

矩阵论 2021 年试卷

分数
评卷人

一、填空题 (15分) (每小题3分, 共5小题)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_\infty =$ _____。

2. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为 _____。

3. 矩阵已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \\ 1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

则 A 的 LDV 分解为:

_____。

4. 令 $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} A^k =$ _____。

5. R^3 中的镜像变换 S 定义为 $S(x) = x - 2(x, u)u$, 这里 u 为单位向量。若 $S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$ _____。

分数	
评卷人	

二、(15分) 设已知 T 是 $R^{2 \times 2}$ 到 $R^{2 \times 2}$ 上的变换，
且对 $\forall X \in R^{2 \times 2}$ ，有 $T(X) = BXC$ ，其中

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- (1) 证明 T 是线性变换；
- (2) 求 T 在基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵 A ；
- (3) 求 $R^{2 \times 2}$ 的一组基，使 T 在该基下有对角矩阵表示。

分 数	
评卷人	

三、(15分)设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

(1)求其 Jordan 标准型 J_A 及相应的矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J_A$;

(2)求微分方程组 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = (1 \ 2 \ 1)^T$ 。

分数	
评卷人	

四、(10分)计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值(SVD)
分解 $A = U \Sigma V^H$ (请给出 U, Σ, V 具体矩阵形式)。

分 数	
评卷人	

五、 计算题 (1) (10分) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。

计算不相容方程组 $Ax = b$ 的最佳最小二乘解。

7

(2) (10分) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 计算 $e^A \sin(I - A)$ 。

7

分数	
评卷人	

六、证明题 (1)(8分) 假设 $A \in C^{n \times n}$ 为 Hermite 矩阵, I 为 n 阶单位矩阵。证明: $A^+ = \lim_{t \rightarrow 0} (A^2 + tI)^{-1} A$ 。

(2)(7分) 设非奇异矩阵 $A \in R^{n \times n}$, 向量 $b \in R^n$, 并设 σ_1 和 σ_n 分别为 A 的最大和最小奇异值。若 $Ax = b$ 且 $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, 证明

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \gamma \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}, \quad \text{其中 } \gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}, \text{ 范数为向量的 } 2 \text{ 范数。}$$

