k-i)$$

$=\ldots+f_1(-1)f_2(\text{k}+1) + f_1(0)f_2(\text{k}) + f_1(1)f_2(\text{k}-1)+ f_1(2)f_2(\text{k}-2)$

$+ \ldots + f_1(i)\, f_2(\text{k} -i) + \ldots$

$f(\text{k})$=所有两序列序号之和为**k** 的那些样本乘积之和。

如**k**=2时

$f(2)= \ldots+f_1(-1)f_2(3) + f_1(0)f_2(2) + f_1(1)f_2(1)+ f_1(2)f_2(0) + \ldots$

例 $f_1(\text{k}) =\{0,\ f_1(1),\ f_1(2),\ f_1(3),\ 0\}$

$f_2(\text{k}) =\{0,\ f_2(0),\ f_2(1),\ 0\}$

不进位乘法

排成乘法

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & f_1(1)\,, & f_1(2)\,, & f_1(3) \\
 & & & f_2(0)\,, & f_2(1) \\
\times & & & & \\
\hline
 & & f_1(1)f_2(1)\,, & f_1(2)\,f_2(1)\,, & f_1(3)\,f_2(1) \\
 & f_1(1)\,f_2(0)\,, & f_1(2)\,f_2(0)\,, & f_1(3)\,f_2(0) & \\
+ & & & & \\
\hline
 & f_1(1)\,f_2(0) & f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0) & f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0) & f_1(3)\,f_2(1)
\end{array}
$$

$$
f(k)=\{\,0,\quad f_1(1)\,f_2(0),\quad f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0),\quad f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0)\,,\quad f_1(3)\,f_2(1)\,,\quad 0\,\}
$$

不进位乘法适用有限长序列卷积

$y_{zs}(k)$的元素个数?

若： $f(k)$序列 $n_1 \le k \le n_2$,

$h(k)$序列 $n_3 \le k \le n_4$

则$y_{zs}(k)$序列 $(n_1+n_3) \le k \le (n_2+n_4)$

例如：

$f(k)$: $0 \le k \le 3$ 4个元素

$h(k)$: $0 \le k \le 4$ 5个元素

$y_{zs}(k)$: $0 \le k \le 7$ 8个元素

举例

四、卷积和的性质

1. 满足乘法的三律：(1) 交换律, (2) 分配律,(3) 结合律.

2. $f(\mathrm{k})*\delta(\mathrm{k}) = f(\mathrm{k})$ ，　$f(\mathrm{k})*\delta(\mathrm{k}-\mathrm{k}_0) = f(\mathrm{k}-\mathrm{k}_0)$

3. $f(\mathrm{k})*\varepsilon(\mathrm{k}) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$

4. $f_1(\mathrm{k}-\mathrm{k}_1)*f_2(\mathrm{k}-\mathrm{k}_2) = f_1(\mathrm{k}-\mathrm{k}_1-\mathrm{k}_2)*f_2(\mathrm{k})$

5. $\nabla[f_1(\mathrm{k})*f_2(\mathrm{k})] = \nabla f_1(\mathrm{k})*f_2(\mathrm{k}) = f_1(\mathrm{k})*\nabla f_2(\mathrm{k})$

举例

用定义求卷积和例

例：$f(k) = a^k\ \varepsilon(k)$, $h(k) = b^k\ \varepsilon(k)$，求$y_{zs}(k)$。

解：$y_{zs}(k) = f(k) * h(k)$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^i \varepsilon(i) b^{k-i} \varepsilon(k-i)$$

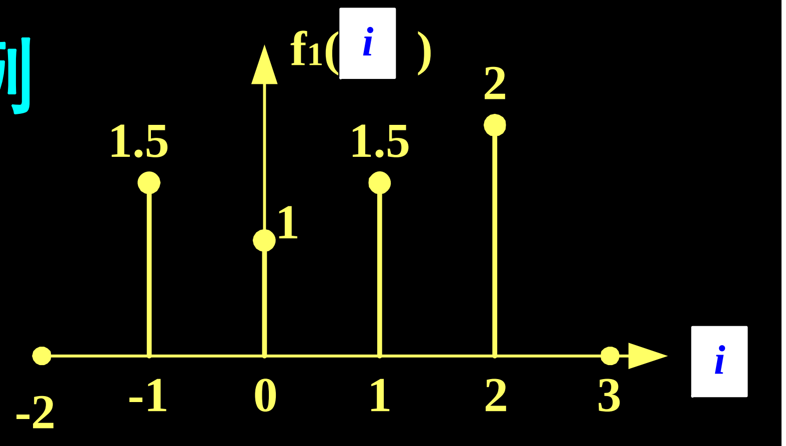
当$i < 0$, $\varepsilon(i) = 0$；当$i > \mathrm{k}$时，$\varepsilon(\mathrm{k} - i) = 0$

$$y_{zs}(k) = \left[\sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}\right]\varepsilon(k) = b^k\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^i\right]\varepsilon(k) = \begin{cases} b^k \dfrac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{a}{b}} & ,a \neq b \\ b^k(k+1) & ,a = b \end{cases}$$

$\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = (k+1)\ \varepsilon(k)$ a=b=1

图解法求卷积和例

例：$f_1(k)$、 $f_2(k)$如图所示，已知$f(k) = f_1(k) * f_2(k)$，求$f(2) =$？



解：
$$f(2)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\,f_2(2-i)$$

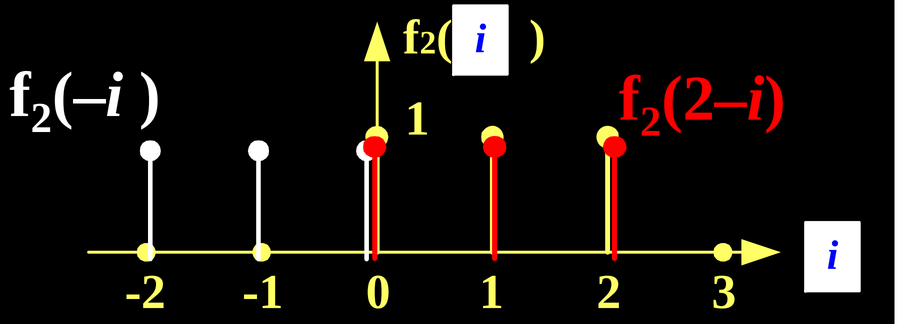
（1）换元

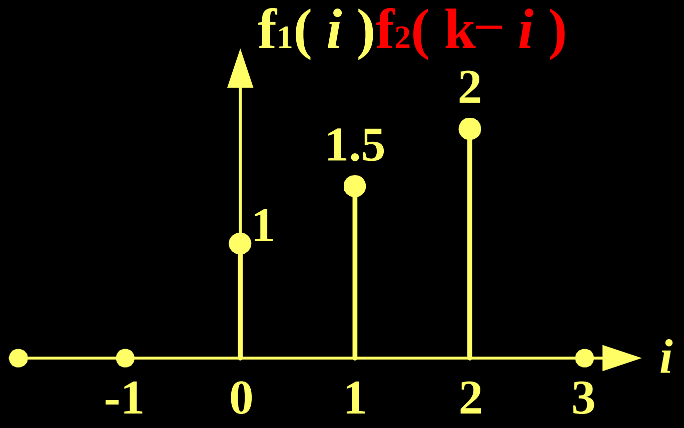
（2） $f_2(i)$反转得$f_2(-i)$

（3） $f_2(-i)$右移2得$f_2(2-i)$

（4） $f_1(i)$乘$f_2(2-i)$

（5）求和，得$f(2) = 4.5$





不进位乘法求卷积和例

例 $f_1(k) = \{0,\ \underset{\uparrow k=1}{2},\ 1,\ 5,\ 0\}$

$f_2(k) = \{0,\ \underset{\uparrow k=0}{3},\ 4,\ 0,\ 6,\ 0\}$

求$f(k) = f_1(k) * f_2(k)$

解

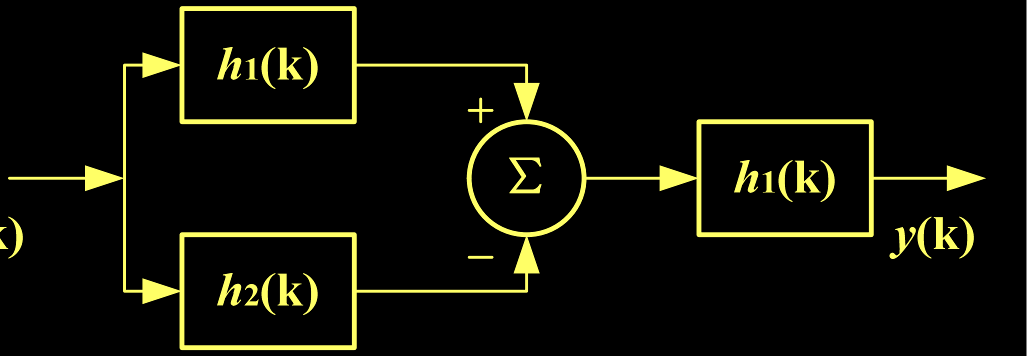
$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 3, & 4, & 0, & 6 \\
\times & & & & 2, & 1, & 5 \\
\hline
 & & & 15, & 20, & 0, & 30 \\
 & & 3, & 4, & 0, & 6 & \\
+ & 6, & 8, & 0, & 12 & & \\
\hline
 & 6, & 11, & 19, & 32, & 6, & 30
\end{array}$$

$f(k) =$

$\{0,\ \underset{\uparrow k=1}{6},\ 11,\ 19,\ 32,\ 6,\ 30$

性质求卷积和例

例1 复合系统中 $h_1(k) = \varepsilon(k)$， $h_2(k) = \varepsilon(k-5)$，求复合系统的单位序列响应 $h(k)$ 。



解 根据h(k)的定义，有

$$h(k)= [\ \delta(k)*h_1(k) - \delta(k)*h_2(k)\ ]*h_1(k)$$

$$= [h_1(k) - h_2(k)\ ]*h_1(k)$$

$$= h_1(k) * h_1(k) - h_2(k) * h_1(k)$$

$$= \varepsilon(k)*\ \varepsilon(k) - \ \varepsilon(k-5) * \varepsilon(k)$$

$$= (k+1)\ \varepsilon(k) - (k+1-5)\ \varepsilon(k-5)$$

$$= (k+1)\ \varepsilon(k) - (k-4)\ \varepsilon(k-5)$$