随机事件及其概率

随机实验事件：E（可重复，偶然性，结果在预期范围）

基本事件集合：（ω1，ω2，ω3…）

样本空间：Ω

随机事件本身Ω必然发生，φ不含任何样本点

频率：f(A)=A 发生次数/总次数 n（n->∞）

概率：

非负性：0<=P(A)<=1

规范性：P(Ω 全集)=1

可列可加性：P(事件合集)=∑P(Ai)（事件两两**互不相容**，分割全集）

P(φ)=0

对立事件：A 并 B=Ω，A 交 B=φ（**P(A)=1-P(B)**）

概率加法：P(A 并 B)=P(A)+P(B)**-**P(A 交 B)

P(A 并 B 并 C)=P(A)+P(B)+P(C)- P(A 交 B（A,B,C 任意选两）)**+**P(A 交 B 交 C)

……

古典概率模型：样本空间中有限多个基本事件发生概率等可能

条件概率：

Monty Hall Problem 山羊问题：P(换+win)=2/3, P(留+win)=1/3

P(A|B)=P(AB)/P(B) （P(B)>0）

P(B)=P(A)P(B|A) / P(A|B)

P(B)=∑P(Ai) P(B |Ai)（Ai 为样本空间划分）

贝叶斯：**P(Ai |B)=P(Ai)P(B| Ai) / ∑P(Ai)P(B |Ai)**

事件独立性：

定义：P(AB)=P(A)P(B)（A，B 相互独立 Ω φ 与所有事件**相互独立**）

1. P(A|B)=P(A)，P(B|A)=P(B)（互不影响）
2. **{非 A，B}，{A，非 B}，{非 A,非 B}相互独立**
3. A1, A2…An 相互独立 等价于 非 A1，A2，…非 An 相互独立(任意两个取非事件)

随机变量及其分布

随机变量：对于每个{ω}，有唯一实数 X(ω)与之对应（ω->实数单向），X 称为随机变量

分布函数：**F(x)**=P(X ≤x)（x 属于 R）（F(x)概率累加）

单调不减，右连续(跳跃点**左空右实 F(x+0)=F(x))，F(-∞)=0，F(∞)=1**

P(X≤ b)=F(b)，P(a< X≤ b)=F(b)-F(a)，P(X> b)=1- F(b)，P(X< B)=F(b-0)

离散型：取值仅有有限个，分布函数为阶梯型，**离散型数列的所有和为 1**

分布列：出现某种情况的概率（可能为 0）

F(x)=P(X≤x)=∑pk(k=1,2…)

二项和公式：$(a+b)^n = \Sigma\left(C_n^k a^k * b^{(n-k)}\right)$

离散随机变量分布：二项，泊松，负二项，超几何，几何分布

二项分布：$\mathbf{X\sim b(n,p)}$: $\boldsymbol{P(x=k)=C_n^k P^k (1-p)^{n-k}}$

(每次实验出现结果有限个，相互不影响)

x 取 k 的概率为：

n 重伯努利实验成功次数：X~B（n ,p）(p=P(A))

最可能成功次数 X：(n+1)*p 为整数 X=(n+1)*p 或(n+1)*p-1，非整数 X=(n+1)*p

泊松定理：$\mathbf{X\sim P(\lambda)}: P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$当 n 非常大时（n≥100,np≤10），

二项分布的极限分布$(\boldsymbol{np}\rightarrow\boldsymbol{\lambda})$

几何分布：$\mathbf{X\sim G(p)}: P(x=k)=(1-p)^{k-1}p$事件成功时已做实验个数

超几何分布：$\mathrm{X\sim H(k,N,M,n): p(x=k)}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

负二项分布：$\mathrm{X\sim Nb(r,p): P(X=k)}=C_{k-1}^{r-1}P^r(1-p)^{k-r}$

第 r 次发生已进行的实验次数

连续随机变量：

分布函数：$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$**（非负可积）**

1. 非降性：F(x)为不减函数
2. 有界性：$0\le \mathrm{F(x)}\le 1; \mathrm{F}(-\infty)=0;\ \mathrm{F}(+\infty)=1$
3. 右连续性：$\mathrm{F(x)=F(x+0)}$

概率密度：随机变量 X 的分布函数$F(x)$，如果存在非负可积函数 f(x)，使得对任意实数 x，有$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$，f(x)为 X 的概率密度

1. 非负性：$\mathrm{F(x)>0\ (x\in(-\infty,+\infty))}$
2. 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$

均匀分布：$\boldsymbol{X\sim U(a,b)}: f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}(a\le x\le b\\ 0\end{cases}$，F(x)=(x-a)/(b-a)　(x~[a, b])

指数分布：$\boldsymbol{X\sim e(\lambda)}: f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\ \ (X>0)\\ \quad 0\end{cases}$，F(x)=1-$e^{-\lambda x}$（x > 0）

无记忆性：P(X>n+ k | X>n)=P(X>k)

正态分布：$\boldsymbol{X\sim N(\mu,\sigma^2)}: f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$\sigma$形状 μ对称轴

标准正态分布：$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$）分布函数：$\boldsymbol{\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{x^2}{2}}dx}$

对称性，**分布函数=面积累积**

$\mathrm{P（X>x_a）}=\alpha\ \ \mathrm{x_a}$为随机变量上侧$\alpha$分位点

随机变量函数分布：

已知离散随机变量 X 的分布律，求 Y=g(X)分布律（随机事件等价性）

已知连续型随机变量 f(x)概率密度，求 Y=g(X)概率密度

求出分布函数$\boldsymbol{F_Y(y)=p(g(x)\le y)}=\int_{\{\mathbf{x|g(x)\le y|}\}}\mathbf{f(x)\,dx}$ **，求导**得出概率密度

指数函数$Y=X^n$分奇偶$Y=X^n$开 n 次根时分**奇偶（寻找断点）**

$$\begin{cases} 0 \ (\text{为偶函数且} y < 0) \\ FY(y) = P\left(-y^{\frac{1}{n}} \le x \le y^{\frac{1}{n}}\right) \ (\text{其它}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{min}(z) = n[1-F(z)]^{n-1}f(z) \\ f_{max}(z) = n[F(z)]^{n-1}f(z) \end{cases}$$（n 为样本自由度）

多维随机向量

联合分布函数：$\mathbf{F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)}$(， =&& 随机变量落入方格**概率**⩾0)

1. $p_{ij} \ge 0 \ (i,j = 0,1 \dots)$，$\mathrm{f(x,y)} \ge 0$
2. $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

$F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = 0 \quad F(+\infty,+\infty) = 1$

二维随机向量：$\boldsymbol{F(x,y)} = \sum_{y_i \le y}^{\infty}\sum_{x_i \le x}^{\infty} p_{ij}(\text{离散型}) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f(u,v)\,dudv}$ (***连续型***)

边缘分布：$F_X(x) = F(x,+\infty)$，$p_{i.}$，$p_{.j}$

边缘密度：$\begin{cases} \mathrm{f_X}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ \mathrm{f_Y}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \end{cases}$

离散型：$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$（i 不变，遍历 j 所有取值，等比数列求和）

连续型：$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$（**注意定义域**）

二维正态的边缘分布为一维正态分布
三项分布的边缘分布为二项分布

条件分布：$\mathrm{P}(Y \le y | X = x) = \frac{P(X=x|Y\le y)}{P(X=x)} = \frac{P_{ij}}{p_{i.}} = \frac{\text{联合}}{\text{边缘}}$（分母为 0 时对分布函数取极限）

向量独立：$\mathrm{F(x,y)} = F_X(x) * F_Y(y)$（利用公式证明独立性，找反例证明不独立）
相互独立的事件的条件与无条件分布相同：$\mathbf{F}_{X|Y}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{F_X(x)}$
分布加法：
边缘分布：$F_{x_1,x_2}(x_1,x_2) = F_{x_1}(x_1) + F_{x_2}(x_2)$
独立性：$\mathrm{F([x_1,x_2,\cdots x_n],[y_1,y_2,\cdots y_n])} = F_X([\mathrm{x_1,x_2,\cdots x_n}]) * F_Y([\mathrm{y_1}, y_2, \cdots y_\mathrm{n}])$
泊松分布可加性
正态分布可加性：

1. $\mathbf{X + Y \sim N}\ (\boldsymbol{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2})$
2. $\mathbf{X \sim N}\ (\boldsymbol{\mu, \sigma^2}) \to \mathbf{-X \sim N}\ (\boldsymbol{-\mu, \sigma^2})$
3. $\mathbf{X \sim N}\ (\mathbf{0,1}) \to \mathbf{-X \sim N}\ (\mathbf{0,1})$

Gamma 分布：$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{x}^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx$

$\Gamma(\alpha)$的密度函数 $\Gamma(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{x}^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\mathrm{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$关于参数$\alpha$具有可加性

Tips：$\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}}$，$\boldsymbol{\Gamma(n) = (n-1)}!$

随机变量数字特性：

X 分布列：$p(x=x_i)=p_i$

若$\sum_{1=0}^{n}|x_i|p_i\,/\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\,dx$绝对收敛，数学期望$Ex=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}x_ip_i & \textit{离散随机变量}\\ \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx & \textit{连续随机变量}\end{cases}$

随机变量函数：数学期望$Ex=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}g(x_i)p_i & \textit{离散随机变量函数}\\ \int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\,dx & \textit{连续随机变量函数}\end{cases}$

1. $Ec=c$
2. $E(ax+b)=aEx+b$
3. $E(X+Y)=EX+EY$
4. $E\frac{X}{Y}=EXEY^{-1}$，$EXY=EXEY$
5. $\mathrm{Eg(x)H(Y)=Eg(x)EH(Y)}$（XY 相互独立）

方差：$Dx=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}(x_k-Ex)^2P_k\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-Ex)^2f(x)\,dx\end{cases}=\mathrm{Ex^2-Ex}$（描述函数的变化程度）

1. $\mathrm{D_c=0}$
2. $\mathrm{D(ax+b)=a^2}D(x)$
3. $D(x+y)=Dx+Dy$（x，y 独立）

切比雪夫不等式：$\mathrm{P(|x-\mu|>\varepsilon)\le\frac{Dx}{\varepsilon^2}}$

协方差：$\mathrm{Cov(X,Y)=E(X-Ex)(Y-Ey)=EXY-EXEY}$

1. $\mathrm{Cov(X,X)}=Dx$
2. $\mathrm{Cov(aX,Y)}=a\mathrm{Cov(X,Y)}$
3. $\mathrm{Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)}$

相关系数：$\mathrm{P_{xy}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DxDy}}$（$|\mathrm{P_{xy}}|\le 1$，若$\mathrm{P_{xy}}=0$不相关，$\mathrm{P_{xy}}=1$线性相关）

X，Y 独立（$\mathrm{f(x,y)=f_x}(x)*f_y(y)$）->不相关$\mathrm{P_{xy}}=0$，反之不正确

$$\begin{cases}X\sim(0,1):EX=p\ Dx=p(1-p)\ \textit{零一分布}\\ X\sim b(x,p):\boldsymbol{Ex=np\ Dx=np(1-p)}(P(x=k)=C_n^kP^k(1-p)^{n-k})\textit{二项}\\ X\sim P(\lambda):\boldsymbol{Ex=\lambda\ \ Dx=\lambda}\left(P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\textit{泊松}\\ X\sim U(a,b):\boldsymbol{Ex=\frac{a+b}{2}\ \ Dx=\frac{(a-b)^2}{12}}\ \left(f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}(a\le x\le b)\\ 0\end{cases}\right.\textit{均匀}\\ X\sim N(\mu,\sigma^2):\boldsymbol{Ex=\mu\ Dx=\sigma^2}\left(f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)\textit{正态}\\ X\sim e(\lambda):\boldsymbol{Ex=\frac{1}{\lambda}\ Dx=\frac{1}{\lambda^2}}\ \left(f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda}\ \ (X>0)\\ 0\end{cases}\right)\textit{指数}\end{cases}$$

极限定理：

大数法则：$\bar{x}_n\stackrel{P}{--}>E\bar{x}_n$（数无限多时，X 算术平均=期望的算术平均）

大数法则（X_i为相互独立随机变量序列）：

切比雪夫：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} EX_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0$（和的平均收敛期望和平均）

辛钦：$\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} X_i - \mu\right| < \varepsilon) = 1$（X 和的平均收敛于有限数学期望$\mu = EX_n$）

伯努利：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - P\right| < \varepsilon\right) = 1$（实际频率收敛于概率）

中心极限：

林德伯格：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) = \phi(x)$（独立同分布）

拉普拉斯：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) = \phi(x)$（二项分布）

独立同分布与二项分布极限均为标准正态分布

标准正态分布上位点：$u_{0.025} = 1.96$（$1 - \phi(x) < 0.025$ x=1.96）

抽样分布：

简单随机抽样：来自样本 X，独立同分布且具有相同分布函数$(X_1, X_2 \dots X_n)$
统计量：不含未知量的 n 元连续函数（观察后成为数值）

均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，方差：$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

原点矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$，中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$

样本总体：$E\bar{X} = \mu$（期望），$D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$（方差），$ES_n^2 = \sigma^2$

$\chi^2 -$分布（$\chi^2 \sim \chi^2(n)$）：$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$（$X \sim N(0,1)$，和服从自由度为 n 卡方分布）

可加性（$\chi^2(m) + \chi^2(n) \sim \chi^2(m+n)$），$E\chi^2 = n, D\chi^2 = 2n$

$t -$分布（$T \sim t(n)$）：$T = \frac{X}{Y/N}$（$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$）

概率密度为偶函数，收敛于标准正态；上侧分位点α：$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

$F -$分布（$F \sim F(m,n)$）：$F(m,n) = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$（$X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(n)$）

$\frac{1}{F} \sim F(n,m)$，上侧分位点α：$F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$

正态分布统计量：服从正态分布的简单随机抽样的统计量

1. $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$，$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$ 2. 均值与方差独立

3. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

参数估计：

样本中含未知参数θ，用样本估计θ
估计值：不显示依赖θ的统计量$\hat{\theta}(x_1, x_2 \dots x_n)$，观察样本后变为具体值

矩估计:

r 阶原点矩: $A_r = a_r(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n) = EX^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^n$

二阶中心矩: $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, 方差$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Tips: $\sqrt{\hat{\theta}^2} = \hat{\theta}$（使用连续函数$g(k) = \sqrt{k}$）

最大似然估计:

估计值: $L(\theta_1\theta_2 \dots \theta_n) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \theta_1\theta_2 \dots \theta_k)$（参数$\theta_1 \sim \theta_k$的似然方程）

求解方式: 似然估计方程 – 取对数 – 求极值（单调函数$g^{\wedge}(\theta) = g(\hat{\theta})$）
无偏性: $E\hat{\theta}(X_1, X_2 \dots X_n) = \hat{\theta}$
有效性: $E\hat{\theta} = \hat{\theta}$, 若$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$则$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效

Tips: $X \sim U(0, \theta)$, $f_{max}(t)\begin{cases}\frac{nt^{n-1}}{\theta^n} & 0 < t < \theta \\ 0\ 其它 & \end{cases}$ $(\theta = \max\{X_1, X_2 \dots X_n\})$

相合性: $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}(x_1x_2 \dots x_n) - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$

Tips: $\bar{X} \sim \mu, B_2 \sim \sigma^2, S^2 \sim \sigma^2$

区间估计:

$P\left(\hat{\theta}_1(x_1x_2 \dots x_n) < \theta < \hat{\theta}_2(x_1x_2 \dots x_n)\right) = 1 - \alpha$

置信区间(置信下限，置信上限): $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, 置信度: $1 - \alpha$
估计置信区间:

1. 构造不依赖于θ的枢轴量$H(x_1x_2 \dots x_n; \theta)$
2. $P(a < H(x_1x_2 \dots x_n; \theta) < b) = 1 - \alpha$
3. 根据 a, b 化为等价形式: $P(\hat{\theta}_1(x_1x_2 \dots x_n) < \theta < \hat{\theta}_2(x_1x_2 \dots x_n) = 1 - \alpha$
4. $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$为置信区间（注意已知与未知量）

假设检验:

检验步骤:

1. 提出原假设H_0和对立假设H_1
2. 选取合适统计量，H_0成立下统计量分布
3. $P(拒绝H_0 \parallel H_0成立) = P(X_1 \dots X_n \epsilon S \parallel H_0成立) \le \alpha$（确定拒绝域 S）
4. 样本落入 S 则拒绝，否则接受（拒绝域为小概率事件发生的区间）

检验错误: 第一类（错误拒绝H_0，$P = \alpha$），第二类（错误拒绝H_0）
单正态总体:

双边: $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \ne \mu_0$
单右: $H_0: \mu \le \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$
单左: $H_0: \mu \ge \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$