平新乔微观经济学十八讲笔记

2004 年

感谢　　张潇方、王佳热心提供笔记

tianxie 友情扫描

十八讲笔记整理稿

第一讲 偏好与效用

§1

一. 选择（5类选择问题）

价格
1. 1个人从n个目标中选一（择优）（资源有限）
2. A个人 — B个人 （能力. 岗位）
(X) (Y) match - exchange 社会选择
3. m个人 → X 凭价格 → 排队（标准）[选择 → 冲突 → 解决机制 价格 排队 谦让]
目标一.（最优选） 低限 配额 谦让—道德
① 价格机制不起作用 or ② 没有让价格机制发挥作用（人为不正常排队）
4. m个人在n个目标中选一（社会选择） 对目标排序，m个人偏好加总.
5. m个人同时从n个目标中选（股市） 一般均衡.

价格机制是解决选择中冲突的一般机制.

二. 消费集（选择集）

第一.
购买三要素：① 欲望^X ② 能力—钱^Y ③ 价格—付费 $P=(P_1, P_2 \cdots P_n)$ 向量.

消费计划 $X=(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 钱数 $Y \geq PX$ 预算集 (P, Y)

欲望 x < 消费集 $\mathcal{X}$ （$x \in \mathcal{X}$）
偏好关系（$x^1. x^2. \cdots x^m$）$\in \mathcal{X}$ $x^k. x^g$ 的取舍关系.

第二.
消费集4性质：1. $\mathcal{X}$ 是 R 的非空子集. R^n_+

2. $\mathcal{X}$ 闭，极限点 $\in \mathcal{X}$.

3. $\mathcal{X}$ 为凸. ① 经济含义：$x^i \in \mathcal{X}$. $x^g \in \mathcal{X}$. $\forall \lambda \in [0,1]$.

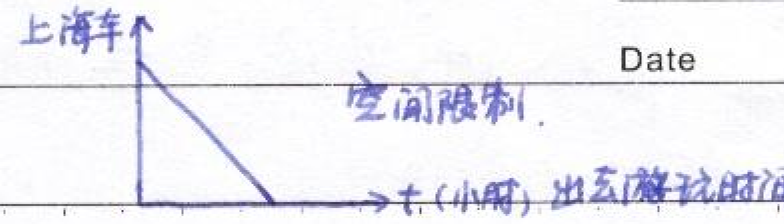
必有 $\lambda x^i + (1-\lambda) x^g \in \mathcal{X}$. 即 x^i 与 x^g 是无限可分的. 每一个消费计划中的商品是无限可分的. 但实际上，商品具有自然单位，非无限可分. 理论与实际的差距.

②. 生活中还是有办法让 x^i, x^g 接近于无限可分，ex: 房子 分期付款. 租电脑. 天. 月…. 消费计划切细.

4. $0 \in \mathcal{X}$. $0 \neq \phi$ ① 当 $\mathcal{X}$ 为有益品 goods 时. 0表示不购买.
② 当 $\mathcal{X}$ 为有害品 bads（如污染）. "0" 表示洁身自好，是目标.

No.

Date



空间限制.

第三. 现实生活中对X的凸性有限制.

第四. 为什么要强调凸性? 使定义域不留空, 便于理论论证.

三. 偏好关系 (公理)

向量 X Y 表示两个不同的消费计划

1. 弱偏好关系 $X \succsim Y$ X至少不差于Y.

[三个公理] A1: 完备性公理 对X中的 $\forall x, y$ 两个消费计划

或 $x \succsim y$, 或 $y \succsim x$ 即给定两个消费计划必能判断好坏.

假定这个公理不成立, 则选择必定自相矛盾. [证明 用严格偏好定义]

A2: 反身性公理 $\forall x \in X$, 必有 $x \succsim x$ (A_2包含于A_1)

A3: 传递性公理 若 $x \succsim y$, $y \succsim z$, 则 $x \succsim z$ (非循环)

[定义满足 A_1 并满足 A_3 为理性.]

例1 (古典投票悖论) 三个人或三个以上, 在3个目标中排序, 必出现偏好循环.

2. 严格偏好关系 ($\succ$) $x \succ y \Leftrightarrow$ 如果没有 $y \succsim x$ (充分必要条件)

即如果没有 $x \succ y$, 则必有 $y \succsim x$.

无差异关系: 如 $x \succsim y$, 且 $y \succsim x$, 则 $x \sim y$ (用弱偏好关系定义)

例2 另一种定义无差异的方式.

用严格偏好关系 {没有 $y \succ x$} 且 {没有 $x \succ y$} $\Leftrightarrow$ 没有 {$y \succ x$ 或 $x \succ y$} $\Rightarrow x \sim y$

这样对 $\forall x \neq y \in X$ 按严格偏好关系只有三种可能 $x \succ y$ 或 $y \succ x$ 或 $x \sim y$.

若同时有 $x \succ y$ 且 $y \succ x$ 则自相矛盾.

例3. 禽流感与疫苗 1979.

报告A { 疫苗a. 必救400人 $a \succ b$
疫苗b. $\frac{1}{3}$概率无人可救, $\frac{2}{3}$概率救600人 (600人面临死亡威胁, 从救人角度)

报告B { 疫苗a. 必死200人 $b \succ a$
疫苗b. $\frac{2}{3}$概率无人死亡, $\frac{1}{3}$概率死600人. (600人都活着, 看死亡威胁).

报告的顺序, 句式影响偏好. 很可能 $B \succ A$, 与 $A \succ B$ 同时发生.

实际上可证明，若弱偏好关系的A1不成立，一定可以导出 $A>B$ 且 $B>A$ 的自相矛盾的结果。

注意：无差异 ≠ 不能作出判断

经济学中为理论推导，取无差异 = 不能判断

$x\sim y$（一样好）$\Longleftrightarrow$ 既不能说 $x>y$ 又不能说 $y>x$。

若 $x\succsim y$ 且 $y\succsim x \Rightarrow x\sim y$，这样定义实际上有不合理的地方。

例4. $x=$(35个苹果，3个桔子)　$y=$(25个苹果，6个桔子)

$(35,3)\succsim(25,6)$　$(25,6)\succsim(35,3)\Rightarrow(35,3)\sim(25,6)$

$(35,3)\succsim(26,7)$　$(26,7)\succsim(35,3)\Rightarrow(35,3)\sim(26,7)$

则 $(35,3)\sim(25,6)\sim(26,7)$　但 $(26,7)\succ(25,6)$

说明无差异关系不能等同于不能做出判断。

四. 从偏好关系到无差异曲线

[并非所有偏好关系都能导出无差异曲线，要求行为良好（满足A4—A6）]

1. A4：（连续性）"$\succsim$"关系在 X 内是闭的　（"$\succsim$"关系不能逆转）

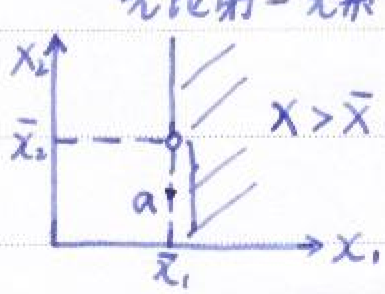
$\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$　$\lim_{n\to\infty}x^n\succsim\bar y$ 成立 只要 $x^n\succsim\bar y$　偏好判断标准一致。

例5.（连续性公理反例）词典编纂法偏好。

$X=(x_1,x_2,\cdots x_n)$　$\bar X=(\bar x_1,\bar x_2,\cdots \bar x_n)$

比较 $x,\bar x$，若 $x_1>\bar x_1$，则 $x\succ\bar x$，若 $x_1=\bar x_1$，$x_2>\bar x_2$，则 $x\succ\bar x$。

先比第一元素，若相同再依次比后一元素。



在 $\bar x$ 到 $\bar x_1$ 的虚线上　$\bar x_1=x_1$ 但 $x_2<\bar x_2\Rightarrow\bar x\succ x$　（a点…）

① "$\succ$"逆转　② 后一元素永远不可能替代前一元素，等级森严

2. (A5)' 局部非厌足性

对 $\forall x^0\in X$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in X$ 且 $x\in B_\varepsilon(x^0)$，有 $x\succ x^0$。

$B_\varepsilon(x^0)$ 是以 x^0 为圆心，ε 为半径的开圆，即在 x^0 附近一定能找到点 x 比 x^0 好。

含义：① 消费者对任何一种现状都不满足，　② 局部(local)含义比 globe 含义更强，渐进。

③ 定义本身没有确定 x 的方位，∴ (A5)'　④ 如果 $(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 都是 bads，则 (A5)'不成立

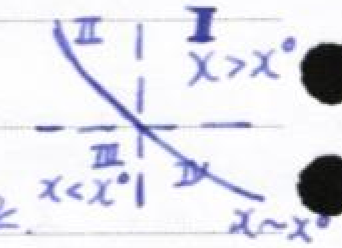
∵ 原点即最优点。

3. A5（单调性）

设 $x^1, x^2 \in X$ 若 $x_i^1 > x_i^2$ 对所有 $i=1,2,\cdots,n$ 均成立，$\Rightarrow x^1 >> x^2$ 多多益善

严格单调. $x_i^1 \geq x_i^2$ 且至少对一个 i，有 $x_i^1 > x_i^2 \Rightarrow x^1 \succ x^2$ 即消费者对所有商品都敏感.

含义：① 定方位 右上方 (I)，多维每一个都要大.



② (A5)' 意味着无差异关系不可能为宽带.

A5 意味着无差异关系一定是斜率为负、零、或 ∞，不可能为正.

③ (A5) $\Rightarrow$ (A5)'，反之不成立. 即 A5 强于 (A5)'.

[例6]证明：对 $\forall i=1,2,\cdots,n$，若 $x >> \bar{x} \Rightarrow x \succ \bar{x}$ ∴有 $x_i > \bar{x}_i$

对 $\forall \varepsilon > 0$，令 $\max|x_i - \bar{x}_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$$\therefore \|x-\bar{x}\| = \sqrt{(x_1-\bar{x}_1)^2+(x_2-\bar{x}_2)^2+\cdots+(x_n-\bar{x}_n)^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = \varepsilon.$$

以 $\bar{x}$ 为圆心，ε 为半径，找到 x，使 $x \succ \bar{x}$. 即(A5)' 满足.

4. (A6)'（偏好的凸性）

$x \sim x^\circ$，$\forall \lambda \in [0,1]$，有 $[\lambda x + (1-\lambda)x^\circ] \succsim x^\circ \sim x$

$\lambda x + (1-\lambda)x^\circ$ 是表示连接 x 与 x° 的一条直线. (A6)' 表明无差异曲线可能是一条直线.

A6：$\forall \lambda \in (0,1)$，$[\lambda x + (1-\lambda)x^\circ] \succ x^\circ \sim x$.

为什么要有凸性？① 消费者的选择是多样的，选择多样化单调选择至少不坏，不取极端.

② A6 无差异曲线一定凸向原点，经济含义：边际替代率是递减的.（经济学基本特点）

A4要求 不要出尔反尔 (A5)' 永不满足 A5 多多益善 A6 保持中庸

§2

一、从偏好关系到效用函数.

若"$\succsim$"关系满足 A4、A5 与 A6，则 $\exists u(\cdot)$，使得

$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ $x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$

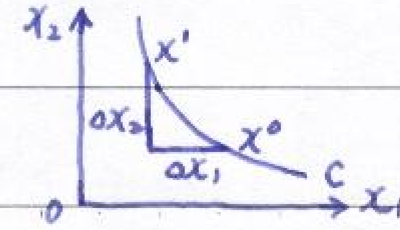
注意：① $u(x)$ 大于(等于) $u(y)$ 无法精确度量（大多少未知）.

②. $u(x)$ 表达式不唯一，允许"正单调转换".

$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y) \Leftrightarrow f[u(x)] > f[u(y)]$ $f(\cdot)$ 是 $u(\cdot)$ 的正单调转换.

[正单调转换：$V[u(x)] = A + C \cdot u(x)$ $(C>0)$；n次幂；开n次方；

取对数 $\ln[u(x)]$ $\cdots$] 把复杂关系转化为简单关系.



二. 边际替代率

$U(x_1, x_2) = C$，集合　　从 $x^\circ \to x'$，减少 Δx_1，增加了 Δx_2.

边际替代率 x° 斜率　$x^\circ \to x'$　$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$　取 $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{dx_2}{dx_1}$

设 $x_2 = f(x_1)$　$U(x_1, f(x_1)) = C$　取全微分

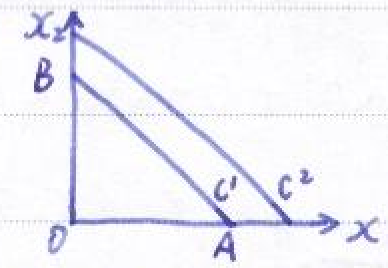
$$\frac{\partial U(\cdot)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(\cdot)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U(\cdot)/\partial x_1}{\partial U(\cdot)/\partial x_2} = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

$MRS_{1,2}$（x_1 对 x_2 的边际替代率）$= \left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| = \frac{MU_1}{MU_2}$

三. 常见的偏好关系与效用函数

1. 如"$\succsim$"关系只在乎总量　　$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = C$

在 $(x_1, x_2) \in X_+^2$

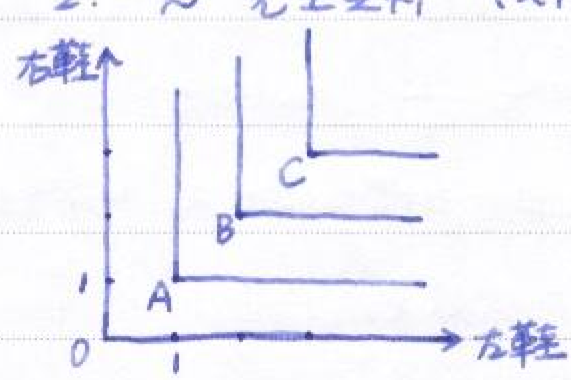


注意：① 称这种关系为"完全替代关系"．② 可以取端点，极端情况．

③ $MRS_{1,2} = 1$　　如果 $u(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ 则 $MRS_{1,2} = \frac{a_1}{a_2}$

④ 若 $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ 或 $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$ 与 "$x_1 + x_2$" $= C$ 表示同样偏好关系．（正单调转换）

2. "$\succsim$"完全互补（x_1，x_2 不能替代）关系在尖点



1:1 固定比例　　C > B > A.

注意：① $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

解点在 $x_1 = x_2$（比例关系为 1:1）

② 如果 $x_1 : x_2 = n:1$（n个 x_1 与 1个 x_2 搭配）

$u(x_1, x_2) = \min\{\frac{1}{n}x_1, x_2\} = C$ 或 $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, nx_2\} = nC$.

ex:
3. ① $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$　介于1，2之间．既非完全替代，也非完全互补．缺一不可．(任一种

注意：① $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$（柯布—道格拉斯函数）

如 $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$　乘 $\frac{1}{5}$ 次方 化为

$U(x_1, x_2) = [x_1^2 x_2^3]^{\frac{1}{5}} = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}$

$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ 与柯布—道格拉斯函数表达含义相同．（取 $\frac{1}{2}$ 次方）

② 对数化　$\ln[u(\cdot)] = \underbrace{\alpha_1 \ln x_1}_{y_1} + \underbrace{\alpha_2 \ln x_2}_{y_2}$　（线性）

α_1 是 x_1 商品对效用的贡献.

4. $\left.\begin{array}{l}\min(x_1, x_2) \\ (x_1, x_2) \\ (x_1+x_2)\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{综合}} u(x) = [\alpha_1 x_1^{\varepsilon} + \alpha_2 x_2^{\varepsilon}]^{\frac{1}{\varepsilon}}$

（ε 常替代系数）

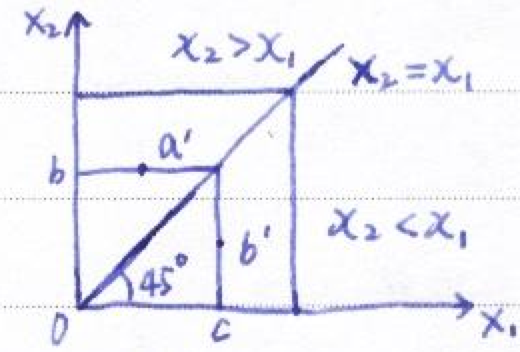
$\varepsilon \to 1$ $u(x)$ 线性 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ 完全替代

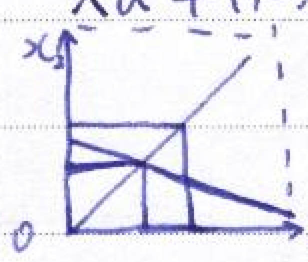
$\varepsilon \to 0$ $u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ 证明要用洛必达法则.

$\varepsilon \to -\infty$ $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$

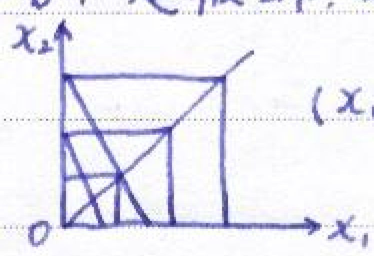
5. $u(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ 违反A6（严格凸性），但(A6)′不一定违反

$\lambda a' + (1-\lambda) b' < a' \sim b'$. 走极端，买贱.



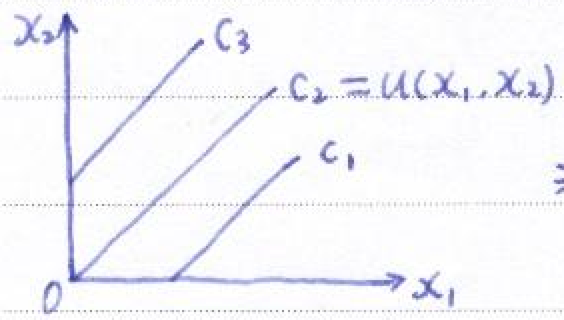


（x_2贵，只买x_1）



（x_1贵，只买x_2）

6. $u(x_1, x_2) = a_1 x_1 - a_2 x_2$ （x_1 goods，x_2 bads）



$C_1 > C_2 > C_3$

注意：① 有负号为bads.

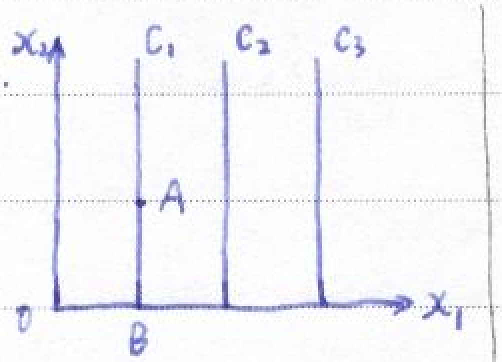
② 斜率 $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{MU_1}{MU_2}$

边际补偿率 $= \frac{a_2}{a_1}$（1单位x_2需用多少x_1补偿：$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_2}{a_1}$（$x_2$为单位））

若 $a_1 = 2$，$a_2 = 3$，$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$ 增加1单位x_1，贡献2单位，增加1单位x_2，伤害3单位，

如何赔偿x_2？用x_1(goods)赔偿，赔1.5个x_1可弥补x_2的伤害.

7.



替代率与补偿率关系：

① $u(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$（x_1，x_2均为goods）

$MRS_{1,2} = \frac{MU_1}{MU_2} = 3 = \left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|$

$\Leftrightarrow$ 一单位x_1可以替代3单位x_2.

$\Leftrightarrow$ 减少一单位x_1需要3单位x_2来补偿.

边际补偿率 $= MRS_{1,2}$（用x_1替代x_2）（x_1为单位）
（用x_2补偿x_1）

② $u(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 = C$（$x_1$ goods，x_2 bads）

$3dx_1 - dx_2 = 0$ $dx_1 = \frac{1}{3} dx_2$. $\Leftrightarrow$ 增加一单位x_2，需要用$\frac{1}{3}$单位x_1来补偿.

用goods补偿bads $\frac{1}{3} = \left|\frac{MU_2}{MU_1}\right| = \frac{1}{|MU_1/MU_2|} = \frac{1}{MRS_{1,2}}$

(用goods补偿bads)边际补赔率 = 1/(用goods替代bads)边际替代率

1单位bads需要多少goods来补偿 $\frac{dg}{db}$　　1单位goods可以替代多少单位bads $\frac{db}{dg}$

③ $u(x_1, x_2) = -a_1x_1 - a_2x_2$ (两有害)

$$MRS_{12} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$u(TW, TT, TC) = -0.147\,TW - 0.0411\,TT - 2.24\,TC$$

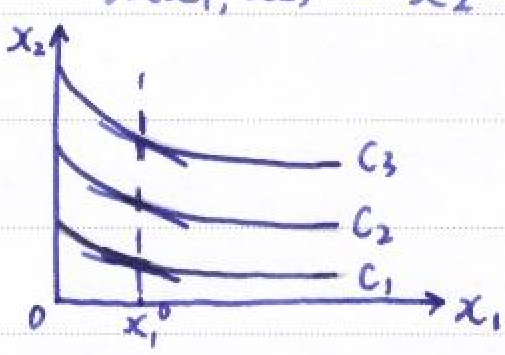
$$\frac{MU(TT)}{MU(TC)} = \frac{0.0411}{2.24} = 0.0183 \text{ (dollars)}$$

⇔ 减少一分钟交通时间等价于增加1.83美分. ⇔ 1分钟值1.83美分.

MRS_{ij} = 用j来补偿i的补偿率.

8. 拟线性偏好

$u(x_1, x_2) = \underset{\text{线性}}{x_2} + V(\underset{\text{非线性}}{x_1})$　其中 $V'(x_1) > 0$, $V''(x_1) < 0$ → $V(\cdot)$ 凹. 严格凸性(消费集 偏好关系)



$C_3 > C_2 > C_1$　　$MRS_{12} = \frac{MU_1}{MU_2} = V'(x_1)$　平行

① 无差异曲线位置与x_2有关, 形状于x_2无关.

② x_1点处对应效率与x_2无关.

③ x_2实质上是货币量 $MU_2 = 1$ = 货币币值 (将货币做为度量商品价值的单位)

9. 强分离且可加的效用函数

$$u(x_1, x_2 \cdots x_n) = u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_n)$$

$u_i'(x_i) > 0$, $u_i''(x_i) < 0$ 对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立, 即每种商品的边际效用递减.

x_j对MU_i没有影响, 即别的商品消费数量对于P_j没有影响(边际效用決定价)

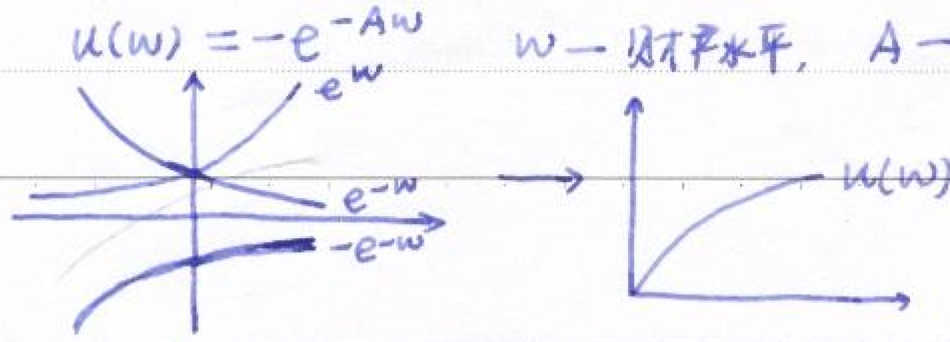
但P_j变化对x_i购买量却可能有影响 (收入效应, 替代效用)

$\tilde{u}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = u_1(x_1) \cdot u_2(x_2) \cdots u_n(x_n)$ 亦可表达强分离且可加同一偏好.

$(\because \ln\tilde{u}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \ln u_1(x_1) + \ln u_2(x_2) + \cdots + \ln u_n(x_n))$

10. 单变量的效用函数 (金融、保险中常见)

$u(w) = -e^{-Aw}$　　w — 财富水平, A — 风险规避程度. (A越大越怕风险)

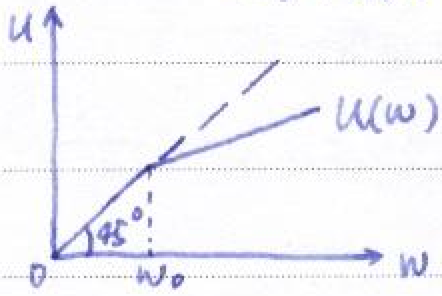


凹的效用函数

$$u(w)=\begin{cases} w & w\le w_0 \\ w_0+\alpha(w-w_0) & w>w_0 \end{cases}$$

w收入，w_0一个人所得税起征点

α税后留存率　$1-\alpha$：税率



四．效用函数应用（交通问题）

T. Domenich 与 D. MCFadden（1975年）（2000年诺奖）

TW: total walking time to and from bus or car (in minutes)

TT: total time of trip (in minutes)

TC: total cost of trip (in dollars)

$u(TW, TT, TC) = -0.147TW - 0.0411TT - 2.24TC$

① $\dfrac{MU(TW)}{MU(TT)} = \dfrac{0.147}{0.0411} \doteq 3$

表示愿意用3单位交通时间省一单位步行时间.

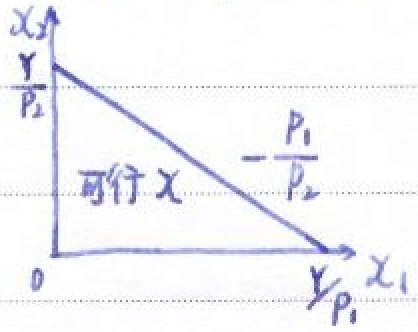
边际伤害率是递增的.

② $\dfrac{MU(TT)}{MU(TC)} = \dfrac{0.0411}{2.24} = 0.0183$　表示愿意用0.0183$节省1分钟交通时间

§3　消费者的基本问题

一．预算集（约束条件）

$B=\{x\in X_+^n: P_1x_1+P_2x_2+\cdots+P_nx_n=\sum_{i=1}^n P_ix_i \le Y\ ;\ Y=收入量\}$



如 $n=2$，$P_1x_1+P_2x_2\le Y$

$k=-\dfrac{P_1}{P_2}$　截距

$x_2=\dfrac{Y}{P_2}-\dfrac{P_1}{P_2}x_1$

二．消费者优化（两种求消费组合的解法）

规划 $\begin{cases} \max\limits_{\{x\}} u(x) \\ s.t\ p\cdot x\le Y \end{cases}$

拟线性中规定货币的边际效用为1，但在此，货币并不在效用函数中，货币的边际效用取决于预算

例：$u(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$　求 x_1^*, x_2^*

拉氏乘数法：

$L(x_1^*, x_2^*, \lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda(y - P_1 x_1 - P_2 x_2)$ （x_1, x_2, λ 内生）（y, P_1, P_2 给定）

$\lambda \geq 0$ $\begin{cases} 当\ y > P_1x_1 + P_2x_2 \Rightarrow \lambda = 0 \\ 当\ y = P_1x_1 + P_2x_2 \Rightarrow \lambda > 0 \end{cases}$ λ是货币的边际效用。$\Rightarrow \lambda(y - P_1x_1 - P_2x_2) = 0$.

三个一阶条件：$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow x_2^* = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{P_1}{P_2} x_1^*$

代入 $y = P_1x_1^* + P_2x_2^*$ （$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$） $\Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{\alpha y}{P_1} \\ x_2^* = \frac{(1-\alpha)y}{P_2} \end{cases}$

一般地，有以下规律：

$L = u(x_1, \cdots, x_n) + \lambda(y - P_1x_1 - P_2x_2 - \cdots - P_nx_n)$

(n+1)个一阶条件 $\begin{cases} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$ ~~$\Leftrightarrow \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i} = \lambda P_i$~~ $\Leftrightarrow \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i} = \lambda P_i \Rightarrow \frac{\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_j}} = \frac{MU_i}{MU_j} = \frac{P_i}{P_j}$ (*)

$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow y - P_1x_1 - P_2x_2 \cdots - P_nx_n = 0 \Leftrightarrow y = P \cdot x$ 预算线

$\Rightarrow x_i^*$

(*)：一个非常重要的性质，用来定价，配置原则

[均衡条件] $\frac{MU_i}{MU_j} = \frac{P_i}{P_j}$ 两种商品的边际效用之比一定等于两种商品相对价格之比。

$\Rightarrow \frac{MU_i}{P_i} = \frac{MU_j}{P_j} \Rightarrow \frac{MU_1}{P_1} = \frac{MU_2}{P_2} = \cdots = \frac{MU_n}{P_n} = \lambda$（货币边际效用）

[实际汇率$\overset{均衡}{}$决定原则，$P_i = \frac{名义汇率_i}{1\$}$ 买入1美元所需花费的i国货币（直接标价法）]

方法二：直接应用上述均衡~~条件~~的结论，$\frac{MU_i}{MU_j} = \frac{P_i}{P_j}$，代入预算线。

只要看到 $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ （$\sum \alpha_i = 1$）类效用函数，即可直接用此法。

α_i 的含义：第i种商品的购买支出占总支出的比重。（预算相对比例）

二. 最优解 $x^*(\cdot)$ 的性质

① $\frac{MU_i}{MU_j} = \frac{P_i}{P_j}$ （相对价格）

② $u(x_1 \cdots x_n)$ 则在最优时必有 $\frac{MU_1}{P_1} = \frac{MU_2}{P_2} = \cdots = \frac{MU_n}{P_n} = \lambda$

③ 从几何上看 $\underbrace{\frac{dx_j}{dx_i}}_{无差异曲线斜率} = -\frac{MU_i}{MU_j} = \underbrace{-\frac{P_i}{P_j}}_{预算线斜率}$

No.
Date

最优时，无差异曲线斜率 = 预算线斜率，即无差异曲线与预算线相切

④ λ表示什么含义？ 货币边际效用.

∵ 从 $\begin{cases} \max\{u(x)\} \\ s.t.\ p\cdot x \le y \end{cases}$ 解 $x_i^*(p_i, y)$ —— 马歇尔需求函数.

$u(x^*) = u(x_i(p,y))$ ~~(简化为单变量 x_i)~~

$\frac{\partial u(x_i(p,y))}{\partial y} = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y} = \lambda p_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y} = \lambda$

$(\because \sum p_i \cdot x_i^*(p,Y) = Y$ 。 $p_x \cdot X^*(p,y) = y.$ $\sum p_i \frac{dx_i}{dy} = 1$ / $p_x \frac{dx}{dy} = 1)$

$\Rightarrow \frac{\partial u(x(p,y))}{\partial y} = \lambda \geq 0$ $\begin{cases} =0 & 当\ y > p\cdot x \\ >0 & 当\ y = p\cdot x \end{cases}$

三. 马歇尔需求函数 $x_i(p,y)$

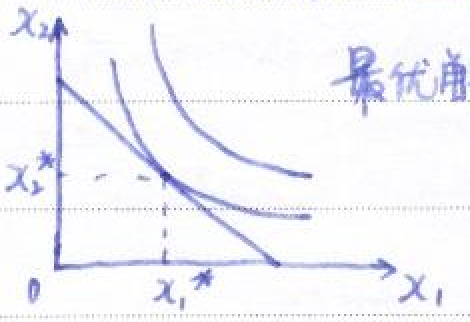
R_{++}^n = 维正空间 $\begin{cases} P = (P_1, \cdots P_n),\ \forall P_i > 0. \\ y \geq 0 \end{cases}$

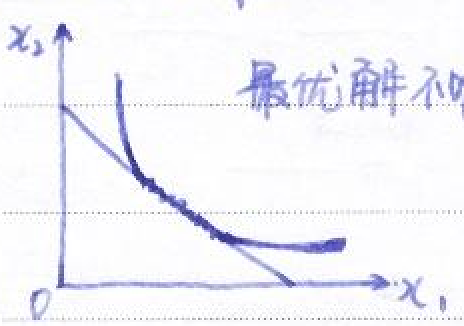
R_+^1 一维非负

① $x_i(tp, ty) = x_i(p,y)$ $(\forall t>0)$ 需求的零次齐次性. (t^0)

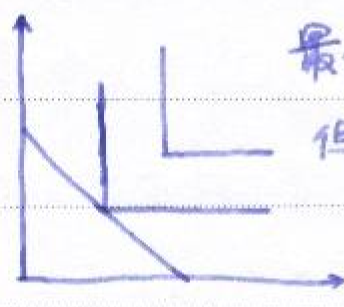
∵ $x^*(p,y)$ 是 $\begin{cases} \max u(x) \\ s.t.\ (t)p\cdot x \le (t)y \end{cases}$ 的解 [p与y同比例变化，需求量不变.]

② 如偏好关系严格凸，则 $x_i^*(p,y)$ 必唯一.





如 $x^*(\cdot)$ 是唯一 ⇏ 偏好关系是严格凸. (反例：



)

:讲 间接效用函数与支出函数

§1 间接效用函数

一. 定义: $V(p,y)=\max\{u(x^*)\}$ s.t. $p\cdot x\le y$. $\because x^*(p,y)$ $\begin{pmatrix}p'\\y'\end{pmatrix}\to u^*(x'(\cdot))$ …… $\Rightarrow V(p,y)$

做法: ① 从 $\begin{cases}\max u(x)\\ \text{s.t. } px\le y.\end{cases}$ 解出 $x^*(x_1^*,\cdots x_n^*)$

($u(x)$ 直接效用函数)
(消费量表示效用水平.)

② x^* 代回 $u(x)$, $u(x^*)=V(p,y)$.

例 $u(x_1,x_2)=x_1^{\frac12}x_2^{\frac12}$ $\because x_1^*=\frac{y}{2p_1}$ $x_2^*=\frac{y}{2p_2}$

$\therefore V(p_1,p_2,y)=\left(\frac{y}{2p_1}\right)^{\frac12}\left(\frac{y}{2p_2}\right)^{\frac12}=y/2\sqrt{p_1p_2}$ (用价格和收入表示效用水平)

二. 意义: ∵通常政府所控制的政策变量有两个, 价格政策. 收入政策. p, y 可控.

$u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1x_2}$ $Y=2$

ex: $P_1=0.25$, $P_2=1$, 征税对 x_1 ① 征消费税 $t=0.25$/单位 ② 征所得税, 对 y.

评价两种政策后果 ($V(p,y)$ 效用度量单位统一, 大)

$\because V(p,y)=\frac{Y}{2\sqrt{p_1p_2}}=2$ (未征税)

① 征消费税 含税价 $p_1'=0.25+t=0.5$ $x_1'=\frac{Y}{2p_1'}=\frac{2}{2\times0.5}=2$ ($x_1=4$ 不鼓励消费)

政府税收收入 $=x_1'\cdot t=2\times0.25=0.5$

$V'(p_1',p_2,y)=\frac{y}{2\sqrt{p_1'p_2}}=\frac{1}{\sqrt{0.5}}\doteq1.41$

∴如征消费税后果是 ① 财政收入 0.5 单位 ② 抑制 x_1 消费 (从4单位↓为2单位)

③ 消费者间接效用从2降为1.41.

②. 如征所得税 0.5 单位, $y\to1.5$. (p_1,p_2) 不变, 所得税不影响商品价格.

$V(p_1,p_2,y')=\frac{1.5}{2\sqrt{0.25}}=1.5>1.41$

∴所得税的后果是 ① 财政收入 0.5 单位 ②. $x_1'=\frac{1.5}{2p_1}<x_1$, $x_2'<x_2$

消费量均下降 ③ $V(p_1,p_2,y')>V(p_1',p_2,y)$ (征税量同), ∴对于买了征税品的消费者更欢迎所得税.

三. $V(p,y)$ 性质. 另一种方法求解马歇尔需求函数. (拉氏; 已知 V)

$$x_i^*(p,y)=-\frac{\partial V(p,y)/\partial p_i}{\partial V(p,y)/\partial y}$$

No.

Date

例 P26.3. 已知 $v(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1+p_2}$ 求马歇尔需求函数.

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{m}{(p_1+p_2)^2} \qquad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2} = -\frac{m}{(p_1+p_2)^2} \qquad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial m} = \frac{1}{p_1+p_2}$$

$$x_1^* = \frac{-\partial v(\cdot)/\partial p_1}{\partial v(\cdot)/\partial m} = \frac{m}{p_1+p_2} \qquad x_2^* = \frac{m}{p_1+p_2} \qquad \therefore x_1^* = x_2^* = \frac{m}{p_1+p_2}$$

★ $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

解: 满足 $x_1^* = x_2^*$ $\quad \therefore p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = y$.

$$x_1^* = x_2^* = \frac{y}{p_1+p_2}$$

∴ 如果两种商品完全互补, 且比例是 1:1, 则 x_1 必须与 x_2 一起定价, 消费者实际注意 p_1+p_2 和.

推广: $\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \Rightarrow \frac{y}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x\}} \{\min\{x_1, x_2\}\} \\ \quad s.t\ p_1x_1 + p_2x_2 \le y \end{cases} \Rightarrow x_1^* = x_2^*.$$

若 $u(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.

$$\begin{cases} \max\limits_{\{x\}} \{\max\{x_1, x_2\}\} \\ \quad s.t.\ p_1x_1 + p_2x_2 \le y \end{cases}$$

即找 $\max\{\frac{y}{p_1}, \frac{y}{p_2}\} \Leftrightarrow \min\{p_1, p_2\}$.

行为: 求量不求质 (穷人). 最优解一定在坐标轴上. (而根据实践)

四. $$-\frac{\partial v(p,y)/\partial p_i}{\partial v(p,y)/\partial y} = x_i^*(p,y) \quad \text{罗尔恒等式}$$

罗尔恒等式的直觉 (经济背景)

① $$\frac{\partial v(p,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x^*(p,y))}{\partial y} = \lambda \qquad (1)$$

② $$\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i} = \frac{\partial u(x^*(p,y))}{\partial p_i} = \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_1^*} \cdot \frac{\partial x_1^*(\cdot)}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_n^*} \cdot \frac{\partial x_n^*(\cdot)}{\partial p_i} = -\underbrace{\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}}_{}$$

Δx_i. 增加的部分单位

在 $v(p,y)$ 时, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots x_n^*)$ 最优 带来

∴ 对 $\forall p_i$ 变动, x_i^* 不应变动, 但存在收入效应

$$\therefore \frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i} = -\lambda p_i \frac{x_i^*}{p_i} \qquad (2)$$

$\frac{(2)式}{(1)式}$: $$\frac{-\partial v(p,y)/\partial p_i}{\partial v(p,y)/\partial y} = x_i^*$$

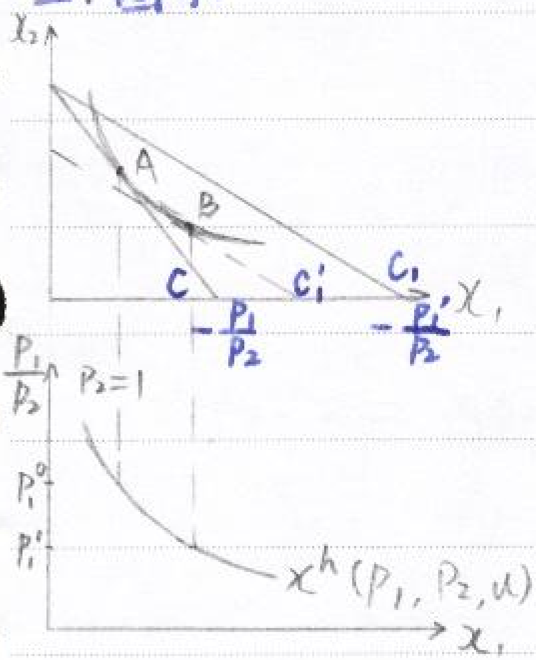
函数

一. 问题 $\begin{cases} \min\{p, x\} \text{ (开支)} \\ s.t.\ u(x) \geq u \text{ (最低生活保障)} \end{cases}$

① 解点 $x^h(p,u)$ 与 y 无关，$x^h(p,u)$ 是 hicks 需求函数.

② 一般而言，马歇尔需求函数 $\neq$ Hicks 需求函数 $(x^*(p,y) \neq x^h(p,u))$.

二. 图示



现在考虑 P_2 不变，但 P_1 下降. $P_1' < P_1$.

C_i' 是希克斯补偿后的预算线

$\because P_1$ 下降，需负补偿 $y^0 - y'$ 保证效用不变 $A.B \in u$.

这样做的目的.

① 保持居民的生活水平不受影响 (u 不变)

② 让价格更灵活地反映需求 (P 比价可变)

三. 希克斯需求函数 $x_i^h(p,u)$ 与马歇尔需求函数 $x_i^*(p,y)$ 的异同.

1. 一般地说 $x_i^*(p,y) \neq x_i^h(p,u)$

例 P34. 已知 $u(\cdot) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$,

已知马歇尔需求函数 $\begin{cases} x_1^*(p,y) = \frac{y}{2p_1} \\ x_2^*(p,y) = \frac{y}{2p_2} \end{cases}$ 再求 $\begin{cases} x_1^h(p,u) = ? \\ x_2^h(p,u) = ? \end{cases}$

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda[\bar{u} - u(x_1, x_2)]$$

$$\text{F.O.C} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= p_1 - \lambda \tfrac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= p_2 - \lambda \tfrac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= \lambda u_1(x) \\ p_2 &= \lambda u_2(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{x_2^h}{x_1^h} \quad p_1x_1^h = p_2x_2^h \quad p_1x_1^h + p_2x_2^h = 2p_1x_1^h = e \text{ (支出)}$$

$$\therefore x_1^h = \frac{e}{2p_1} \quad x_2^h = \frac{e}{2p_2} \quad \because \bar{u} = (x_1^h)^{\frac{1}{2}}(x_2^h)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{2\sqrt{p_1p_2}} \quad \therefore e = 2\sqrt{p_1p_2}\,\bar{u}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1^h(p,\bar{u}) = \bar{u}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \\ x_2^h(p,\bar{u}) = \bar{u}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \end{cases} \quad \text{对比} \neq \quad \begin{cases} x_1^*(p,y) = \frac{y}{2p_1} \\ x_2^*(p,y) = \frac{y}{2p_2} \end{cases}$$

含义：$\because x_i^h$ 中的 $\bar{u}$ 是不变的，是外生变量，$\therefore$ 希克斯需求函数仅由相对价格变化引起需求变化.

No.

Date

希克斯需求曲线相当于一条特殊的无差异曲线.

但马歇尔需求函数 $x_i^*(p,y)$ 中的u是变化的, $p\downarrow, y\uparrow, u\uparrow$.

特殊地说, 当 $\bar{u}=u(x^*(p,y))=v$ 满足

则必有 $\begin{cases} x_i^h(p,u)=x_i^*(p,y) \\ e(p,u)=y \end{cases}$

四. 求解 $x^h(p,u)$ 的另一办法.

办法(一) $\begin{cases} \min px \\ s.t.\ u(x)\geq \bar{x} \end{cases}$

办法(二) 给定 $e(p,\bar{u})$ 支出函数, $e(p,u)=\sum_{i=1}^n x_i^h(p,\bar{u})p_i = x^h\cdot p$.

如果 $e(p,u)$ 不是关于 p 的线性函数, 如何求出 $x_i(p,u)$?

$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}=x_i^h(p,u)$ (shephard 引理)

理由: $\frac{\partial(p_i x_i^h(\cdot))}{\partial p_i}=x_i^h+p_i\cdot\frac{\partial x_i^h(\cdot)}{\partial p_i}$

$e(\cdot)=p_1x_1^h(\cdot)+p_2x_2^h(\cdot)+\cdots+p_nx_n^h(\cdot)$

$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}=x_i^h+\sum_{j=1}^n p_j\cdot\frac{\partial x_j^h}{p_i}$ (j可等于i)

又 $x_i^h(\cdot)$ 是最优解, $\sum_{j=1}^n p_j\frac{\partial x_j^h}{p_i}=0$

$\therefore \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}=x_i^h(p,u)$

有了 $\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}=x_i^h(p,u)$ 可以严格证明Roy恒等式 $-\frac{\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,y)}{\partial y}}=x_i^*(p,y)$

证明: $\because$ 当 $\bar{u}=u(x^*(p,y))=v$ 时, $x_i^h(p,u)=x_i^*(p,y)$

$\therefore \left.\begin{array}{l} \underbrace{\bar{u}}_{常数}=u(x^*(p,y))=v(p,y) \\ e=y \end{array}\right\} \Rightarrow v(p,e(p,\bar{u}))$

$\frac{\partial u(x^*)}{\partial p_i}=\cancel{\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i}}=\frac{\partial v(p,e)}{\partial p_i}+\frac{\partial v(p,e)}{\partial e}\cdot\frac{\partial e(p,\bar{u})}{\partial p_i}$

$0=\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i}+\frac{\partial v(p,y)}{\partial y}\cdot x^h(p,u)$

$\therefore x_i(p,y)=x^h(p,u)=-\frac{\partial v(p,y)/\partial p_i}{\partial v(p,y)/\partial y}$

总结：求 $x_i^*(p,y)$ ① max 拉氏 ② Roy 恒等式

求 $x_i^h(p,u)$ ① min 拉氏 ② Shephard 引理 $\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_i}$

ex: P24 $e = 2\bar{u}\sqrt{p_1p_2}$ $\quad x_1^h = \frac{\partial e}{\partial p_1} = (2\bar{u}\sqrt{p_2})\frac{1}{2\sqrt{p_1}} = \bar{u}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$

P26. 6. 已知 $\bar{u} = v = m/(p_1^\alpha, p_2^{1-\alpha})$ 求 $x_1^h(p,u) = ?$

$\because V(x^*(p,u)) = v = \bar{u} \Rightarrow e = y = m. \Rightarrow e(p,\bar{u}) = \bar{u}p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}$

$$\frac{\partial e(p,\bar{u})}{\partial p_1} = \alpha\bar{u}p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha} = \alpha\bar{u}(p_2/p_1)^{1-\alpha}.$$

P26. 4. 给定 y. 上海物价 $(p_1^b \cdot p_2^b)$. 北京物价 $(p_1^a \cdot p_2^a)$. $p_1^a \cdot p_2^a = p_1^b \cdot p_2^b$

但 $p_1^a \neq p_1^b$, $p_2^a \neq p_2^b$ $\quad u = x_1x_2$

解1: $\begin{cases} x_1^* = \frac{y}{2p_1} \\ x_2^* = \frac{y}{2p_2} \end{cases}$ $\quad V_a = \frac{y^2}{4p_1^ap_2^a}$ $\quad V_b = \frac{y^2}{4p_1^bp_2^b}$ $\quad$ 广州物价 $\begin{cases} p_1^c = \frac{p_1^a+p_1^b}{2} \\ p_2^c = \frac{p_2^a+p_2^b}{2} \end{cases}$

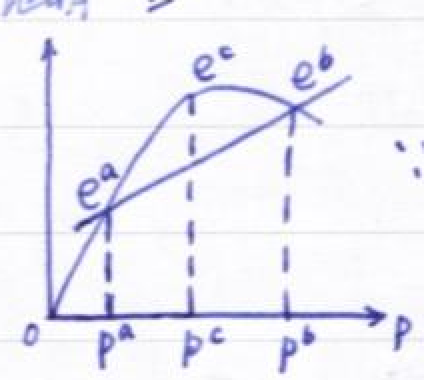
$V^a = V^b > V^c$

解2: 用支出函数选择 如 u 给定, 选择花费最少的选.

$$e(p_1^c, p_2^c; \bar{u}) = e\left(\frac{p_1^a+p_1^b}{2}, \frac{p_2^a+p_2^b}{2}; \bar{u}\right) \geq e(p_1^a, p_2^a; \bar{u}) = e(p_1^b, p_2^b; \bar{u})$$

(一般地大于等于 (≥); 此例中严格大于 (>)).

证明"≥" $\quad e(\lambda p^a + (1-\lambda)p^b, \bar{u}) \geq \lambda e(p^a, \bar{u}) + (1-\lambda)e(p^b, \bar{u})$



$\because \begin{cases} \lambda e(p^a, \bar{u}) \leq \lambda p^a \cdot x(p^a, \bar{u}) \\ (1-\lambda)e(p^b, \bar{u}) \leq (1-\lambda)p^b x(p^b, \bar{u}) \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda e(p^a, \bar{u}) + (1-\lambda)e(p^b, \bar{u}) \leq \lambda p^a x(p^a, \bar{u}) + (1-\lambda)p^b x(p^b, \bar{u})$

$< \lambda p^a x(\underset{\to p^c}{p^b}, \bar{u}) + (1-\lambda)p^b x(\underset{\to p^c}{p^b}, \bar{u})$ (错误匹配花钱多)

$= [\lambda p^a + (1-\lambda)p^b]x(p^c, \bar{u}) = e(p^c, \lambda)$

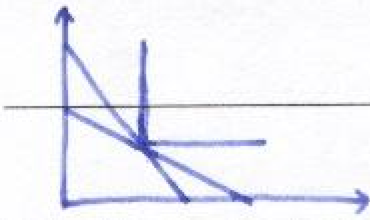
结论: 若A城市的价格水平为 p^a, B城市的价格水平为 p^b. C城市的价格水平为 $\frac{p^a+p^b}{2}$, 在给定的 $\bar{u}$ 水平下, 则在C城市的花销一定大.

P26. 9. 如 $x^h(p_x, u) = (p_x + w)^{\frac{1}{2}}$, 能否做为希克斯需求函数.

$\because x^h(p,w)$ 只考虑 $\left(\frac{p_x}{p_y}\right)$ 变化时 $x^h(p,w)$ 的变化.

$p_1\downarrow$ $p_2\uparrow$.

$\therefore \frac{\partial x^h(p_x, w)}{\partial p_x} \leq 0$ 希克斯需求函数在偏好为凸 (即效用无差异曲线凸向原点时) 对自身价格求导一定不会大于零.



此时 $\frac{\partial x^h(p_x,u)}{\partial p_x}=0$.

希克斯需求函数只有替代（无差异曲线凸向原点."无"严格凸）.

但马歇尔需求函数可以 $\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p}>0$，价格与需求量同方向变动，吉芬品.

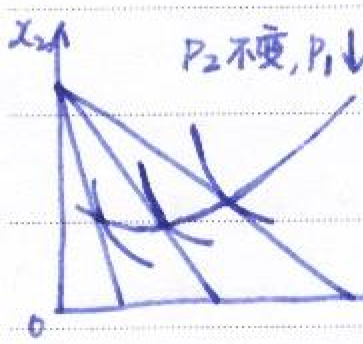
第三讲

§1 替代效应与收入效应

一. 经济环境的基本变量 (p, y)

P变化 {
- 替代效应（p_i相对便宜，替代其他商品）
- 收入效应（$\bar{y}$，$p_i^0\downarrow$至p_i'，$\frac{y}{p_i'}$，实际购买力上升）

环境变化 {
- PCC线（收入不变，只变p）
- ICC线（p不变，收入变化）

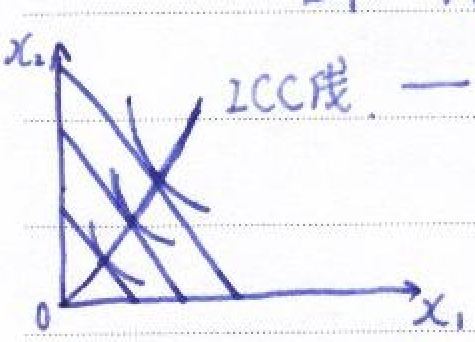


PCC线 — 价格-消费曲线（线上每一点都是最优的）

在国际贸易中，PCC = offer curve，为得Δx_2愿给予的Δx_1.

实际为用实物表示的贸易条件.

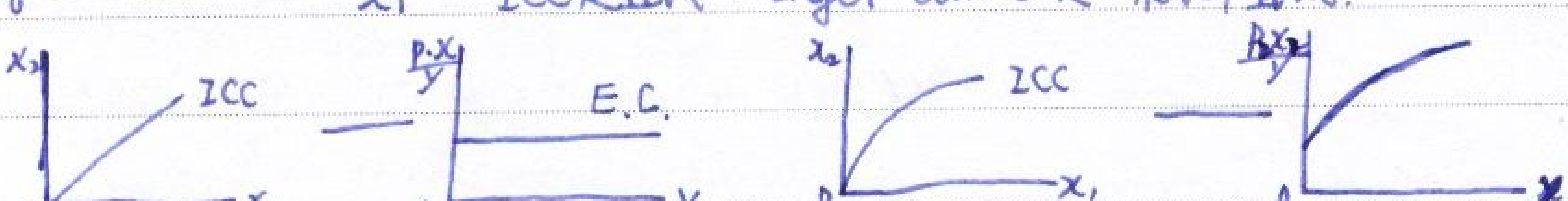
若PCC线平坦，为多得x_2，放弃的x_1多，$P_{x_1}\downarrow$，贸易条件变化.



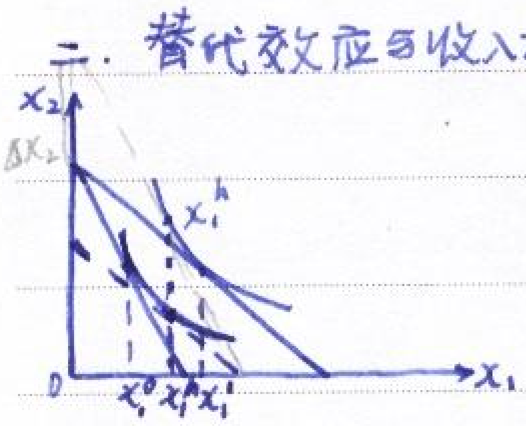
ICC线 — 收入-消费线（p不变，y变化） 一般不是直线

$ICC \neq$ Engel curve. $= \frac{p_i\cdot x_i}{y}$

ICC是直线 · Engel curve 是一条水平直线.



二. 替代效应与收入效应的图示.



p_2不变，p_1从$p_1^0\downarrow p_1'$.

$x_1'-x_1^0$：$p_1\downarrow$对x_1购买量的总效应.

希克斯补偿为负，按新比价斜率收税，内移预算线.

p_1^0上升为p_1'. 希克斯补偿为$(+)\Delta x_2$ $y'=\Delta x_2\cdot p_2$.

替代效应：$x_1^h - x_1^0$ ∵ p_1↑，百姓买更多 x_2，替代 x_1。（u不变）
收入效应：$x_1^1 - x_1^h$ ∵ p_1↑引起实际购买力↓，x_1购买量减少
均由 p_1 变化引起。

替代效应：价格变化的配置效应，发生在同一条无差异曲线 u^0 上，不用补偿。

收入效应：价格变化的福利效应，在不同无差异曲线上消费点发生了转移，

应该补偿，用货币补贴办法。（政府支出）

价格政策：变化对百姓益 or 害　前
收入政策：补偿　$x(tp, ty)$.　后.

§2　斯拉茨基公式.

一、1. 含义：把收入效应、补偿效应用公式加以表达。

只要有需求函数 $x(p, y)$ 且 $x^h(p, u)$ 已知，就可算出价格变化的替代效应与收入效应。

2. 推导：出发点、$\bar{u} = u(x^*(p, y))$　则 $y = e(p, \bar{u})$ 且 $x_i^h(p, u) = x_i^*(p, y)$

$\dfrac{\partial x_i(p, y)}{\partial p_j}$（j的价格变化对i需求所产生的总效应）.

$\because x_i^h(p, \bar{u}) = x_i^*(p, y) = x_i^*(p, e) = x_i(p, e(p, \bar{u}))$.

$$\therefore \frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p, e(p,\bar{u}))}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\cdot)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\cdot)}{\partial y}\cdot\underline{\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_j}} \quad = x_j^h(p, u) = x_j(\cdot)$$

$$\therefore \underset{\text{总效应}}{\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p_j}} = \underset{\text{替代效应}}{\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}} - \underset{\text{收入效应}}{x_j \frac{\partial x_i(\cdot)}{\partial y}}.$$

二、① 为什么收入效应前有负号　∵ p_j↑ ⟹ 实际收入下降

② 为什么在 $(x_j \frac{\partial x_i}{\partial y})$ 中 j 与 i 不同.

∵ p_j 变化　$\Delta y = x_j \Delta p_j$

现假设 $\Delta p_j = 1$，∴ 公式中 x_j 代表 p_j 变化后，收入的改变量　$-x_j \frac{\partial x_i}{\partial y} \sim -dy \frac{\partial x_i}{\partial y}$

③ 为什么 $x_j^h = x_j(p, y)$　∵ 从 $\bar{u} = u(x^*(p, y))$ 出发.

④. $\dfrac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j} = \dfrac{\partial x_j^h(p,u)}{\partial p_i}$　（替代效应是对称的）

$$\because \frac{\partial x_i^h(\cdot)}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial^2 e(\cdot)}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 e(\cdot)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_j}\right) = \frac{\partial x_j^h(p,u)}{\partial p_i}$$

三. 例. $u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1x_2}$

$\because \begin{cases} x_1=\dfrac{y}{2p_1} \\ x_2=\dfrac{y}{2p_2} \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_2}=0 \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial p_1}=0 \end{cases}$ 能否说，x_2对x_1无替代效应，why？

答：一般地，按 $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}$ (>0, <0, =0) 来判断 i与j之间的关系.

$>0 \Leftrightarrow x_i$与x_j互替　　从需求的角度说,

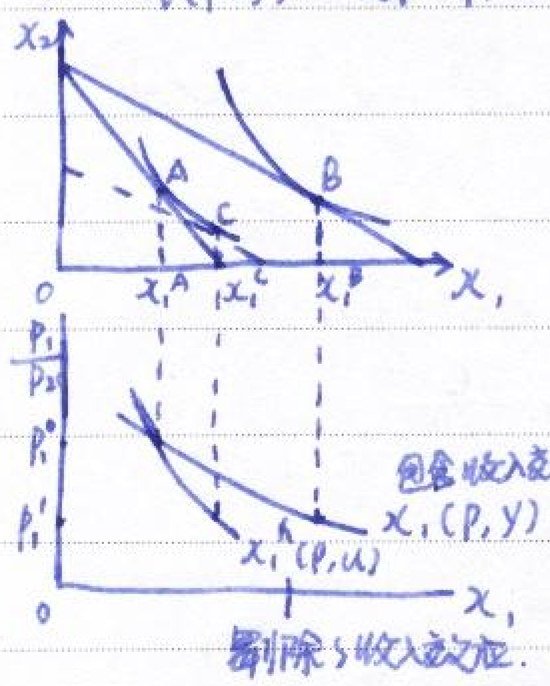
$<0 \Leftrightarrow x_i$与x_j互补　　这样是对的.

$=0 \Leftrightarrow$ 既不互补也不互替

但本题中这句话是不对的. 看净替代 $=\dfrac{\partial x_1^h}{\partial p_2}=\dfrac{\partial(\bar{u}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}})}{\partial p_2}=\dfrac{\bar{u}}{2\sqrt{p_1p_2}}>0$

∵收入效应恰好抵消了替代效应，∴总效应为0.

四. $x_i(p,y)$ 与 $x_i^h(p,u)$ 之间的关系.



从 $x_1^A \to x_1^C$ 替代效应

从 $x_1^C \to x_1^B$ 收入效应

交点是 $u=u(x^*(p^{\circ},y^{\circ}))$

为什么 x_1^h 陡峭，$x_1(p,y)$ 平坦？

∵如果 $p_1'<p_1^{\circ}$ (降价)　收入效应，替代效应 >0

x_1^h抽走了收入效应，需求量会提高，但提高幅度小.

而$x(p,y)$包含了收入效应，需求量提高得多.　同理 $p_1\uparrow$.

日常生活中，为马歇尔需求函数，若政府干预（保证u），希克斯需求函数.

判断一个函数是否是马歇尔需求函数，三个必要条件：

① 零次齐次性.　$x_i(tp,ty)=x_i(p,y)$

② 钱花完（预算平衡）　$p\cdot x^*(p,y)=y$.

（如：$u(x)=x_2+v(x_1)$　x_2—货币，$p_2=1$，则 $x_2+p_1x_1=y$）

③ $x^*(p,y)$唯一，单值，即当p, y给定时，x^*唯一.

（只要能写出$x^*(p,y)$函数式，单值函数即满足）.

五. 补贴标准

如果 $p_1\uparrow$, 为保证人民生活水准不降低(维持底限),需发放补贴.

1. 希克斯标准, $\bar{u}$不变, 苛刻

2. 斯拉茨基标准, x^0不变 ($\because u(x^0)=\bar{u}$, $\bar{u}$也不变) (x^0是P变动前的购买量) 易满足, 但浪费.

$\Delta p=(p_1^1-p_1^0,\ p_2^1-p_2^0,\ \cdots,\ p_n^1-p_n^0)$ 斯拉茨基补偿 $\Delta m=\Delta p\cdot x^0$.

斯拉茨基标准包含了希克斯标准, 要求补偿高.

例 $\begin{cases} x_1=\frac{y}{2p_1} & \text{假设 } y=2,\ p_1^0=0.25\quad p_2^0=1 \\ x_2=\frac{y}{2p_2} & \end{cases}$ 现在p_2不变, $p_1^1=1$, 问政府该补多少!

如按slusky标准: $\Delta p=(0.75, 0)$. $x_1^0=\frac{y}{2p_1}\Big|_{p_1=0.25,\ y=2}=4$ $x_2^0=\frac{y}{2p_2}\Big|_{p_2=1,\ y=2}=1$

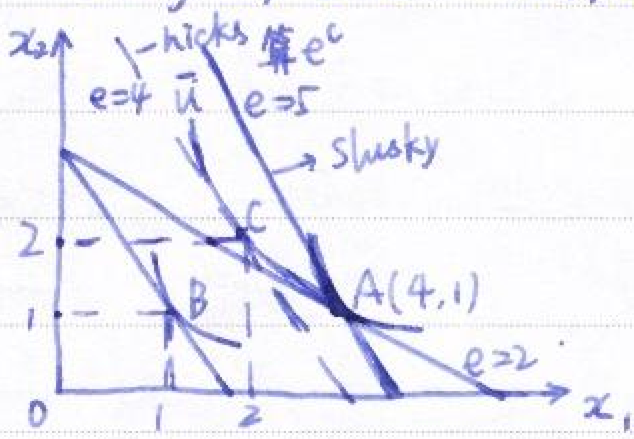
$\Delta m=\Delta p\cdot x^0=0.75\times4+0\cdot1=3$.

如按希克斯标准: $\bar{u}$不变.

算法1: $x_1=\frac{y}{2p_1}\Big|_{p_1=p_2=1,\ y=2}=1=x_2$. $x_1^h=\bar{u}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\Big|_{p_1=p_2=1,\ \bar{u}=2}=2=x_2^h$

$e^c=2\times1+2\times1=4$. 原来$y=2$, $e^c-y=4-2=2$. ∴应补两元.

希克斯补偿标准比slusky标准少花钱.



算法2. 应补从C降至B的, 只补收入效应, 不补替代效应. $(2-1)\times1+(2-1)\times1=2$.

$\Delta x_1\cdot p_1^1+\Delta x_2\cdot p_2^1$

$(x_1^h-x_1^1)\cdot p_1^1+(x_2^h-x_2^1)\cdot p_2^1$

六. 价格p_i变动自效应

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}=\underbrace{\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}}_{\le 0}\underbrace{-x_i\frac{\partial x_i}{\partial y}}_{>0}<0.$$

① $\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}\le0$. 原因: $e(p,u)$对于p是凹函数 (p36-37). $\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}=\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_i}\right)=\frac{\partial^2 e(\cdot)}{\partial p_i^2}\le0$

② 一般情况下 x_i是正常品. $\frac{\partial x_i}{\partial y}\ge0$. $\frac{\partial x_i}{\partial y}<0$ 劣等品.

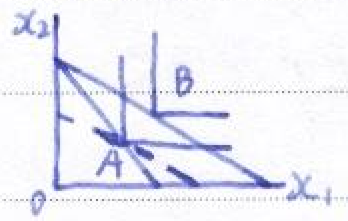
③. 什么条件下 $\frac{\partial x_i}{\partial p_i}>0$ $\frac{\partial x_i}{\partial p_i}<0$是我们通常见到的需求定理.

只有当 $\frac{\partial x_i}{\partial y}<0$, 且 $\left(-x_i\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)>\left|\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}\right|$ 即当满足 a.商品是劣等品, b.该

商品的收入效应>替代效应时，才会出现 $\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\geq 0$ 即吉芬品。

七、替代效应与收入效应的例子。

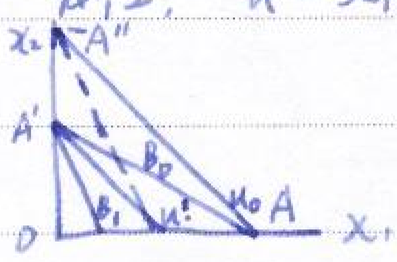
例1 $u=\min\{x_1, x_2\}$ 完全互补 没有替代效应，只有收入效应。



A→B 总效应 替代效应=0.

总效应=收入效应 （能否写出希克斯需求函数？why？）

例2. $u=x_1+x_2$.

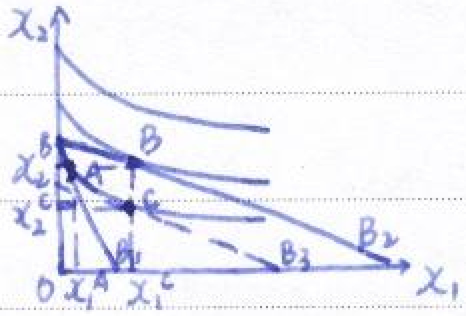


B_0时，选A，B_1时选A'.

对x_1而言，从OA→0. 总效应=替代效应. 没有收入效应.

对x_2而言，既有替代效应（OA''），又有收入效应（A''A'）

例3. 拟线性 $u=x_2+v(x_1)$



对x_1而言，只有替代效应. $x_1^A-x_1^C$.

对x_2而言，既有替代效应 $x_2^A-x_2^C$，又有收入效应 $x_2^C-x_2^B$ (−) （反向）

收入效应全部落在x_2上.

如果u是凸的 ⇒ 负（自身）替代效应.

如果u是凹的，仍存在负（−）替代效应吗？可以有.

B 开始A. B→B' C. ($p_1\uparrow$)

按Hicks A→A' x_1替代效应为负.

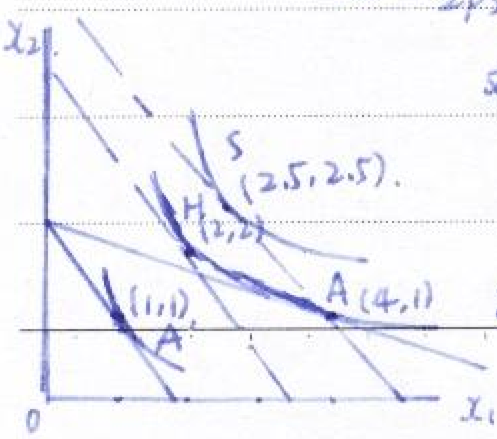
按slusky A→A''，仍为负.

八. 希克斯替代效应与斯拉茨基替代效应.

总效用 = 替代效应 + 收入效应

由前例，$\begin{cases} x_1=\frac{y}{2p_1} \\ x_2=\frac{y}{2p_2} \end{cases}$ 假设 $y=2$，$p_1^0=0.25$，$p_2^0=1$.

现 p_2^0不变 $p_1'=1$. 希克斯补偿：(1,1)→(2,2).



对x_1，希克斯替代效应 $=2-4=-2$.

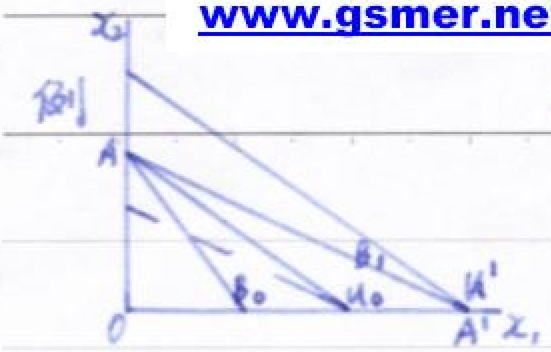
收入效应 $=1-2=-1$. 总效应 $=-3$.

slusky补偿：(1,1)→(4,1). $y'=5$. $x_1'=\frac{y'}{2p_1'}=2.5$ $x_2'=2.5$.

x_1 slusky替代效应 $=2.5-4=-1.5$.

收入效应 $=1-2.5=-1.5$ 总效应 $=-3$.

例



如P_1↓，原选择点A，现选择点A'.

按Hicks标准，实行负补偿，征税

按Slusky标准，既保持点A消费，又坚持新价格，∴不补偿.

第三节　弹性

一. 定义. 交叉价格弹性　p_j变化 → x_i　　$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\cdot\frac{p_j}{x_i}$

$\lim\limits_{\Delta p_j\to 0}\frac{\Delta x_i/x_i}{\Delta p_j/p_j}=\frac{\text{需求变动的相对幅度}}{\text{价格变动的相对幅度}}$

自弹性 $\varepsilon_{ii}=\frac{dx_i}{dp_i}\cdot\frac{p_i}{x_i}<0$ （正常品）　一般用$|\varepsilon_{ii}|$表示.

收入弹性 $\eta_i=\frac{dx_i}{dy}\cdot\frac{y}{x_i}$

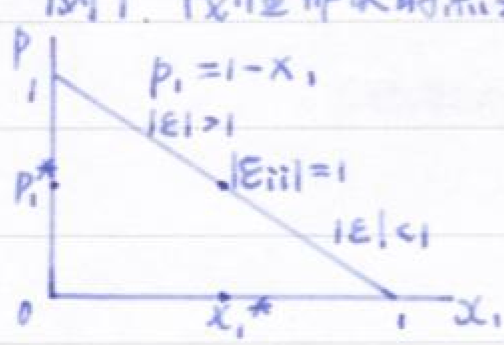
研究弹性问题的目的：降价能否促销？

营业额 $=P_x\cdot X$

$$\frac{d(P_x\cdot X)}{dP_x}=X+P_x\cdot\frac{dx}{dp_x}=x\left[1+\frac{P_x}{x}\cdot\frac{dx}{dp_x}\right]=x\left[1+\varepsilon_{ii}\right]=x\left(1-|\varepsilon_{ii}|\right)$$

$\frac{d(P_x\cdot X)}{dP_x}$
>0　当$|\varepsilon_{ii}|<1$　缺乏弹性，应涨价
$=0$　当$|\varepsilon_{ii}|=1$　单位弹性，价格变化无影响.
<0　当$|\varepsilon_{ii}|>1$　富于弹性，应降价（降价能促销↑R）

例1. 线性需求的点弹性处处不相等.



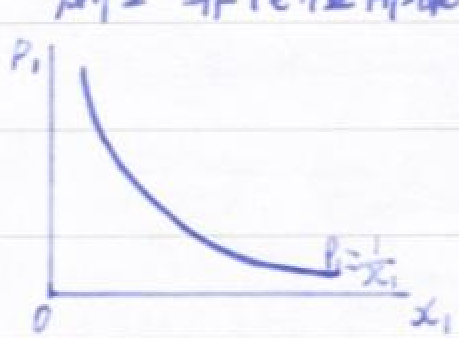
$\frac{dx_1}{dp_1}=-1$，但 $\varepsilon_{ii}=\frac{dx_1}{dp_1}\cdot\frac{P_1}{x_1}=(-1)\frac{P_1}{x_1}\Big|_{\substack{x_1=x_1^*\\P_1=P_1^*\\x_1^*=P_1^*}}=-1$

表明：

降价的促销功能是递减的.

低价位 $|\varepsilon|<1$ 应涨价 ⎫
高价位 $|\varepsilon|>1$ 应降价 ⎭ 线性需求.

例2 非线性需求的点弹性可以是常数.



$x_1=\frac{1}{P_1}$　　$\varepsilon=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{P}{x}=-1$.

一般地，如 $x=p^{-\xi}$ 则，$\varepsilon_{11}=-\xi$ $(\xi>0)$. 降价决策不必考虑价位.

粮食曲，ε小，0.2左右，易涨价，国家限价．刚性=弹性小

No .

Date

二. 恩格尔恒等式.

$\sum_{i=1}^{n} S_i\eta_i = 1$. $S_i = \frac{p_i x_i}{y}$ (支出份额) η_i = 收入弹性.

证明: $\because$ $p\cdot x = y$ 两边对y求导. 乘 $\frac{x_i}{y}\cdot\frac{y}{x_i}$ (=1)

$\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{x_i}{y}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial y}\cdot\frac{y}{x_i} = 1$ 即 $\sum_{i=1}^{n} S_i\eta_i = 1$.

Pso.1 如 $n=2$. $S_1\eta_1 + S_2\eta_2 = 1$ $(S_1>0, S_2>0)$.

证明 x_1 与 x_2 不可能都是劣等品.

反证法: 如果 x_1, x_2 都是劣等品, 则 $\eta_1<0$, $\eta_2<0$. ($\eta_i = \frac{dx_i}{dy}\cdot\frac{y}{x_i}$)

$\therefore$ $S_1\eta_1 + S_2\eta_2 < 0$, 与恩格尔恒等式矛盾.

[如 $\eta_1<0$, 则 $\eta_2>1$ 即可能一个是劣等品.]

三. 古诺恒等式

$\sum_{i=1}^{n} S_i\cdot\varepsilon_{ij} = -S_j$. 原因是 p_j 变化, 会对所有商品的需求产生影响.

$\because$ $p\cdot x = y$ 两边对 p_j 求导

$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} p_i\cdot\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j + p_j\cdot\frac{\partial x_j}{\partial p_j} = 0$. $-x_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\cdot p_i$

$\therefore$ $-\frac{p_j x_j}{y} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i x_i}{y}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\cdot\frac{p_j}{x_i}$ 即 $\sum_{i=1}^{n} S_i\cdot\varepsilon_{ij} = -S_j$.

应用, 如 $n=2$. $\therefore$ $S_1\varepsilon_{12} + S_2\varepsilon_{22} = -S_2$ (p_2 变化)

$S_1\varepsilon_{11} + S_2\varepsilon_{21} = -S_1$ (p_1 变化)

如果已知 ε_{11} 能推出 ε_{21} (自价格弹性 ⇒ 交叉价格弹性)

如 $\varepsilon_{11} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_{21} = 0$.

$\varepsilon_{11} < -1 \Leftrightarrow \varepsilon_{21} > 0$. ($x_1$ 与 x_2 互替)

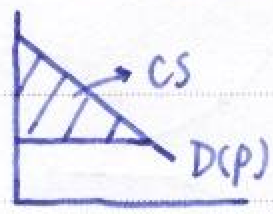
$0 > \varepsilon_{11} > -1 \Leftrightarrow \varepsilon_{21} < 0$.

古诺等式用来分析自价格弹性与交叉价格弹性的关系.

思考题: Hicks需求函数 $x_i^h(p,u)$ 试证 $\sum_{i=1}^{n} S_j\,\varepsilon_{ij}^h = 0$

§4 价格变化的福利效应

一. CS (Consumer's surplus)



只有在 $u(x_1,x_2)=x_2+v(x_1)$ 情况下，左图才正确.

如 $u(x_1,x_2)=x_2+v(x_1)$ ($v(0)=0$)

考虑保留价格 (reservation price) "r".

在价格 r. 买一单位 x 与不买一单位 x 是无差异的. (临界的 P).

r_1: 买第一单位 x_1 的保留价，应满足 $u(0,y)=u(1,y-r_1)$ ($P_2=1$). ①

r_2 应满足 $u(1,y-r_1)=u(2,y-r_1-r_2)$ ②.

$\because$ ① $\Rightarrow$ $v(0)+y=v(1)+y-r_1$ $\quad\therefore r_1=v(1)-v(0)$

② $\Rightarrow$ $v(1)+y-r_2=v(2)+y-r_1-r_2$ $\quad\therefore r_2=v(2)-v(1)$

$\cdots\cdots\ \therefore r_n=v(n)-v(n-1)$ 〔r—商品的边际效用〕

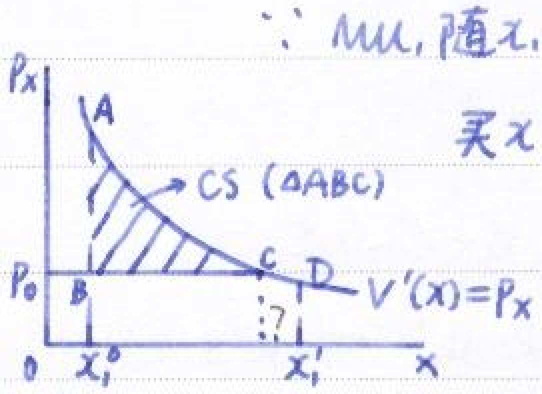
若 x_1 是连续的，则 $\max\{x_2+v(x_1)\}$ s.t. $p_1x_1+x_2=y$ $\Leftrightarrow$ $\max\{(y-p_1x_1)+v(x_1)\}$.

F.O.C $\Rightarrow$ $-p_1+v'(x_1)=0$. $\Rightarrow$ $\overset{r(x_1)}{p_1}=v'(x_1)$ —— 保留价格=边际效用

$r(x_1)=v'(x_1)\big|_{x_1=?}$ (不同需求量点保留价格不同) $\quad \dfrac{P_1}{\underset{1}{P_2}}=\dfrac{MU_1}{\underset{1}{MU_2}}\Rightarrow x_i(p,y)$

$\Leftrightarrow$ 马歇尔需求曲线，(两边对 x_1 积分，→总效用).

$\because$ MU_1 随 x_1 上升而递减的，$\therefore v'(x_1)$ 是 x_1 的递减函数.



买 x 的总效用：$Ax_1^0x_1'D$. ($v(x)$)

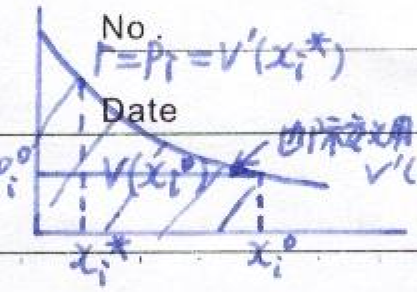
$CS=(r_1-p_0)+(r_2-p_0)+\cdots+(r_n-p_0)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}r_i-np_0=v(n)-\overset{=0}{v(0)}-np_0=v(n)-np_0$

$CS=v(x)-xp_0$ 这样定义的消费者剩余都是以拟线性为前提的.

① 如 x_i 是离散的，则 $r_n=v(n)-v(n-1)$
② 如 x_i 是连续的，则 $r_j=v'(x_{ij})$
} 边际效用 MU (i商品. j单位单位)

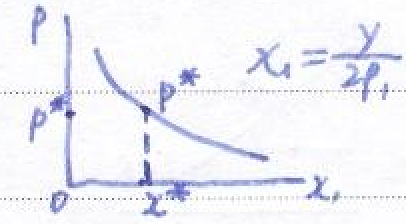
③ $(CS)^n=\underset{\substack{\text{总效用}\\(CS)^g}}{v(x)}-\underset{\text{支付额}}{np^0}$ 　毛消费者剩余 $(CS)^g$



④ $(CS)^n = \int_0^{x^0} v'(x)\,dx - x^0p^0 = v(x^0) - x^0p^0$ （∵ $v(0)=0$）

注意：以上四点的前提是 $u = x_2 + v(x_1)$ — 拟线性，$\Rightarrow v'(x) = p_i$

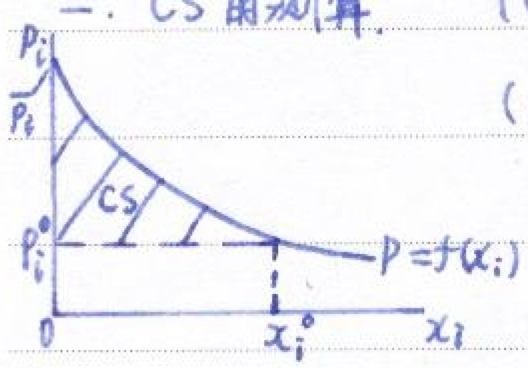
如不是，例 $u(\cdot) = \sqrt{x_1x_2}$　~~$x_1 = \frac{y}{2p_1}$~~　$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1$



如 $\lambda=1$，则 $p_1 = MU = u'(x_1)$　　如 $\lambda \neq 1$，则 $p_1 \neq MU$

$\lambda \neq 1$ 时，价格线下的面积不是总效用.

二. CS的测算　　$(CS)^n$ net



$$(CS)^n = \int_0^{x_i^0} f(x_i)\,dx - p_i^0 x_i^0 = \int_0^{x_i^0} (\overset{r}{f(x_i)} - \overset{\text{实际价}}{p_i^0})\,dx$$

$$= \int_{p_i^0}^{\bar{p}_i} D(p_i)\,dp_i$$

消费者剩余总是图中阴影部分面积，不论效用函数是什么.

但只有拟线性效用函数时，总效用才是价格线下的面积.

在非拟线性偏好下，r不一定是边际效用，总面积不一定是总效用.

三. 价格变动引起的 $(CS)^n$ 的变动.

如果 $p_i \uparrow$，$p_i^0 \to p_i'$　　$\Delta(CS)^n = -\int_{p_i^0}^{p_i'} D(p)\,dp$

数学证明：$\Delta(CS)^n = \int_{p_i'}^{\bar{p}_i} D(p_i)\,dp_i - \int_{p_i^0}^{\bar{p}_i} D(p_i)\,dp_i = \int_{p_i'}^{\bar{p}_i} D(p_i)\,dp_i + \int_{\bar{p}_i}^{p_i^0} D(p_i)\,dp_i$

$$= \int_{p_i'}^{p_i^0} D(p_i)\,dp_i = -\int_{p_i^0}^{p_i'} D(p_i)\,dp_i$$

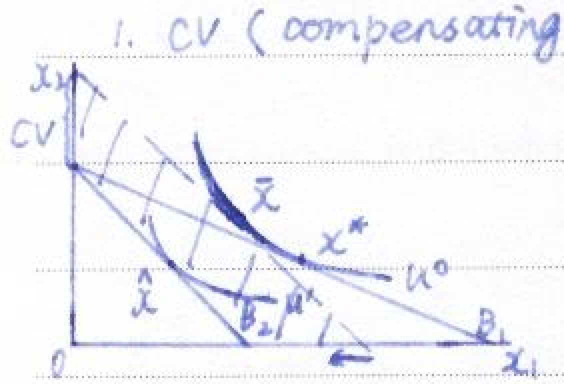
$\Delta(CS)^n$ 意义：由价格 p_i 变化所产生的消费者效用量变化，

这种解释只适用于拟线性偏好.

四. 如"元"关系不是拟线性

$u(x)$ 是一般效用函数，则p变化所产生的效用变化要用CV或EV来表达.

1. CV (compensating variance) 补偿性变动 [由价格变化引起，对cu产生一定影响]



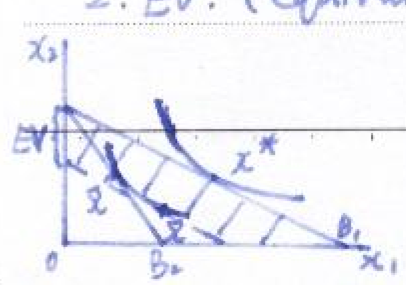
$CV =$ Hicks补偿量，$= e(p_i', u^0) - y$

新价格　旧效用.

CV 用新价格度量
EV 用旧价格度量

2. EV. (equivalent variation) 等值性变动

考虑价格变化前后消费的承受力.



EV — 按变化前的旧价格切变化后的效用线.

p_1 的上升等价于让消费者减少收入.　$EV = y - e(p^0, u_1)$

旧价格　新效用.

3. 例：$u(x_1, x_2)=\sqrt{x_1 x_2}$　$P_1^0=0.25$　$P_2^0=P_1'=1$，$y=2$。问 CV, EV, $|\Delta(CS)^n|$

① CV = hicks 补偿 = 2。（解 $x_1^h(p', u^0)$）

$\because u_0=2=u(x^*)=\sqrt{x_1 x_2}\Big|_{\substack{x_1=4\\x_2=1}}$　$\sqrt{\frac{e'}{2p_1'}\cdot\frac{e'}{2p_2'}}=u^0=2$，$\therefore e'=4$

$\therefore CV=e(p', u^0)-y=2$。

② EV　$x_1'\Big|_{\substack{p_1'=1\\y=2}}=1$　$x_2'=1$。　$u_1'=\sqrt{x_1' x_2'}=1$。　$\sqrt{\frac{e'}{2p_1^0}\cdot\frac{e'}{2p_2^0}}=u_1=1$。$\Rightarrow e'=1$

$EV=y-1=2-1=1$

③ $|\Delta(CS)^n|=\left|-\int_{0.25}^{1}\frac{y}{2p_1}dp_1\right|=\left|-\int_{0.25}^{1}\frac{1}{p_1}dp_1\right|=\left|-\ln p_1\Big|_{0.25}^{1}\right|=\ln 4$

$\therefore EV<|\Delta(CS)^n|<CV$　　EV、CV 把商品量变化折成货币。

相当于 $x(p,y)$ 马歇尔需求函数下面积变化。

五. 如"$\succsim$"是拟线性　则 $CV=|\Delta(CS)^n|=EV$ 定理

证明：设原价格为 (P_1^0, P_2^0)

$u=x_2+v(x_1) \Rightarrow v'(x_1)=p_1$　$x_1(p,y)=f(p_1)$　x_1 的马歇尔需求函数与 P_2 无关。
不用考虑 P_2 变化。

如 $P_1=P_1^0 \Rightarrow x_1^*(p_1^0)$　$\therefore u^0=v(x_1^*)+(\underbrace{y-p_1^0x_1^*}_{x_2^*})$（假设 $P_2=1$）

如果 $P_1=P_1' \Rightarrow x_1'(p_1')$　$\therefore u'=v(x_1')+(\underbrace{y-p_1'x_1'}_{x_2'})$

$\therefore |\Delta(CS)^n|=u^0-u'=[v(x_1^*)-p_1^0x_1^*]-[v(x_1')-p_1'x_1']$

CV 应满足　$u'+CV=u^0$

即 $v(x_1')+(y-p_1'x_1')+CV=v(x_1^*)+(y-p_1^0x_1^*)$

$\therefore CV=[v(x_1^*)-p_1^0x_1^*]-[v(x_1')-p_1'x_1']$

EV 应满足　$u^0-EV=u'$　　$\therefore EV=CV=|\Delta(CS)^n|$

（拟线性 无差异曲线平行，切距离相等）。

§5

两种研究偏好关系的方法

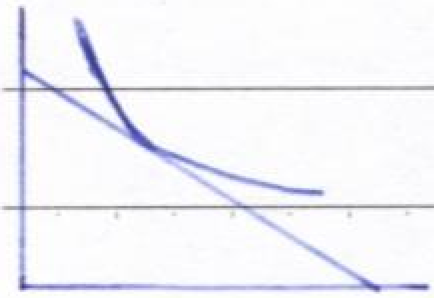
一种方法："$\succsim$" $\Rightarrow u(x) \Rightarrow x(p,y)$（需求函数）　隐偏好方法。

看不见　　$u'(x) \longrightarrow$ 能见

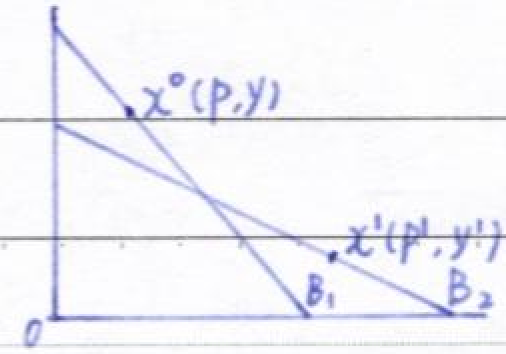
另一种方法：显偏好方法　直接从 $x(p,y)$ 出发，$\Rightarrow x \succsim x'$

No.

Date



$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{P_1}{P_2}$$



不承认无差异曲线.　　　　目标 $x(p,y)$

一.基本前提: ① 如 $t=t_0$, $x^\circ > x'$, 则在 $t=t_1$, $t=t_2$, $\cdots$ $t=t_n$, 仍有 $x^\circ > x'$

即偏好关系保持一致, 不能逆转 (即连续性)

② $p^t \cdot x^t = y^t$ 钱要花完.

二.命题 (显示性偏好的弱公理 WA)

如在t_0点选了x°, 而x'在t_0点也是买得起的 ($p^\circ \cdot x' \le y^\circ$; $p^\circ x^\circ = y^\circ$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x°已显示出优于x'. 到t'点, 如果消费者选了x', $\Rightarrow$ $p'x^\circ > y'$.

如果相反, $p'x^\circ \le y'$, 则必会选择x°, 而不会选x'.

如 $p^\circ x' \le y^\circ$, 则必有 $p'x^\circ > y'$. 满足这样条件的消费者才是理性的 (一致的).

思考题: 水价 1999年 1元/吨, 需求x. 如果水价上升20%, 居民需求x'.

居民用水多付 $0.2x'$. 如果市政府仍将 $0.2x'$ 返还给居民, 问水价上升后居民生活水平是上升了还是下降了?

补贴标准x'

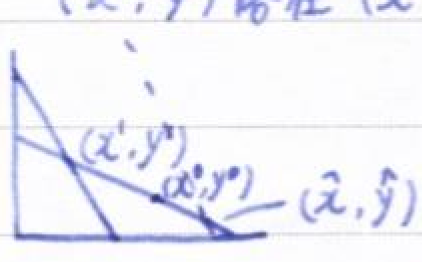
$p^\circ = 1$元/吨　x°　　$p' = (1+0.2)$元/吨　x'　　$(0.2)x'$返还.

$\because$ $P_x \cdot x^\circ + y^\circ = m^\circ$ ①

涨价后 $(P_x+0.2)x' + y' = m^\circ + 0.2x'$ ② $\Leftrightarrow$ $P_x x' + y' = m^\circ$.

表示 $(x',y') \in B(p^\circ, 1, m^\circ)$ (x',y')组合属于涨价前预算集, 但涨价前没买, $\therefore$ $(x',y') < (x^\circ, y^\circ)$ $\therefore$ 居民生活水平下降了.

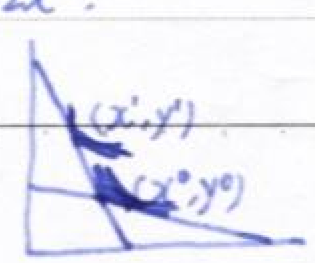
(x',y') 落在 (x°, y°) 的左边, why 不能右边?



不可能在 $(\hat{x},\hat{y})$, (x°,y°)落在该区域, 违背 WA.

如果按 (x°,y°) 来补贴, 即补 $0.2x^\circ$.

则一定有, 如图,

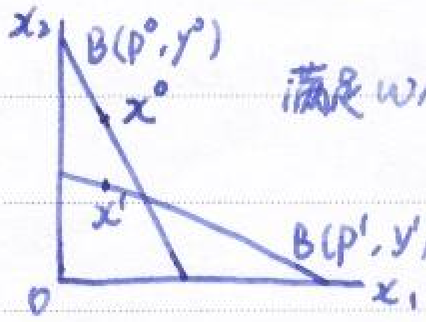


命题：如 $p^0x^1 \le y^0$，选了 (x^0). 则 $x^0 > x^1$

$p^0=(p_1^0,\cdots,p_n^0)$，$x^1=(x_1^1,\dots,x_n^1)$ ~~$(x^0>x^1)$~~

当 y^1 时选了 x^1，则 $p^1x^0>y$.

不可能 $p^0x^1<y^0$ 且 $p^1x^0<y^1$，选择矛盾.



满足WA

x^0，x^1 不能同时落入两预算集交集
（即阴影区）

P48，例5.

	p_1	p_2	x_1	x_2	y
$t=1$	1	2	1	2	5
$t=2$	2	1	2	1	5
$t=3$	1	1	2	2	4

查 $p^1x^2=4<y^1=5$ 且 $p^2x^1=4<y^2=5$

x^1，x^2 偏好关系上前后矛盾.

2. 斯拉茨基公式

$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial y}$ 瞬时价格变化效应.

求：从 $p_1^0 = 0.25$ 到 $p_1' = 1$ 一个区段的效应 不能简单套用公式，积分 累计效应.

$u = \sqrt{x_1 x_2}$，$y = 2$，$p_2^0 = p_2' = 1$

替代效应. $\int_{0.25}^{1} \frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} dp_1$ 等于 将 $p_1^0 = 0.25$，$p_1' = 1$ 代入希克斯需求函数求出的两个需求量之差.

$\because x_1^h = \bar{u}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$

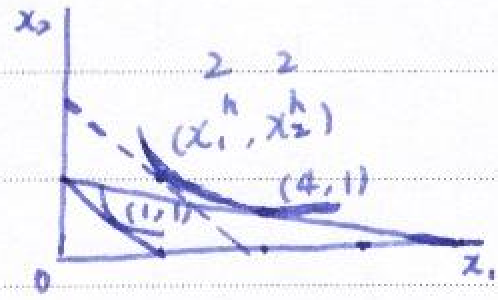
$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} = \bar{u}\sqrt{p_2}\,(-\frac{1}{2})\,p_1^{-\frac{3}{2}}$ $\therefore \int_{0.25}^{1} -\frac{1}{2}\bar{u}\sqrt{p_2}\,p_1^{-\frac{3}{2}} dp_1 = -\frac{1}{2}\bar{u}\sqrt{p_2}\,\frac{p_1^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_{0.25}^{1}$

$= -2\left[1 - \frac{1}{0.5}\right] = -2 \;=\; x_1^{h'} - x_1^h$

收入效应 $\int_{y^0}^{y'} (-x_j \frac{\partial x_1}{\partial y})\, dy$

$x_1 = \frac{y}{2p_1}$ x_j 用 x_j^h 代.（C点） p_1 用 p_1' 代.

$= \int_2^3 (-2\,\frac{1}{2p_1})\, dy = -y\Big|_2^3 = -1$



第四讲 VNM（冯·诺依曼—摩根斯坦）效用函数与风险升水

§1 不确定状态的描述

一. 两个变量

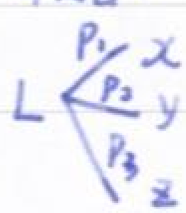
1. 结果：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ （非现金变量）

$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ （钱数）

2. 概率分布 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，$p_i \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$

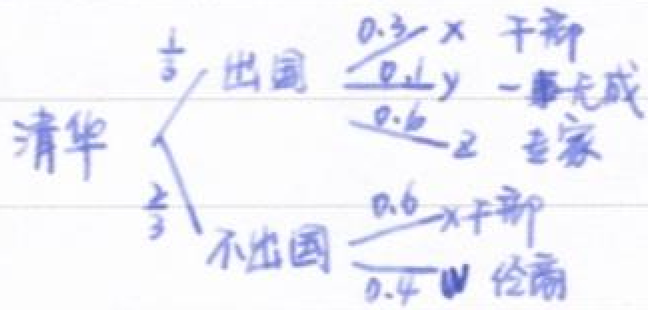
二. 彩票（Lottery）/ 赌局（gamble）：单赌与复赌.

单赌：$L^s = (p_1 \cdot a_1, p_2 \cdot a_2, \cdots, p_n \cdot a_n \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geq 0)$

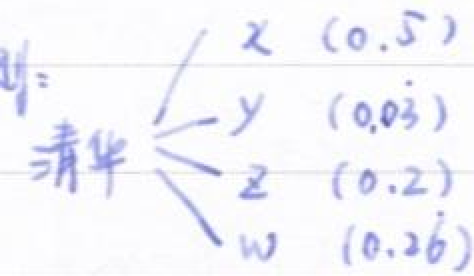


单赌 结果与出发点只有一个环节

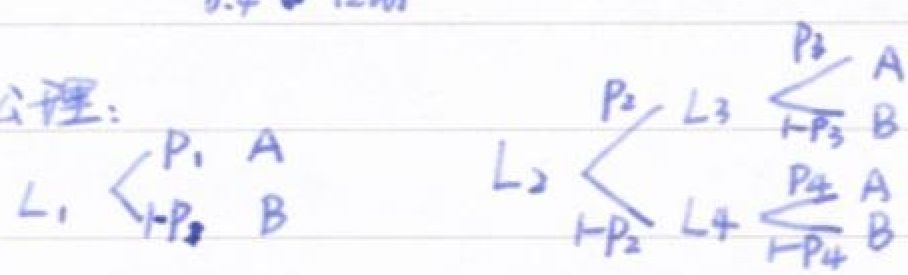
复赌：单赌当中的结果又是一张彩票（compound Lottery）



递归法则：



复赌公理：



从最终结果出发做选择时是复赌.

如果 $p_1 = p_2 \cdot p_3 + (1-p_2) \cdot p_4$ 则 $L_1 = L_2$.

三. 不确定条件下选择公理

公理1：[连续性公理] 3个结果 如 $A > B > C$ 则 $\exists P \in (0,1)$

使得 $\underbrace{P \cdot A + (1-P) \cdot C}_{\text{不确定}} \sim \underbrace{B}_{\text{完全确定}}$

注意：A与B相差很大（1000\$ ↔ 10\$）

如 $A = 2\$$ $B = 1\$$. 则公理一般不成立（理性条件下）

⇒ 贴现、买卖、保险、抵押贷款.

公理2：[独立性公理]. 如 $A \succsim B$ 考虑 "C".

则对 $\forall P \in (0,1)$ $PA + (1-P)C \succsim PB + (1-P)C$

对A、B之间偏好关系不受独立于(A、B)以外的事件C的影响。

意味着 偏好关系不随时间、地点等而改变。

可以推广到 $\mathcal{L}$ (如符果是一样的)

投资方式：$\mathcal{L}^a = (p_1^a, \cdots, p_n^a)$，$\mathcal{L}^b = (p_1^b, \cdots, p_n^b)$ $\mathcal{L}^c$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\mathcal{L}^a$ 与 $\mathcal{L}^b$ 间是相同的。 $\mathcal{L}^a \succ \mathcal{L}^b \succ \mathcal{L}^c$

连续性′：$\exists\ \alpha \in (0,1)$ 使 $\alpha\mathcal{L}^a + (1-\alpha)\mathcal{L}^c \sim \mathcal{L}^b$

独立性′：如 $\mathcal{L}^a \succsim \mathcal{L}^b$，则 $\alpha\mathcal{L}^a + (1-\alpha)\mathcal{L}^c \succsim \alpha\mathcal{L}^b + (1-\alpha)\mathcal{L}^c$

§2. 期望效用理论

一、期望 $E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$.

问题：有些事件 $E(x) = \infty$ 但 $V(x) < \infty$.

二、圣彼得堡悖论 (1738) Daniel Bernoulli & Nicolas Bernoulli (1717)

一枚均质硬币 ($\frac{1}{2}$)

获利赌局
- 如掷一次，第一次就背面朝上，获 1元
- 如 二 2
- 三 4
- $\vdots$
- n 2^{n-1}

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

实际发现 $V(x) < 20$

D. Bernoulli $E(x)$：客观的，评价可以一致

$V(x)$：主观的，人与人不同。

$\because$ $u(x)$ 是凹函数，例 $u(x) = \log x$，$\therefore$ $V(x)$ 收敛

$$E[u(x)] = \frac{1}{2}\log 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\log 2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \log 2^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \log 2^{n-1} = \log 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n (n-1)}_{=1} = \log 2.$$

期望效用 $\neq$ 期望回报
(主观) (客观)

三. V·诺依曼 — 摩根斯坦 E(u) 公式

$E(u) = u(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, u(x_i)$ 对效用本身取期望，而不是 $\sum P_i x_i$.

$u(x)$ 是凹函数.

四. 注意： E(u) 不能承认任意的正单调转换.

完全确定条件下： $x > y \iff u(x) > u(y) \iff \tilde{u}(x) > \tilde{u}(y)$

$\tilde{u}(x)$ 是 $u(x)$ 的任意正单调转换.

在不确定条件下： x 是 $\mathcal{L}$， 2个结果 $w_1\ (p_1)$ $w_2\ (p_2)$

$u(x) = \log x$， $p_1 + p_2 = 1$.

$E(u) = p_1 \log w_1 + p_2 \log w_2$ (1) 不确定

若变换形式为 $V = e^{E(u)} = w_1^{p_1} w_2^{p_2}$ (2) 确定 (p_1, p_2) 成了支出比例.

(2) 式与 (1) 式含义完全不同.

∴ E(u) 只承认正线性转换. $V = \overset{\text{距离}}{a} + b\,(\overset{\text{原点}}{E(u)})$ $(b>0)$.

里面包含了基数含义. 基数指数 Cardinal index 能定大多少 A·sen 98诺奖

$u(x) > u(y) \iff x > y$ (序数含义. 只说定大小)

$E(u) = u(\mathcal{L}^a) = \sum_{i=1}^{n} P_i^a \cdot u(x_i^a)$ 有基数含义

$u(\mathcal{L}^b) = \sum_{i=1}^{n} P_i^b\, u(x_i^b)$

$\mathcal{L}^a > \mathcal{L}^b \iff u(\mathcal{L}^a) > u(\mathcal{L}^b)$

§3. 风险规避与风险溢价

一. 研究对象： 风险对人们的效应.

取决于3个变量： ① risk 本身 ②. w (财富水平) ③ 主观态度 $u(\cdot)$

定义： pure risk = zero mean risk 零均值风险. $E(r) = 0$.

风险规避 (厌恶风险) 如果一个人对于零均值风险采取拒绝态度，则此人～.

二. 风险度量：

平均离差	a_1	a_2
工作：佣金制	± 2000	± 1000
固定薪水	99% 1510	1% 510

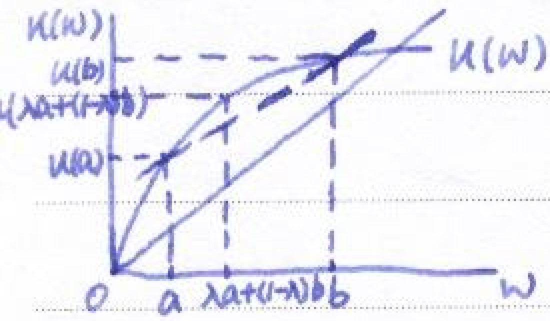
$E(w)=1500$ 离差 $w-E(w)$

① 平均离差 $=\sum_{i=1}^{n}|w_i-E_i(w)|P_i$

② 方差 σ^2 标准差 σ.

三. 对风险的主观态度

1. $u(w)$ 是凹, $u'(w)>0$ $u''(w)<0$.



如果 w 是一个向量

$\forall\lambda\in[0,1]$, 只要 $\lambda u(a)+(1-\lambda)u(b)\le u(\lambda a+(1-\lambda)b)$

(a,b 为向量, 取二时, $\lambda=0,1$) 则 $u(\cdot)$ 是凹的.

⇒ 推论: 如果 $u(\cdot)$ 是严格凹的, 则此人一定是风险规避的.

证: 任设一人初始财产水平为 w_0, 风险为 $\tilde{x}$ ($\tilde{x}$ 为纯风险) $\tilde{x}=\begin{cases}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{cases}$

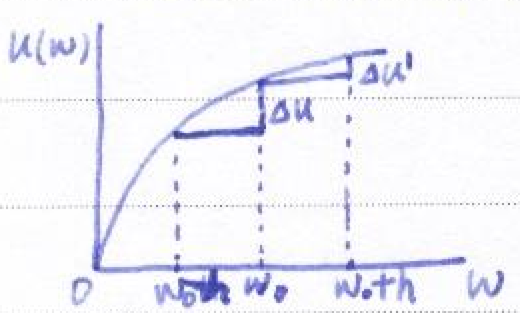
$\tilde{z}=w_0+\tilde{x}$ $E(\tilde{z})=E(\tilde{x})+w_0=w_0$.

$\forall\lambda\in(0,1)$. λ 表示坏事发生的概率, $1-\lambda$ 表示好事发生概率

$\lambda u(w_0+\tilde{x}_1)+(1-\lambda)u(w_0+\tilde{x}_2)<u[\lambda(w_0+\tilde{x}_1)+(1-\lambda)(w_0+\tilde{x}_2)]=u(w_0)$ 不赌.

[$\because$ 纯风险, $E(\tilde{x})=0\Leftrightarrow\lambda\tilde{x}_1+(1-\lambda)\tilde{x}_2=0$.]

2. 效用函数凹的经济含义.



① 边际效用递减 $u''(\cdot)<0$.

② 风险规避

③. 赢得起输不起.

$\begin{cases}\Delta u>\Delta u'\\u'(\cdot)>0\\u''(\cdot)<0.\end{cases}$

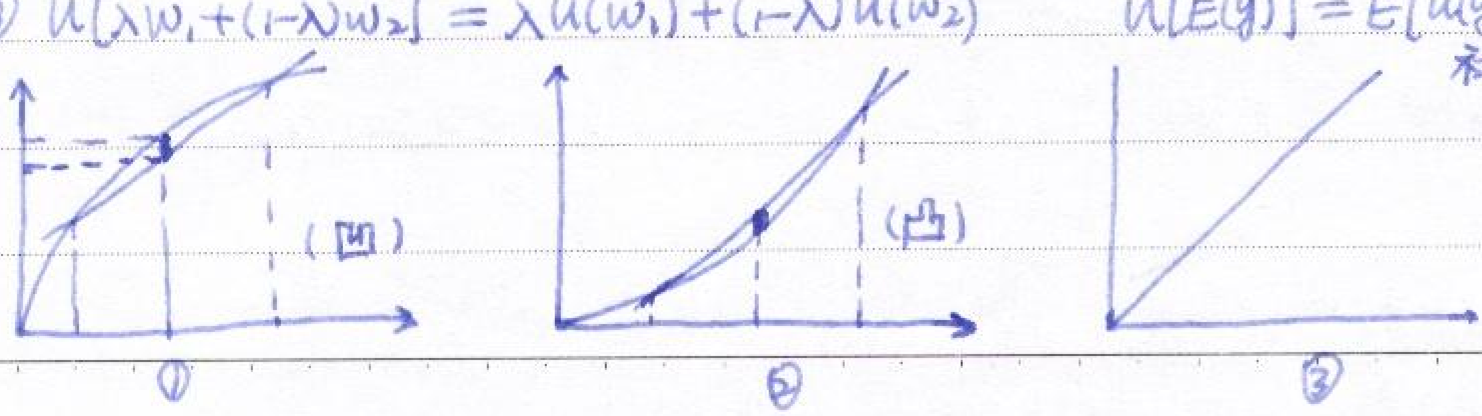
3. 用数学刻画风险规避.

① $u[\lambda w_1+(1-\lambda)w_2]>\lambda u(w_1)+(1-\lambda)u(w_2)$ $u[E(g)]>E[u(g)]$ 风险规避

② $u[\lambda w_1+(1-\lambda)w_2]<\lambda u(w_1)+(1-\lambda)u(w_2)$. $u[E(g)]<E[u(g)]$ 风险爱好

③ $u[\lambda w_1+(1-\lambda)w_2]=\lambda u(w_1)+(1-\lambda)u(w_2)$ $u[E(g)]=E[u(g)]$ 风险中立

社保基金, 保险公司.



四、风险规避系数 $u(\cdot)$ 凹的程度

$R_a = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$ 绝对风险规避系数

$R_r = -\frac{w \cdot u''(w)}{u'(w)}$ 相对风险规避系数

例：① $u(w) = -e^{-Aw}$ $u'(w) = Ae^{-Aw}$ $u''(w) = -A^2e^{-Aw}$

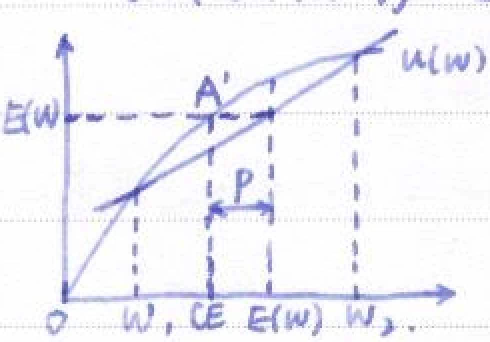
$\Rightarrow R_a = A$

② $u(w) = \frac{w^{(1-\xi)}}{(1-\xi)}$ $(\xi \neq 0, \xi \to 1)$ 求 R_a

$$\boxed{\begin{aligned} CE &= u^{-1}(E(u)) \\ P &= E(w) - CE \end{aligned}}$$

CE 与 P

CE (certainty Equivalent) 确定性等值 P (prium) 风险升水



CE：确定水平，等价于期望效用对应的财富水平。
E(u)

不买保险得 E(u)

买保险让个人与不买保险无差异.

保险公司让消费者投保后的财产水平降至CE，CE是买保单后的财富底线.

~~P 保险公司利润~~ $\begin{cases} CE = u^{-1}(E(w)) \\ P = E(w) - CE \end{cases}$ (风险代价)(风险溢价)；

P64. 例6. 彩票 获900元 0.2，获100元，0.8.

$E(w) = 900 \times 0.2 + 100 \times 0.8 = 260.$

对一个不确定结果的评估
期望收入.
$CE \neq E(w)$

问：个人 $u(w) = \sqrt{w}$，这个人愿花多少钱买这张彩票.

CE应满足 $u(CE) = E(u) = \sqrt{CE} = 0.2 \times \sqrt{900} + 0.8\sqrt{100} = 14 \Rightarrow CE = 196$ (愿出价格)

$E(w) - CE = 64$ 风险溢价.

当确定性结果转化为不确定性结果时，要有补偿，风险溢价.

四. 应用

1. 注意 $E(w)$ 可能 $\neq w^\circ$. (w°初值)

财险 $w_0 = 9$万(房屋) 0.05概率失火，$\Delta w = 8$万，$u = \sqrt{w}$，[单边风险].

求：① 保险金应付多少？ ② 保险公司的利润为多少？

这里 $w^\circ = 9$万 $\neq E(w) = 0.95 \times 9 + 0.05 \times 1 = 8.6$.

四、风险规避系数 $u(\cdot)$ 凹的程度

$R_a = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$ 绝对风险规避系数

$R_r = -\frac{w\cdot u''(w)}{u'(w)}$ 相对风险规避系数

例：① $u(w) = -e^{-Aw}$ $u'(w) = Ae^{-Aw}$ $u''(w) = -A^2e^{-Aw}$

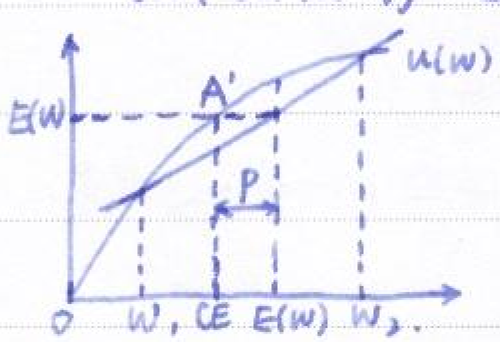
$\Rightarrow R_a = A$

② $u(w) = \frac{w^{(1-\xi)}}{(1-\xi)}$ $(\xi \neq 0, \xi \to 1)$ 求 R_a

$$\boxed{\begin{aligned} CE &= u^{-1}(E(u)) \\ P &= E(w) - CE \end{aligned}}$$

CE 与 P

CE (certainty Equivalent) 确定性等值 P (prium) 风险升水



CE：确定水平，等价于期望效用对应的财富水平.
E(u)

不买保险得 E(u)

买保险让个人与不买保险无差异.

保险公司让消费者投保后的财产水平降至CE，CE是买保险后的财富底线.

~~P保险公司利润~~ $\begin{cases} CE = u^{-1}(E(w)) \\ P = E(w) - CE \end{cases}$ (风险代价)(风险溢价)；

P64. 例6. 彩票 获900元 0.2，获100元，0.8.

$E(w) = 900\times0.2 + 100\times0.8 = 260.$

对一个不确定结果的评估 期望收入.
$CE \neq E(w)$

问：个人 $u(w)=\sqrt{w}$，这个人愿花多少钱买这张彩票.

CE应满足 $u(CE) = E(u) = \sqrt{CE} = 0.2\times\sqrt{900} + 0.8\sqrt{100} = 14 \Rightarrow CE = 196$ (愿出价格)

$E(w) - CE = 64$ 风险溢价.

当确定性结果转化为不确定性结果时，要有补偿，风险溢价.

四. 应用

1. 注意 $E(w)$ 可能 $\neq w^\circ$. (w°初值)

财险 $w_0 = 9$万 (房屋) 0.05 概率失火. $\Delta w = 8$万, $u=\sqrt{w}$, [单边风险].

求：① 保险金应付多少？ ② 保险公司的利润为多少？

这里 $w^\circ = 9$万 $\neq E(w) = 0.95\times9 + 0.05\times1 = 8.6$.

第五讲

§1. 最优保险决策

一. 前提：独立性公理.（如果要取期望效用，则一定要基于独立性公理）

$P\cdot U(A)+(1-P)\cdot U(C)$

$P\cdot U(B)+(1-P)\cdot U(C)$

二. 不确定条件下的预算线

1. 或然品 [前 $u(x_1, x_2)$ x_1, x_2两种商品]

同一物品，x^0（现状）$<$ x_1^1 $s=1$；x_2^1 $s=2$ （二期） x_1^1, x_2^1 体现服务量

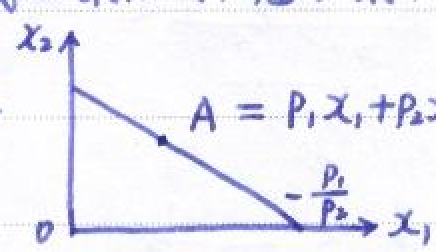
与提供交货时间、交货地点有关.

例：雨衣 $<$ 服务1 $s=$旱；服务2 $s=$雨

同一样物品在不同条件（状态）下所体现的不同的服务量，则该物品称为或然品.

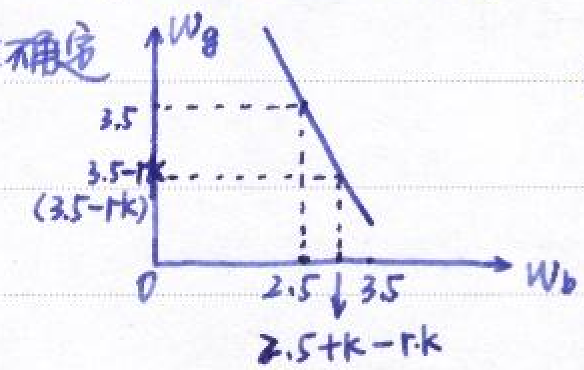
2. 预算线上的点（任意）的经济含义 [预算线上的点代表相同的钱数]

如确定



（A表示确定的钱数）.

如不确定



$W_0 <$ W_g；W_b 假设 $W_0=3.5$万.

$W_1 <$ 2.5万 0.01；3.5 0.99

A. B 期望收入 $E(W)$ 相同

A: $P\cdot 2.5+(1-P)\cdot 3.5=3.49$ $(P=0.01)$.

期望收入在预算线上，不同k对应不同点.

P, $(1-P)$ 相当于确定条件下两价格 P_1, P_2.

如投保，投保人：买多少数额的保险？k.

保险公司：收取多少保费？r（费率） 前提：全赔.

投保人投保后的财产水平

$$E(W)=P\cdot[3.5-1-\underbrace{rk}_{\text{保费}}+k]+(1-P)(3.5-rk) = 3.49.$$

No .

Date

3. 预算线的斜率：

$$\frac{\Delta W_g}{\Delta W_b} = -\frac{rk}{k-rk} = \frac{r}{r-1} = -\frac{r}{1-r}$$ r：保险金费率.

如：$k=10000$ 完全保险 < 部分保险 > 过分保险.

完全赔偿：买k赔k.

公平保险：则 $p=r$. $\frac{dW_g}{dW_b} = -\frac{p}{1-p}$.

保险公司期望利润为零. $E(\pi) = p[rk-k] + (1-p)\cdot rk = 0 \Leftrightarrow p=r$.

4. 消费者 $MRS_{b,g} = ?$ 坏状态对好状态的替代.

$\because E(u) = p\cdot u(W_b) + (1-p)\cdot u(W_g)$ （W_b, W_g 是变量）.

求全微分 $p\cdot\frac{\partial u(W_b)}{\partial W_b}dW_b + (1-p)\frac{\partial u(W_g)}{\partial W_g}dW_g = 0$.

$$\frac{dW_g}{dW_b} = -\frac{p\cdot\frac{\partial u(W_b^*)}{\partial W_b^*}}{(1-p)\frac{\partial u(W_g^*)}{\partial W_g^*}} = -\frac{p}{1-p} = -\frac{r}{1-r}$$

$MRS_{b,g} = \frac{MU_b}{MU_g} = \left|-\frac{p}{1-p}\right| = \frac{p}{1-p}$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{\partial u(W_b^*)}{\partial W_b^*}}{\frac{\partial u(W_g^*)}{\partial W_g^*}} = 1$$

5. 最优保险决策

$MRS_{b,g} = |$预算线斜率$|$.

$$\Downarrow$$

（5.16式） $\frac{-p\cdot\frac{\partial u(\cdot)}{\partial W_b}}{(1-p)\frac{\partial u(\cdot)}{\partial W_g}} = -\frac{p}{1-p}$ $\therefore \frac{\partial u(\cdot)}{\partial W_b^*} = \frac{\partial u(\cdot)}{\partial W_g^*}$

无差异曲线斜率

$$\Downarrow$$

$\because u(\cdot)$ 是严格凹. $\therefore W_g^* = W_b^*$

好状态与坏状态下财富水平一样. 前提：公平保险 $p=r$.

例3 P_{77}. 求：① 在公平保险下，最优保险额 $k^* = ?$

② 求净赔率 $=?$

③ 投保后对消费者的福利改进了多少！

$W_0 = 10$万 $\left\langle \begin{matrix} 8\text{万} & 0.25 \\ 10\text{万} & 0.75 \end{matrix} \right\rangle p$ $u(W) = \ln(W)$

①. $W_g^* = W_b^* \Rightarrow k^* = ?$

$E(W) = 0.75\times10 + 0.25\times8$ （A点） $= 0.75\times W_g^* + 0.25 W_b^*$

$\Rightarrow W_g^* = W_b^* = 9.5$ （投保后无风险）.

$\because p = r = 0.25$.

$\therefore W_0 - 0.25k = W_g^* = W_b^* \Rightarrow k = 2$万.

②. 净赔率 $= \dfrac{\text{赔额} - \text{保险收入}}{\text{保险收入}} = \dfrac{k - rk}{rk} = \dfrac{1-r}{r} = \dfrac{1-p}{p}$

这里 $\because p = 0.25$ $\therefore$ 净赔率 $= \dfrac{0.75}{0.25} = 3$.

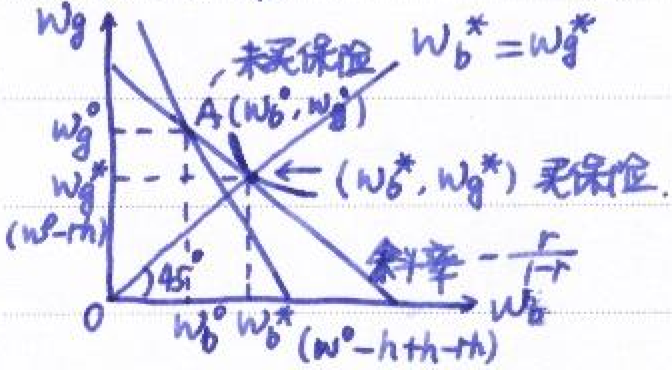
③ 如不买保险 $E(u) = p \cdot \ln 8 + (1-p)\ln 10 = 0.25\ln 8 + 0.75\ln 10$

买保险 $E(u)' = u(9.5) = \ln 9.5$.

注意：① 充分投保 ≠ 完全赔偿 祸 $h = 2 = 10 - 8$ (赌注)

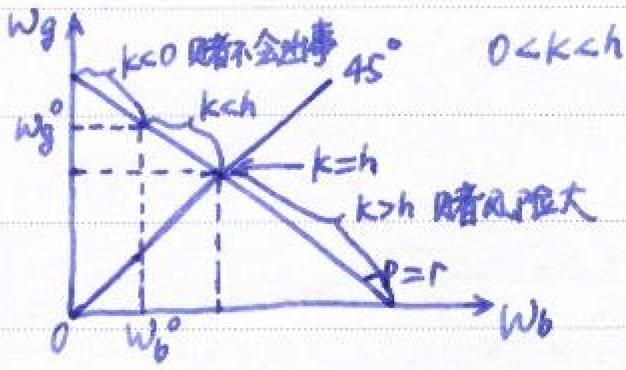
投保额 $= k = h$. 如果 $r = p$. 消费者一定会充分投保.

从几何上看



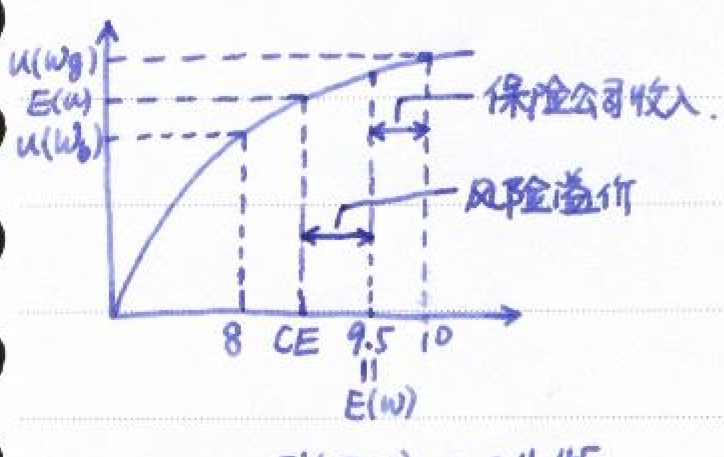
$r = p$ 时，保险公司收入 $= rh = ph$ $(h=k)$
保险公司支出 $= ph$ } $\Rightarrow \pi = 0$.

$r > p$ 左上方.



$0 < k < h$ 如发生事故，买k赔k.

风险溢价如何在保险公司和投保人之间分割？（接上例）



此例中风险溢价全归消费者，$\because p = r$，公平保险.

保险公司 $[10 - EW,\ 10 - CE]$

$p = r$
保险公司底线，
$\pi = 0$.
$rk = 5000$

R 保费率上限与CE对应的$\tilde{r}$.
$u(W_0 - R) = EU = 11.45$
$W_0 - R = e^{11.45}$
$\tilde{r}k = R = 6098 > 5000$
$\tilde{r} > r = 0.25$.

$CE = u^{-1}(EU) = e^{11.45}$

No.

Date

如公平保险 $p=r$，风险溢价全归于投保人

如 $r=\tilde{r}$　风险溢价全归于保险公司.

$\tilde{r}$：投保人的保留费率，　$r>\tilde{r}$ 时，消费者不保.

$\tilde{r}=\frac{W_0-CE}{K}$

风险溢价是保险业创造的，为免去风险的社会收益净增加.（与消费者剩余相似）

只要消费者是风险规避的（凹的效用函数），则有此创造.

风险溢价分配，二者在 CE 与 EW 之间谈判.

§2. 无风险利率与跨期决策 （本节 r 无风险）.

一. 研究问题

一个当事人只活两期，消费 (c_1, c_2) 收入 (m_1, m_2)

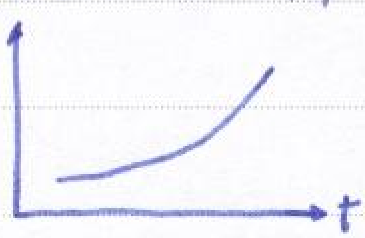
终身效用 $\max u(c_1, c_2)$ s.t. $(?m_1 + ?m_2) \geq p_1c_1 + p_2c_2$

储蓄决策：$s = m_1 - c_1$

社会保险基金 $m_2 = 0$ m_1供 （"空账"）

二. 无风险利率 r

长期国债利率 （30年期）



yield curve. 银行利率 $r = 0.0192$.

风险回报率 $\frac{R_j}{P_j}$ — 红利 — 股价

高利贷利率 ≐ 15% 年利率 （谢平 2003《金融研究》）

15.9% $\sum$ 贷款利率三年期 (≐5.4%)，送礼(5.[illegible]%)，交通费、手续费、审批(3.5%)

三. 跨期预算线方程

假定：1. 个人可以自由借入或出借，条件 r.

2. 个人 $c_1 > m_1$ （借入） or $c_1 < m_1$ （储蓄）

如储蓄：则 $c_2 = (m_1 - c_1)(1+r) + m_2$ (1)

(1) = (2)

如借入：则 $c_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - c_1)$ (2)

$(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2$ (4)

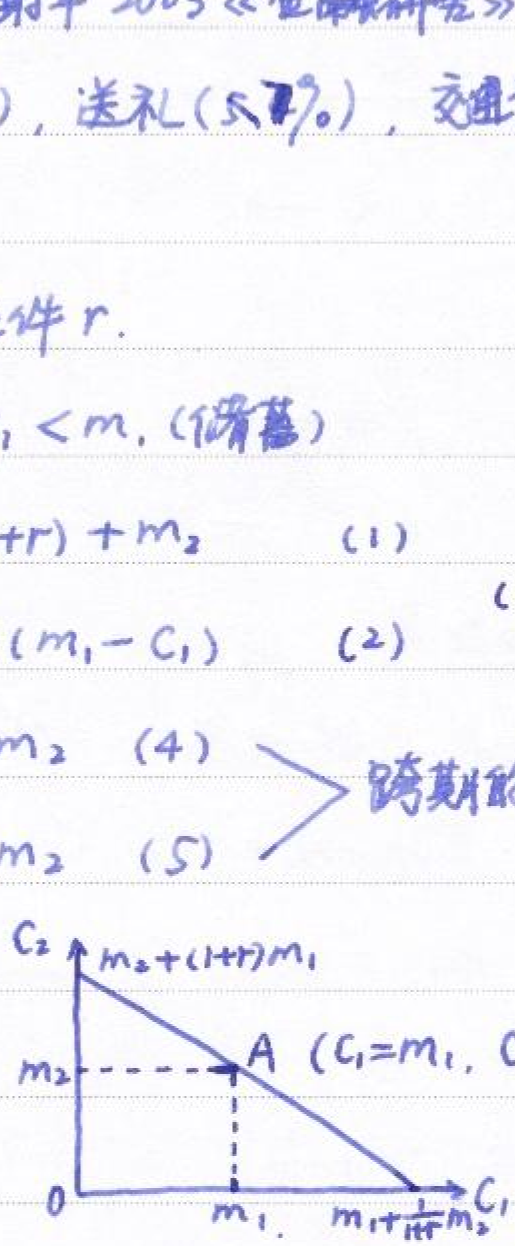
$c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = m_1 + \frac{1}{1+r}m_2$ (5)

跨期的预算方程式.

$p_1c_1 + p_2c_2 = p_1m_1 + p_2m_2$

(4) $p_2 = 1$，期值公式.

(5) $p_1 = 1$ 现值公式



$k = -(1+r)$

四. 最优决策准则

$MRS_{12} = \frac{\partial u(\cdot)/\partial c_1}{\partial u(\cdot)/\partial c_2} = (1+r)$ — $\frac{P_1}{P_2}$

|预算线斜率|

$$\begin{cases} \max u(c_1, c_2) \\ \text{s.t. } c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 \leq m_1 + \frac{1}{1+r}m_2 \end{cases}$$

例1 张明效用函数为 $u(C_1, C_2)=C_1C_2$

$m_1=50000$元 $m_2=0$， $r=10\%$. 可自由借入与借出.

问：(1)如果利率上升，他的C_1会上升，下降还是不变.

解：$C_1^*=\frac{y}{2p_1}=\frac{m_1}{2}=2.5$万元.

$(\because p_1=1,\ Y=m_1+\frac{1}{1+r}m_2=m_1)$

$\therefore C_1^*$与r无关， $\therefore C_1^*$不变！

(2)如果r上升， C_2会上升，下降还是不变

解： $C_2=\frac{y}{2p_2}$. 令$p_2=1$. $Y=(1+r)m_1+m_2=(1+r)m_1$

$C_2^*=\frac{(1+r)m_1}{2p_2}=(1+r)\frac{m_1}{2}$

$\therefore r\uparrow \Rightarrow C_2^*\uparrow$.

例2. 如 $u=\min\{C_1, C_2\}$.

解： $C_1^*=\frac{y}{p_1+p_2}$ 取 $p_1=1$, $p_2=\frac{1}{1+r}$, $y=m_1+\frac{1}{1+r}m_2$

代入原则要一致.

五. 贴现率

如差一期 $\beta=\frac{1}{1+r}$ $(0,1)$. W_0, $W_1=W_0(1+r)$

差二期 $\beta^2=(\frac{1}{1+r})^2=\frac{1}{(1+r)^2}$

期间区分不连续

若时间连续：贴现率 $=e^{-r}$ r 年利率(无风险).

P83. 如一年计一次利，则一元财富得 $1\cdot(1+r)$.

如一年计二次利 $1\cdot(1+\frac{r}{2})^2$

连续计息，计n次利 $1\cdot(1+\frac{r}{n})^n$

一年后 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n=\left[\lim\limits_{\frac{n}{r}\to\infty}(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}}\right]^r=e^r$

t年后 1元变 e^{rt}. 贴现率 $=e^{-rt}$.

$\tilde{r}$(实际) $=\frac{1+r}{1+\pi}-1=\frac{r-\pi}{1+\pi}$ 当π很小时， $\tilde{r}\doteq r-\pi$.

通胀率

（本节 r 含风险）

§3 最优证券投资（不确定性. 风险. 风险溢价在金融中的应用）

一. 一种风险资产的情形

W_0：初始资产

$W_0=1$，两种投资方式
- ① 无风险资产（国债） 回报率 r_f（f: risk-free）
- ② 风险资产（股票） 回报率 $r_s=(r_1,r_2,\cdots r_S)\in R^S$

S: state r_s：在状态 $s\in\{1,\cdots,S\}$ 下的回报率.

π_s 发生 r_s 的概率 $r_m=\sum_{s=1}^{S} r_s\pi_s$ 风险资产的预期收益率（回报率均值）

资产组合的期望收益率： $1=W_0=X a_m+(1-X)a_f$

"组合"的回报率的均值： $r_x=\sum_{s=1}^{S}[X r_s+(1-X)r_f]\cdot\pi_s$ ⋯ ①（r_s—随机变量）

$$① \Rightarrow r_x=\sum_{s=1}^{S}X r_s\pi_s+(1-X)r_f\underbrace{\sum_{s=1}^{S}\pi_s}_{1}=r_m\cdot X+r_f\cdot(1-X)$$

投资组合(x)的风险 $\sigma_x^2=\sum_{s=1}^{S}[(X r_s+(1-X)r_f)-r_x]^2\cdot\pi_s$

（$\because \sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-Ex)^2\pi_i$）

将①代入②： $\sigma_x^2=\sum_{s=1}^{S}(X r_s-X r_m)^2\pi_s=X^2\underbrace{\sum_{s=1}^{S}(r_s-\overset{E(r_s)}{r_m})^2\pi_s}_{\sigma_m^2}$ 风险资产本身回报率的方差.

$\therefore \sigma_x^2=X^2\sigma_m^2$ ⋯⋯ ②.

X^2 相当于一系数（[illegible]） 如 $X=1$，表示组合投资的方差 $\sigma_x^2=\sigma_m^2$
$X<1$，$\sigma_x^2<\sigma_m^2$

标准差 $\sigma_x=X\sigma_m$ ⋯ ②′ 表示投资组合(x)的风险

r_m-r_f ⋯ ③ 著名的风险溢价 对承担风险的补偿.

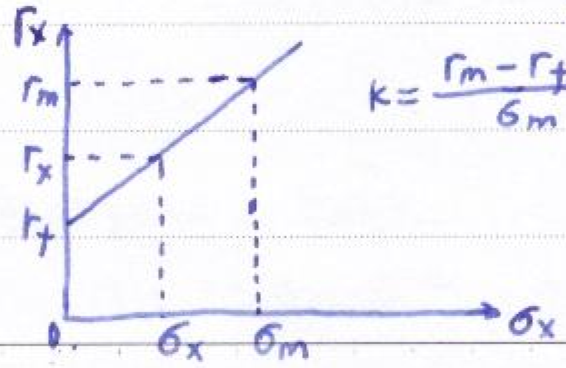
当一个有风险的回报转化为无风险回报，资产应缩水.

要放弃固定收入承担风险，回报率要高于固定收入回报.

风险溢价——保险行业为社会做出的贡献 EW

$p=\dfrac{r_m-r_f}{\sigma_m}$ ⋯ ③′ 风险价格 每单位风险（应承担）的溢价.

（把 r_m-r_f 单位化，消去量纲.）



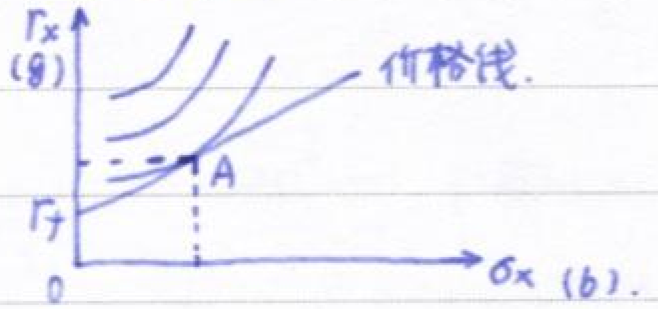
$k=\dfrac{r_m-r_f}{\sigma_m}$ $r_x=X\cdot r_m+(1-X)r_f$.（$0<X<1$）

- 预算线 风险投资条件下关于均值 r_x 和标准差的预算线.
- 风险价格线 多承担一单位风险要求有多少风险溢价来补偿

（比较 $-\frac{P_1}{P_2}$ 确定条件下）；

$$\because \frac{r_x-r_f}{\sigma_x}=\frac{X\cdot r_m+(1-X)r_f-r_f}{\sigma_x}=\frac{X(r_m-r_f)}{\sigma_x}=\frac{X(r_m-r_f)}{X\sigma_m}=\frac{r_m-r_f}{\sigma_m}$$

4. 最优组合.



两种商品. 一好一坏、无差异曲线斜率为正.

下凸, 风险规避

多承担一单位风险要求的补偿增量递增.

A点为最优, 与A对应的 x^* (组合比例)?

最优条件: $MRS_{\sigma x, r x} = \frac{-\partial u(\cdot)/\partial \sigma_x}{\partial u(\cdot)/\partial r_x} = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$

无差异曲线斜率 $=$ 预算线斜率.

$(\partial u(\cdot)/\partial \sigma_x < 0 \Rightarrow MRS_{\sigma x, r x} > 0)$.

二. 投资组合(x)风险度量的另外方式.

1. Coefficient of Variation (CV)

$CV = \frac{\sigma_x}{r_x}$ 单位期望回报所承担的风险.

如一组合包含多种(两种以上)风险资产,则整个组合的风险可能小于单个风险资产的风险.

例: 两种风险资产. $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$

$A \langle \begin{matrix} 10 & s_1 \\ -5 & s_2 \end{matrix} \qquad B \langle \begin{matrix} 10 & s_2 \\ -5 & s_1 \end{matrix}$

单独考虑A. $\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{2}(10-2.5)^2 + \frac{1}{2}(-5-2.5)^2} = 7.5$

同理 $\sigma_B = 7.5$.

$CV_A = CV_B = \frac{7.5}{2.5} = 3$.

如A.B同时投资, 组合X(A,B).

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{2}(5-5)^2 + \frac{1}{2}(5-5)^2} = 0$ $\quad CV_x = 0$. $\Leftrightarrow$ 无风险.

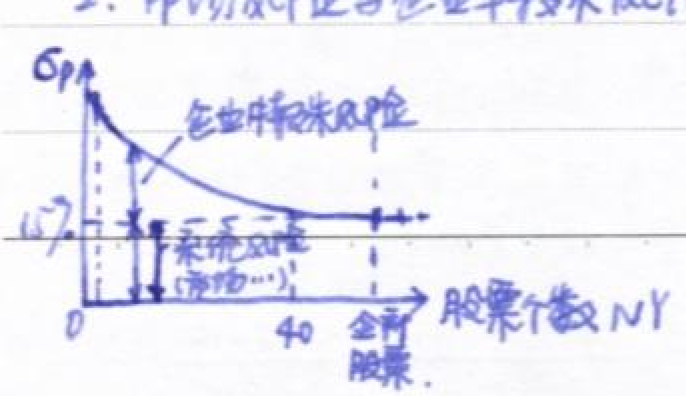
1°. 若 r_A 与 r_B 完全负相关 $\rho = -1$, 组合能把风险全部取消.

2°. r_A 与 r_B 完全正相关. $\rho = 1$, 组合资产(分散投资)不能降低风险.

(用CV度量, 组合风险与单独个风险资产风险一样)

3°. $\because$ 一般 $-1 < \rho < 1$ $\quad \therefore$ 一般来讲 组合投资会降低风险.

2. 市场风险与企业特殊风险. (firm-specific)



市场风险(系统风险) 组合投资降低风险的最低限.

不可能通过分散投资加以消除.

决定因素：宏观经济环境（通胀率，r_f，…）战争…

不是影响单个股票而是影响所有风险资产.

企业特殊风险　决定因素：企业资产组合，治理结构，投资项目环境.

可通过分散投资（增加组合中风险资产品种）消除.

3. β值及其经济含义.

$r_j = \alpha + \beta r_m$ ……⑥　（r_m — 大盘指数）

r_m：多种风险资产回报的平均值.　$\underset{\text{大盘指数}}{r_m} = \sum_{j=1}^{n} w_j \underset{\text{随机变量}}{r_j}$　（j：第j种股票）

w_j：股票j资产值在总风险资产中的权重.　$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

r_j：单只股票的回报率（不是取均值的，时点）.

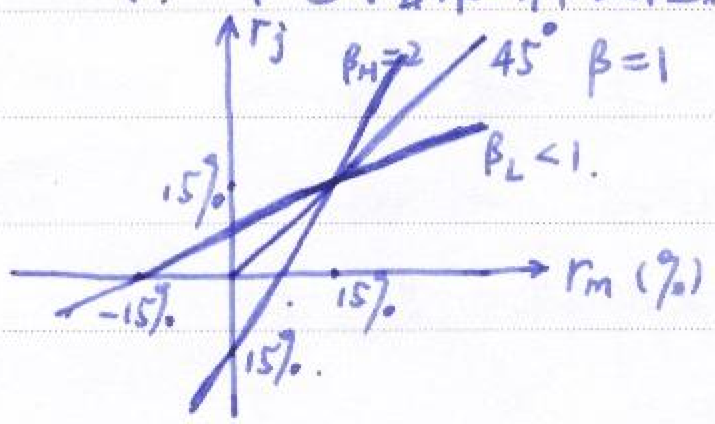
β：单只股票的回报率对大盘回报率变化的敏感度.

则 $\beta_m = 1$，∵ $r_m = \beta r_m$.

对于j，$\beta_j > 1$，股票j的波动幅度超过大盘波动幅度.

$0 < \beta_j < 1$，………小于………

∴ β也可看作一种风险度量值.



均过（15%，15%）点含义？

$\beta_p = \sum_{j=1}^{N} w_j \beta_j$　当 $\beta_j < 1$，买股票j降低组合风险.

当 $\beta_j > 1$，……增加……

三. 证券市场线（SML security market line）—— 证券市场达到均衡的必要条件

1. 市场的风险溢价与个别证券的风险溢价

市场的风险溢价：$RP_m = (r_m - r_f)\beta_m = r_m - r_f$

个别风险溢价：$RP_j = \beta_j (r_m - r_f)$

$\begin{cases} \beta_j > 1 & \text{该股票风险大，溢价应高于大盘溢价.} \\ \beta_j < 1 & \text{小　　低于} \end{cases}$

No .

Date

r_{Pj} 的另一种解释：

∵ j的风险 $= \beta_j \cdot \sigma_m$　又 风险的价格 $= \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$

∴ 风险溢价 = 风险×价格 $= \beta_j \cdot \sigma_m \cdot \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} = \beta_j(r_m - r_f)$

2. 证券市场的均衡条件：（必要条件）.

$r_i - \beta_i(r_m - r_f) = r_j - \beta_j(r_m - r_f)$

r_j, r_i 是包含风险溢价的回报率（风险利率） gross 回报率.

等式含义：剔除风险因素后，不管投资于哪种资产净回报率相等.

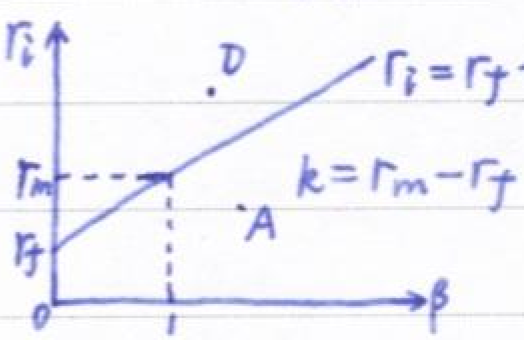
若 >，卖j，买i，$P_i\uparrow \to r_i\downarrow$.

若 <，卖i，买j，$P_j\uparrow \to r_j\downarrow$.　"套利" 买与卖同时发生的行为.

非严格公式：$r_i = \frac{D_i(红利)}{P_i(买入价)}$

对 $j=f$ 亦成立，则 $r_i - \beta_i(r_m - r_f) = r_f - \beta_f(r_m - r_f)$

∵ $\beta_f = 0$.　$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$ [无风险回报率＋风险溢价].



为什么此图是证券市场的均衡图？

理由：SML上的点表示投资者i（第i种股票的买者）所要求的回报率，如果 "expected return" = "所要求的回报率"，则均衡.

均衡有两层含义：① 供求相等　② 实际结果等于期望结果.

不在 SML线上的点都不是均衡点，如 A、D.

例（如 r_A 低于 SML 上的点）

$r_f = 6\%$，$\beta_A = 1.5$，$rp_m = r_m - r_f = 8\%$.

∴ $\underset{(required)}{r_A} = 6\% + 1.5 \times 8\% = 18\%$　(SML)

如 投资者 A 知道，

$E(r_A)$？ ⇐
① 成长率 (g)：红利分配额的增长率（盈利潜力） $g = 5\%$
② D_0（今年红利）= 3元/股.
③ $P_A = 26.25$ 元/股

$E(r_A)$ 应满足 $P_0 = \underbrace{D_0(1+g)}_{\text{下一期红利}} \Big/ \underbrace{(1+Er_A)}_{\text{含风险的贴现因子}} + D_0(1+g)^2 \Big/ (1+Er_A)^2 + \cdots$

t_0：现在. P_0 一个贴现公式（现值）

$$= \frac{D_0(1+g)}{Er_A - g} = \frac{D_1}{Er_A - g}$$

$\therefore Er_A = \frac{D_1}{P_0} + g$ （公式13） $= 5\% + \frac{3.15}{26.25} = 17\% < r_A = 18\%$.

$\therefore$ 卖出股票 A, $\rightarrow P_A \downarrow$ 当 $\widetilde{P_A} = 24.23$ 时, ($Er_A = 18\% = r_A$) 均衡价.

① 若已知 P_A, 代入 $Er_A = \frac{D_1}{P_A} + g \neq$ SML 纵坐标, 一定表示 P_A 不是均衡价.

若 $Er_A <$ SML 纵坐标, 则卖出, $>$ 买入. （sharpe 90 诺奖）

② 算出均衡价格, 该价格时套利停止.

如果 $\hat{P}_A$ 指 SML 的纵坐标

则 P_A 不是均衡价格.

第六讲 生产函数与规模报酬

§1 基本概念

一、生产要素 L (Labor) K (Capital) Ld (land)

K < Km (物质资本) < 原材料 / 厂房, 设备
K < K_L 人力资本 { 教育 / R&D

Cobe-Douglas 函数中假设 ld = 1 (不变).

实际上, 我国 92年—02年 耕地年减少2000万亩 (城市扩建征用)

现农田面积最多只达 19亿亩.

地价: 1000元/m^2. (房地产商交给政府的)

而 农民得到的补偿 8000—12000元/亩.

$\frac{R\&D}{GDP} = 2\%$

汽车工业. 94年中央有个文件规划: 利用国外技术整合国企, 把一汽、二汽、上汽搞起来. 而现在, 中国还造不出自己的汽车发动机.

明年, 关税将下调到25%以下, 进口配额制取消.

二、企业面临的约束

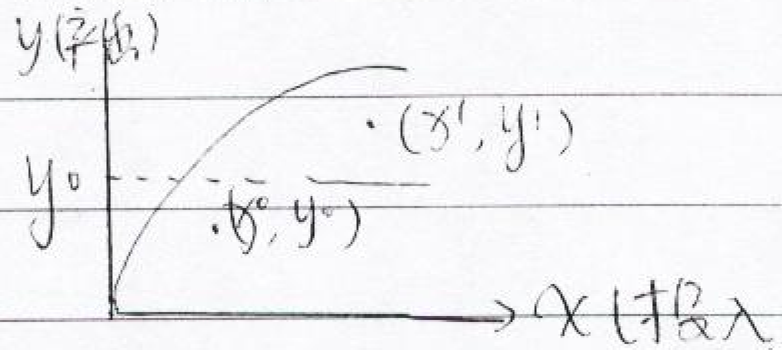
1. 资金约束 (预算约束)

$w \cdot L + r \cdot K + q_e \cdot Ld \leq C^{\circ}$ (在我国, 较约束)

2、市场需求约束 $Y \geq D$

存货率 = $\frac{库存}{GDP}$ 国际标准 0.5%，我国因为通缩一直在4%，03年底降至3%

三、生产集



生产集为凸集

即 $(x^0,y^0)\in X$，$(x',y')\in X$

则 $\lambda x^0+(1-\lambda)x'\in X$

对于给定的y，可以选不同的投入量；对于相同的投入x^0，可以选不同的产出。

生产函数：生产集的边界，最优

$Y=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

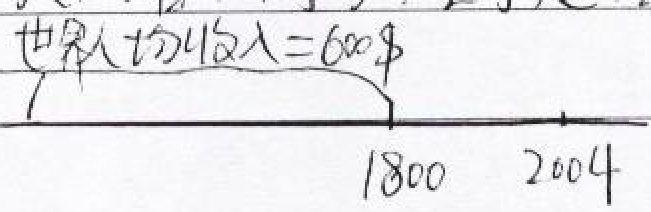
"木桶原则" 短边规则 瓶颈原理

eg. 去年华东六省，电拉闸，受决策者的偏好影响

$Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ A: 总生产效率(技术水平) $A(t)$

如何从传统农业过渡到现代经济？

满足3个条件之一，① α很小；② K不变；③ K的增长率与人口增长同步，则是传统经济



中国北宋时 人均GDP达到 600$

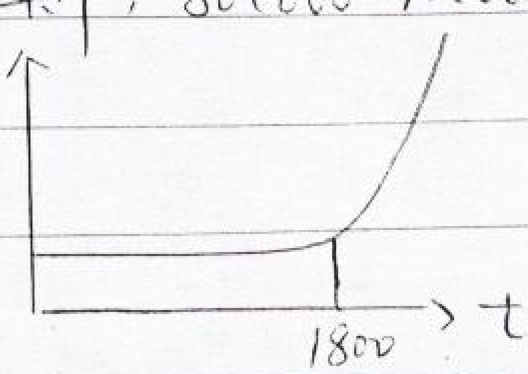
之后开始下降 1978年 160$

96年再次↑600$

马尔萨斯均衡了1800年前是个真理。

现在增长model超越了马尔萨斯，Solow Model

西方社会 GDP增长率3%



e^{rt}

$=600e^{0.03(150)}=600e^{4.5}\approx\$30,000$

"不怕慢，只怕停" —— 陈云

§2 短期生产函数与生产决策

一、$F(\bar{K}, L) = F(L)$

形式上的意义：① 短期，投资决策不起作用

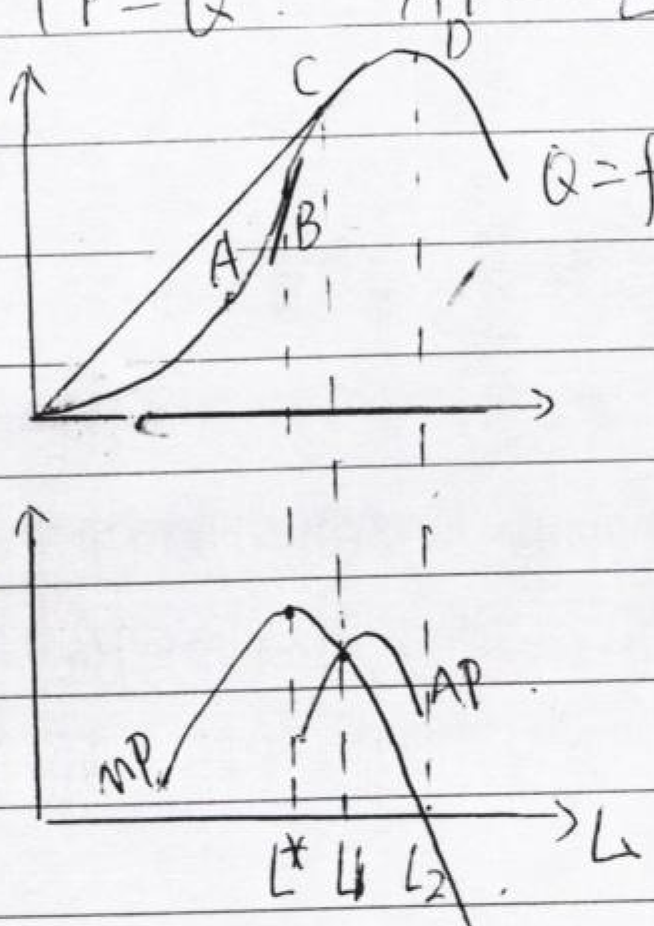
② 逻辑上，从单变量入手到多变量

$\frac{1}{L}F(K, L) = F(\frac{K}{L}, 1) = f(k)$ (规模报酬不变)

二、TP, AP, MP 及三者关系

$TP = Q$　　$AP = \frac{Q}{L}$　　$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L}$

图示



B点：从凸到凹的拐点

凸：$F''(L) > 0$　凹：$F''(L) < 0$

B：MP_L 从递增变为递减

C：OC连线与F(L)切线重合

$AP_C = MP_C$

D：F(L)从上升变为下降

三、边际产量递减规律：

当 $L > L^*$ 时，MP↓ 即 $F''(L) < 0$

如果不是，$F''(L) = 0$ 或 $F''(L) > 0$，不会收敛

∴ 任一个区域，投资、生产都有边界

由于 $F''(L) < 0$　行业发展一定有边界

∴ 要按比例发展

注意：① 边际报酬递减律是以技术不变为前提；

② 以其他要素不变为前提

③它是在某种要素增加达到一定程度之后才出现的

④. 生产三阶段

Step Ⅰ: $MP_L > AP_L \Rightarrow AP_L \uparrow$

Step Ⅱ: $AP_L > MP_L > 0$

Step Ⅲ: $MP_L < 0$

最优决策点: ⅠⅢ不可能, 只有在Ⅱ

⑤. 定律: 如 $MP_L = AP_L$ 则 AP_L 达到max

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{F(L)}{L}$$

$$\frac{dAP_L}{dL} = \frac{F'(L)\cdot L - F(L)}{L^2} = 0$$

即 $F'(L)\cdot L - F(L) = 0$

$$F'(L) = \frac{F(L)}{L}.$$

$$MP_L = AP_L$$

反之, 也成立. ∵ $F(L)$ 是凹的

$MP_L = AP_L$ 也是 max AP_L 的充分条件.

eg. (最优劳动投入).

已知: $Q = 21L + 9L^2 - L^3$. 求: ① AP_L? MP_L?

② 如 $L=3$, 是否合理? ③ 如 $W=63$, $P=3$. 找出最优劳动投入量。

解: ① $AP_L = \frac{Q}{L} = 21 + 9L - L^2$

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = 21 + 18L - 3L^2$$

② 看 $L=3$ 处于哪个阶段, 若属于Ⅱ, 则继续讨论

Ⅱ的始点: $AP_L = MP_L \Rightarrow L = 4.5$

终点: $MP_L = 0 \Rightarrow L = 7$.

∴ $L=3$. 不合适

③ 企业目标：$\max \pi = \max(P\cdot Q - WL)$

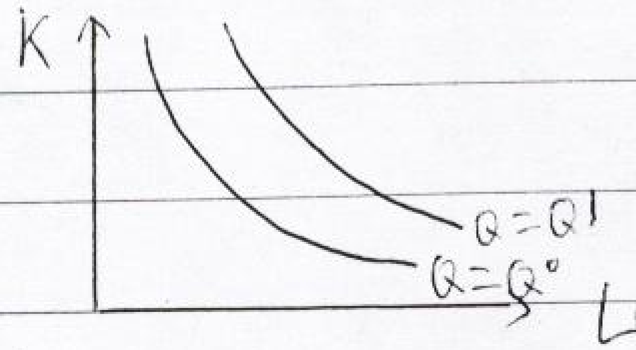
$\Rightarrow P\cdot F'(L) = W$ 工资等于劳动的边际产值

$3\times(21+18L-3L^2)=63$

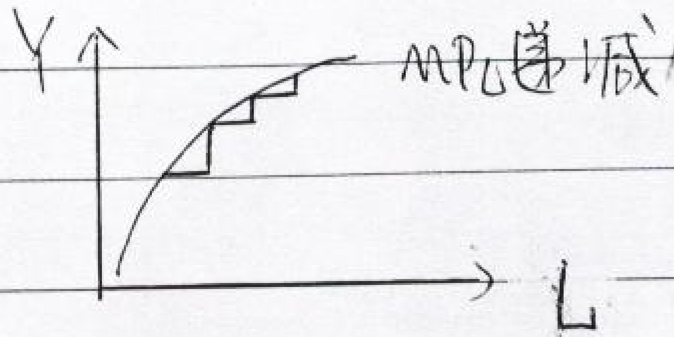
$L^* = 6$

§3 长期生产函数

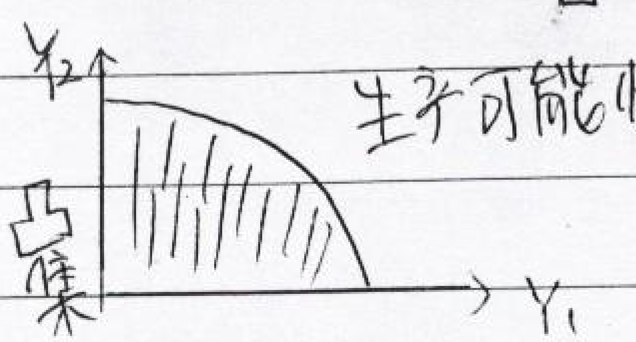
形式：$F(K, L)$



两种要素，一种产出

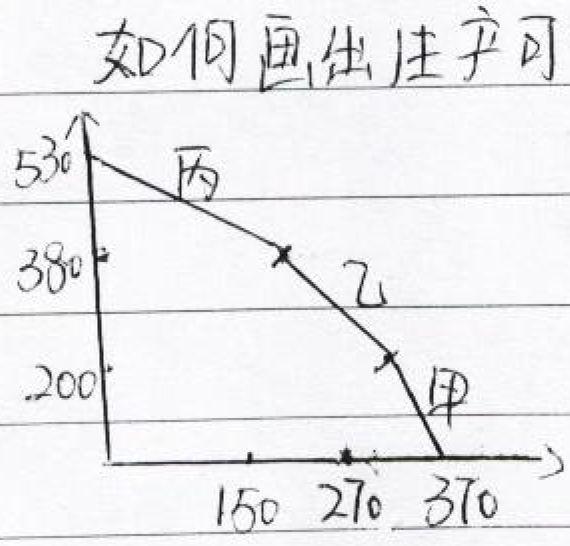


一种要素，一种产出



一种要素，Y_1，Y_2 两种产出

如何画出生产可能性边界？(P114.9)



丙：生产X的机会成本 1

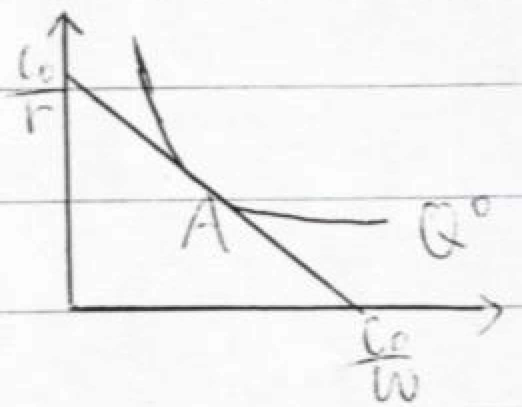
乙：生产X的机会成本 1.5

甲：生产X的机会成本 2

二、长期决策

$\max f(L, K)$

$s.t.\ w\cdot L + r\cdot K \le C^0$



作 $V = f(L, K) + u(C^0 - w\cdot L - rK)$

$\frac{\partial V}{\partial L}$

$\frac{\partial V}{\partial K}$

$\frac{\partial V}{\partial u}$

F.O.C $\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = \frac{w}{r} = \frac{MP_L}{MP_K}$

§4 规模报酬与"耗尽性分配定理"

设 $Q = F(K, L)$，如果 $F(tK, tL)$ 满足（$t>1$ 时）

$F(tK, tL) = t^k F(K, L)$ 则称 $F(\,)$ 为 k 次齐次。

若 $k>1$，规模报酬递增；

$k=1$，规模报酬不变；

$k<1$，规模报酬递减。

一般，长期假设 $k=1$。

CD函数：$Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$

$Q(tK, tL) = A(tK)^{\alpha}(tL)^{1-\alpha} = t^{\alpha+1-\alpha} AK^{\alpha} L^{1-\alpha} =$

$tAK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ 即CD为规模报酬不变。

二. 耗尽性分配定理

如果生产函数为CRS (constant return to scale)

$Y = K\cdot MP_K + L\cdot MP_L$

假定 $w = MP_L$　$r = MP_K$

则 $Y = rK + wL$

证明：如果 $f(tK, tL) = t^k f(K, L)$

两边对t求导：$kf_1(tk,tl)+Lf_2(tk,tl)=kt^{k-1}f(k,l)$

令t=1，得到 $kf_1+Lf_2=kf(k,L)$

∵CRS ∴k=1

∴ $kf_1+L\cdot f_2=f(k,L)$

① 如果也按边际产量来分配，在CRS下，全部产出恰好分光

② 决定K与L的相对收入比重.

eg. $Q=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

$MP_K=\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$ $MP_L=(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}$

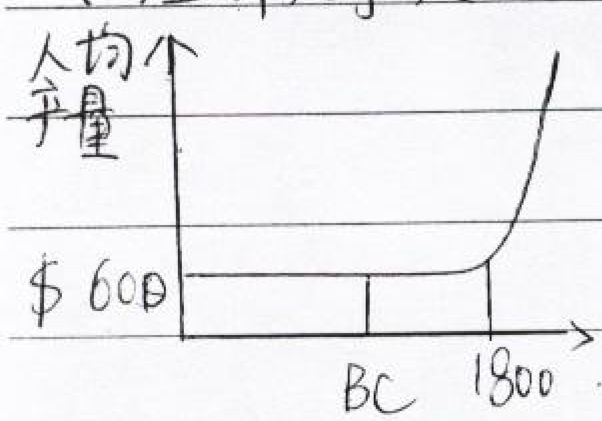
$Q=MP_L\cdot L+MP_K\cdot L=\underbrace{(1-\alpha)Q}_{劳动所得}+\alpha Q$ 资本利得

美：$\alpha=0.33$，$1-\alpha=0.67$. 中国：$\alpha=0.6$ $1-\alpha=0.4$

§5. 马尔萨斯均衡

CRS和耗尽性分配定理的应用.

一、经济史事实与model的基本特征：



1798年，马尔萨斯的《人口论》

R. Lucas　　三农（农民、农业、农村）

E. Prescott　　↓　　弱质产业

收入　产量和价格.

基本特征：(1) $Y_t=F(L_t,N)$　① $L\in$ land t

$Y_t=C_t$（没有投资Bo）　$L_0=L_1=\cdots L_t=L$（L也影...）

(2) $N_{t+1}=N(t)g(t)$　$c_t=\frac{C_t}{N_t}$　②

$$g(t)\begin{cases}>1, & 如果\ c_t>c^*\\ =1, & 如果\ c_t=c^*\\ <1, & 如果\ c_t<c^*\end{cases}$$

二、瓦尔拉斯均衡的基本条件 （必要）

令 (C^o, L^o, N^o) 为均衡时的产出、土地、劳动力量

(c^o, l^o, n^o) $c^o=\frac{C^o}{N^o}$ 人均消费 $l^o=\frac{L^o}{N^o}$ 人均土地 $n^o=1=\frac{N}{N}$

生产函数满足3个条件：

1. 要素边际生产率非负 即 $\frac{\partial F}{\partial L^*} \geq 0$，$\frac{\partial F}{\partial N^*} \geq 0$ MP_{La} MP_N

2. 规模报酬不变 (CRS)

$F(tLa, tN)=tF(La,N)$ $\frac{1}{N}F(La,N)=\frac{C}{N}=F(\frac{La}{N},1)=F(la) = c$

3. MP_N 与 MP_{La} 都递减

$\frac{\partial^2 F}{\partial N^2}<0$ $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$

均衡的必要条件

分配关系

1. $C_t^o = r_t \cdot L_t^o + w_t N_t^o$

$(r_t, w_t$ 为 land, Labor 的报酬率 假定 $P_t=1)$

2. $W_t = \frac{\partial F}{\partial N_t^*} \cdot P = \frac{\partial F}{\partial N_t^*}$ （货币工资）

$\frac{W_t}{P_t} = \frac{\partial F}{\partial N_t^*}$ （实物工资）

（在单变量生产函数下的推导）

3. $r_t = \frac{\partial F(\ )}{\partial L_t^*}$

生产关系 4. $C_t^o = F(L_t^o, N_t^o)$

交换关系

5. $\underbrace{C_t}_{\text{总供给}} = \underbrace{N_t c_t^o}_{\text{总需求}}$ → 产品市场

6. $\underbrace{N_t^o}_{\text{企业对劳动力的总需求}} = N_t n_t^o$ 总供给 } 要素市场

7. $\underbrace{L_t^o}_{\text{对土地的需求}} = N_t l_t^o$ 总供给

三. 均衡轨道 (path)

1. Steady State

一种状态在t期与在t+1期是相同的,则稳态.

$\forall t \in (0, 1, \cdots\cdots)$.

2. 状态变量:刻划状态的关键变量

(Malthus model 中 N_t 是内生的)

3. 马尔萨斯的定义:N^*.

$N_{t+1} = N_t = N^*$ (对$\forall t$都成立)

$$N^* = N^* g(c^*) = N^* g\left(\frac{F(Ld, N^*)}{N^*}\right) \qquad (11)$$

$$N_{t+1} = N_t g(c) = N_t g\left(\frac{F(Ld, N)}{N}\right)$$

N^*的充要条件是 $g(c) = 1$.

$$\Longleftrightarrow g\left(\frac{F(Ld, N^*)}{N^*}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{F(Ld, N^*)}{N^*} = C^*$$

命题 E. Prescott. 1999年证明. 2002. Sept. AER发表.

满足公式(11)的稳态是唯一的. (N^*, C^*)

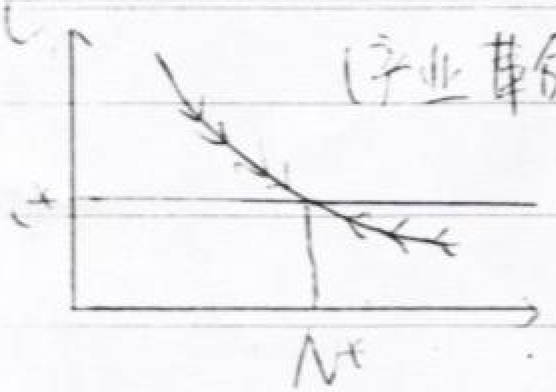
$$F\left(\frac{L}{N^*}, 1\right) = C^*$$

理由有3:① $\because \frac{\partial F()}{\partial L} > 0$.

② $l = \frac{L}{N^*}$, $\therefore \frac{\partial f(l,1)}{\partial N} \leq 0$

$c(t) = f(l, 1)$ 对 N_t 是单调减的.

③ 而满足 $g(c) = 1$ 的 C^* 是唯一的. 即一条水平线



(产业革命前，没有物质资本，社会处于稳态)

"直观"

如 $N_t < N^*$

$\frac{L_t}{N_t} > l^*$

$c_t > c^*$

导致下期人口量 $N_{t+1} > N_t$

农民：2600元/人·年　农村还没摆脱 Malthus

四. 如何走出马尔萨斯均衡？

1. 引入K、L物质资本与人力资本的持续积累

2. 把N从Ld中走出来

Now，人口的36%是城镇人口，到(11五计划(09年))达到58%

Malthus 一生三场争论
- 1. 谷物法　P(谷物) ≥ 8先令 则进口
- 2. 反对济贫法 (激励懒惰) (Malthus反对)
- 3. 物价

3. 高的储蓄率

马尔萨斯　$y_t = c_t$

4. 体制要变革　(转型)

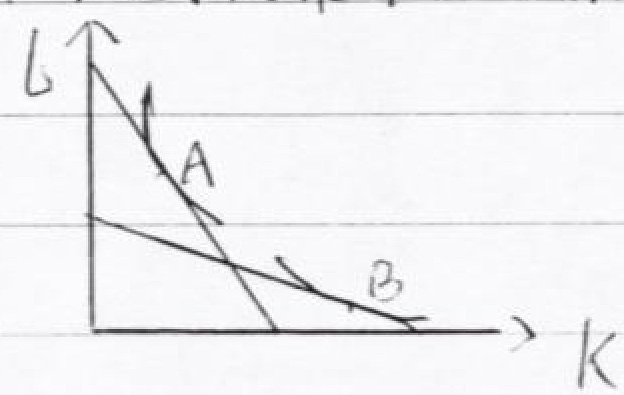
第六讲应注意的几个问题：

1. 短期决策　F(K, L)；找用工量 L^*

2. 长期决策　K：L　选技术

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$$

3. 长期决策中，要素价格比率与技术 F(K, L) 决定了 $\frac{K^*}{L^*}$



从A到B的变化

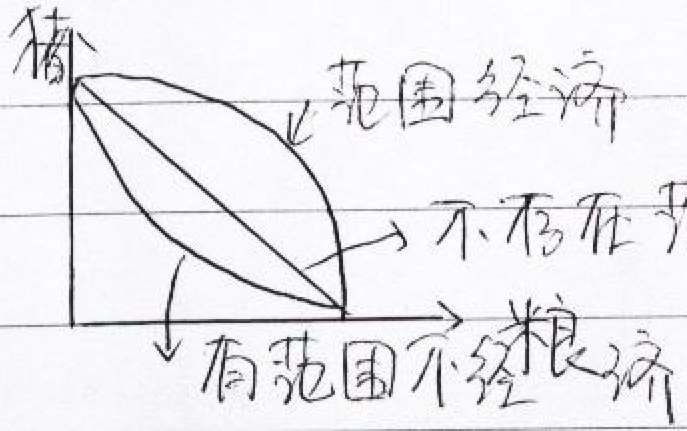
4. 规模经济与范围经济

Economy of scale　Economy of Scope

Scale: $Y=F(K,L)$ 多变量生产一种产出

$F(tK,tL)=t^kY$　$(k>1)$

Scope: $x \rightarrow (Y_1, Y_2)$ 兼业 (养猪、种粮)



P.S. 航空保险，强迫买20元一份保险. K=20万，r=20元

公平吗?

去年空运总人次=1亿　总收入=20亿 → 让1万人出事

实际上出事故 ≤200人

∴垄断　成本是隐蔽的

第七讲 成本函数

§1 要素的需求函数与要素的条件需求函数

一、要素的需求函数　$\pi = P \cdot q - C$

两种要素: x_1, x_2，要素价格: r_1, r_2

$C = r_1x_1 + r_2x_2 + b$ —(固定成本)

$\Longrightarrow x_1(r_1, r_2; P) = x_1(r; P)$

$x_2(r_1, r_2; P) = x_2(r; P)$　$(r; P)$是给定的

如何求 $x_i(r, P)$?

$\max[pF(x_1,x_2)-r_1x_1-r_2x_2-b] \longrightarrow$ 无约束解

（从利润最大化出发，即从一阶条件出发）求出的是必要条件

$\frac{\partial \pi}{\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial x_2}=0$

$\Longrightarrow x_1^*(\ )\ .\ x_2^*(\ )$

这个问题可能无解，为什么？

eg. $F(x_1,x_2)=Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}\ (\alpha+\beta>1)$ 如果 (p,r) 给定

利润没有上界

二、要素的条件需求函数

$$\begin{cases}\min\{r_1x_1+r_2x_2\} \\ s.t.\ F(x_1,x_2)\geq q_i \text{ 给定}\end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x_1(r,y) \\ x_2(r,y)\end{matrix}$$

$L=r_1x_1+r_2x_2+u(F(x_1,x_2)-q_i)$

一定有解

三、$\max\pi(r,p)$ 与 $\min\{r_1x_1+r_2x_2\}$ 之间的关系

$\max\pi(r,p)$ 一定意味着 $\min(r\cdot x)$

但反之不一定

eg. $F(x_1,x_2)=Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \quad \alpha+\beta>1$

$\min(rx)$ 有解，但 $\max\pi$ 无解

§2 成本函数的定义和形式、性质

一、定义

规划 求 $\begin{cases}\min(r_1x_1+r_2x_2) \\ s.t.\ F(x_1,x_2)\geq y^0\end{cases}$ 的解 $x_i(r,y^0)$

代入得 $C(r,y)=r_1x_1^*+r_2x_2^*$

二、性质（2个重要性质）

1. $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}>0$ （成本函数对产出量而言，产量生产的边际成本递增）

从 $\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}<0$ 中推出

$\pi=\bar{p}y-c(\bar{r},y)-b$.

如果 $(\bar{p},\bar{r})$ 给定

$\frac{\partial \pi}{\partial y}=\bar{p}-\frac{\partial c(\ )}{\partial y}$

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 c(\ )}{\partial y^2}$. 而 $\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}<0$ 必须满足。否则 $\pi(\ )$ 无上界

$\therefore \frac{\partial^2 c(\ )}{\partial y^2}>0$.

2. $c(r,y)$ 对 $r=(r_1,r_2)$ 是一次齐次的.

$c(tr,y)=tc(r,y)$. 为什么?

$$\begin{cases}\min(tr_1x_1+tr_2x_2)=t\min(r_1x_1+r_2x_2)\\ s.t.\ F(x_1,x_2)\geq y\end{cases}$$

$x_i^*(r,y)=x_i^*(tr,y)$.

$c=tr_1x_1^*(tr,y)+tr_2x_2^*(tr,y)$

$=t[r_1x_1^*(tr,y)+r_2x_2^*(tr,y)]$

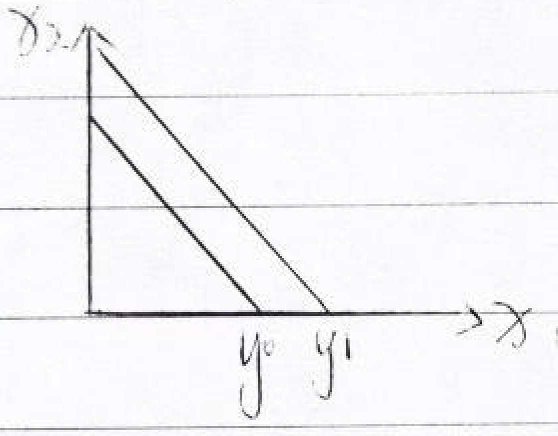
$=t[r_1x_1^*(r,y)+r_2x_2^*(r,y)]$

P139. 12题 $c=w^{\frac{2}{3}}r^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$ 可以是一个成本函数吗?

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}=(-\frac{1}{4})w^{\frac{2}{3}}r^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{2}} \text{ 不满足 } >0\\ c=(tw)^{\frac{2}{3}}(tr)^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}=t^{\frac{11}{12}}w^{\frac{2}{3}}r^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}} \text{ 不满足一次齐次性}\end{cases}$$

求解成本函数. P134 题13

(1) $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$



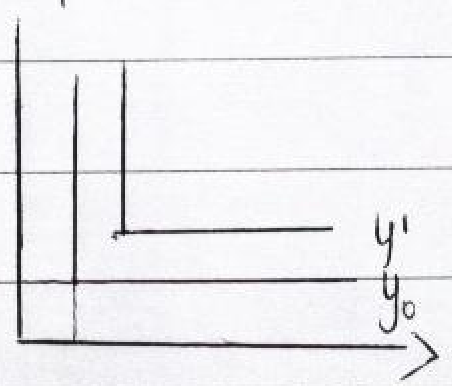
如果 $r_1 > r_2$，则全用 x_2.

$r_1 \le r_2$，则全用 x_1

x_1与x_2完全替代

$\therefore C(x_1, x_2; y) = \begin{cases} r_1 y & r_1 \le r_2 \\ r_2 y & r_1 > r_2 \end{cases}$

(2) $F(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$



$C(x_1, x_2; y) = (r_1 + r_2) y$

三. 短期成本函数

1. 概念 $(r_1, r_2, \cdots r_n)$ 给定

$C = \Phi(y; r_1, r_2, \cdots r_n) + b$ —固定成本.

① $FC = C(0; r_1, r_2, \cdots r_n)$

② Sunk cost: (沉没成本)

已投入，并且如果 → t(时间)

不成功，无法补偿回来。

沉没成本一定是固定成本；固定成本不一定是沉没成本

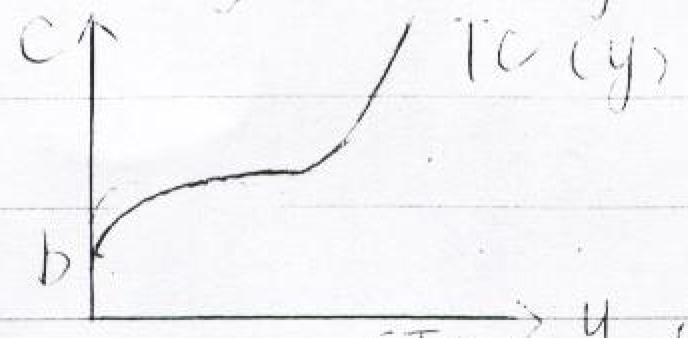
有一部分是：R&D AD. 创业板.

③ Guas: FC (准固定成本) 如果 $y=0$ $FC(0)=0$

但 $y>0$ $FC(y)=a$

④. VC 可变成本，与y有关. $VC(0)=0$

$STC(r, y) = \varphi(r, y) + b$ ∵ r给定 ∴ $STC = \varphi(y) + b$



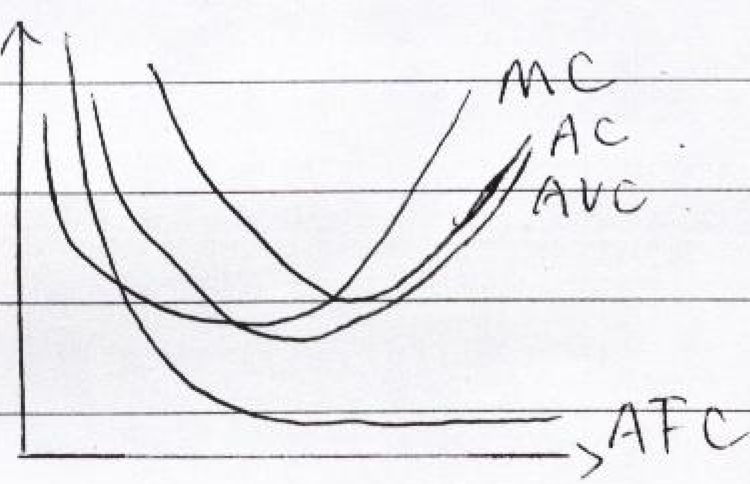
⑤ $SAC = \frac{STC}{Q} = \frac{\varphi(y)}{Q} + \frac{b}{Q}$

AV = unit cost (单位成本)

⑥ $SAVC = \frac{\varphi()}{q_i}$ $SAFC = \frac{b}{q_i}$

⑦ $MC = \frac{\partial C(r; q_i)}{\partial q_i} = \frac{\partial VC(r; q_i)}{\partial q_i}$

2. 相互关系 (SAC, SMC, SAVC)



① 如 SMC=SAC ⟹ min(SAC)

② AC = AVC + AFC

AC − AVC = AFC

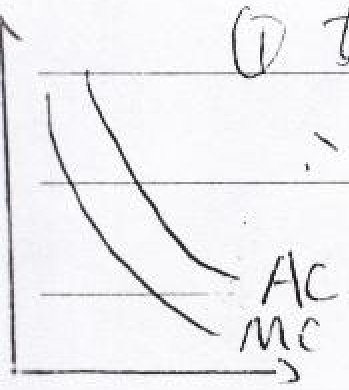
③ MC = AVC ⟹ min(SAVC)

④ MC先与AVC相交，后跟AC相交

3. 规模报酬与成本函数的形状

① 如 AC > MC ⟹ AC↓

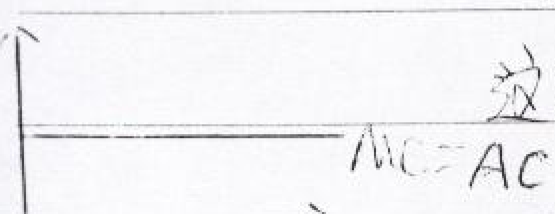
∴ 规模报酬递增 如自然垄断：电信、电话、水、电等公用事业



② 如果 AC=MC. CRS

∴ 规模报酬不变 $C(r;1) = \text{unit cost} = AC$

这时有 $C(r;y) = C(r;1)y$



③ 如果 AC<MC (一直) 规模报酬递减

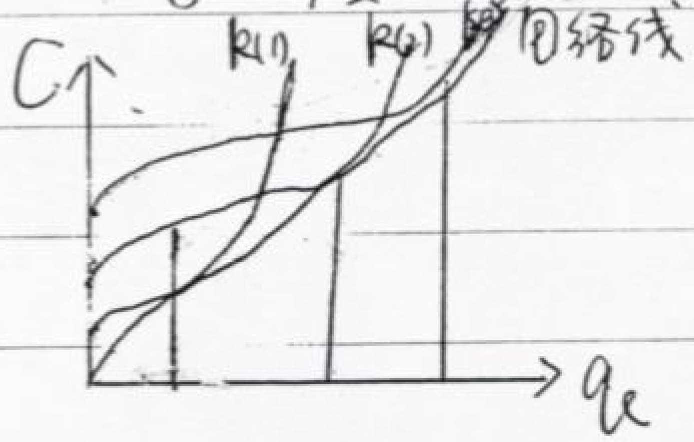
C(r; 1)不是一个常数，但仍满足 $AC \cdot y = C$

四. 长期成本函数

$SC = r_1x_1 + r_2x_2 + \varphi(k)$ k:生产规模 这里为常数

$LC = r \cdot x$ ∵ k可变

SC 转化为 LC 的关键点，是找出 $k(y)$



eg. P124. 例2. 一组短期成本函数由下列函数决定

$$C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + (11-k)q + 5k^2 \quad (k=0, k=1, k=2$$

这是在不同阶段的企业的短期成本函数. 求长期成本函数.

解: $G(q, c, k) = c - 0.04q^3 - 0.9q^2 - (11-k)q - 5k^2 = 0$

$$G_k = 0 \Rightarrow q - 10k = 0 \Rightarrow k = 0.1q$$

$$\therefore C = 0.04q^3 + 0.9q^2 + (11 - 0.1q)q + 5(0.1q)^2$$

$$= 0.04q^3 - 0.95q^2 + 11q$$ 便是长期成本函数.

P138. 8. 某厂商的生产函数 $q = 2\sqrt{KL}$ 短期 $\bar{K} = 100$

租金 $r = 1$元 $w = 4$元

求: STC=? SAC=?

$$\begin{cases} \min\{4L + 100\} \\ s.t.\ 20\sqrt{L} \geq y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{L} = \frac{y}{20} \quad L^* = \frac{y^2}{400}$$

$$\therefore SC = 4 \cdot \frac{y^2}{400} + 100 = \frac{y^2}{100} + 100$$

$$SAC = \frac{y}{100} + \frac{100}{y}$$

(2) $SMC=\frac{y}{50}$

(3) 在何处，SAC最低？

$MC=AC$

即 $\frac{y}{50}=\frac{y}{100}+\frac{100}{y} \Rightarrow y^*=100$ AC最小．

9．一家公司 $\begin{cases} \text{工厂1} & q_1 \\ \text{工厂2} & q_2 \end{cases}$ 生产同一产品．$K_1=25$．$K_2=100$

$q_i=\sqrt{K_iL_i}\ (i=1,2)$ $w=r=1$．

① 如目标是 min STC，y应如何在两家工厂间分配．

$q_1=5\sqrt{L_1}$ $q_2=10\sqrt{L_2}$

$\begin{cases} \min(L_1+L_2) \\ s.t.\ 5\sqrt{L_1}+10\sqrt{L_2}\geq q \end{cases}$

$\Rightarrow MP_{L_1}=MP_{L_2}$

$\frac{5}{2\sqrt{L_1}}=\frac{10}{2\sqrt{L_2}}$ $L_2^*=4L_1^*$

$\Rightarrow q_2=4q_1$

② STC=? SMC=? SAC=?

如果产量为q，应按4:1比例分配q_2与q_1．

$q_2=\frac{4}{5}q$．$q_1=\frac{1}{5}q$

$\therefore STC=C_1(q_1)+C_2(q_2)+125$

$=(\frac{q_1}{5})^2\times1+(\frac{q_2}{10})^2\times1+125$

$=\frac{1}{125}q^2+\frac{4}{500}q^2+125=\frac{2}{125}q^2+125$．

§3 利润函数与供给函数

一、利润函数（相当于 $V(p,y)=\begin{cases}\max u(x) \\ s.t.\ p\cdot x\leq y\end{cases}$）

1．定义：$\begin{cases}\max(py-c(y))=\max(py-r\cdot x) \\ s.t.\ f(x)\geq y\end{cases}$

注意：① "IRS" 则 $\pi(p,r)$ 不存在

② "CRS" $\pi(p,r)$ 一般也不存在．设 $\pi(p,r)$ 存在，则 $\pi=0$，才是最大利润点．

③ "DRS" $\pi(p,r)$ 存在．一般 $F(x)$ 是凹的．

2. 性质 $\because \pi(p,r)=py-r\cdot x$．

霍太林引理

① $\dfrac{\partial\pi(p,r)}{\partial p}=\underline{y(p,r)}$ 供给函数 $\quad \because \dfrac{\partial y^*}{\partial p}=0$

② $\dfrac{\partial\pi(p,r)}{\partial r_i}=\underline{-x_i^*(p,r)}$ 要求需求函数 $\quad \dfrac{\partial x_i^*}{\partial r_i}=0$

用包络定理来证明．

③ 对于 (p,r) 是一次幂齐次的．

④ 对于 (p,r) 是凸的．

三．供给函数的三种求法．

1. 从利润函数求供给函数．

$$\frac{\partial\pi(p,r)}{\partial p}=y(p)$$ 如果 r 给定．

eg. $y=x_1^{\alpha}\bar{k}^{1-\alpha}$．$r_1$ 为 x_1 的单价，r_2 为 $\bar{k}$ 的单价．p 为产出品单价．求利润函数 $\pi(p;r_1,r_2,\bar{k})$．供给函数 $y(p;r_1,r_2,k)$

解：$\pi=pf(x_1,\bar{k})-r_1x_1-r_2\bar{k}$

$=p\cdot x_1^{a}\bar{k}^{1-\alpha}-r_1x_2-r_2\bar{k}$

由于 $p\cdot MP_1=r_1$（利润极大化条件）

所以 $P(\alpha x_1^{\alpha-1}\bar{k}^{1-\alpha})=r_1$

$$\Rightarrow x_1^*=P^{\frac{1}{1-\alpha}}r_1^{\frac{1}{\alpha-1}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{k}$$

把 x_1^* 代入 π 中有 $\pi(P;r_1,r_2,\bar{k})$

$$=P^{\frac{1}{1-\alpha}}r_1^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)\bar{k}-r_2\bar{k}$$

$$\frac{\partial\pi(P,r)}{\partial P}=P^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}r_1^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\bar{k}$$

2. 从生产函数直接求供给函数

已知生产函数 $F(x_1,x_2)$ （要求 $\max\pi(\cdot)$ 有解，生产函数为凹）

从 $\max\pi(\cdot)$ 出发，找出 $x_i^*(P,r)$

$$S(P)=F(x^*(P,r))$$

eg. $f(k,L)=10k^{0.25}L^{0.25}F^{0.5}$ F 为某种固定投入 $=16$

$\pi=P\cdot f(k,L)-r_1k-r_2L-\underline{R}$ （固定投入 F 的租金）

$=P\,40\,k^{0.25}L^{0.25}-r_1k-r_2L-R$

F.O.C. $10Pk^{-0.75}L^{0.25}=r_1$

$10Pk^{0.25}L^{-0.75}=r_2$

$\Rightarrow k^*=\frac{(10P)^2}{r_1^{1.5}r_2^{0.5}}$ $\quad L^*=\frac{(10P)^2}{r_1^{0.5}r_2^{1.5}}$

将 k^*,L^* 代回 F 中 $\quad y=\frac{400P}{\sqrt{r_1r_2}}$

若给定 $r_1=r_2=4$ 则 $y=100P$

3. 从成本函数求供给函数

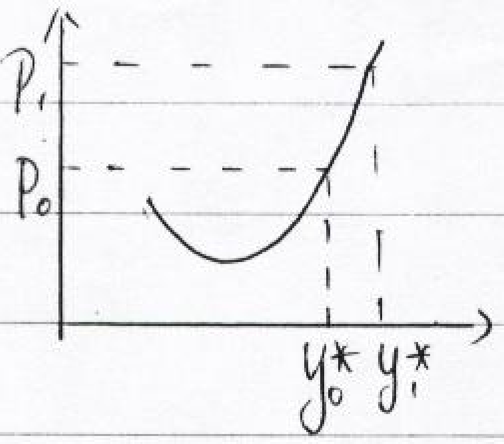
$\because$ $\pi=P\cdot y-C(y)$ （r 给定）

$\max\limits_{y}(\pi)\Rightarrow P=MC\Rightarrow y^*$

eg. $STC=16+\frac{q^2}{100}$，求

解：按 $P=SMC$，可得 $\frac{q_i}{50}=P$.

$q_i=50P$.



注意2点.

(1). $P=MC$ 可能不止一个解.(如两个解,取大解

(2) 有时,生产不如不生产.

不生产, $y=0$ 损失FC.

如果生产, $-FC>P\cdot Y-V(y)-FC$.

如果上述发生,则关门.

$P\cdot Y-VC(y)<0$

$P\cdot Y<VC(y)$ $\quad P<\frac{VC(Y)}{Y}=AVC$ 关门条件.

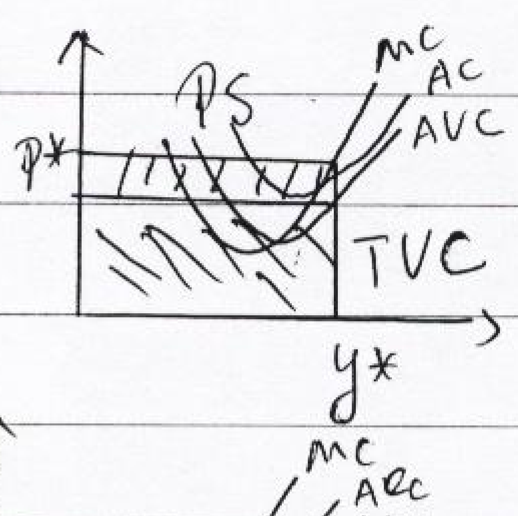
三. 生产者剩余"PS".

1. 定义："生产"较之"不生产"的利益改善.

$$\left.\begin{array}{l} PS=Py-VC(y) \\ \pi=P\cdot y-VC(y)-FC \end{array}\right\} PS\text{比}\pi\text{多出}FC$$

∵ 无论 $y=0$ 还是 $y>0$，FC都照样花费.

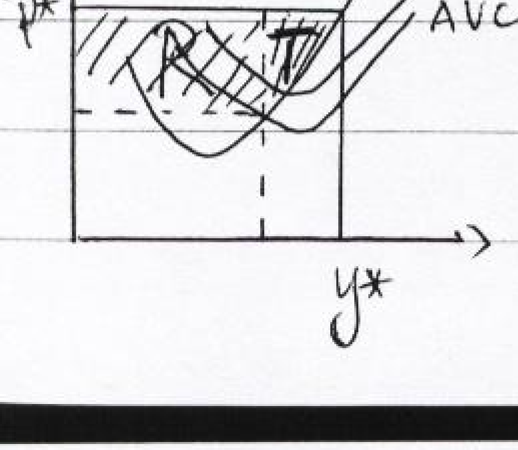
"PS" 怎么算？



1. PS = 总收益 − 总的可变成本
= P线与AVC线之间的面积.

2. 对MC以上，P以下面积积分.

∵ $VC=\int_0^{y^*}MC\,dy$.



3. $PS=R+T$

2. unit cost 与 AC 之间的关系.

(1) 如果 CRS $(q_e > 1)$.

$AC(q_e) = C(r_1, r_2; 1)$

$\because C(q_e) = C(r_1, r_2; 1) q_e$.

(2) 如果 IRS.

$\because C(q_e) < C(r_1, r_2; 1) q_e$

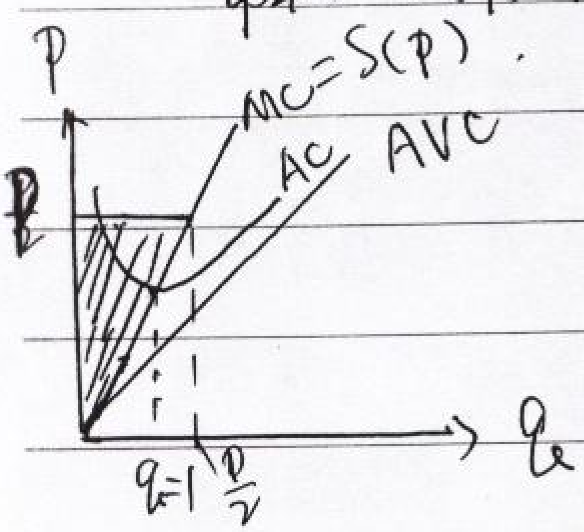
$\therefore AC(q_e) < C(r_1, r_2; 1)$

(3) 如果 DRS. $\because C(q_e) > C(r_1, r_2; 1) q_e$ $\therefore AC > C(r_1, r_2; 1)$

3. PS 与 π 之差 "FC"

eg. (Varian) $C(q_e) = q_e^2 + 1$ 计算 $\pi = ?$ PS = ?

解: $S^{-1}(p)$ 反供给函数 $= MC = 2q_e = p$.



$\therefore q_e = \frac{p}{2}$

$\pi = p q_e^* - C(q_e^*)$

$= \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} - 1 = \frac{p^2}{4} - 1$.

$PS = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$ (多的1是固定成本)

π 与 PS 长期也不一定相同.

小结: 1-7讲 (p, r, y) 给定

$p = (p_1, p_2 \cdots p_n)$ $r = (r_1, r_2 \cdots r_n)$ 外生

求 $X(p, y)$ 需求 或供给 $S(p, r)$

8讲 开始研究 p 如何决定? p 内生, 在一种产业内.

$S(p) = X(p, y)$.

局限: 1 只有一种产业; 2 y 看成是给定

8—15讲 局部均衡分析.

第三层次：一般均衡　求出 $P^*(P_1^*, P_2^*, \cdots P_n^*)$

y^* 也是一种价格．股市里或国贸

第八讲　完全竞争与垄断

§1．完全竞争

一、产业分类．　　垄断竞争插图手册

标准	竞争性行业	垄断性行业	寡头
买者、卖者人数	多、多．	多，1或1，多	多，少
产品是否同质	是	否	是
进出是否自由	是	否	有限自由
信息是否充分	是	否	不充分

独买市场：劳动力、农产品、

独卖：将改变．加入WTO后，要求进入自由．35个主要产业让步（电信、航空、铁路）．今年一季度进出口15年来首次出现逆差40亿美元．

寡头：因为参与者少、要用博弈方法解决．

证券市场（庄家、基金）也会用到博弈

二、完全竞争市场的短期均衡

特征：① $\bar{K}$ 不变；② 既无净进入也无净退出，行业中企业个数不变；③ 企业 j 的 $\pi_j > 0$ 或 < 0 或 $= 0$．

④ $\sum_{j=1}^{n} S_j(P) = \sum_{i=1}^{n} X_i(P)$

需"解"的 $P^* = ?$　$S_j(P^*) = ?$　$\pi_j = ?$

eg. P142-143 从 P133 来

已知：$\pi_j = P^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} r_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha)\bar{K} - r_2\bar{K}$.

$q_e^j = P^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} r_1^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \bar{K}$. $\alpha=\frac{1}{2}$, $r_1=4$. $r_2=1$. $J=48$

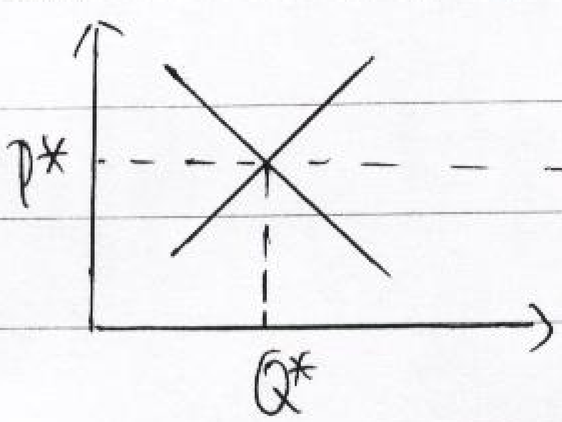
∴ $q_e^S = 48\cdot q_e^j = 48\cdot\frac{P}{8} = 6P$.

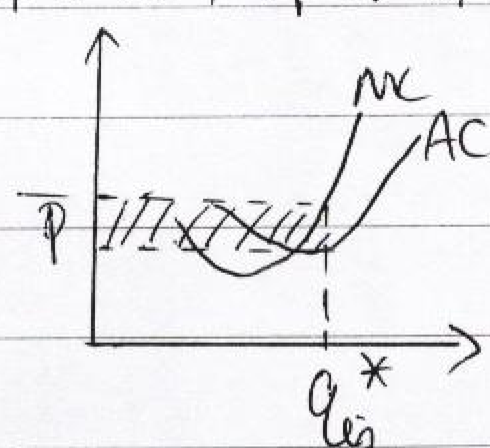
$q_e^d(P) = \frac{294}{P}$　供=求　$q_e^d(P) = q_e^S \Rightarrow P^* = 7$.

∴ $q_e^* = 42$.　$q_e^j = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$

∴ $\pi_j = 2.0625 > 0$

注意：① 个别企业面临的需求d ≠ 市场需求D





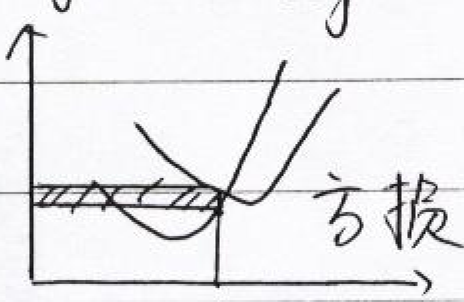
$d = AR = MR = P$.

∵ 完全竞争，单个企业只是P的接受者.

AR：平均收益. $\frac{TR_j}{q_{ej}} = P$.

$TR_j = P\cdot q_{ej}$.　　$MR_j = \frac{\partial(TR_j)}{\partial q_{ej}} = P$.

② π_j >0 / $=0$ / <0.



③ 作为企业j的供给曲线的起点：min(AVC)

只有 $P \geq \min(AVC)$，企业才供货.

eg. P146.

$C_j = 0.1q_{ej}^3 - 2q_{ej}^2 + 15q_{ej} + 10$.

求 $S_j(P)$.

$MC_j = 0.3q_{ej}^2 - 4q_{ej} + 15$.

$$q_{ij} = \frac{4+\sqrt{1.2P-2}}{0.6}$$

$MC = P$ 是决定P的一个必要条件

$AVC = 0.1q_{ij}^2 - 2q_{ij} + 15$.

$\min(AVC) \Rightarrow \frac{d(AVC)}{dq_{ij}} = 0$.

$q_{ij}^0 = 10$. $\therefore P^0 = 5$

$\therefore q_{ij} = \frac{4+\sqrt{1.2P-2}}{0.6} \quad (P \geq 5)$

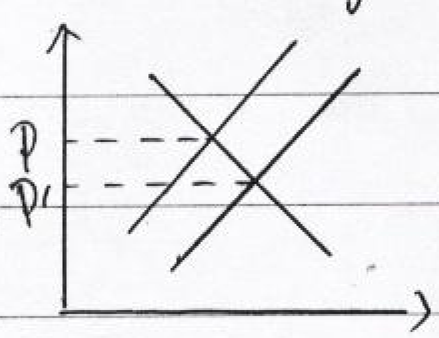
三、长期均衡

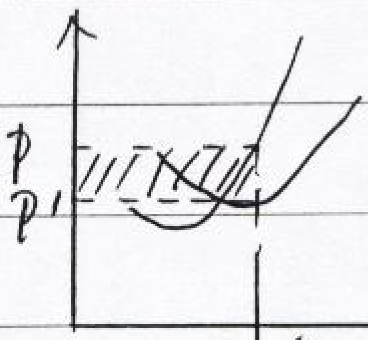
(1) $S(P) = D(P) \Longrightarrow P^*$

(2) $\because$ 自由进入退出. $\pi_j = 0$.

$\Longrightarrow$ 企业个数必须是内生决定的.

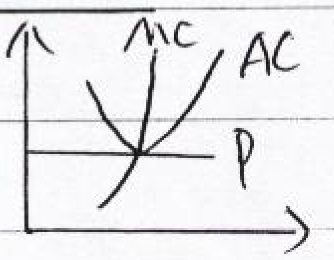
为什么 π_j 一定为0?





$\pi > 0$.

超额利润（来源：R&D创新



$\Longrightarrow$ 进企业

若 $\pi_j < 0$, $\Longrightarrow$ 企业退出.

eg. P162 (题3).

已知 $\begin{cases} \pi_j(P, \bar{K}) = \frac{P^2\bar{K}}{16} - \bar{K} \\ Q = \frac{294}{P} \end{cases}$

求：长期均衡 $P^* = ?$ $N^* = ?$

解：$q_{ij}(P) = \frac{2P\bar{K}}{16} = \frac{P}{8}\bar{K}$

$\therefore N\frac{P}{8}\bar{K} = \frac{294}{P} \qquad P^2 = \frac{294\times 8}{\bar{K}N}$

$p^* = \sqrt{\frac{294 \times 8}{k \cdot n}}$

$n^* = \frac{294 \times 8}{k\, p^2}$

注意：① ∵ $\pi_j = 0$ ∴ $P = AC_j$

∵ $P = MC_j$（max π 的条件）

∴ $P = MC_j = AC_j$ 对 $\forall j$.

$\Longrightarrow \min(AC_j)$.

∴ $P = \min(AC_j)$

∴ 竞争能为消费者造福.

② ∵ 竞争使 P 最低

∴ 总可供产量 Q 最大. CS 最大.

但有 2 个反例（对 $\pi_j = 0$）.

1. 可以发现"自由进入" $\not\Rightarrow \pi_j = 0$ 对 $\forall j$. 也可以是 $\pi_j > 0$

2. $\pi_j < 0$. 但企业 j 不退出.

美国农业 80 年代是 −8% 利润率. "等待"是有价值的

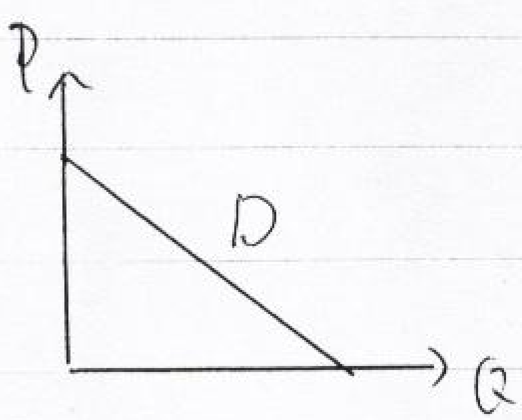
Nash. Ramsey (1903−1930) 既聪明又勤奋. 但短命.

§2 垄断.

完全竞争定价：$P = MC = MR$

一. 垄断的定义：供方只有一家. 市场需求线 = 企业面临的需求线

企业等同于产业.

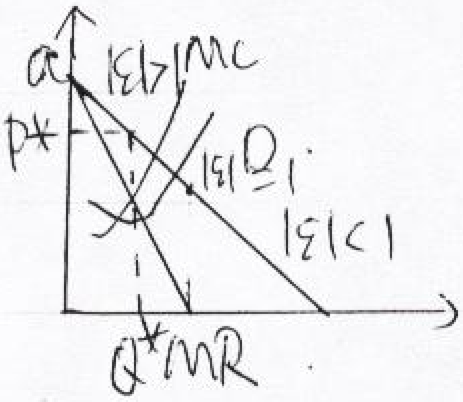


$$MR = \frac{d(TR)}{dQ} = \frac{d[P(Q)\cdot Q]}{dQ} = P'(Q)Q + P(Q)$$

$$= P\left(1 + \frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$MR = P\left(1-\frac{1}{|\varepsilon|}\right) = MC > 0$

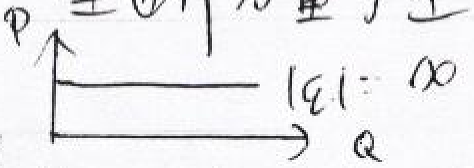


设 $P = a - bQ$

性质：① 由于 $MC>0$. ∴ $|\varepsilon|>1$

($如果 |\varepsilon|\le 1 \Rightarrow MC \le 0$).

垄断力量产生在比较有弹性的价位上.

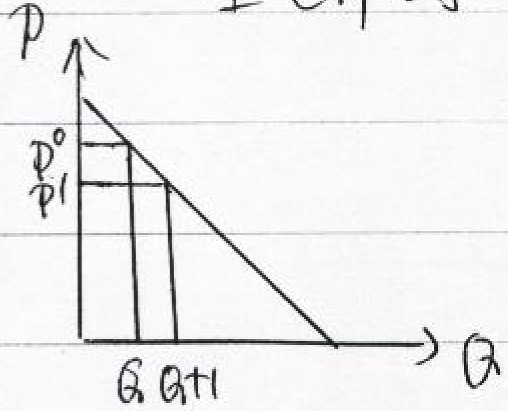


② ∵ $|\varepsilon| < \infty$

$MR = P\left(1-\frac{1}{|\varepsilon|}\right) \Longrightarrow MR < P$

完全竞争时. $P = MR$.

垄断时 $P > MR$



$MR = P'(1+Q) - P^{0}Q$

$= 1\cdot P' - (P^{0}-P')Q$

∴ $MR < P'$

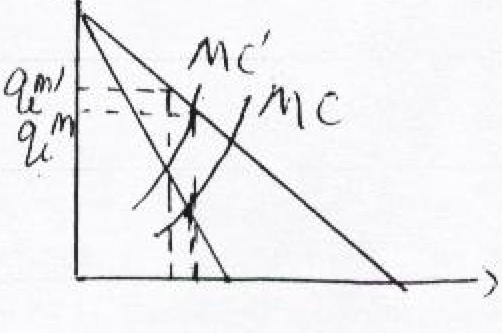
③ ∵ $MR = P\left[1-\frac{1}{|\varepsilon|}\right] = MC$

∴ $P = \dfrac{MC}{1-\frac{1}{|\varepsilon|}}$ ∴ $P^m > MC$ (竞争时. $P^m = MC$

④ ∵ $P^m > MC$

$Q^m < Q^c$

⑤ 如果MC曲线上升, 则 $P^{m'} > P^m$ (供给曲线消失了, 不可能把MC作为供给线)



二、如何度量一个行业的垄断程度

勒纳指数

$\because P[1-\frac{1}{|\varepsilon|}]=MC$

$P-MC=\frac{P}{|\varepsilon|}$

$\frac{P-MC}{P}=\frac{1}{|\varepsilon|}$

相当于产值利润率　　在$|\varepsilon|>1$的区域找$|\varepsilon|$比较小的

如果 $MC=C$(常数)(CRS下)$=$ unit cost $=AC$

$\frac{P-C}{P}=\frac{1}{|\varepsilon|}$

如：$|\varepsilon|=n>1$　[如$|\varepsilon|=1 \Leftrightarrow C=0$]

$|\varepsilon|=n=2$　$\frac{P-C}{P}=\frac{1}{2}$　$2C=P$

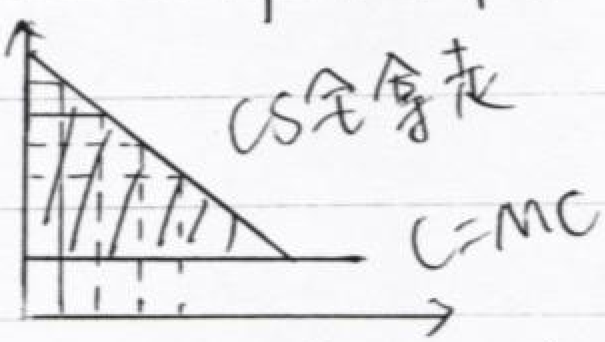
$P=\frac{n}{n-1}C$　$\therefore |\varepsilon|=n\to\infty$　$P\to C$(竞争)

$\therefore$ 垄断发生在 $1<|\varepsilon|<\infty$ 区间里

§3 价格歧视与两部收费

一、价格歧视　同样的产品和服务对不同的消费者收不同的价

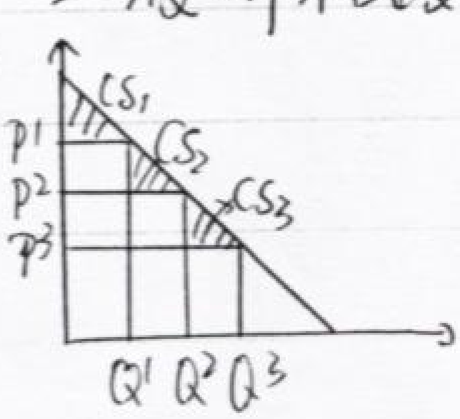
一、一级价格歧视



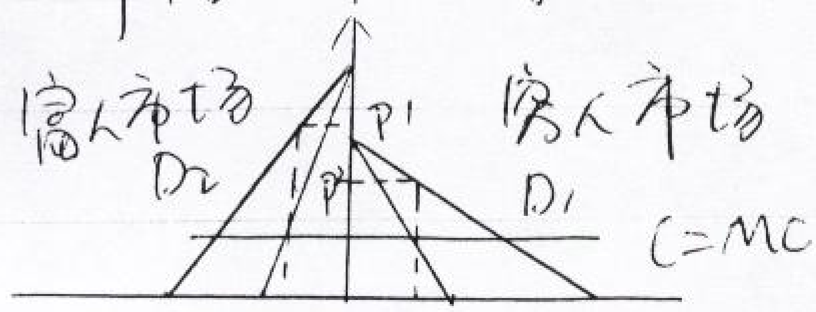
每单位的价格等于保留价格

纯属理论上分析

2、二级价格歧视(多买打折)



3. 三级价格歧视（对不同的人，不同的需求线，收不同的价）



2硬座价＝硬卧价

软卧价＝4个硬座价

公费报销

$$P_1\left[1-\frac{1}{|e_1|}\right]=MR_1=MC$$
$$=MR_2=P_2\left[1-\frac{1}{|e_2|}\right]$$
$$\therefore P_1\left[1-\frac{1}{|e_1|}\right]=P_2\left[1-\frac{1}{|e_2|}\right]$$
$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{1-\frac{1}{|e_2|}}{1-\frac{1}{|e_1|}}$$

同一产品面对两个不同市场的定价。

一家公司（多个车间，多个分厂）面临同一市场如何定价？

原则：$MC_1=MC_2=\cdots=MC_n=MR$

习题：P162.6

$TC_a=4q_a^2+5$.　　$TC_b=2q_b^2+10$.

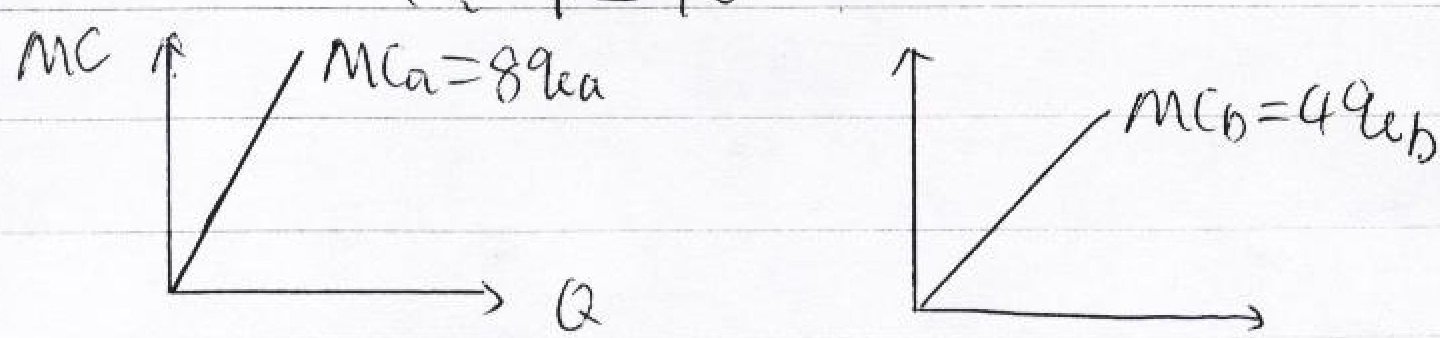
$P=100-2Q$

解：(1) $MR=100-4Q=8q_a=4q_b$

$q_a=\frac{100}{20}=5$

$q_b=2q_a=10$

$\therefore P=70$



价格歧视可以抵消垄断。

价格歧视下的产量都可以趋近于完全竞争下的产量.

巴黎地铁 两种车厢, 两个价.

不能批评价格歧视. 应抵制垄断.

二. 两部收费

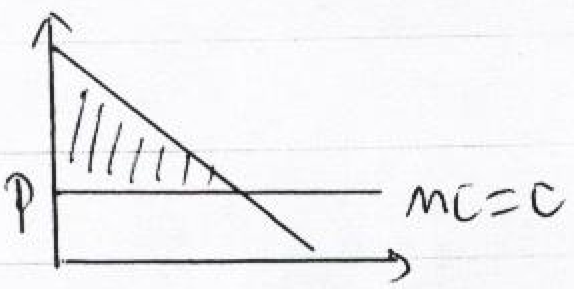
$R = T + P \cdot Q_c$ 消费量　　(出租车. 电话等)

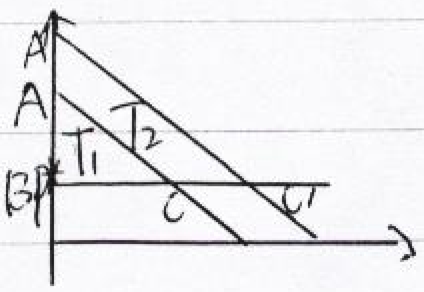
交费　固定费　　变动费

大门票

起步价

若只有一类消费者. 两部收费等价于一级价格歧视.

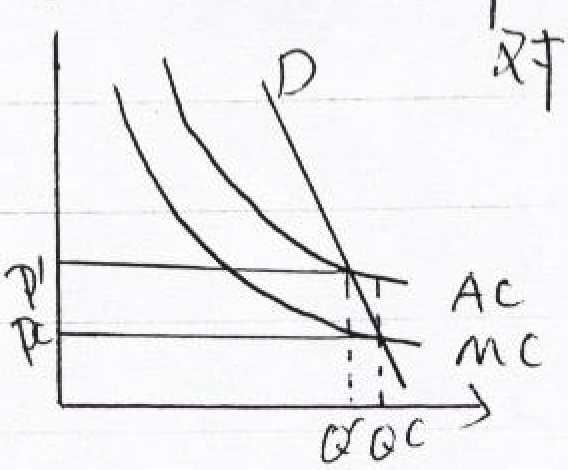




若两类或两类以上消费者 $T_1 = \triangle ABC$

但如何确定P^*?

作为消费者. 希望$P=MC$. 政府有无办法实施这一目标?



对 $MC < AC \Rightarrow AC\downarrow$ 的行业

若按$P=MC$定价. 则企业亏损 (公共汽车. 地铁都补贴)

另一办法. $P=AC$定价. 则企业不盈不亏

$Q' < Q^c$. 前提是AC是看得见的 公共信息.

如果AC. MC是私人信息 (只有企业家知道. 政府. 公众不知), 则会谎报.

$\Rightarrow MC=P$. $AC=P$ 都会无效

网通. 电信. 移动. 互联互通可做到单向收费. 前提AC. MC为公众所知.

题 P162. 6题.

$\because P=100-2Q=100-2(Q_a+Q_b)$.

$\pi_a=PQ_a-TC_a=[100-2(Q_a+Q_b)]Q_a-4Q_a^2-5$.

$\pi=[100-2(Q_a+Q_b)][Q_a+Q_b]-4Q_a^2-5-2Q_b^2-10$

$\frac{\partial\pi}{\partial Q_a}=100-4(Q_a+Q_b)-8Q_a=0$.

$\frac{\partial\pi}{\partial Q_b}=100-4(Q_a+Q_b)-4Q_b=0$.

$\Rightarrow Q_a=5,\ Q_b=10\quad P^*=70$.

$MR_a=100-60=40$. $MC_a=8Q_a=40$.

$MR=MC_a=MC_b$ $MC_b=4Q_b=40$.

§4. 政府价格规制与"信息租"

一. 如果信息完全, 最优定价规则.

则 $P^{FB}=U'(Q)=MC$. FB=First Best.

在信息完全, 成本信息公开, 企业, 消费者, 政府对 $MC=C$ 都知道的前提下. $C(q_e)=cq_e$. $MC=\text{unit cost}=AC=C$.

$U(q_e)$. $U'>0$. $U''<0$.

消费者剩余 $CS=U(q_e)-t$. $(t=P\cdot q_e)$

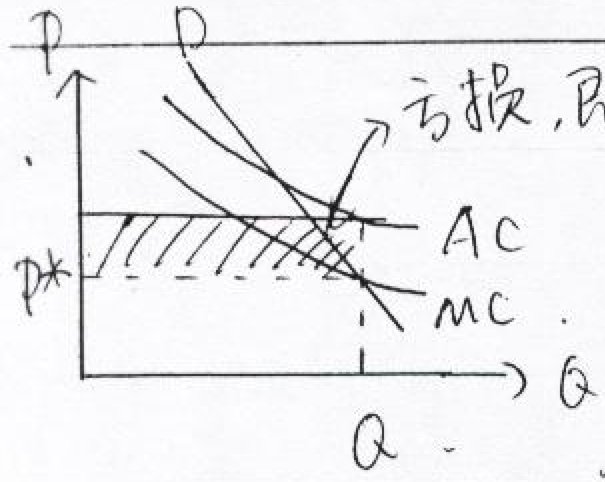
生产者剩余 $PS=t-Cq_e$ $(\because FC=0.\ \therefore PS=$利润$)$

$SW=CS+PS=U(q_e)-t+t-c\cdot q_e=U(q_e)-C(q_e)$

$\max\limits_{\{q_e\}}\{SW\}\Rightarrow U'(q_e)=C=MC$.

$\because$ 消费者最优 $\therefore P=U'(q_e)=MC=C$

注记: $P=MC$ 边际成本定价 符合社会最优. 在 $AC>MC$ 时, 政府应该补贴多少.



亏损,即补贴

思路:垄断行业在MR=MC处定价,此时生产过少,不符合Pareto efficient. 为了实现Pareto efficient,政府应进行价格管制,即使P=MC,可是对自然垄断行业会出现亏损,此时政府必须补贴,否则企业退出。但如果AC不知,企业可以谎报,谎报会增加社会成本。

如果信息不公开,"c"是私人信息,则次优解(Second-Best)一定会承认信息租。

1. 假定:① "c"有2种可能 $c\begin{cases}\underline{c} & 低 \\ \bar{c} & 高\end{cases}$

② 需求$D(p)$

③ 政府按企业所"报"来定价,定产. 报"$\underline{c}$",$\underline{p}=\underline{c}$ $\underline{q}_e$;报"$\bar{c}$" $\bar{p}=\bar{c}$ $\bar{q}_e$

2. 企业虚报的好处

如真实$c=\underline{c}$,但报"$\bar{c}$" 好处 $(\bar{c}-\underline{c})D(\bar{p})=(\bar{c}-\underline{c})D(\bar{c})>0$

3. 如何让企业说实话?

"激励相容法"

如果$c=\bar{c}$, 政府应当 $\bar{t}\geq\bar{c}\,\bar{q}_e$

这样虚报企业($c=\underline{c}$,当报"$\bar{c}$")的利润为 $\pi=\bar{t}-\underline{c}\,\bar{q}_e$
$\geq(\bar{c}-\underline{c})\bar{q}_e$.

政府决策问题

$$\max_{\{\underline{q}_e,\bar{q}_e,\underline{t},\bar{t}\}}\Big\{Pr(c=\underline{c})\underbrace{[u(\underline{q}_e)-\underline{t}]}_{CS(\underline{c})}+Pr(c=\bar{c})\underbrace{[u(\bar{q}_e)-\bar{t}]}_{CS(\bar{c})}\Big\}$$

低成本 高成本

$$\text{s.t. } \underbrace{\underline{t}-\underline{c}\,\underline{q}_e}_{说实话}\geq\underbrace{\bar{t}-\underline{c}\,\bar{q}_e}_{说谎话}\quad (IC)$$

$$\bar{t}-\bar{c}\,\bar{q}_e\geq 0\quad (IR)$$

"IC" → "Incentive compatablity" （激励相容）

"IR" → "individual rationality" （个人理性约束）

即使 $\bar{c}$ 企业，也有动力参与，也称参与约束。

把"约束条件"代入"目标函数"

当 $c=\underline{c}$ 时，$\underline{t}=\underline{c}\underline{q}+\bar{t}-\underline{c}\bar{q}$ ∵(IC)

$=\underline{c}\underline{q}+\bar{c}\bar{q}-\underline{c}\bar{q}$ ∵(IR)

$\underline{t}=\underline{c}\underline{q}+(\bar{c}-\underline{c})\bar{q}$

又∵ $\bar{t}=\bar{c}\bar{q}$ （∵IR）

∴ $\max\{Pr(c=\underline{c})[U(\underline{q})-[\underline{c}\underline{q}+(\bar{c}-\underline{c})\bar{q}]]+Pr(c=\bar{c})[U(\bar{q})-\bar{c}\bar{q}]\}$

对 $\bar{q}$ 求一阶导，令它为0

∴ $Pr(c=\underline{c})[-(\bar{c}-\underline{c})]+Pr(c=\bar{c})[U'(\bar{q})-\bar{c}]=0$

$$P^{SB}=U'(\bar{q})=\bar{c}+\underbrace{\frac{Pr(c=\underline{c})}{Pr(c=\bar{c})}\cdot(\bar{c}-\underline{c})}_{\because\ \neq 0}>\bar{c}$$

信息租 $=\dfrac{Pr(c=\underline{c})}{Pr(c=\bar{c})}(\bar{c}-\underline{c})$ —— 单位说谎的租

即使引入"激励相容"，让说谎人拿不到好处

⟹ 最后结果仍不能消除"信息租"（次优解）

政府只有稽查，但稽查也有成本。

∵"c"是私人信息。

第九讲 市场结构、信息结构与解

V. newman（诺依曼） 1928 "零和博弈"

	石	布	刀
石	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
布	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
刀	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

零和博弈. 用maxmin解.
一个"产业", 2家企业, 产品相同.
竞争变量: 定产量(q_i).

1944年 O. Morganstain.

F. Ramsey (1903-1930)
老师是 M. keynes.

1926. expected utility
1927. "Taxation"
1928 saving - growth model
1944. game theory
1996 Mirrles victrey (诺奖)
1995. R. Lucas 诺奖

J. Nash (1928—1948年入普林斯顿 (princetin).
Black-sholes. 关于资产定价.

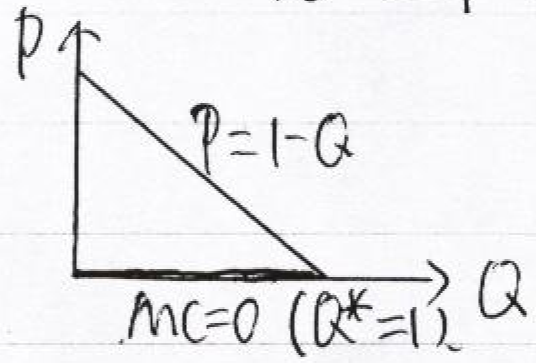
Marshell
Hicks.
V. newman
O. Morgenstein
M. Friedman
F. Modigliani
关于决策

Marko-wits与Miller与Sharpe.
最优证券投资.
CAPM (capital asset-pricing model)
Cobb-Douglass.
R. Lucas E. prescal
1999

非零(常)和博弈.
eg. $P=1-(q_1+q_2)$ $P=1-Q$
设 ($C_1=C_2=C=0$) 边际成本. (可以有四个解)

一. 竞争解 $p^c = MC = 0$ ∴ $q_1^c + q_2^c = 1$.

$$\pi^c = p^c(q_1^c + q_2^c) = 0$$



二. 古诺解(1838) (两个企业信息对称,但都不完全,企业都对对方无知)

$$\max_{q_1}\{\pi_1 = pq_1\} = (1-q_1-q_2)q_1$$

S.O.T. $\Longrightarrow 1-2q_1-q_2=0$.

CCN (Cournot): $q_1^{CN} = \frac{1-q_2}{2}$ $q_2^{CN} = \frac{1-q_1}{2}$

∴ $q_1^{CN} = q_2^{CN} = \frac{1}{3}$ $p^{cn} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

产业总利润 $\pi^{cn} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

三. Stackeberg解.

2个企业,一家企业主动(先行),另一家被动(后行)

信息不对称,主动企业了解被动企业行为.

设firm 1被动. ∴ $q_1 = \frac{1-q_2}{2}$ ("1"对"2" reaction反应方

∴ $\pi_2 = [1-q_2-q_1(q_2)]q_2$

$= \left[\frac{1}{2}+\frac{q_2}{2}-q_2\right]q_2 = \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{2}q_2^2$

$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{1}{2} - q_2 = 0 \Longrightarrow q_2^S = \frac{1}{2}$.

$q_1^S = \frac{1-q_2^S}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$p^S = \frac{1}{4}$ $\pi^S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$.

四. 勾结解 Collusion Solution (返回垄断).

$\because p=1-(q_{i1}+q_{i2})$ 回到 P162. 题6.

$\pi=[1-(q_{i1}+q_{i2})](q_{i1}+q_{i2})$.

$\frac{\partial\pi}{\partial q_{i1}}=0 \quad \frac{\partial\pi}{\partial q_{i2}}=0 \implies (q_{i1}^m+q_{i2}^m)=\frac{1}{2}$

$p^m=\frac{1}{2}$.

$\pi^m=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

利润 $\pi^m(\frac{1}{4})>\pi^{CN}(\frac{2}{9})>\pi^S(\frac{3}{16})>\pi^C(0)$

产量. $Q^m(\frac{1}{2})<Q^{CN}(\frac{2}{3})<Q^S(\frac{3}{4})<Q^C(1)$.

价格. $p^m(\frac{1}{2})>p^{CN}(\frac{1}{3})>p^S(\frac{1}{4})>p^C(0)$

(不可再生资源) 可用零和博弈.

§2. 古诺均衡.

一. 市场结构:

同质产品; 信息不对称, 互不知对方策略. $q_{i1}=f(q_{i2}^e)$ 猜测 "e-expected"

竞争变量是产量而不是价格. 同时博弈.

这里有没有市场需求? 有! (只要讲均衡, 就有需求)

需求: $P=a-b(q_{i1}+q_{i2})$.

$\pi_i=\underbrace{[a-b(q_{i1}+q_{i2})]}_{\text{需求}}q_{ii}-C(q_{ii})$

需求. 隐含着: 厂商产量一定能卖掉.

二、均衡的含义

$q_{i1}=f_1(q_{i2}^e)$.

$q_{i2}=f_2(q_{i1}^e)$.

到均衡时, 必有 $q_{i1}^*=f_1(q_{i2}^*)$.

$q_{i2}^*=f_2(q_{i1}^*)$.

均衡含义:

① "猜测"与"现实"一致.

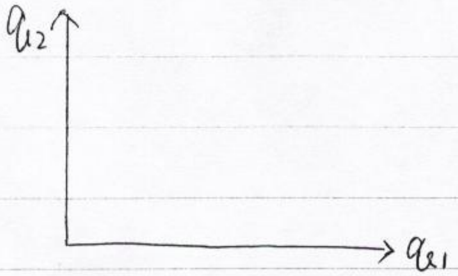
Belief (信念) reality

② 每个参与人一定利益极大化.

"最优"一定不会再变.

(fixed. point)

三、等利润线的由来



$\because \pi_1 = [a-b(q_1+q_2)]q_1$

$\max\{\pi_1\} \Longrightarrow a-2bq_1-bq_2=0$

反应函数：$q_1^* = \dfrac{a-bq_2}{2b}$

$\pi_1 = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2$　二次函数

性质1：位置越低，利润最大

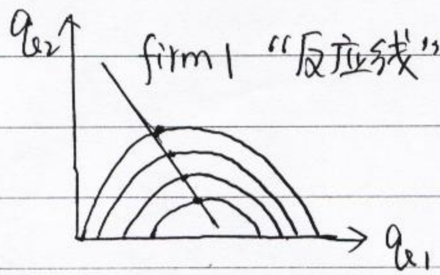
∵假定$q_2=0$，则对应于每一利润有两种q_1，

取小不取大，则q_1越大，利润越高。

性质2：给定对手产量q_2^0，在相应企业等利润线族中找一条

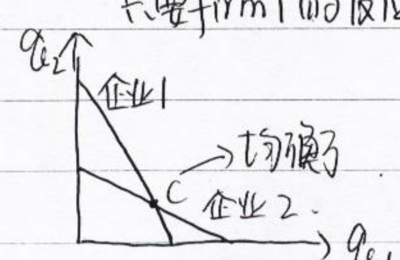
π线，$q_2=q_2^0$相切，此切点才是最优点。

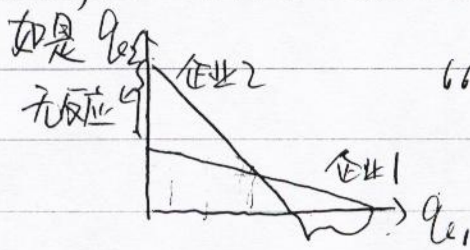
性质3：反应线



注意：①古诺模型是否一定有均衡？　均衡。

只要firm1的反应线比firm2的反应线更陡峭，就一定有古诺





“反应不出来”

② n家企业的古诺均衡

性质1 如n家企业是同质，$\forall i\in\{1,2,\cdots n\}$

$C_i(q_i)=C=MC_i$ 对称 $q_{c1}=q_{c2}=\cdots=q_{cn}$

则"$n\to\infty$"古诺均衡 ⟶ 竞争解

证明 看两条性质 ⓐ $\pi_i=0$ $(n\to\infty)$

ⓑ $P^*=C=MC_i$ $(n\to\infty)$

证：$P=a-bQ=a-b\sum_{i=1}^{n}q_{ci}$

$\pi_i=[a-b(\sum_{i=1}^{n}q_{ci})]q_{ci}-C\cdot q_{ci}$

$\max\{\pi_i\}\Longrightarrow a-2bq_{ci}-b\sum_{j\neq i}q_{cj}-C=0$

放一个q_{ci}进和式：$a-bq_{ci}-b\sum_{i=1}^{n}q_{ci}-C=0$

$a-b\sum_{i=1}^{n}q_{ci}-C=bq_{ci}$

$a-bnq_{ci}-C=bq_{ci}\Rightarrow q_{ci}^*=\frac{a-c}{b(n+1)}$

$Q^*=Nq_c^*=\frac{N(a-c)}{(N+1)b}$

$\therefore P^*=a-bQ^*=a-\frac{N(a-c)}{N+1}$

当$n\to\infty$时，$P^*=a-(a-c)=C$

$\therefore$ 古诺均衡 $\begin{cases} n=1 & 垄断 \\ n\to\infty & 竞争 \end{cases}$

注意：性质2 在古诺均衡 必有 $|\varepsilon|>\frac{1}{n}$

(P188. 题5) (Varian书 Ch27. 题4)

证明：在均衡时

产业：$Q^{CN}=q_{c1}^{CN}+q_{c2}^{CN}+\cdots+q_{cn}^{CN}$

$P=P(Q)$

$TR_i=Pq_{ci}=P(Q)q_{ci}$

$\frac{q_{ei}}{Q}$：市场份额 $\frac{1}{n}$

$$MR_i=\frac{\partial(TR_i)}{\partial q_{ei}}=P+q_{ei}\frac{\partial P}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q_{ei}}=P[1+\frac{\partial q_i}{\partial Q}\frac{q_{ei}}{P}\frac{Q}{Q}]$$

$$=P[1+\frac{\partial P}{\partial Q}\cdot\frac{Q}{P}\cdot\frac{1}{n}]=P[1-\frac{1}{N|\varepsilon|}]=C>0$$

$\because P>0 \quad \therefore 1-\frac{1}{N|\varepsilon|}>0 \quad \Rightarrow |\varepsilon|>\frac{1}{N}$

如 $N=1 \Rightarrow |\varepsilon|>1$ 进一步验证了垄断发生在弹性大于1的区域

但 $N\to\infty \not\Rightarrow |\varepsilon|>0$.

该弹性是市场需求弹性.

§3 Bertrand 均衡（伯川德模型）

一、市场结构

$$D_i(P_i)=\begin{cases}a-\beta P_i & P_i<P_j\\ 0 & P_i=P_j\\ \frac{1}{2}(a-\beta P_i) & P_i=P_j\end{cases}$$

决策变量是"价格"，博弈是"同时"

二、Bertrand 均衡

条件：$MC_1=MC_2=C$. 如 $MC_1<MC_2$. 2被挤出市场.

即 $\begin{cases}P_1^*=P_2^*=C\\ \pi_1^*=\pi_2^*=0\end{cases}$

① Bertrand 均衡 = 竞争均衡.

② 为什么 $\pi_i^*=0$ 是利润极大化?

如不是. 设 ⓐ. $P_i<C=MC$. 则亏损 $\pi_i<0$

ⓑ. $P_i>C$. $\because P_j=C$. $Q_i^d=0$ $\pi_i=0$.

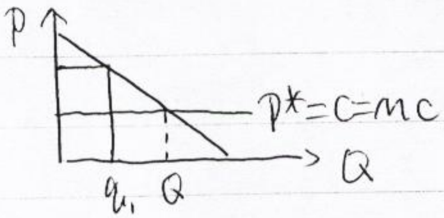
ⓒ 如 $P_i=P_j=C$ 则企业选 $\tilde{P}_i\in(C, P_j)$

但 $\tilde{P}_j\in(C, \tilde{P}_i) \Rightarrow P_i=P_j=C$

③ 现实中Bertrand均衡

价格战中，$P_1=P_2>C$

原因：① 1企业的产量不足以满足整个市场需求（生产能力限制）



② 企业之间勾结 $P_1^*=P_2^*>C$ "自律价"

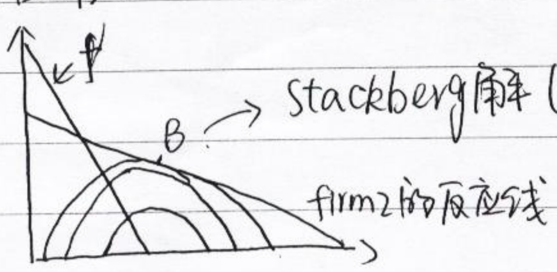
③ 产品差异，转移成本 ATRT与MCI "忠诚"

§4. Stackberg解

注意：

一、主动者把被动者的反应函数（$q_2=f_2(q_1)$）代入$\Pi_1[q_1, f_2(q_1)]$

二、图形



三、先行一步的好处，相对于古诺解

§5. 勾结解 = 垄断公司几个工厂

$$MR=MC_1=MC_2=\cdots=MC_N$$

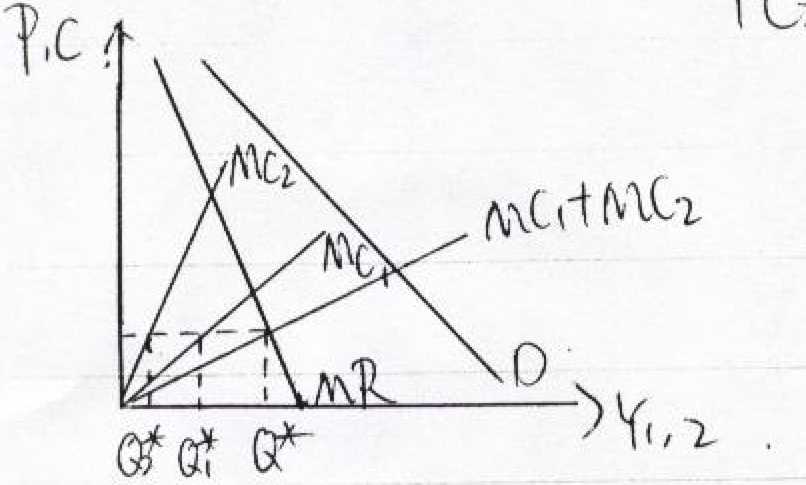
例1. 一家企业有两个车间，总经理发现 $AC_1=Y_1$，$AC_2=2Y_2$（脚标表示车间）

他决定：关掉第二车间，理由是 $AC_2>AC_1$

问：他的决策对吗？

答：错！理由是 $TC_1 = Y_1^2$. $MC_1 = 2Y_1$

$TC_2 = 2Y_2^2$ $MC_2 = 4Y_2$



分配给1,2的产量不一样。

例2. P188 题4

$TC_1 = 20 + 5Q_1^2$.

$TC_2 = 25 + 3Q_2^2$

$TC_3 = 15 + 4Q_3^2$.

$TC_4 = 20 + 6Q_4^2$

已知 $P = 25$. $Q = 10$.

问：如何分配给各个果园

(该题不合理处：1. P不变. 即使垄断价格也可变. 2 不是按 $MR = MC$

第一问：

TC	Q=1	Q=2	Q=3	Q=4	Q=5
企业1	25	40			
企业2	28	37			
企业3	19	31			
企业4	26	44	74	116	170

		Q=1	Q=2	Q=3	Q=4	
	FC	MC				
企业一	20	5	15	25	25	45
企业二	25	3	9	15	21	27
企业三	15	4	12	20	28	36
企业四	20	6	18	30	42	54

第六节 价格领导模型

古诺 model, Bertrand 均衡 } 同时博弈　　Stackberg model, 价格领导 model } 动态

P189 题11. 先求：如领导者，$\pi=?$ 如追随者，$\pi=?$

若两个人都想做领导者或追随者，则又回到古诺解

一. 市场结构

产品同质，但成本函数不同，确定价格领导者 1（垄断），

价格追随者 2（竞争，∵ P 是给定的，只能决定 Q_2）

二. 例子：$D(p)=a-bp$　　$C_2=\frac{q_2^2}{2}$　　$C_1=Cq_1$

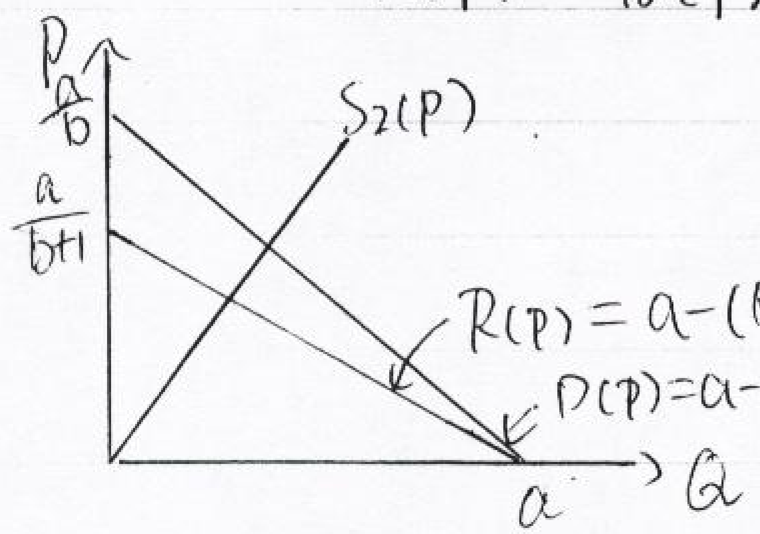
求解：$q_1^*=?$　$q_2^*=?$　　$p=?$　$\pi_1=?$　$\pi_2=?$

解：① 确定追随者的供给曲线 $S_2(p)$

按 $MC_2=p$ 原则定 $Q_2 \Rightarrow q_2=p$

② 找出对第一个企业而言的需求线：残差需求

$R(p)=D(p)-S_2(p)=a-bp-p=a-(b+1)p$



No.
Date

第十讲 策略性博弈与纳什均衡

§1 策略博弈与占优

一. 博弈分类

1. 零和博弈与非零和博弈

例（石，刀，布）零和 —— 两个参与人得益之和为零（可为常数C）

为相对份额大小而博弈（和为常数） 争夺资源（不可再生）

2. 合作博弈与非合作博弈 —— Nash 1950's → 1990's

先有契约（显 & 隐），再较量 （加强调机制 —— 研究关键）

合作博弈最近10年再度兴起，两者在一定条件下等价.

3. 静态博弈与动态博弈
（同时） （序贯）

二. 静态博弈（同时）

定义：$N = \{\{S_i\}, I, \{U_i\}\}$.

S_i：参与人的策略集

I：参与人集合

U_i：参与人的得益函数.

$U_i : S \to R$ $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_I$

规定 俩人博弈（行博弈人A，列博弈人B）

	B: S_1^B	S_2^B
A: S_1^A	x_{11}, y_{11}	x_{12}, y_{12}
S_2^A	x_{21}, y_{21}	x_{22}, y_{22}

对A，进行行比较

对B，进行列比较

三人博弈：前两人同上，第三人取矩阵

P197 例：$U_i = \underbrace{4\min\{x_1, x_2, x_3\}}_{\text{对整体鼓励多报}} - \underbrace{x_i}_{\text{对个人，鼓励少报}}$ "i"报数. $X_i = \{1, 2, 3\}$.

如第三人选"1"，

	B: 1	2	3
A: 1	3, 3, 3	3, 2, 3	3, 1, 3
2	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 1, 3
3	1, 3, 3	1, 2, 3	1, 1, 3

No.
Date

三. 占优解 (无条件)

		B: u	v
A	x	~~3, 6~~	~~7, 1~~
	y	5, 1	8, 2
	z	~~6, 0~~	~~6, 2~~

"若说".

对A (行比较) "$y > x$", 不管B选什么策略 (一无条件)

对B, 一旦看到A不会取x, 则"$v > u$".

$u \rightarrow (8, 2)$

消去严格被占优策略后, 最后如剩下一个均衡点, 则该点就叫"占优解".

注意: 1. 占优解如果存在, 则与"谁先行"的序 (order) 无关.

2. 消去的一定是严格被占优的策略

[若消去的是一个"弱被占优", 则"解"与"order"(次序)有关].

§2 纳什均衡

一. 最优反应 (best reaction)

给信定参与人i关于其对手的策略的信念 (belief), 能让i期望得益极大化的策略, 就叫最优反应。

注意: ① 有条件 (belief)

② i取的s_i^*一定是S中最优的. (与s_i'相比, $s_i' \in S_i$, $s_i' \neq s_i^*$)

公式: $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ ($s_i' \in S_i$, 且$s_i' \neq s_i^*$)

s_{-i}: 对手的策略 (若">", 严格)

二. 理性 (Rationality) (必要条件)

一个博弈参与人i, 如果取best reaction策略, 则满足理性. $\not\Rightarrow$ (纳什均衡)

[但纳什均衡一定是满足理性的. ∴ 必要条件]

三. 可理性化的策略 (Rationalizable Strategies)

对参与人i的S_i来说, 如删去从来不可能成为最优反应的策略, 剩余的策略子集叫可理性化的策略.

例 1984年 Berheim

No.

Date

B

		b_1	b_2	b_3	~~b_4~~
A	a_1	0, 1	2, 5	7, 0	0, 1
	a_2	5, 2	3, 3	5, 2	0, 1
	a_3	7, 0	2, 5	0, 1	0, 1
	~~a_4~~	~~0, 0~~	~~0, -2~~	~~0, 0~~	~~10, -1~~

b_4永不可能成为B的最优反应.

∵ 找不出理由

$\{a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3\}$ 可理性化的策略.

$\Rightarrow$ N.E. (Nash Equilibrium)

四. 理由链 chain of Justification (俩人博弈)

$\{a_1, b_3, a_3, b_1, a_1, b_3 \cdots\}$ a_1的理由链

如 chain 俩俩相对. $\{a_2, b_2, a_2, b_2 \cdots\}$. $\{a_2, b_2\}$是不动点.

各自以对方为条件成为最优反应, 则叫纳什均衡.

五. 纳什均衡定义

▵ 对$\forall i \in I$, 都有 $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ $\forall s_i \in S_i$

▵ $s_i^* \in B_i(s_{-i}^*(\cdot))$ 对$\forall i \in I$成立

六. 理性与NE的关系

∵ NE要求 s_i^*与s_{-i}^* 互为条件, 成为最优反应.

而"理性"只要求每个人取最优策略. 删掉从不能成为"best reaction"的策略,

而不能保证"最优反应策略"互为条件.

N.E. $s_i^* = B_i(s_{-i}^*(s_i^*))$ ∴ s_i^*是不动点. (纳什均衡最根本的要求).

七. 注意:

① N.E定义中含义: "均衡"表示"belief"是"self-confirming" 自我证实.

[自我证实(实现): 亚洲金融危机]

对$\forall i$: $\max u_i(\cdot)$ 都是最优的.

②. N.E中存在的问题:

▵ N.E可能不存在 P_{203}例

	F	C
F	-1, 1	1, -1
C	1, -1	-1, 1

解决方法: mixed 策略

No.
Date

△ N.E 太多（不唯一） P202 例

	丈夫 F	B
妻子 F	4, 5	0, 0
B	1, 1	5, 4

合作，配合

△ N.E 可能是 Perato dominated 帕累托被占优

定义：一个结局 O (outcome)，如果存在另一个结果 O'，

使得：(1) 对所有参与者 i，都有 $O' \gtrsim O$

且 (2) 对至少某个 i 来说，有 $O' > O$

则称 O 是被 O' perato dominated.

如一个结局不可能被任何别的结果 perato dominated，则称它为 perato optinal.

eg：囚犯困境

	揭发	不揭发
揭发	0, 0	6, −1
不揭发	−1, 6	5, 5

(揭发，揭发) 是 N.E. 但它被 (不揭发，不揭发) perato dominated.

说明：(1) N.E ≠ perato optinal

N.E 与"看不见的手"可能是矛盾. (指出只有市场机制可能造成矛盾).

"个人理性" $\underset{\text{may be}}{\Longrightarrow}$ 公共悲剧

每个人执行严格占优策略 ⇒ 导致集体被占优结果.

③ N.E 与重复占优. 策略均衡之间的关系.

第一，严格占优解一定是纳什均衡解. 如果是弱占优解，可能漏掉 N.E.

打井

		B 窄	宽
A	窄	14, 14	0, 16
	宽	16, 0	0, 0

如 $U_i(S_i', S_{-i}) \geq U_i(S_i'', S_{-i})$ （对∀成立）

且至少对于对手的一个策略 S_{-i}，有 $U_i(S_i', S_{-i}) > U_i(S_i'', S_{-i})$

则称对 i 来说，$S_i' \underset{i}{\gtrsim} S_i''$ （S_i' 对 S_i'' 弱占优）.

第二，如俩人 2×2 博弈　如存在唯一的 N.E. 则该 N.E 必是严格占优解.

如 3×3，4×4 不一定 (N.E > 最优解)

		II	
I		X_{11}, Y_{11}	X_{12}, Y_{12}
		X_{21}, Y_{21}	X_{22}, Y_{22}

§3 混合策略与 max min 策略

一. 混合策略 (一定是概率，而不是策略本身含义)

如果纯策略纳什均衡不存在.

例

		II: F	II: C
I	F	-1, 1	1, -1
	C	1, -1	-1, 1

如 II 以 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 取 F, C.

则 I 取"F"与"C"会无差异.

$\because u_1(F) = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0.$

$u_1(C) = 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0.$

如果 I $F(\frac{1}{3})$, $C(\frac{2}{3})$，则 II 必取 C，则 I 再取 F，则 II 再取 F，····

又陷入循环，所以 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 一定不是 N.E.

找出概率分布 σ_i 使得对 $\forall i$，都有 $u_i(\underset{\downarrow\,概率}{\sigma_i}, \sigma_{-i}) = u_i(\underset{\downarrow\,100\%选 s_i}{s_i}, \sigma_{-i})$

		II: L p	II: R $1-p$
I	U q	2, 1	0, 0
	D $1-q$	0, 0	1, 2

(U, L), (D, R) 纯策略 N.E (取策略概率 100%).

另有 mixed 策略均衡

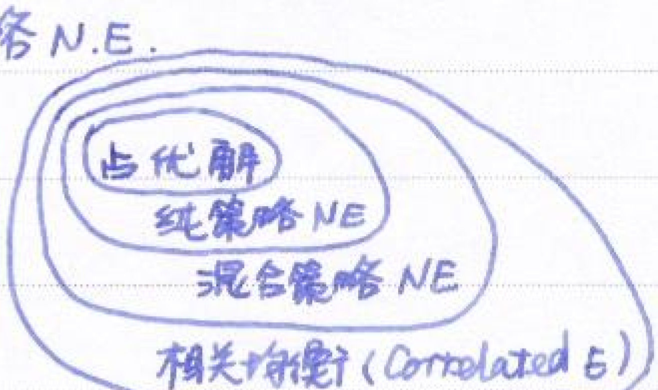
→ 解出 p, q (无差异思想)

对 II (列) $\overset{u(L)}{1q + 0(1-q)} = \overset{u(R)}{0\cdot q + 2\cdot(1-q)} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$

对 I (行) $\overset{u(U)}{2p + 0(1-p)} = \overset{u(D)}{0\cdot p + 1(1-p)} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$

对 I $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ 对 II $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 是 mixed 策略 N.E.

纯策略 N.E $\subset$ 混合策略 N.E.
(100%, 100%)



二. max, min 策略

思想：保险 (避风险) 办法：两害相权取其轻.

例

		II: 左	II: 右	
I	上	1, 0	1, 1	max. min
	下	-1000, 0	2, 1	NE

找出 min{上, 下}.

如取"上"，min{1, 1} = 1

取"下"，min{-1000, 2} = -1000

No .

Date

$\max\{\min(1,1), \min(-1000,2)\}=1$ 而上.

N.E 可能 $\neq$ max min

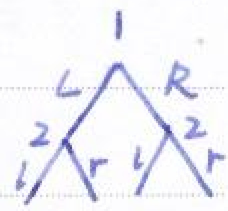
但零和博弈 则 N.E = max min 解

No.

Date

第十一讲 广延型博弈

§1. 定义与形式



定义(5要素)

一般地为动态

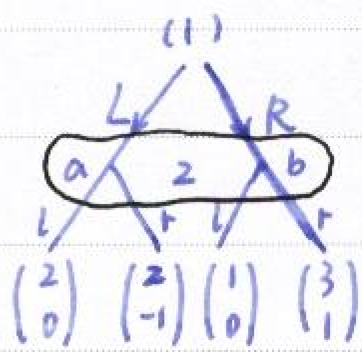
1° 决策点 (用矩阵的行&列表示)

2° 决策点属于谁 (初始点属于 nature)

3° 时序 (谁先走)

4° 信息集

5° 终极点上的得益数值

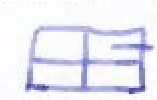


"2"的信息集 = {a, b}. — 不完美信息 (unperfect) 纵向.

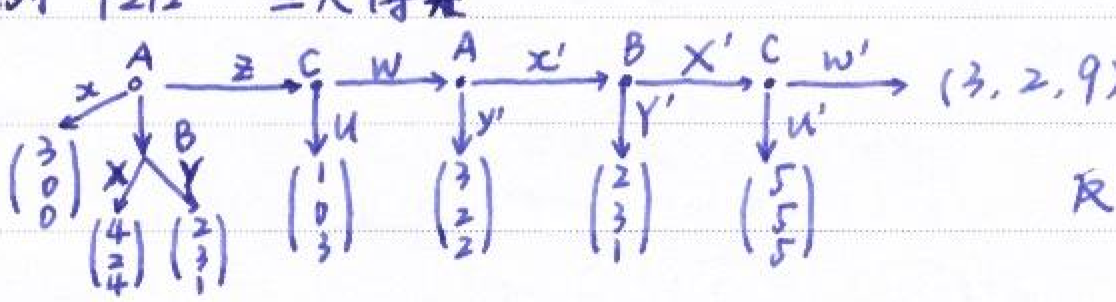
⟺ 同时博弈. 前后，对历史不了解.

≠ 不完全 (incomplete) 横向.

如果信息集含两个或两个以上决策点，这样可能是不完美.

不完全信息：一般讲同时博弈里，对于对手可能采用的策略或对策略所导致的得益缺乏信息.(横向  pay off)

例 P212 三人博弈



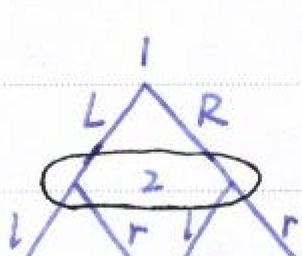
蜈蚣博弈

反向归纳 (情况) — A银行. B.C两企业

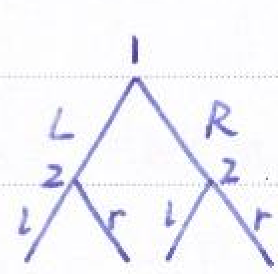
§2 广延型博弈和策略型博弈转换

[动态博弈中信息不一样，转换不同].

一. 如果信息是不完美的.



静态 (不完美)



动态 (完美)

⇕

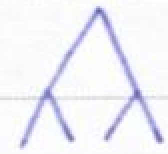
		l	r
I	L		
	R		

(表头: II)

二. 如果信息是完美的

Ⅰ =策略 L, R. Ⅱ 四策略 (l, r) (后发) [L, R 分别指向 l, r]

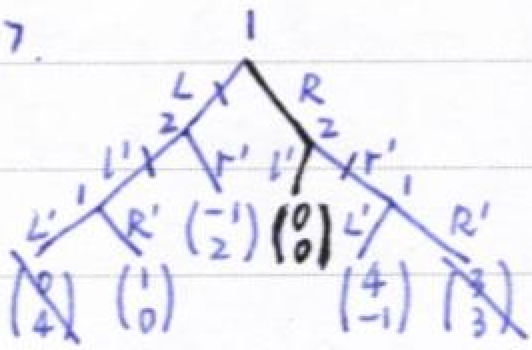
		Ⅱ			
		(l,l)	(l,r)	(r,l)	(r,r)
Ⅰ	L				
	R				

⇔  2×2　　2×3　2×4 … 全排列,

§3

§ 反向归纳

一. 例 P217.



(1) 先行, 看到结局.

∴ (1) 选 R. (2) 选 l.

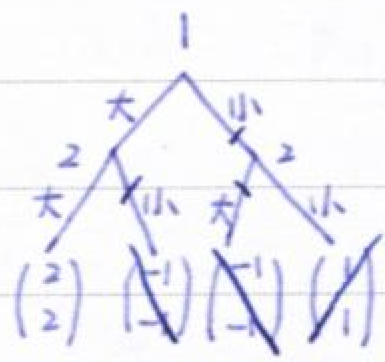
(R, l') 是 N.E.

二. 定理: 如广延型博弈是有限的 (finite) (决策点有限, 且每一决策点上策略选择个数有限)

且信息完美 (任一信息集只含一个决策点), 则必存在 N.E.

当在终极点上没有一个参与人在两个终极点上得益相同, 则 N.E 必唯一.

三. 用反向归纳法解题的长处



—— 动 ⟶ 静

选 广延型

		2			
		(大, 大)	(大, 小)	(小, 大)	(小, 小)
1	大	2, 2	2, 2	−1, −1	−1, −1
	小	−1, −1	1, 1	−1, −1	1, 1

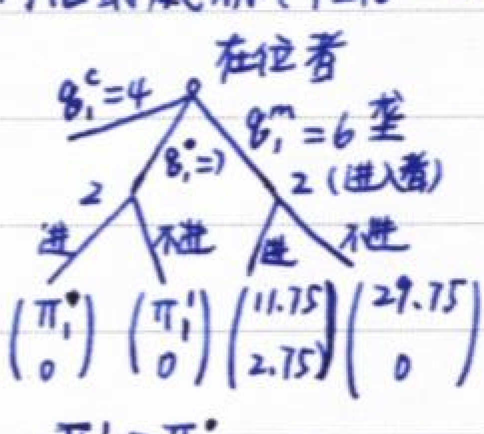
策略型 [每个结果写两回, 有重复]

不能排除掉多余的 N.E.

如按反向归纳法

N.E (大, 大) ⇒ refine N.E (精炼)

四. 不可信的威胁 (P218 −220) —— 在位者与进入者的博弈.



$\pi_1' > \pi_1^\circ$

Brain 1956年 企业1不应选垄断产量

"limiting Pricing" 打产削价 → 吓退进入者.

$P = 13 - X$ (X: 产量)

如 $q^m = 6$, ∵ $\pi_1^m > 0$, ∴ 企业2 必进入.

No.

Date

$\max \pi_2 = \max\{[13-6-y]y - 6.25 - y\} \Rightarrow y^* = 3.$

如 $q^\circ = 7$，企业2的解成为

$\max\{[13-7-y]y - 6.25 - y\}$ $y^* = 2.5$，$\pi_2 = 0.$

但 $q_1^\circ = 7$ 可信吗？

如企业2硬要进入，一旦进入后，企业1选 $q_1^\circ = 7$ 不是最优的。

$\because P = 13 - 7 - 2.5 = 3.5$

$\pi_1^\circ = 7 \times 3.5 - 6.25 - 7 = 11.25$

不如企业1选"斯塔克伯格"解

$q_1^s = 6$，$q_2 = f_2(q_1) = 6 - \frac{q_1}{2} = 3$

$q_1^s = 6 = q_1^m$ $\pi_1^s = 11.75 > \pi_1^\circ (q_1^\circ = 7)$

$\therefore q_1^\circ = 7$ 的威胁不可信.

[是否可信关键看是否违背自己的利益，最后还取决于资本实力].

另解：古诺解 $q_1^c = q_2^c = 4$，$P = 5$. $\pi_1^c = \pi_2^c = 9.75$.

No.

Date

第十二讲

§1 子博弈与完美性

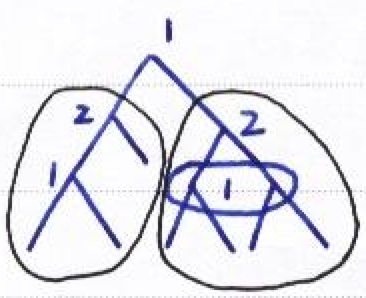
一. 子博弈 (P226)

定义： • 始点 X

• 如y属于X的后续点，如z与y处于同一信息集，则z属于X后续点.

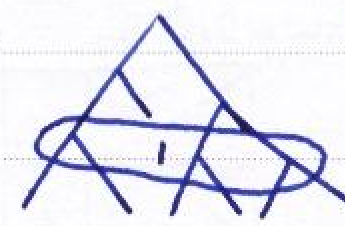
• 终点

P227 例(A)是子博弈.



原博弈本身是一个子博弈.

又以2为始点各定义一子博弈(



只有原博弈是一个子博弈，后面不可分.

§2 无穷次重复博弈与无名氏定理

一. 如何走出囚犯困境.

B

A	高价	低价
高	5, 5	-5, 10
低	10, -5	(0, 0)

帕累托最优

N.E

P.O 不一定是均衡.

如何从 N.E. → P.O. [(0,0) → (5,5)] ?

冷酷战略，如果对手一次背叛，则永远实行惩罚政策 (低价)

条件： ① 博弈重复无穷次. $n \to \infty$

② 贴现因子 $\delta = \frac{1}{1+r} \to 1$ 未来利益值钱，有足够吸引力.

③ 实行惩罚机制 (冷酷战略) 惩罚机制要严.

如某人在t期背叛，得益 $= 10 + 0 + 0 + \cdots$

如老实，则得益为 $5 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots = 5[1 + \delta + \delta^2 + \cdots] = \frac{5}{1-\delta}$

当且仅当 $\frac{5}{1-\delta} \geq 10 \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$ [无名氏 folk theory]

如N次(有穷) $N < \infty$，则在第N次博弈上 → (低价，低价)

N−1 → (低，低)

N−2 → (低，低)

⋮ ⋯ ⋯

No.

Date

二. 如果信息是 incomplete 不完全. 怎么求解? (反向归纳 ⇐ 完美; N.E ⇐ 完全).

例 Bertrand 博弈

两家企业 1, 2. $MC_1 = C_1 = 0$ 信息完全公开.

$$MC_2 = C_2 = \begin{cases} C_2^L = 1 & P\ 0.5 \\ C_2^H = 4 & P\ 0.5 \end{cases}$$

不公开.

$P = 8 - q$ 或 $q = 8 - P$. 证明: $P_1^e = P_2^e = 4$, $\pi_2 > 0$.

企业1不知道企业2的类型 只有 $P_1 = 6$, $P = 4$, $P = 1$ 三个选择.

如 $C_2 = C_2^L = 1$

企业1 \ 企业2	$P_2 = 6$	$P_2 = 4$	$P_2 = 1$
~~$P_1 = 6$~~	~~6, 5~~	~~0, 12~~	~~0, 0~~
$P_1 = 4$	16, 0	8, 6	0, 0
~~$P_1 = 1$~~	~~7, 0~~	~~7, 0~~	~~3.5, 0~~

$\because q = 8 - P$

两价同, 平分市场.

(8, 6) 弱占优解. $P_1 = P_2 = 4$.

如 $C_2 = C_2^H = 4$

企业1 \ 企业2	$P_2 = 6$	$P_2 = 4$	$P_2 = 1$
~~$P_1 = 6$~~	~~6, 2~~	~~0, 0~~	~~0, -21~~
$P_1 = 4$	16, 0	8, 0	0, -21
~~$P_1 = 1$~~	~~7, 0~~	~~7, 0~~	~~3.5, -10.5~~

(16, 0) 也是 N.E.

$P_1 = 4$, $P_2 = 4$ 在 C_2^L 与 C_2^H 都是 N.E.

最后如何取得益. 取"期望得益".

$P_r\{C_2^L\} = P_r\{C_2^H\} = \frac{1}{2}$

$U_1(P_1 = 4) = \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 8 = 8$.

$U_2(P_2 = 4) = \frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 0 = 3$ $\quad U_2(P_2 = 4) > U_2(P_2 = 6)$

$U_2(P_2 = 6) = 0$ $\quad \therefore P_2 \neq 6$.

$\therefore P_1^* = P_2^* = 4$.

不完美信息与序贯均衡 (sequential equilibrium)

猜对 & 最优.