§ 3.2 单位序列响应和阶跃响应

- 单位序列响应
- 阶跃响应

一、单位序列响应

单位序列 δ**(k)**所引起的零状态响应，记为***h*(k)** 。

$$h(k)=T[\delta(k), \{0\}]$$

$$h(-i)=0 \quad i=1,2,3,\cdots N$$

例1 例2

二、阶跃响应 $g(k)=T[\varepsilon(k), \{0\}]$

由于

$$\varepsilon(k)=\sum_{j=-\infty}^{k}\delta(j)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)\quad，\quad \delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\nabla\varepsilon(k)$$

所以

$$g(k)=\sum_{j=-\infty}^{k}h(j)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j)\quad，\quad h(k)=\nabla g(k)$$

两个常用的求和公式：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=k_1}^{k_2}a^j=\begin{cases}\dfrac{a^{k_1}-a^{k_2+1}}{1-a} & a\neq 1\\ k_2-k_1+1 & a=1\end{cases} & (k_2\geqslant k_1)\\ \displaystyle\sum_{j=k_1}^{k_2}j=\dfrac{(k_2+k_1)(k_2-k_1+1)}{2}\end{cases}$$

单位序列响应例1

例1 已知某系统的差分方程为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k)$ 求单位序列响应 $h(k)$。

解 根据 $h(k)$ 的定义 有

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = \delta(k) \qquad (1)$$

$$h(-1) = h(-2) = 0$$

（1）递推求初值h(0)和h(1)。

$$h(k) = h(k-1) + 2h(k-2) + \delta(k)$$

$$h(0) = h(-1) + 2h(-2) + \delta(0) = 1$$

$$h(1) = h(0) + 2h(-1) + \delta(1) = 1$$

(2) 求h(k)

对于k >0， h(k)满足齐次方程

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = 0$$

特征方程

$$(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$$h(k) = C_1(-1)^k + C_2(2)^k \text{ ， } k>0$$

$$h(0) = C_1 + C_2 = 1\text{ , } h(1) = -C_1 + 2C_2 = 1$$

解得$C_1 = 1/3$ ，$C_2 = 2/3$

$$h(k) = (1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k \text{ ， } k \geqslant 0$$

或写为

$$h(k) = [(1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k]\ \varepsilon(k)$$

单位序列响应例2

例2 系统方程为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k) - f(k-2)$

求单位序列响应$h(k)$。

解 $h(k)$满足

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = \delta(k) - \delta(k-2)$$

令只有 $\delta(k)$作用时，系统的单位序列响应$h_1(k)$，

它满足

$$h_1(k) - h_1(k-1) - 2h_1(k-2) = \delta(k)$$

根据线性时不变性，

$$h(k) = h_1(k) - h_1(k-2)$$

$$= [(1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k]\,\varepsilon(k)$$

$$- [(1/3)(-1)^{k-2} + (2/3)(2)^{k-2}]\,\varepsilon(k-2)$$