§2.4 卷积积分的性质

卷积积分是一种数学运算，它有许多重要的性质（或运算规则），灵活地运用它们能简化卷积运算。

- 卷积代数运算
- 与冲激函数或阶跃函数的卷积
- 微分积分性质
- 卷积的时移特性
- 相关函数

一、卷积代数运算

1．交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

证明

2．分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

系统并联运算

3．结合律

$$[f(t) * f_1(t)] * f_2(t) = f(t) * [f_1(t) * f_2(t)]$$

系统级联运算

二、与冲激函数或阶跃函数的卷积

1. $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$

证： $\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

2. $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

证： $\delta'(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f'(t)$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

3. $f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=t\,\varepsilon(t)$$

三、卷积的微积分性质

1. $$\frac{d^n}{dt^n}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{d^n f_1(t)}{dt^n}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{d^n f_2(t)}{dt^n}$$

证：上式= $\delta^{(n)}(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$= [\delta^{(n)}(t)*f_1(t)]*f_2(t) = f_1^{(n)}(t)*f_2(t)$

2. $$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau=[\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau]*f_2(t)=f_1(t)*[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau]$$

证：上式= $\varepsilon(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$= [\varepsilon(t)*f_1(t)]*f_2(t) = f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$

3. 在$f_1(-\infty)=0$或$f_2^{(-1)}(\infty)=0$的前提下，

$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$

例1 例2

四、卷积的时移特性

若 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$，

则 $f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_1 - t_2) * f_2(t)$

$= f_1(t) * f_2(t - t_1 - t_2)$

$= f(t - t_1 - t_2)$

例

求卷积是本章的重点与难点。

求解卷积的方法可归纳为：

（1）**利用定义式，直接进行积分**。对于容易求积分的函数比较有效。如指数函数，多项式函数等。

（2）**图解法**。特别适用于求某时刻点上的卷积值。

（3）**利用性质**。比较灵活。

三者常常结合起来使用。

五、相关函数

相关函数是鉴别信号的有力工具，被广泛应用于雷达回波的识别，脑电信号的分析，通信同步信号的识别等领域。

相关是一种与卷积类似的运算。与卷积不同的是没有一个函数的反转。

- 相关函数的定义
- 相关与卷积的关系
- 相关函数的图解

1.定义

实能量有限函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的互相关函数

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

互相关是表示两个不同函数的相似性参数。

可证明，$R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$。

若$f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，则得自相关函数

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f(t)\,\mathrm{d}t$$

显然，$R(-\tau)=R(\tau)$偶函数。

2. 相关与卷积的关系

$$R_{12}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2\,(x-t)\,\mathrm{d}\,x$$

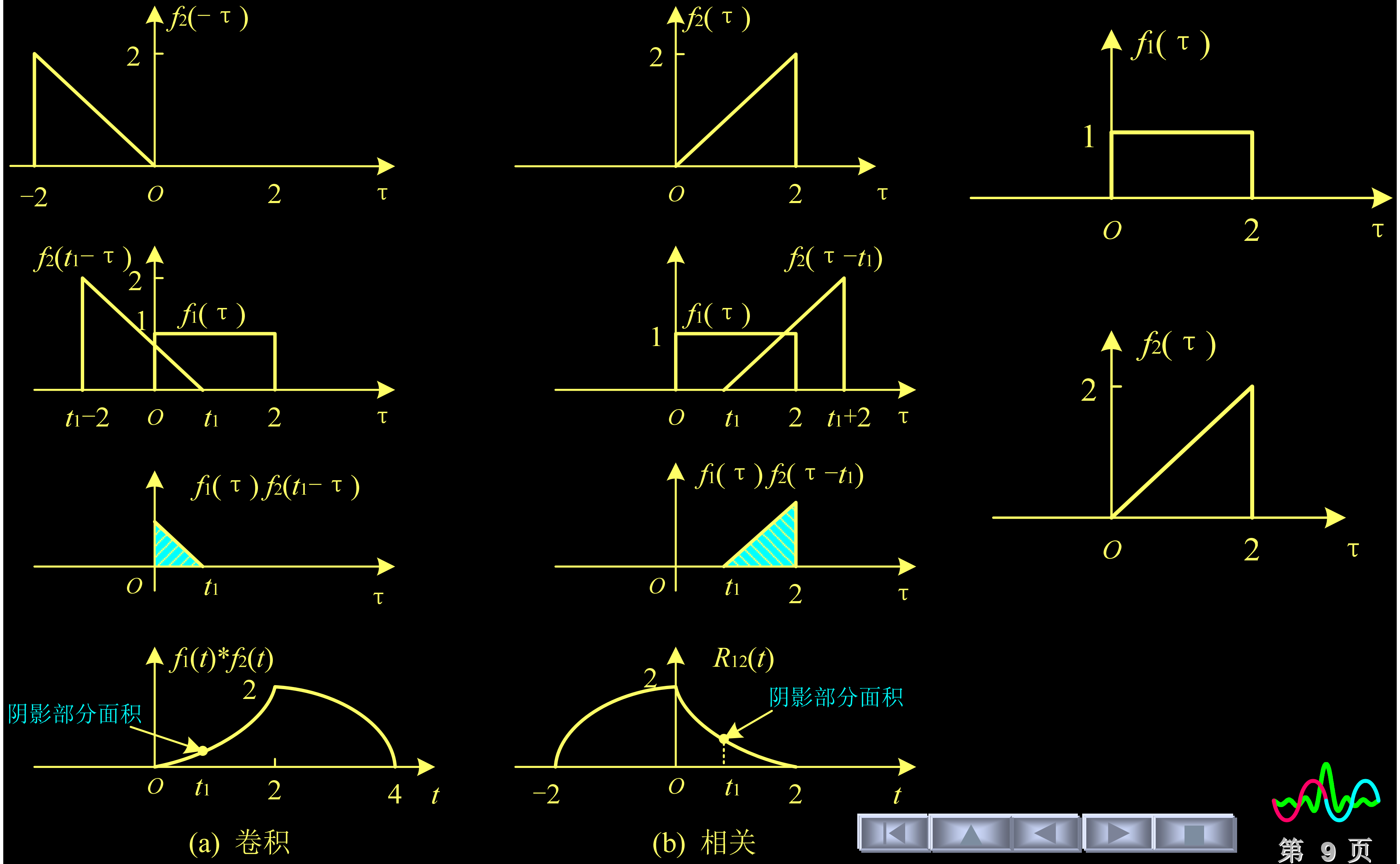
$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2\,(t-x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\boldsymbol{R_{12}(t)=f_1(t)*f_2(-t)}$$

$$\boldsymbol{R_{21}(t)=f_1(-t)*f_2(t)}\ 。$$

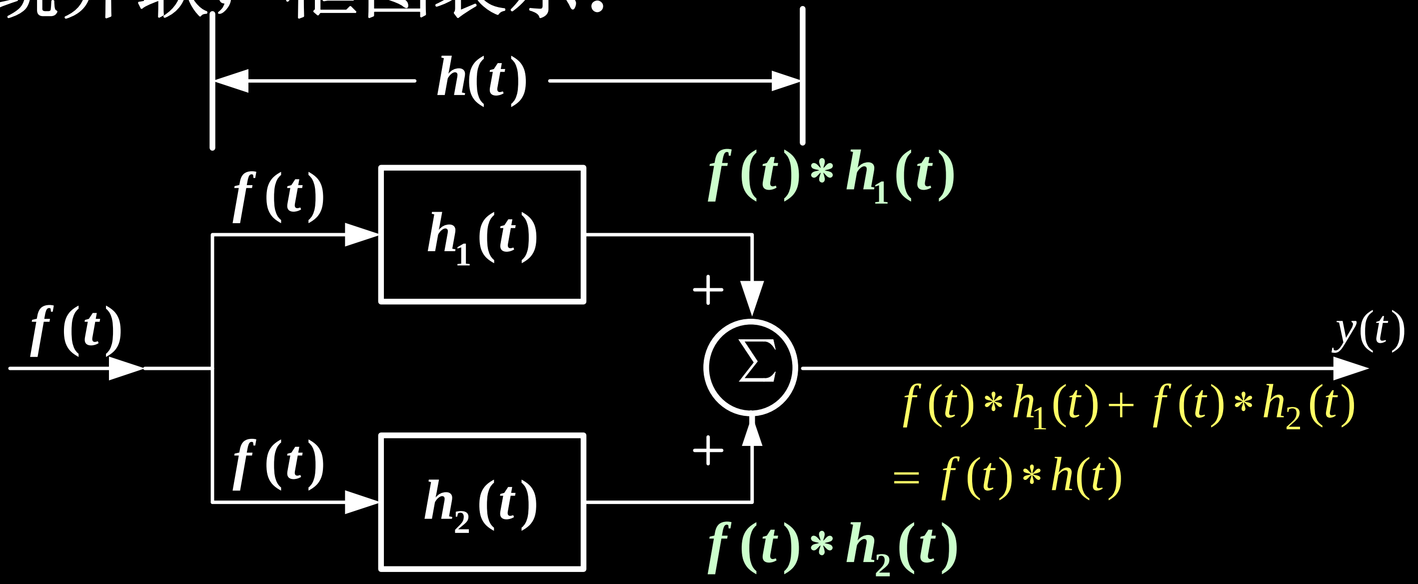
可见，若$f_1(t)$和 $f_2(t)$均为实偶函数，则卷积与相关完全相同。

3. 相关函数的图解 $(0<t_1<2)$

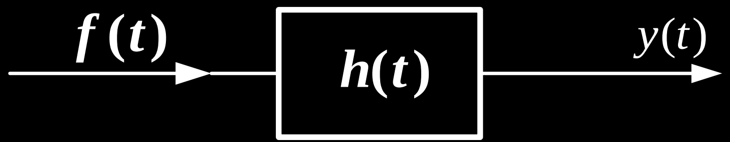


系统并联

系统并联，框图表示：



$$f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t)$$
$$=f(t)*h(t)$$



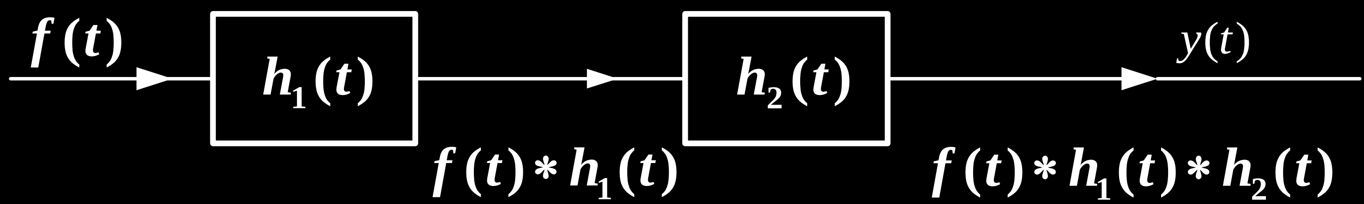
$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

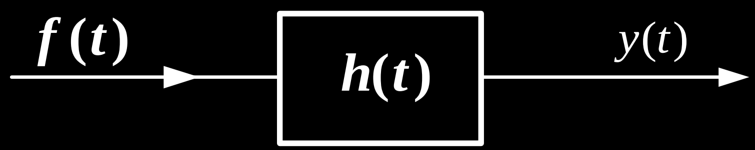
结论：子系统并联时，总系统的冲激响应等于各子系统冲激响应之和。

系统级联

$$f(t)*h_1(t)*h_2(t) = f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

系统级联，框图表示：



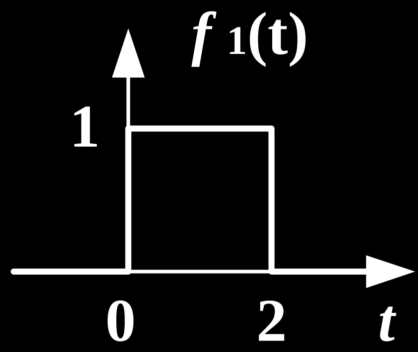


$$h(t) = h_1(t)*h_2(t)$$

结论：子系统级联时，总的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积。

卷积性质例1

例1：$f_1(t)$ 如图, $f_2(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$，求$f_1(t) * f_2(t)$



解：$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$

$f_1'(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

$$f_2^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)\,d\tau = \left[\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right]\varepsilon(t) = -e^{-\tau}\Big|_0^t \cdot \varepsilon(t) = (1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

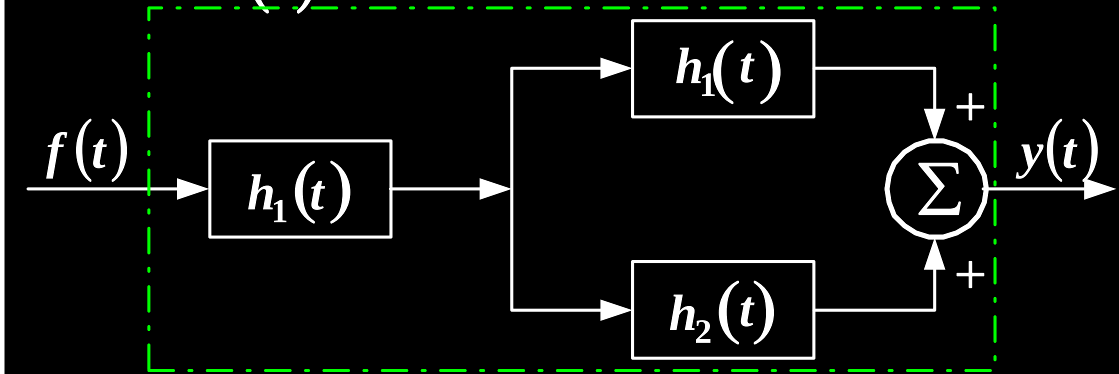
$f_1(t) * f_2(t) = (1-e^{-t})\,\varepsilon(t) - [1-e^{-(t-2)}]\,\varepsilon(t-2)$

注意：当 $f_1(t)=1$， $f_2(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$，套用 $f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t) = 0 * f_2^{(-1)}(t) = 0$ 显然是错误的。

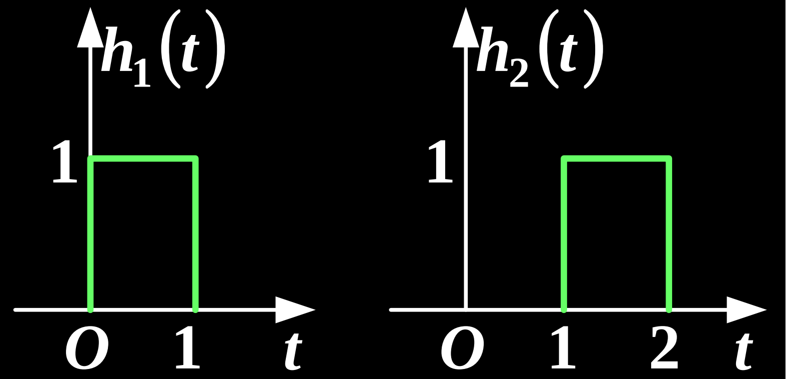
$f_1(-\infty) = 0$ ？ 这个条件不满足

卷积性质例2

图(a)系统由三个子系统构成，已知各子系统的冲激响应 $h_1(t), h_2(t)$ 如图(b)所示。求复合系统的冲激响应 $h(t)$，并画出它的波形。



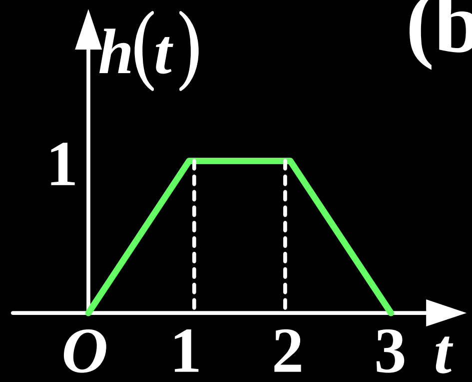
(a)



(b)

解： $h(t)=h_1(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$

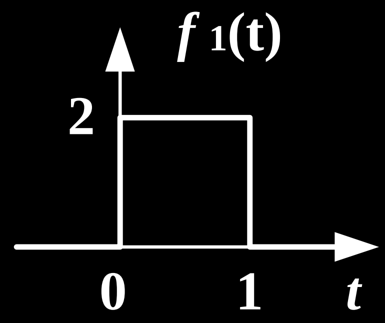
如图（c）所示

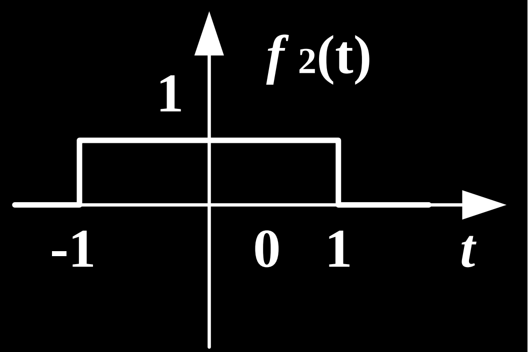


(c)

卷积性质例3

例：$f_1(t)$, $f_2(t)$如图，求$f_1(t) * f_2(t)$





解：$f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$

$f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$

$f_1(t) * f_2(t)$

$= 2\varepsilon(t) * \varepsilon(t+1) - 2\varepsilon(t) * \varepsilon(t-1)$

$-2\varepsilon(t-1) * \varepsilon(t+1) + 2\varepsilon(t-1) * \varepsilon(t-1)$

由于 $\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$

据时移特性，有

$$f_1(t) * f_2(t) = 2(t+1)\varepsilon(t+1) - 2(t-1)\varepsilon(t-1) - 2t\varepsilon(t) + 2(t-2)\varepsilon(t-2)$$