CENGAGE Learning

经济学精选教材译丛

MICROECONOMIC THEORY
BASIC PRINCIPLES AND EXTENSIONS

微观经济理论
基本原理与扩展

[第9版]

〔美〕沃尔特·尼科尔森（Walter Nicholson）著
朱幼为 等译 宁向东 审校

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

经济学精选教材译丛

MICROECONOMIC THEORY
BASIC PRINCIPLES AND EXTENSIONS

微观经济理论

基本原理与扩展

[第9版]

〔美〕沃尔特·尼科尔森（Walter Nicholson）著
朱幼为 等译 宁向东 审校

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京市版权局著作权合同登记 图字:01－2006－4702

图书在版编目(CIP)数据

微观经济理论:基本原理与扩展(第9版)/(美)尼科尔森著;朱幼为等译. —北京:北京大学出版社,2008.5

(经济学精选教材译丛)

ISBN 978－7－301－12289－1

Ⅰ.微… Ⅱ.①尼… ②朱… Ⅲ.微观经济学－教材 Ⅳ.F016

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第200226号

Walter Nicholson

Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions, 9th edition

ISBN:0－324－27086－0

书 名:微观经济理论:基本原理与扩展(第9版)

著作责任者:〔美〕沃尔特·尼科尔森(Walter Nicholson) 著 朱幼为 等译 宁向东 审校

策 划 编 辑:张迎新

责 任 编 辑:张迎新 张慧卉

标 准 书 号:ISBN 978－7－301－12289－1/F·1633

出 版 发 行:北京大学出版社

地 址:北京市海淀区成府路205号 100871

网 址:http://www.pup.cn 电子邮箱:em@pup.pku.edu.cn

电 话:邮购部62752015 发行部62750672 编辑部62752926 出版部62754962

印 刷 者:三河市欣欣印刷有限公司

经 销 者:新华书店

850毫米×1168毫米 16开本 38.75印张 953千字

2008年5月第1版 2008年5月第1次印刷

印 数:0001—5000册

定 价:75.00元

纪念朱宝宪老师

（代译者序）

摆在大家面前的这本书，是《微观经济理论：基本原理与扩展》（第9版）的中译本。我是第6版的译者之一，但翻译那一版的工作，已经是整整十年前的事情了。那时，朱宝宪老师还健在，他是那次翻译工作的组织者和校对者。然而，遗憾的是，宝宪老师现在已经辞世了。尼科尔森的这本书，在美国是一本很有影响的教科书，在技术处理上比较经典，很有特色。朱宝宪老师以非常严肃的态度组织翻译了这本书，介绍给中国的众多学生和读者，让他们受益匪浅。因此，我来写这个代译者序，自然要借此机会来纪念朱宝宪老师。不过，为了不妨碍读者在选书的时候，因为我冗长的纪念文字而失去对这本书的兴趣，我还是将译者该说的话放在前面，简单介绍我对这本书和它应有读者对象的理解。

客观地说，尼科尔森的这本《微观经济理论：基本原理与扩展》确实是一本出色的教科书。它值得我们现在一版又一版、不厌其烦地翻译和介绍。即使是在今天教科书多如牛毛的情况下，我们仍旧可以说，《微观经济理论：基本原理与扩展》是一本卓尔不群的力作。在我看来，这本书主要具有以下几个鲜明特点，值得阅读。

第一，该书在选择内容上比较规整。尼科尔森教授始终坚守着经典理论的介绍与传达，不过，该书各版次间各章在结构编排上还是变化很大的，这反映了尼科尔森教授与时俱进的一面。比如，博弈论和有关信息经济学、政治经济学等内容，现在被放在了最后，是尼科尔森教授对经济学进化的一种表达，篇幅虽短却全面而深刻。

第二，该书是以训练学生专业能力为目标的教本。它使用稍有难度的数学来表述微观经济学的基本理念，介于初中级和高级之间。这对于训练经济学专业学生用数学语言表达经济学观念，进而有逻辑地处理和分析经济学问题，非常有好处。该书乍看上去有大量的数学推导，但实际上懂得一些微积分和初等概率的知识，就足以看得懂。只不过中间的推导过程显得繁复和枯燥，容易把人赶走，关键是要有耐心。可以说，如果读者是想学到经济分析的本领，则这种严密推导的训练是必不可少的。只有这样，才能培养自己解析问题背后深层逻辑的功力，从而将定性分析手段上升到定量分析的高度。

第三，该书还为读者的进一步学习搭建了必要的桥梁。我第一次读到本书第5版的时候，是十几年前在美国进修学习的阶段，该书附文中有关经典文献的介绍，以及程度较深因而被放到“扩展”部分的内容，让我受益良多。这部分内容对于理解更为经典深刻的微观经济学理论有很大帮助。这是我深有体会的。

由于以上提及的，以及更多我未提及的特点，这本书直到目前仍是美国各主要大学使用的微观经济学教科书之一，因此，也适合我国众多经济学相关专业的学生阅读，特别是那些准备报考数量经济学相关专业研究生或准备出国留学的学生。当然，对于其他方面的人士，通过阅读这本书，基本上可以全面了解现代微观经济学，并理解经济学家为什么经常会用数学手段来交流思想，用数学语言来描述逻辑和分析经济问题。

做完了规定动作，以下就是自选动作时间了。我想用下面的篇幅来回忆本书的最早译者，已经英年早逝的朱宝宪教授。《微观经济理论》（第 6 版）的翻译者，除了朱宝宪老师，还有吴洪老师（宝宪老师的夫人），以及我当时的同事张顺明、刘智勇和我，共五个人合作完成。我们为了这本书花费了很多力气。记得我自己在那一年的整个寒假，前后共三个月（包括春节）都在进行翻译。并且，由于电脑故障，个别章节甚至翻译了两遍。可以说，这本书留给我的记忆是深刻的。宝宪老师当时一直在强调，要细致认真，因为这是一本教科书，而教科书，学生们是要一个字一个字来读的。应该承认，由于我们做得很认真，所以时隔多年，北京大学出版社还来找我翻译第 9 版。

坦率地说，当北京大学出版社的编辑找到我，希望由我来翻译新版《微观经济理论：基本原理与扩展》的时候，我并没有很痛快地答应下来，而是犹豫再三。原因很简单，我现在的研究工作所占时间太多，已经没有可能像十年前那样静下心来逐字逐句地进行翻译工作了。而事实上，至少在我看来，翻译比写作还要难。既要尊重原著者，又要用恰当的中文重新表达，那是需要大量的时间投入、“费力不讨好”的工作。但是，这本书则完全不同，因为这里面有朱宝宪老师的因素。

朱宝宪老师和我既是师生、同事，也是很好的朋友。他去世的时候，我们相识整整二十年。宝宪老师和我的师生缘，始于 1986 年。那时，他刚刚从北京大学经济系研究生毕业，来到清华大学新恢复的经济系教书。我那时是清华大学经济系复建后的第一批学生。朱宝宪老师和黎诣远老师共同教授我们的西方经济学，黎老师教微观，宝宪老师教宏观。后来，宝宪老师还教授了“现代西方经济学流派”课程。记得当时使用的是一本《宏观经济学与新宏观经济学》的英文课本，由当时教授我们“货币银行学”的德国教授介绍到国内。宝宪老师在若干年后，曾经将这本书的主要部分翻译成中文，作为校内教学参考书，使我们受益良多。1988 年，我本科毕业，论文研究的题目是“现代宏观经济学中非均衡理论的发展脉络”，宝宪老师是我的指导老师。1990 年，我研究生毕业后留校教书，又与宝宪老师有过很多合作，共同编写过一些书。

应该说，这 20 年来，宝宪老师虽然年长于我，属于老师一辈，但他在我心目中却更像朋友。我从他的身上学习到了很多东西。也许是由于他的信任，我还可以在闲谈中听到他的一些心里话，一些对于人和事的看法，这对我的世界观影响很大。另外，宝宪老师的上进与勤奋，正像深深地影响了无数其他学生一样，也大大地影响和改变了我的一些思想方式和行为习惯。

朱宝宪老师是在学术上相当用功和勤奋的人，他也有着比较高远的学术理想和认识。但他的起点并不高。他是文革前的老初中生，属于被“四人帮”耽误的一代。我记得他曾经给我们讲过他初中毕业之后在食品厂里做面包的故事，而那正是应该在高中里读书的时光。他只能在工作之余自学。1978 年恢复高考之后，宝宪老师考入了北京经济学院；1982 年，他接着考入了北京大学经济系攻读研究生，师从范家骧先生。今天在中国经济学界非常活跃的刘伟、平新乔、王一江、朱善利等人，当年都是他攻读研究生时的同班同学。宝宪老师常常与学生们津津乐道的，就是他的这些同学在读书时如何用功。他对有平新乔和王一江这些闯荡美国名校的同学，更是自豪不已。

宝宪老师是一个很温和而谦逊的人。他所说的，更多的是他的那些同学和朋友的故事，而不是他自己。但从我对他的观察，他也一样竭尽全力地工作，甚至更加努力。只不过，由于自身身体健康状况的客观限制，在工作内容和结果上，他的努力往往不太为人所知。

在我看来，宝宪老师当然是一个优秀的研究者，他关于中国公司并购的经验研究发表在《经济研究》等国内顶级学术期刊上。但他对校内外学生影响最大的，是他关于西方经济理论的学术传播。从前面提到的《当代西方经济学流派》（译自《新西方经济学》，为清华大学经管学院教材，未公开出版），到我们现在这本《微观经济理论：基本原理与扩展》，以及其他的如《国际经济学》《金融市场》等书，都是这方面的例证。在今天看来，翻译作品似乎并不重要，学术的含金量似乎并不高。但在20年前，甚至10年前，在国际学术交流还没有成气候，“海归”还没有大量返回国内的情况下，让年轻学子能够及时地看到原汁原味的西方经济学教科书，则相当重要。从我自己的体会来看，作为一名教师，能够向国内的学者和学生快速传达最好的经济学著作，可能远比自己写一两篇研究论文要重要得多。我想，宝宪老师大概就是基于这样的一种心态，在履行着他作为教师的使命。

北京大学出版社请我来组织翻译这本书，我不能拒绝，因为这是一个多少可以告慰一下宝宪老师在天之灵的机会。而对于我，则可以多少弥补一点遗憾，同时也算是做了一件纪念朱宝宪老师的事情。本书的主要译者——朱幼为是宝宪老师的儿子，也是他的骄傲。至今，我还记得朱幼为进入清华附中“龙班”时，以及他考入清华大学经济管理学院时，朱宝宪老师兴奋与自豪的神情。我想，如果由朱幼为完成这项翻译工作，则是对宝宪老师的一个最大安慰，也是我愿意做，以及现在应该做的。我对朱幼为说，第6版的中译本是一个很好的基础，新增的部分需要你来努力，如果翻译上有问题，我可以帮助你，你的妈妈吴洪老师肯定也可以帮助你。在我的鼓励下，朱幼为和他的同学一起完成了本书的主要翻译工作。其中，朱幼为翻译了1—4章、6—12章和15章，李硕翻译了13、14、16和17章，刘悦翻译了18—21章。我在进行校对的时候，感觉到译稿的质量还是很不错的，当然，这里面有很大程度要归功于吴洪老师的帮助。现在，译稿即将付梓，我想，宝宪老师如果在天有灵，看到朱幼为有了新的成绩，一定会感到更加欣慰。

宁向东
2008年3月于清华大学
经济管理学院

前　言

《微观经济理论：基本原理与扩展》(第9版)向学生展现了一个全面、易懂的现代微观经济学的全貌。书中对所有主要经济理论的结论给出了清晰、直观的解释，并强调了对许多微观经济学问题都通用的数学模型。另外，每一章最后的扩展材料中介绍了一些更高级的文献和实证应用分析，里面汇集了许多专业文献中经常引用的内容。希望这些扩展材料可使那些专业性文献更易于被学生所接受。

第9版的新变化

本版最主要的变化在前九章。在这几章里，我尝试改进并增加效用最大化和企业理论的基本资料。和以前各版相比，这一版的一个重要变化是在这一部分中使用了更加流畅且一致的符号。尽管微观经济学中还没有公认的"标准"符号，但相信引入的这些新符号会和我们当前在实践中使用的符号很好地兼容。本教材其他核心理论部分的变化主要包括：

- 对需求理论作了全面的修订，特别强调了支出函数以及从中推导出的包络关系。
- 对成本函数作了补充，集中讲述了函数中各种投入之间的替代关系。
- 拓展了利润函数概念，对于如何从该函数推导出投入需求函数作了细致的分析。
- 增加了大量的计算实例穿插在各章中，用来讲述各个函数模型的运用。

后十二章在该教材第8版中变动较大，在这一版也作了大量重要的补充，主要有：

- 引入了一些一般均衡下简单的两种商品模型。
- 补充了信息经济学的部分内容，特别是增加了关于委托-代理问题与和谐激励机制的设计方面的内容。
- 增加了诸如耐用品、风险厌恶、劳动力市场均衡等问题的短文。
- 与新增加的理论部分相匹配，新补充了大量的问题和数学实例。

为使用本书的教师准备的完全重新修订的和本版教材配套的教辅资料有：

- 由本书作者编写的《习题解答》(*Solutions Manual*)。该书包括书中全部问题的讲解和解答。
- 由本书作者编写的《试题库》(*Test Bank*)。
- 最新推出：与该教材配套的PPT幻灯片，由东伊利诺伊大学(Eastern Illinois University)的Linda Ghent制作。该PPT文档提供了每一章的内容框架，可供教学使用。

致谢

在本版的修订过程中，我从很多人那里得到了富有建设性的意见，他们是：

Ronald S. Warren, Jr.，佐治亚大学
Nick Feltovich，休斯顿大学
Steven Marc Goldman，加州伯克利大学
Gerald M. Lage，俄克拉荷马大学
Ying Chi Chan，约翰·霍普金森大学
Carrie Meyer，乔治·梅森大学
Stephen Morris，耶鲁大学
James J. Murphy，马萨诸塞大学
Norman K. Thurston，杨百翰大学

正是这些审阅者建议我对本书前几章中出现的数学符号作一些修改，并花费更多笔墨在消费和收益函数的概念上，我接受了这些很好的建议。当然，不足之处仍由本人承担全部责任。

这个版本是本书第一次由 Cengage Learning 出版集团出版发行，我和他们的合作相当愉快。在保证该书按期完成和修改完善新版数学符号两件事上，我真是欠了苏姗·斯马特(Susan Smart)极大的人情。我也知道录入这样一份手稿是一项相当烦琐的工作，但是 Shepherd 公司的录入员 Michelle Livingston 干得十分出色，他从我那乱七八糟的手稿中准确无误地找到了我所要表达的内容。既要使全书行文简练又要通俗易懂似乎是难以调和的两个目标，但负责编辑本书的 Justin Klefeker 成功地实现了这两点。我想我们合作的结果是相当令人满意的。Cliff Kallemeyn 在本书修订的过程中也作出了很大贡献，他发现了几处由于我粗心而犯下的错误。同时感谢康奈尔大学的 David Stapleton，他一直在为本书编写学习指导，以及肯纳索州立大学的 Brett Katzman，他编写了在线习题。

和以往一样，我的阿默斯特学院的同事和学生也为新版修订做了大量的工作。Frank Westhoff——这本教材最忠诚的使用者，尽管已经阅读本书多年，依然再次认真地通读并指出很多有待改进的地方。今年，Steve Rivkin 也加入了评审教员的队伍，而我从他的慧眼中也确实获益良多。还有，除了以前的那些学生(Mark Bruni, Eric Budish, Adrian Dillon, David Macoy, Jordan Milev, Tatyana Mamut, Katie Merrill and Jeff Rodman)仍然为本版付出了大量心血以外，这次 Doug Norton 也加入其中，大部分新增的“扩展”是他帮我完成的。

最后，特别要再次感谢我的妻子 Susan，她眼见着我的 18 个版本的微观经济学教材一部部问世，再不敢幻想家中还能保持整洁(也许还有，不再幻想我还能心绪安宁)。我的四个孩子(Kate, David, Tory 和 Paul)都过着快乐又富足的生活，只是他们完全没有微观经济学的知识。现在，他们的下一代(Beth, Sarah 和 David)正在慢慢长大，我想他们的求知欲可能会更加旺盛，至少渴望知道我献给他们的这些书都是讲什么的。

沃尔特·尼科尔森

目　录

第1篇　引　　言

第2篇　选择与需求

第 3 篇 生产与供给

第 4 篇 竞争性市场

第 5 篇 不完全竞争模型

第6篇 要素市场定价

第7篇 不确定性、信息和外部性

第1篇

引　　言

第1篇仅包括两章内容。第1章分析了经济学家建立经济行为模型的一般方法。第2章回顾了用以建模的数学工具,这些重要的数学工具将在以后的每一章中反复用到。

第1章 经济模型

本书的主要目的，就是向大家介绍一些经济学中最重要的模型，经济学家通过这些模型来解释现实中的消费者和厂商的行为。这些模型是经济学一切领域研究的中心，所以有必要首先弄清楚这类模型需要满足什么样的条件，以及构建模型的基本框架是什么。本章的目的就是通过对一些基本概念问题的概述，来回答以上问题，这些基本概念问题决定了经济学家研究问题的基本方法。

1.1 理论模型

现代经济是一个很复杂的实体。成千上万的厂商从事着千百万种商品的生产，千百万人从事着各种职业，并各自决定着购买哪些商品。以花生为例，人们必须适时收获花生，并且用船运到加工厂制成花生酱、花生油、脆花生和许多其他的花生食品。接下来，加工厂还必须确保它们的商品能够适量地运到成千上万的零售点，以便满足消费者的需求。

要想描述这些花生产品市场的所有细节特征是不可能的，所以经济学家的办法是对十分复杂的现实世界进行抽象，以建立能抓住其"本质"的合理但简单的模型。就像道路图虽然没有标明每一栋住宅或每一片草地的具体位置，但它仍然是很有用的。同样，花生市场的经济模型也很有用，尽管它没有记录下花生经济的每一处细节。在本书中，我们将研究那些得到最广泛应用的经济模型。我们将看到，虽然我们将复杂的现实世界作了很大程度的抽象，这些模型仍然能够捕捉到所有经济行为中所共有的许多本质特征。

在自然科学与社会科学中人们都广泛运用着模型。在物理学中，"完全"真空或者"理想"气体是科学家用简化方法研究真实世界的一个抽象模型；在化学中，原子或者分子的概念也是物质结构的简化模型；建筑学家使用图样来设计建筑物；电视修理工利用电路图来寻找问题所在。经济学家的模型也具有同样的功能，这些模型表明个人决策的方式、厂商行为的方式，以及个人与厂商相互作用建立市场的方式。

1.2 经济模型的验证

当然,并非所有的模型都是令人满意的。比如由托勒密(Ptolemy)建立的地心说最终被否定了,因为它不能准确地解释行星怎样围绕太阳运动。科学检验的一个重要目的就是从"好"模型中找出那些"坏"模型来。用于验证经济模型的一般方法有两种:(1) 直接法,即检验作为模型基础的基本假设是否成立;(2) 间接法,即看所抽象出的模型对现实预测的有效性。为了说明这两种方法的本质区别,我们简要地检验一个在本书的以后章节中多次用到的模型——追求利润最大化的厂商模型。

1.2.1 利润最大化模型

追求利润最大化的厂商模型显然是对现实问题的一种简化。它不考虑企业经理人员的个人动机,也不考虑他们之间的冲突。它假设利润是厂商唯一的目标,其他可能的目标,如获得权力或良好的声誉,都被认为是不重要的。该简化模型还假设厂商拥有关于其成本及销售市场情况的充分信息,因而可以实际作出使其利润最大化的决策。当然,真实世界中的大多数厂商并不能很轻易地获取这些信息。不过,模型的这些缺陷并不算很严重,任何模型都不能完全准确地描述现实。真正的问题是这个简化模型能否令人满意。

1.2.2 对假设的检验

对厂商利润最大化模型进行的一个检验是调查它的基本假设:厂商真的是寻求利润最大化吗?一些经济学家曾经采用寄调查问卷给企业高级管理人员的方式来检验这一假设,请他们说明其追求的目标是什么。调查的结果各种各样。经理们经常提到利润之外的目标或者说他们只能在有限的信息下"尽其所能"。但是,大多数被调查者也承认对利润有很大的"兴趣",并认为利润最大化是一个恰当的目标。这样,通过检验模型的假设就检验了利润最大化的模型本身,所得出的结论是不确定的。

1.2.3 对预测的检验

一些经济学家否认模型可以用调查假设的"真实性"来进行检验,最有代表性的是米尔顿·弗里德曼(Milton Friedman)。[①] 他们认为,所有的理论模型都是建立在"非真实"的假设之上的,都要求对现实作一定的抽象,这是理论化的必然结果。他们得出的结论是:检验模型有效性的唯一方法是看它是否能够解释和预测现实世界中发生的事件。当经济模型面对经济本身的数据时,它才得到了最终的检验。

---

① 见 M. Friedman, *Essays in Positive Economics* (Chicago: University of Chicago Press, 1953), Chap. 1. 关于同样强调"实际"假设重要性的论述,见 H. A. Simon, "Rational Decision Making in Business Organizations", *American Economic Review* 69, no. 4 (September 1979): 493—513。

弗里德曼提供了这一原则的重要说明。他问道：人们应该用什么样的理论来解释专业台球手的击球呢？他认为，经典物理学的速度、动量以及角度的定律都是合适的模型。台球手在比赛时，好像就是按照这些定律行动的。但是如果我们问他们是否懂得台球比赛后面的物理原理时，毫无疑问，大多数人会说不懂。然而，弗里德曼论述道，物理定律提供了非常精确的预测，因而应当作为职业选手如何击球的恰当的理论模型。

因此，利润最大化模型可以这样检验：假设厂商就是按利润最大化行动，看看由此能否预测现实世界中厂商的行为（见本章稍后的例 1.1）。如果预测与现实相符，我们就可以接受利润最大化的假设；如果不符，就拒绝接受。因此，检验理论的最终标准是它预测现实世界事件的能力。

1.2.4　经验分析的重要性

本书主要是关于理论模型的构建的，但是，这些模型终归是为了解决现实问题。尽管在这本本来就很厚的书上再附上一大堆实例显得没什么必要[①]，但在很多章的最后还是附上了拓展材料，希望能够作为将本书中的理论以及理论方法应用于实践经验的一个桥梁。

1.3　经济模型的一般特征

当然，目前运用的经济模型的种类是十分繁多的。所用假设和提供细节的程度主要随所研究的问题而变化。譬如，用于解释全美国经济活动的模型必然比解释亚利桑那州草莓价格的模型要庞大和复杂得多。然而，尽管存在着这种多样性，但实际上所有的经济模型都包含着三个共同的因素：(1)“其他条件不变”的假设；(2) 经济决策者寻求某项最优化的假设；(3) 准确地区分“实证性”和“规范性”的问题。因为我们在全书中都要使用这些因素，所以在一开始就简要地说明它们背后所隐含的基本原理是大有裨益的。

1.3.1　其他条件不变假设

与绝大多数科学一样，经济学中的模型也总试图寻找相对简单的关系。例如，一个小麦市场的模型，可以用较小数目的变量，如农场工人的工资、降水量、消费者收入来解释小麦的价格。这种在模型变量确定上的简约，使得对小麦定价的研究可以在一个简化的环境中进行，从而使我们可以了解每种因素是如何发挥各自的影响的。尽管每个研究者都认识到，许多“外部”的因素（小麦疾病的存在、肥料或拖拉机价格的变动，或消费者对面包态度的变化）都会影响小麦的价格，但是在考虑模型本身时，其他因素都被认为是不变的，这就是其他条件不变假设的意义。经济学家并非假设其他因素不影响价格，而是假设在研究价格时其他因素不变，认识这点是非常重要的。这样我们就可以在简化的情形下仅仅研究一部分影响因素。在所有的经济模型中都应用了这一假设。

使用这一假设确实给用现实世界的数据对经济模型进行实证检验带来了一些困难。在其他科

---

① 如果你愿意参考一本有大量案例的中级经济学教材，可以参阅拙作 *Microeconomics Theory and Its Application*, 9th ed. (Mason, Ohio: Thompson/Southwestern, 2004)。

学中，这类问题可能不会这样严重，因为可以采用可控实验的方法。例如，检验重力模型的物理学家不会通过到帝国大厦上扔一个物体来做这个实验。这样做的实验将会受到太多的外界作用力（气流、空气中的尘埃、温度变化等）的干扰，以至于无法精确地检验其理论。物理学家可以在实验室里进行实验，通过局部真空，使大多数其他作用力得以控制或消除。这样，理论可以在简单情形下得到检验，而不必考虑现实世界中影响落体的其他作用力。

除去一些明显的例外情况，经济学家无法用可控实验来检验他们的模型。事实上，当经济学家在检验理论时，往往不得不依赖各种统计学的方法来控制其他力量的影响。虽然原则上这些统计学方法和其他科学家所用的可控实验的方法同样有效，但实际上，这些统计学方法会产生很多棘手的问题。因此，在经济学中，"其他条件不变"这个假设的局限性和准确含义，比实验室研究更容易引起争论。

1.3.2 最优化假设

许多经济模型是从所研究的经济人理性地追求某种目标的假设开始的。在考察厂商利润最大化这一概念之前，我们先简要地讨论一下这条假设。本书中将会出现一些例子，包括消费者欲望（效用）最大化、厂商成本最小化，以及政府监管机构使公共福利最大化等。虽然，正如我们将看到的那样，所有这些假设（以及与最优化相关的许多其他假设）都还存在争议，但是它们都作为发展经济模型的较好的出发点而被广泛认可了。这种认可看来是由于以下两个原因：第一，最优化假设在获得准确、可解的模型方面效果非常明显。这主要是因为这类模型容易用数学极值问题来描述。没有这个假设，数学上处理起来就非常困难。许多这样的问题，连同它们背后的逻辑，我们将在第 2 章中论述。最优化模型之所以被广泛应用的第二个原因是它们所具有的明显的实证有效性。我们的一些应用表明，这些模型在解释现实时相当有效。因此，最优化模型已经在现代经济理论中占据了极为重要的位置。

例 1.1

利润最大化

利润最大化这个模型很好地展现了最优化假设的意义，它所预期的经济参与者的行为也较容易被实证检验。假设某企业可以在市场上以 p 的价格出售全部产品，生产多少就能卖出多少。它的生产总成本 C 是产量 q 的函数。那么，它的利润就是

$$\pi = pq - C(q) \tag{1.1}$$

使利润最大化，就是求一个合适的 q 使得 π 取到最大值。这在微积分里是个简单的问题，对等式 1.1 两端求导数，令导数值等于 0，就得到了一阶条件下的极大值

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q} = p - C'(q) = 0 \quad 或 \quad p = C'(q) \tag{1.2}$$

就是说，要找利润最大化的产量（设为 q^*），就是要找到一个产量水平，使得其价格等于边际成本。边际成本就是当 q 发生一个微小的改变时 C 的改变量，记作 $C'(q)$。你在经济学原理的课程上应该已经很熟悉这个结果了。注意，求导时价格被认为是个常数，因为此时该企业被视作价格接受者。

等式 1.2 只是一阶条件下得出的极值。通过求二阶导数，我们可以检验它是不是模型中假设的那个极大值。如果该点确为极大值，必有

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -C''(q) < 0 \quad 或者 \quad C''(q^*) > 0 \tag{1.3}$$

即，如果该点确实是利润最大化的点，那么边际成本必须是递增的。

现在，我们这个模型就可以用来"预测"企业对价格改变作出的反应。我们对式 1.2 对价格变量 p 求导数，并假设企业根据利润最大化的原则调整其产量水平 q

$$\frac{d[p - C'(q^*)]}{dp} = 1 - C''(q^*)\left.\frac{dq}{dp}\right|_{q=q^*} = 0 \tag{1.4}$$

移项得

$$\frac{dq^*}{dp} = \frac{1}{C''(q^*)} > 0 \tag{1.5}$$

这里又用到了如果 q^* 是利润最大化时的产量水平，那么边际成本将递增的事实。这样，我们根据最优化假设推出了一个可以被事实检测的假设：如果其他条件不变，当价格上涨时，一个作为价格接受者的企业会增加产量。就是说，如果发现了企业对价格上涨的反应是减少产量，那么我们的模型就一定有问题。

这个模型虽然简单却很有意义，它反映了我们这本书研究问题的方法。对建立的模型关于某些变量求导数，再通过判断一些项的正负号来研究它的经济学意义的做法，是我们要反复用到的。

请回答：在更一般的情况下，价格接受者这个假设不再成立，也就是说价格是一个随产量变化的函数。此时这个模型需要作怎样的调整？

1.3.3 实证与规范的区分

大多数经济模型的最后一个有共性的特征是试图仔细区分出"实证"问题与"规范"问题。到现在我们主要涉及的是实证经济理论。这些"科学"的理论把现实世界作为一个客观存在来研究，并试图解释所观察到的经济现象。实证经济学试图确定经济中的资源事实上到底是如何配置的；而规范性的经济理论则在应当做什么的问题上持有一定的道德观点，希望研究资源应该如何配置。在规范分析的前提下，对于资源应如何配置经济学家持有许多不同的观点。例如，一个从事实证分析的经济学家可以考察美国的医疗行业是如何定价的，还可以衡量在医疗中投入更多资源的成本和效益。但是当该经济学家宣称更多的资源应当投入到医疗保健中时，那就已经进入了规范分析的范畴。

一些经济学家相信，只有实证的经济分析才是正确的。他们认为，就像物理科学那样，"科学的"经济学本身应当仅仅描述（如果可能还有预测）现实世界的事件。对"应该如何"的道德标准等问题的研究不应包括在经济学范畴内。然而，另一些经济学家认为，在经济问题中过于强调实证与规范的区别也并不合适，因为这些问题必然涉及研究者关于伦理、道德和公平的个人观点。按他们的说法，在这种情况下寻求科学的"客观答案"是不可能的。尽管在实证与规范的区分这个问题上还有一

些争议，但在本书中，我们将主要采用实证分析的方法，而把规范的问题留给读者自己思考。

1.4 经济价值论的发展

虽然经济活动是社会活动的中心环节，但令人奇怪的是，直到相当"近"的近代之前，人类从来没有进行过对这种活动细节的研究。经济现象至多被当做人类行为的一个基本方面，并没有受到任何特别的注意。即使有的话，人们也总是从个人得到某种收益的观点来研究经济活动，比如罗马的商人们只关心自己从交易中所获得的利润。直到 18 世纪以前，都没有在任何深度上进行过这类活动的基本性质的研究。[①] 由于本书的内容是关于现代经济理论的，而不是关于经济思想史的，所以，我们关于经济理论发展的讨论将比较简略。我们这里只考察一种经济研究领域的历史情况，这就是价值理论。

1.4.1 早期的经济思想

价值论涉及的自然是商品"价值"的决定。这一研究课题是现代微观经济理论的核心，并且与如何配置稀缺资源这一经济学核心问题紧密相连。这一问题的逻辑起点是价值一词的定义。但是这一术语的意义在整个学说发展的过程中是不一致的。今天，我们认为"价值"与商品的"价格"是同义的。[②] 然而，早期的经济哲学家在商品的市场价格和它的价值之间作了区分。"价值"一词在当时被认为与"重要性"、"本质"或者有时与"神圣"同义。由于"价格"和"价值"是独立的概念，它们可以区分，并且大多数早期的经济讨论都集中于区分时产生的分歧上。例如，圣·托马斯·奎奈(St. Thomas Aquinas)相信价值是上天决定的，价格是人设定的，商品价格就很可能与其价值不同。一个被指控收取超过物品价值的价格的人被认为犯有收取"不正当"价格的罪责。例如，圣·托马斯认为"正当的"利率应当是 0。任何收取资金使用费的借款人都是在牟取不正当的利润，因此应当被教堂人员所指控——而且有时确实被指控了。

1.4.2 现代经济学的建立

18 世纪下半叶，哲学家们开始用更加科学的方法研究经济问题。亚当·斯密(Adam Smith)(1723—1790)在 1776 年发表了具有历史意义的《国富论》(*The Wealth of Nations*)，这被认为是现代经济学的开端。在其内容广泛、无所不包的著作中，斯密以有序、系统的方式建立了市场机制的理论基础。斯密与他的直接继承人，大卫·李嘉图(David Ricardo)(1772—1823)继续将价值与价格加以区分。例如，斯密认为商品的价值意味着"使用价值"，而价格则体现了它的"交换价值"。两个概念间的区别可以用著名的水和钻石的悖论来说明。水显然有巨大的使用价值，但只有极小的交换价值(价格很低)；钻石的实用价值很小，但是有巨大的交换价值。这一为早期经济学家所争论的悖论来

---

① 关于早期经济思想的详细论述，参见 J. A. Schumpeter, *History of Economic Analysis* (New York: Oxford University Press, 1954), pt. II, chaps. 1, 2, and 3。

② 当考虑"外部性"时这并不完全正确，此时物品对私人的价值和对社会的价值之间存在差别(参见第 20 章)。

源于这样的观察，即一些非常"有用"的物品具有很低的价格，而一些并非不可或缺的物品却具有极高的价格。

1.4.3 交换价值的劳动论

斯密和李嘉图都未能令人满意地解决水和钻石的悖论。使用价值的概念留给了哲学家去争论，而经济学家将注意力转向了解释交换价值的决定因素（即解释相对价格）上。一个显而易见的解释是，商品的交换价值是由生产它们的成本所决定的。生产成本主要受劳动力成本影响，至少在斯密和李嘉图时代是如此，因此这就非常接近于建立劳动价值论了。例如，斯密所说的一个例子，如果抓一头鹿花费的劳动时间是抓一只狸猫的两倍，那么一头鹿就应该交换两只狸猫。换句话说，一头鹿的价格应该是一只狸猫价格的两倍。同样地，钻石相对昂贵是因为生产它们需要投入大量劳动。

对于学过供求理论的学生来说，李嘉图的解释一定是不完备的。难道他没有认识到需求对价格的影响吗？事实上，他确实看到了价格的迅速升降，并且将这些变化归结于需求的移动。然而，他认为这些变化都是反常的，仅仅使市场价格暂时偏离劳动价值。由于他没能真正解决使用价值的悖论，因此，除了作为决定交换价值的一个短期因素，他不愿更多地考虑需求，而是坚持认为长期的交换价值仅仅由生产的劳动成本所决定。

1.4.4 边际主义革命

在 1850 年至 1880 年间，经济学家们逐渐认识到，要想建立一种更准确的理论，必须解决使用价值悖论。19 世纪 70 年代，几位经济学家提出，决定商品交换价值的不是它的总效用，而是消费最后一个单位的效用。例如，水当然非常有用，它是生命所必需的。但是，因为水相对较丰富，每增加一品脱的水消费（其他条件不变）对人们具有相对较低的价值。"边际主义者"重新定义了使用价值：决定使用价值的不是整体效用，而是边际效用——每多消费一个单位商品的效用。边际需求的概念与斯密和李嘉图的生产成本分析形成了对比，共同推导出一个完整的价格决定图形。[①]

1.4.5 马歇尔对供给与需求的综合

英国经济学家阿尔弗雷德·马歇尔（Alfred Marshall）（1842—1924）在他 1890 年出版的《经济学原理》一书中对这些边际原理给予了最清楚的表述。马歇尔说明了需求与供给共同作用决定价格的过程。正如马歇尔所说，如同你们不能说出剪刀的哪一个刀刃剪了东西一样，你们也不能说出到底是需求还是供给单独决定了价格。这一分析可用图 1.1 中所示的著名的马歇尔交点来进行说明。图中横轴表示每时期购买商品的数量，纵轴表示价格。*DD* 曲线表示在各种可能的价格下，各时期商品的需求量。它的斜率为负，反映了边际原理，即当购买数量增加时，人们愿意为最后购买的一单位商品付出的钱越来越少。正是最后这一单位的价值确定了所有被购买单位的价格。*SS* 曲线表示当产量增加时，（边际）生产成本是如何增加的。它反映了当总产出增加时，每多生产一单位商品所增

---

① 李嘉图在其地租讨论中最早论述了边际概念，这是边际分析重要的第一步。李嘉图的理论结论是：当人们需要增加谷物的产量时，就要开始使用较贫瘠的土地，这导致了谷物价格上升。李嘉图明显地认识到这就是与价格有关的边际成本，即多生产一单位的成本。注意，李嘉图在讨论土地生产率递减时，隐含地假定了其他投入不变；也就是说，他也用到了其他条件不变假设。

加的成本。换句话说，向上倾斜的 SS 曲线反映了边际成本的增加；而向下倾斜的 DD 曲线反映了边际价值的减少。两条曲线相交于(p^*, q^*)。这是一个均衡点，在这一点上，买卖双方对交易的数量和价格都感到满意。如果其中一条曲线移动，均衡点将改变到新的位置。交易的价格和数量由供给和需求共同决定。

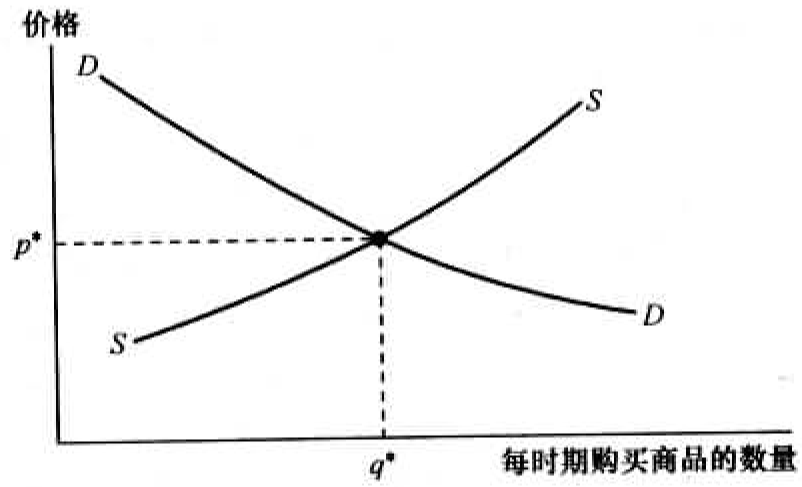


图 1.1　马歇尔的供求曲线

马歇尔的供给与需求相互作用的理论决定了市场上交易的均衡价格(p^*)与均衡数量(q^*)。他得出的结论是，需求与供给都不能单独决定商品的价格，因此，成本与对购买者的效用都不能单独决定商品的交换价值。

1.4.6　悖论的解决

马歇尔的模型解决了水和钻石的悖论。价格既反映了需求者对商品边际价值的估价，又反映了生产这种商品的边际成本。根据这种观点，悖论就可得以解决。水的价格低廉是因为它具有很低的边际价值和边际生产成本。与此相反，钻石价格昂贵是因为它具有很高的边际价值（因为它们相对稀少）和很高的边际生产成本。这种供给和需求的基本模型会在本书后面的分析中反复出现。

例 1.2

供求均衡

尽管用图形来表示在某些场合就足够了，但为了使观点更清晰准确，经济学家还是常常使用代数来表示他们的模型。第一个例子，假定我们希望研究花生市场，以历史数据的统计分析为基础，我们得出花生的每周需求量(q，以蒲式耳为单位)取决于花生的价格(p，每蒲式耳所需的美元)，符合下列方程

$$需求量 = q_D = 1\,000 - 100p \tag{1.6}$$

由于对 q_D 的这个方程仅包含一个独立变量 p，所以我们实际上已假定影响花生需求量的其他因素不变。方程 1.6 表示，如果其他因素无变化，以每蒲式耳 5 美元的价格，人们会购买 500 蒲式耳花生；而当价格为每蒲式耳 4 美元时，他们会购买 600 蒲式耳花生。方程 1.6 中 p 的系数为负，这反映了边际原理，即价格降低会导致人们购买更多的花生。

为完成这一简单的定价模型，假设花生供给数量也取决于其价格

$$\text{供给量} = q_S = -125 + 125p \tag{1.7}$$

这里价格的系数为正,也反映出边际原理,即价格提高会导致供给的增加(正如我们在例1.1中看到的),主要是因为价格提高可以使厂商在增加产量时达到更高的边际生产成本而不会导致亏损。

均衡价格的决定。因此,方程1.6和1.7构成了花生市场的价格决定模型。使需求量与供给量相等,就可以确定均衡价格

$$q_D = q_S \tag{1.8}$$

或

$$1\,000 - 100p = -125 + 125p \tag{1.9}$$

或

$$225p = 1\,125 \tag{1.10}$$

因此

$$p^* = 5 \tag{1.11}$$

即价格为每蒲式耳5美元时,这一市场就处于均衡状态,这时人们购买500蒲式耳花生,而这正是花生生产者所愿意提供的数量。该均衡如图1.2中曲线 DD 和 SS 相交之处。

一个更一般化的模型。为了讲清楚如何运用供给—需求模型,让我们用更一般的符号来表示它。设供给量和需求量分别为

$$q_D = a + bp \quad \text{和} \quad q_S = c + dp \tag{1.12}$$

其中 a 和 c 是常数,调整它们可以上下平移曲线;$b(<0)$ 和 $d(>0)$ 表示需求方和供给方对价格的敏感度。达到市场均衡时,我们就有

$$q_D = q_S \quad \text{或} \quad a + bp = c + dp \tag{1.13}$$

所以,均衡价格就是①

$$p^* = \frac{a-c}{d-b} \tag{1.14}$$

在我们的例子中,$a=1\,000$, $b=-100$, $c=-125$, $d=125$,于是

$$p^* = \frac{1\,000+125}{125+100} = \frac{1\,125}{225} = 5 \tag{1.15}$$

有了这个一般化的公式,我们就可以研究当需求曲线或供给曲线移动时,价格将如何变化。对等式1.14求导数有

$$\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{d-b} > 0 \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}c} = \frac{-1}{d-b} < 0 \tag{1.16}$$

也就是说,需求的增加(a 增加)使均衡价格提高,供给的增加(c 增加)使均衡价格下降。这正是从图形分析上得出的结论。从图1.2中可以看到,当常数 a 从1 000提高到1 450时,均衡价格涨到了 $p^* = 7[=(1\,450+125)/225]$。

① 等式1.14有时被叫做供求模型的简化形式。从中可以看出,价格只和 a、c 这两个描述供求水平的外生变量以及 b、d 这两个描述生产者、消费者行为的参数有关。类似地,我们可以推出均衡数量的简化形式。

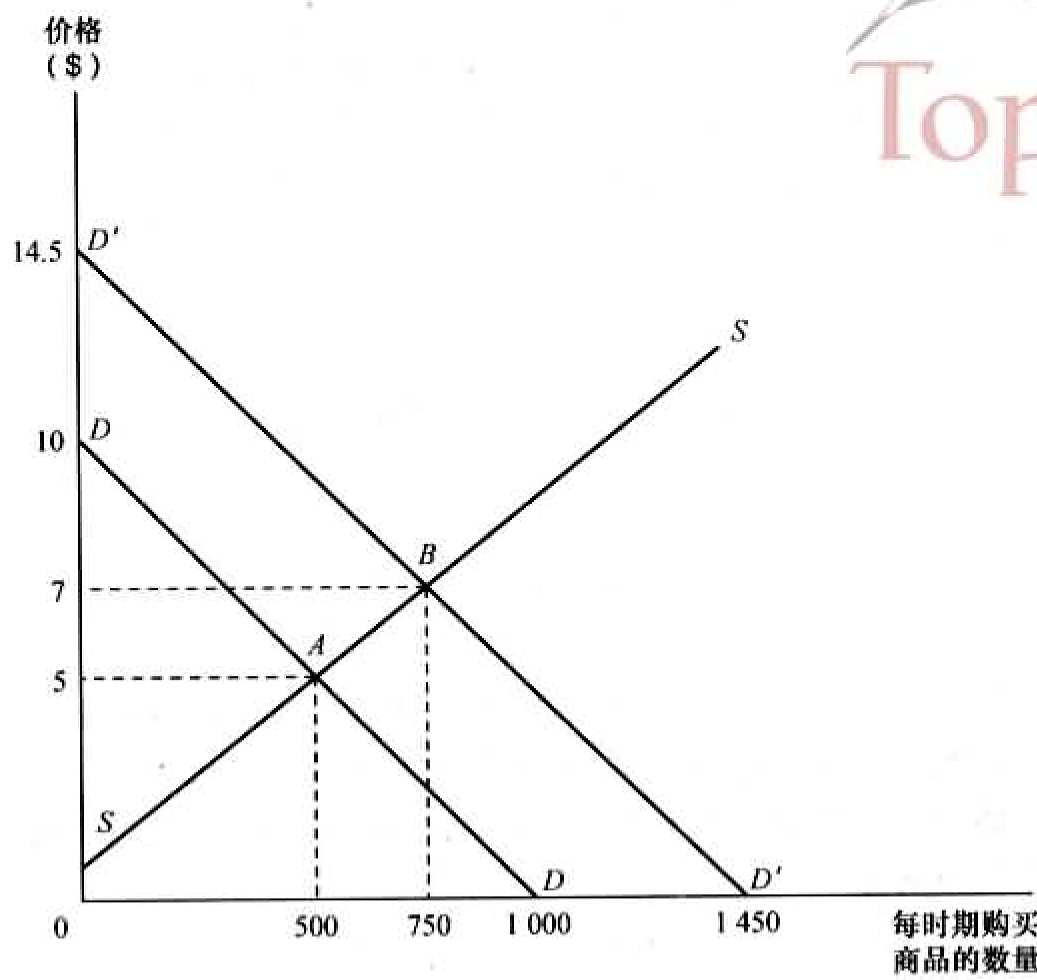


图 1.2　均衡的改变

原始的均衡点是由开始的供求曲线的交点 A 确定的($p^*=5, q^*=500$)，当需求增加到 $q_D=1\,450-100p$ 时，均衡点移动到 B 点($p^*=7, q^*=750$)。

请回答：等式 1.16 中$\frac{dp^*}{da}$一项反映了当 a 发生微小改变时，价格 p 的改变量。这应如何理解？用这个量能否算出 a 从 1 000 增加到 1 450 时价格 p 的改变量？

1.4.7　一般均衡模型

虽然马歇尔模型是个极为有用的工具，但作为一个局部均衡模型，它只能反映一个时间点上一种商品的市场情况。对有些问题来说，这样可以简化分析并得出有意义的结论，但对于其他一些更全局性的问题来说，这种窄的视角会阻碍我们发现市场之间某些重要的关系。为了回答更一般化的问题，必须有一个关于整个经济的模型来反映各市场间和经济主体间的相互关系。法国经济学家列昂·瓦尔拉斯(Leon Walras)(1831—1910)建立了这一分析的主要体系，并形成了现代这类问题研究方法的基础。他用多个方程联立求解的方法来描述整个经济体，建立了理解一般均衡中相互关系的基础。瓦尔拉斯认识到，要想处理整个经济的问题，就不能孤立地研究单一的市场，而是需要建立起能反映某一个市场的变化对其他市场所带来的影响的模型。

例如，假设花生的需求增加，这会导致花生的价格上涨。马歇尔的供求分析可以从供给需求曲线的形状分析价格上涨幅度。而一般均衡分析则不仅观察这一市场，而且还观察它对其他市场的影

响。花生价格的上涨使花生酱的生产者成本增加,从而影响花生酱的供给。同样,花生价格的上涨对农场主来说,可能意味着更高的土地价格,这可能将进一步影响他们所要购买的所有商品的需求曲线。于是,汽车、家具以及赴欧洲旅游的需求曲线都将向外移动,这会导致这些商品提供者的收入增加。结果,最初对花生需求增加的影响最终会扩散到整个经济中去。一般均衡分析试图建立这样一种模型,它使我们可以在简化的条件下研究这些影响。本书的第 4 篇描述了一些这样的模型。

1.4.8 生产可能性边界

这里,我们用读者可能在经济学原理课程上见过的另一种图形——**生产可能性边界(production possibility frontier)**,来简单说明一般均衡模型。这种图形表示的是一个经济在某个时期(如一周)内用可得到的资源生产的两种商品的各种数量的组合。因为生产可能性边界涉及两种商品,而不是马歇尔模型中的一种商品,所以它被用作一般均衡模型的基础。

图 1.3 显示了两种商品——食品与服装的生产可能性边界,它是用经济中的资源能够生产出的商品组合来表示这些商品的供给。例如,在这张图表示的生产水平下,我们可以选择生产 10 磅食品与 3 单位服装,也可以选择生产 4 磅食品与 12 单位服装,或者其他的食品与服装的产出组合。生产可能性边界代表了全部组合的集合。因为经济中的资源有限,所以我们无法生产出边界以外的食品与服装组合。生产可能性边界提醒我们这样一个基本的经济事实:资源是稀缺的,不可能生产出每件商品我们想要的所有数量。

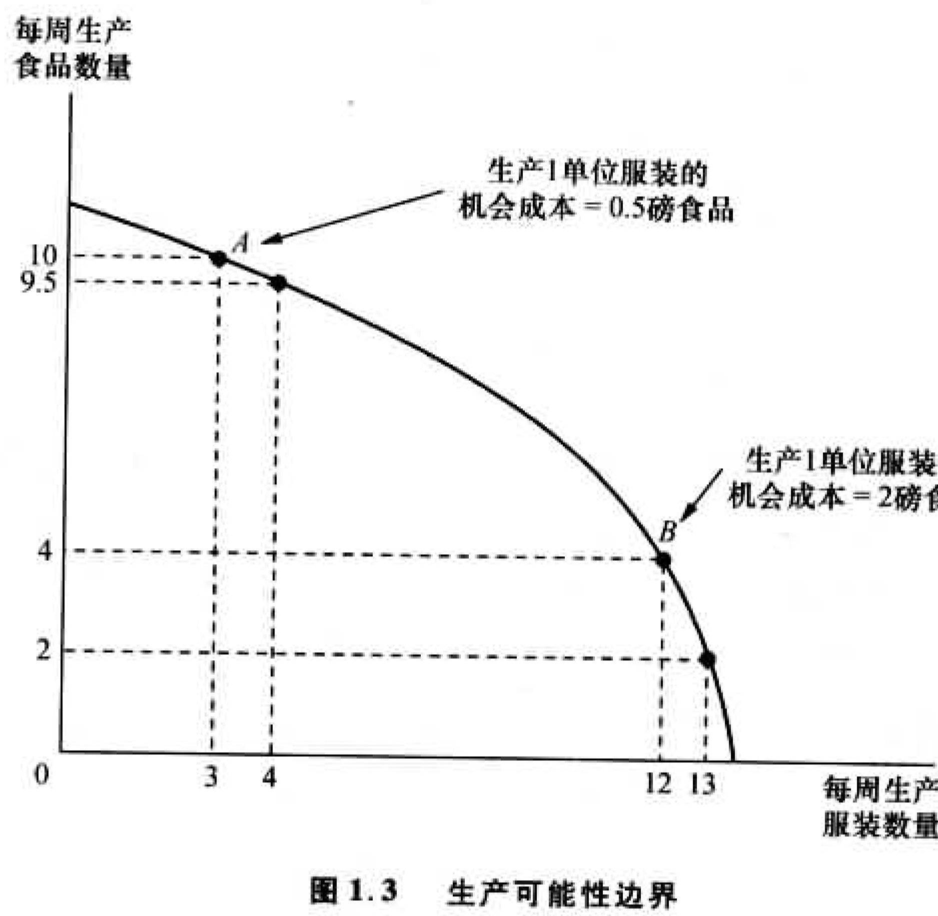


图 1.3　生产可能性边界

生产可能性边界显示了一定数量的稀缺资源可以生产的两种商品的不同组合。它也显示了减少一种商品的生产数量以多生产 1 单位另一种商品的机会成本,如图所示,在 A、B 两点上多生产 1 单位服装的机会成本(即为此减少的食品产出)是不同的。

这种稀缺性意味着我们必须对每种商品的生产数量作出选择。图1.3表明每一种选择都有相应的成本。例如，如果A点表示生产10磅食品与3单位服装，那么在此点，多生产1单位服装将减少0.5磅食品，即增加1单位服装的产出意味着减少0.5磅食品的产出。经济学家称在A点1单位服装的机会成本是0.5磅食品；如果在生产4磅食品与12单位服装的B点，多生产1单位服装将减少2磅食品，即增加1单位服装的机会成本是2磅食品。因为在B点比在A点生产的服装更多，李嘉图与马歇尔关于成本递增的观点均认为：在B点，每多生产1单位服装的机会成本比A点高。图1.3表明的正是这一效应。

图1.3的生产可能性边界告诉我们两个一般均衡的结论，这在马歇尔的单个市场供求模型中是得不到的。第一个结论是：多生产一种商品意味着少生产另一种商品，因为资源是稀缺的。经济学家经常（可能是过于频繁地）用“没有免费的午餐”来解释每个经济行为都是有机会成本的。生产可能性边界表示的第二个结论是：这些机会成本取决于每种商品生产的数量。这一边界就像两种商品的供给曲线，它用第二种商品减少的数量来表示第一种商品产出增加的机会成本。因此，生产可能性边界是同时研究多市场的特别有用的工具。

例1.3

生产可能性边界

假设一个经济里存在两种商品x，y，它们的生产可能性边界是

$$2x^2 + y^2 = 225 \tag{1.17}$$

画出图形来应该是一个四分之一椭圆，像图1.3那样。图形上的无穷多的点都满足等式1.17。为了求解曲线的斜率，我们可以解出y的表达式

$$y = \sqrt{225 - 2x^2} \tag{1.18}$$

然后对x求导，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}(225 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x) = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y} \tag{1.19}$$

可以看出，在点(10,5)处的斜率就是$-2\times 10/5 = -4$，即生产1单位x的机会成本是少生产4单位的y。在点$(5,\sqrt{175})$上，生产x的机会成本是$-2\times 5/\sqrt{175} = -0.76$。显然，当$x$的产量减少时，多生产1单位的$x$所必须放弃的$y$的数量减少了。在后续章节里对各种经济问题的研究中，我们还将经常用到这种求导数以分析其中变量之间相互替代关系的方法。

请回答：用计算器验证等式1.18在点(10,5)处的斜率是-4。你可以算一下，当$x=9.99$和当$x=10.01$时，y分别是多少。为什么用计算器只能算出斜率的近似值呢？

1.4.9 福利经济学

除了用于研究经济如何运作的实证问题外，一般均衡分析的工具还可用来研究各种经济安排的

福利状况的规范化问题。虽然这些问题是 18、19 世纪伟大的经济学家(斯密、李嘉图、马克思、马歇尔等人)研究的重点,但最重要的进展是在 20 世纪初由英国经济学家弗朗西斯·埃奇沃斯(Francis Y. Edgeworth)(1848—1926)和意大利经济学家维尔弗雷多·帕累托(Vilfredo Pareto)(1848—1923)取得的。他们提出了"经济最优化"(economic efficiency)概念的准确定义,并给出了市场达到这一目标的条件。通过明确资源配置与资源定价的关系,他们对斯密提出的思想,即有效市场是一只"看不见的手",可以有效配置资源的思想提供了支持。本书后面的章节将集中讨论这些福利问题。

1.5 新近的发展

经济学研究在二战后得到迅速发展。本书的主要目的之一就是对这些研究的主要内容作一总结。通过说明经济学家如何建模来解释日益复杂的经济活动,希望读者更好地认识那些尚待解决的问题。

1.5.1 经济模型的数学基础

微观经济学战后的一个重要进展是阐明了个人与厂商的假设。这一进展的重要标志是保罗·萨缪尔森(Paul Samuelson)出版的《经济分析基础》,作者是第一个获得诺贝尔经济学奖的美国人,他在书中提出了很多行为最优化模型。① 萨缪尔森认为,将行为模型建立在精确定义的数学条件上很重要,因为这样才可以运用数学里的各种最优化手段。他的这种方法影响深远,使得数学成为现代经济学的一部分。在本书第 2 章,我们将逐一讲解一些广泛应用的数学手段。

1.5.2 研究市场的新工具

现代经济学的另一个重要进展是一系列研究市场均衡的新工具,其中大多被纳入本书后面的章节。它们包括刻画单一市场价格的模型,比如比上述简单的供求模型复杂一些的垄断市场定价模型,以及在寡头市场中根据博弈论建立起来的策略博弈模型;也包括那些同时分析多个市场的一般均衡模型。我们将看到,通过这些新工具可以将市场运作刻画得更加真实而全面。

1.5.3 不确定性与信息经济学

战后的第三个重要理论进展是在经济模型中引入了不确定性和不完全信息。用于不确定情况下行为研究的基本假设最初是在 20 世纪 40 年代与博弈论一起建立起来的。以后的发展表明,这些思想可以用来解释为什么个人倾向于厌恶风险,以及人们如何收集信息以减少所面临的不确定性。本书中,不确定性和信息的问题也会出现在部分章节的分析中。

---

① Paul A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1947).

1.5.4 计算机与实证分析

战后经济学进展的最后一个方面应当被提及，即大量运用计算机分析经济数据。因为计算机已经能够处理更多的信息并进行更复杂的数学计算，大大地提高了经济学家验证他们理论的能力。较之于以前的经济学家不得不局限于对现实世界数据的简单的图形分析，现在的经济学家可以用大量先进方法和微观经济数据对他们的模型进行检验。对这些技术及其局限性的考察已超出本书的范围和目标，然而，本书大多数章节后的扩展材料介绍了一些计量经济学在微观经济理论中的应用。

小　结

本章介绍了一些经济学家研究资源配置方法的背景知识。这里讨论的许多内容对于学习过经济学原理的读者来说应该并不陌生。与以前相比，对于相同的基本经济学问题的研究现在我们需要更加复杂的工具。本书的目的（更高级的经济学书籍更是如此）就是为您提供这样的工具。作为全书的开始，本章帮助你回忆以下知识点：

- 经济学研究稀缺资源如何配置，经济学家试图建立简单的模型来帮助人们理解这个过程。许多这样的模型是建立在数学的基础上的，因为数学提供了说明这些模型以及研究其结果的精确方法。
- 最经常被使用的模型是供求模型，它最初是在 19 世纪下半叶由阿尔弗雷德·马歇尔完整地建立起来的。此模型显示了可观察的价格可用来表示厂商的生产成本与需求者的支付意愿之间的平衡。
- 马歇尔的均衡模型仅仅是“局部”的，即它只考虑了一个时间点上的一个市场。当需要同时考虑多个市场时，我们需要建立起分析一般均衡的工具。
- 检验经济模型的有效性也许是经济学家面临的最困难的问题。有时，可由模型是否建立在“合理”的假设上来评估。但更多的时候是根据模型能否很好地解释现实生活中的经济问题来评判的。

推荐阅读文献

方法论方面的文献

Blaug, Mark. *The Methodology of Economics or How Economists Explain*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992.

一个不错的关于当前经济学界争论问题的总结。

Boland, Lawrence E. “A Critique of Friedman's Critics”. *Journal of Economic Literature* (June 1979): 503—522.

这是一篇对经济学实证方法及假设的经验检验的作用的总结性文章。

Friedman, Milton. “The Methodology of Positive Economics”. In *Essays in Positive Economics*, pp. 3—43. Chicago: University of Chicago Press, 1953.

该文的主要内容为弗里德曼精彩观点的基本阐述。

Harrod, Roy F. “Scope and Method in Economics”. *Economic Journal* 48 (1938): 383—412.

该文对经济模型应该扮演什么角色作了经典论述。

Hausman, David M., and Michael S. MaPherson. "Taking Ethics Seriously: Economics and Contemporary Moral Philosophy". *Journal of Economic Literature* (June 1993): 671—731.

该文着重阐述经济学家应该关心伦理问题,这既因为伦理学可能影响经济人的行为,也因为道德准则可能在确定实证经济学的有关发现时是必要的。

McCloskey, Donald N. *If You're So Smart: The Narrative of Economic Expertise.* Chicago: University of Chicago Press, 1990.

这本书讨论了"经济学既是科学又是艺术"这个观点。对此话题更多的讨论可参见 *The Journal of Economic Literature*, June 1995。

经济史的一手资料

Edgeworth, F. Y. *Mathematical Psychis.* London: Kegan Paul, 1881.

该书是对福利经济学的最初研究,其中包括经济有效性与契约曲线的基本概念。

Marshall, A. *Principles of Economics*, 8th ed. London: Macmillan & Co., 1920.

该书是对新古典主义的完整综合,是一本长时间使用的畅销教材,书中有详细的数学附录。

Marx, K. *Capital.* New York: Modern Library, 1906.

该书带来了劳动价值论的全面发展,"转型问题"的讨论提供了一般均衡分析的(也许现在看来是错误的)起点,并提出了对产权私有制基础的置疑。

Ricardo, D. *Principles of Political Economy and Taxation.* London: J. M. Dent & Sons, 1911.

该书是一本具有很强分析性并且很紧凑的著作,是一本关于政策问题特别是有关贸易问题的详尽分析的开创性著作。在书中首次讨论了边际主义的基本概念。

Smith, A. *The Wealth of Nations.* New York: Modern Library, 1937.

该书是第一本伟大的经济学著作,很长并且内容详尽,斯密对各种经济事件作了首次评论。这一版每页边上的注释对阅读颇有帮助。

Walras, L. *Elements of Pure Economics.* Translated by W. Jaffé. Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1954.

该书标志着一般均衡理论的产生,是一本相当高深的读物。

经济史的二手资料

Backhouse, Roger E. *The Ordinary Business of Life: The History of Economics from the Ancient World to the 21st Century.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2002.

作为对经济史的研究,本书丝毫不带个人崇拜色彩。它对古代经济思想的论述十分精辟,但对近代经济学中数学的应用讲得很有限。

Blaug, Mark. *Economic Theory in Retrospect*, 5th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

该书对分析问题作了完整的归纳,每一章都有精彩的"读者导引"。

Heilbroner, Robert L. *The Worldly Philosopher*, 7th ed. New York: Simon and Schuster, 1999.

这是一本奇妙又易读的一流经济学家传记,在一些章节中,对乌托邦社会主义者与索尔斯坦·维布伦给予了高度的评价。

Keynes, John M. *Essays in Biography.* New York: W. W. Norton, 1963.

这里刊登了关于许多著名人士(吉诺依德·乔治、温斯顿·丘吉尔、里昂·特诺茨基)和一些经济学家(马尔萨斯、马歇尔、埃奇沃斯、F. P. 拉姆齐与杰文斯)的散文,显示了凯恩斯的写作天赋。

Schumpeter, J. A. *History of Economic Analysis.* New York: Oxford University Press, 1954.

该书采用了百科全书式的处理方式,介绍了所有著名的和很多不太著名的经济学家。还简单地总结了社会科学其他分支的最新发展。

第 2 章 最优化的数学表达

许多经济模型的研究起点都是假设经济人在给定环境下寻求达到某种“最优”的结果，比如假设消费者试图达到效用最大化，企业试图使利润最大化，这些从数学求解的角度来看都是同一类问题。本章便是向读者介绍解决这类问题的数学工具。对于熟悉多元微分学的读者，本章只是一个简单的复习；对只了解基本的一元微积分概念的读者，本章提供了足够的内容，帮你了解如何用微积分构建微观经济模型。在后面的章节各种数学概念会频频出现，你可随时翻回这章查阅相关内容。

2.1 一元函数最大值问题

我们从最简单的例子说起：假设某企业的经理希望通过出售特定数量的一种商品以使利润最大化[①]，并假设企业所获得的利润(π)仅取决于出售商品的数量(q)。它的数学表达为

$$\pi = f(q) \tag{2.1}$$

图 2.1 显示了一种 π 与 q 之间的可能关系。很清楚，为了获得最大利润，企业经理应该生产能得到利润 π^* 的产量 q^*。如果能精确地作出像图 2.1 这样的函数图，那么似乎用尺子量一下就可以得出数量关系了。

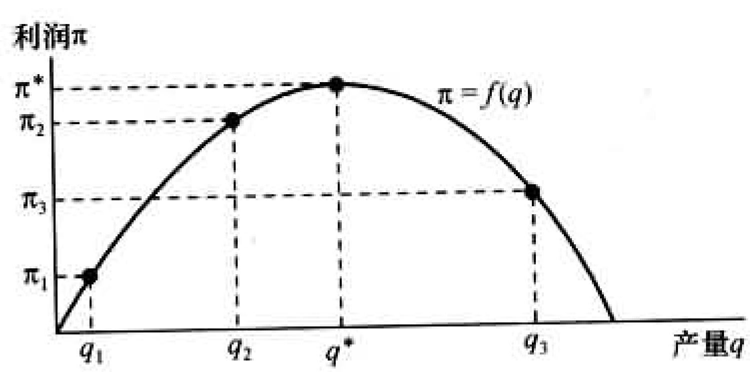


图 2.1 产量与利润之间的假设关系

如果企业经理希望生产出利润最大化的产量，产量应为 q^*。注意在 $q=q^*$ 处，$\frac{d\pi}{dq}=0$。

① 在这一章我们主要讨论最大化问题，但研究最小化问题的方法是完全一样的，因为最大化 $f(x)$ 等价于最小化 $-f(x)$。

然而，一般来说，企业经理是得不到这样准确的图示的。所以，他们会通过调整 q 找到利润最大化的点。比如，从 q_1 开始，销售所得的利润是 π_1；然后把 q 增加到 q_2，则利润增加到 π_2。π 随 q 增加而单调增加的数学表达为

$$\frac{\pi_2 - \pi_1}{q_2 - q_1} > 0 \quad \text{或者} \quad \frac{\Delta\pi}{\Delta q} > 0 \tag{2.2}$$

其中记号 Δ 用来表示 π 或者 q 的增量。只要 $\Delta\pi/\Delta q$ 为正，利润就增加，企业经理将继续增加产出，一直增加到 q^*。然而，产出增加到 $\Delta\pi/\Delta q$ 为负时，再扩大生产就要犯错误了。

2.1.1 导数

你应该已经了解，q 的变化极小时，$\Delta\pi/\Delta q$ 的极限叫做函数 $\pi = f(q)$ 的导数，记为 $\mathrm{d}\pi/\mathrm{d}q$ 或 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}q$ 或 $f'(q)$。函数在点 q_1 的导数的正式定义为

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q} = \lim_{h \to 0} \frac{f(q_1 + h) - f(q_1)}{h} \tag{2.3}$$

注意，这个比率的值显然取决于所选的点 q_1。

2.1.2 某一点的导数值

有时我们只关心给定的一点的导数值，由此我们引出一个常见的符号，例如，导数在点 $q = q_1$ 的值记为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_1} \tag{2.4}$$

有时，则要研究对于所有可能的 q 求$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q}$的值。

在图 2.1 的例子中，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_1} > 0$$

且

$$\left.\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_3} < 0$$

$\mathrm{d}\pi/\mathrm{d}q$ 在 $q = q^*$ 处的值是多少？它应该是 0，因为当 $q < q^*$ 时值为正，且当 $q > q^*$ 时值为负。导数的几何意义是曲线的斜率，在 q^* 的左边斜率为正，在 q^* 的右边斜率为负，在点 q^* $f(q)$ 的斜率是 0。

2.1.3 最大化的一阶条件

对于一元函数，如果在某一点取到最大值，它在该点的导数（如果存在）必为零。因此，如果企业经理能够根据现实世界的数据估计出函数 $f(q)$，理论上就一定能够找到使得 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}q = 0$ 的点。在这一最优点（比如说 q^*），有

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q^*} = 0. \tag{2.5}$$

2.1.4　二阶条件

然而，没一点怀疑精神的企业经理可能被这一简单的条件所蒙蔽。例如，假设函数如图 2.2(a)或图 2.2(b)所示。如果利润函数如图 2.2(a)，由 $d\pi/dq=0$，企业经理选择点 q_a^*。事实上，这个点是利润最小化点，而不是利润最大化点。类似地，如果利润函数如图 2.2(b)，企业经理选择点 q_b^*，尽管它产生的利润大于任何小于 q_b^* 产出的利润，但是它小于任何大于 q_b^* 产出的利润。以上情况表明了一个数学事实，即 $d\pi/dq=0$ 是最大化的必要条件而不是充分条件。为了确保所选择的点确是最大化的点，还必须满足一个附加条件。

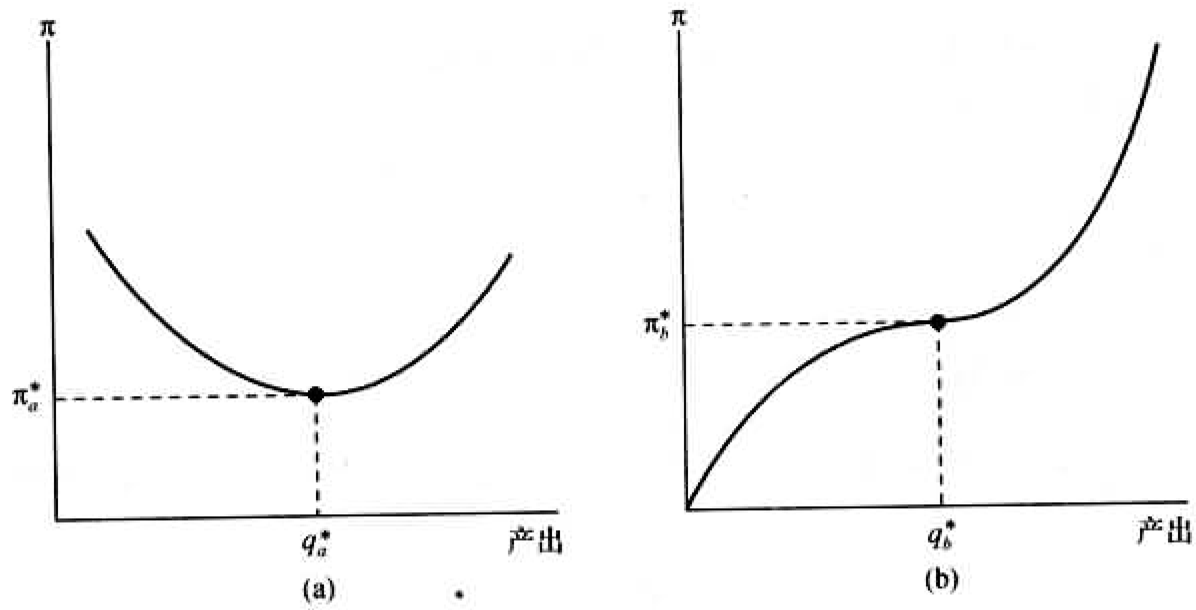


图 2.2　如果一阶导数规则运用不当则会导致错误结果的两个利润函数

在(a)中运用一阶条件将导致选择 q_a^* 的生产量。事实上这个点是利润最小化点。类似地，在(b)中产出水平 q_b^* 满足一阶条件，但是这个点产生的利润小于任何大于 q_b^* 的产出的利润。可见导数等于 0 的点是函数获得最大值的必要条件但不是充分条件。

直观地看，这个附加条件很清楚，即当产出比 q^* 大一点或者小一点时，利润都小于产出为 q^* 时的利润。如果这个条件不满足，企业经理就可以找到比 q^* 更好的点。在数学上，这意味着对于 $q<q^*$，$d\pi/dq$ 必大于 0；对于 $q>q^*$，$d\pi/dq$ 必小于 0。因此，在点 q^*，$d\pi/dq$ 必递减，或者说，$d\pi/dq$ 的导数在 q^* 点必为负。

2.1.5　二阶导数

导数的导数称为二阶导数，记为

$$\frac{d^2\pi}{dq^2}\quad 或者\quad \frac{d^2f}{dq^2}\quad 或者\quad f''(q)$$

所以，q^* 表示(局部)最大值点的附加条件是

$$\left.\frac{d^2\pi}{dq^2}\right|_{q=q^*}=\left.f''(q)\right|_{q=q^*}<0, \tag{2.6}$$

其中 $q=q^*$ 表示二阶导数在点 q^* 的值。

因此,尽管方程 2.5($d\pi/dq=0$)是最大化的必要条件,但是只有当它与方程 2.6($d^2\pi/dq^2<0$)组合在一起才能确保该点是函数的局部极大值点。因此方程 2.5 和 2.6 合在一起是最大化的充分条件。当然,企业经理很可能根据市场信息作一系列试验,而不是根据数学推理(就像弗里德曼讲的打台球的类比)来确定 q^*。在本书中,我们对怎样找到这样的点并无兴趣,我们研究的是该点的性质以及当条件变化时这个点怎样变化。数学推导对于回答这类问题是很有帮助的。

2.1.6 求导法则

这里介绍几个常见的求导法则,都是全书中一直要用到的。

1. b 是常数,则

$$\frac{db}{dx}=0$$

2. b 是常数,则

$$\frac{d[bf(x)]}{dx}=bf'(x)$$

3. b 是常数且 $b\neq0$,则

$$\frac{dx^b}{dx}=bx^{b-1}$$

4. $\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$

其中 ln 是以自然对数 $e(=2.71828\cdots)$为底的对数符号。

5. 对于任意常数 a,有

$$\frac{da^x}{dx}=a^x\ln a$$

这个法则的特例是 $de^x/dx=e^x$。

现在假设 $f(x)$和 $g(x)$是 x 的函数且 $f'(x)$和 $g'(x)$存在,则

6. $\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx}=f'(x)+g'(x)$

7. $\frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx}=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

8. 若 $g(x)\neq0$,$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

最后,如果 $y=f(x)$,$x=g(z)$并且 $f'(x)$与 $g'(z)$存在,则

9. $\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dg}{dz}$

这个重要的结果叫做**链导法则(chain rule)**,它提供了一个研究自变量 z 如何通过中间变量 x 影响因变量 y 的方法。这里举几个应用这条法则的例子:

10. $\frac{de^{ax}}{dx}=\frac{de^{ax}}{d(ax)}\cdot\frac{d(ax)}{dx}=e^{ax}\cdot a=ae^{ax}$

11. $\frac{d[\ln(ax)]}{dx}=\frac{d[\ln(ax)]}{d(ax)}\cdot\frac{d(ax)}{dx}=\ln(ax)\cdot a=a\ln(ax)$

12. $\frac{d[\ln(x^2)]}{dx}=\frac{d[\ln(x^2)]}{d(x^2)}\cdot\frac{d(x^2)}{dx}=\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{x}$

例 2.1

利润最大化

假设利润(π)与生产数量(q)之间的关系是

$$\pi(q) = 1\,000q - 5q^2 \tag{2.7}$$

函数图是一条抛物线,如图 2.1。可以通过求导数得到利润最大化的 q 值

$$\frac{d\pi}{dq} = 1\,000 - 10q = 0 \tag{2.8}$$

则

$$q^* = 100 \tag{2.9}$$

在 $q=100$ 时,方程 2.7 显示利润是 50000,这是最大可能的利润。例如,如果厂商选择生产 $q=50$,利润是 37500;在 $q=200$ 时,利润为 0。

利润函数在 $q=100$ 时的二阶导数是 -10(见方程 2.8),因此证明 $q=100$ 是全局最大值点。可以看到,利润增加率总是递减的,直到 $q=100$ 这个增加率还是正的,但是超过这个点就变成负的了。在此例中,$q=100$ 是函数唯一的局部极大值点。然而,对于更复杂的函数,可能存在多个极大值点。

请回答:假设厂商的产出(q)仅取决于雇用劳动力(l),劳动与产量的关系为 $q=2\sqrt{l}$,并假设每单位劳动力需要支付工资 10 美元,每单位产品可以卖 50 美元,则利润 π 关于 l 的函数是 $\pi(l)=100\sqrt{l}-10l$,那么使利润最大化的劳动力雇用量是多少?最大的利润是多少?

2.2 多元函数

与经济问题有关的函数很少是单一变量函数。经济人利益的大多数目标取决于多个变量与对每一变量选择的值。例如,消费者的效用取决于消费的每种商品的数量,对于厂商的**生产函数(production function)**,生产的数量取决于投入生产过程的劳动、资本与土地的数量。这种变量(y)取决于一系列其他变量($x_1, x_2, \cdots, x_n$)的情况可以表示为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.10}$$

2.2.1 偏导数

我们对 y 达到最大值的点,以及为了达到该点各变量之间的权衡取舍感兴趣。另外,用图形来

刻画经济人调整各个变量以达到极大值很直观，但对于多变量函数，导数还没有很好地被定义。就像爬山一样，路途有多险峻取决于选择的路径，函数的斜率（或者导数）也取决于所考虑的方向。通常，我们只考虑单一自变量变化，其他变量不变时的方向（类似爬山仅仅测量南—北或者东—西方向的坡度）。这些方向的斜率叫做**偏导数(partial derivatives)**。相对于 x_1 的偏导数记为

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad 或者 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad 或者 \quad f_{x_1} \quad 或者 \quad f_1$$

很明显，在计算这个变量的偏导数时其他变量保持不变。还必须强调一遍：此偏导数的值取决于 x_1 的值和（预先给定的）$x_2,\cdots,x_n$ 的值。

偏导数的正式定义是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)-f(x_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)}{h} \tag{2.11}$$

式中 $x_2,\cdots,x_n$ 取预先给定的常数值 $\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$，只研究 x_1 变化的效应。同样，可用这一方式计算出关于其他变量（$x_2,\cdots,x_n$）的偏导数。

2.2.2 偏导数的计算

偏导数是很容易计算的，只要把 $x_2,\cdots,x_n$ 都视为常数（其实就是偏导数的定义），求导就行了。请看以下例子。

1. $y=f(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=f_1=2ax_1+bx_2 \quad 和 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=f_2=bx_1+2cx_2$$

注意 $\partial f/\partial x_1$ 本身仍是一个关于 x_1 和 x_2 的二元函数，因此它的值和 x_1,x_2 都有关，也和 a,b,c 这些参数有关。

2. $y=f(x_1,x_2)=5e^{ax_1+bx_2}$，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=f_1=ae^{ax_1+bx_2} \quad 和 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=f_2=be^{ax_1+bx_2}$$

3. $y=f(x_1,x_2)=a\ln x_1+b\ln x_2$，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=f_1=\frac{a}{x_1} \quad 和 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=f_2=\frac{b}{x_2}$$

注意，求 x_1 的偏导数$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$时将 x_2 看成一个常数，从而偏导数中没有 $b\ln x_2$ 项。与我们前面举的例子不同，在这种情况下，该函数关于 x_1 的变化是独立于 x_2 的。而在一般情况下，x_1 的变化对 y 的影响是与 x_2 有关的。

2.2.3 偏导数与其他条件不变的假设

在第 1 章中，我们介绍过经济学家在他们的模型中使用其他条件不变的假设，令其他影响结果的变量为常数，从而研究简化情形下特殊的相互关系。偏导数是表示这种关系的准确的数学形式，即它们显示了在其他变量为常值时一个变量发生变化对结果的影响，这正是经济学家的模型中所需

要的。例如，马歇尔需求曲线显示了在其他变量为常数时，价格(p)与需求量(q)之间的关系。利用偏导数，我们可以用曲线的斜率 $\partial q/\partial p$ 来表示**其他条件不变的假设(ceteris paribus)**。当其他因素不变时，价格与数量负相关的需求定律对应数学命题“$\partial q/\partial p<0$”。而只要我们用了偏导数，就等价于使用了其他条件不变的假设。

2.2.4 偏导数的计量单位

在数学中，我们对变量用什么单位计量关心得比较少。但是在经济学中，每一个变量都有现实意义，因此它们的计量单位就很重要。偏导数取什么计量单位往往能反映我们研究的是什么样的经济问题。比如，用 q 表示美国某年全年的汽油消费量(单位是10亿加仑)，p 表示每加仑汽油多少美元，那么 $\partial q/\partial p$ 就表示价格每变动1美元，全年消费量变动多少个10亿加仑。显然偏导数的值和变量取的单位是有关的，把 q 的单位换成100万加仑，导数值就扩大1 000倍；把 p 的单位换成美分，导数值就缩小100倍。

偏导数和度量单位相关的特点给经济学家平添不少麻烦。只研究某些变量的符号还好办，一旦涉及具体数量，数量的大小就和研究人员当时选取的单位有关。这样，要想在全世界各种不同的计量单位体制下作比较就非常困难。为此，经济学家在定量研究中引入了一种与单位无关的计算方法。

2.3 弹性的通用定义

经济学家几乎在所有自己感兴趣的变量关系中都会引入“弹性”这个概念。弹性反映的是一个变量的变化比例对另一个变量的变化比例的影响，所以在计算时单位被约掉了。例如，假设 x 是函数 y 的一个变量(y 可以是多元函数)，那么 y 关于 x 的弹性(记为 $e_{y,x}$)定义为

$$e_{y,x}=\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{x}{y} \tag{2.12}$$

注意，不管 x，y 取什么单位，它们都会被约掉。并且由于在多数经济状态下，x 和 y 都是正数，因此偏导数 $\partial y/\partial x$ 和弹性 $e_{y,x}$ 符号相同。这样，一些理论上关于 $\partial y/\partial x$ 正负号的预期可以沿用到与它们相关的弹性上。

弹性概念的具体应用会贯穿全书，包括你所熟知的价格的需求弹性和供给弹性，并且许多用弹性可以表述得最为清楚的新概念也将被介绍到。

例 2.2

弹性及其函数形式

从式2.12可看出弹性是针对函数的一点而言的，同一函数不同点的弹性一般是不同的。为了讲清这一点，我们看一个简单的例子，即 y 是 x 的线性函数

$$y = a + bx + 其他项$$

这样，有

$$e_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = b \cdot \frac{x}{y} = b \cdot \frac{x}{a + bx + \cdots} \tag{2.13}$$

显然 $e_{y,x}$ 不是常数。所以对于线性函数，一定要说清弹性是哪一点的弹性。

如果 y 是 x 的指数函数，则

$$y = ax^b$$

弹性就是常数，和取点无关

$$e_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = abx^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^b} = b$$

也可以对函数两边取对数

$$\ln y = \ln a + b\ln x$$

就有

$$e_{y,x} = b = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} \tag{2.14}$$

也就是说，弹性是对数项 $\ln y$ 对 $\ln x$ 的导数。对很多的有指数形式的函数来说，先取对数再计算大概是最方便的做法。

请回答：还有没有别的形式的函数，像指数函数一样，至少在某一区间上具有弹性恒定不变的特点？

2.3.1 二阶偏导数

类似单个变量的函数的二阶导数，偏导数的偏导数称为二阶偏导数。可写成

$$\frac{\partial(\partial f/\partial x_i)}{\partial x_j}$$

或者更简单地，有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij} \tag{2.15}$$

对于上面的例子，有

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = f_{11} = 2a$

   $f_{12} = b$

   $f_{21} = b$

   $f_{22} = 2c$

2. $f_{11} = a^2 e^{ax_1 + bx_2}$

   $f_{12} = abe^{ax_1 + bx_2}$

$$f_{21} = abe^{ax_1 + bx_2}$$

$$f_{22} = b^2 e^{ax_1 + bx_2}$$

3. $f_{11} = \dfrac{-a}{x_1^2}$

$$f_{12} = 0$$

$$f_{21} = 0$$

$$f_{22} = \frac{-b}{x_2^2}$$

2.3.2 杨格定理

这些例子说明在一般情况下(两个混合偏导数都连续的情况下),可以证明二阶偏导数与计算次序无关。即,对于任意一对变量 x_i 和 x_j

$$f_{ij} = f_{ji} \tag{2.16}$$

这个结论有时被称作"杨格定理"(Young's theorem)。对于这个定理的直观解释,我们可以回到爬山的类比上。爬山时,旅行者爬行的高度取决于爬行的方向和距离,而不取决于路程的次序。也就是说,只要旅行者从一个位置出发,他爬行的高度与实际路径无关。例如,他向北走一英里,然后向东走一英里或者以相反的次序先向东走一英里,然后向北走一英里,无论哪一种情形,爬行的高度都是相同的,因为这两种情形下旅行者都是从一个具体位置到另一个位置。以后的章节中,我们会经常使用这个结论,因为它为证明经济模型对行为的一些预测提供了方便。①

2.3.3 二阶偏导数的应用

二阶偏导数在本书的很多模型中占有重要地位,其中最重要的应该是关于某一变量自身的二阶导数 f_{ii},它反映了 x_i 对 y 的**边际影响率(marginal effectiveness)**$\left(即\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right)$随 x_i 变化的情况。f_{ii} 为负就是常说的"边际影响率递减"的数学表达。类似地,交叉导数项 f_{ij} 刻画了 x_i 的边际影响率随 x_j 变化的趋势,它的符号是正还是负都有可能。杨格定理告诉我们,一般来说这种交叉影响是对称的。更数学化的讲法是,二阶导数刻画了函数图像的凹凸性质。稍后我们会看到,这对于判定某点是否为极值非常重要。

2.4 多元函数的最值问题

利用偏导数我们现在可以讨论多元函数的最大化问题。回忆一下一元函数求极值的做法有助于我们理解这个问题:在只有一个变量的情况下,我们可以想象对 x 作一个很小的变化,即变化 dx,

① 杨格定理保证了函数的二阶偏导数形成的矩阵是对称矩阵,这种对称性反映了很多经济规律的本质,关于矩阵代数在经济学的应用可参见本章的扩展部分。

并观察 y 的变化(叫做 dy)。这个变化由下式给出

$$dy = f'(x)dx \tag{2.17}$$

方程 2.17 说明了 y 的变化等于 x 的变化乘以函数的斜率。这个公式等价于初等代数线性方程中的点斜式。与以前一样,对于 x 围绕最优点的微小改变,最大化的必要条件是 $dy=0$。否则,x 的适当变化会使 y 增加。因为在方程 2.17 中 dx 不一定等于 0,$dy=0$ 一定意味着在期望的点上,$f'(x)=0$。这样,我们用微分的形式又一次得到取得极值的条件。

运用这种方法,我们看一下经济人必须进行的对多个变量大小的选择决策。假设经济人希望得到使 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的值最大化的一组 x_i。经济人可以考虑仅仅改变 x 的一个分量,例如 x_1,而其他变量为常数。由 x_1 的变化导出 y 变化(即 dy)的公式如下

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 = f_1 dx_1$$

这说明 y 的变化等于 x_1 的变化乘以函数在 x_1 方向上的斜率。再次运用爬山的比喻,说明攀登者向北爬行的高度等于向北的距离乘以山向北方向的倾斜度。

2.4.1 全微分

如果所有 x 都发生一个微小的变化,那么对 y 的总效应是上述所有效应的和。因此 y 的改变量记为

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n \end{aligned} \tag{2.18}$$

这个表达式叫做 f 的全微分,非常类似于方程 2.17 单变量情况下的表达式。这个方程的直观意义是:y 的总变化是每一 x 的变化引起的变化之和。[①]

2.4.2 极值的一阶条件

函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 取最大值(或者最小值)的必要条件是对于任意 x 的微小变化的组合都有 $dy=0$,这样该点必有

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0 \tag{2.19}$$

方程 2.19 成立的点叫做**临界点(critical point)**。方程 2.19 是局部极值的必要条件。直观地看,就是如果存在一个 $f_i \neq 0$,就能通过对 x_i 作微小改变使函数值增加或减少。所以经济人可以通过找到

① 在式 2.18 的全微分公式上可以应用链导法则。设 $y=f(x_1,x_2)$ 且 $x_1=g(z)$,$x_2=h(z)$。那么可以这样计算 z 对 y 的影响:y 的全微分是

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dy_2$$

两边除以 dz,得

$$\frac{dy}{dz} = f_1\frac{dx_1}{dz} + f_2\frac{dx_2}{dz} = f_1\frac{dg}{dz} + f_2\frac{dh}{dz}$$

这样,计算 z 对 y 的影响可以通过计算 z 对 y 的两个自变量的影响来实现。对于二元以上的函数,类似的结论同样成立。这个结论提醒我们,考虑多元函数的偏导数问题时一定要考虑到全部可能的影响。

这样的点，即在该点对任一 x 作微小改变都不影响 y 来找极值点。对经济分析来说，这是极其重要的结果。它说明 x 指向目标的任何活动在目标点时对 y 的“边际”贡献为 0，在自变量达到这样的条件之前 y 不可能是极值。

例 2.3

求解最大值

假定 y 是 x_1 和 x_2 的函数，有

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \tag{2.20}$$

或者

$$y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5$$

例如，y 表示某个人的健康（测度指标从 0 到 10），而且 x_1 与 x_2 是两种保健药的日剂量。我们希望找到 x_1 与 x_2 的值使得 y 尽可能地大。取 y 相对于 x_1 和 x_2 的偏导数，应用方程 2.19 给出的必要条件导出

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= -2x_1 + 2 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= -2x_2 + 4 = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

或者

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 2$$

因此 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 是函数的临界点。在该点上，$y = 10$ 是可能得到的最好的健康状况。经验证明这是 y 可能取到的最大值。例如，如果 $x_1 = x_2 = 0$，则 $y = 5$；或者如果 $x_1 = x_2 = 1$，则 $y = 9$。如果 x_1 与 x_2 的值分别大于 1 和 2，则 y 会递减。因为方程 2.20 中的负的二次项变大。从而，应用必要条件找到的点实际上是局部（与整体）最大的点。①

请回答：假设 y 取一固定值（例如 5），x_1 与 x_2 之间的关系看上去是一种什么关系？$y = 7$ 呢？或者 $y = 10$ 呢？（这些图形是函数的等高线，更多的细节参见第 3 章。亦可参见本章练习题 2.1。）

2.4.3 二阶条件

然而，方程 2.19 的条件不能保证最大化。仍然用爬山的比喻来解释这一点：所有的山顶（至少在局部）都是平的，但不是每一个平的点都是山顶。需要类似方程 2.6 的二阶条件来确保运用方程 2.19 得到的点是局部最大的。直观地说，对于局部最大化，x 远离临界点的任何一个很小的变化，y 都将随之递减。与单变量的情形一样，f 的二阶偏导数刻画了其这方面的性质。如果运用方程 2.19

① 更准确地说，$x_1 = 2, x_2 = 2$ 处是函数的最大值，因为函数是凹的。（更详细的分析见本章后面的讨论）。

得到的临界点是局部最大值点，则这些二阶偏导数必须满足某些条件（类似一元函数的二阶导数大于0的条件）。这些条件将在本章的附录中作简要讨论。

2.5 隐函数

尽管数学方程通常写成"因"变量(y)作为一个或者多个独立变量(x)的函数，但这种关系并不是只有这样一种形式。例如，一个简单的方程

$$y = mx + b \tag{2.22}$$

也可写成

$$y - mx - b = 0 \tag{2.23}$$

甚至可更一般地写成

$$f(x, y, m, b) = 0 \tag{2.24}$$

式中这个函数记号表示 x 与 y 之间的关系，这种关系还取决于方程的不变的参数——斜率(m)与截距(b)。写成这种形式的函数有时叫做隐函数，因为变量与参数之间的关系是隐含地给出而不是明显地给出，如 y 是 x 和参数 m 与 b 的函数。有时隐函数能够简单地写成显函数。例如，隐函数

$$x + 2y - 4 = 0 \tag{2.25}$$

能够简单地"解出"x

$$x = -2y + 4 \tag{2.26}$$

或者

$$y = \frac{-x}{2} + 2 \tag{2.27}$$

2.5.1 隐函数的导数

很多情况下，即使不解出 y 的显式表达，对隐含数直接求导也能得到有用的信息。比如对隐含数 $f(x,y)=0$ 求全微分，有：$0=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y} \tag{2.28}$$

这样，当 $f_y \neq 0$ 时，通过两个偏导数的比值就能算出导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。

例 2.4

生产可能性边界——再次论述

在例1.3中，我们考察了两种商品的生产可能性边界，有

$$2x^2 + y^2 = 225 \tag{2.29}$$

或者，写成隐函数形式，有

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 225 = 0 \tag{2.30}$$

因此

$$f_x = 4x,\quad f_y = 2y$$

由方程 2.28,x 与 y 之间替代的机会成本是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y} \tag{2.31}$$

这和前面的结果完全一样。

请回答:为什么 x 与 y 之间的替代率仅仅取决于 x 对 y 的比例,而并不取决于由常数 225 反映出的"经济规模"?

2.5.2 隐函数定理

$g(x,y)=0$ 并不总是唯一地对应 $y=f(x)$。数学家分析了一个给定的隐函数能够解出一个变量作为其他变量和其他参数的显函数的条件[隐函数定理(implicit function theorem)]。这里我们不深究这些条件具体是什么,但大多数情况下,隐函数是存在的,即给定参数和其他的自变量,因变量能够唯一地确定。[①] 在许多经济应用中,确保隐函数存在的条件正是确保极值点的二阶条件。隐函数只要存在,我们就可以把各个变量之间的偏导数求出来。

2.6 包络定理

隐函数理论中一个重要的结论叫做**包络定理(envelope theorem)**,在本书很多地方都将被用到。它研究的是当函数中某一参数变化时,最优值如何变化。因为我们研究的许多经济问题会涉及参数变化的影响(例如商品市场价格的变化对个人购买的影响),这是我们经常要进行的一类计算,有了包络定理这类计算会简化很多。

2.6.1 具体例子

理解包络定理的最简单的方法是看一个例子。假设 y 是单一变量(x)与参数(a)的函数

$$y = -x^2 + ax \tag{2.32}$$

对于参数的不同值 a,这个方程表示一簇反向抛物线。若 a 取特定值,方程 2.32 仅是 x 的函数,并且可计算出使得 y 最大化的 x 值。例如,如果 $a=1$,$x^*=1/2$,对应这一 x 与 a 的值,$y=1/4$(最大值)。类似地,如果 $a=2$,$x^*=1$,则 $y^*=1$。因此参数 a 的值增加 1,y 的最大值增加 3/4。在表 2.1 中,a 取 0 与 6 之间的整数值,由此计算 x 的最大值和相应的目标函数 y 的值。注意当 a 增加时,y 的最大值也增加。由图 2.3 说明,a 与 y^* 之间的关系是二次的。现在我们希望计算当参数 a 变化时 y^* 是怎样变化的。

① 关于隐函数定理的介绍,参见 Carl P. Simon and Lawrence Blume, *Mathematics for Economists* (New York: W. W. Norton, 1994), chap. 15。

表 2.1　在 $y=-x^2+ax$ 中，a 变化时相应带来的 x 的值与 y 的最大值的变化情况

a 值	x^* 值	y^* 值
0	0	0
1	1/2	1/4
2	1	1
3	3/2	9/4
4	2	4
5	5/2	25/4
6	3	9

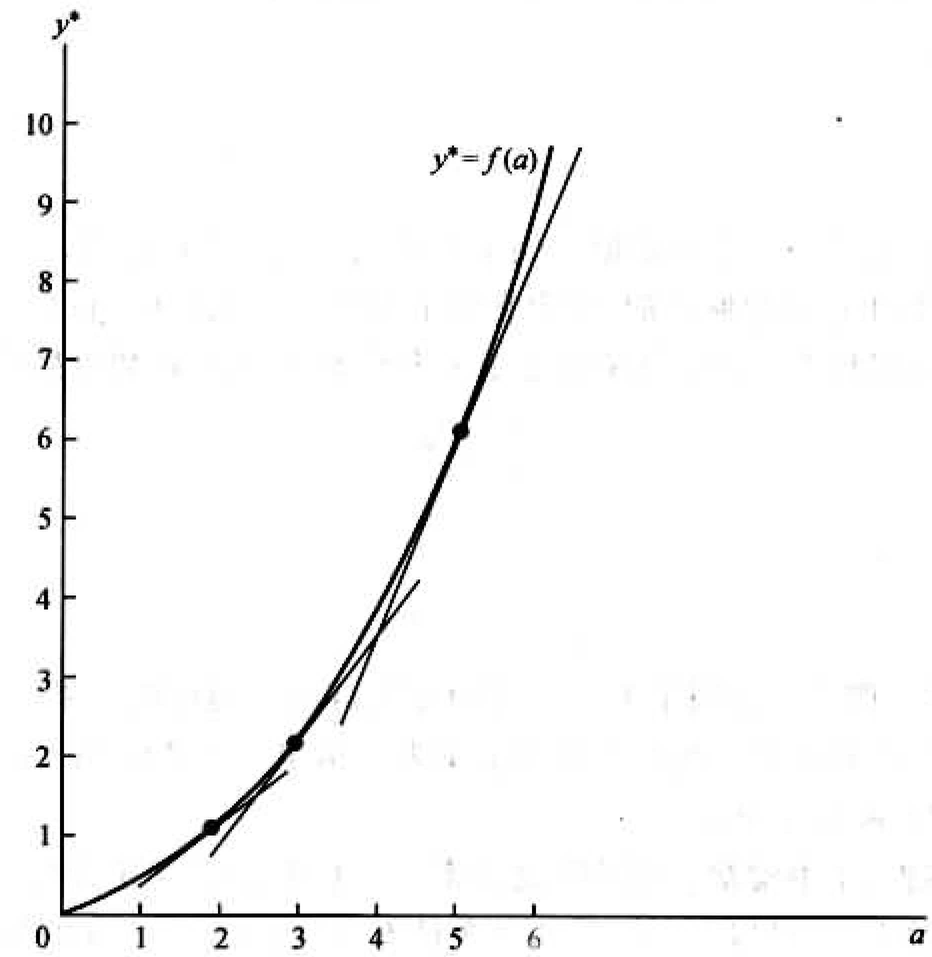


图 2.3　包络定理的说明

包络定理表明，y^*（y 的最大值）与参数 a 之间的关系可以通过把对应的 x 的取值代入方程计算 $\partial y/\partial a$ 来获得。

2.6.2　麻烦的直接法

包络定理表明我们有两个等价的计算方法。第一，我们可以直接计算图 2.3 中方程的斜率。为此，我们首先对于任意 a 的值求解方程 2.32 中 x 的最优值

$$\frac{dy}{dx}=-2x+a=0;$$

从而

$$x^* = \frac{a}{2}$$

将 x 的这个值代入方程 2.32，有

$$y^* = -(x^*)^2 + a(x^*) = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$$

这就是图 2.3 所显示的关系。由以前的方程很容易看出

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} \tag{2.33}$$

例如，当 $a=2$ 时，$dy^*/da=1$。即当 $a=2$ 时，a 每增加 1，则 y^* 也增加 1。$a=6$ 时，a 的微小变化将导致 y^* 三倍于此的变化。

2.6.3 包络捷径

上述做法颇为麻烦，对于每一个 a 的值我们不得不先求出 x 的最优值，并将 x^* 的这个值代入方程求 y。在更复杂的函数下这是很麻烦的，因为它要求反复最大化目标函数。包络定理提供了一条捷径：对于 a 的很小变化可以在 x 的最优值点上令 x 为常数，对目标函数直接计算 $\partial y/\partial a$ 得出。即

$$\frac{\partial y}{\partial a} = x \tag{2.34}$$

在 x^* 处，有

$$\frac{\partial y^*}{\partial a} = x^* = \frac{a}{2} \tag{2.35}$$

这恰好与以上结论相同。图 2.3 说明了为什么两种方法得出了同样的结果。对于 $a=2$，方程 2.31 给出的线性关系是曲线 y^* 的斜率。图中曲线的斜率表示给定 x 不变时 $\partial y/\partial a$ 的值。再将 $x=x^*$ 代入，自然有 $y=y^*$，也就是我们要求的。

这个结论很有普遍性，本书常常会用其简化计算。综上所述：包络定理就是考察函数 $y=f(x)$ 的极值 y^* 关于参数 a 的关系时，可以固定所有的自变量不变，再求 y 关于 a 的偏导数，最后将 x^* 代入偏导数的表达式中求出，即

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial y}{\partial a}\{x = x^*(a)\} \tag{2.36}$$

强调一下，我们要求的是 $\partial y/\partial a$ 这个偏导函数在 $x=x^*$ 的值。

2.6.4 多变量情形

对于 y 是多变量的函数，类似的包络定理仍然成立。假设 y 取决于一组 $x(x_1,\cdots,x_n)$ 与特殊参数 a，

$$y = f(x_1,\cdots,x_n;a) \tag{2.37}$$

求 y 的最优值要解 n 个一阶方程

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.38}$$

在这个过程中会得出这些 $x(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 的最优值，它们显然依赖于参数 a。假设方程满足二阶条件，应用隐函数定理我们能够求出每一个 x_i^* 作为参数 a 的显函数

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(a) \\ x_2^* &= x_2^*(a) \\ &\vdots \\ x_n^* &= x_n^*(a) \end{aligned} \tag{2.39}$$

将这些函数代入原来的目标（方程 2.37）得出一个表达式，y 的最优值（y^*）取决于对 x^* 有直接与间接影响的参数 a。

$$y^* = f[x_1^*(a), x_2^*(a), \cdots, x_n^*(a), a]$$

对这个关系式关于 a 求微分得

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}a} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}a} \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}a} + \frac{\partial f}{\partial a} \tag{2.40}$$

但是，由于方程 2.35 的一阶条件，如果 x 是它们的最优值，除最后一项外的其他各项都是 0。因此，我们再次获得包络结果

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}a} = \frac{\partial f}{\partial a} \tag{2.41}$$

由于假设所有 x 已调整为最优值，因此参数变化所导致 y 的最优值的变化能够直接通过对原函数求偏导得到。

例 2.5

包络定理：再论健康状况

在例 2.3 中我们考察过健康状况函数

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \tag{2.42}$$

得到

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 2 \tag{2.43}$$

和

$$y^* = 10$$

假设现在我们用任意参数 a 替代方程 2.42 中的常数 10。这里 a 代表一个人可能有的最好健康状况的测度，但是显然这个值因人而异。因此

$$y = f(x_1, x_2, a) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + a \tag{2.44}$$

这里，x_1 与 x_2 的最优值不依赖于 a（它们总是 $x_1^* = 1, x_2^* = 2$），因此在最优值我们有

$$y^* = a \tag{2.45}$$

和

$$\frac{dy^*}{da} = 1 \tag{2.46}$$

假如选择最优的 x_1 与 x_2，具有"自然健康状况"的人们拥有更高的 y^* 值。但是由于方程 2.41，因此有

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial a} = 1 \tag{2.47}$$

这正是包络定理的结果。(假设正确选择 x_1 与 x_2 的剂量)参数 a 的增加导致最优值 y^* 增加相同的量。

请回答：假设我们将方程 2.42 中 x_1 的最优剂量由参数 b 来代替 1，请用文字与数学解释为什么此时 $\partial y^*/\partial b$ 必为 0。

2.7 条件极值

到现在为止我们一直研究的是求解在 x 的选择上没有约束的函数的最大值。然而在多数经济问题中并不是 x 的任意值都是可行的，例如在很多情况下要求 x 为正。企业经理决定产量以使收益最大化的问题时，负的产量就是没有意义的。在其他例子中 x 可能会受到不同的经济约束。例如，考虑消费者选择何种物品消费时，他不能想要多少就买多少，而是要受购买力的约束，即受预算约束限制。这样的约束可能降低我们所寻求要最大化的函数的最大值。因为我们不能在所有 x 中任意选择，所以 y 可能达不到最大值。如果无论有或没有提出约束，我们都能够得到相同水平的 y，约束条件就称为"没有约束力"的约束条件。

2.7.1 拉格朗日乘数法

解具有约束条件求最大化问题的一种方法是**拉格朗日乘数法(Lagrangian multiplier method)**。这种方法有着灵活的数学形式，这种形式被证明有有效的经济学解释。[①] 在上一节我们讨论了局部最大的必要条件。证明了在最优点 f 的所有偏导数都等于 0。所以，对于 n 个未知数有 n 个方程($f_i = 0, i = 1, \cdots, n$)。一般地，这些方程能够解出最优的一组 x。当自变量有约束条件时，至少有一个附加方程(约束条件)没有附加变量。因此有多余的方程。拉格朗日乘数法引进一个附加变量(拉格朗日乘数)，不仅有助于顺利地解决问题(因为现在对于 $n+1$ 个未知数有 $n+1$ 个方程)，而且在不同的经济问题中本身具有经济学含义，可以说明一些问题。

① 详细的表达式，参见 A. K. Dixit, *Optimization in Economic Theory*, 2nd ed. (Oxford University Press, 1990)。

2.7.2 正式的表达式

更具体地，假设我们希望求解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值，以便最大化下式

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.48}$$

其中部分自变量是有限制的，但可以将约束条件一般性地记为

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \tag{2.49}$$

其中函数① g 表示所有 x 满足的关系。

2.7.3 一阶条件

我们从以下表达式开始对拉格朗日乘数法的分析

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.50}$$

式中 λ 是附加变量，叫做拉格朗日乘数。以后我们将解释这个新变量的经济学意义。现在，我们首先注意当约束条件成立时 $\mathscr{L} = f$ [因为 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$]。从而让所有的 x 满足约束条件，求解 f 的最大值的问题与求解 $\mathscr{L}$ 的极值点问题完全等价。让我们把 λ 也当做一个 x 之外的变量。根据方程 2.50，有一阶条件为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= f_1 + \lambda g_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= f_2 + \lambda g_2 = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} &= f_n + \lambda g_n = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0
\end{aligned} \tag{2.51}$$

因此方程 2.51 是函数 $\mathscr{L}$ 的极值点满足的条件。注意，对于 $n+1$ 个未知数有 $n+1$ 个方程（每一 x 对应一个方程，最后一个方程对应 λ）。一般地，方程能够解出 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 λ 的值。此解满足两个性质：(1) x 服从约束条件，因为方程 2.51 的最后一个方程就是约束条件；(2) 所有这些服从约束条件的 x 也满足方程 2.51 使得 $\mathscr{L}$（与 f）尽可能大。因此拉格朗日乘数法提供了我们在本节开始提出的具有约束条件的最大化问题的一个求解方法。②

方程 2.51 的解与没有约束条件情况下（见方程 2.19）的解不一样。除了所有的 x 的边际贡献是 0 以外，方程 2.51 还必须满足约束条件。只有约束条件无效（下面我们将要看到，此时 $\lambda = 0$）时，具

---

① 我们前面已经说明，任何关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数都能写成隐函数形式。比如约束条件 $x_1 + x_2 = 10$ 可以写成 $10 - x_1 - x_2 = 0$。后面我们处理约束条件问题时都将其写作隐函数的形式，并且我们涉及的约束条件多半都是线性的。

② 严格地说，这只是可行域内部的局部极大值的必要条件。有的经济学问题中最大值在约束条件的边界上达到，这时我们必须调整条件以考虑到此种情况。比如如果要求所有自变量非负，式 2.51 就不一定成立。下面不等式约束一节将详细讨论这个问题。

有约束条件的问题与没有约束条件的问题（和它们的解）才是一样的。也就是说，条件极值满足的条件更强。这种加强的条件一般是有经济意义的。

2.7.4 拉格朗日乘数的解释

到现在为止，我们仅把拉格朗日乘数（λ）作为数学“技巧”来求解我们的问题。事实上，这一变量还有重要的经济含义，这表现在我们对很多重要问题的分析中。为了说明其经济含义，我们把方程2.51的前 n 个方程写成

$$\frac{f_1}{-g_1}=\frac{f_2}{-g_2}=\cdots=\frac{f_n}{-g_n}=\lambda \tag{2.52}$$

换句话说，在最大化点，对于每一 x_i，f_i 与 g_i 的比例相同。但是方程2.52的分子是每一 x 对函数 f 的边际贡献。它们说明多于一单位的 x_i 对于我们寻求最大化的函数（即 f）有**边际收益（marginal benefit）**。

对式2.51的进一步解释将留到实际应用中碰到时再完成。这里我们要讲的是所谓的“边际成本”解释。即，式2.52中的 g 反映了多获取一点点 x 需要承担的预算负担。比如说，假设 x_1，x_2 两种商品上的花费是给定的，设为 F。这样，预算约束就是 $p_1x_1+p_2x_2=F$（p_i 是每单位商品的成本），它可以写成隐含数形式

$$g(x_1,x_2)=F-p_1x_1-p_2x_2=0 \tag{2.53}$$

这时有

$$-g_i=p_i \tag{2.54}$$

可见 $-g_i$ 确实反映了 x_i 的边际成本。事实上，以后碰到的每个最大化问题对式2.52分母的解释基本都是这样的。

2.7.5 作为收益—成本比的拉格朗日乘数

现在我们给出方程2.52的直观解释。它们表示对于任意 x，在得到 x 的最优选择时，增加 x_i 的边际收益与增加 x_i 的边际成本的比率是相同的。这个结论显而易见。假设“成本—收益比率”在 x_1 比在 x_2 时高，此时我们可以稍微增加 x_1 以使其达到最大化。这可以通过增加 x_1 的投入，同时相应减少足够的 x_2 以保持 g（约束条件）不变来说明。因此增加 x_1 的边际成本应该等于使用较少的 x_2 的成本减少额。但是，因为 x_1 的成本—收益比率比 x_2 的大，增加使用 x_1 的收益增加额大于减少使用 x_2 的收益减少额。因为 x_1 提供了更多的“刺激”，增加 x_1 且适当减少 x_2 可以增加 y。如果仅当边际收益—边际成本比率对于所有的 x 都相等时达到局部最大值，这时 x 的任意小变化都不能增大目标函数。它作为微观经济学的一个基本结论，其应用将贯穿全书。

拉格朗日乘数（λ）还能按照下面的讨论来解释。λ 是对于所有 x 的成本—收益的共同比率。即对于所有 x_i，

$$\lambda=\frac{x_i\text{ 的边际收益}}{x_i\text{ 的边际成本}} \tag{2.55}$$

如果约束条件稍微放松，增加的预算用来购买任何一个 x 的结果是相同的，因为在边际状况下，每一

个 x 都有相同的收益对成本的比率。拉格朗日乘数提供了稍微放松约束条件将对 y 的值产生所有的影响的测度。事实上 λ 是约束条件的“影子价格”。较大的 λ 表示约束条件放松，y 增加得多，因为对于每一个 x 有了一个更高的收益—成本比率。相反，较小的 λ 表示放松约束条件没有太多改变。如果约束条件根本没有限制，λ 则为 0，这表示约束条件没有限制 y 的值。在此情况下，求解具有约束条件的 y 的最大值等价于求解没有约束条件的最大值。此时约束条件的影子价格是 0。利用本章后面所描述的包络定理也可以表明 λ 的经济含义。①

2.7.6 对偶

以下的讨论表明具有目标约束的函数最大化问题与约束的取值问题之间有很明显的关系。它反映的是所谓的数学的“对偶”原理：任何约束最大化问题对偶于关注原始（“最初”）约束条件的约束最小化问题（**minimization**）。例如，经济学家假设个人在预算约束条件下寻求效用最大化，这是关于消费者的初始问题。其对偶问题即消费者的最小化问题是达到给定效用水平所需的支出最小化。类似地，厂商的初始问题是生产给定水平的产出投入总成本最小化，因此，其对偶问题是给定投入成本，使其产出最大化的问题。在以后的章节中将讨论很多这类问题。这些问题都表明，总是有两个角度去考虑约束条件下最优化的问题，有时正面的分析就能够解决问题；有时，采用相反的办法，即考虑其对偶问题可能更好。不论采取何种方法，结果一般是一致的（但也有例外），所以选择哪种方法主要考虑是否方便。

例 2.6

约束条件下的最大化：三论健康状况

我们再次回到健康最大化问题上来（估计你已经觉得有点烦了）。和以前一样，个人目标是最大化下式

$$y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5$$

但是现在假设 x_1 与 x_2 的选择要受个人每天只能承受一剂药的限制。即

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{2.56}$$

或者

$$1 - x_1 - x_2 = 0$$

注意，因为可接受剂量的约束使原来的最优点（$x_1 = 1, x_2 = 2$）取不到了，我们必须另求其他值。为此我们首先写出拉格朗日表达式

$$\mathscr{L} = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda(1 - x_1 - x_2) \tag{2.57}$$

对 x_1, x_2 与 λ 微分得到下面有约束的最大值的必要条件

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 - \lambda = 0$$

① 本节讨论的是单一约束条件的情况，对于多个约束条件，只要引入多个拉格朗日乘数即可，求解的过程是类似的。

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 1 - x_1 - x_2 = 0 \tag{2.58}$$

解出 x_1, x_2 与 λ 的最优值，利用前两个方程得到

$$-2x_1 + 2 = \lambda = -2x_2 + 4$$

或者

$$x_1 = x_2 - 1 \tag{2.59}$$

将 x_1 的值代入约束条件式 2.53 得到解

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 0 \tag{2.60}$$

因此，如果这个人仅能承受一剂药，则他应该吃第二种。将该结果代入式 2.58 中前两个方程的任何一个，很容易得出我们的解

$$\lambda = 2 \tag{2.61}$$

这就是具有约束条件的最大化问题的解。如果 $x_1 = 0, x_2 = 1$，则 y 取值 8。对 x_1 与 x_2 的和为 1 这个限制使健康状况最大值 y 从 10 降到 8。

请回答：假设这个人每天可以承受两剂药。你认为 y 会增加吗？每天可以承受的药超过三剂对 y 会有影响吗？

例 2.7

最优篱笆与有约束的最大化

假设一个农场主有长度为 P 的篱笆，想围一块面积最大的长方形。农场主将选择什么样的形状呢？这是一个具有约束条件的最大化问题。为了解决这个问题，设 x 是长方形一边的长度，y 是另一边的长度。现在的问题变成通过选择 x 与 y 使得所围面积（面积 $A = xy$）最大化，其约束条件是参数被固定在 $P = 2x + 2y$。

写出与方程 2.47 一样的拉格朗日表达式，有

$$\mathscr{L} = x \cdot y + \lambda(P - 2x - 2y) \tag{2.62}$$

其中 λ 是未知的拉格朗日乘数。最大化的一阶条件是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= y - 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= x - 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= P - 2x - 2y = 0
\end{aligned} \tag{2.63}$$

式 2.63 中的三个方程联立起来才能解出 x, y 与 λ。前两个方程可得出：$y/2 = x/2 = \lambda$，x 必等于 y（若是面积则平方即可）。这还意味着可以选出 x 与 y 使得对于这两个变量的边际收益与边际成本之比相同。增加 1 单位 x 的收益（对于面积）由 y 给出（面积增加 $1 \cdot y$），边际成本（参数项）是 2（x

边的长度增加 1 个单位这个参数减少 2)。最大化条件说明这个比率与每一变量的比率都相等。

因为我们已经证明 $x=y$,利用约束条件则有

$$x = y = \frac{P}{4} \tag{2.64}$$

因为 $y=2\lambda$,有

$$\lambda = \frac{P}{8} \tag{2.65}$$

拉格朗日乘数的解释。如果农场主对于增加 1 码篱笆所围面积的增加数量感兴趣,拉格朗日乘数认为该增加量可以等于周长的 1/8。用具体的数据来说明则更清楚。假设土地周长为 400 码,如果是"最优化"的设计,则这块土地应为边长为 100 码($=P/4$)的正方形,所围面积是 10 000 平方码。现在假设周长(即篱笆长度)增加 1 码,方程 2.65"预测"总面积增加约 50($=P/8$)平方码。事实确实如此,说明如下:因为现在周长为 401 码,正方形的每一边是 401/4 码,因此土地总面积是 $(401/4)^2$,通过计算可得 10 050.06 平方码。从而与拉格朗日乘数法(预测)得到出的增加 50 码的结果非常近似。正如在所有约束条件下的最大化问题一样,拉格朗日乘数法提供了约束条件隐含值的有效信息。

对偶。这个约束条件下的最大化问题的对偶问题是:对于面积给定的矩形土地,农场主希望以最小长度的篱笆围住它。从数学上来说,这个问题是最小化

$$P = 2x + 2y \tag{2.66}$$

约束条件是

$$A = x \cdot y \tag{2.67}$$

建立拉格朗日表达式

$$\mathscr{L}^D = 2x + 2y + \lambda^D(A - x \cdot y) \tag{2.68}$$

(其中 D 表示对偶的概念)导致下面最小化的一阶条件

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}^D}{\partial x} &= 2 - \lambda^D \cdot y = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}^D}{\partial y} &= 2 - \lambda^D \cdot x = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}^D}{\partial \lambda^D} &= A - x \cdot y = 0
\end{aligned} \tag{2.69}$$

与前面一样,求解这些方程得到结果

$$x = y = \sqrt{A} \tag{2.70}$$

同样,如果篱笆长度最小,则土地为正方形。在此问题中,拉格朗日乘数的值是

$$\lambda^D = \frac{2}{y} = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{A}} \tag{2.71}$$

与前面一样,拉格朗日乘数法说明目标(篱笆长度最短)和约束条件(所围土地的面积)的关系。如果土地是 10 000 平方码,和以前一样,所需篱笆长度是 400 码。增加 1 平方码的土地,要求篱笆增加 0.02($=2/\sqrt{A}=2/100$)码。读者可以用计算器来证实这个结果——边长为 100.005 码的篱笆所围面积为 10 001 平方码。正如大多数对偶问题一样,对偶的拉格朗日乘数的值是原问题拉格朗日乘数的倒数。尽管它们在某种意义上具备不同形式,但是反映的内容相同。

请回答:这里暗含了一个约束条件:农场主的土地是长方形的。如果不提这个约束条件,土地面积最大的形状是什么形状?你是如何证明这一点的?

2.8 约束条件下的最大化问题中的包络定理

我们以前讨论的没有约束条件的最大化问题中的包络定理在约束条件下的最大化问题中有重要应用。这里我们提供的仅是定理的简单形式。在以后的章节中我们将介绍它的应用。

假设我们求解以下函数的最大值

$$y = f(x_1, \cdots, x_n; a) \tag{2.72}$$

其变量服从约束条件

$$g(x_1, \cdots, x_n; a) = 0 \tag{2.73}$$

这里我们很清楚函数 f 与 g 对参数 a 的依赖性。跟以前的方法一样,求解这个问题的一种方法是建立拉格朗日表达式

$$\mathscr{L} = f(x_1, \cdots, x_n; a) + \lambda g(x_1, \cdots, x_n; a) \tag{2.74}$$

求解最优值 $x_1^*, \cdots, x_n^*$ 的一阶条件(见方程 2.51)。它可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a}(x_1^*, \cdots, x_n^*; a) \tag{2.75}$$

即当参数 a 的改变(与所有重新计算的 x'的最优值)导致 y 的最优值的改变可由对拉格朗日表达式求偏导数,(方程 2.74)再将极值点的数据代入得到。[①] 因此拉格朗日表达式在计算约束条件下的问题和没有约束条件的问题应用包络定理时起一样的作用。作为简单的练习,读者可以证明这个结果在处理例 2.7 的长方形土地篱笆问题时成立。[②]

2.9 不等式形式的约束条件

在某些经济问题中,约束条件不一定是等式。比如一个人的预算约束只要求他在一定时期内的消费不能超过他的收入,但并不排除他可以存下一些钱不消费。在多变量的问题中也有类似的问题,比如某些经济变量必须是非负的。下面我们来看这样的问题如何用拉格朗日乘数法处理。尽管这样的问题今后遇见的不多,但通过数学的刻画我们可以看清其中的一些基本原理是如何和我们的经济学直觉相一致的。

---

① 更详细的包络定理在条件极值问题中的应用,参见 Eugene Silberberg and Wing Suen, *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. (Boston: Irwin/McGraw-Hill, 2001), pp. 159—161。

② 该问题中我们关注的变量是周长 P。将取得最大值时 x, y 的表达式代入 A,得到 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}P = P/8$。对拉格朗日表达式求微分(式 2.62),得到$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial P} = \lambda$,在极值点,$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}P} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial P} = \lambda = \frac{P}{8}$。这样,从包络定理的角度也能看出拉格朗日乘数在某种意义上表现了约束条件的"重要度"。

2.9.1 两个变量的情况

为了避免变量太多看不清楚，我们先讨论只含两个变量的情况，再将其推广。假设我们要使 $y=f(x_1,x_2)$ 最大化，且自变量满足以下三个不等式约束条件

$$\begin{aligned}&1.\ g(x_1,x_2)\geqslant 0;\\&2.\ x_1\geqslant 0;\\&3.\ x_2\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2.76}$$

这样，我们就用数学的语言引入了不等式约束条件。

2.9.2 松弛变量(slack variable)法

一种处理的方法是引入三个新变量(a,b,c)将式 2.76 转化成等式。用平方即可保证不等式恒成立。这样，原约束条件变为

$$\begin{aligned}&1.\ g(x_1,x_2)-a^2=0;\\&2.\ x_1-b^2=0;\\&3.\ x_2-c^2=0.\end{aligned}\tag{2.77}$$

这两组约束条件是完全等价的。而且通过观察参数 a,b,c，我们能看到这一类问题的一些共性。

2.9.3 用拉格朗日法求解

转化成等式约束后，我们可以用拉格朗日法求解该问题。因为这里有三个约束条件，故需引入三个拉格朗日乘数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$。表达式为

$$\mathscr{L}=f(x_1,x_2)+\lambda_1[g(x_1,x_2)-a^2]+\lambda_2(x_1-b^2)+\lambda_3(x_2-c^2)\tag{2.78}$$

要使这八个变量$(x_1,x_2,a,b,c,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$的函数取得极值，就要满足以下八个一阶条件

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_1}&=f_1+\lambda_1g_1+\lambda_2=0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_2}&=f_2+\lambda_1g_2+\lambda_3=0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial a}&=-2a\lambda_1=0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial b}&=-2b\lambda_2=0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial c}&=-2c\lambda_3=0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \lambda_1}&=g(x_1,x_2)-a^2=0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \lambda_2}&=x_1-b^2=0\\\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \lambda_3}&=x_2-c^2=0\end{aligned}\tag{2.79}$$

这和我们之前的单一等式约束条件的情况很相似。比如最后三个只是重复约束条件,以保证约束条件得以满足。前两式和之前求解最大值的式子也差不多,如果 $\lambda_2=0,\lambda_3=0$,它们就完全一样了,但是这里多出来的拉格朗日乘数恰好说明不等式中的等号不一定成立。

2.9.4 松弛互补性(complementary slackness)

含有 a,b,c 的三式反映了不等式约束条件极值问题最重要的性质。比如式 2.79 的第三个方程表明 λ_1 和 a 必有一个为 0。[①] 当 $a=0$ 时,约束条件 $g(x_1,x_2)\geqslant 0$ 等号成立。λ_1 反映了该条件对目标函数 f 的相对重要程度。要是 $a\neq 0$ 而 $\lambda_1=0$,这表示该约束条件允许的松弛程度对目标函数没有任何意义。具体到消费者消费的例子上,这句话的意思就是如果消费者选择不把收入全部花掉,那么即使再多挣一些也不会增加他消费的效用。

在选择消费多少 x_1,x_2 上也有类似的关系。比如式 2.79 第四个方程要求 b 或 λ_2 为 0。如果 $\lambda_2=0$,说明极值点处有 $x_1>0$,第一个方程化为 $f_1+\lambda_1 g_1=0$,即对 x_1 的决策与 λ_1 满足收益—成本比率关系。如果是 $b=0$ 而 $\lambda_2>0$,即 $x_1=0$,则说明最优选择中不应包含 x_1,因为从 $f_1+\lambda_1 g_1<0$ 中可知对 x_1 的边际收益—成本比率为负。对于 x_2,情况是完全对称的。

这个结论[有时称之为库恩—塔克条件(Kuhn-Tucker conditions)]表明不等式约束条件和等式的约束条件在某些方面有所不同。但有时通过观察确定某些等号成立的条件,并把它直接当做等式约束条件也能得出正确结论。事实上,这才是本书后面主要用的方法。[②]

2.10 二阶条件

至此章我们已经知道,一个函数要在某点达到最大值必须满足的一阶必要条件。本书中大部分情况也只需考虑一阶条件,因为实际经济问题中满足导数为 0 的点大部分就是极值点。这一节我们简单分析一下极值点必须满足的二阶条件,并解释其凸性的经济学含义。

2.10.1 单变量函数

我们首先考虑具有单一变量的目标函数

$$y=f(x) \tag{2.80}$$

此函数在某点达到最大值的必要条件为:在点 x,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)=0 \tag{2.81}$$

我们也知道,如果对方程 2.81 给出的必要条件不加鉴别地应用,选出的点可能不是最大值点。为了确保此点确为最大值点,需验证远离此点时 y 递减。我们已知(根据式 2.81),对于 x 的微小变化,y

---

① 我们这里不考虑两者都为 0 的特殊情况。

② 当微积分的办法不能用的时候(如涉及的函数不可微),情况就会复杂得多,详见 Avinask K. Dixit, *Optimization in Economic Theory*, 2nd ed. (Oxford: Oxford University Press, 1990)。

的值不变，我们需验证 y 是否在“驻点”之前上升而之后下降。换句话说，我们要验证的就是在临界点，y 的变化是否在下降（由正到负）。我们已导出 y 的变化（dy）的表达式，由全微分给出

$$dy = f'(x)dx \tag{2.82}$$

此时要求当 x 微小增加时，dy 减少。方程 2.82 的微分为

$$d(dy) = d^2y = \frac{d[f'(x)dx]}{dx} \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2 \tag{2.83}$$

但由

$$d^2y < 0$$

可得出

$$f''(x)dx^2 < 0 \tag{2.84}$$

而且既然 dx^2 必然为正（任何平方均为正），可得

$$f''(x) < 0 \tag{2.85}$$

这就是所求的二阶条件。它要求函数在极值点是“凹”的（上凸的），请与图 2.1 和图 2.2 的图形作对比，类似的对凹凸性的要求这一节还会见到。

例 2.8

再谈利润的最大化

在例 2.1 中，我们考虑求解函数

$$\pi = 1\,000q - 5q^2 \tag{2.86}$$

的最大值问题。最大值的一阶条件要求

$$\frac{d\pi}{dq} = 1\,000 - 10q = 0 \tag{2.87}$$

或者

$$q^* = 100 \tag{2.88}$$

函数的二阶导数为

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -10 < 0 \tag{2.89}$$

因此，$q^* = 100$ 满足局部最大值的充分条件。

请回答：此时的二阶导数并不只在最大值点为负，而是总是负的。对最值点来说这意味着什么？二阶导数为常数又意味着什么？

2.10.2 二元函数

这里我们考虑第二种情况，即具有两个独立变量的函数

$$y = f(x_1, x_2) \tag{2.90}$$

我们已经知道这样的函数达到最大值的必要条件是函数对 x_1 与 x_2 的偏导数都是0。即

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=f_1=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x_2}=f_2=0 \tag{2.91}$$

满足式2.91的点为函数的"平"点($dy=0$ 的点),可能是函数的最大值点。为确保此点是一局部最大值点,必然有由临界点向各个方向移动时 y 均递减。直观地看,就是只有确保不管向哪个方向走都是下坡路,才能说这点是"山顶"。

2.10.3 直观的讨论

在描述这样的点所具备的数学性质以前,直观的解释是有帮助的。如果我们只考虑 x_1 的移动,所需条件则很明显:x_1 方向的斜率(即偏导数 f_1)在临界点将递减。这是一元函数结论的应用,在最大值点,x_1 方向的二阶偏导数必为负。对 x_2 方向来说,同样的结论也成立。因此,我们知道对于局部最大值点,它的二阶偏导数 f_{11} 与 f_{22} 均为负。以山峰来类比,如果只考虑东西方向或者南北方向,在经过山顶时山峰的斜率一定递减,斜率一定由正变为负。

如果初始点并不是单纯地沿着 x_1 或者 x_2 的方向移动,而是两个变量一起变化的情形(如,从东北方向到西南方向移动),则复杂性明显增加。此时单纯的二阶偏导数不能提供关于临界点附近斜率变化的全部信息。只有加上交叉偏导数的条件($f_{12}=f_{21}$)才能保证由临界点向任何方向移动时 dy 都递减。正如我们将见到的那样,这些条件等价于要求函数的二阶偏导数足够大以平衡任何可能的交叉偏导数的"异常"情形。直观地说,如果山峰南北方向与东西方向都很陡,那么可以用来补偿其他方向的相对小的坡度,以保证其总体仍是下坡。

2.10.4 正式的分析

现在我们对上述观点给出一个正式的表达。我们希望看到的是这些条件由二阶偏导数来表示,从而使得过临界点向任何方向移动时 d^2y 均为负。首先,函数的全微分为

$$dy=f_1dx_1+f_2dx_2 \tag{2.92}$$

dy 的微分是

$$d^2y=(f_{11}dx_1+f_{12}dx_2)dx_1+(f_{21}dx_1+f_{22}dx_2)dx_2 \tag{2.93}$$

或者

$$d^2y=f_{11}dx_1^2+f_{12}dx_2dx_1+f_{21}dx_1\,dx_2+f_{22}dx_2^2 \tag{2.94}$$

由杨格定理,有 $f_{12}=f_{21}$,整理得

$$d^2y=f_{11}dx_1^2+2f_{12}dx_1dx_2+f_{22}dx_2^2 \tag{2.95}$$

如果对 x 的任何变化(即任取 dx_1 与 dx_2)方程2.95恒为负,显然 f_{11} 与 f_{22} 均为负。例如,取 $dx_2=0$,则

$$d^2y=f_{11}dx_1^2 \tag{2.96}$$

$d^2y<0$ 意味着

$$f_{11}<0 \tag{2.97}$$

同样,由 $dx_1=0$,得到 f_{22} 为负。若 dx_1 和 dx_2 均不为0,我们必须考虑由交叉二阶偏导数 f_{12} 来确定是

否 d^2y 恒为负。应用简单的代数知识可知此时要求的条件是①

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0 \tag{2.98}$$

2.10.5 凹函数

直观来看,式 2.98 要求二阶自偏导数(f_{11} 和 f_{22})绝对值必须足够大以超过交叉偏导数。满足这样条件的函数称之为**凹函数(concave functions)**。这样的函数图形在三维空间中很像一个倒置的茶杯(见例 2.10)。通过这个类比,你也可以看出驻点确实是极大值点,因为每个方向都是下坡。更一般地说,凹函数的定义是函数曲面在任何一点的切平面之下,而极大值点的水平切平面是一种特例。

例 2.9

二阶条件:健康状况的最终讨论

在例 2.3 中,我们考虑健康状况的函数是

$$y=f(x_1,x_2)=-x_1^2+2x_1-x_2^2+4x_2+5 \tag{2.99}$$

最大值的一阶条件为

$$f_1=-2x_1+2=0,\quad f_2=-2x_2+4=0 \tag{2.100}$$

或者

$$x_1^*=1,\quad x_2^*=2 \tag{2.101}$$

方程 2.99 的二阶偏导数是

$$f_{11}=-2,\quad f_{22}=-2,\quad f_{12}=0 \tag{2.102}$$

这些偏导数显然满足方程 2.97 和 2.98,因此满足局部最大值的充要条件。②

请回答:描述健康状况凹函数的形状并说明为什么只有一个整体最大值点。

2.10.6 条件极值

作为最后一种情形,我们考虑函数

$$y=f(x_1,x_2) \tag{2.103}$$

在线性约束条件

---

① 证明方法是在式 2.95 上加一个 $(f_{12}dx_2)^2/f_{11}$ 再减去一个 $(f_{12}dx_2)^2/f_{11}$,作恒等变形。但这种方法只适用于该特殊情况。一般的证明方法是将 2.95 写成矩阵的形式,再利用 $X^T=[dx_1 \quad dx_2]$ 的二次型证明。式 2.97 和式 2.98 的作用是保证海森矩阵 $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}$ 负定。式 2.98 保证了其行列式为正。详见扩展部分的讨论。

② 注意式 2.102,它使函数在整个定义域上满足极值的二阶条件,故函数是凹的。但对于一般的函数来说不一定有这个条件,我们实际上只要求二阶条件在极值点上得以满足。

$$c - b_1x_1 - b_2x_2 = 0 \tag{2.104}$$

求 y 最大值的问题(其中 c、b_1、b_2 是常数)。这种问题在本书中经常遇到,是前面讨论过的作为约束条件下最大值问题的一种特例。我们已经知道为得出最大值问题的一阶条件,首先需要建立拉格朗日表达式

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2) + \lambda(c - b_1x_1 - b_2x_2) \tag{2.105}$$

此式关于 x_1,x_2 和 λ 的偏导数满足

$$\begin{aligned} f_1 - \lambda b_1 &= 0 \\ f_2 - \lambda b_2 &= 0 \\ c - b_1x_1 - b_2x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.106}$$

一般来说,这样的方程组总可以解出使 f 最大化的 x_1,x_2 与 λ。为了确保以这种方式得到的点是局部最大值点,我们仍需要利用二阶全微分考察一下离开临界点时的移动情况

$$\mathrm{d}^2y = f_{11}\mathrm{d}x_1^2 + 2f_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + f_{22}\mathrm{d}x_2^2 \tag{2.107}$$

这里,并不是 x 的所有变化都是可行的。只有继续满足约束条件的 x_1 与 x_2 值是有效的选择。为了考察这种变化,我们需要计算约束条件的全微分

$$-b_1\mathrm{d}x_1 - b_2\mathrm{d}x_2 = 0 \tag{2.108}$$

或者

$$\mathrm{d}x_2 = -\frac{b_1}{b_2}\mathrm{d}x_1 \tag{2.109}$$

方程 2.109 显示了考虑远离临界点时,x_1 与 x_2 可以允许的相对变化。进一步研究这个问题,我们需要使用一阶条件。这意味着从前两个方程导出

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{b_1}{b_2} \tag{2.110}$$

该结果与方程 2.109 结合,有

$$\mathrm{d}x_2 = -\frac{f_1}{f_2}\mathrm{d}x_1 \tag{2.111}$$

我们现将 $\mathrm{d}x_2$ 的值代入方程 2.107 并说明 d^2y 为负成立的条件为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2y &= f_{11}\mathrm{d}x_1^2 + 2f_{12}\mathrm{d}x_1\left(-\frac{f_1}{f_2}\mathrm{d}x_1\right) + f_{22}\left(-\frac{f_1}{f_2}\mathrm{d}x_1\right)^2 \\ &= f_{11}\mathrm{d}x_1^2 - 2f_{12}\frac{f_1}{f_2}\mathrm{d}x_1^2 + f_{22}\frac{f_1^2}{f_2^2}\mathrm{d}x_1^2 \end{aligned} \tag{2.112}$$

合并同类项提出公因子,有

$$\mathrm{d}^2y = (f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2)\frac{\mathrm{d}x_1^2}{f_2^2} \tag{2.113}$$

因此,对于 $\mathrm{d}^2y<0$ 一定有

$$f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0 \tag{2.114}$$

2.10.7 凹函数和拟凹函数

虽然式 2.114 看起来有些复杂，但它确实具有重要的意义。处处满足这个不等式的函数称为拟凹函数。拟凹函数具有这样的性质：对任意给定常数 c，当函数值 $f(x_1,x_2)>c$ 时，其定义域[即 (x_1,x_2)]必为凸集（凸集的定义是，任意两点的连线被完全包含在集合内）。这种函数在微观经济学中有广泛的应用，在第 3 章我们会很细致地分析拟凹性，并赋予它一个相对简单的经济学意义。练习题 2.9 和例 2.10 分别列举了两个常用的拟凹函数，下面的例 2.10 分析了凹函数和拟凹函数的差异。

例 2.10

凹函数和拟凹函数

可以用下面的函数来举例说明凹函数和拟凹函数的区别。①

$$y=f(x_1,x_2)=(x_1x_2)^k \tag{2.115}$$

其中 $x_1,x_2,k>0$。

不管 k 取多少，函数都是拟凹的。我们可以看它的“等高线”，令 $y=c$，就有

$$y=c=(x_1x_2)^k \quad 或者 \quad x_1x_2=c^{\frac{1}{k}}=c' \tag{2.116}$$

这就是标准的双曲线，显然使得 $y>c$ 的点集的边界是双曲线，所以必为凸集。

用式 2.114 可以从数学上证明它的拟凹性。尽管这里的代数运算有点烦琐，但花点工夫弄懂它还是值得的。式 2.114 中各个导数值如下

$$\begin{aligned}
f_1&=kx_1^{k-1}x_2^k\\
f_2&=kx_1^kx_2^{k-1}\\
f_{11}&=k(k-1)x_1^{k-2}x_2^k\\
f_{22}&=k(k-1)x_1^kx_2^{k-2}\\
f_{12}&=k^2x_1^{k-1}x_2^{k-1}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

代入式 2.114，有

$$\begin{aligned}
f_{11}f_2^2-2f_{12}f_1f_2+f_{22}f_1^2&=k^3(k-1)x_1^{3k-2}x_2^{3k-2}-2k^4x_1^{3k-2}x_2^{3k-2}+k^3(k-1)x_1^{3k-2}x_2^{3k-2}\\
&=2k^3x_1^{3k-2}x_2^{3k-2}(-1)
\end{aligned} \tag{2.118}$$

该值显然为负，所以它一定是拟凹的。

而该函数的凹性取决于 k 的大小。如果 $k<0.5$，函数就是凹的；反之，如果 $k>0.5$，函数就是凸的。直观地看，在直线 $x_1=x_2$ 上，

$$y=(x_1^2)^k=x_1^{2k} \tag{2.119}$$

① 下面这个函数是柯布-道格拉斯函数的一个特例，关于柯布-道格拉斯函数详见练习题 2.9 和扩展部分。

下面证明这个结论：利用 2.117 中的偏导数，凹性的判别条件是

$$\begin{aligned} f_{11}f_{22}-f_{12}^2 &= k^2(k-1)^2x_1^{2k-2}x_2^{2k-2}-k^4x_1^{2k-2}x_2^{2k-2} \\ &= x_1^{2k-2}x_2^{2k-2}[k^2(k-1)^2-k^4] \\ &= x_1^{2k-1}x_2^{2k-1}[k^2(-2k+1)] \end{aligned} \tag{2.120}$$

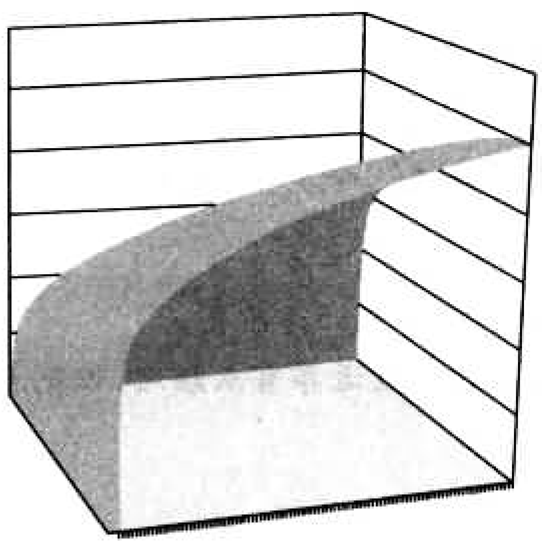
上式为正（即函数为凹函数）的条件是

$$(-2k+1)>0 \quad 或者 \quad k<0.5$$

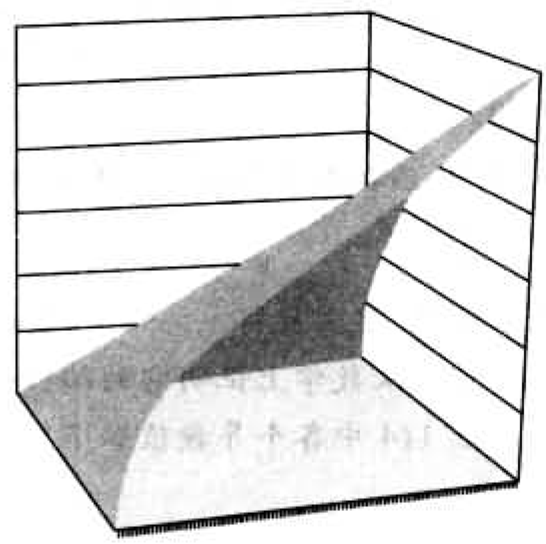
否则，当 $k>0.5$，函数为凸函数。

作图表示法

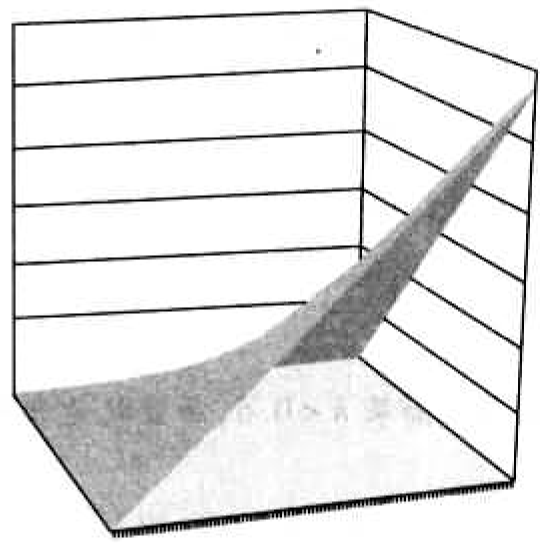
图 2.4 是当 k 取三个特定值(0.2,0.5,1)时该函数的三维图像。注意这三个图形的等高线都是双曲线，即对给定的 y，x 关于 x_2 的函数图像很相似。这表明了该函数的拟凹性。三个图像的主要差别在于其凹凸性，即随着 x 的变化 y 的改变速度的变化趋势。图 2.4(a)里($k=0.2$)，随着 x 增大，y



(a) $k=0.2$



(b) $k=0.5$



(c) $k=1.0$

图 2.4 凹函数和拟凹函数

如图所示，三个函数都是拟凹的，因为对于固定的 $y=c$，它与函数的交线是凸的。但只有 $k=0.2$ 时函数才是严格凹的。当 $k=1.0$ 时，函数显然不是凹的，因为函数曲面不在其切平面之下。

增加速度减缓，造成一个像倒扣着的茶杯一样向上鼓的图形，所以是凹的；当 $k=0.5$ 时，当两个自变量相等且同时变化时，y 的变化是线性的，可以认为是凹函数和凸函数的分界线；而当 $k=1$ 时，像图 2.4(c) 那样，同时增加两个自变量会让 y 增加得越来越快，从函数的"山脊"的走向能看出这已经是凸函数了。

仔细看图 2.4(a)，你可能会发现凹函数必然是拟凹的。练习题 2.8 就是证明此结论。从这个例子也能看出，它的逆命题是错误的——拟凹函数不一定是凹的。本书中出现的大部分函数正是这样，具有拟凹性但未必是凹的。

请回答：当 x_1, x_2 满足线性约束条件时，函数 2.4(a) 和 2.4(c) 都有最大值，但没有约束条件时，就只有 2.4(a) 才有最大值。请解释原因。

2.11 齐次函数

很多从经济学问题中引出的函数本身就具有一些数学上的特殊性质。其中一类重要的性质是当其所有(或者大部分)自变量同时按相同比例变动时，函数值的变化规律。这个问题的背景是：考虑所有商品同时上涨 10%，需求如何变化；或者把工厂所有投入的投入品加倍，产量增加多少；等等。研究这类问题自然要用到齐次函数的概念。对于一个多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果对于任意正数 t，满足

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.121}$$

则称其为 k 次齐次函数。

最重要的齐次函数是 $k=1$ 和 $k=0$ 的两类。如果函数是一次齐次的，那么所有的自变量加倍后，函数值也加倍；如果函数是零次齐次的，那么所有自变量都加倍，函数值不变。还有的方程只关于其自变量的某个子集齐次，即某几个自变量加倍而其余的不变时，函数值加倍。但一般我们提到的齐次性，指的都是关于其所有自变量的齐次性。

2.11.1 齐次函数的偏导数

一个 k 次齐次可微函数的各个偏导数是 $k-1$ 次齐次的。用齐次性的定义就能证明这一点。例如，对式 2.121 关于 x_1 求偏导数，有

$$\frac{\partial f(tx_1, \cdots, tx_n)}{\partial x_1} \cdot t = t^k \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1}$$

即

$$f_1(tx_1, \cdots, tx_n) = t^{k-1} f_1(x_1, \cdots, x_n) \tag{2.122}$$

可见 f_1 是满足 $k-1$ 次齐次的定义的。由于边际的概念在经济学中应用得非常广泛，这个性质就很有意义，它使得边际影响的某些重要性质可以直接由原函数的性质推导出来。

2.11.2 欧拉定理

齐次函数的另一个重要性质是对因子 t 求偏导得到的。对式 2.121 的两边分别对 t 求偏导得

$$kt^{k-1}f(x_1\cdots x_n) = x_1f_1(tx_1\cdots tx_n) + \cdots + x_nf_n(tx_1\cdots tx_n)$$

令 $t=1$,有

$$kf(x_1\cdots x_n) = x_1f_1(x_1\cdots x_n) + \cdots + x_nf_n(x_1\cdots x_n) \tag{2.123}$$

这就是齐次函数的欧拉定理(欧拉就是发现无理数 e 的那个伟大的数学家)。它说明了对于齐次函数,其函数值与其各个偏导数之间有确定的关系。经济问题中一些重要的关系正是基于这个定理而发现的。

2.11.3 位似函数

齐次函数经过任意的单调映射得到的函数叫做位似函数。① 从定义可知,位似函数保持了原函数自变量到函数值对应的序关系。即对于函数 f,如果一组自变量对应的函数值大于另一组的,那么经过单调映射后前者的函数值仍大于后者。但是由于单调映射有很多可能的形式,原齐次函数的很多性质是不能保持的。比如函数 $f(x,y)=x\cdot y$。显然它是二次齐次的,自变量都加倍后函数值增为原来的四倍。但是 f 经过"加 1"的单调变换变成 F[即 $F(f)=f+1=xy+1$]后,就不再是齐次函数。所以,除了少数特例外,一般的位似函数没有原函数的齐次性。但是位似函数有个很好的性质,即函数各个自变量之间的替代关系(implicit trade-off,比如减少 1 单位 x_1 需增加多少单位 x_2 才能保持函数值不变,即下一章的 MRS,边际替代率)只取决于自变量之间的比例,而不取决于其绝对值。我们用一个含两个变量的隐函数说明:$f(x,y)=0$。这可较容易地推及一般情况。

由式 2.28 知,x,y 之间的替代关系可以用隐函数导数比值表示

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y}$$

如果 f 是 k 次齐次函数,则其偏导数是 $k-1$ 次齐次函数。替代关系为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{t^{k-1}f_x(tx,ty)}{t^{k-1}f_y(tx,ty)} = -\frac{f_x(tx,ty)}{f_y(tx,ty)} \tag{2.124}$$

令 $t=1/y$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x\left(\frac{x}{y},1\right)}{f_y\left(\frac{x}{y},1\right)} \tag{2.125}$$

可见替代关系只由 x 和 y 的相对比例决定。现在假设 f 经过单调映射变为 $F[F=F(f(x,y))]$,且 $F'>0$。那么对于 F,x,y 的替代关系为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'f_x\left(\frac{x}{y},1\right)}{F'f_y\left(\frac{x}{y},1\right)} = -\frac{f_x\left(\frac{x}{y},1\right)}{f_y\left(\frac{x}{y},1\right)} \tag{2.126}$$

① 由于恒同映射也是单调映射,所以齐次函数也都是位似函数。

这样我们就证明了位似函数的替代关系不受单调映射的影响，而只是 x/y 的函数。有了这条性质，我们在第 3 章（以及别的某些地方）的理论分析就只需考虑各个自变量之间的比例，所以可以在二维的平面图上进行，方便很多。

例 2.11

基数性质和序数性质

在经济问题中，有时需要定量地确定变量的大小，比如研究生产函数时，需要确切地算出再多雇用 1 个工人能多得到多少产出。这个称为生产函数的"基数性质"。而有时，只需要确定不同点函数的大小关系。比如在效用理论中，我们假定人们能够对消费不同的商品组合按偏好排序，并选择排序最靠前的一个，但是对每种商品组合的确切的"效用"数值并不唯一。由单调映射的定义可知，单调映射保持函数的序数性质不变。但一般来说，单调映射并不能保证保持函数的基数性质不变。

我们用例 2.10 中的那个函数来说明它们的差别。对于不同的参数 k，考虑单调映射作用于函数

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^k \tag{2.127}$$

我们刚才证明了拟凹性（是一种序数性质）对一切 k 成立，而当求解在某线性约束条件下最大（或最小）值点在哪里的问题时，用何种单调映射结果都一样。然而，只有当 k 满足一定条件时，式 2.127 才表示凹函数（是一种基数性质），并且对于一般的单调映射，凹性不一定能保持。

下面我们再以 2.127 为例说明齐次函数和位似函数的区别：两个自变量同时乘以 k，有

$$f(tx_1, tx_2) = t^{2k} x_1 x_2 = t^{2k} f(x_1, x_2) \tag{2.128}$$

即齐次函数的次数由 k 决定，从而对一般的单调映射不能保证齐次次数不变。但式 2.127 是位似函数，因为

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{kx_1^{k-1}x_2^k}{kx_1^k x_2^{k-1}} = \frac{x_2}{x_1} \tag{2.129}$$

即 x_1 和 x_2 之间的替代关系只由比例决定，与 k 无关，所以同位性是序数性质。我们后面会看到，这个性质为作图分析提供了非常大的帮助。

请回答： 考虑这样的单调映射 $f(x_1, x_2, k) = x_1 x_2 + k$（$k$ 为任意常数），对于不同的 k，讨论以上性质。

小　结

尽管本章讲述了一些非常难的内容，但是本书毕竟不是一本数学书。本章的目的是把本书以后的章节为建立经济模型而需要的各种工具集中进行介绍。因此，这一章的材料作为参考文献是很有用的。

我们在此再强调一下本章的数学工具分析

的经济学内容。

• 使用数学为经济学家建立模型提供了便捷有效的方法。使用数学工具可以在一种简化的状态下研究各种经济学假设的含义。

• 函数导数的数学概念在经济模型中得到了广泛的应用,因为经济学家通常对一个变量的微小变化对另一个变量的边际影响感兴趣。在这方面,偏导数特别有用,因为它们正是用来表示所有其他变量假设为常数时的边际变化。偏导数体现了多数经济模型中都会用到的其他条件不变的假设。

• 在假设经济人理性地寻求某些目标的经济模型中,关于最优化的数学是重要的工具。在没有约束的情况下,一阶条件表明对经济目标有贡献的活动应扩张到进一步扩张的边际贡献为0的时候。用数学术语来说就是,最优化的一阶条件要求所有偏导数都是0。

• 大多数经济最优化问题涉及经济人作出选择的约束条件。在此情况下,最大化的一阶条件意味着在每一活动应停留在这样一个水平上,在这个水平上所有实际开展的活动的边际收益与边际成本之比是相同的。这个共同的边际收益—边际成本比率还等于拉格朗日乘数,它常常用来帮助求解约束条件下的最优化问题。拉格朗日乘数还可以解释为约束条件下的隐含值(或影子价格)。

• 对于说明最优化问题中的选择对问题中的参数(如市场价格)的依赖性,隐函数定理是很有用的数学工具。在考察问题的参数(价格)变化时最优选择是如何变化的时候,则可能用到包络定理。

• 有时最优化问题涉及的约束条件是不等式。这时会出现所谓的“松弛互补性”现象,即要么不等式约束需取到等号才能实现最优化,这样约束条件对应一个非零的拉格朗日乘数;要么不等号成立,而对应的拉格朗日乘数为零。从这里的分析也能看出,拉格朗日乘数是刻画对应的约束条件相对重要度的一个参数。

• 一阶条件只是局部极值的必要条件,要确保其为极值,需要检验相关的二阶条件是否得以满足。

• 以下两类函数在经济建模中应用甚为广泛:拟凹函数(定义是函数曲面的等高线包围的区域是凸集)在约束条件是线性的前提下满足局部极值的二阶条件;位似函数的重要性质是自变量的替代关系只由其相对比值决定。

练 习 题

2.1 已知 $U(x,y)=4x^2+3y^2$。

a. 计算 $\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y}$。

b. 当 $x=1,y=2$ 时,求这两个偏导数的值。

c. 写出 U 的全微分。

d. 当 $dU=0$,计算 dy/dx,即保持 U 不变,y 和 x 的替代关系如何?

e. 说明当 $x=1,y=2$ 时,$U=16$。

f. 当 $x=1,y=2$ 时,x,y 要以怎样的比例微小变化才能保持 $U=16$ 不变?

g. $U=16$ 的等高线是什么图形?它各点的斜率是多少?

2.2 假设某企业的总收入只由产量决定,且关系式为

$$R = 70q - q^2$$

总成本也只由 q 决定,

$$C = q^2 + 30q + 100$$

a. 要使利润($R-C$)最大化,应该将产量定为多少?最大利润是多少?

b. 说明 a 问题的答案满足极值的二阶条件。

c. 这个解是否满足“边际收益等于边际成本”？解释之。

2.3 设 $f(x,y)=xy$，在 $x+y=1$ 的约束条件下用以下两种方法求最大值：(1) 代入消元法；(2) 拉格朗日乘数法。

2.4 上一题的对偶问题是给定 $xy=0.25$，求 $x+y$ 的最小值。用拉格朗日乘数法求解。比较这两题中算出的拉格朗日乘数的大小，并解释其关系。

2.5 垂直向上抛球，t 秒后高度为 $-0.5gt^2+40t$（其中 g 是重力加速度）。

a. 达到最高点时 t 为多少？表示成 g 的函数。

b. 用 a 中的结果解释当 g 发生改变时，最高点高度如何变化。

c. 用包络定理求解 b。

d. 在地球上 $g=32$（这里单位是英尺/秒^2，译者注），但在不同的地方略有不同。如果两地 g 相差 0.1，球能达到的最大高度大约差多少？

2.6 为了做一个油箱，我们把一块长 $3x$、宽 x 的铁皮四角各剪下一块边长为 t 的正方形，再折起来，就形成了无盖箱的结构。

a. 证明油箱的体积为

$$V=t(x-2t)(3x-2t)$$
$$=3tx^2-8t^2x+4t^3$$

b. 对于给定的 x，为了使油箱容积最大，t 应该取多少？

c. 把 V 视作 x 的函数，V 是否有最大值？

d. 如果造船厂只有 1 000 000 平方英尺的铁皮，即 t,x 满足约束条件 $3x^2-4t^2=1\,000\,000$。现在求解 V 的最大值。此时的结果和 b，c 两问题的结果有什么区别？

2.7 考虑条件极值问题，使 y 最大化，其中

$$y=x_1+5\ln x_2$$

x_1,x_2 满足约束条件 $k-x_1-x_2=0$，k 为任意常数

a. 当 $k=10$ 时，求解该条件极值问题。

b. 证明 $k=4$ 时，$x_1=-1$。

c. 如果要求自变量必须非负，$k=4$ 时的最优解是多少？

d. 当 $k=20$ 时，求解之，并与问题 a 的结果作比较，你看出了什么？

（注：这个问题涉及的函数叫做“准线性函数”，在消费者行为理论中我们还会用到。）

2.8 通过比较两者的定义来证明凹函数必为拟凹函数（式 2.114 和式 2.98），你能从直观上解释你的证明吗？它的逆命题是否正确，即拟凹函数是否是凹函数？

2.9 马上你会碰到一个经济学中特别重要的函数：柯布-道格拉斯函数（Cobb-Douglas Function）：

$$y=(x_1)^\alpha(x_2)^\beta$$

其中 $0<\alpha,\beta<1$.

a. 用套定义的“原始”做法证明它是拟凹函数。

b. 用 $y=c$ 的等高线围成的区域是凸集的办法证明它是拟凹函数。

c. 证明当 $\alpha+\beta>1$ 时该函数不是凹函数。（这也说明拟凹函数不见得是凹的。）

（注：柯布-道格拉斯函数在扩展部分还有介绍。）

2.10 另一种常见的函数是“幂函数”（power function）

$$y=x^\delta \quad 其中\ 0\leqslant\delta\leqslant 1$$

a. 证明函数是凹函数（自然也是拟凹函数）。注意只有当 $\delta<1$ 时函数才是严格凹的。

b. 证明多元幂函数 $y=f(x_1,x_2)=(x_1)^\delta+(x_2)^\delta$ 也是凹的（也是拟凹的）。这里由于交叉偏导数 $f_{12}=f_{21}=0$，使得

凹性很明显。解释为什么交叉偏导数为 0?

c. 用这样一个单调映射可以给 b 中的函数附加上“规模效应”

$$g(x_1,x_2) = y^{\gamma} = [(x_1)^{\delta} + (x_2)^{\delta}]^{\gamma}$$

(γ 是个正数)

函数 g 是否具有凹性?是否具有拟凹性?

推荐阅读文献

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1990.

一本全面而现代化的讲解最优化方法的书,用到了相对高级的分析方法。

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press, 1995.

这本书算得上是经济数学方法的百科全书,其附录的数学部分用到了高级方法。

Samuelson, Paul A. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1947. Mathematical Appendix A.

这是一个基本文献,数学附录 A 中给出了处理最大值充分必要条件的高级方法。

Silberberg, E., and W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston: Irwin/McGraw-Hill, 2001.

该书是一部数理经济学教科书,在书中强调可以被事实检验的经济预测理论,该书对包络定理作了广泛的应用。

Simon, Carl P., and Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*. New York: W. W. Norton, 1994.

这本书非常实用,和经济学相关的数学基本都涉及了。用的方法相对高级一些。其中微分方程和基本点集拓扑两部分内容尤其出众。

Sydsaeter, K., A. Strom, and P. Berck. *Economists' Mathematical Manual*, 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

一本不可替代的作为手册性质的参考书,共 32 章,基本涵盖所有经济学涉及的数学。但是讨论中省略了很多基本知识,不适合初学者使用。

Taylor, Angus E., and W. Robert Mann. *Advanced Calculus*, 3rd ed. New York: John Wiley, 1983. pp. 183—195.

这是一部综合性的微积分教科书,在书中,对拉格朗日方法进行了很好的讨论。

Thomas, George B., and Ross L. Finney. *Calculus and Analytic Geometry*, 8th ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1992.

这是一部标准的微积分教科书,书中很好地应用了微分方法。

扩　展

二阶条件和矩阵代数

本章提及的二阶条件如果用矩阵工具来表达就会比较简练。这里我们对其作简单介绍。矩阵记号在别的章节的扩展部分和练习题中还要继续用到。

矩阵的代数背景

本节是建立在读者对矩阵代数有了基本了解的基础上,对其作的简单回顾:

1. 一个 $n \times k$ 阶矩阵,**A**,是一个由数按以下形式排成的长方形。

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk} \end{bmatrix}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,k$。相同大小的矩阵可以相加,相减。行数和列数相等的矩阵可以相乘。

2. 如果 $n=k$,则称 **A** 是一个方阵。如果方阵 **A** 满足 $a_{ij}=a_{ji}$,则称 **A** 为对称矩阵。如果 $n \times n$ 的方阵满足 $\begin{cases} a_{ij}=1(i=j) \\ a_{ij}=0(i\neq j) \end{cases}$,则称之为单位矩阵,记作 $\mathbf{I}_n$。

3. 方阵的行列式(记作 $|\mathbf{A}|$)是一个数值,是通过某种方法算出来的。如果 **A** 是 2×2 的方阵,则

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

比如 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 则

$$|\mathbf{A}| = 2 - 15 = -13.$$

4. 对于方阵 **A**,如果存在矩阵 **B** 使得 $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$,则称 **B** 是 **A** 的逆矩阵,记为 $\mathbf{A}^{-1}$。并非每一个矩阵都有逆矩阵,**A** 存在逆矩阵的充要条件是 $|\mathbf{A}|\neq 0$。

5. 方阵 **A** 的前 p 行 p 列构成的行列式称为顺序主子式,比如 **A** 是 2×2 的方阵,则其第一个顺序主子式是 a_{11},第二个是 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$。

6. 如果一个 $n\times n$ 的方阵 **A** 的全部顺序主子式都是正的,则称之为正定矩阵。如果第一个顺序主子式为负,其余的符号依序交错,则称之为负定矩阵。[①]

7. 一个常用的对称矩阵是海森矩阵(Hessian matrix),它由函数的全部二阶偏导数构成。如果 f 是 n 元二阶可微函数,则其海森矩阵是

$$\boldsymbol{H}(f) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

下面用这些符号重新研究二阶条件的问题。

E2.1　凸函数和凹函数

总在切平面之下(或与之重合)的函数叫凹函数,总在切平面之上(或与之重合)的函数叫凸函数。函数的凹凸性是由其二阶导数决定的。对于一元函数,对二阶导数的要求是比较显而易见的。用泰勒公式在 x_0 点展开,有

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx + f''(x_0)\frac{dx^2}{2} + \text{高阶小量}$$

忽略高阶小量,只要 $f''(x_0)\leqslant 0$ 就有

$$f(x_0+dx) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)dx$$

只要 $f''(x_0)\geqslant 0$ 就有

$$f(x_0+dx) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)dx$$

而不等号右边是过 x_0 点切线的表达式。所以显然只要 $f''(x_0)\leqslant 0$ 函数为凹;只要 $f''(x_0)\geqslant 0$ 函数为凸。

把上面这个直观的结论推广到多元函数时,表达式就会又长又不直观,但是用矩阵工具表示就会稍微简单些。只要多元函数的海森矩阵是负定的,它就是凹函数;海森矩阵是正定的,就是凸函数。和一元函数情形类似,这个条件是用来保证不管以什么方向偏离原点,函数值的改变方向是一致的。[②]

① 如果某些顺序主子式值为 0,我们称其为半正定或半负定的矩阵。为了简化讨论,这里不再涉及此概念。

② 不用矩阵的话,用多元函数的泰勒展开式也能得出同样的结果,详见 Simon and Blume (1994),第 21 章。

如果$f(x_1,x_2)$是二元二阶可微函数，则其海森矩阵为

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

当$f_{11}<0$且

$$f_{11}f_{22}-f_{21}f_{12}>0$$

这恰好是本章的式2.98。对于更多元的情况本结论也适用。

例1 本章健康状况的那个函数（式2.20）的海森矩阵是

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

其第一和第二顺序主子式分别是

$$\mathbf{H}_1=-2<0$$

$$\mathbf{H}_2=(-2)(-2)-0=4>0$$

所以这个函数是凹的。

例2 科布-道格拉斯函数$x^a y^b$，其中$a,b\in(0,1)$常用来表示效用函数和生产函数。其一阶、二阶导数分别为

$$f_x=ax^{a-1}y^b$$

$$f_y=bx^a y^{b-1}$$

$$f_{xx}=a(a-1)x^{a-2}y^b$$

$$f_{yy}=b(b-1)x^a y^{b-2}$$

海森矩阵为

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{bmatrix}.$$

第一顺序主子式为

$$\mathbf{H}_1=a(a-1)x^{a-2}y^b<0,$$

所以，要使原函数为凹函数，需满足

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2&=a(a-1)(b)(b-1)x^{2a-2}y^{2b-2}\\&\quad-a^2b^2x^{2a-2}y^{2b-2}\\&=ab(1-a-b)x^{2a-2}y^{2b-2}>0\end{aligned}$$

即要求$a+b<1$。用生产函数的术语说，就是生产函数如果是凹的，那么它是**规模报酬递减(diminishing returns to scale)**的。从图形上看，随着每种投入品投入增加，曲面应向下弯曲。

E2.2 最大化

从第2章我们已经知道对于无约束的极值点，其各个一阶偏导数应为0。如果已知函数是凹函数，那么其总在其切平面之下，因此其具有水平切平面的一点就是极值点了。① 所以对于凹函数，比如“健康函数”，极值的一阶条件也是极值点的充分条件。

E2.3 条件极值

当自变量必须服从某约束条件时，函数的二阶条件中也应考虑约束。同样地，我们可以用矩阵给出一个紧致的表达式（虽然看着不够直观）。我们要做的是在原海森矩阵上添加几行几列，然后分析这个增广后的矩阵。

比如说，我们最大化$f(x_1,\cdots,x_n)$，其自变量满足约束条件②

$$g(x_1,\cdots,x_n)=0$$

条件极值的一阶条件是

$$f_i+\lambda g_i=0$$

其中λ是拉格朗日乘数。二阶条件用增广的海森矩阵③表示

① 如果函数只在某个区域是凹的，那么它就是局部极大值；如果函数处处是凹的，那么它就是全局极大值。

② 这里我们只讲单一约束条件的情形。多个约束条件下的条件极值虽然概念明确，但表达非常复杂。感兴趣的读者可参见Sydsaeter A. and P. Berck (2000), p.93。

③ 如果约束条件g满足对于所有的$i,j,g_{ij}=0$，则$\mathbf{H}_b$可以看做拉格朗日表达式（式2.50）的海森矩阵（自变量是$\lambda,x_1,\cdots,x_n$）。

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & & \\ g_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

极大值要求$(-1)\mathbf{H}_b$负定,即$\mathbf{H}_b$顺序主子式的符号从第二个开始 −, +, −, + … 交错排列。

极小值要求$(-1)\mathbf{H}_b$正定,即$\mathbf{H}_b$顺序主子式除第一个外均为负。[①]

例 1 本章例 2.6 中有约束条件的健康状况函数的拉格朗日表达式是

$$\mathscr{L} = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

其增广海森矩阵为

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

其第二顺序主子式为

$$\mathbf{H}_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -1$$

第三个为

$$\mathbf{H}_{b3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 0 - (-2) - 0 - (-2) = 4,$$

可见函数在点$x_1 = 0, x_2 = 1$处满足二阶条件,故该点确实是条件极大值。

例 2 在例 2.7 中研究的篱笆圈地最大化问题中,增广海森矩阵是

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{H}_{b2} = -4$$

$$\mathbf{H}_{b3} = 8$$

顺序主子式也满足条件。

E2.4 拟凹性

如果约束条件 g 是线性的,那么上一节讨论的二阶条件就只和目标函数的形状有关。线性约束条件 g 可以写成

$$g(x_1 \cdots x_n) = c - b_1x_1 - b_2x_2 - \cdots - b_nx_n = 0$$

最大化的一阶条件是

$$f_i = \lambda b_i, \quad i = 1 \cdots n$$

显然,$\mathbf{H}_b$与

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & & & \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

的各个顺序主子式只差一个整数倍。[②] 所以问题转化为要求$(-1)\mathbf{H}'$为负定矩阵。满足这样条件的函数 f 称为拟凹函数,c 满足 $f(x_1 \cdots x_n) > c$ 的点集是凸集。对于这样的函数,极值的必要条件也是极值的充分条件。

例 1 在篱笆问题中 $f(x, y) = xy$,

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{H}_2' = -y^2 < 0$$

$$\mathbf{H}_3' = 2xy > 0$$

---

① 第一个顺序主子式是 0。

② 说明这个需要用到行列式的一条性质:对某行(或某列)乘以一个常数 k,则其行列式的值等于原来的行列式乘以 k。

因此它是拟凹的。[①]

例 2 一般地，对于二元函数 f，拟凹性要求

$$\mathbf{H}_2' = -(f_1)^2 < 0$$

$$\mathbf{H}_3' = -f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2 + 2f_1f_2f_{12} > 0$$

注意这和式 2.114 完全相同。现在对于一般的函数，我们就有了检验其拟凹性的方法。

参考文献

Simon, C. P., and L. Blume. *Mathematics for Economists.* New York: W. W. Norton, 1994.

Sydsaeter, R., A. Strom, and P. Berck. *Economists' Mathematical Manual.* 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

① $f(x,y)=xy$ 是非凹的一个柯布–道格拉斯函数，这也说明了不是所有的拟凹函数都是凹函数。但是它可以通过一个单调映射（比如 $f^{1/3}$）变成凹函数。

第2篇

选择与需求

在第2篇中，我们将讨论经济学中的**选择(choice)**理论。讨论的目的首先是规范地提出**需求(demand)**这一概念，以便我们在本书后面研究市场时用到这一概念。本篇更一般性的目的是阐明理论经济学家用于解释个人在各种情况下如何做出选择的理论。

在第2篇的开始，我们讲述经济学家是怎样描述个人偏好模型的。与其相对应的规范术语是**"效用"(utility)**。第3章说明经济学家如何用数学的方式定义效用，由此提出了**"无差异曲线"(indifference curves)**，它能够说明个人自愿作出的各种改变。

在第4章中，我们使用效用的概念来阐释选择理论。这一章的基本假设是：人们在收入有限的情况下，会作出一种最经济的选择以获得尽可能大的效用。运用数学分析和直观分析可以表明，通过该假设能准确地洞察经济行为。

第5章和第6章将使用效用最大化的模型来讨论个人对于环境的改变所作出的反应。第5章主要分析个人对商品价格变化的反应，并引出需求曲线的概念；第6章将继续进行这一分析，通过分析我们能够理解不同商品之间的需求关系。

第2篇

第3章 偏好与效用

在这一章我们将看到经济学家界定个人偏好的方法。本章从一个相当抽象的概念"偏好关系"(preference relation)开始,继而介绍经济学家在研究个人选择时的主要工具——效用函数。我们会看到这个函数的某些一般特征以及一些本书中引用的某些效用函数的简单例子。

3.1 理性选择定理

个人选择分析的一种方式是设定一组基本假定或定理,用来界定什么是"理性"(rational)的行为。尽管目前人们已经提出了很多套这种定理,但它们都有一个共同点,即它们都是从**"偏好"(preference)**这个概念出发的:当某一个人表示"A 和 B 中偏好 A"时,这意味着,在考虑了所有的情况后,他感觉在 A 的情况下比在 B 的情况下更好。我们假定这种偏好关系有如下三个基本性质:

Ⅰ. **完全性(completeness)**:如果 A 和 B 是任何两种情况,个人只能表达下列三种观点之一:

(1) A 和 B 中偏好 A

(2) A 和 B 中偏好 B

(3) A 和 B 具有同样的吸引力

因此我们假定人们不会优柔寡断:他们完全了解任何两个备选情况,并且总能判定自己对这两个备选情况的偏好程度。这个假定也排除了个人既偏好 A 又偏好 B 的可能性。

Ⅱ. **传递性(transitivity)**:如果个人表示"A 和 B 中偏好 A",以及"B 和 C 中偏好 B",那么他也就表示了"A 和 C 中偏好 A"。

这个假定说明个人的选择是内在一致的。在经验研究中我们完全可以得到这一假定。通常情况下,经验研究总结出个人的选择确实是具有传递性,但当个人不能完全了解自己的选择所带来的后果时,这个结论必须加以修正。因为在大多数情况下,我们会假设个人完全了解自己的选择(关于不确定性的讨论请见第 7 篇或其他资料),所以传递性仍然是个很合理的假定。

Ⅲ. **连续性(continuity)**:如果个人表示"A 和 B 中偏好 A",那么在充分接近 A 的情况和充分接近 B 的情况之间,个人必须偏好那个充分接近 A 的情况。

当要分析个人对于收入和价格发生较小变化的反应时,我们就需要这个假定,目的是排除某些

不连续的需求函数(它们将使选择理论可进行数学上的处理)。现实世界中一些主要的经济行为类型都符合连续性假定。

3.2 效用

通过以上三条性质,人们可以规范地将所有可能的情况按照偏好程度由大到小进行等级排列。[①] 经济学家称这种排序为**效用(utility)**,这个词是19世纪的理论政治家杰里米·边沁(Jeremy Bentham)提出的。[②] 我们沿袭边沁的说法,认为人们更偏好的情况所提供的效用较大。也就是说,如果一个人在A和B两种情况中偏好A,那么我们就认为A的效用——用$U(\mathrm{A})$表示——比B的效用$U(\mathrm{B})$大。

3.2.1 度量效用方式的不唯一性

我们可以赋予这些排序具体数值,但是这些数值并不唯一。只要准确符合原本的偏好序,我们就可以任意给定一组数值来表示同样的选择次序。$U(\mathrm{A})=5$,$U(\mathrm{B})=4$和$U(\mathrm{A})=1\,000\,000$,$U(\mathrm{B})=0.5$没有区别,因为这两种情况都表示A和B中A的效用更大。在术语上,效用被定义为一个保持偏好序固定的(即单调的)映射。[③] 任何一组数值都可以表示一个人的偏好序。因此,诸如"A和B中更偏好A多少"的问题,是没有意义的,因为这个问题没有唯一解。在标度为1—10的基础上询问一个人的"快乐"程度与在标度为7—1 000 000的基础上询问该问题的效果是一样的。一个人说他第一天的快乐程度是6,第二天的快乐程度是7,这只能说明这个人第二天更快乐,而不管他用的标度范围是什么。如同用星的数目的多寡来表示酒店、电影院等的等级一样,效用的排序只是用来表示人们对众多商品相对的需求程度。

由于赋予效用的数值并不唯一,因此我们不能在不同人之间比较效用。如果一个人表示一份牛排晚餐的效用为"5",而另一个人表示同样的一份晚餐的效用为"100",我们也不能判断谁对这份晚餐的评价更高,因为他们可能使用了不同的标度范围。相似地,对不同的人而言,我们也无从得知当情况A变为情况B后,效用的变化哪个会更大。尽管如此,经济学家通过考察人们自愿作出什么选择,仍然能够就效用等级排列做一番文章。

3.2.2 其他条件不变的假定

因为效用涉及人们总体的满意程度,所以效用的度量会受到多种因素的影响。一个人的效用不仅受他所消费的实物商品的影响,而且受他内心的态度、来自同阶层的心理压力、个人经历以及所处

① Andreu Mas-Colell、Michael D. Whinston、Jerry R. Green, *Microeconomic Theory* (New York: Oxford University Press, 1995),对这些性质以及它们与用效用函数表示偏好程度的关系进行了详细的讨论。

② J. Bentham, *Introduction to the Principles of Morals and Legislation* (London: Hafner,1848).

③ 我们可以用数学的方法来表达这一思想,如果假定$F'(U)>0$,任何数值的效用等级(U)可以通过函数F转变为另一组数字,函数F所提供的$F(U)$保持了原效用的顺序。例如,$F(U)=U^2$转变为$F(U)=\ln U$,偏好序并不变。在以后的学习中,我们可能会发现,为了便于对某些特别的偏好序进行分析,这种转变是必要的。

的一般文化环境的影响。虽然经济学家对考察所有这些影响很有兴趣，但在通常情况下，还是有必要把视线聚焦在一个较小的领域上。因此，通常的做法是影响行为的其他因素保持不变，集中精力只分析那些可计量的选项(例如，购买食品与房屋的相对数量、每周工作的小时数，或在特定的税种间的投票选择)。这种其他条件不变(ceteris paribus，即其他因素均相同)的假定被用在所有对效用最大化选择的经济分析中，是为了使选择分析形式简单，易于处理。

3.2.3 消费商品的效用

这里有一个关于其他条件不变假定的重要例子，在单一时点上，在 n 种消费品 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中，考虑个人的选择问题。我们将假定个人对这些消费品的偏好序可以用下列效用函数来表示

$$效用 = U(x_1,x_2,\cdots,x_n;其他事物) \tag{3.1}$$

这里 x 表示可能选择商品的数量，其他事物表示消费者的福利还来自其他许多方面，在我们的分析中它们是保持不变的。

3.1 式常常简写为

$$效用 = U(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{3.2}$$

当仅考虑两种商品时，3.2 式可写为

$$效用 = U(x,y) \tag{3.2'}$$

显然，在这里除了效用函数涉及的两种商品外，所有的事物(也就是说，分析框架以外的事物)都假定不变。在分析的每一步都提及其他条件不变的假定一定很乏味，但我们应该注意其他条件不变的假定一直在起作用。

3.2.4 效用函数的参数

我们用效用函数来表示个人对一些特定参数(argument)的偏好序，在大多数情况下，效用函数(式 3.2)用来表示在某一时点，个人对可购买商品的偏好序。在某些情况下，我们会在效用函数中使用另外一些参数，所以，现在来介绍几个这样的参数。例如，当讨论个人从真实财富(W)中获得的效用时，我们有

$$效用 = U(W) \tag{3.3}$$

除非个人是个罕见的吝啬鬼，否则财富本身并不能给个人带来效用。只有将财富用于购买消费品，它才会带来效用。所以，式 3.3 意味着财富带来的效用，是源于个人将其用于购买效用最大的消费品。

我们在以后的章节中会用到另两个参数。在第 16 章，我们将讨论个人的劳动—闲暇(labor-leisure)选择，因此也将考虑闲暇在效用函数中的作用，我们会使用到形如

$$效用 = U(c,h) \tag{3.4}$$

的效用函数。其中 c 表示消费，h 表示在一段给定时间内的非工作时间(即闲暇)。

第 17 章中，我们将讨论在不同时段内个人的消费决策问题。于是我们用以下形式的效用函数

$$效用 = U(c_1,c_2) \tag{3.5}$$

c_1 表示在现时段的消费，c_2 表示在下一时段的消费。通过改变效用函数中的参数，我们可用简洁的

形式集中精力对个人在各个特定方面的选择进行讨论。

我们从下面的定义出发，考察个人的行为。

定义

效用。用形如

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{3.6}$$

的函数来表示个人的偏好，这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别代表了个人在某一个时期消费的 n 种商品的数量，如果个人的偏好序维持不变，那么这个效用函数就是唯一的。

3.2.5 经济品

在以上定义中，我们把“商品”作为变量，也就是说，无论 x_i 代表的数量有多少，我们都认为在某一个时段内，人们在较多的 x_i 和较少的 x_i 中偏好较多的 x_i。同时我们也认为，无论是像一个热狗那样的简单消费品，还是像财富和闲暇那样复杂的组合，这一假定都成立。图 3.1 中用两种商品的效用函数图像表示了这一假定。由图可见，相比于消费组合(x^*, y^*)，个人更偏好在阴影区域中的消费组合，这是因为在阴影区域的消费组合中至少有一种商品的数量更多。根据我们对“商品”的定义，在阴影区域的商品组合的偏好等级更高。同理，在标示为“劣于(x^*, y^*)”区域中的商品组合的偏好等级较低，因为没有一种商品的数量多于消费组合(x^*, y^*)。用问号标示的两个区域中的商品组合的偏好等级与消费组合(x^*, y^*)的偏好等级较难进行比较，因为它的一种商品数量较多但另一种却较少。它们之间的比较将涉及两种商品的替代问题。

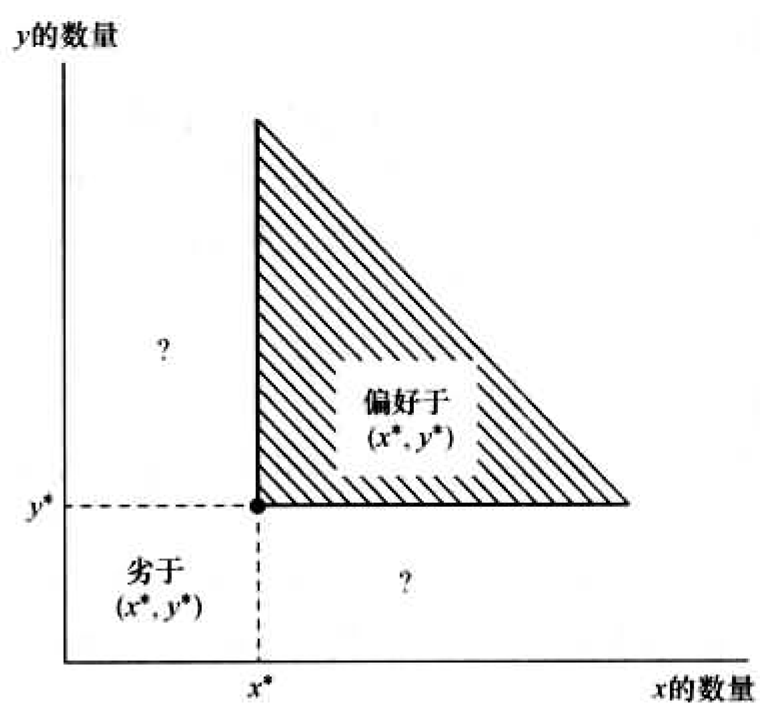


图 3.1　多消费一种商品优于少消费这种商品

图中阴影区域表示的是那些偏好等级明显高于消费组合(x^*, y^*)的消费组合。在其他条件不变时，个人偏好更多的商品。用“?”标示的区域中的消费组合的福利改变则并不明确，因为它们的一种商品增多但另一种减少了。

3.3 交易与替代

大部分经济活动都涉及个人之间的自愿交易。当有人进行购买行为(我们假定他购买面包)时，他就自愿为更有价值的东西(面包)而放弃另一些东西(钱)。为了考察这种自愿交易，需要提出一个规范的方法来表明交易在效用函数中的作用。

3.3.1 无差异曲线和边际替代率

要讨论个人自愿的消费活动，就必须用到无差异曲线。在图 3.2 中，曲线 U_1 代表对于个人来说利益相当的所有 x 和 y 的组合(注意：所有关于边际函数的其他未知量都是常量)。比如，购买 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 对个人来说是一样的。无差异曲线表示个人所有的偏好顺序相同的消费组合。

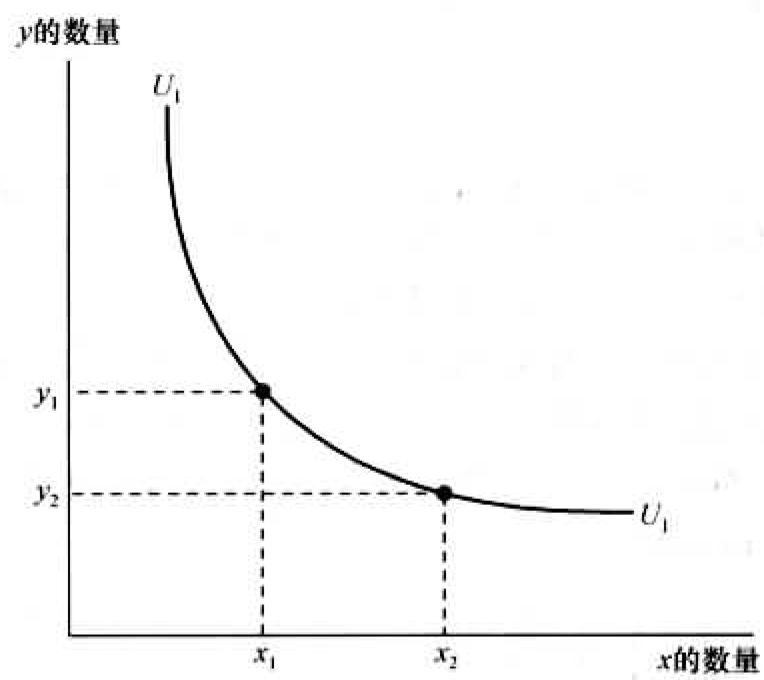


图 3.2　一条单一的无差异曲线

曲线 U_1 表示所有能使个人得到相同效用的 (x, y) 组合。曲线的斜率表示个人愿意以 x 交换 y 的程度。斜率的负值表示边际替代率。在这里我们假定边际替代率逐渐减少。

定义

无差异曲线。无差异曲线(indifferent curve)，或多维坐标系中的无差异曲面表示一系列由对于个人来说利益相当的 (x, y) 组合。也就是说，这些组合可带来相同的效用。

在图 3.2 中，曲线的斜率为负，表示如果放弃一定数量的 y，需要得到一定量的 x 才能获得相同的效用。当 x 增大时，曲线的斜率也增大(从负无穷增大到趋近于零)。这样，我们通过图像就可知道：沿 x 轴正方向，人们以 x 换取 y 的意愿越来越小。用数学的语言来说，就是随着 x 的增加，曲线斜率越来越小。因此，我们又可以引出以下定义：

定义

边际替代率。无差异曲线上某一点的斜率的负值,被称作这一点的**边际替代率**(**marginal rate of substitution, *MRS***)。用公式表示为

$$MRS = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{U=U_1} \tag{3.7}$$

式中符号表示在 U_1 曲线上各点的斜率值。

曲线 U_1 和曲线上的 *MRS* 值告诉我们某个人在自愿交易时作出的某些决策。如在(x_1, y_1)点,这个人有很多的 y,那么他就愿意以适量的 y 来换取一些 x。在这种情况下,曲线非常陡峭。这就像某人有好多面包(y),但缺饮料(x)喝,他就很愿意用几个面包(比如5个)来换一瓶饮料。

在(x_2,y_2)处,无差异曲线平缓一些。这时,这个人有相当多的饮料,因而只愿以很少的面包(比如1个)来换一瓶饮料。因此,从(x_1,y_1)到(x_2,y_2),*MRS* 值减少了。U_1 曲线斜率的改变表示个人所能获得的 x 与 y 的组合将直接影响到他购买商品的方式。

3.3.2 无差异曲线图

在图3.2中,只有一条无差异曲线。但实际上,在 x-y 坐标系中,密集地排列着无数条这样的曲线。每条曲线对应着不同的效用水平。因为 x 物品和 y 物品的组合代表着一个效用水平,所以在坐标系中的每一点必有一条曲线穿过。无差异曲线与地图上的等高线很类似,只不过它代表的是效用的"高度"。图3.3给出了多条无差异曲线,用同样的方法可以画出无数条这样的曲线。当我们顺着箭头所指方向移动时,曲线所代表的效用递减,也就是说曲线 U_1 的效用水平低于曲线 U_2 的效用水平,而曲线 U_2 的效用水平又低于曲线 U_3 的效用水平。前提是在图3.1中我们规定:多消费一种商

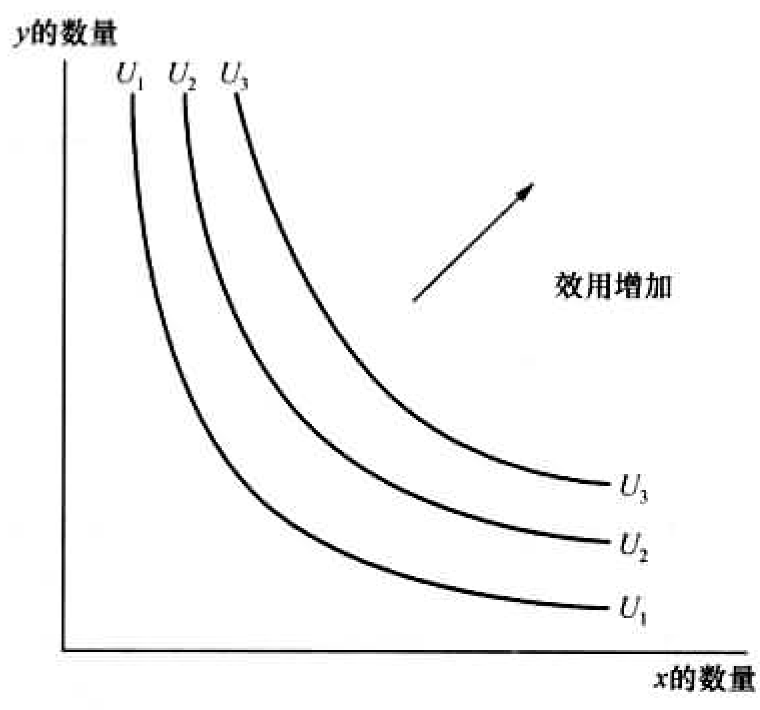


图3.3 在 x-y 坐标系中有无数条无差异曲线

在 x-y 坐标系里,每个点必有一条无差异曲线穿过,每条曲线对应不同的效用水平。随图中箭头的方向(x 与 y 轴正方向的平分线),曲线所对应的效用水平递增。

品优于少消费这种商品。在前面的讨论中也提到，由这些曲线不能得到相应的 x 和 y 的具体数量，而只能得到对应的效用水平，在效用水平上是 $U_3 > U_2 > U_1$。

3.3.3 无差异曲线及其传递性

我们来看一道关于偏好一致性与偏好效用函数的思考题：对于同一个人，他的两条无差异曲线会相交吗？假设可以相交，那么就可以得到图 3.4，下面我们用地图法来分析这是否违反了基本常识。很快我们就可以发现在 E 点似乎有错误：那里的"高度"既和 U_1 相同，又和 U_2 相同。但在地图上不可能有一点既是海拔 100 英尺又是海拔 200 英尺。

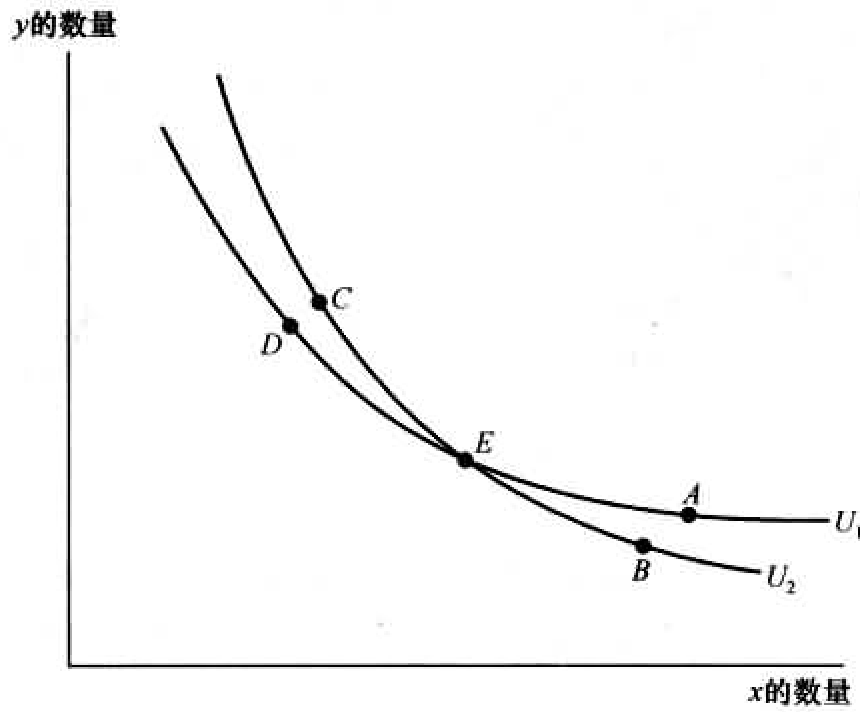


图 3.4　相交的无差异曲线意味着偏好不一致

点 A 和 D 在同一条无差异曲线上，因而对于个人来说，获得的效用相同。但是传递性定理表明 A 优于 D。因此，相交的无差异曲线意味着个人的偏好不一致。

为了更正式地证明以上假设不成立，让我们分析 A, B, C, D 所代表的商品的组合。由开始的假设可得：A 比 B 好，C 比 D 好。而 C 与 B 的效用是相同的（它们在同一条无差异曲线上）。那么，由传递性定理可知，A 比 D 好。而这与事实相悖，因为 A 与 D 在同一条无差异曲线上，应该具有同样的效用。因此，传递性定理证明无差异曲线不能相交。所有无差异曲线图都应该如图 3.3。

3.3.4 无差异曲线的凸性

效用函数与个人偏好之间的联系可以用多种方式表示，比如运用数学中凸集的概念说明边际替代率递减原理。如果集内的任何两点可以用直线相连，直线完全在集内，就可以说，这个点集是**凸的(convex)**。边际替代率递减的假定相当于这样一个假定：优于或相当于特定的(x^*, y^*)组合的所有

(x,y)的组合形成一个凸集。[1] 在图3.5(a)中,阴影中的所有组合都优于或无差异于(x^*,y^*)组合。任意两点[譬如(x_1,y_1)与(x_2,y_2)]都可以由一条位于阴影部分的直线连接起来。在图3.5(b)中,就不是这样了,连接(x_1,y_1)与(x_2,y_2)的直线通过了阴影以外的区域。因此,在图3.5(b)中通过(x^*,y^*)的无差异曲线并不服从于边际替代率递减的假定,因为优于或无差异于(x^*,y^*)的点集不是凸的。

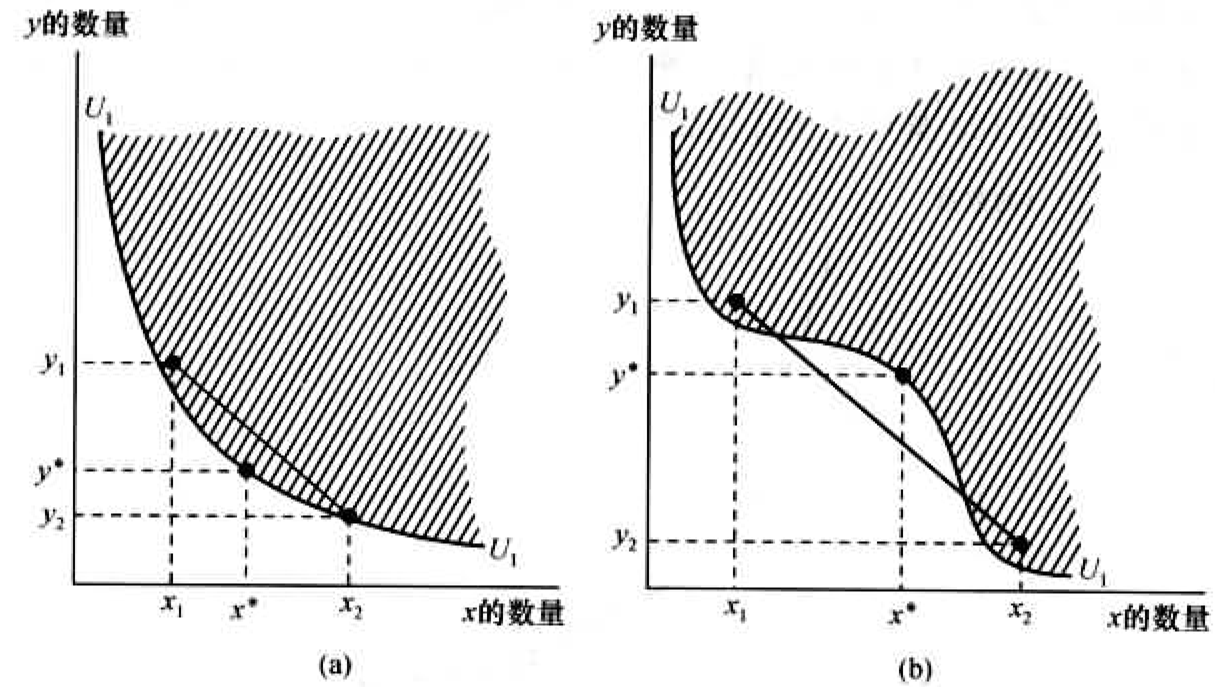


图3.5　无差异曲线性质之一:凸性(边际替代率递减)

在(a)中,无差异曲线呈凸状(U_1上任两点的连线位于U_1之上);在(b)中则有所不同,曲线上并非任一点的*MRS*都递减。

3.3.5　凸性与消费平衡

运用凸性概念,可说明个人在消费时倾向于保持某种平衡。假设在组合(x_1,y_1)和组合(x_2,y_2),个人所获得的效用相同,那么,如果无差异曲线是严格意义上的凸曲线,则组合$[(x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2]$将优于原来的任一组合。[2] 所以,相对平衡的组合优于一种商品占过大比重的组合,如图3.6所示。这是因为假定无差异曲线是凸的,连接(x_1,y_1)与(x_2,y_2)的直线上的所有点都优于初始的点。因此位于这条直线中间的点$[(x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2]$,当然也优于初始的点。的确,如果能使商品达到更平衡的组合,其效用将大于初始点的效用。所以,严格局部下凸性等价于边际替代率递减的假定。这两个假定都排除了无差异曲线或曲线上的一段是直线的可能性。

---

① 此定义与假定效用函数拟凹性是等价的,我们在第2章讨论过这种函数,也会在接下来的部分继续研究它们。有时为了排除无差异曲线的某一段呈线性,我们会用到一个术语,**严格拟凹性(strict quasi-concavity)**。虽然我们通常会作出函数是严格拟凹的假定,但在一些地方我们会阐明无差异曲线中线性部分所带来的复杂因素。

② 当无差异曲线为线性时,三个组合的效用是相等的。

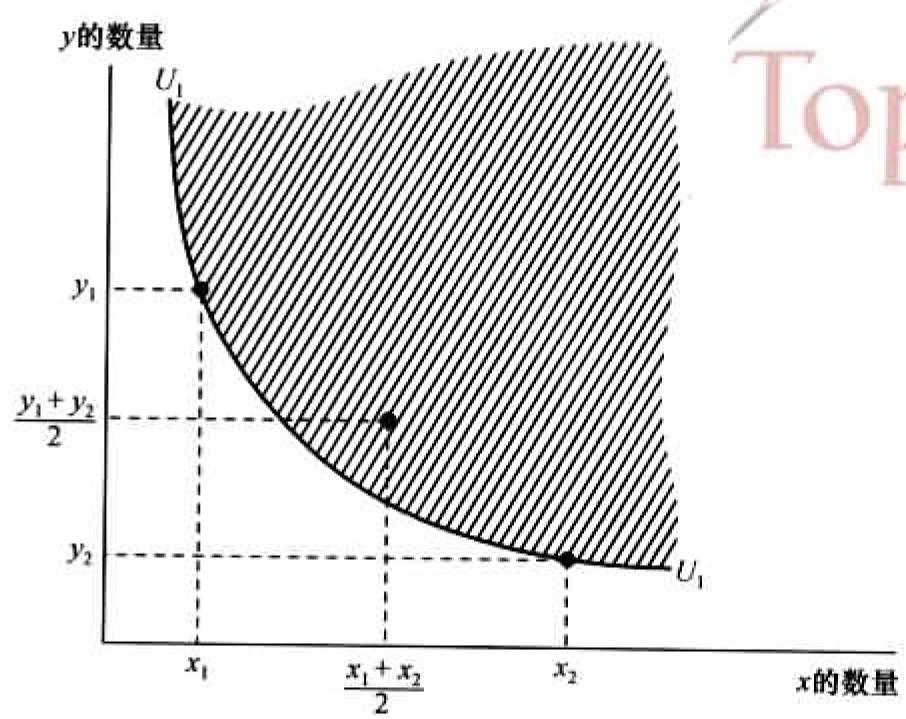


图 3.6　平衡的商品组合优于不平衡的组合

如果无差异曲线是凸的（服从边际替代率递减假定），曲线上任两点间连线上的点所表示的组合都优于初始组合。由此易得出：平衡组合优于不平衡组合。

例 3.1

效用与边际替代率的关系

假设一个人对汉堡包（y）和软饮料（x）的偏好序可以用下列效用函数来表达

$$\text{效用} = \sqrt{x \cdot y} \tag{3.8}$$

此效用函数的无差异曲线就是有相同效用的商品 x 和 y 的组合集。我们假设组合集的效用是10，那么，无差异曲线的等式就是

$$\text{效用} = 10 = \sqrt{x \cdot y} \tag{3.9}$$

等号两边同时平方，得

$$100 = x \cdot y \tag{3.10}$$

易知函数图像为一矩形双曲线，如图 3.7 所示。由式 3.10 可得 y 的表达式

$$y = 100/x \tag{3.11}$$

然后，我们运用边际替代率定义式（式 3.7），有

$$MRS = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}x(\text{沿 } U_1) = 100/x^2 \tag{3.12}$$

通过图像我们很清楚地看到，当 x 增大时，MRS 减小。若在无差异曲线的 A 点上个人有许多汉堡包（比如说 $x=5, y=20$），曲线很陡，MRS 很大

$$MRS_{(5,20)} = 100/x^2 = 100/25 = 4 \tag{3.13}$$

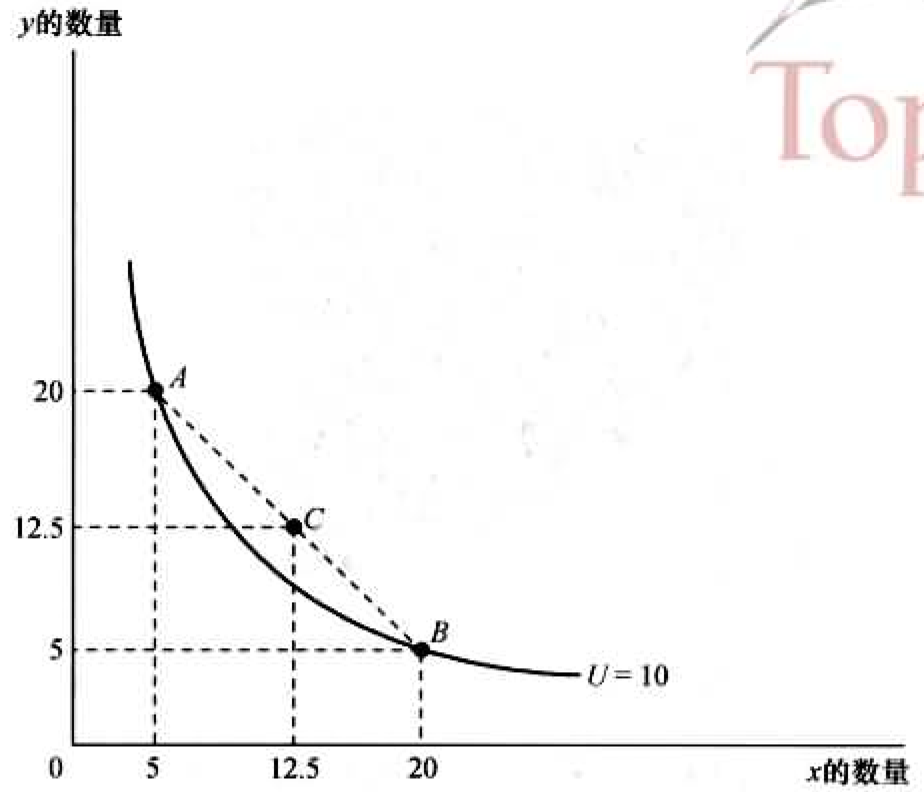


图 3.7　效用 = $\sqrt{x \cdot y}$的无差异曲线

这条无差异曲线表示函数 $10 = U = \sqrt{x \cdot y}$。在 A 点(5,20) MRS 为 4,这意味着这个人将以 4 个 y 交换 1 个 x。在 B 点(20,5) MRS 为 0.25,意味着这个人用 y 交换 x 的意愿大为减少。

这里,消费者愿意用 4 个汉堡包去换取 1 瓶软饮料;而在 B 点,他只有相当少的汉堡包($x = 20$, $y = 5$),曲线平坦,MRS 很小

$$MRS_{(20,5)} = 100/x^2 = 100/400 = 0.25 \tag{3.14}$$

现在,他为换取 1 瓶软饮料仅愿意放弃 1/4 个汉堡包。

需要指出的是,这个例子也能反映无差异曲线 U_1 凸性的情况。点 C 是点 A 与点 B 的中点,在 C 点,这个人有 12.5 个汉堡包和 12.5 瓶软饮料。因此,可知他的效用为

$$效用 = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{(12.5)^2} = 12.5 \tag{3.15}$$

在 C 点上的效用显然超过了 U_1 上的效用(那里的效用是 10)。

请回答:从以上的推导中可知,MRS 只取决于消费 x 的数量,这样认为对吗? 式 3.13 与式 3.14 隐含的 y 的数量是多少?(参考例 3.2)

3.4　数学推导

对 MRS 这一概念进行数学推导,有助于加深我们对无差异曲线的形状以及偏好本质的理解,接下来我们对仅涉及两种商品的效用函数进行数学推导。这样我们便可以从数学的角度来分析二维

无差异曲线图。在本章的结尾，讨论涉及更多商品的情况，尽管情况更复杂了，但其分析过程并没有更复杂。

3.4.1 MRS 和边际效率

如果用 $U(x,y)$ 表示一个人从两种商品中获得的效用，该函数的全微分为

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy \tag{3.16}$$

对于任何一条给定的无差异曲线，$dU=0$，所以我们可将式 3.16 变换为

$$MRS = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{U=\text{常量}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} \tag{3.17}$$

也就是说，x 对 y 的 MRS 等于 x 的边际效用（即 $\partial U/\partial x$）与 y 的边际效用（$\partial U/\partial y$）之比，这个结论是显而易见的。我们用"效用单位"（units，被称为 utils）来对效用进行度量。假设一个人只消费两种商品，食物（x）和衣服（y），1 单位额外的食物提供 6 单位的效用，1 单位额外的衣服提供 2 单位的效用，用式 3.17 算出 $MRS = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{U=\text{常量}} = \frac{6\text{utils}}{2\text{utils}} = 3$，所以此人愿意用 3 单位衣服去换取 1 单位食物。这个交易不会导致效用的改变，因为损失的效用完全抵消了获得的效用。请注意，效用单位在计算中被消掉了。尽管我们选取的用来度量效用的单位会影响边际效用，但 MRS 与这个单位的选取无关。[①]

3.4.2 无差异曲线的凸性

第 1 章中，我们描述了马歇尔是如何应用边际效用递减假定来解决水—钻悖论的。马歇尔从理论上指出，个人对商品的边际价值评估决定了商品的价值：个人愿意再为 1 品脱水支付的钱决定了水的价值。由于人们可能会认为水的边际价值会随着被消费的水量的增加而下降，马歇尔证明了水的交换价值为什么较低。乍一看，商品边际效用下降的假定与边际替代率递减的假定有关联：两者都有随着物品消费的增加，个人相对满意程度降低的含义。但是，这两个概念是很不同的（见练习题 3.3）。技术上说，MRS 递减假定和要求效用函数拟凹是等价的。效用函数拟凹的要求和所有商

① 更规范地说，令 $F(U)$ 为 U 的任意一个偏好序不变的映射［即 $F'(U)>0$］，对效用函数进行变换

$$MRS = \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{F'(U)\,\partial U/\partial x}{F'(U)\,\partial U/\partial y} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}$$

此即原函数 U 的 MRS。事实上，$F'(U)$ 项的消失表明了 MRS 与度量效用的单位无关。

品都要经历边际效用递减(即每个商品的f_{ii}为负)的假设的关系是很复杂的。[①] 这一点我们也应该能想到,因为边际效用递减的概念与如何度量效用本身有关,但无差异曲线的凸性却与该度量无关。

例 3.2

判断无差异曲线的凸性

通过计算给定的效用函数的 *MRS*,我们可以很便捷地判断无差异曲线的凸性。比起运用凸性的定义,尽管不易被推广到涉及两种以上商品的情形,这样的判断仍显得特别简便。现在我们来用 3.17 式判断三个不同的效用函数的凸性(练习题 3.1 提供了更多练习的机会)。

1. $U(x,y)=\sqrt{xy}$

这个例子只是例 3.1 的重复。为了简化代数运算,我们对效用函数两边取对数。因为取对数后偏好序不变,所以待求的 *MRS* 也不变。故可令

$$U^*(x,y)=\ln[U(x,y)]=0.5\ln x+0.5\ln y \tag{3.18}$$

应用 3.17 式得

$$MRS=\frac{\dfrac{\partial U^*}{\partial x}}{\dfrac{\partial U^*}{\partial y}}=\frac{\dfrac{0.5}{x}}{\dfrac{0.5}{y}}=\frac{y}{x} \tag{3.19}$$

---

① 我们已经证明,如果有效用函数 $U=f(x,y)$,则

$$MRS=\frac{f_x}{f_y}=\frac{f_1}{f_2}=-\frac{dy}{dx}$$

MRS 递减意味着 $dMRS/dx<0$,而

$$\frac{dMRS}{dx}=\frac{f_2(f_{11}+f_{12}\cdot dy/dx)-f_1(f_{21}+f_{22}\cdot dx/dy)}{f_2^2}$$

根据 $f_1/f_2=-dy/dx$,我们有

$$\frac{dMRS}{dx}=\frac{f_2[f_{11}-f_{12}(f_1/f_2)]-f_1[f_{21}-f_{22}(f_1/f_2)]}{f_2^2}$$

合并同类项,已知 $f_{12}=f_{21}$,有

$$\frac{dMRS}{dx}=\frac{f_2f_{11}-2f_1f_{12}+(f_{22}f_1^2)/f_2}{f_2^2}$$

分子与分母同乘 f_2,有

$$\frac{dMRS}{dx}=\frac{f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22}}{f_2^3}$$

如果我们假定 $f_2>0$(边际效用是正的),那么,*MRS* 将递减,有

$$f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22}<0$$

注意,边际效用递减($f_{11}<0$ 和 $f_{22}<0$)并不能保证不等式的成立,人们必须要关注 f_{12} 项。也就是说,人们必须了解 y 的减少对 x 的边际效用的影响。一般地说,预测此项的正负是不可能的。

我们在第 2 章就 *MRS* 递减的条件进行了讨论,这个条件保证了函数 f 是严格拟凹的。它表明服从于线性约束的函数 f 最大化的必要条件也是它的充分条件。在第 4 章和其他地方,我们将运用这一结论。

可以看到，这样比我们先前在例 3.1 所用的方法要更简单。[①] 显然，当 x 增加 y 减少时，MRS 减小，所以这条无差异曲线是具有凸性的。

2. $U(x,y)=x+xy+y$

本例中，对效用函数进行变换不会给我们提供便利。应用式 3.17 得

$$MRS=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{1+y}{1+x} \tag{3.20}$$

当 x 增加 y 减少时，MRS 减小，所以这条无差异曲线也是具有凸性的。

3. $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

本例中，对函数进行一定转换会更加方便，令

$$U^*(x,y)=[U(x,y)]^2=x^2+y^2 \tag{3.21}$$

因为这个方程表示的是一个圆，所以我们应该怀疑这个效用函数的无差异曲线会有一些问题。当我们应用 MRS 的定义得出

$$MRS=\frac{\frac{\partial U^*}{\partial x}}{\frac{\partial U^*}{\partial y}}=\frac{2x}{2y}=\frac{x}{y} \tag{3.22}$$

很明显，当 x 增加 y 减少时，MRS 增大！因此这条曲线是凹的而不是凸的，显然以上函数不是一个拟凹函数。

请回答：如果将 x 和 y 加倍，上述三个例子中的 MRS 会发生变化吗？换言之，MRS 是否只取决于 x 和 y 的比率，而与购买的绝对规模无关？

3.5 特定偏好的效用函数

我们不能直接观察到个人对商品组合的偏好序以及与之相对应的效用函数。若想了解人们的偏好，我们就需要观察他们对于收入、价格和其他因素变化的反应。尽管如此，我们还是应该仔细考察几个特定效用函数的表现形式，这样做不仅能够更加深入地了解这些已被观察过的行为，更重要的是理解这些函数的性质对于我们解决问题是很有帮助的。这里考察的是两种商品的几个特定效用函数。这四个函数的无差异曲线图像在图 3.8 中给出。可以看出，这些图像包括了几种可能的形状，当进一步研究到三种或以上商品的情形时，我们可得到更多的形状，这些将在以后的章节中提及。

① 我们看例 3.1 中 $U=10$ 的无差异曲线，对这条曲线而言，$y=100/x$，所以式 3.19 应写为 $MRS=100/x^2$。

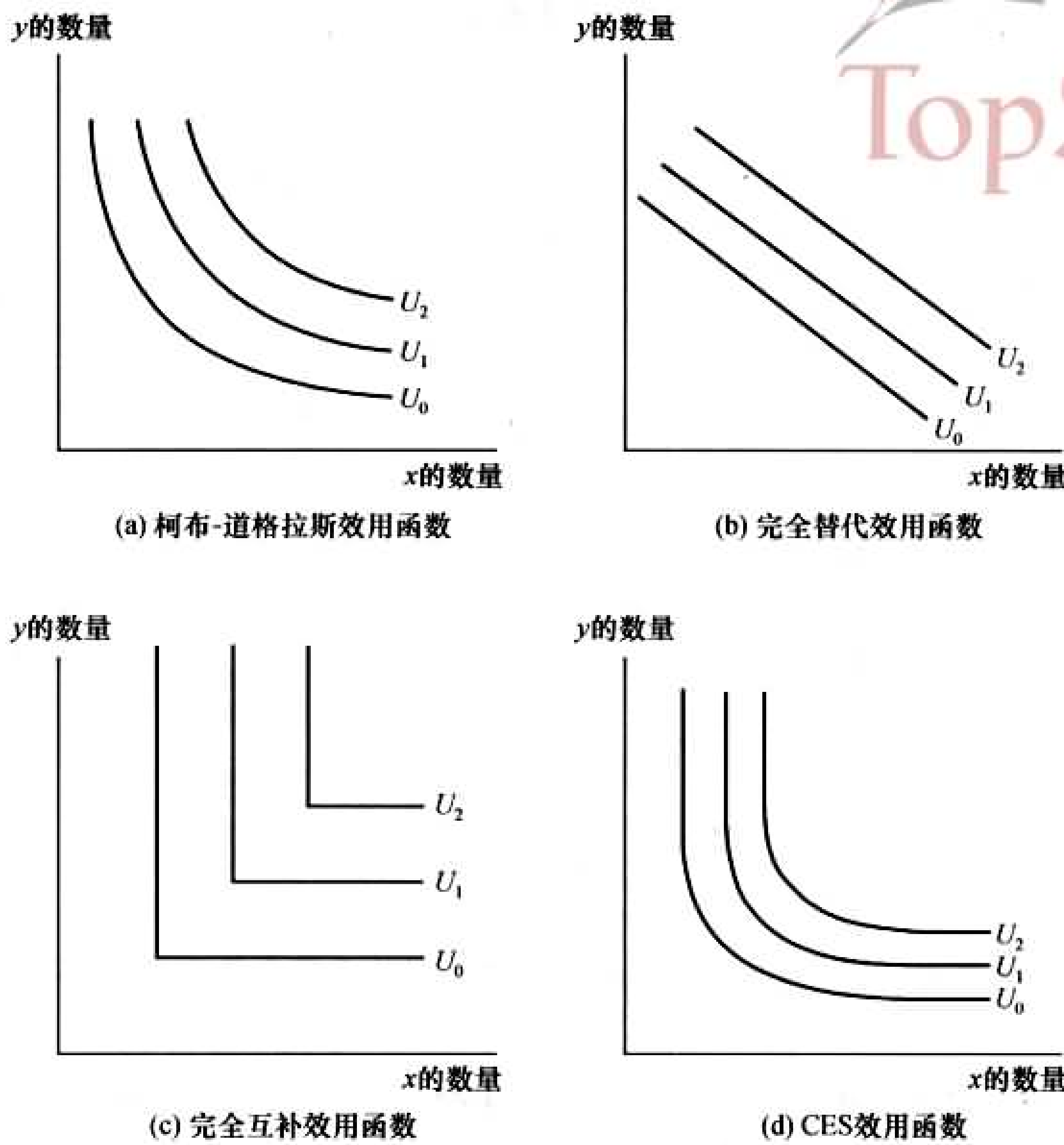


图 3.8　几个效用函数的图形

这四条无差异曲线展示了 x 对 y 不同程度的可替代性。完全替代(b)和不可替代(c)为两种极端情况，柯布-道格拉斯函数和 CES 函数(在这里其可替代性画得较小)则处在这两个极端之间。

3.5.1　柯布-道格拉斯效用函数

图 3.8(a)所示的是一个我们已熟悉的无差异曲线的形状，通常用下面给出的形式来表示能够产生这种形状的效用函数

$$\text{效用} = U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} \tag{3.23}$$

其中，α 和 β 为正常数。

在例 3.1 和例 3.2 中，我们研究了当函数中 $\alpha = \beta = 0.5$ 时的特例，式 3.23 所示的一般形式被称为**柯布-道格拉斯效用函数(Cobb-Douglas utility)**。因为柯布(Cobb)和道格拉斯(Douglas)在研究美国经济中的生产关系时(见第 7 章)使用了这个函数，于是便以他们的名字命名。一般说来，α 和 β 的相对大小表示两种商品对个人的相对重要性。因为效用函数在单调映射下是唯一的，所以，为了方便起见，在很多时候规定 $\alpha + \beta = 1$。

3.5.2 完全替代

图 3.8(a)的线性无差异曲线是下面的效用函数的图像

$$效用 = U(x,y) = \alpha x + \beta y \tag{3.24}$$

其中,α 和 β 为正常数。显然,这个函数的无差异曲线是一条直线:由于函数是线性的,所以对于给定的 $U(x,y)$,它的无差异曲线可以画成一条直线。由于这些无差异函数的线性特征,我们用**完全替代(perfect substitutes)**这个术语来形容 x 和 y 的这种关系。因为 *MRS* 在这条无差异曲线上处处相等(等于 α/β 这一常数),所以在完全替代函数中 *MRS* 不会递减。具有这种偏好的个人为了得到 1 单位 x,愿意放弃相同数量的 y,而不在乎正在消费的 x 有多少。这可以用来描述来自不同品牌但本质上一样的产品之间的关系。举例来说,很多人(包括笔者)并不在乎自己在哪里加油,不论埃克森(Exxon)和美孚(Shell)公司的宣传部门的宣传做得有多好,1 加仑汽油就是 1 加仑汽油。我完全愿意用 10 加仑埃克森公司的汽油换去 10 加仑美孚公司的汽油,因为对我来说,用哪一种、在哪里加满油都一样。正如我们在下一章将看到的,这种关系意味着我会从价格最低的地方购买汽油。因为我不会经历埃克森对美孚 *MRS* 递减的过程,所以我用不着在两种汽油之间寻求平衡。

3.5.3 完全互补

图 3.8(c)所示的 L 形无差异曲线所表示的情形与完全替代截然相反。这种偏好适用于"匹配"的商品,比如我们所熟悉的咖啡和奶油、花生酱和果酱、奶酪和熏鲑鱼。图 3.8(c)所示的无差异曲线,表示这些商品消费的比例关系,将按照曲线顶点代表的比例固定。一个偏好 8 盎司咖啡配 1 盎司奶油的人,会选择 16 盎司咖啡配 2 盎司奶油,对他来讲,没有配奶油的咖啡是没有价值的,同样,没有配咖啡的奶油也是没有价值的。只有同时选择两种商品才能增加效用。

L 形无差异曲线的效用函数数学表达式如下

$$效用 = U(x,y) = \min(\alpha x, \beta y) \tag{3.25}$$

其中 α 和 β 是两个取正值的参数,运算符"min"表示效用由 αx 和 βy 中较小的一个决定。在咖啡—奶油的例子中,用 x 表示咖啡,y 表示奶油,效用函数如下

$$效用 = U(x,y) = \min(x, 8y) \tag{3.26}$$

即 8 盎司咖啡配 1 盎司奶油提供 8 单位的效用,而 16 盎司咖啡配 1 盎司奶油仍然只提供 8 单位的效用,因为 $\min(16,8) = 8$。没有配奶油的多余咖啡没有价值,在图形上这表示为从顶点沿着无差异曲线的水平部分移动(即 x 增加而 y 不变),效用不变。如果咖啡与奶油都加倍[增加到(16,2)],效用才会增加到 16。

更普遍的情况是,如果满足

$$\alpha x = \beta y \tag{3.27}$$

则两种商品都不会被过度消费,因此,

$$y/x = \alpha/\beta \tag{3.28}$$

式 3.28 表示的是当选择落在无差异曲线的顶点时两种商品所具有的固定比例关系。

3.5.4 CES 效用函数

目前介绍的三种特殊效用函数都是不变替代弹性(constant elasticity of substitution,CES)函数的特例,其一般形式为

$$效用 = U(x,y) = \frac{x^{\delta}}{\delta} + \frac{y^{\delta}}{\delta} \tag{3.29}$$

其中 $\delta \leqslant 1, \delta \neq 0$;并且,

$$效用 = U(x,y) = \ln x + \ln y \tag{3.30}$$

很明显,式 3.29 中令 $\delta = 1$,则得到完全替代效用函数;当 $\delta = 0$ 时,我们得到形如式 3.30 的柯布-道格拉斯效用函数。[①] 通过对极限的讨论,也能看出当式 3.29 中 $\delta = -\infty$ 时,我们得到完全互补效用函数。

图 3.8 所示曲线的形状由替代参数 σ 决定,这个函数中的术语"替代弹性"也正源自于此。在 CES 效用函数中,$\sigma = 1/(1-\delta)$;在完全替代效用函数中,$\sigma = \infty$;在完全互补效用函数中,$\sigma = 0$。[②] 由于我们可以通过 CES 效用函数分析这些特例和其他介于这些特例之间的情况,因此它在阐释各种经济关系中涉及的替代性程度时很有用。

如果令 $\delta = -1$,我们得到图 3.8(b)中 CES 效用函数的形状,即

$$效用 = -x^{-1} - y^{-1} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \tag{3.31}$$

这时,$\sigma = \frac{1}{1-\delta} = \frac{1}{2}$,由图可见,这些弯曲的无差异曲线明显地处于柯布-道格拉斯效用函数曲线和完全互补效用函数曲线之间。这个效用方程中的负号可能显得比较奇怪,但考虑到 x、y 的边际效益都是正的且递减,负号的出现也就不足为奇了。这说明了为什么方程 3.29 中分母必须包含 δ。在方程 3.31 的特例中,效用是随着 x 和 y 的增加,从 $-\infty$(此时 $x = y = 0$)增长到 0。这或许是个奇怪的效用标度,但它完全可以被人们所接受。

例 3.3

同位偏好

图 3.8 中描述的全部效用函数都是同位的(见第 2 章),也就是说,这些函数的边际替代率只取决于两种商品的数量之比,而与商品数量的总数无关。这一点在完全替代效用函数(MRS 在每一点都相同)和完全互补效用函数(当 $y/x > \alpha/\beta$ 时,MRS 为无穷大;当 $y/x = \alpha/\beta$ 时,MRS 不确定;当 $y/x < \alpha/\beta$ 时,MRS 为零)上体现得很明显。对于柯布-道格拉斯效用函数,其 MRS 可表示为

① CES 函数很容易推广为允许两种商品有不同的权重。由于人们运用函数是为了考察替代问题,我们通常并不进行这种推广。在 CES 函数的一些应用中,我们也将略去函数的分母,因为它仅构成一个规模因素。但如果 δ 为负,我们则要对分母进行一定限制,以保证效用为正。

② 替代弹性的概念以及它与生产函数的联系在第 7 章中将有详细的讨论。

$$MRS=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{y}{x} \tag{3.32}$$

显然,*MRS* 只取决于 y 与 x 之比。请读者自己证明 *CES* 效用函数也是同位的(见练习题 3.10)。

效用函数是位似函数的重要性在于,任何两条无差异曲线都很相似,曲线的斜率只取决于 y 与 x 之比,而与曲线到原点的距离无关,高效用的无差异曲线的形状和低效用的一样。因此,当我们通过观察一条无差异曲线及其相邻的几条无差异曲线,来研究一个具有同位偏好的个人行为时,我们不用担心得到的结果会因效用水平的不同而有显著的改变。

请回答:如何从几何的角度定义一个函数是同位的?具有特定 *MRS* 的所有点的轨迹在个人无差异曲线图上看起来是怎样的?

例 3.4

非同位偏好

尽管图 3.8 种的无差异曲线图表示的全部是同位偏好,但这并不意味着所有的效用函数都是同位的。考虑下面的效用函数

$$效用 = U(x,y) = x + \ln y \tag{3.33}$$

对于这个函数,商品 y 表现出边际效用递减,而商品 x 则未表现出该规律。因此有

$$MRS=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y \tag{3.34}$$

MRS 随着选择商品 y 的数量减少而递减,但它对于 x 被消费的数量是独立的。因为 x 具有一个恒定的边际效用,个人为再获得 1 个单位的 x 而放弃 y 的意愿仅由他已有的 y 的数量决定。与同位偏好的情形相反,这时 x 和 y 同时加倍,*MRS* 也增大一倍,而不是不变。

请回答:方程 3.33 中,效用函数的无差异曲线的形状是什么样子的?你能想象出这种函数所描述的情况么?

3.6 多种商品的情形

目前我们在只存在两个商品的情形下研究的所有概念,均可推广到任意多个商品的函数的情形,接下来我们将对这些推广进行简单的探讨。尽管这样的探讨不会带来很多新东西,但是正如我们在以后章节中所见到的那样,考虑人们面对多种商品时的偏好问题在应用经济学中是很重要的。

3.6.1 多种商品的 MRS

假设效用是 n 种商品的函数，即

$$效用 = U(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{3.35}$$

其全微分为

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n \tag{3.36}$$

正如前面我们所做的，通过令 $dU=0$，我们能得到任意两种商品之间的 MRS。推导中，我们仍旧令那些我们不关心的商品为常量。因此得到

$$dU = 0 = \frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U}{\partial x_j}dx_j \tag{3.37}$$

求得

$$MRS(x_i 对 x_j) = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_j}} \tag{3.38}$$

这与方程 3.17 完全相同。但是，这个概念会和二维条件下一样有用么？在两种商品情形下，一个人是如何用一种商品交换另一种商品是个有趣的问题——这种交易我们能够观察到。但在多种商品情形下，一个人不太可能在用一种商品交换另一种商品的同时，保持其他商品不变，更可能的情况是，某一事件（比如价格上涨）导致一个人要减少玉米片的消费数量时，这一事件也会导致他改变其他商品诸如牛奶、糖、勺子等的消费数量。我们在第 6 章中将见到，研究方程 3.35 是研究这种重新分配过程的最好方式。即便如此，在下一章中当我们要提出效用最大化这一概念时，在两种商品之间进行权衡的概念还是十分有用的。

3.6.2 多种商品的无差异曲面

将无差异曲线的概念推广到多维情形时，在数学上不会有困难，我们将无差异曲线定义为在 n 维空间中满足下面方程的点集

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k \tag{3.39}$$

其中，k 是一个给定的常数。如果效用函数是拟凹的，那么满足 $U \geq k$ 的点集便是凸的，也就是说，连接 $U=k$ 的无差异曲面上任意两点的直线上所有的点都满足 $U \geq k$。在以后的应用中，我们会发现这条性质是最有用的。遗憾的是，满足函数在多维情形下拟凹的条件并不是很直观（见第 2 章的拓展），而且人们最多只能看到三个维度。因此，当我们需要直观地表示时，就回到两种商品的情形。

小　结

本章论述了经济学家是如何将物品选择中的个人偏好公式化的。从这些偏好中得出的一些结论将成为我们对后面章节中的选择理论进行分析的中心：

- 如果人们在物品选择中遵循一定的基本行为要求，他们就可对各种商品的消费组合进行排列并可用一种效用函数表示这种排列。进行选择时，人们的行为遵循效用函数最大化的原则。
- 两种物品的效用函数可表示为无差异曲线图。图中的每条无差异曲线表示给定效用水平下所有的商品组合。
- 无差异曲线的负斜率称为边际替代率（*MRS*）。它表示个人为多得到一单位商品（x）而愿意放弃的另一种商品（y）数量的比率。
- 边际替代率随着 x 被 y 所替代而不断下降的假设与个人消费选择权衡的概念是一致的。如果边际替代率不断下降，个人的无差异曲线就是严格凸的，也就是说他的效用函数是严格拟凹的。
- 个人在两种或更多商品情形下的偏好可能有很多，但通过几个简单的函数我们可以涵盖那些重要的不同点。我们考察了柯布-道格拉斯函数、线性函数（完全替代）、固定比例函数（完全互补）和 CES 函数（其他函数只是它的特例）。
- 数学上，将两种商品的情形推广到多种商品很简单。我们看到，通过研究人们在多种商品中的选择，对选择理论的理解会进一步加深。但是多种商品情形在数学上并不直观，所以我们还是主要靠两种商品情形来建立直观性。

练　习　题

3.1 画出下列函数的无差异曲线并判断它们是否是凸的（即它们的边际效率是否随 x 递增而递减）。

a. $U(x,y)=3x+y$

b. $U(x,y)=\sqrt{x\cdot y}$

c. $U(x,y)=\sqrt{x}+y$

d. $U(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

e. $U(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$

3.2 在第 72 页脚注①里我们曾说明，为了使两种商品的效用函数具有严格递减的边际替代率（即曲线呈严格拟凹），必须满足下列条件

$$f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22}<0$$

利用这一条件检验练习题 3.1 中各效用函数无差异曲线的凸性。描述你在这一过程中发现的捷径。

3.3 对于下列效用函数：

a. $U(x,y)=xy$

b. $U(x,y)=x^2y^2$

c. $U(x,y)=\ln x+\ln y$

它们的边际替代率都是递减的，但它们显示的边际效用却分别是不变、递增与递减的。你能从中得出什么结论？

3.4 正如我们在图 3.5 中所见，为证明无差异曲线的凸性，一种方法是证明在一条满足 $U=k$ 的无差异曲线上的任意两点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 和点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 上的效用不小于 k。试用这种方法讨论下面三个函数的无差异曲线的凸性，并将你的结果用图形表示出来。

a. $U(x,y)=\min(x,y)$

b. $U(x,y)=\max(x,y)$

c. $U(x,y)=x+y$

3.5 Phillie Phanatic 总是以他独特的方式吃他带到球场的食物——一英尺长的热狗肠配半块圆面包、一盎司芥末和两盎司酸黄瓜。他的效用是这四种物品的函数，并且其中单一元素的增加是没有价值的。

a. 他的效用函数属于哪种类型？

b. 如何通过将他的效用函数视为一个商品来简化问题？这个商品是什么？

c. 假设一英尺长的热狗肠的成本是 1 美元，每个圆面包的成本是 0.50 美元，一盎司芥末的成本是 0.05 美元，一盎司酸黄瓜的成本是 0.15 美元，b 问中的商品的成本是多少？

d. 如果热狗肠的价格上升 50%，b 问中的商品的价格上升的百分比为多少？

e. 如果面包的价格上升 50%，这将会对商品的价格造成什么样的影响？你的答案为什么和 d 问的不同？

f. 如果政府想通过征收 Phillie Phanatic 买的那四种商品的税来获得 1 美元税收，试问政府应该如何分配税额以使 Phillie Phanatic 损失的效用最小？

3.6 很多广告词都像是在断言某种人们的偏好，请用不同的效用函数描述下列广告词。

a. 人造黄油——和天然的一样棒

b. 一切都因可口可乐变得更好

c. 品客薯片——一口停不住

d. 脆脆皮的甜甜圈就是比唐肯的好

e. 米勒酒提醒我们"负责地"饮酒（"不负责地"饮酒又会是什么样子？）

3.7 假设给某人提供效用的商品，其初始数量为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$。

a. 在这个人的无差异曲线图上画出这两个初始数量。

b. 如果此人可以和别人用 x 交换 y，他将会做怎样的交易？不会做怎样的交易？这些交易和此人在点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 时的 MRS 有何关联？

c. 假设此人拥有初始数量的商品时已相当满足，要是交易给他增加的效用小于 k，他根本懒得去做，你怎样在无差异曲线图上表示出这一点？

3.8 例 3.3 说明了柯布-道格拉斯效用函数

$$U(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$$

的边际替代率由下式给定

$$MRS = \frac{\alpha}{\beta}(y/x)$$

a. 这个结果是否取决于 $\alpha+\beta=1$？它与选择理论有无关系？

b. 对于一组商品 $y=x$，其边际替代率是如何取决于 α 和 β 的？为什么 $\alpha>\beta$ 时，$MRS>1$？请用图示作出你的直观解释。

c. x_0 与 y_0 为给定的最低生活水平，假设某人的效用仅仅是由超过这一最低水平的 x 与 y 的数量来决定的，在这种情况下

$$U(x,y) = (x-x_0)^{\alpha}(y-y_0)^{\beta}$$

这是一个齐次函数吗？（更进一步的讨论请参见第 4 章的扩展部分。）

3.9 如果效用函数满足：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

则称它的两种商品具有独立的边际效用，试证明当我们假定每一商品的边际效用为递减时，具有独立边际效用的效用函数都会有递减的边际替代率。举例证明其逆命题是错的。

3.10 a. 证明 CES 函数 $\alpha\frac{x^{\delta}}{\delta}+\beta\frac{y^{\delta}}{\delta}$ 是位似函数。*MRS* 取决于 y/x 的比率吗？

b. 证明从 a 中得出的结果与 $\delta=1$（完全替代）和 $\delta=0$（柯布-道格拉斯函数）相符。

c. 证明对所有 δ 小于 1 的值来说，边际替代率都是严格递减的。

d. 证明如果 $x=y$，这个函数的 *MRS* 仅取决于 α 与 β 相对量的大小。

e. 当 $\delta=0.5$ 和 $\delta=-1$ 时，$y/x=0.9$ 与 $y/x=1.1$，试计算这一函数的 *MRS*。当 *MRS* 在 $x=y$ 附近处变动时，它变动的程度如何？你如何从几何图形上给予解释？

推荐阅读文献

Jehle, G. R, and P. J. Reny. *Advanced Microeconomic Theory*, 2nd ed. Boston: Addison Wesley-Longman, 2001.

该书第 2 章中对于当基本理性定理成立时，效用函数的存在进行了很好的论证。

Kreps, David M. *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 1990.

该书的第 1 章对偏好理论有较详细的论述，并对拟凹曲线给出了很好的解释。

Kreps, David M. *Notes on the Theory of Choice*. London: Westview Press, 1988.

该书精彩地论述了偏好理论函数。该书的绝大多数讨论集中在不确定形式的效用上。

Marshall, A. *Principles of Economics*. 8th ed. London: Macmillan & Co., Ltd., 1920. Chaps. I-IV. Book III.

该书属早期基础教材，但书中对消费理论的论述仍然具有很强的可读性和趣味性。

Mas-Colell, Andrea, Michael D. Whinston, and Jerry R. Greem. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press, 1995.

该书第 2 章和第 3 章给出了偏好关系详细的发展历史，以及它们在效用函数中的意义。

Stigler, G. "The Development of Utility Theory". *Journal of Policital Economy 59*, pts. 1—2 (August/October 1950): 307—327, 373—396.

扩　展

特殊的偏好

让我们完整而又清晰地纵览一遍效用理论的历史，并从中得到启迪。

特别偏好

效用函数的适用性很强，可以应用于各种情况。用一些函数来反映一些问题的本质，比起用文字描述，能给我们以更深刻的启发。现在我们来看看经济学家试图用特定函数形式来描绘的偏好的三个方面：（1）质量（quality）；（2）习惯与成瘾（habits and addictions）；（3）利他偏好（second-party preferences）。

E3.1 质量

由于许多消费项目在质量上大不相同，因此，经济学家们对将这些不同的消费放入一个选择模型中很有兴趣。一种方法是将不同质量的物品看做是完全不同的商品，但它们又互为相当接近的替代品。由于涉及的商品太多，这个方法并不实用。另一种方法是将质量本身看做是选择的对象，此时，效用可表达为

$$\text{效用} = U(q, Q) \qquad \text{(i)}$$

其中 q 是消费的数量，Q 是消费的质量。尽管这种方法可将质量与数量进行某种程度的替换，但当某种商品（如葡萄酒）存在多种质量时，这种替换就遇到困难。这时，我们可以对质量取平均值［如 Theil 所说的①，1982］。但当新商品的质量变化很大时（如个人电脑），这么做并不妥当。一个更一般的做法是［由 Lancaster 首先提出，1971］将商品的属性看做一个被明确定义的集合，并假定这些属性能够提供效用。如果商品 q 提供两种属性，a_1 和 a_2，那么其效用可写为

$$\text{效用} = U[q, a_1(q), a_2(q)] \qquad \text{(ii)}$$

效用的增加，既可能是个人消费更大数量的商品引起的，也可能是一个给定数量的商品具有更高的价值属性所引起的。

个人电脑

很多研究变化迅速的产业需求的经济学家都探讨过个人电脑这个例子。此时，仅考虑每年购买的个人电脑数量是明显错误的，因为新机器比旧机器要好很多（并且提供更多效用）。例如，Berndt、Griliches 和 Rappaport（1995）发现，主要由于属性的提高（比如更快的处理器、更好的硬盘），个人电脑的质量在相对较长的时间内每年要提高 30%。现在，一个人花 2000 美元购买一台个人电脑所获得的效用，比 5 年前一个相似的消费者获得的效用高出很多。

E3.2 习惯与成瘾

由于消费是个持续不断的过程，所以在某一时段中个人作出的决定，可能会影响到他在以后某个时段中的效用。当个人发现自己在某一时段中很喜欢使用一种商品时，他就形成了一种习惯，并会增加其在以后时段中对这种商品的消费量。习惯的极端情况就是成瘾（例如毒品、香烟或是看马克思兄弟的电影），此时，过去的消费显著地增加了目前消费的效用。一种从数学的角度描绘这个概念的方法是，假设 t 时期的效用既取决于 t 时期对这种商品的消费，又取决于以前对这个习惯商品（用 X 表示）的消费

$$\text{效用} = U_t(x_t, y_t, s_t) \qquad \text{(iii)}$$

其中，$s_t = \sum_{i=1}^{\infty} x_{t-i}$。

但是，在经验性应用中，我们并没有所有过去消费的数据。因此，普遍的做法是仅用目前的消费（x_t）和前一时段的消费（x_{t-1}）的数据来建立习惯模型。通常我们假设效用为

$$\text{效用} = U_t(x_t^*, y_t) \qquad \text{(iv)}$$

其中 x_t^* 是 x_t 和 x_{t-1} 的简单函数，比如 $x_t^* = x_t - x_{t-1}$ 或 $x_t^* = x_t / x_{t-1}$。这些方程表明，其他条件不变时，x_{t-1} 越大，现阶段选择的 x_t 就越多。

习惯模型

这种建立习惯模型的方法被用在很多事物上。斯蒂格勒与贝克尔（Stigler and Becker, 1977）曾用这种方法解释人们养成诸如打高尔夫球或看歌剧等爱好的原因。贝克尔、格罗斯

① Theil 同时建议通过考察各种商品的消费变化和收入弹性之间的关系来度量质量。

曼和墨菲(Becker, Grossman and Murphy)(1994)应用这个模型来研究吸烟和其他成瘾行为。他们证明了由于个人效用函数的动态性,人们年轻时少抽烟会对最终的香烟消费总量产生巨大的影响。经济学家一直在深入地研究成瘾行为是否是“理性的”。例如,Gruber 和 Koszegi(2001)证明,抽烟也可视为理性的选择,尽管存在着时间不一致的问题。①

E3.3 利他偏好

很明显,人们关心他人的福利。只有在承认人们之间的相互依存性后,我们才能理解诸如慈善性的捐资或为孩子们办宴会等现象。用某人 i 的函数可以表示利他偏好

$$效用 = U_i(x_i, y_i, U_j) \qquad (v)$$

其中,U_j 是另一个人的效用。

如果 $\partial U_i/\partial U_j > 0$,这个人就会有利他行为;但是当 $\partial U_i/\partial U_j < 0$ 时,他就表现出嫉妒的恶意行为。一般情况下 $\partial U_i/\partial U_j = 0$,此时介于上述两种情况之间。加里·贝克尔(Gary Becker)是个研究这些可能性的开拓者,他曾提出了很多观点,其中就包括社会互动理论(1976)和家庭理论中利他主义的重要性(1981)。

进化生物学和遗传学

生物学家从遗传学的理论出发,提出了一个效用方程的特定形式

$$效用 = U_i(x_i, y_i) + \sum_j r_j U_j \qquad (vi)$$

其中 r_i 表示 i 人和 j 人基因之间的相似程度。举例来说,家长和孩子之间的 $r_i = 0.5$,表亲之间 $r_i = 0.125$(Bergstorm, 1996)。描述了一些生物学家从这个函数中得到的关于进化行为的一些结论。

参考文献

Becker, Gary S. *The Economic Approach to Human Behavior*. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

——. *A Treatise on the Family*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1981.

Becker, Gary S., Michael Grossman, and Kevin M. Murphy. "An Empirical Analysis of Cigarette Addiction". *American Economic Review* (June 1994): 396—418.

Bergstrom, Theodore C. "Economics in a Family Way". *Journal of Economic Literature* (December 1996): 1903—1934.

Berndt, Erst R., Zvi Grilliches, and Neal J. Rappaport. "Econometric Estimates of Price Indexes for Personal Computers in the 1990s". *Journal of Econometrics* (July 1995): 243—268.

Gruber, Jonathan, and Botond Koszegi. "Is Addiction 'Rational' Theory and Evidence". *Quarterly Journal of Economics* (November 2001): 1261—1303.

Lancaster, Kelvin J. *Consumer Demand: A New Approach*. New York: Columbia University Press, 1971.

Stigler, George J., And Gary S. Becker. "De Gustibus Non Est Disputandum". *American Economic Review* (March 1977): 76—90.

Theil, Henri. "Qualities, Prices, and Budget Enquiries". *Review of Economic Studies* (April 1952): 129—147.

① 更多关于时间不一致性的讨论参见第 17 章。

第4章　效用最大化与选择

在这一章中，我们将考察经济学家用来解释个人行为的基本选择模型。这种模型假定：收入有限的消费者会充分运用他们的购买力来获取最大的效用。也就是说：消费者被假定是在预算约束的条件下寻求效用最大化的。我们以后将会看到，虽然这种模式的应用范围很广，但是，它们都是建立在同样的基本数学模型之上的，而且它们都得到了一个共同的基本结论：为了使效用最大化，消费者所选择购买的商品组合的任意两种商品的交换比率（边际替代率 *MRS*）要等于这两种商品的市场价格之比。市场价格为个人提供了有关机会成本的信息，而这种信息对消费者实际选择商品有着很重要的意义。

4.1　效用最大化与快速计算

非经济学家对我们所采用的研究方法有两点不满，因此在我们正式研究消费者选择理论之前，有必要先对这两点不满作出解释。第一点不满是：没有人真的会去做那种效用最大化所要求的“快速计算”。根据这个说法，当消费者在超级市场上购买东西时，他只是漫无目的地购买一些市场上现有的商品，并不遵照某种固定的模式来决定购买的品种与数量。经济学家们显然不赞同这个说法。他们对于人们在购买商品时是不加考虑地随意购买的说法表示怀疑（毕竟每个消费者都受到某种预算约束的限制），那么，对“快速计算”的抱怨也就没道理了。再回顾一下弗里德曼的台球击球手的例子，参加击球的人不会根据物理学定律事先快速计算然后打出一球，但这些定律确实能预测击球手的行为。因此，尽管没有人会时刻将拥有效用函数程序的计算机带在身边，但是，我们应该能够看到，效用最大化的模型确实能够预测人们的很多消费行为。确切地说，经济学家假设消费者购买商品时似乎已经做出了这种计算，所以，那种认为消费者不可能做出“快速计算”的看法是不正确的。

4.2　利他主义与自私自利

对于我们的消费选择模式，第二点不满是认为这种模式过于自私，他们认为，没有人会如此自私，只以自己为中心。虽然对于个人利益是前进的驱动力这种观点，经济学家比那些空想的思想家

更乐于接受(亚当·斯密曾说过:"我们并不怀疑每个人都有自私的一面。"[①]),但这种抱怨仍是错误的。效用最大化模型并没有阻止人们从做慈善事业与做好事中获得满足,而这些行为也可以认为是产生了效用。实际上,经济学家们已经将效用最大化理论广泛应用到诸如将时间与金钱投入到慈善事业中去、给后代分遗产,乃至献血等方面的分析中。经济学家们提出了这样的疑问:如果从广义上讲,这些行为有损于他们自己的最佳利益,那他们是否还会采取这种行动?因此,我们没必要考虑这些行为是自私的还是无私的。

4.3 初览

我们考察效用最大化的一般结论可以简单说明如下:

最优化原则

效用最大化。消费者为了在一定的收入限制之下得到最大效用,首先必须将这些货币收入全部用来购买商品;其次,这些商品在心理上的替代比率(MRS)与这些商品在市场上的交换比率必须相等。

为了获得最大效用,人们显然要花费掉所有的收入,因为额外的商品可以获得额外的效用(这里不考虑因过分满足而产生厌恶的情况),也因为这些货币别无他用,所以只要货币还有任何剩余,消费者就得不到最大的效用。把钱扔掉绝不是一个追求效用最大化的行为。

关于替代比率相等的条件我们要多做点解释。由于市场上两种商品的交换比率是由这两种商品的价格比率所决定的,因此,也就是说消费者必须使购买的商品的边际替代率(x 对 y)与两种商品的价格之比(P_x/P_y)相等。这种个人替代率与市场替代率的相等,是所有消费者效用最大化问题(以及许多其他最大化问题)的一个一般性结论,在本书以后的章节中它会反复出现。

数值说明

为了能看到这个结论的直观推理过程,假定上述结论不成立,即个人的边际替代率与商品价格之比不相等,特别地,假定个人的边际替代率为 1,也就是说他愿意用 1 单位的 x 来交换 1 单位的 y 以保持相同的效用,同时又假定 x 的价格是每单位 2 美元,y 的价格是每单位 1 美元。很容易看出,在这样的条件下,消费者可以做得更好,他放弃 1 单位的 x 可以购买 2 单位的 y,但是只需要 1 单位的 y 就可以保持与放弃 1 单位 x 前相同的效用,而另 1 单位的 y 就完全是净增加的效用了。因此,在前一种情况下,消费者的货币收入并没有得到最佳的分配。只要 x 和 y 的边际替代率 MRS 与价格比 p_x/p_y 不相等,就可以用类似的方法来说明收入分配的不合理性。从而,效用最大化的条件必然是这两个值相等。

---

① Adam Smith, *The Theory of Moral Sentiments* (1759; reprint, New Rochelle, NY: Arlington House, 1969), p.446.

4.4 两种商品的情形:图形分析

上述讨论看似颇有道理,但很难称得上是科学证明。我们必须采用一种严格的方式来证明结论,同时还要说明效用最大化过程的其他几个重要特征。首先我们利用图解法来分析,之后我们再使用一种更为严格的数学方法。

4.4.1 预算约束

假定某人有 I 美元可用来购买商品 x 与商品 y,设 x 的价格为 p_x,y 的价格为 p_y,则消费者的预算约束为

$$p_x x + p_y y \leqslant I \tag{4.1}$$

也就是说,在上述两种商品上的消费不能超过 I 美元。这个预算约束条件如图 4.1 所示,消费者只能购买阴影部分的商品组合,如果 I 美元全部都用来购买 x,那么他能购买到 I/p_x 单位的 x;同理,如果 I 美元都用来购买 y,那么他能购买到 I/p_y 单位的 y。可以明显地看出,预算线的斜率是 $-p_x/p_y$。这个斜率表示市场上商品 y 与商品 x 可以怎样的比率交换。例如,若 $p_x=2,p_y=1$,则 2 单位的 y 可以换得 1 单位的 x。

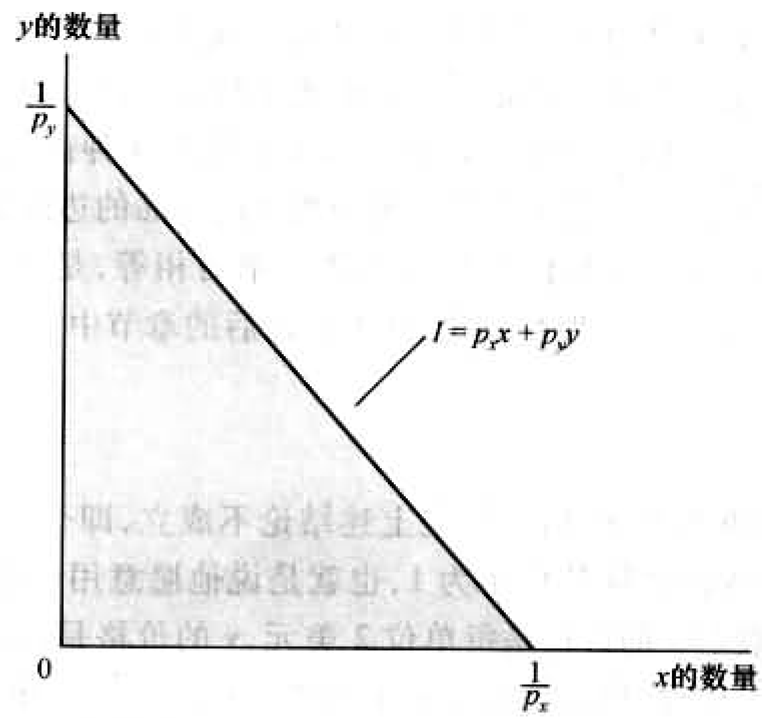


图 4.1　两种商品条件下消费者的预算约束

消费者能购买的商品 x 与商品 y 的各种组合可以用图中的阴影三角形表示。如果像我们通常所假定的,消费者想得到尽可能多的两种商品,那么这个阴影三角形的边界线就是将所有货币都用来购买 x 与 y 的限制线,而这条倾斜的边界线的斜率为 $-p_x/p_y$。

4.4.2 最大化的一阶条件

我们可以将预算约束置于无差异曲线图中来说明效用最大化过程。图 4.2 说明了这个过程。

消费者选择 A 点的商品组合是不明智的，因为如果他花费掉剩余的货币，就会达到更高的效用水平。消费者永远不满足的假设意味着将花光所有手中的货币来获得最大效用。同样，通过重新分配在两种商品上的货币支出，消费者可以达到比 B 点更高的效用水平，而 D 点是不可能实现的，因为没有那么多的货币去购买 D 点的商品组合。显然，在 C 点可以取得最大的效用。此时购买的商品组合为 (x^*, y^*)。这是用 I 美元所能购买到的无差异曲线 U_2 上唯一的一个商品组合。消费者不可能达到比其更高的效用水平了。C 点是预算约束线与无差异曲线的切点，所以在 C 点

$$\text{预算约束线的斜率} = \frac{-p_x}{p_y} = \text{无差异曲线的斜率} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{U=\text{常量}} \tag{4.2}$$

或者

$$\frac{p_x}{p_y} = -\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{U=\text{常量}} = MRS(x \text{ 对 } y). \tag{4.3}$$

我们直观的结论现在得到了证实：为了获得最大效用，应当花费掉所有的收入，并且 MRS 要等于商品的价格之比。从图 4.2 中可明显地看出，如果这个条件没有得到满足，消费者就可以通过重新分配货币支出来达到更高的效用水平。

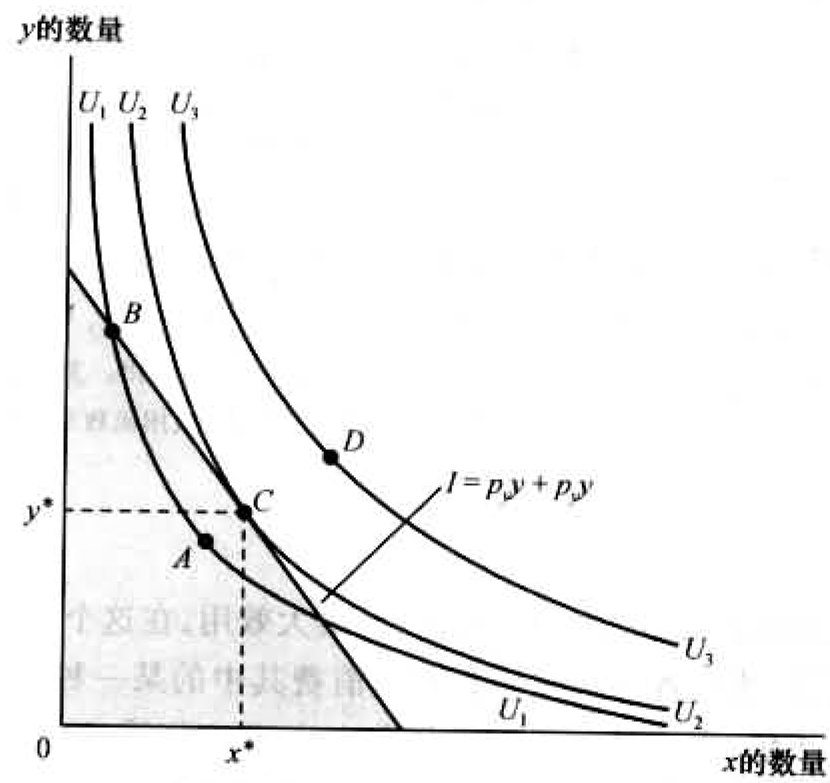


图 4.2　效用最大化的几何解释

C 点代表在给定约束条件下，消费者所能达到的最大效用水平。因此，商品组合 (x^*, y^*) 是消费者合理分配购买力所能得到的最佳组合，只有在这个商品组合下才可以满足以下两个条件：所有的货币收入都用来购买商品；消费者的边际替代率(MRS)与两种商品在市场上的价格之比 (p_x/p_y) 相等。

4.4.3　最大化的二阶条件

上述相切原则只是获得最大效用的必要条件，为了说明它并不是充分条件，我们来研究一下图 4.3 中的无差异曲线。显然，这里的切点 C 所代表的效用低于不是切点的 B 所代表的效用。实际

上，真正的最大效用应该在另一切点 A 处。在是切点的要求达到满足时，有时却并未达到最大效用，其原因在于图 4.3 中无差异曲线的形状。如果无差异曲线的形状与图 4.2 中的无差异曲线一样，这个问题就不会出现。但我们在前面已经说明了"正常的"无差异曲线的形状是在边际替代率不断递减这一假设下才产生的。因此，如果假设边际替代率递减，那么相切的条件就既是效用最大化的必要条件，又是它的充分条件。[①] 如果没有这一假设，那么我们在运用相切原则时就必须小心一些了。

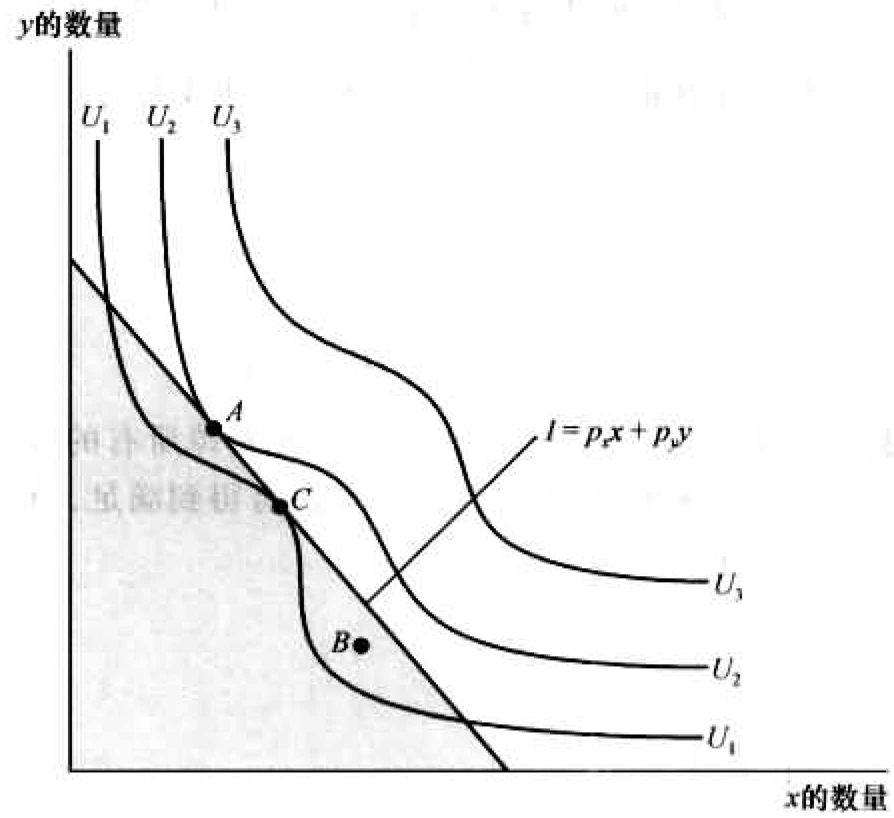


图 4.3　相切条件并不能保证最大效用的无差异曲线举例

如果无差异曲线不满足边际替代率递减的假设，那么并非所有的切点（即 $MRS=p_x/p_y$ 的点）都是能达到效用最大化的点。在本例中，切点 C 的商品组合的效用低于其他许多能用现有货币购买的商品组合的效用。为了保证效用最大化的必要条件（也即相切条件）同时也是充分条件，我们通常要假定边际替代率是递减的，也就是说，效用函数是严格拟凹的。

4.4.4　角点解

图 4.2 中的效用最大化问题导致了一个"内部"的最大效用，在这个问题中两种商品都被消费了一定的数量。在某些情况下，消费者的偏好使其在不消费其中的某一种商品时才能达到最大效用。如果一个消费者不喜欢汉堡包，那么他就不在汉堡包上支出一分钱，这种可能性体现在图 4.4 中。此时效用最大化的点是 E 点，E 点上 $x=x^*$，而 $y=0$。这表明预算线上的任何一个消费了某种数量 y 的点所得到的效用都会比 E 点的效用小。但是，应当注意：在 E 点，预算线与无差异曲线 U_2 并不是正好相切，在这个最适宜的点上预算线比无差异曲线 U_2 更平缓，这表明：在这一点上，市场上商品 x 与 y 的交换比率要比消费者心理上的替代率（MRS）低。在现行的市场价格条件下，消费者更愿意不断地用 y 来换取更多的 x。在这个实际问题中，消费商品 y 的量不可能为负，实际上也就是 x 轴限制

① 用数学术语讲，因为 MRS 递减的假设等同于假设无差异曲线局部上凸，此时在线性约束条件下，最大值的必要条件同时又是充分条件，参见第 2 章。

了消费者的这个不断交换的过程。沿 x 轴，y 的购买量为 0。因此上述分析表明，有必要对获得最大效用的一阶条件作点修改，以适合图 4.4 所示的角点解的情况。在我们对存在 n 种商品的一般情况进行分析之后，我们将使用第 2 章中的数学方法解决这一问题。

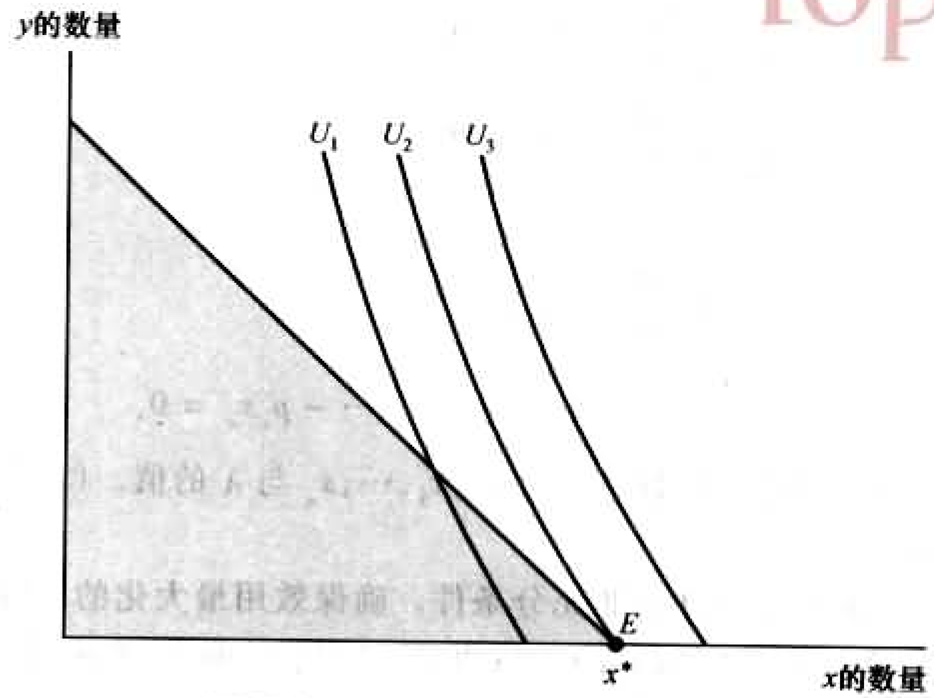


图 4.4　效用最大化问题的角点解

在图 4.4 一组表示偏好的无差异曲线中，效用最大的点在 E 点，此时 y 的消费量为 0。因而只有将效用最大化的一阶条件略加修改后才能满足这种情况。

4.5　n 种商品的情形

在两种商品条件下通过图解法得到的结论，可直接推广运用到 n 种商品的情况中。我们能够再次证明，为了获得内部效用的最大化，任何两种商品的边际替代率都必须等于它们的价格之比。然而，为了研究这种更一般的情况，我们最好采用一些数学方法。

4.5.1　一阶条件

当有 n 种商品可供选择的时候，消费者的目标是从 n 种商品中获得最大的效用

$$效用 = U(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{4.4}$$

消费者所受到的预算约束为①

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \tag{4.5}$$

或者

$$I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0 \tag{4.6}$$

根据第 2 章的有关知识，在计算有一定约束条件下的函数的最大值时，我们可以建立拉格朗日表达式

① 这里再一次将预算约束写成等式，是由于给定了消费者非满足性的假设，因而消费者必须花掉全部的货币。

$$\mathscr{L} = U(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n) \tag{4.7}$$

分别求 $\mathscr{L}$ 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 λ 的偏导并令它们为 0，就得到了 $n+1$ 个等式，它们就是为达到内部最大效用的必要条件

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} &= \frac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_x = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

根据 $n+1$ 个方程式，就能求出达到最佳组合的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 λ 的值。（参见例 4.1 和例 4.2 就可知是可以求出这一组解的）。

式 4.8 是效用最大化的必要条件而非充分条件。确保效用最大化的二阶条件相对来说比较复杂，需要用到矩阵（参见第 2 章的扩展部分）。然而，严格拟凹的假设（在两种商品的条件下边际替代率递减）就能保证，只要满足式 4.8，消费者就能得到实际上的最大效用。

4.5.2 一阶条件的含义

式 4.8 所表示的一阶条件还可以通过许多种其他方式来表示。举例来说，对于由 x_i 与 x_j 组成的任何两种商品，我们都能够得到

$$\frac{\partial U/\partial x_i}{\partial U/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j} \tag{4.9}$$

但是，前面已经证明，两种商品的边际效用之比事实上与它们的边际替代率之比相等，所以，收入分配最优化的条件为

$$MRS(x_i \text{ 对 } x_j) = \frac{p_i}{p_j} \tag{4.10}$$

这正好是本章前面已经得到的结论。为了获得最大的效用，消费者必须使自己心理上的替代率与市场上的替代率相等。

4.5.3 拉格朗日乘数的解释

求解等式 4.8 中的 λ，我们可以得到另一个结论

$$\lambda = \frac{\partial U/\partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\partial U/\partial x_n}{p_n} \tag{4.11}$$

或者

$$\lambda = \frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{MU_{x_2}}{p_2} = \cdots = \frac{MU_{x_n}}{p_n}$$

这个等式说明在最大效用点上，支出在每一单位商品上的货币所能得到的边际效用是相等的。因此，每种商品的边际效用与边际成本之比相等。如果不是这样的话，其中就会有一种商品所提供的边际效用大于其他商品所提供的边际效用，那么资金就没有被合理地分配。

我们要再次提醒读者注意，不要太盲目相信边际效用。式 4.11 只是说明：不管购买哪一种商品，每额外花费一美元应该能得到相同的“额外效用”，这一额外效用的大小由消费者所受的预算约束条件下的拉格朗日乘数给出（也就是由 λ 给出）。因此，λ 可认为是多消费一美元所能得到的边际效用（“收入”的边际效用）。

效用最大化的必要条件最终可以写成：对于购买的每一种商品 i，有

$$p_i = \frac{MU_{x_i}}{\lambda} \tag{4.12}$$

为了解释这个等式，考虑在一定范围内消费者收入的边际效用（λ）为常数的情况。此时消费者购买的每一种商品的价格（p_i）与他从该商品中得到的额外效用成正比。因此，在边际的概念上，一种商品的价格反映出一个人对于再购买一单位这种商品的支付意愿。这是应用福利经济学中的一个相当重要的结论，因为支付意愿可以由市场对价格的反应得出。在第 5 章我们将会看到这个结论是如何用于评价价格变化所带来的福利效应的。在之后的章节中，我们还会应用这个结论来讨论与资源配置效率有关的各种问题。

4.5.4 角点解

等式 4.8 所示的一阶条件只有内部最大值，也就是每种商品都要有一定的消费量时才成立。正如第 2 章所讨论的，如出现角点解（如图 4.4 所示），那么这些条件要作些微小的变动。① 此时，式 4.8 为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i \leqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{4.13}$$

如果

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i < 0, \tag{4.14}$$

则有

$$x_i = 0 \tag{4.15}$$

为解释这些条件，我们将等式 4.14 重新写成

$$p_i > \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\lambda} = \frac{MU_{x_i}}{\lambda} \tag{4.16}$$

因此，当商品价格（p_i）超过它为消费者带来的边际价值（MU_{x_i}/λ）时，消费者对它的购买量将为零（$x_i = 0$）。除去这种情况以外，效用最大化条件与以前所述是一样的。可见，该数学结论也符合消费者的基本生活常识，即消费者不会购买他们认为不值的商品。虽然这种角点解不会在本书的分析中

① 这些情形的正规叫法是非线性程序的“库恩-塔克”（Kuhn-Tucker）条件。

占主导地位，但我们要记住这种角点解出现的可能性，并且要会解释角点解出现时合理分配收入条件的经济含义。

例 4.1

柯布-道格拉斯需求函数

正如我们第 3 章所讨论的，柯布-道格拉斯效用函数的表达式为

$$U(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}, \tag{4.17}$$

这里为了方便起见[①]，设 $\alpha+\beta=1$。现在对于任意价格 (p_x, p_y) 与收入 (I)，我们都能求出效用最大化时的 x 与 y。建立拉格朗日表达式，有

$$\mathscr{L} = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda(I - p_x y - p_y y) \tag{4.18}$$

得到一阶条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

前两个方程移项后求比值，得到

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{4.20}$$

即

$$p_y y = \frac{\beta}{\alpha}p_x x = \frac{1-\alpha}{\alpha}p_x x, \tag{4.21}$$

其中最后一个式子成立是因为 $\alpha+\beta=1$，将式 4.21 的一阶条件代入预算约束，有

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + \frac{1-\alpha}{\alpha}p_x x = p_x x\left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}p_x x \tag{4.22}$$

解出 x 的值，得到

$$x^* = \frac{\alpha I}{p_x} \tag{4.23}$$

用类似的方法可以求出 y 的值，得到

$$y^* = \frac{\beta I}{p_y} \tag{4.24}$$

这些结论说明，如果一个消费者的效用函数满足式 4.17，他将会选择用 $\alpha\%$ 的收入购买商品 x（即 $p_x x/I=\alpha$），用 $\beta\%$ 的收入购买商品 y（$p_y y/I=\beta$）。尽管柯布-道格拉斯函数的这一特性常常使得解决

① 注意到柯布-道格拉斯效用函数的指数总可以标准化为和为 1 的形式，因为 $U^{1/(\alpha+\beta)}$ 为单调映射。

简单问题非常容易,但这也暗示了在解释实际消费行为时,该函数的能力是十分有限的。由于随着经济条件的改变,消费者在特定商品上花费的收入份额经常发生很大变化,因此就需要找到一个更一般的函数形式,使得它可以揭示柯布-道格拉斯函数所不能揭示的内涵。例4.2中列举了一些可能性,关于预算份额的一般问题将在本章的扩展部分中更详细地阐释。

数值举例。首先,让我们看一下柯布-道格拉斯函数的一个具体的数值例子。假设 x 的价格为1美元,y 的价格为4美元,总收入为8美元,即 $p_x=1, p_y=4, I=8$。同时假设 $\alpha=\beta=0.5$,即消费者将他的收入平均分配给这两种商品。于是由式4.23和式4.24得

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha I/p_x = 0.5I/p_x = 0.5(8)/1 = 4 \\ y^* &= \beta I/p_y = 0.5I/p_y = 0.5(8)/4 = 1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

在效用最大化的选择下,

$$效用 = x^{0.5}y^{0.5} = (4)^{0.5}(1)^{0.5} = 2 \tag{4.26}$$

同时注意到,我们可以使用式4.19计算与这个收入分配相关的拉格朗日乘数

$$\lambda = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}/p_x = 0.5(4)^{-0.5}(1)^{0.5}/1 = 0.25 \tag{4.27}$$

这个值表示当收入发生微小变化时,效用的增加量是收入增加量的1/4。例如,假设这个人的收入增加了1%(变为8.08美元),在这种情况下他会选择 $x=4.04, y=1.01$,效用变为 $4.04^{0.5}\cdot 1.01^{0.5}=2.02$。因此,正如 $\lambda=0.25$ 所示,收入增加0.08美元使效用增加了0.2。

请回答:根据式4.23,p_y 的变化是否会影响 x 的需求量?用数学方法解释。再利用效用函数的参数 β 决定了在商品 y 上花费的收入份额这个观点,给出一个直观的解释。

例 4.2

不变替代弹性(CES)需求

为了说明花费在各商品上的比例易随经济条件改变的情况,我们来看一下关于不变替代弹性函数的三个具体的例子。

情况1　$\delta=0.5$。在这种情况下,效用为

$$U(x,y) = x^{0.5} + y^{0.5} \tag{4.28}$$

建立拉格朗日表达式,有

$$\mathscr{L} = x^{0.5} + y^{0.5} + \lambda(I - p_x x - p_y y) \tag{4.29}$$

得到效用最大化的一阶条件

$$\begin{aligned} \partial\mathscr{L}/\partial x &= 0.5x^{-0.5} - \lambda p_x = 0 \\ \partial\mathscr{L}/\partial y &= 0.5y^{-0.5} - \lambda p_y = 0 \\ \partial\mathscr{L}/\partial \lambda &= I - p_x x - p_y y = 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

前两个方程移项后求比值,得到

$$(y/x)^{0.5} = p_x/p_y \tag{4.31}$$

将其代入预算约束并整理，得到与效用函数相关的需求函数为

$$x^* = I/p_x[1 + (p_x/p_y)] \tag{4.32}$$

$$y^* = I/p_y[1 + (p_y/p_x)] \tag{4.33}$$

对价格的反应。注意在这些需求函数中商品 x 花费的收入份额($p_x x/I = 1/[1+(p_x/p_y)]$)不是常数，而是取决于价格的比率($p_x/p_y$)。$x$ 的相对价格越高，它所花费的收入份额就越小。换言之，x 的需求对其价格的反应非常敏感，价格的上升减少了 x 的总花费。这也可以通过比较式 4.32 与式 4.33 所给出的需求函数表达式中 p_x 的次数(式 4.32 为 -2，而式 4.33 为 -1)来看出。在第 5 章详细研究弹性概念的时候，我们还会更加深入地讨论这一结论。

情况 2　$\delta = -1$。我们来看一个比柯布-道格拉斯函数更缺乏替代性[①]的需求函数。当 $\delta = -1$ 时，效用函数为

$$U(x,y) = -x^{-1} - y^{-1} \tag{4.34}$$

易得效用最大化的一阶条件为

$$y/x = (p_x/p_y)^{0.5} \tag{4.35}$$

同样，将此条件代入预算约束并整理，得到需求函数为

$$\begin{aligned} x^* &= I/p_x[1 + (p_y/p_x)^{0.5}] \\ y^* &= I/p_y[1 + (p_x/p_y)^{0.5}] \end{aligned} \tag{4.36}$$

我们也可以从两个角度看出这些需求函数对价格的反应不那么敏感。一方面，现在商品 x 花费的收入份额($p_x x/I = 1/[1+(p_y/p_x)^{0.5}]$)正比于 p_x 的增长。当 x 的价格上升时，消费者只是稍微减少一些 x 的购买量，在它上面的总花费反而增加。另一方面，这也可以由每种商品价格的次数较小(-0.5)看出。

情况 3　$\delta = -\infty$。这种情况很重要，此时 x 与 y 必须按照固定的比例消费。例如，假设每单位 y 要与 4 单位 x 共同消费，则表示这种情况的效用函数为

$$U(x,y) = \min(x, 4y) \tag{4.37}$$

在这种情况下，消费者为了使效用最大化，只会选择使 $x = 4y$ 的商品组合。也就是说，效用最大化使得消费者只会选择 L 形无差异曲线的顶点。将此条件代入预算约束，得

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + p_y \frac{x}{4} = (p_x + 0.25p_y)x \tag{4.38}$$

于是

$$x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \tag{4.39}$$

同理可得

$$y^* = \frac{I}{4p_x + p_y} \tag{4.40}$$

在这种情况下，由于 x 与 y 必须按照固定的比例消费，因此消费者在商品 x 上花费的预算份额随

---

① 对于 CES 函数 $\sigma = 1/(1-\delta)$，替代弹性是度量替代性的一种方法。这里 $\delta = 0.5$ 意味着 $\sigma = 2$，$\delta = 0$(柯布-道格拉斯的情况)意味着 $\sigma = 1$，$\delta = -1$ 意味着 $\sigma = 0.5$。参见第 7 章中与生产理论有关的对 CES 函数的讨论。

x 价格的上升而显著增加。例如,如果我们使用例 4.1 中的数值($p_x=1,p_y=4,I=8$),则由式 4.39 和式 4.40 可以得出 $x^*=4,y^*=1$,且与前例相同,消费者在两种商品上各花费一半的收入。然而如果令 $p_x=2,p_y=4,I=8$,则可得 $x^*=8/3,y^*=2/3$,该消费者在商品 x 上花费了收入的 $2/3\left(=\frac{p_x x}{I}=\frac{2\times 8/3}{8}\right)$。代入其他数据可以看出,随着 x 的价格逐渐增加,在商品 x 上花费的收入份额逐渐接近 1。①

请回答:在这里讨论的不变替代弹性函数中,收入的变化是否影响消费份额?消费份额与该函数的同位特性有着怎样的关系?

4.6 间接效用函数

例 4.1 和例 4.2 说明了这样一个原理:对于一个约束条件下的效用最大化问题,通常可以通过一阶条件来求得 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的最优解。一般情况下,这组解的值取决于所有商品的价格与消费者的收入水平,也就是说,

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1(p_1,p_2,\cdots,p_n,I)\\ x_2^* &= x_2(p_1,p_2,\cdots,p_n,I)\\ &\vdots\\ x_n^* &= x_n(p_1,p_2,\cdots,p_n,I)\end{aligned}\tag{4.41}$$

对于这组反映了每个 x 的值与 P 和 I 依赖关系的**需求函数(demand functions)**,我们在下一章还要详细地讨论,这里想指出的是,从式 4.41 中得到的一组 x 的最优值可以代入到最初的效用函数中,得到

$$最大效用 = U(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)\tag{4.42}$$

$$= V(p_1,p_2,\cdots,p_n,I)\tag{4.43}$$

换句话说,在预算约束条件下,消费者希望得到最大效用,但是他所能得到的最大效用水平将会间接地取决于所购买商品的价格以及消费者的收入。这种依赖关系通过间接效用函数 V 表示出来。无论是价格还是收入发生变动,消费者所能得到的效用水平都会受到影响。有时,在消费理论或在其他许多相关理论中,都可以运用这种间接的方法,来研究经济状况的变化所带来的各种后果,比如效用,以及(以后将要论述的)厂商的成本。

4.7 一次总付原则

许多经济学观点都承认,效用水平最终取决于消费者的收入和所购买商品的价格。在这些观点

① CES 函数的这些关系将在练习题 4.9 和扩展 E4.3 中更详细地讨论。

当中，最重要的是所谓的一次总付原则(**the lump sum principle**)。这个原则是说，对消费者的一般购买力征税，要比对特定的物品征税更好。一个与之相关的观点是，对低收入人群的收入补贴，要比花同样数目的钱去补贴某些特定商品更能增加效用。这个结论是效用最大化的假设的一个直观的推论——当收入税或收入补贴存在时，消费者可以自由决定如何分配他的最终收入。而另一方面，对特定的商品征税或进行补贴不但降低了消费者的购买力，而且由于引入了人为价格，也扭曲了他们的选择。因此，如果将效率作为评价社会政策的重要标准，则收入税和收入补贴是很好的选择。

图 4.5 说明了一次总付原则在税收中的应用。初始时，消费者的收入为 I，选择购买的商品组合为 x^*, y^*。当对商品 x 征税时，它的价格上升，于是效用最大化的商品组合变为 x_1, y_1，税收收入为 $t \cdot x_1$(其中 t 为对商品 x 征税的税率)。另一方面，若征收收入税，使预算约束线向内移动至 I'，也同样可以征得相同数目的税收收入。[①] 但是征收收入税的效用(U_2)要大于只对物品 x 征税的效用(U_1)。这样，我们就说明了收入税的效用负担更小。同理可以得出，收入补贴要比对特定商品的补贴更好。

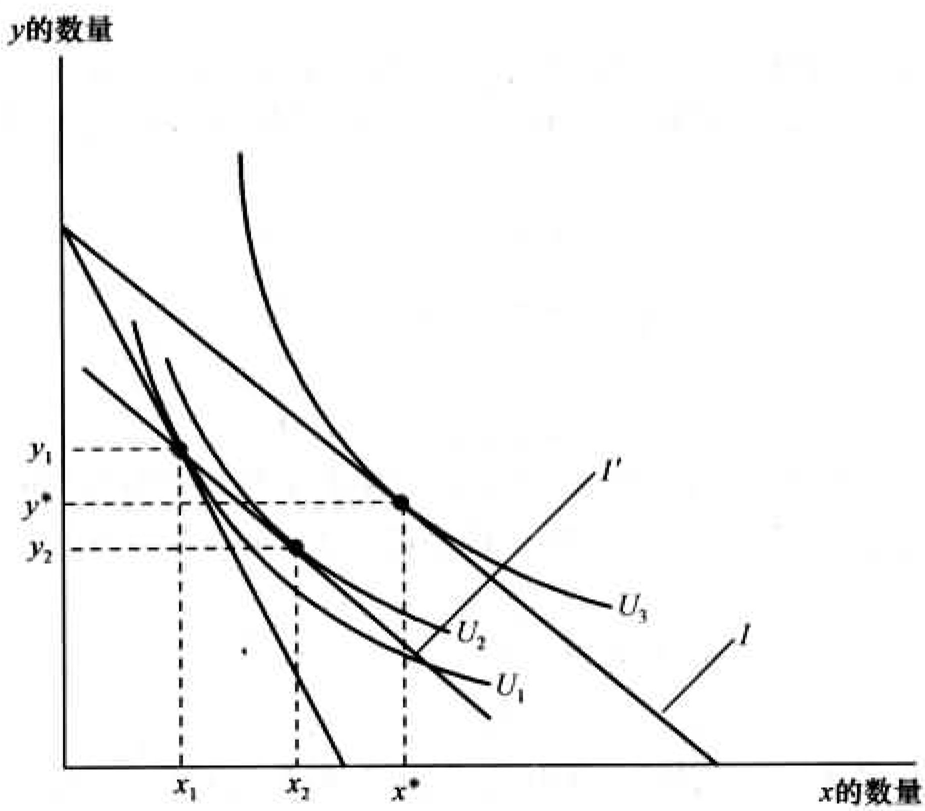


图 4.5　税收中的一次总付原则

对商品 x 征税使得效用最大化的选择从点(x^*, y^*)移至点(x_1, y_1)。获得同样多税收收入的收入税将预算约束线移至 I'。征收收入税的效用(U_2)大于只对物品 x 征税的效用(U_1)。

例 4.3

间接效用和一次总付原则

在这个例子中，我们使用间接效用函数的观点来解释一次总付原则在税收中的应用。首先我们

① 由于 $I = (p_x + t)x_1 + p_y y_1$，于是有 $I' = I - tx_1 = p_x x_1 + p_y y_1$，这说明具有相同规模的收入税的预算约束线也经过点(x_1, y_1)。

推导两种情况下的间接效用函数。

情况 1 柯布-道格拉斯效用函数。在例 4.1 中，我们看到了当 $\alpha=\beta=0.5$ 时柯布-道格拉斯效用函数的最优购买量为

$$x^*=\frac{I}{2p_x}$$
$$y^*=\frac{I}{2p_y} \tag{4.44}$$

于是在这种情况下，间接效用函数为

$$V(p_x,p_y,I)=U(x^*,y^*)=(x^*)^{0.5}(y^*)^{0.5}=\frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}} \tag{4.45}$$

注意，当 $p_x=1,p_y=4,I=8$ 时，有 $V=\frac{8}{2\times1\times2}=2$，这正是我们前面所计算出的效用。

情况 2 固定比例。在例 4.2 的情况 3 中，我们有

$$x^*=\frac{I}{p_x+0.25p_y}$$
$$y^*=\frac{I}{4p_x+p_y} \tag{4.46}$$

于是在这种情况下，间接效用函数为

$$V(p_x,p_y,I)=\min(x^*,4y^*)=x^*=\frac{I}{p_x+0.25p_y}$$
$$=4y^*=\frac{4}{4p_x+p_y}=\frac{I}{p_x+0.25p_y} \tag{4.47}$$

当 $p_x=1,p_y=4,I=8$ 时，间接效用 $V=4$，这也正是我们前面所计算出的结果。

一次总付原则。首先使用柯布-道格拉斯的情况来说明一次总付原则。假设对商品 x 征收 1 美元的税。式 4.45 说明，在这种情况下，间接效用会由 2 降至 1.41[$=8/(2\times2^{0.5}\times2)$]。由于消费者选择了 $x^*=2$，因此总的税收收入为 2 美元。而一个有着相同税收收入的收入税会使消费者的净收入减至 6 美元，间接效用变为 1.5[$=6/(2\times1\times2)$]。可见，征收收入税比只对 x 征税情况要好得多。对商品 x 征税会降低效用，其原因有二：一是它降低了消费者的购买力，二是它降低了消费者的选择商品 x 的倾向。而收入税只会产生第一方面的影响，因而更有效率。①

固定比例的情况同样支持这一直觉。在此情况下，对商品 x 征收 1 美元的税会使间接效用由 4 降至 8/3[$=8/(2+1)$]。此时，$x^*=8/3$，税收收入为 8/3 美元。而一个税收收入为 8/3 美元的收入税会使消费者的净收入变为 16/3 美元，由此可以得出间接效用 $V=8/3\left[=\frac{16/3}{1+1}\right]$。因此这种情况下，征收消费税和征收收入税得到的效用是相同的。之所以一次总付的优势没有体现出来，是因为在固定比例效用的情况下，消费者的偏好过于刚性，消费税并没有扭曲选择。

① 这里的讨论假定了收入税没有激励效应——这可能并不是一个好的假设。

请回答：这里列举的两种间接效用函数都说明，如果名义收入与所有商品的价格都加倍，效用将保持不变。解释为什么你会认为这是所有间接效用函数的一个普遍性质。

4.8 支出最小化

在第 2 章中，我们曾指出，许多约束条件下最大化问题都存在一个与之相联系的、对偶的约束条件下最小化问题。对于效用最大化问题，与其相联系的对偶最小化问题是：如何分配收入，以便用最少的支出达到既定的效用水平。这个问题与原始的效用最大化问题明显类似，但是约束条件与目标函数都与最大化问题相反。图 4.6 说明了这一对偶的支出最小化问题。消费者必须达到 U_2 的效用水平，现在这就是问题的约束条件，图中三条"预算约束"线表明了三种可能的支出量（E_1，E_2 与 E_3）。很显然，E_1 的支出水平过低，不能达到 U_2 的效用水平，因而它不能解决这个对偶问题。采用 E_3 的支出，消费者是能够达到 U_2 的效用水平的（在 B 点或 C 点），但这不符合支出最小化的要求。E_2 则显然刚好能提供足够的支出来达到 U_2 的效用水平（在 A 点），这实际上就是这个对偶问题的解。通过比较图 4.2 与图 4.6，可以很明显地看出，效用最大化的方法与对偶的支出最小化的方法能得出相同的解（x^*，y^*），它们仅仅是对于同一问题的两种不同的可供选择的方法。通常支出最小化方法更具实用性，因为支出可以直接观察得到，而效用则不能。

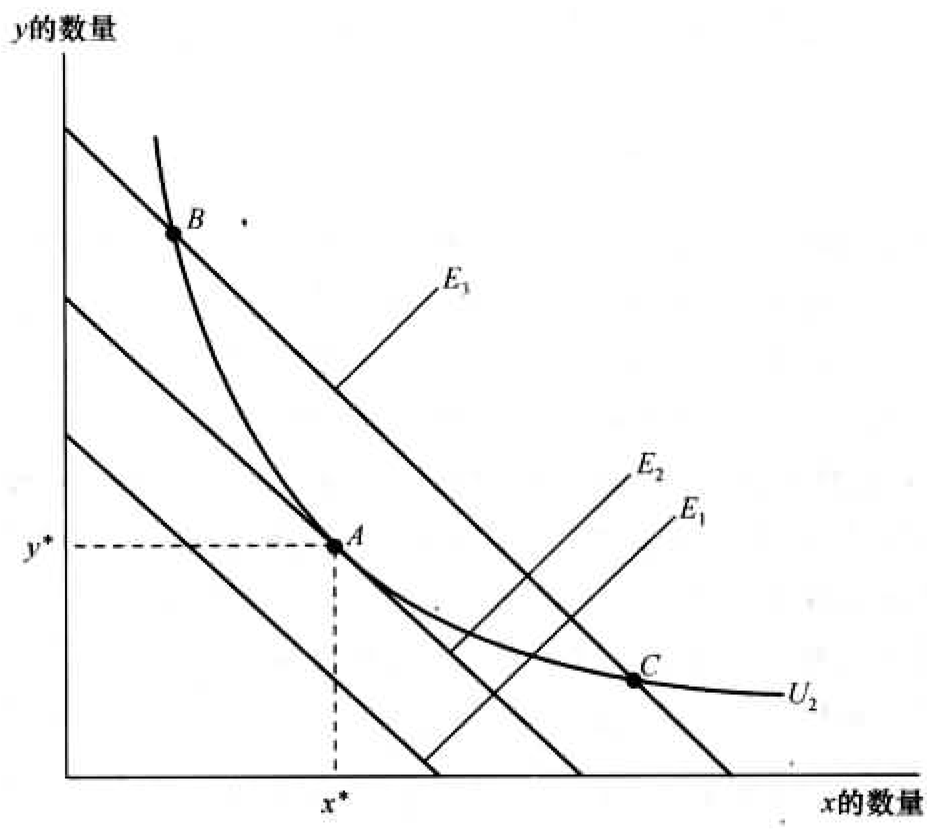


图 4.6　对偶的支出最小化问题

效用最大化问题的对偶问题是要用最少的支出达到一个既定的效用水平（U_2），支出水平 E_1 不能达到 U_2 的效用，而 E_3 的支出水平又过高，只有在 E_2 这个支出水平，且消费者购买的组合为（x^*，y^*）时，刚好达到效用水平 U_2。

一个数学表达

一般地说,消费者对偶的支出最小化问题就是选择 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 以取得下式的最小值

$$\text{总支出} = E = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n, \tag{4.48}$$

约束条件为

$$\text{效用} = \bar{U} = U(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{4.49}$$

在这个问题中,选择 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的最优值取决于各种商品的价格 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 与所要求的效用水平 $\bar{U}_2$,如果改变其中任意一种商品的价格,或者消费者的效用"目标"发生变化,最优的商品组合就会改变。这种依存关系可以用**支出函数(expenditure function)**来概括表示。

定义

支出函数。消费者的支出函数表明了在一组特定的商品价格条件下,要达到某一既定的效用水平所必需的最小支出,即

$$\text{最小支出} = E(p_1, p_2, \cdots, p_n, U) \tag{4.50}$$

这个定义说明,支出函数与间接效用函数是互为反函数关系的(比较式 4.43 与式 4.50)。它们都取决于市场价格,但所受到的约束却不同(一为收入,一为效用)。在下一章考察消费者对价格变动的反应时,我们会发现这种关系是非常有用的。现在,我们来看两个支出函数。

例 4.4

两个支出函数

计算支出函数有两种方法。最直接的方法是直接描述支出最小化问题,并使用拉格朗日法。本章后面的一些练习题要求你这样做。然而这里,我们将采用一种更为简洁的过程,这其中利用了支出函数与间接效用函数的关系。由于这两个函数互为反函数,因此只要计算出其中一个函数,便可以很轻易地得出另一个。而在例 4.3 中,我们已经计算了两种重要情况下的间接效用函数。由此求出相应的支出函数便是简单的数学问题了。

情况 1　柯布-道格拉斯效用。式 4.45 说明考虑两种商品的间接效用函数时,柯布-道格拉斯的情况为

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}} \tag{4.51}$$

现在,如果我们交换效用(这里我们将其看做一个常数,用 U 表示)和收入(这里我们将其看做"支出"函数,用 E 表示,其参数由这个问题给出)的角色,便可得到支出函数为

$$E(p_x, p_y, U) = 2p_x^{0.5}p_y^{0.5}U \tag{4.52}$$

对照先前的结果检验,令目标效用 $U=2$,同时仍令 $p_x=1, p_y=4$。在这些参数下,式 4.52 指出需要的最小支出为 $8(=2\times1^{0.5}\times4^{0.5}\times2)$ 美元。不出所料,这个对偶的支出最小化问题与原始的效用最大

化问题得到了相同的形式。

情况 2　固定比例。对于固定比例的情况，式 4.47 给出了如下间接效用函数

$$V(p_x,p_y,I)=\frac{I}{p_x+0.25p_y} \tag{4.53}$$

同样，如果我们交换效用和收入的角色，便可迅速得出支出函数为

$$E(p_x,p_y,U)=(p_x+0.25p_y)U \tag{4.54}$$

再次使用例 4.3 中假设的值($p_x=1,p_y=4,U=4$)检验结果，可得为了达到目标效用 4，需要花费 8[$=(1+0.25\times4)\times4$]美元。

对价格变化的补偿。这些支出函数可以帮助我们研究消费者是如何补偿价格的变化的。特别地，假设商品 y 的价格由 4 美元上升至 5 美元。显然这会降低消费者的效用。于是我们会问，消费者应当补偿多少钱才能弥补这个影响。由于支出函数能够使我们将效用看做常数，因此它为我们估算补偿金额提供了一个直接的方法。特别地，对于柯布-道格拉斯的情况，为了提供额外的购买力以弥补价格上升带来的影响，支出需要由 8 美元上升至 8.94($=2\times1\times5^{0.5}\times2$) 美元。对于固定比例的情况，为了补偿价格的上升，支出需要由 8 美元上升至 9 美元。可见，在这两种简单的情况下，补偿的金额基本相同。

然而，这两个例子有一个很大的不同点。对于固定比例的情况，1 美元的额外补偿金仅仅让消费者回到了先前的消费组合($x=4,y=1$)。这是使这个死板的消费者将效用恢复至 $U=4$ 的唯一方法。而对于柯布-道格拉斯的情况，额外的补偿金并没有让消费者回到先前的消费组合。相反，效用最大化要求将 8.94 美元按照 $x=4.47,y=0.894$ 分配。这仍会提供一个 $U=2$ 的效用水平，但是这时消费者节约了在变贵了的商品 y 上的花费。

请回答：消费者该如何补偿价格的下降？如果商品 y 的价格由 4 美元降至 3 美元，需要进行哪种类型的补偿？

4.9　支出函数的性质

由于在应用经济学中，支出函数应用广泛，因此我们有必要了解一下这类函数的一些共同性质。这里我们来研究三个性质。这些性质都直接源于这样一个事实：支出函数是基于消费者效用最大化的。

1. 齐次性：例 4.4 中的两个函数都满足这样的性质：如果所有商品的价格都加倍，则所需的支出也加倍。从技术上来说，这些支出函数是关于所有价格的"一次齐次函数"。① 这是支出函数的一个相当普遍的性质。因为消费者的预算约束关于价格呈线性，于是当价格与购买力都成比例增长时，消费者仍然会选择购买与价格上升之前达到效用最大化时相同的商品组合。在第 5 章我们将会看

① 正如我们在第 2 章所描述的，如果 $f(tx_1,tx_2,\cdots,x_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称作 k 次齐次函数。在例 4.4 中，$k=1$。

到，由于这个原因，需求函数是关于收入和所有价格的零次齐次函数。

2. 支出函数关于价格单调不降：这个性质可以用数学表达式简明地表示如下：

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} \geqslant 0\text{，对于每种商品 } i \tag{4.55}$$

这个结论直观上看很明显。因为支出函数确定了达到某一既定效用水平所需的最小支出，所以价格的任何上升都会使这个最小支出增加。更正式地，假设 p_1 只取两个值 p_1^a 和 p_1^b（其中 $p_1^b > p_1^a$），其他的价格都在状态 a 和状态 b 间保持不变。此外，令 x 为状态 a 下购买的商品组合，y 为状态 b 下购买的商品组合。由支出函数的定义，这两种商品组合得到相同的目标效用。显然商品组合 y 在状态 b 的价格下比在状态 a 的价格下花费更多。但是我们知道，在状态 a 的价格下为了达到目标效用水平，商品组合 x 是花费最小的方案。于是，商品组合 y 的支出一定比商品组合 x 大。同理，价格下降一定不会增加支出。

3. 支出函数关于价格为凹函数：在第 2 章中我们曾讨论过，凹函数永远位于其切线的下方。尽管描述这类函数的数学条件比较复杂，但研究这个概念如何应用于支出函数还是相对简单的，这里我们考虑只有一个价格变量时的简单情形。图 4.7 显示了只有一个价格变量 p_1 时消费者的支出函数。在初始价格 p_1^* 处，消费者的支出由 $E(p_1^*,\cdots)$ 确定。现在考虑价格比 p_1^* 高或低的情况。如果该消费者继续购买同样的商品组合，则支出会随价格的变化而线性地增加或减少。这在图 4.7 中表示为伪支出函数 E^{pseudo}。这条直线表示的支出水平允许该消费者可以不管价格 p_1 的变化而购买原始的商品组合。在更实际的情形下，该消费者会根据价格 p_1 的变化来调整他的购买量。这时因为有支出最小化，实际的支出会小于上述伪支出。因此，实际支出函数 E 永远在 E^{pseudo} 下方，于是函数为上凸

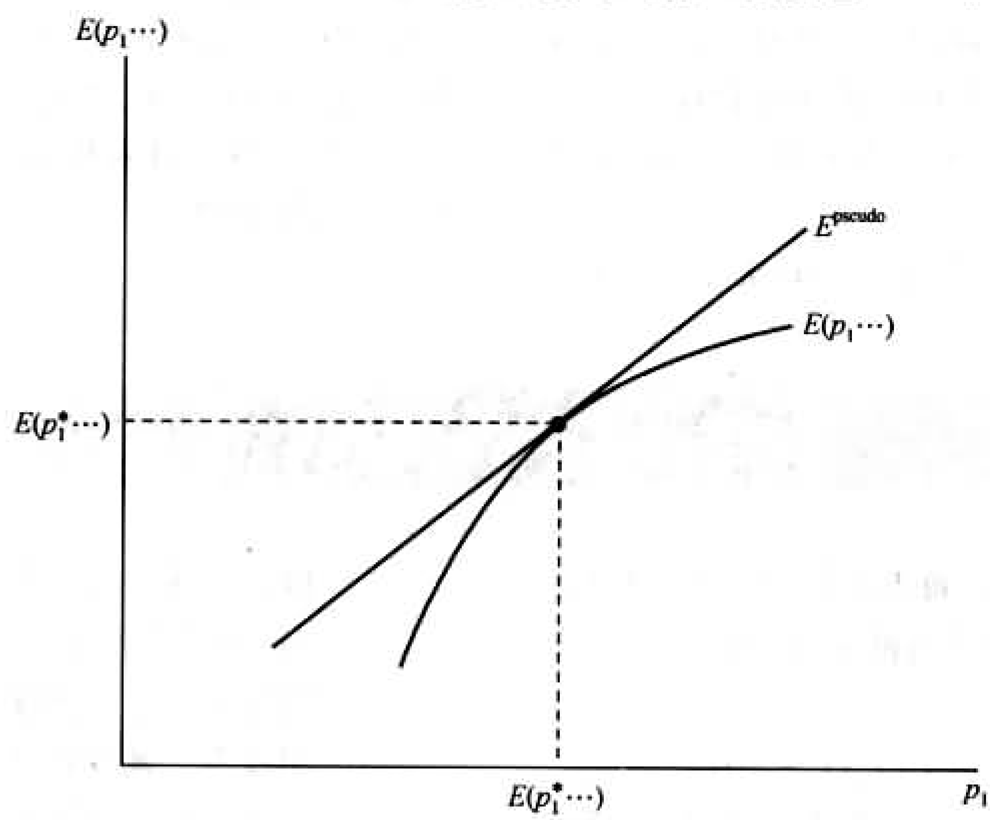


图 4.7　支出函数关于价格为凹函数

在 p_1^* 点消费者的花费为 $E(p_1^*,\cdots)$。如果当 p_1 变化时他继续购买同样的商品组合，则支出由 E^{pseudo} 确定。而实际上，由于他消费的商品组合会随 p_1 的变化而改变，所以实际的支出会比它小。

函数。[1] 在许多的应用中,尤其是在与建立指数有关的问题上(参见第 5 章的扩展部分),支出函数的凹性是一个非常有用的性质。

小 结

这一章里,我们考察了在一定预算约束条件下,效用最大化的基本经济模型。尽管我们运用了各种不同方法来处理这个问题,但所有方法都能得到相同的基本结论:

- 为了达到预算约束条件下的最大化,消费者必须花掉手中所有的货币收入,并要选择一个使任何两种商品的边际替代率均等于它们的市场价格之比的商品组合。这种倾向保证了消费者在购买每种商品时,必须使每种商品的边际效用与其价格之比都相等。这一结论适用于绝大多数有约束条件的最优化问题。
- 相切只是约束条件下最大化的一阶条件。为了确保这个条件也是效用最大化的充分条件,消费者的无差异曲线必须是边际替代率递减形式的。用规范化术语来说,效用函数必须是严格局部凹的。
- 为满足角点解的情况,相切条件必须作些修改。此时,某些商品的最优消费量为 0。在这种情况下,该商品的边际效用与价格之比要小于实际购买商品的边际收益与边际成本的比值。
- 对预算约束下效用最大化程度的结论是:消费者的最优选择是由他所受预算约束的参数隐式决定的。也就是说,这些选择是所有价格及货币收入的隐函数,因而效用也是这些参数的间接函数。
- 预算约束下的效用最大化的对偶问题,是使为达到一定的效用所必须支付的支出最小。尽管这种对偶方法同有预算约束的最大化问题的解法得出相同的结论,但是它的存在使人们加深了对选择理论的认识。尤其值得一提的是:这种方法说明,为达到一定效用目标的货币支出由市场价格来决定。因此,支出函数理论上是可度量的。

练 习 题

4.1 三年级学生 Paul 每天在校用午餐,他只喜欢奶油小蛋糕(t)与橘子汁(s),他从中得到的效用为

$$效用 = U(t,s) = \sqrt{ts}$$

a. 如果每份奶油小蛋糕为 0.1 美元,每杯橘子汁为 0.25 美元,为使效用最大,Paul 应如何将妈妈给他的 1 美元伙食费分配在这两种食品上?

b. 学校为了减少奶油小蛋糕的消费,将其价格提高到每份 0.4 美元,那么为了让

---

[1] 关于凹函数,有一个结论是 $f_{ii}=\frac{\partial^2 E}{\partial p_i^2}\le 0$。这正是图 4.7 显示的。

Paul 得到与 a 同样的效用，妈妈现在要多给他多少美元的伙食费？

4.2 a. 一位年轻的酒鉴赏家欲支出 300 美元建一小酒窖，他特别喜欢两种酒：一种是 1997 年生产的法国波尔多白葡萄酒（w_F），每瓶为 20 美元，另一种是稍便宜的 2002 年产的加利福尼亚的酒（w_C），每瓶为 4 美元。如果他的效用函数如下式所示，那么他应该在每种酒上花多少钱？

$$U(w_F,w_C)=w_F^{2/3}w_C^{1/3}$$

b. 当他来到酒店时，我们年轻的酒专家发现由于法郎贬值，法国波尔多白葡萄酒（w_F）已经降到每瓶 10 美元，如果加利福尼亚酒依旧是 4 美元一瓶，此时，在价格已变的条件下为达到最大效用，这位鉴赏家每种酒的购买量应为多少？

c. 解释为什么这个酒专家在 b 的情况要比 a 更好。你如何用货币来衡量这个效用的增加？

4.3 a. 在某一个晚上，J. P. 以下列函数的形式享用雪茄（c）与喝白兰地酒（b）

$$U(c,b)=20c-c^2+18b-3b^2$$

那么他在这个晚上要抽多少支雪茄，喝多少瓶白兰地酒才能得到最大效用？（假定他不受预算约束）

b. 后来，J. P. 的医生告诫他：每天喝的白兰地与抽的雪茄加起来不能超出 5 单位，在这一条件下，他会喝多少白兰地，抽多少雪茄呢？

4.4 a. Ball 先生享用商品 x 与 y 所得的效用函数为

$$U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

如果 $p_x=3$ 美元，$p_y=4$ 美元，而他的总收入为 50 美元，求他能获得的最大效用。

提示：求 U^2 的最大值要比求 U 的最大值方便得多，但这种方法为什么不影响计算结果呢？

b. 画出 Ball 的无差异曲线，并作出无差异曲线与预算线的切点，曲线图是如何描述 Ball 的行为的？你找到真正的最大值了吗？

4.5 A 先生从马丁尼酒（m）中所得的效用与马丁尼酒的消耗量成正比

$$U(m)=m$$

A 先生特别喜欢他的马丁尼，但他只喜欢喝将杜松子酒（g）与苦艾酒（v）按 2:1 的固定比例混合而成的马丁尼酒，因此，我们可以将 A 先生的效用函数改写为

$$U(m)=U(g,v)=\min\left(\frac{g}{2},v\right)$$

a. 画出 A 先生以 g 与 v 为变量的各种效用水平的无差异曲线，请说明无论这两种配料酒的价格如何，A 先生也永远不会改变他配制马丁尼酒的方法。

b. 求出对 g 与 v 的需求函数。

c. 利用 b 的结论，求出 A 先生的间接效用函数。

d. 试计算 A 先生的支出函数；对于每一种效用水平，将支出表示成杜松子酒的价格 p_g 与苦艾酒的价格 p_v 的函数。

提示：这个问题涉及固定比例的效用函数，因此不能使用微积分来求解效用最大化的决策。

4.6 假设一个快餐爱好者的效用取决于三种商品：软包装饮料（x）、汉堡包（y）和冰激凌圣代（z）。根据柯布-道格拉斯效用函数，有

$$U(x,y,z)=x^{0.5}y^{0.5}(1+z)^{0.5}.$$

同时假设这些商品的价格为 $p_x=0.25$，$p_y=1$，$p_z=2$，且该消费者的收入 $I=2$。

a. 说明当 $z=0$ 时，效用最大化得到的最优选择与例 4.1 相同。同时说明 $z>0$

(哪怕 z 非常小)时的任何选择都会使效用减少。

b. 你如何解释 $z=0$ 时达到最优这一事实?

c. 为了购买 z,这个人的收入要有多高?

4.7 例 4.1 中,我们用到了柯布-道格拉斯效用函数 $U(x,y)=x^{\alpha}y^{1-\alpha}$,其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$。这个问题说明了该函数的一些其他属性。

a. 计算这种柯布-道格拉斯情况下的间接效用函数。

b. 计算这种情况下的支出函数。

c. 明确解释当 x 的价格上升时,为了抵消其影响所需的补偿是如何与指数 α 的大小有关的。

4.8 图 4.5 所示的一次总付原则不仅可以应用于税收,也可以应用于转移支付政策。这个问题研究该原则在此政策的应用。

a. 用与图 4.5 类似的图解释在政府花费相同的情况下,对一个人进行收入补贴比对物品 x 进行补贴提供了更多的效用。

b. 用式 4.52 所示的柯布-道格拉斯支出函数,计算需要多少额外购买力才能将这个人的效用由 $U=2$ 提升至 $U=3$。

c. 再次使用式 4.52,估算为了将这个人的效用由 $U=2$ 提升至 $U=3$,需要对商品 x 进行补贴的程度。

d. 问题 4.7 要求你计算的支出函数是与比例 4.4 的情形更一般的柯布-道格拉斯效用函数对应的。当 $\alpha=0.3$(这个数字接近于低收入的人花费在食物上的收入份额)时,再次使用这个支出函数,回答 b 和 c 的问题。

e. 如果使用式 4.54 所示的固定比例情况下的支出函数,你应该如何修改对本问题的计算?

4.9 一般的 CES 效用函数可以表示为

$$U(x,y)=\frac{x^{\delta}}{\delta}+\frac{y^{\delta}}{\delta}$$

a. 证明上述函数在约束条件下,效用最大化的一阶条件是消费者按一定比例选择商品,这个比例式为

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{\delta-1}}$$

b. 前面我们在讨论一些问题时已经说过:对于柯布-道格拉斯函数($\delta=0$),消费者将在 x 与 y 之间平等分配费用,说明 a 的结论也包含了这种情况。

c. p_xx/p_yy 的值与 δ 的取值有何关系?直观地说出你的结论。(如果要对此函数作更深入地探讨,参见扩展 E4.3。)

d. 使用拉格朗日法,推导这种情况下的支出函数。

4.10 消费者需要一定量的食品(x)来维持生存,假设这个量为 x_0。一旦购买 x_0 的食品,消费者将从食品与其他商品(y)得到的效用为

$$U(x,y)=(x-x_0)^{\alpha}y^{\beta}$$

其中:$\alpha+\beta=1$

a. 说明:如果 $I>p_xx_0$,则为取得最大效用,消费者将会在食品 x 上花费 $\alpha(I-p_xx_0)+p_xx_0$,在商品 y 上花费 $\beta(I-p_xx_0)$。解释这个结论。

b. 在这个问题中,如果收入增加,p_xx/I 和 p_yy/I 的比值将会怎样变化?(请参见扩展 E4.2。)

推荐阅读文献

Barten, A. P., and Volker Böhm. "Consumer Theory." In K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*. vol. II. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982.

该书的第 10 章与第 11 章对本章涉及的许多概念作了简洁的概述。

Deaton, A., and J. Muelbauer. *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

该书的 2.5 节对对偶问题提供了一个很好的几何分析。

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory*. Oxford: Oxford University Press, 1990.

该书的第 2 章提供了许多针对柯布-道格拉斯效用函数的拉格朗日分析。

Hicks, J. R. *Value and Capital*. Oxford: Clarendon Press 1946.

该书的第 2 章与数学附录部分提供了一些早期的关于支出函数的重要的见解。

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford: Oxford University Press, 1995.

该书的第 3 章包含了对效用和支出函数的透彻分析。

Samuelson, Paul A. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge: Harvard University Press, 1947.

该书的第 5 章与附录提供了效用最大化的一阶条件的精彩分析,附录对二阶条件作了很好的概述。

Siberberg, E., and W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston: Irwin/McGraw-Hill, 2001.

该书对消费者理论中的对偶问题作了一个虽然很困难,但十分有用的分析。

Theil, H. *Theory and Measurement of Consumer Demand*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1975.

该书对基本的需求理论及其在实证估计中的应用作了很好的概述。

扩　展

预 算 份 额

19 世纪的经济学家恩格尔(Ernst Engel)是最早期的社会科学家之一,他深入地研究了人们的实际消费模式。他特别研究了对食物的消费。他发现,随着收入的增加,人们花费在食物上的收入份额会减少。这便是著名的恩格尔定律,它已被许多研究证实。恩格尔定律是一条经验规律,因此许多经济学家建议使用花费在食物上的收入份额来作为贫穷的度量。还有两个有趣的应用分别是:(1) 1995 年 Hayashi 的研究表明,二代家庭花费在老人所喜好的食物上的收入份额要远远高于一代家庭;(2) 1989 年 Behrman 对欠发达国家的研究表明,随着收入的增加,人们享有更加丰富的食品的愿望事实上减少了在某些特定的营养品上花费的份额。在本扩展的余下部分,我们来看一下关于预算份额(表示为 $s_i = p_i x_i / I$)的一些证据,以及与此相关的一些更深的理论。

E4.1　预算份额的易变性

表 4E.1 显示了最近美国的预算份额的数据。从中可以很明显地看出恩格尔定律——随着收入的增加,家庭在食品上花费的资金大大

减少。表中还显示出一些其他的重要变化：收入越高，用于健康的收入份额越少，而用于养老的收入份额变得非常多。有趣的是，表中显示出用于住房和交通运输的收入份额几乎不随收入而变化——显然，随着收入的增加，高收入者会买更大的住房和更高档的汽车。

表 4E.1 所示的变化的收入份额说明了为什么柯布-道格拉斯效用函数在对家庭行为的详细经验研究中不是那么有用。当效用函数为 $U(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ 时，需求函数为 $x=\alpha I/p_x$ 和 $y=\beta I/p_y$。因此，

$$\begin{aligned} s_x &= p_x x/I = \alpha \\ s_y &= p_y y/I = \beta \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

并且对所有可能的收入水平和相对价格，预算份额是不变的。由于这个缺点，经济学家研究了效用函数的许多其他可能的形式，提供了更大的灵活性。

表 4E.1　2001 年美国家庭的预算份额

	年收入		
	10 000—14 999 美元	30 000—39 999 美元	70 000 美元以上
支出项目			
食品	16.5	14.3	11.9
住房	19.8	17.6	18.3
公用设施、燃料和公共服务	9.7	7.5	5.0
交通	17.1	21.3	18.2
健康保险	4.1	3.1	1.7
其他卫生支出	4.6	3.1	2.1
娱乐(包括酒)	4.9	5.5	6.1
烟草	1.3	1.0	0.4
教育	1.3	0.8	1.8
保险和养老金	3.4	8.4	15.2
其他(服装、家用支出等)	17.3	17.2	19.2

资料来源：*Consumer Expenditure Report*, 2001, Bureau of Labor Statistics website: http://www.bls.gov.

E4.2　线性支出系统

对每种商品消费者都必须有一个最小购买量 (x_0,y_0)，结合这种思想我们就能得到广义的柯布-道格拉斯效用函数

$$U(x,y)=(x-x_0)^{\alpha}(y-y_0)^{\beta} \qquad \text{(ii)}$$

其中：$x\geqslant x_0, y\geqslant y_0$，并仍然有 $\alpha+\beta=1$。

与柯布-道格拉斯函数类似，如果我们引入“剩余收入”(I^*)这一概念，即在购买最低数量的商品组合后剩余的购买力，那么需求函数就能从效用函数中得出。此时

$$I^* = I - p_x x_0 - p_y y_0. \qquad \text{(iii)}$$

利用这个概念，我们得到需求函数为

$$\begin{aligned} x &= (p_x x_0 + \alpha I^*)/p_x \\ y &= (p_y y_0 + \beta I^*)/p_y \end{aligned} \qquad \text{(iv)}$$

这样，在购买了最少数量的商品组合后，消费者在每种商品上花费一定比例的剩余收入，整理等式 iv 得到关于份额的方程

$$\begin{aligned} s_x &= \alpha + (\beta p_x x_0 - \alpha p_y y_0)/I \\ s_y &= \beta + (\alpha p_y y_0 - \beta p_x x_0)/I \end{aligned} \qquad \text{(v)}$$

这表明需求系统是非齐次的。考察式 v 可以得

到一个易理解的结论：一种商品的最小购买量与其预算份额正相关，而与其他商品的最小购买量负相关，因为必要购买的概念符合实际情况，因而斯通(Stone)于1954年发明的线性支出系统(LES, Linear Expenditure System)在经验分析中得到了广泛应用。

传统购买

线性支出系统最有趣的应用之一是用于检验必要购买的概念随条件的变化是如何变化的。例如，Oczkowski和Philip于1994年研究了在变化的经济环境中，现代消费品如何影响消费者花费在传统的本地商品上的收入份额。研究显示，当外界商品变得日益易得时，巴布亚和新几内亚的消费者显著减少了这些份额。因此，社会进步，比如修建更好的用于运输商品的道路，成为破坏传统消费习惯的最主要原因之一。

E4.3 CES效用

在第3章，我们介绍了CES效用函数

$$U(x,y) = \frac{x^{\delta}}{\delta} + \frac{y^{\delta}}{\delta} \qquad \text{(vi)}$$

其中$\delta \leqslant 1, \delta \neq 0$。这个函数的主要用途是描述可供选择的替代可能性(通过参数δ值来反映)。而且，从这个效用函数所含的预算份额可更清楚地看到这一点。结合预算约束条件下效用最大化的一阶条件与CES函数，就可以得到份额方程

$$\begin{aligned} s_x &= 1/[1 + (p_y/p_x)^K] \\ s_y &= 1/[1 + (p_x/p_y)^K] \end{aligned} \qquad \text{(vii)}$$

其中$K = \delta/(\delta - 1)$。

商品份额表达式只与相对价格比率p_x/p_y有关，这表明了CES函数的齐次特性。而且，相对价格的变动所引起的份额变动取决于参数K的值。对于柯布-道格拉斯函数来说，$\delta = 0$，因而$K = 0$而且$s_x = s_y = 1/2$。当$\delta > 0$时，替代可能性很大，并且$K < 0$。此时等式vii显示出s_x与p_x/p_y反方向变动。如果p_x/p_y上升，消费者会用y代替x，直到s_x下降。相应地，如果$\delta < 0$，替代可能性则受限，此时$K > 0$，并且s_x与p_x/p_y同方向移动。p_x/p_y的增加只会导致y对x的很小替代，s_x却会因为x商品相对价格的升高而增加。

北美自由贸易

CES需求函数最常用于一般均衡(见第12章)的大规模计算机模型，经济学家用这种模型估算主要经济变动带来的冲击。无论是改变税收政策，还是改变国际贸易限制，它们导致的相对价格的变化都是相似的。由于CES模型强调份额对相对价格改变所作出的反应，因此它特别适合帮助我们考察这种变化。最近，北美自由贸易协定对加拿大、墨西哥和美国带来的影响成为一个重要的研究对象。一般来说，这些模型显示出，这些国家都应该从该协定中获益，然而墨西哥获益更多，因为它所受的相对价格的变化最大。Kehoe和Kehoe于1995年提出了一些可计算的均衡模型，经济学家们用它们来进行这些考察。[①]

参考文献

Behrman, Jere R. "Is Variety the Spice of Life? Implications for Caloric Intake". *Review of Economics and Statistics* (November 1989): 666—672.

Green, H. A. *Consumer Theory*, London: The Macmillan Press, 1976.

Hyashi, Fumio. "Is the Japanese Extended Family

① 本书第12章的扩展部分更详细地讨论了关于《北美自由贸易协定》的研究。

Altruistically Linked? A Test Based on Engel Curves". *Journal of Political Economy* (June 1995): 661—674.

Kehoe, Patrick J., and Timothy J. Kehoe. *Modeling North American Economic Integration.* London: Klower Academic Publishers, 1995.

Oczkowski, E., and N. E. Philip. "Household Expenditure Patterns and Access to Consumer Goods in a Transitional Economy". *Journal of Economic Development* (June 1994): 165—183.

Stone, R. "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis". *The Economic Journal* (September 1954): 511—527.

第 5 章 收入效应和替代效应

在这一章中，我们利用效用最大化模型来研究消费者对某种商品的需求量是如何随商品价格的变化而变化的。通过这一研究，我们可以得到一条消费者对该种商品的需求曲线。在这一过程中，我们要对这种价格反应的特性提出若干见解，并将研究深入到隐藏在大多数需求分析之后的各种假设条件。

5.1 需求函数

正如我们在第 4 章中所指出的，原则上有可能通过求解效用最大化的必要条件来得到用全部商品的价格和收入的函数形式来表达的商品需求 $x_1, x_2, \cdots, x_n$（以及拉格朗日乘数 λ）的最优水平。在数值上，这可以通过以下 n 个需求函数的形式予以表达

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= x_1(p_1, p_2, \cdots, p_n, I) \\
x_2^* &= x_2(p_1, p_2, \cdots, p_n, I) \\
&\vdots \\
x_n^* &= x_n(p_1, p_2, \cdots, p_n, I)
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

如果只有两种商品（x 和 y，这是我们经常遇到的情况），上面的表达可以简化为

$$
\begin{aligned}
x^* &= x(p_x, p_y, I) \\
y^* &= y(p_x, p_y, I)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

一旦知道了需求函数的形式和各种价格和收入的数值，我们就可以预测消费者对每种商品的购买量。以上分析强调了价格和收入对于整个过程是外生的，即这些参数是每个消费者所不能控制的。在这种层次的分析上，参数的改变会移动消费者的预算约束使其做出不同的选择。这便是本章和下章所研究的核心问题。在本章中，我们将考察任一种商品对其价格和收入的偏导数 $\partial x/\partial p_x$ 及 $\partial x/\partial I$。在第 6 章中，我们将通过考察对任意两种商品 x 和 y 的形式为 $\partial x/\partial p_y$ 的交叉价格效应来作深一层的讨论。

齐次性

需求函数的第一条性质不需要数学。如果将所有商品的价格与收入加倍(事实上也可以是任意一正常数倍),最优化的需求数量将保持不变。加倍只改变了计量单位,而未改变"实际的"商品需求数量。我们可以用几种不同的方法来说明这个结果,其中最简单的方法大概是图解法。回想一下图 4.1 与图 4.2,如果我们将 p_x、p_y 与 I 加倍,那么很清楚,预算约束线不会受到影响。$p_x x + p_y y = I$ 与 $2p_x x + 2p_y y = 2I$ 的约束条件相同。这一结论可以这样表达:对任何商品 x,在 $t>0$ 时,有

$$x_i^* = x_i(p_1, p_2, \cdots, p_n, I) = x_i(tp_1, tp_2, \cdots, tp_n, tI) \tag{5.3}$$

我们称式 5.3 中的函数是零次齐次的。① 因此,我们已说明,消费者需求函数是所有的价格与收入的零次齐次函数。按相同比例改变所有商品的价格与收入不会影响原有的商品需求数量。这一结果表明,(在理论上)消费者的需求不受"纯"通货膨胀的影响,因为所有商品价格与收入是成比例上升的。当然,如果通货膨胀不是纯粹的(即如果某些商品的价格比另一些商品的价格上升得快),情况就有所不同。

例 5.1

齐次性

需求的齐次性是效用最大化假设的直接结果。从效用最大化中求出的需求函数是齐次的,反过来,非齐次性的需求函数不能反映效用最大化(除非价格本身进入效用函数,比如虚荣的顾客喜欢用贵的东西标榜自己等情况)。例如,消费者享用食物(x)与住房(y)的效用为

$$\text{效用} = U(x,y) = x^{0.3}y^{0.7} \tag{5.4}$$

使用例 4.1 中的方法很容易推导出需求函数

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{0.3I}{p_x} \\ y^* &= \frac{0.7I}{p_y} \end{aligned} \tag{5.5}$$

这些函数的齐次性是很明显的——价格与收入都加倍时,x^* 与 y^* 不变。

如果 CES 函数反映了消费者对 x 与 y 的偏好

$$U(x,y) = x^{0.5} + y^{0.5} \tag{5.6}$$

我们在例 4.2 中已得到需求函数为

$$x^* = \left(\frac{1}{1 + p_x/p_y}\right) \cdot \frac{I}{p_x}$$

① 一般地,如我们在第 2 章见到的,如果 $f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 成立,$t>0$,则称函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 k 次齐次函数。最常见的情况是 $k=0$ 与 $k=1$。如果 f 是零次齐次的,将所有自变量加倍后则 f 值不变。如果 f 是一次齐次的,将所有自变量加倍后则 f 值也加倍。

$$y^* = \left(\frac{1}{1 + p_y/p_x}\right) \cdot \frac{I}{P_y} \tag{5.7}$$

同上述情况一样,这两个需求函数也都是零次齐次的——p_x,p_y 与 I 加倍,x^* 与 y^* 不变。

请回答:此例中商品 x 与 y 的需求函数是否会导致这样的结果:无论 p_x,p_y 与 I 如何变化,消费者都会花光手中所有的收入进行消费?请给出证明。

5.2 收入变化

随着消费者购买力的上升,自然期望能够购买更多的商品。图 5.1 说明了这种情况,消费支出从 I_1 增加到 I_2 又增加到 I_3,x 的需求量随之从 x_1 增加到 x_2 又增加到 x_3,同样,y 的需求量也由 y_1 增加到 y_2 又增加到 y_3。注意三条预算线 I_1,I_2,I_3 是平行的,这反映了只有收入变化,而 x 与 y 的相对价格并未改变。由于 p_x/p_y 始终不变,因而实现效用最大化的条件在消费者收入水平提高前与提高后都是一样的,即 MRS 始终不变,所以点(x_3,y_3)与点(x_1,y_1)的 MRS 相等。

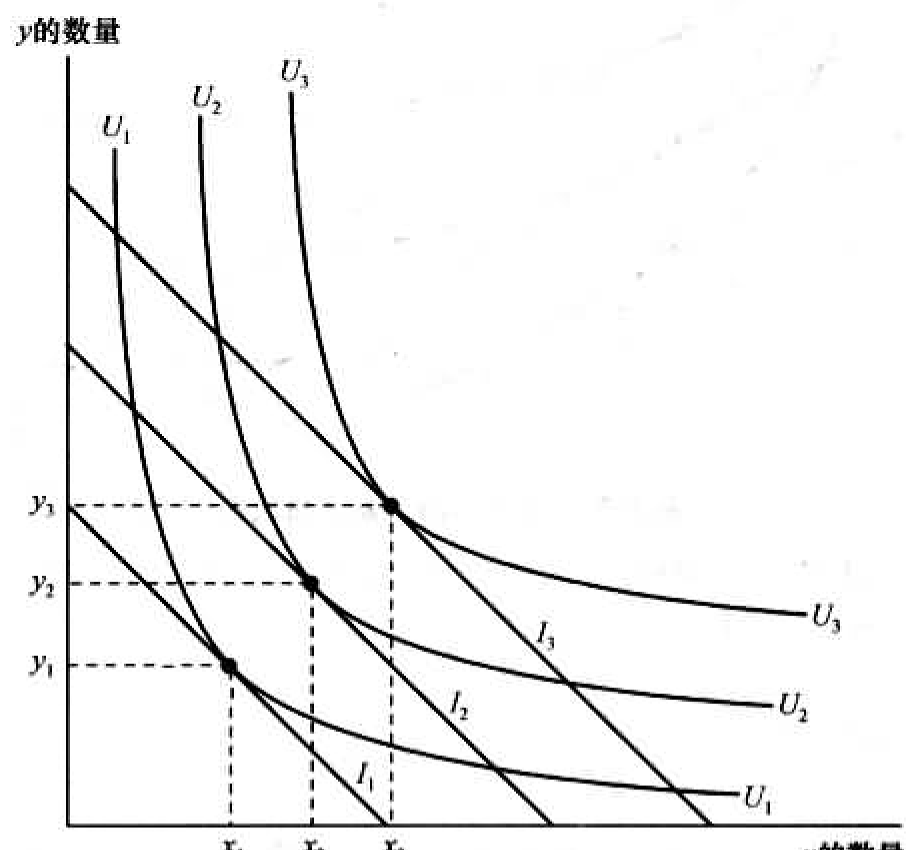


图 5.1　收入增加对 x 与 y 数量选择的影响

当收入从 I_1 增加到 I_2 又增加到 I_3 时,几个依次增高的切点即为 x 与 y 的最优选择(效用最大化)之点,注意到预算约束线是平行移动的,这是因为其斜率($-p_x/p_y$)不变。

正常品与劣等品

随着收入的增加，图 5.1 中的 x 与 y 都随之增加——$\partial x/\partial I$ 与 $\partial y/\partial I$ 都大于零，可以认为这是一种正常的情况，在考察收入变化的过程中，具备这种特性的商品被称为**正常品（normal goods）**。

对于有些商品来说，当收入在某些范围内增加时，对这些商品的购买量会减少。如劣等威士忌酒、土豆及旧服装。一种商品如 z 的 $\partial z/\partial I$ 如果小于零，我们将其称为**劣等品（inferior good）**，图 5.2 描述了这种情况。收入在图中所示范围内的增加，导致了消费者选择更少的 z，因而 z 为劣等品。注意，劣等品的无差异曲线形状并不一定"奇特"，图 5.3 中 y 与 z 的曲线仍符合 MRS 递减的假设。我们说 z 是劣等品，是就它与其他商品（这里指 y）的关系而言，并非因为它本身有什么特别之处。显然，劣等品的恩格尔曲线斜率为负。因此，我们有下列定义：

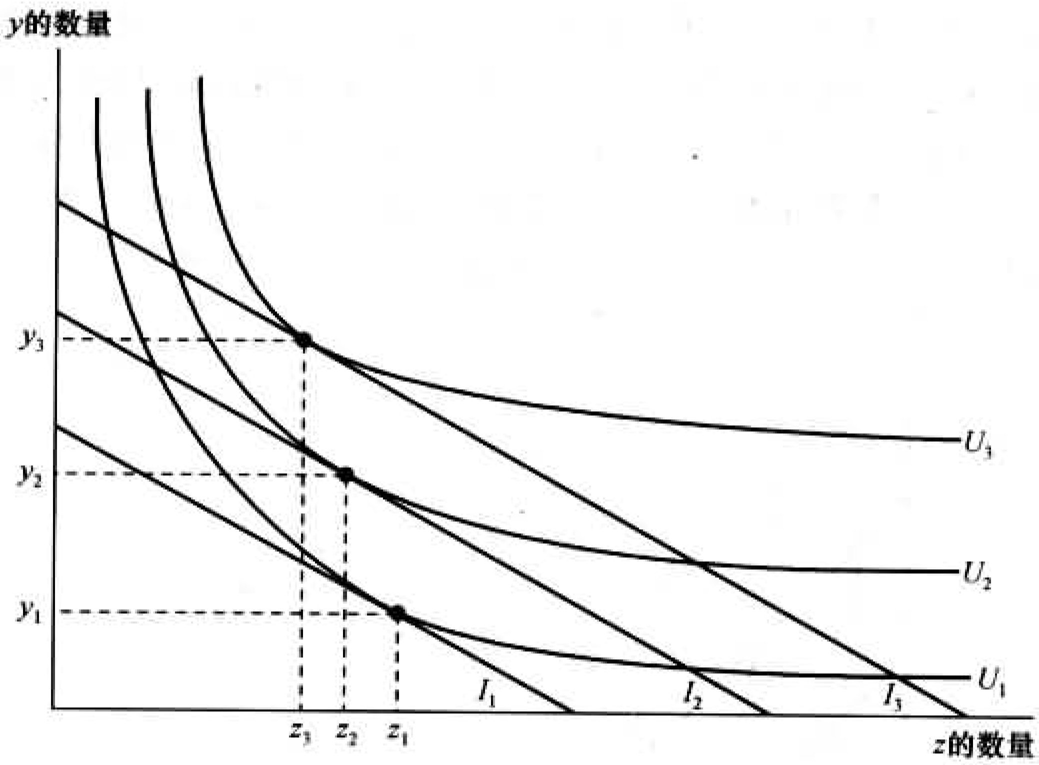


图 5.2　劣等品的无差异曲线图

在图 5.2 中，随着收入的增加，对商品 z 的购买量是下降的，因而 z 是劣等品。而 y 是正常品（因为假设仅有两种商品可供消费），y 的购买量是随总支出的增加而增加的。

定义

劣等品与正常品。在收入变化的某一范围内，如果一种商品 x_i 的 $\partial x_i/\partial I<0$，则这一范围内的商品为劣等品；如果 $\partial x_i/\partial I \geq 0$，则这种商品为正常品或"非劣等品"。

5.3　一种商品价格的改变

价格变化对商品需求量的影响比收入变化的影响要复杂些。从几何图形上来说，这种复杂性是

因为价格变化不仅使预算线的位置改变了，而且使它的斜率也改变了。所以，要达到新的效用最大化，不仅需要移动到新的无差异曲线上，而且需要改变 MRS。因此价格变化时，有两种不同的分析效应在起作用：其一是**替代效应**(**substitution effect**)，即便消费者的无差异曲线不变，为了使 MRS 与新的价格比率相等，消费模式也将会改变；其二是**收入效应**(**income effect**)，这是因为价格变化后消费者的“实际”收入发生变化，消费者必须从原有的无差异曲线水平移到新的无差异曲线的水平。我们先从分析这些效应的几何图形开始，然后再过渡到数值分析。

5.3.1 价格下降的几何分析

图 5.3 说明了收入效应与替代效应的关系。消费者最初的效用最大化（花费完所有收入 I）消费的商品组合为(x^*,y^*)。最初的预算约束为 $I=p_x^1x+p_yy$。现在假设商品 x 的价格下降到 p_x^2，新的预算约束为图 5.3 中的 $I=p_x^2x+p_yy$。显然，消费者新的效用最大化的商品组合为(x^{**},y^{**})，在这一点新预算线与无差异曲线 U_2 相切。移向新组合点的运动可看做是两种效应共同作用的结果。首先，商品的组合选择受到约束只能沿 U_1 水平的无差异曲线变动，预算线斜率的变化会刺激消费者的

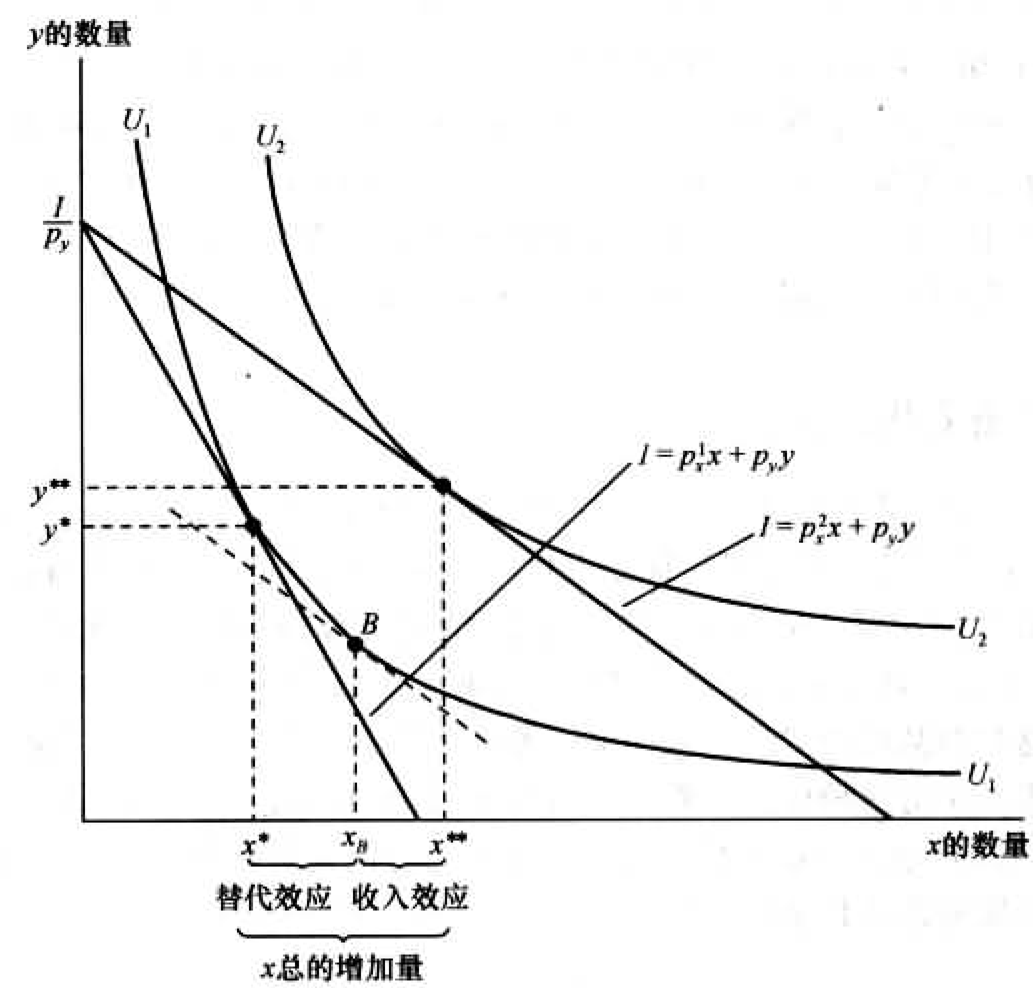


图 5.3　x 价格下降时收入效应与替代效应的图解

当 x 的价格从 p_x^1 下降为 p_x^2 时，效用最大化的选择从(x^*,y^*)移动到(x^{**},y^{**})。这一移动可分解为两种不同的效应：一是替代效应，是沿着最初的无差异曲线(U_1)向 B 点的移动，在 B 点 MRS 与新的价格之比相等；二是收入效应，指由于实际收入的增加而导致的向更高水平的无差异曲线的移动。当价格下降时，两种效应都增加了对 x 的购买量。请注意 I/p_y 在价格变化的前后均相同。这是因为 p_y 没发生变化，所以 I/p_y 既出现在旧的预算约束线上又出现在新的预算约束线上。

消费组合向 B 点运动。图 5.3 中的虚线与新的预算约束线($I=p_x^2x+p_yy$)斜率相同,但因为我们已假定"实际"收入(即效用)不变,所以这条虚线逐渐与 U_1 相切。如果价格下降又不能提高消费者福利水平的话,那么 x 价格下降后的结果必然是从(x^*,y^*)的组合移向 B 点的组合。这种移动就是替代效应的几何说明。从 B 点到最佳组合(x^{**},y^{**})的进一步移动,与前面对收入变化的分析是一样的。由于 x 的价格下降,消费者有了更多的"实际"收入并可达到高于以前的效用水平(U_2)。如果 x 是正常品,消费者会因购买力增加而要求购买更多的 x。这解释了移动的收入效应。总的看来,价格下降的结果导致了更多的对 x 的需求。

在实际购买时,消费者并非真的先从(x^*,y^*)移到 B 点,再从 B 点移到(x^{**},x^{**}),认识到这一点很重要。我们观察不到 B 点,反映消费者行为的只有两处最佳组合。尽管如此,收入效应与替代效应的概念还是有其分析价值的,因为它说明了价格的改变对 x 需求量的影响是以两种不同的方式发生的。我们将会看到这两种方式的区别为需求理论提供了重要见解。

5.3.2 价格上升的几何分析

如果商品 x 的价格上升,仍可用相同的分析方法。在图 5.4 中,由于商品 x 的价格从 p_x^1 上升到 p_x^2,预算线内移。从初始的效用最大化商品组合(x^*,y^*)到新的商品组合(x^{**},y^{**})的移动可以分解为两种效应:第一,即使消费者保持最初的无差异曲线水平(U_2),也会有某种刺激使消费者以 y 替代 x,同时,消费组合沿无差异曲线 U_2 移至 B 点。第二,x 价格的上升降低了消费者的购买力,消费者必须移向更低的效用水平。这种移动也被称为收入效应。请注意,在图 5.4 中,x 价格上升时,收入效应与替代效应的作用方向相同,导致对它的需求量减少。

5.3.3 劣等品价格变化的效应

到目前为止,我们已说明了替代效应与收入效应的相互作用。价格下降,二者共同导致商品需求量的增加,而价格上升时二者又共同导致需求量的减少。虽然这种分析在商品是正常品(非劣等品)的情况下是准确的,但在商品是劣等品的情况下,情况就有些复杂了。此时,收入效应与替代效应的作用方向相反,因而价格变化的总效应是不确定的。例如,价格下降时由于替代效应的作用,消费者总是要增加对这种商品的消费的。但如果这种商品是劣等品,由于价格下降所导致的购买力的增加有可能使消费者减少对这种商品的购买。因而,结果就不确定了。替代效应会使劣等品的购买量增加,而同时,(反常的)收入效应又使其购买量减少。与正常品的情形不同,这里不可能精确地预测出价格变化会怎样影响消费数量的选择。

5.3.4 吉芬之谜

如果价格变化的收入效应非常之大,价格变化与由其导致的需求量的变化就会是同一方向了。据说英国经济学家罗伯特・吉芬(Robert Giffen)观察到一个矛盾的现象,他注意到在 19 世纪的爱尔兰,当土豆价格上涨时,人们消费更多的土豆。这一特殊的效应可用土豆价格变化时所产生的收入效应的程度来解释。土豆不仅仅是劣等品,而且其消费占了爱尔兰人收入的很大比例,因而土豆价

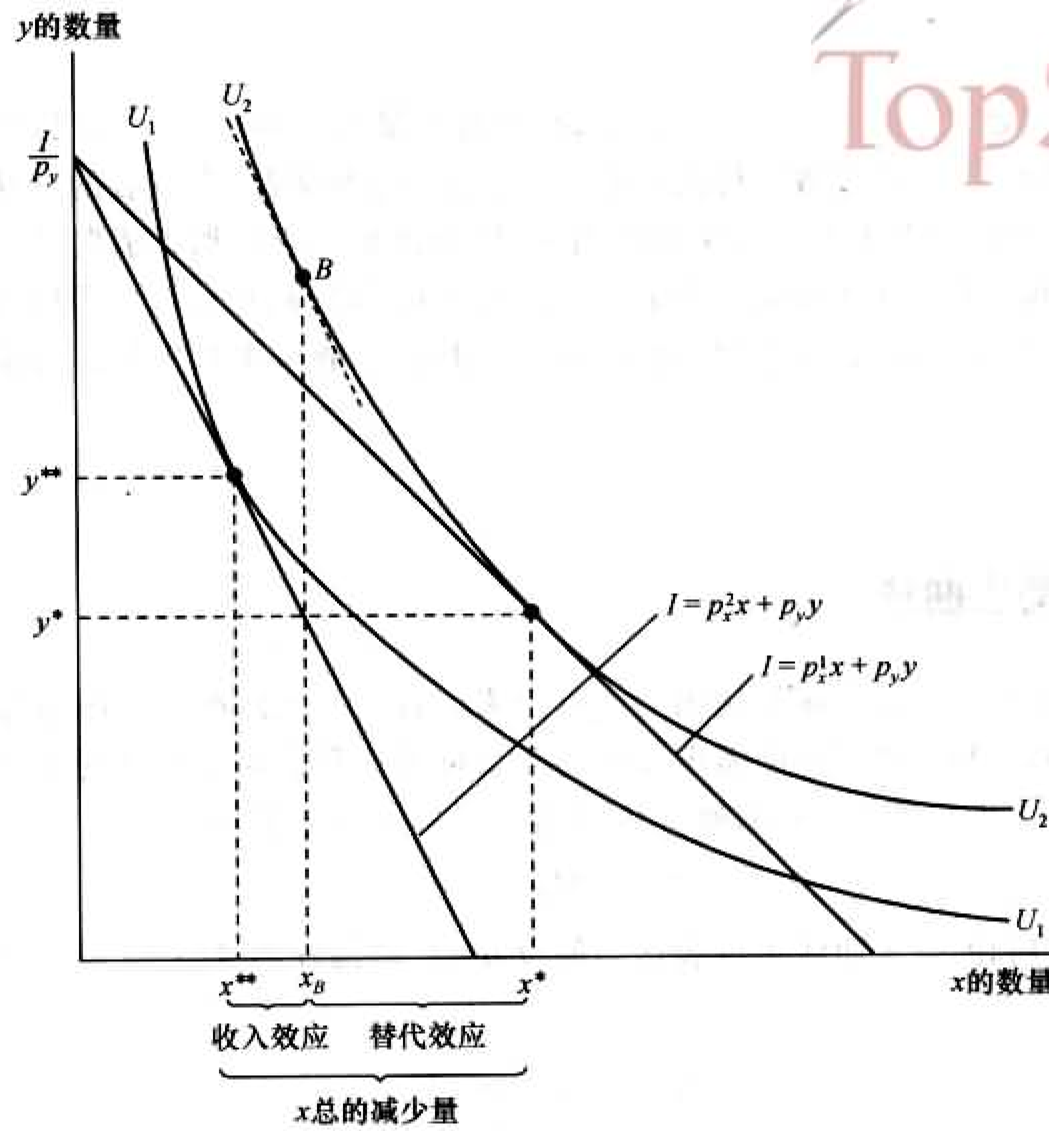


图 5.4　x 价格上升时收入效应与替代效应的图解

当 x 的价格上升时，预算约束线内移。从最初的效用最大化的均衡点(x^*，y^*)移向新的均衡点(x^{**}，y^{**})，这一移动可分解为两种不同的效应。沿最初的无差异曲线(U_2)向 B 点的移动是替代效应。而价格上升，将对购买力带来损失，并随即会发生向较低水平的无差异曲线的移动，这就是收入效应。在图 5.4 中，x 价格上升后，收入效应与替代效应都导致 x 需求量的减少。点 I/p_y 仍然不受 x 价格变化的影响。

格的上升大大减少了爱尔兰人的实际收入。爱尔兰人被迫压缩其他奢侈品的消费，以购买更多的土豆。即便这个历史事件令人难以置信，商品价格上升导致其需求量增加的这种可能仍被称为吉芬之谜(**Giffen's paradox**)。[①] 在后面，我们将给出吉芬之谜的数学解释。

5.3.5　小结

因此，我们从几何分析中可以得到以下结论：

---

① 马歇尔认为在分析价格变化时，必须既考虑供给因素又考虑需求因素。而这一解释的主要问题就在于抛弃了马歇尔的这个条件。如果爱尔兰的土豆由于虫害而价格上涨，那么供给应该已经变得较小了，这样，怎么可能消费更多的土豆呢？另外，由于爱尔兰有许多土豆种植者，土豆价格上涨本应使他们的真实收入上升。对此的详细探讨及其他有关土豆的有趣见解参见 G. P. Dwyer and C. M. Lindsey, "Robert Giffen and the Irish Potato", *American Economic Review* (March 1984): 188—192。

替代效应与收入效应。对于一个正常品来说，其效用最大化的假设为：商品价格的下降导致购买量的增加，这是因为：(1) 替代效应使消费者购买更多的这种商品，消费者的选择沿无差异曲线移动；(2) 收入效应也使消费者更多地购买这种商品，因为价格下降增加了消费者的购买力。因此消费者可向更高水平的无差异曲线移动。当正常品的价格上升时，购买数量因类似的理由而减少。而对劣等品来说，替代效应与收入效应的作用方向相反，我们不能事先对劣等品价格变化的结果作出预测。

5.4 消费者的需求曲线

经济学家们常常需要将需求函数用图形表示出来。我们自然地称这些图为需求曲线。了解这些应用广泛的需求曲线和与其对应的需求函数的联系可以让我们对最基础的经济学理论有进一步的认识。为方便起见，我们假设只有两种商品，于是 x 的需求函数表示为

$$x^* = x(p_x, p_y, I)$$

从上面的需求函数得到的需求曲线可以表达当假设 p_y，$\bar{I}$ 和偏好不变，x 和 p_x 的关系。得到下面的关系

$$x^* = x(p_x, \bar{p}_y, \bar{I}) \tag{5.8}$$

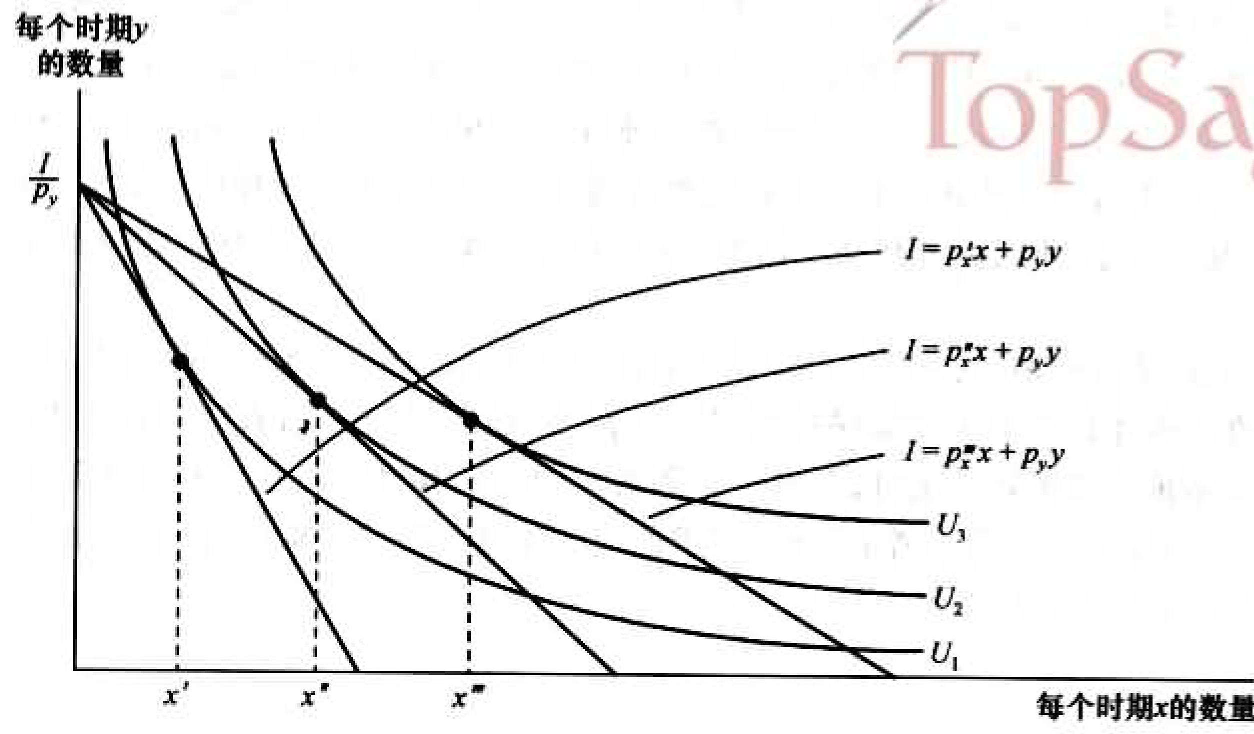
p_y，I 上面的横杠表示这些需求函数的决定量是不变的，如图 5.5 所示。图 5.5(a) 表示随着商品 x 价格的不断下降（y 的价格与收入不变），消费者在使效用最大化时消费商品 x 与 y 的情况。假设商品 x 的价格从 p_x' 下降到 p_x'' 又下降到 p_x'''，对商品 x 的选择数量则从 x' 增加到 x'' 进而增加到 x'''。这种假设与我们的一般结论相符，也就是说除了吉芬之谜的罕见情况以外，$\partial x/\partial p_x$ 均是负的。

图 5.5(b) 中，效用最大化时对商品 x 的选择由需求曲线表示出来了。以 p_x 为纵轴，横轴与图 5.5(a) 完全相同。负斜率的需求曲线再次证实了 $\partial x/\partial p_x$ 为负的假设。因此，我们可以对消费者需求曲线作如下定义：

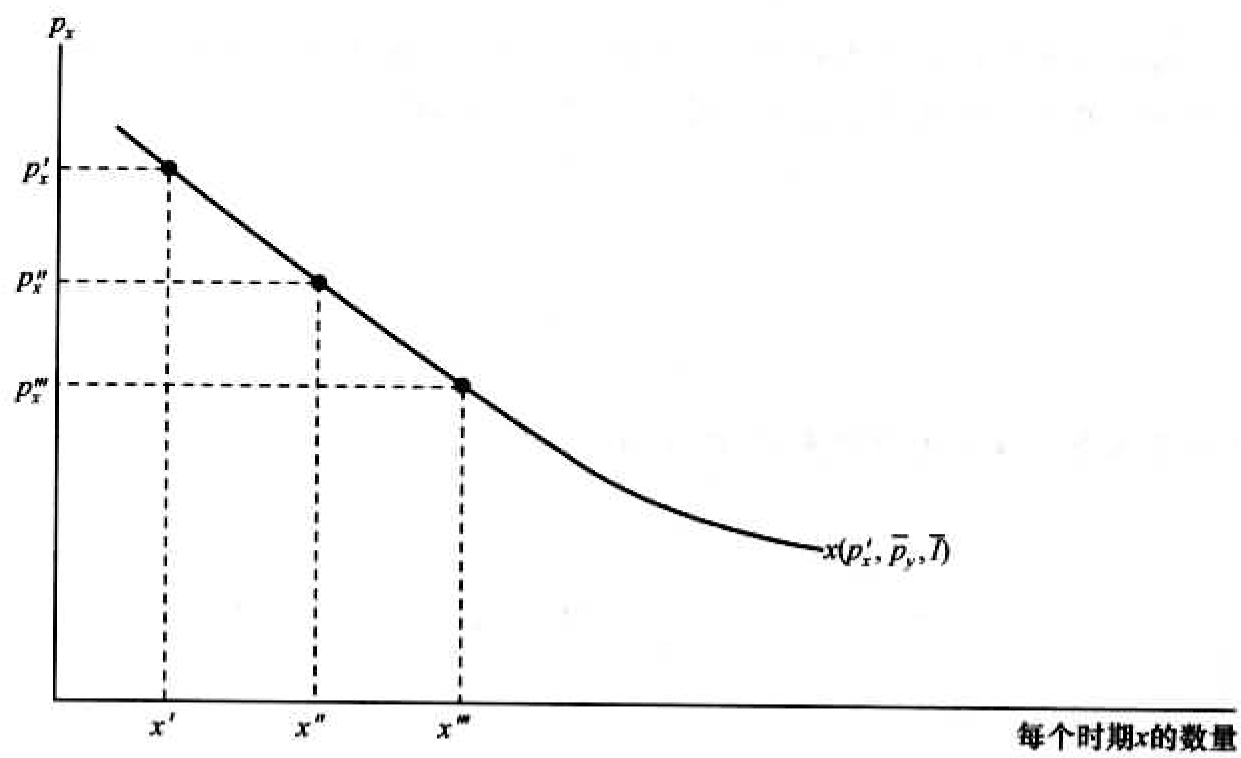
定义

消费者需求曲线。消费者需求曲线是假设在其他条件不变的情况下，表明商品价格与商品需求量之间关系的曲线。

只有在保持其他条件不变的情况下，图 5.5 中的需求曲线才保持在固定不变的位置。如果其中的一个条件改变，需求曲线会移动到新的位置。



(a) 个人无差异曲线图



(b) 需求曲线

图 5.5　消费者需求曲线

图(a)说明了商品 x 在三种不同的价格水平(p_x'、p_x'' 与 p_x''')下,使消费者效用最大化的商品 x 与 y 的消费组合。图(b)是利用 x 的需求量与其价格 p_x 的关系所作出的 x 的需求曲线,这条曲线是在 p_x 变动时,假设 p_y、I 与消费者偏好三者都保持不变的情况下得到的。

需求曲线的移动

上面的需求曲线是在以下三个基本要素保持不变的条件下得到的:(1) 收入;(2) 其他商品的

价格（如 y 的价格 p_y）；(3) 消费者偏好。如果这其中任何一个要素变化，都会发生整条需求曲线的移动。例如，如果 I 增加，需求曲线将外移（假设 $\partial x/\partial I>0$；也就是说，此商品在这一收入区间为"正常品"）。在每一价格水平下都会有更多的 x 的需求量。如果另一种商品的价格 p_y 改变，曲线将依据 x 与 y 的关系发生内移或外移。下一章我们要对商品之间的关系进行详细研究。最后，如果消费者对 x 的偏好发生变化，曲线也将移动。例如，麦当劳急速骤起的广告就有可能使汉堡包的需求曲线外移。

以上的讨论已使我们清楚：图 5.5(b) 中的需求曲线仅是一个二维的实际需求函数的代表（式 5.8），并且仅在其他条件不变下才能保持稳定。在 p_x 变化时，会发生沿着给定需求曲线的移动，而在收入、其他商品价格或偏好变化时，会发生整条需求曲线的移动。将这两种移动清楚地区分开来是非常重要的。传统上，用"需求增加"表示需求曲线的外移，而用"需求量增加"表示由 p_x 变化而引起的沿给定需求曲线所作的移动。

例 5.2

需求函数与需求曲线

为根据给定的需求函数画出需求曲线，必须假设函数产生的偏好是稳定不变的，并且知道收入与其他相关商品价格的值。从例 5.1 的第一种情形中我们发现

$$x=\frac{0.3I}{p_x} \tag{5.9}$$

与

$$y=\frac{0.7I}{p_y}$$

如果偏好不变并且消费者收入为 100 美元，则这两个函数为

$$x=\frac{30}{p_x}$$
$$y=\frac{70}{p_y} \tag{5.10}$$

或

$$p_x x=30$$
$$p_y y=70$$

很明显，这两种商品的需求曲线都是双曲线。收入增加将使两条需求曲线都向外移动。还需注意的是，在这种情况下，p_y 变化时 x 的需求曲线不发生移动；对 y 也一样。

在例 5.1 的第二种情况下，分析更为复杂，对 x 商品，我们知道

$$x=\left(\frac{1}{1+p_x/p_y}\right)\cdot\frac{I}{p_x} \tag{5.11}$$

为在以 p_x 与 x 轴为坐标的平面上画出需求曲线，必须知道 I 与 p_y 的值。仍假定 $I=100$ 而 $p_y=1$，式 5.11 变为

$$x = \frac{100}{p_x^2 + p_x} \tag{5.12}$$

价格与消费量之间仍为双曲线的关系。由于此时的替代效应比柯布-道格拉斯情况下更大，所以这里的曲线相对平坦一些。从式 5.11 可知

$$\frac{\partial x}{\partial I} = \left(\frac{1}{1 + p_x/p_y}\right) \cdot \frac{1}{p_x} > 0 \tag{5.13}$$

和

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = \frac{I}{(p_x + p_y)^2} > 0$$

所以增加 I 或 p_y 将导致商品 x 的需求曲线外移。

请回答：如果此人在每种商品上花费一半的总收入，式 5.10 中的需求函数将如何变化？证明他的需求函数在点 $p_x = 1, p_y = 1, I = 100$ 得到的对 x 的需求量和式 5.11 得到的一样。用数值方法证明 CES 需求函数对 p_x 的变化比柯布-道格拉斯需求函数更加敏感。

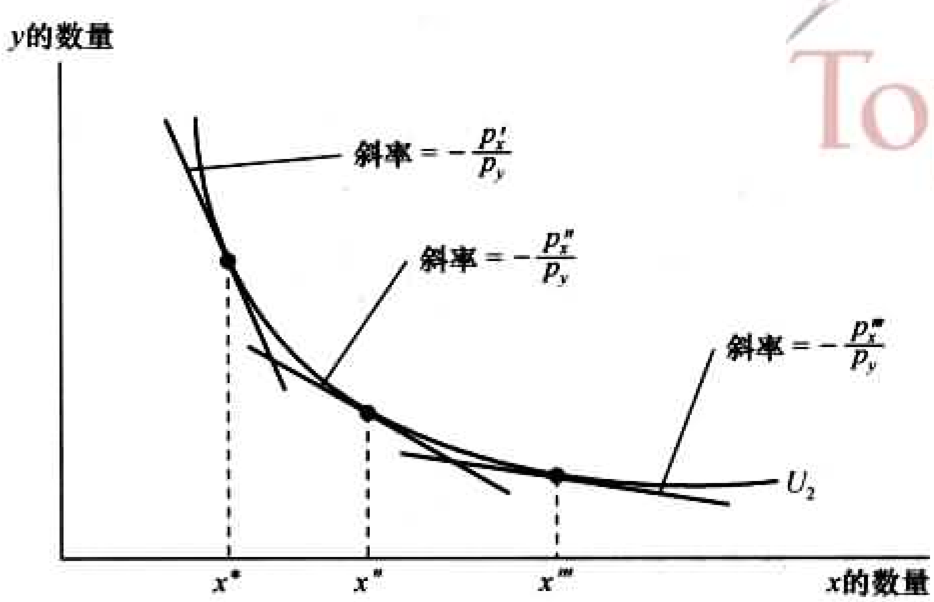
5.5 补偿性需求曲线

图 5.5 中，消费者的效用沿需求曲线而变化，当 p_x 下降时，消费者的效用如图所示不断改善，从 U_1 上升到 U_2 又上升到 U_3。这种情况的发生是由于假设了名义收入与其他商品价格都不变化，因此，p_x 下降的结果是消费者福利改善，购买力增加。在需求曲线的推导过程中，虽然**其他条件不变假设（ceteris paribus assumption）**是最常见的方法，但不是唯一的方法。另一种方法是在考察 p_x 变化的影响时假设消费者的真实收入（或效用）不变。图 5.6 对这种方法进行了说明，当 p_x 连续下降时，效用水平保持不变（在 U_2 水平）。为防止 p_x 下降后效用水平上升，就要减少消费者的正常收入。换句话说，价格变化对购买力的效应是"补偿性"的，这样就使消费者的效用保持在 U_2 水平。因此对价格变化的反应仅为替代效应。如果我们研究的是 p_x 上升的情况，收入的补偿效应将是正向的：为使消费者在价格上升后仍保持在无差异曲线 U_2 的效用水平上，消费者收入要有所增加。我们可将这些效应总结如下：

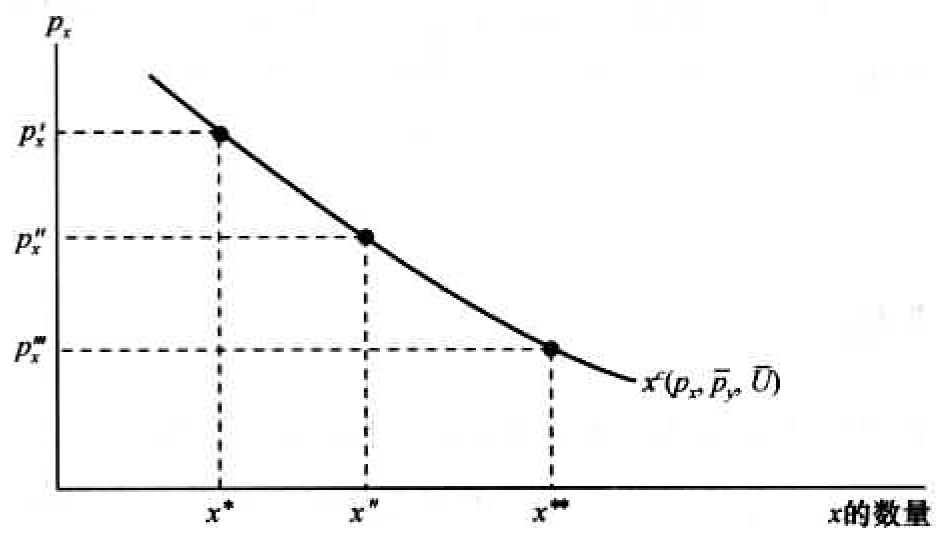
定义

补偿性需求曲线。补偿性需求曲线（compensated demand curve）说明在其他商品价格与效用水平不变的假设条件下，某一商品的价格与其购买量之间的关系。这条曲线［因由英国经济学家希克斯（John Hicks）引入，故被称为希克斯曲线］只说明替代效应。从数值上来说，这条曲线表示了一个二维补偿性需求函数。

$$x^* = x^c(p_x, p_y, U) \tag{5.14}$$



(a) 个人无差异曲线图



(b) 补偿性需求曲线

图 5.6　补偿性需求曲线

x^c 曲线为 p_y 与效用不变时，p_x 变化所引起的商品 x 需求量的变化。也就是说，为保持效用不变，消费者的收入是“补偿性”的。因此，x^c 反映的仅是价格变化的替代效应。

补偿性与非补偿性需求曲线的关系

图 5.7 说明了这两种不同概念的需求曲线的关系。两条曲线在 p_x'' 处相交是由于在这一价格水平下，消费者的收入刚好能达到 U_2 的效用水平（比较图 5.5 与图 5.6）。因此 x''是两种需求概念下的需求量。在 p_x'' 以下，为不使效用因价格下降而增加，消费者在 x^c 曲线上有负的收入补偿。因此，假设 x 为正常品，沿 x^c 到 p_x''' 时的需求量比沿非补偿性需求曲线 x 到 p_x'' 时的需求量要少。反过来，在 p_x'' 以上（如 p_x'），收入补偿性为正，因为消费者此时需要某些帮助才能保持在 U_2 水平。仍假设 x 为正常品，沿 x^c 线到 p_x' 比沿 x 线所需的 x 要多。一般来说，正常品的补偿性需求曲线对价格变化的反应要小于非补偿性需求曲线对价格变化的反应，这是因为后者既反映价格变化的替代效应，又反映价格变化的收入效应，而前者仅反映价格变化的替代效应。

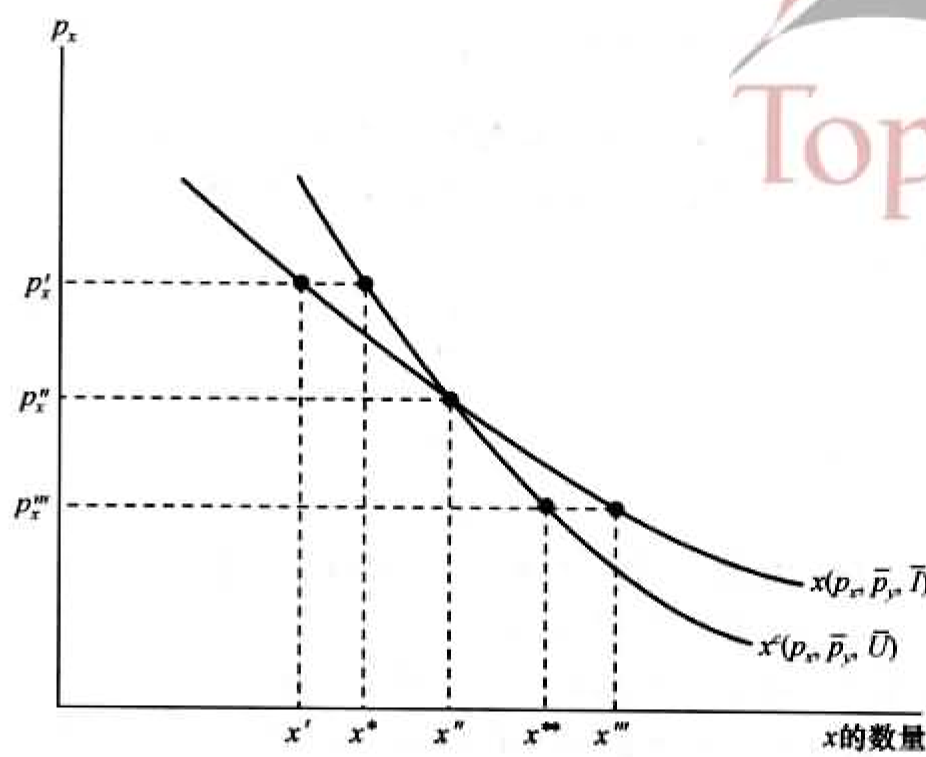


图 5.7　补偿性与非补偿性需求曲线的比较

补偿性需求曲线(x^c)与非补偿性需求曲线(x)在 p_x'' 处相交,因为此时在两个概念下,需求量都为 x''。p_x'' 以上,补偿性需求曲线上的消费者收入是增加的,所以比非补偿性需求曲线上的消费者需要更多的商品 x。p_x'' 以下,补偿性需求曲线上的消费者收入是减少的,所以比非补偿性需求曲线上的消费者需要的 x 量要少。由于 x 曲线既反映替代效应又反映收入效应,所以它比只反映替代效应的 x^c 曲线更平缓。

在经济分析中究竟是使用补偿性需求曲线还是使用非补偿性需求曲线,基本上是选择哪一种曲线更方便的问题。由于估算所需的价格数据与正常收入数据通常容易获得,所以大多数的经验研究使用的是非补偿性需求曲线(有时也称为马歇尔需求曲线)。在第 10 章中我们将对这种估算及其在实际政策制定中的应用作一些说明。而为理论研究的目的,补偿性需求曲线就是更合适的概念,因为它可保持效用不变,这就使它具有某些优势。本章最后关于“消费者剩余”的讨论就显示了它的一个优势。

例 5.3

补偿性需求函数

在例 3.1 中,我们曾假设汉堡包(y)与软饮料(x)的效用函数由下式给出

$$效用 = U(x,y) = x^{0.5}y^{0.5} \tag{5.15}$$

在例 4.1 中,我们计算了这一效用函数的马歇尔需求函数。

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha I}{p_x} = \frac{I}{2p_x} \\ y &= \frac{\beta I}{p_y} = \frac{I}{2p_y} \end{aligned} \tag{5.16}$$

在例 4.3 中,我们还计算了将式 5.15 与式 5.16 结合的间接效用函数。

$$效用 = V(I,p_x,p_y) = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}} \tag{5.17}$$

为得到 x 与 y 的补偿性需求函数，我们简单地用式 5.17 解出 I，然后把 I 用一个含 V 的项替代，代入式 5.16，这样，我们就能交换收入项与效用项以满足补偿性需求的概念所要求的效用不变的条件。完成这些替代后得到下式

$$\begin{aligned} x &= \frac{Vp_y^{0.5}}{p_x^{0.5}} \\ y &= \frac{Vp_x^{0.5}}{p_y^{0.5}} \end{aligned} \tag{5.18}$$

这就是 x 与 y 的补偿性需求函数，现在需求取决于效用（V）而不是收入了。效用不变，p_x 上升，则对 x 的需求减少，这就仅仅反映替代效应了（参见例 5.4）。

p_y 虽然没进入 x 商品的非补偿性需求函数，但它的确在补偿性需求函数中发挥了作用，p_y 上升，使补偿性需求曲线外移。两种需求概念在初始点重合在 $p_x=1, p_y=4, I=8, V=2$ 处。式 5.16 预测在这时 $x=4, y=1$，式 5.18 的情况也相同。但在 $p_x>1$ 或者 $p_x<1$ 时，需求量在这两种概念下就是不一样的了。如果 $p_x=4$，在非补偿性需求函数情况下（式 5.16），$x=1, y=1$，而在补偿性需求函数情况下（式 5.18）则为 $x=2, y=2$。由于价格上升导致了商品 x 需求量的下降，但在补偿性需求函数下商品 x 需求下降得少，非补偿需求函数下则下降得多，这是因为前者不包括价格上升后的负收入效应。

这个例子清楚地区分了两种需求概念下其他条件不变的差别。在非补偿性需求下，消费支出为 $I=2$ 不变时，p_x 由 1 上升到 4，导致效用损失，此时，效用从 2 下降到 1；但在补偿性需求下，效用保持在 $V=2$ 不变。要保持效用不变，消费支出为补偿提价的效应必须上升到 $E=1(2)+1(2)=4$（参见式 5.17）。

请回答：如果效用不变，式 5.18 给定的补偿性需求函数对 p_x 与 p_y 是零次齐次的吗？你是否认为所有的补偿性需求函数都具有这种性质？

5.6 对价格变化反应的数学进展

我们前面在很大程度上是依赖于几何的方法描述消费者对价格变化的反应的，由于数学的方法能提供对问题的更深入的认识，所以我们现在使用数学分析法。我们的目标是检验偏导数 $\partial x/\partial p_x$，即其他条件不变时，某种商品价格的变化对其购买量的影响。接着我们研究一种商品价格的变化是如何影响另一种商品购买量的。

5.6.1 直接法

我们的目标是利用效用最大化的模型来研究 p_x 变化时对 x 的需求产生什么影响，即计算

$\partial x/\partial p_x$。解决这一问题的直接方法要利用效用最大化的一阶条件（式 4.8）。这 $n+1$ 个等式的导数产生了新的 $n+1$ 个等式，最终可解出我们需要的导数。[①] 不幸的是，求解过程相当麻烦，且经济意义不大，因此我们以另一种非直接的方法取而代之。这种方法基于对偶性的概念。两种方法最终的结论相同，但间接法所包含的经济学含义更丰富。

5.6.2 间接法

为使用间接分析法[②]，先假设仅有两种商品（x 与 y）。我们集中研究式 5.14 介绍的补偿性需求函数 $x^c(p_x, p_y, U)$。现在要说明的是，这一需求函数与普通需求函数 $x(p_x, p_y, I)$ 之间的联系。第 4 章中曾介绍支出函数的概念，即在一定的效用水平下，必须付出的最少支出，我们以下式表示这一函数

$$\text{最小支出} = E(p_x, p_y, U) \tag{5.19}$$

根据定义，有

$$x^c(p_x, p_y, U) = x[p_x, p_y, E(p_x, p_y, U)] \tag{5.20}$$

这一结论已在图 5.7 中介绍过，该图表明，当消费者的收入刚好是给定效用水平所必需的数量时，x 的需求量在补偿性与非补偿性需求函数中是相等的。将支出水平代入需求函数 $x(p_x, p_y, I)$ 后就得到了式 5.20。对式 5.20 的 p_x 求偏导，并注意 p_x 在两处被代入普通的需求函数，因此有

$$\frac{\partial x^c}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x} \tag{5.21}$$

整理后得

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x} \tag{5.22}$$

5.6.3 替代效应

结果，求得的导数有两项，现逐一考察。第一项含义简单直观，就是补偿性需求曲线的斜率，但表示的是沿着一条无差异曲线的运动，也就是我们前面所说的替代效应。式 5.22 右边的第一项即是该效应的数学表达。

5.6.4 收入效应

式 5.22 中的第二项反映了 p_x 变化后，通过必要的支出水平的改变（即购买力的改变）而使 x 需求量发生的变化。因此这一项是收入效应。式 5.22 中的负号表示这一效应的方向。例如，p_x 提高，为维持原来的效用水平必须增加支出（从数值上来看，就是 $\partial E/\partial p_x > 0$）。而实际上名义收入是不变的，这一增加的支出无法得到满足，所以只好减少 x 的需求数量以适应这一支出的短缺。x 减少的程

---

① 有关的例子请参见 Paul A. Samuleson, *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1947), pp. 101—103。

② 以下的论证摘自 Phillip J. Cook, "A 'One Line' Proof of the Slutsky Equation", *American Economic Review* 62 (March 1972): 139。

度由 $\partial x/\partial E$ 决定。另一方面，如果 p_x 下降，为满足给定效用水平所需的支出也会减少。x 的下降通常伴随的支出的下降正好等于由收入效应必须加回去的量。注意，在这种情况下，收入效应的作用是使 x 的需求数量增加。

5.6.5 斯拉茨基方程

式 5.22 所体现的关系是由俄国经济学家尤金·斯拉茨基(Eugen Slutsky)于 19 世纪后半叶首次提出的。为了准确地说明斯拉茨基的结论，需要对公式略加修改。首先，为表示是沿无差异曲线的移动，我们把替代效应记为

$$\text{替代效应} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} = \left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{U=\text{常量}} \tag{5.23}$$

而对收入效应，由于收入与支出数量在 x 函数中是一回事，所以我们有

$$\text{收入效应} = -\frac{\partial x}{\partial E}\cdot\frac{\partial E}{\partial p_x} = -\frac{\partial x}{\partial I}\cdot\frac{\partial E}{\partial p_x} \tag{5.24}$$

容易证明

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = x \tag{5.25}$$

直观地说，p_x 上升 1 美元，购买 x 单位产品就必须增加支出 x 美元。对此可用包络定理(参见第 2 章)进行正式的证明，参见脚注。①

将式 5.23—5.25 合并，可以得到以下结果：

最大化原则

斯拉茨基方程式。 效用最大化假设证明，产生于价格变化的替代效应与收入效应可用下式表示

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \text{替代效应} + \text{收入效应} \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{U=\text{常量}} - x\frac{\partial x}{\partial I} \tag{5.27}$$

用斯拉茨基方程式比用几何分析法能更准确地定义替代效应与收入效应的方向与程度。首先，只要 MRS 递减，替代效应($\partial x/\partial p_x|_{U=\text{常量}}$)就总是负的。$p_x$ 下降(上升)使 p_x/p_y 减少(增加)，同时效用最大

---

① 记住消费者的对偶问题是使支出最小：$E = p_x x + p_y y$，约束条件为 $\bar{U} = U(x, y)$。这个问题的拉格朗日表达式为

$$\mathscr{L} = p_x x + p_y y + \lambda[\bar{U} - U(x, y)]$$

并且，应用于约束条件下最小化问题的包络定理(见式 7.72)说明在最优点

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_x} = x$$

这就是问题的结论，这一结论及我们将在公司成本理论中碰到的相似的结论有时被称为谢泼德定理。它对实证研究的重要性在于，仅通过对支出函数求偏导就可求出 x 的需求函数。以这种方式产生的需求函数取决于特定的效用水平 $\bar{U}$，所以应属于补偿性需求函数。从例 4.4 中，我们得到汉堡包与软饮料的支出函数为

$$E = 2Vp_x^{0.5}p_y^{0.5}$$

对上式中的 p_x 求偏导得到式 5.18 的补偿性需求函数。有关进一步研究参见本章的附录。

化也要求 MRS 下降(上升)。但是,这只有在 x 增加(或 p_x 上升的情况下,x 减少)时,沿无差异曲线运动才可得到。因此,到目前为止所讨论的替代效应,价格与数量一定呈相反方向变动。由于同样的原因,补偿性需求曲线的斜率一定是负的。① 我们将在本章的最后一节以某种不同的方式说明这一结论。

收入效应($-x\partial x/\partial I$)的符号取决于 $\partial x/\partial I$ 的符号。如果 x 是正常品,$\partial x/\partial I$ 为正,则整个收入效应同替代效应一样,也为负。因此,对正常品来说,价格与数量的变动方向总是相反的。例如,p_x 下降使真实收入上升,由于 x 是正常品,所以对 x 的购买增加。同样的道理,如 p_x 上升,则会减少实际收入,并导致对商品 x 的购买量下降。总的来看,这与我们前面用几何分析法得出的结论是相同的,替代效应与收入效应的作用方向相同,并使需求曲线的斜率为负。在劣等品的情形下,$\partial x/\partial I<0$,式 5.27 中的两项有不同的符号,在理论上,第二项有可能起主导作用从而产生吉芬之谜($\partial d_x/\partial p_x>0$)。

例 5.4

斯拉茨基分解式

斯拉茨基最先引入的价格效应的分解可以用我们前面讨论过的柯布-道格拉斯的例子来进行很好的说明。从例 5.3 中我们已得到的 x 的马歇尔需求函数与补偿性需求函数分别如下

$$x(p_x,p_y,I)=\frac{0.5I}{2p_x} \tag{5.28}$$

与

$$x^c(p_x,p_y,V)=\frac{Vp_y^{0.5}}{p_x^{0.5}} \tag{5.29}$$

通过对式 5.28 求导可得到非补偿性函数 p_x 变化的效应

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=\frac{-0.5I}{p_x^2} \tag{5.30}$$

现在我们希望将上式表示为斯拉茨基所引入的两个效应的和。替代效应可由对补偿性需求函数求导数得到

$$\text{替代效应}=\frac{\partial x^c}{\partial p_x}=\frac{-0.5Vp_y^{0.5}}{p_x^{1.5}} \tag{5.31}$$

将间接效用函数(式 5.17)中的 V 消掉

$$\text{替代效应}=\frac{-0.5(0.5Ip_x^{-0.5}p_y^{-0.5})p_y^{0.5}}{p_x^{1.5}}=\frac{-0.25I}{p_x^2} \tag{5.32}$$

收入效应的计算相对简单,利用式 5.27 的结果我们得到

$$\text{收入效应}=-x\frac{\partial x}{\partial I}=-\left[\frac{0.5I}{p_x}\right]\cdot\frac{0.5}{p_x}=-\frac{0.25I}{p_x^2} \tag{5.33}$$

将式 5.30 与式 5.32、式 5.33 进行比较,我们确实将需求函数对价格的导数分解为替代效应和收入

① 如果无差异曲线呈 L 形(即 x 与 y 以固定比例消费),则替代效应可能是 0。在第 5 章的练习题中提供了一些例子。

效应。有趣的是，替代效应和收入效应大小一样，我们即将在下例中看到，这是柯布-道格拉斯函数的特性之一。

前面的以数值所举的例子也可说明斯拉茨基分解式。当 x 的价格从 1 上升至 4 时，非补偿性需求从 $x=4$ 下降到 $x=1$。但补偿性需求只从 $x=4$ 下降到 $x=2$。这 50% 的下降是由于替代效应，从 $x=2$ 下降到 $x=1$ 这进一步的 50% 的下降代表了对在马歇尔需求函数中购买力下降的反应。这种收入效应在使用补偿性需求的概念时并不产生。

请回答：在这个例子中，消费者花费了一半收入在商品 x 上，一半收入在商品 y 上。如果柯布-道格拉斯效用函数的指数不相等，收入效应和替代效应的相对大小如何变化？

5.7 需求弹性

在前面，我们已经通过对需求函数求导数来考察了消费者如何对价格和收入的变化做出反应。从分析问题的角度，这是个很好的方式，因为微积分的方法可以直接被应用。然而，正如我们在第 2 章指出的，对于经验研究而言，对导数的考察具有一点主要缺陷——即导数的大小直接取决于变量如何测量，这使得跨国跨时商品间的比较变得很困难。由于这个原因，微观经济学中的大部分经验研究要使用某种弹性。在本节中，我们介绍三种最重要的需求弹性，并研究它们之间的数学联系。为了简化，我们仍只考虑消费者只在两种商品间作选择的情形，这样可以很容易地归纳这些概念。

5.7.1 马歇尔需求弹性

常用的需求弹性大多数是从马歇尔需求函数中得到的。具体的定义如下：

定义

1. 需求的价格弹性（e_{x,p_x}）：衡量需求量改变比例对价格改变比例的反应，数学上，

$$e_{x,p_x}=\frac{\Delta x/x}{\Delta p_x/p_x}=\frac{\Delta x}{\Delta p_x}\cdot\frac{p_x}{x}=\frac{\partial x}{\partial p_x}\cdot\frac{p_x}{x} \tag{5.34}$$

2. 需求的收入弹性（$e_{x,I}$）：衡量需求量改变比例对收入改变比例的反应，数学上，

$$e_{x,I}=\frac{\Delta x/x}{\Delta I/I}=\frac{\Delta x}{\Delta I}\cdot\frac{I}{x}=\frac{\partial x}{\partial I}\cdot\frac{I}{x} \tag{5.35}$$

3. 需求的价格弹性（e_{x,p_y}）：衡量商品 x 需求量改变比例对其他商品（y）价格改变比例的反应，数学上，

$$e_{x,p_y}=\frac{\Delta x/x}{\Delta p_y/p_y}=\frac{\Delta x}{\Delta p_y}\cdot\frac{p_y}{x}=\frac{\partial x}{\partial p_y}\cdot\frac{p_y}{x} \tag{5.36}$$

注意到所有的定义都使用了偏导数，这意味着当考察决定需求的某一因素时，所有其他的因素都被

固定为常数。下面，我们将更详细地考察自身的需求价格弹性的定义。而在第 6 章我们主要考察需求的交叉价格弹性。

5.7.2 需求价格弹性

(自身的)需求价格弹性很可能是微观经济学中最重要的弹性概念。它不仅提供了一种简单的方式来总结人们如何对经济中大量商品的价格变化做出反应，它同时还是生产者如何对需求曲线做出反应的理论中的核心概念。你可能已经在初级经济学课程中知道，需求富有弹性(价格对需求量影响较大)和需求缺乏弹性(价格的影响较小)的情况是有差别的。一个数学上使这些概念复杂的地方是商品对自身价格的需求弹性是负的[①]，除了在很少见的吉芬之谜的情形下，$\partial x/\partial p_x$ 一般是负的。对弹性大小的界限一般定在 -1。如果 $e_{x,p_x}=-1$，x 和 p_x 的改变是同比例的。即，价格 1% 的增加会导致需求量 1% 的下降。在这种情形下，我们说需求是单位弹性的。如果 $e_{x,p_x}<-1$，需求改变的比例大于价格改变的比例，我们称需求是富有弹性的。例如，如果 $e_{x,p_x}=-3$，价格每 1% 的增加会导致需求下降 3%。最后，如果 $e_{x,p_x}>-1$，需求是缺乏弹性的，需求量改变的比例小于价格改变的比例。例如，$e_{x,p_x}=-0.3$，价格 1% 的增加会导致需求 0.3% 的下降。在第 10 章和第 11 章中，我们将看到，如何用加总的数据来估计每个消费者对一种商品的需求价格弹性及这种估计如何被应用在微观经济学的问题中。

5.7.3 价格弹性和总花费

需求的价格弹性决定在其他条件不变时，价格的改变如何影响在某种商品上的总花费。这种关系很容易用微积分来表达

$$\frac{\partial(p_x\cdot x)}{\partial p_x}=p_x\cdot\frac{\partial x}{\partial p_x}+x=x[e_{x,p_x}+1] \tag{5.37}$$

上式中导数的符号取决于 e_{x,p_x} 是大于还是小于 -1。如果需求缺乏弹性($0>e_{x,p_x}>-1$)，该导数就是正的，价格和总花费改变的方向相同。直觉上，如果价格对需求量的影响不大，当价格变化时，需求量相对不变，因而总花费主要反映了价格的变化。这是大多数农产品的情形。天气引起的对某种作物的价格改变和总花费的改变方向相同。另一方面，如果需求对价格变化的弹性($e_{x,p_x}<-1$)很大，那么价格的变化对总花费的影响则是反方向的——价格的上升使总花费下降(因为需求量显著减少)，价格的下降使总花费上升(因为需求量显著增加)。对于单位弹性的情形($e_{x,p_x}=-1$)，无论价格如何改变，总花费不变。

5.7.4 补偿性价格弹性

由于一些微观经济分析集中于补偿性需求函数，因此，基于此概念来定义弹性是有必要的。以

① 有时经济学家在他们的讨论中用需求价格弹性的绝对值，虽然这在数学上是不正确的，但这样的用法很常见。例如，一项结果为 $e_{x,p_x}=-1.2$ 的研究有时会报告需求价格弹性为 1.2。

下定义直接引用于马歇尔函数的相关部分。

定义

补偿性需求函数形式为 $x^c(p_x, p_y, U)$，我们据此定义：

1. 补偿性自身需求价格弹性(e_{x^c,p_x})：衡量了补偿性需求量改变比例对自身价格改变比例的反应

$$e_{x^c,p_x} = \frac{\Delta x^c / x^c}{\Delta p_x / p_x} = \frac{\Delta x^c}{\Delta p_x} \cdot \frac{p_x}{x^c} = \frac{\partial x^c}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x^c} \tag{5.38}$$

2. 补偿性交叉需求价格弹性(e_{x^c,p_y})：衡量了补偿性需求量改变比例对其他商品价格改变比例的反应

$$e_{x^c,p_y} = \frac{\Delta x^c / x^c}{\Delta p_y / p_y} = \frac{\Delta x^c}{\Delta p_y} \cdot \frac{p_y}{x^c} = \frac{\partial x^c}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x^c} \tag{5.39}$$

这些价格弹性和它们对应的马歇尔需求价格弹性之间差别的大小取决于收入补偿在对商品 x 的需求中的重要性。这两者间的精确关系可以用式 5.27 中的斯拉茨基方程乘以 p_x/x 来表示

$$\frac{p_x}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} = e_{x,p_x} = \frac{p_x}{x} \cdot \frac{\partial x^c}{\partial p_x} - \frac{p_x}{x} \cdot x \cdot \frac{\partial x}{\partial I} = e_{x^c,p_x} - s_x \cdot e_{x,I} \tag{5.40}$$

其中 $s_x = \frac{p_x x}{I}$ 是总收入中在商品 x 上花费的比例。式 5.40 显示了在下面两个条件任一个成立的情形下，补偿性自身需求价格弹性和非补偿需求价格弹性的差别不大：(1) 总收入中，花费在商品 x 上的比例(s_x)很小；(2) 商品 x 的收入价格弹性($e_{x,I}$)很小。这两个条件中任一个成立都使得补偿性需求函数中收入补偿效应的重要性减轻。如果 x 在消费者的预算中不重要，用来抵消价格变化的补偿性收入的量就较小；即使一件商品在预算中重要，如果消费者对补偿性收入变化的反应不大，两种概念下的结果仍然相近。所以，在很多情况下，两种需求价格弹性可以互换使用。而事实上，在很多经济情形下，替代效应是价格效应中主要的部分。

5.7.5 需求弹性之间的关系

在这一节中有很多弹性概念之间的关系，它们都是从效用最大化的模型中得到的。下面我们来看三个这样的关系，由此加深对消费者需求函数的性质的理解。

齐次性。需求函数的齐次性可以用弹性来表示。由于任何价格及收入的同比例增长不会改变需求量，故某一特定商品的所有价格弹性和收入弹性之和应为零，其严格的证明要用到欧拉定理(参见第 2 章)。将其应用到需求函数 $x(p_x, p_y, I)$ 上，并考虑到此函数的零次齐次性，得到

$$0 = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} + p_y \cdot \frac{\partial x}{\partial p_y} + I \cdot \frac{\partial x}{\partial I} \tag{5.41}$$

在式 5.41 两边除以 x，我们得到

$$0 = e_{x,p_x} + e_{x,p_y} + e_{x,I} \tag{5.42}$$

这结果表示一种商品的需求弹性不是完全自由的，它们服从一定的内部一致性，这点来源于需求理

论所基于的效用最大化方法。

5.7.6 恩格尔加和

在第 4 章的扩展部分，我们讨论了市场份额的经验分析，并特别讨论了恩格尔定律——随着收入的增加，其中用于食品消费的份额下降。恩格尔定律表现了对于食品的需求价格弹性的经验规律——弹性一定是显著小于 1 的。因此，非食品的收入弹性必然大于 1。如果消费者经历了收入的增加，我们可以预期在食品上的花费增长的比例较小，这样收入必须花在别的地方。总的来说，这些其他花费增加的比例一定大于收入增加的比例。

一个更严格的对收入弹性这种性质的说明可以从对消费者的预算约束（$I = p_x x + p_y y$）对 I 求导得到，假设价格不变。

$$1 = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial I} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial I} \tag{5.43}$$

对上式作代数变换，得到

$$1 = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{xI}{xI} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial I} \cdot \frac{yI}{yI} = s_x e_{x,I} + s_y e_{y,I} \tag{5.44}$$

其中，s_i 表示在商品 i 上花费占总收入的比例。式 5.44 显示一个消费者所购买的所有商品的加权平均收入弹性为 1。假设，我们知道一个人花费 1/4 的收入在食品上，且对食品的收入弹性为 0.5，那么他对其他商品的收入弹性必然约为 1.17[= (1 - 0.25 × 0.5)/0.75]。因为食品始终是重要的必需品，剩下的东西在某种意义上就成了奢侈品。

古诺加和。 18 世纪的法国经济学家安东尼·古诺（Antoine Cournot）提出的对价格变化的数学分析是最早用到微积分的几个研究之一。他的一个重要贡献是对边际收益概念的引入——这是厂商利润最大化假设中的一个核心概念。古诺还考虑了一个商品价格的改变如何影响所有商品的需求。我们最终将说明所有商品对某一商品价格变化所作出的反应之间确实存在着联系。我们从用预算约束对 p_x 求偏导开始

$$\frac{\partial I}{\partial p_x} = 0 = p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} + x + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial p_x}$$

两边乘以 p_x/I 得到

$$\begin{aligned} 0 &= p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{I} \cdot \frac{x}{x} + x \cdot \frac{p_x}{I} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial P_x} \cdot \frac{p_x}{I} \cdot \frac{y}{y} \\ 0 &= s_x e_{x,p_x} + s_x + s_y e_{y,p_x} \end{aligned} \tag{5.45}$$

最终古诺的结果是

$$s_x e_{x,p_x} + s_y e_{y,p_x} = -s_x \tag{5.46}$$

以上方程说明 x 价格变化引起的对 y 的交叉价格效应由于预算约束而受到限制。更直观地说，交叉价格效应不能完全压倒自身价格效应。这是我们将要在下一章集中讨论的许多商品需求间联系中的第一个。

推广。 虽然我们只在两种商品的情形下考察了这些加和结果，但它们是可以很容易地被推广到多种商品的情形的。在本章的练习题 5.9 中，将要求作这些推广。但是存在一个比较难解决的问

题:这些结论对于把许多人的需求加总在一起时的情形下是否仍然成立?通常经济学家把加和的需求关系用一个消费者来表示,而上面得到的关系对于这个人来说应当仍然成立。但实际情况并不那么简单,这点我们将在后面讨论加总时说明。

例 5.5

需求弹性:替代效应的重要性

在这个例子中,我们计算前面用过的三个具体的效用函数下的需求弹性。虽然这些函数太简单,以至于它们中所包括的含义不能将经济学家实际上对需求的经验性研究表达出来,但它们体现了弹性如何反映人们的偏好。用一个特别重要的例子来说明为什么需求弹性之间主要的差别很可能是由于替代效应的大小不同造成的。

情况 1。柯布-道格拉斯($\sigma=1$):$U(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ 其中 $\alpha+\beta=1$。

从效用函数中得到的需求函数为

$$x(p_x,p_y,I)=\frac{\alpha I}{p_x}$$

$$y(p_x,p_y,I)=\frac{\beta I}{p_y}=\frac{(1-\alpha)I}{p_y}$$

从弹性的定义可以得到

$$e_{x,p_x}=\frac{\partial x}{\partial p_x}\cdot\frac{p_x}{x}=\frac{-\alpha I}{p_x^2}\cdot\frac{p_x}{\frac{\alpha I}{p_x}}=-1$$

$$e_{x,p_y}=\frac{\partial x}{\partial p_y}\cdot\frac{p_y}{x}=0\cdot\frac{p_y}{x}=0 \tag{5.47}$$

$$e_{x,I}=\frac{\partial x}{\partial I}\cdot\frac{I}{x}=\frac{\alpha}{p_x}\cdot\frac{I}{\frac{\alpha I}{p_x}}=1$$

用类似的方法可得到商品 y 的弹性。所以,柯布-道格拉斯函数下对于所有价格和收入的弹性都取简单数值的常数。上面提到的弹性符合的三条性质可以很容易地验证,其中要用到 $s_x=\alpha,s_y=\beta$。

齐次性:$e_{x,p_x}+e_{x,p_y}+e_{x,I}=-1+0+1=0$。

恩格尔加和:$s_xe_{x,I}+s_ye_{y,I}=\alpha\cdot1+\beta\cdot1=\alpha+\beta=1$。

古诺加和:$s_xe_{x,p_x}+s_ye_{y,p_x}=\alpha(-1)+\beta\cdot0=-\alpha=-s_x$。

我们也可以用弹性形式的斯拉茨基方程(方程 5.40)来得到这个例子中的补偿性价格弹性

$$e_{x^c,p_x}=e_{x,p_x}+s_xe_{x,I}=-1+\alpha(1)=\alpha-1-\beta \tag{5.48}$$

所以这里 x 的补偿性价格弹性取决于其他商品(y)在效用函数中的重要性。

情况 2。CES($\sigma=2;\delta=0.5$):$U(x,y)=x^{0.5}+y^{0.5}$

在例 4.2 中我们已得到从这个效用函数中得到的需求函数

$$x(p_x,p_y,I)=\frac{I}{p_x(1+p_xp_y^{-1})}$$

$$y(p_x,p_y,I)=\frac{I}{p_y(1+p_x^{-1}p_y)}$$

可以想象,直接从上式计算弹性会很花时间。这里我们只考虑自身价格弹性,并利用本章练习题5.6中的结论,即一种商品的“份额弹性”可以表达为

$$e_{s_x,p_x}=\frac{\partial s_x}{\partial p_x}\cdot\frac{p_x}{s_x}=1+e_{x,p_x} \tag{5.49}$$

在这种情况下

$$s_x=\frac{p_xx}{I}=\frac{1}{1+p_xp_y^{-1}}$$

故份额弹性很容易由下式来计算

$$e_{s_x,p_x}=\frac{\partial s_x}{\partial p_x}\cdot\frac{p_x}{s_x}=\frac{-p_y^{-1}}{(1+p_xp_y^{-1})^2}\cdot\frac{p_x}{(1+p_xp_y^{-1})^{-1}}=\frac{-p_xp_y^{-1}}{1+p_xp_y^{-1}} \tag{5.50}$$

因为商品测量的单位在效用理论里是可以任意取定的,我们不妨设 $p_x=p_y$,这样得到①

$$e_{x,p_x}=e_{s_x,p_x}-1=\frac{-1}{1+1}-1=-1.5 \tag{5.51}$$

因此,这种情形下的需求比柯布-道格拉斯的情形下更富有弹性,这是由于CES效用函数的替代效应更大。这点可以用斯拉茨基方程来表示(利用 $e_{x,I}=1$ 和 $s_x=0.5$)

$$e_{x^c,p_x}=e_{x,p_x}+s_xe_{x,I}=-1.5+0.5(1)=-1 \tag{5.52}$$

这是柯布-道格拉斯替代效应的两倍。

情况3。CES($\sigma=0.5;\delta=-1$):$U(x,y)=-x^{-1}-y^{-1}$

在例4.2中,我们已经看到,这种情况下的 x 的份额可以用下式表示

$$s_x=\frac{1}{1+p_y^{0.5}p_x^{-0.5}}$$

于是份额弹性为

$$e_{s_x,p_x}=\frac{\partial s_x}{\partial p_x}\cdot\frac{p_x}{s_x}=\frac{0.5p_y^{0.5}p_x^{-1.5}}{(1+p_y^{0.5}p_x^{-0.5})^2}\cdot\frac{p_x}{(1+p_y^{0.5}p_x^{-0.5})^{-1}}=\frac{0.5p_y^{0.5}p_x^{-0.5}}{1+p_y^{0.5}p_x^{-0.5}} \tag{5.53}$$

为简化起见,假设价格相等,可以计算自身需求价格弹性为

$$e_{x,p_x}=e_{s_x,p_x}-1=\frac{0.5}{2}-1=-0.75 \tag{5.54}$$

补偿性需求价格弹性为

$$e_{x^c,p_x}=e_{x,p_x}+s_xe_{x,I}=-0.75+0.5(1)=-0.25 \tag{5.55}$$

因此,对于这样的CES效用函数,由于替代效应较小,自身价格弹性比情况1和情况2都小。所以,

① 值得注意的是,这里的替换必须在求导之后做,因为弹性的定义要求我们变动 p_x 时保持 p_y 不变。

不同情况下的差异主要是由于替代效应的大小不同造成的。

如果你不想再去逐步计算这种弹性，以下结论对你会有所帮助

$$e_{x^c,p_x} = -(1-s_x)\sigma \tag{5.56}$$

你可以用刚才的三个例子来检验上面的公式（其中 $s_x=0.5$，σ 分别等于 1，2，0.5），在本章练习题 5.6 中，你将自己证明上式在普遍意义下是成立的。在 CES 效用函数下的所有情形，收入弹性都是单位的，自身需求价格弹性可以由补偿性需求价格弹性得到，即由式 5.56 的结果加上 $-s_x$ 即可。

请回答：为什么在这个例子中 x 的自身补偿性价格弹性与除 x 外的商品的预算份额有关系？

5.8 消费者剩余

价格变化的结果导致消费者获益或受损，应用经济学的一个重要问题就是找到一种用货币来度量这种得失的方法。一个应用是用货币来度量当市场中出现价格高于边际成本的垄断时人们的福利损失。另一个应用是衡量当技术进步时商品价格下降，使人们得到的福利增加。相关的应用涉及环境经济学（衡量资源不正确定价时的福利损失）、法经济学（衡量由于害怕官司而过度保护的福利损失）和公共经济学（度量税负的额外成本）。为了进行这种计算，经济学家使用了市场需求中经验的数据和决定需求的理论。在这一节，我们将考察在该过程中的主要工具。

5.8.1 消费者福利与支出函数

第 4 章已介绍过的支出函数是我们学习价格福利关系的第一个工具。设想我们希望衡量当商品 x 的价格从 p_x^0 上升到 p_x^1 时，一个消费者经历的福利变化。最初，该消费者需要花费 $E(p_x^0,p_y,U_0)$ 来达到效用 U_0。当 x 的价格上升时，为了达到相同的效用，他至少要支出 $E(p_x^1,p_y,U_0)$。为了补偿这部分价格上升的影响，他要求得到一个补偿［称为**补偿性差异（compensating variation—CV）**］，表示为

$$\mathrm{CV} = E(p_x^1,p_y,U_0) - E(p_x^0,p_y,U_0) \tag{5.57}$$

这可用图 5.8 表示。该消费者开始的消费组合是 (x_0,y_0)，效用为 U_0。当 x 的价格上升时，他移动自己的消费组合至 x_2,y_2，并经历效用损失。如果他得到数量为 CV 的购买力补偿，他就可以通过选择消费组合 (x_1,y_1) 使自己的效用保持在 U_0。CV 的大小提供了该消费者由于价格上升需要补偿的货币度量。

5.8.2 用补偿性需求曲线表示补偿性差异

消费者的效用函数和相关的无差异曲线并不能直接观察到。但我们可以通过用如图 5.8 所示的补偿性需求曲线得到补偿性差异的方法来经验地测量补偿性差异。在第 124 页的脚注①中，我们描述了谢泼德引理，它使用包络定理说明，一种商品的补偿性需求曲线可以通过对支出函数求导来直接得到。

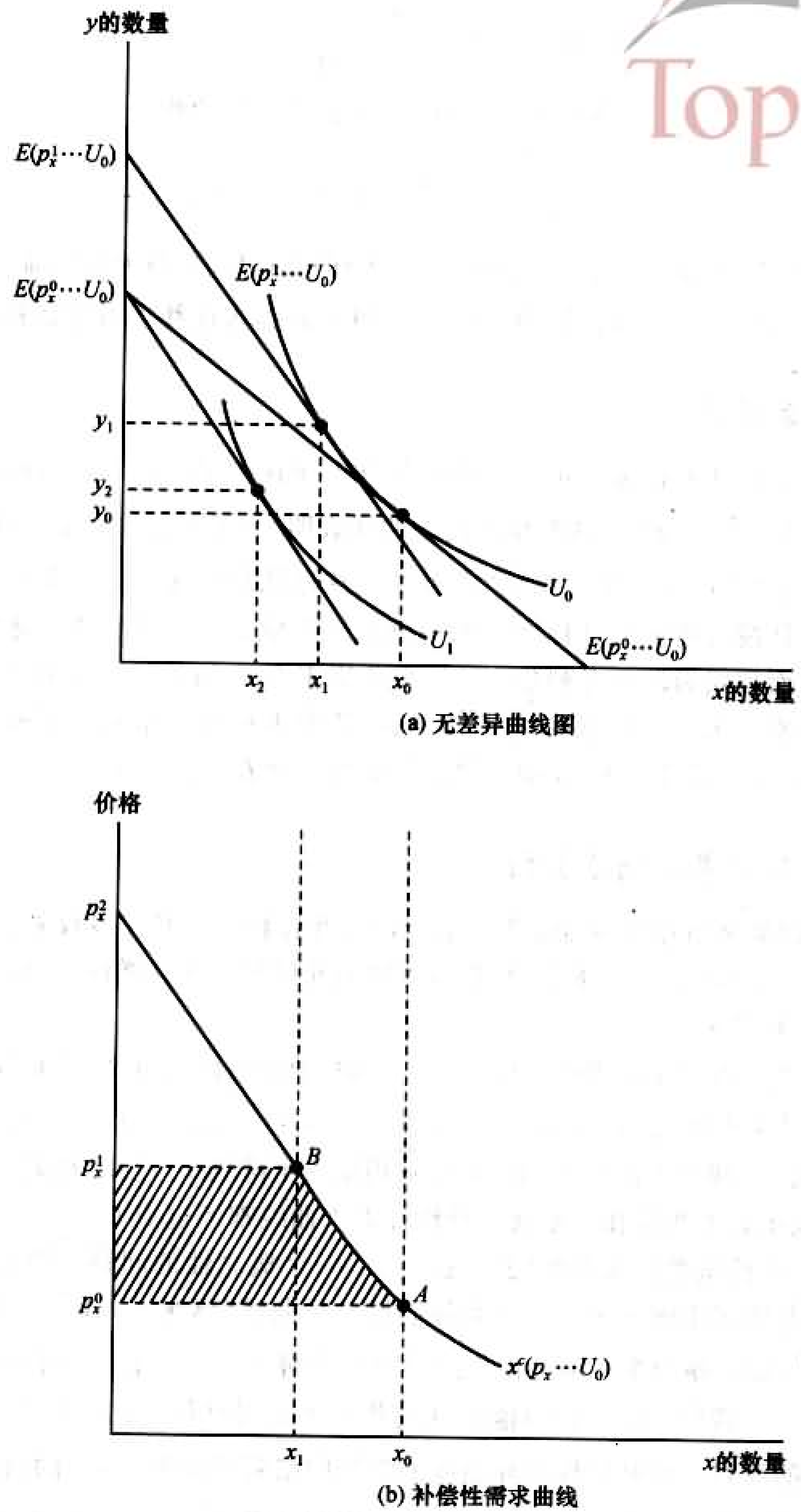


图 5.8　补偿性差异

如果 x 的价格从 p_x^0 上升到 p_x^1，该消费者需要额外的等于补偿性差异的支出来使他保持在效用 U_0 的水平上，补偿性差异可以用补偿性需求曲线下方的阴影区域来表示。

$$x^c(p_x, p_y, U) = \frac{\partial E(p_x, p_y, U)}{\partial p_x}. \tag{5.58}$$

于是,式 5.57 中的补偿可以通过对价格从 p_x^0 到 p_x^1 一系列小增量的积分得到

$$\mathrm{CV} = \int_{p_x^0}^{p_x^1} \mathrm{d}E = \int_{p_x^0}^{p_x^1} x^c(p_x, p_y, U_0)\,\mathrm{d}p_x \tag{5.59}$$

令 p_y 和效用恒定,式 5.59 中定义的积分有如图 5.8(b)的几何解释,即补偿性需求曲线左侧从 p_x^0 到 p_x^1 的阴影区域。因此,价格上升的福利损失也可以用补偿性需求曲线下方的面积来表示。

5.8.3 消费者剩余概念

我们可以从另一个角度来看这个问题。我们可以询问在市场价格 p_x^0 下,该消费者愿意付出多少来购买他想要的商品。图 5.8(b)的补偿性需求曲线表明,如果 x 的价格上升到 p_x^2 时,该消费者选择的消费量为零,他会要求区域 $p_x^2Ap_x^0$ 这么大的补偿。这也就是对这个消费者而言在价格 p_x^0 消费 x_0 的权利的价值。这是他按市场价格进行交易而得到的额外收益。由补偿性需求曲线下方和市场价格上方组成的区域的面积叫做*消费者剩余*。从这个角度来看,x 的价格的上升引起的福利问题可以用消费者剩余的损失来表示。当价格从 p_x^0 上升到 p_x^1,消费者剩余三角形从 $p_x^2Ap_x^0$ 缩小到 $p_x^2Bp_x^1$。从图上可以清楚地看到,这是描述式 5.59 中福利损失的另一种方法。

5.8.4 福利变化与马歇尔需求曲线

到目前为止,我们都是用补偿性需求曲线来分析消费者剩余。但大多数关于需求的经验研究使用的是一般(马歇尔)需求函数。在本节中,我们将说明通过研究在这样的需求曲线下的面积改变实际上能更好地度量福利损失。

考虑图 5.9 所示的马歇尔需求曲线 $x(p_x\cdots)$。开始,消费者面临价格 p_x^0,选择消费 x_0。效用水平 U_0,初始的 x 的补偿性需求曲线 $[x^c(p_x, p_y, U_0)]$ 通过点 (x_0, p_x^0)(即 A 点)。当价格上升到 p_x^1,商品 x 的马歇尔需求下降到 x_1(即需求曲线上的点 C),效用随之下降到 U_1,与之相关的有另一条较低的补偿性需求曲线。马歇尔需求曲线和这条新的补偿性需求曲线都经过点 C。

图 5.9 中的第二条补偿性需求曲线的出现引发了一个概念性的问题。当我们度量价格上升而引发的福利损失时,是应该用图 5.8 中第一条补偿性差异曲线(区域 $p_x^1BAp_x^0$),还是用新的补偿性差异曲线(区域 $p_x^1CDp_x^0$)呢?使用第二条补偿性差异曲线的理由在于我们更关注价格上升后的消费者的处境(效用水平 U_1)。我们可能会询问他愿意花费多少来回到他以前的消费水平。① 该问题的答案将是区域 $p_x^1CDp_x^0$ 的面积。对补偿性差异曲线的选择归结到选择哪一效用水平更为合适。

幸运的是,我们有一个折中的方法。马歇尔需求曲线左侧 p_x^0 与 p_x^1 之间的面积($p_x^1CAp_x^0$)比基于 U_0 的补偿性需求曲线下方的面积小,又比基于 U_1 的大,这似乎是个吸引人的折中。所以,这就是我们在本书后面用到的度量福利损失的方法。

---

① 补偿的这种衡量被称为等价性差异(equivalent variation)。

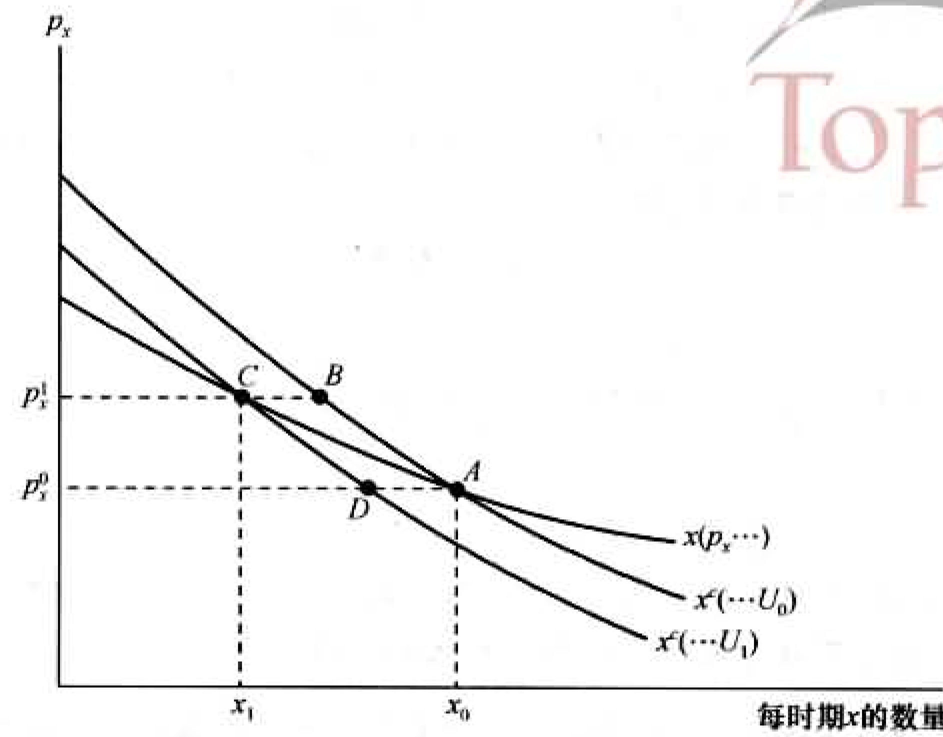


图 5.9　价格变化的福利效应与马歇尔需求曲线

$x(p_x\cdots)$是通常的马歇尔需求曲线（名义收入不变），$x^c(\cdots U_0)$与$x^c(\cdots U_1)$分别为价格在p_x^0与p_x^1时的效用水平的补偿性需求曲线。$x(p_x\cdots)$左侧p_x^0到p_x^1之间的面积与补偿性需求曲线左侧的面积大小差不多。因此，在价格发生较小的变化时，以马歇尔需求曲线左侧的面积来度量福利的损失是个好方法。

定义

消费者剩余。 消费者剩余是马歇尔需求曲线下方、价格上方围成的区域的面积。它表示消费者为得到在此时价格做交易的权利而愿意作出的支付。消费者剩余的变化可以用来度量价格变化产生的福利损失。

有必要强调一下，一些经济学家使用 EV 或 CV 来计算价格变化的福利效应。实际上，经济学家并不十分清楚自己用的是哪种度量方法。我们前面的讨论说明了当收入效应较小时，各种度量方法之间的差异不大。

例 5.6

价格上升带来的消费者剩余损失

这些概念可以用我们多次使用过的软饮料的例子给予说明。我们来看软饮料（商品 x）的价格从 1 美元上升到 4 美元时的福利影响。从例 5.3 中可知软饮料的补偿性需求函数为

$$x^c(p_x,p_y,V) = \frac{Vp_y^{0.5}}{p_x^{0.5}} \tag{5.60}$$

因此，价格上升的福利损失为

$$\text{补偿性差异} = \int_1^4 x^c(p_x,p_y,V)\,\mathrm{d}p_x = \int_1^4 Vp_y^{0.5}p_x^{-0.5}\,\mathrm{d}p_x = 2Vp_y^{0.5}p_x^{0.5}\Big|_{p_x=1}^{p_x=4} \tag{5.61}$$

如果我们用一直假设的数值($V=2,p_y=4$),这个损失就为

$$\text{补偿性差异} = 2\times2\times2\times(4)^{0.5} - 2\times2\times2\times(1)^{0.5} = 8 \tag{5.62}$$

如果我们认为价格上升后的效用指标更适合度量补偿,这个数字会下降一半(为4)。如果以非补偿性(马歇尔)需求函数来度量损失,则

$$x(p_x,p_y,I) = 0.5Ip_x^{-1}$$

计算结果是

$$\text{损失} = \int_1^4 x(p_x,p_y,I)\,\mathrm{d}p_x = \int_1^4 0.5Ip_x^{-1}\mathrm{d}p_x = 0.5I\ln p_x \Big|_1^4 \tag{5.63}$$

当 $I=8$ 时,损失为

$$\text{损失} = 4\ln(4) - 4\ln(1) = 4\ln(4) = 4(1.39) = 5.55 \tag{5.64}$$

上式确实可代表用两个补偿函数计算得出的两个数据的一种折中。

请回答:在该例中,当需求为零时,需求曲线上的价格都不是有限的。这将如何影响消费者剩余的计算?这是否影响这里使用的福利计算的方法?

5.9 显示性偏好与替代效应

我们已看到,从效用最大化模型中推导出的一个准确而重要的结论就是补偿性需求曲线(价格变化的替代效应)的斜率为负。我们在对该结论的证明中,使用了 *MRS* 递减的假设,并利用了在 *MRS* 递减下,效用最大化的必要条件也是充分条件的结论。某些经济学家认为,用建立在假设的基础之上的,且难以观察到的效用函数来证明需求理论过于牵强。保罗·萨缪尔森于20世纪40年代后期首次提出了另一种可得出同样结论的方法。[①] 这个被萨缪尔森称为**显示性偏好理论(theory of revealed preference)**的方法,以可观察到的行为确定了一个合理性原则,又用这一原则估算消费者效用函数。在这一意义上,一个遵循萨缪尔森合理性原则的人,其行为是使效用函数最大化的,并且会显示负的替代效应。由于萨缪尔森的方法能使我们对消费者选择模型的认识大大深化,我们将对此在这里作一简要的探讨。

5.9.1 图解法

显示性偏好理论的合理性原则为:设有两组商品组合 A 与 B,如果在某一价格与收入水平上,消费者对 A 与 B 都有支付能力但却只选择 A,我们就说,A 具有对 B 的"显示性偏好"。合理性原则表明,在任何不同的价格—收入配置之下,B 都不具有对 A 的显示性偏好。如果消费者确实在某种情况下选择了 B,那一定是因为他支付不起 A。图5.10解释了这一原则。当预算约束为 I_1 时,尽管消

① Paul A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1947).

费者可以选择购买 B 点的组合，但却只选择了 A 点。A 对 B 来说就具有显示性偏好。如果在其他预算约束下选择了 B，一定是如 I_2 那样的情况——根本不可能购买 A。如果在 I_3 的预算约束下选择了 B，就违背了合理性原则，因为 I_3 下购买 A 与购买 B 的组合是都能办得到的。在 I_3 下，消费者可以选择既非 A 又非 B 的其他点如 C 点的组合。值得注意的是，这一原则是用可观察到的在对不同预算约束下的反应来对商品进行排序，而没有假设效用函数本身的存在。

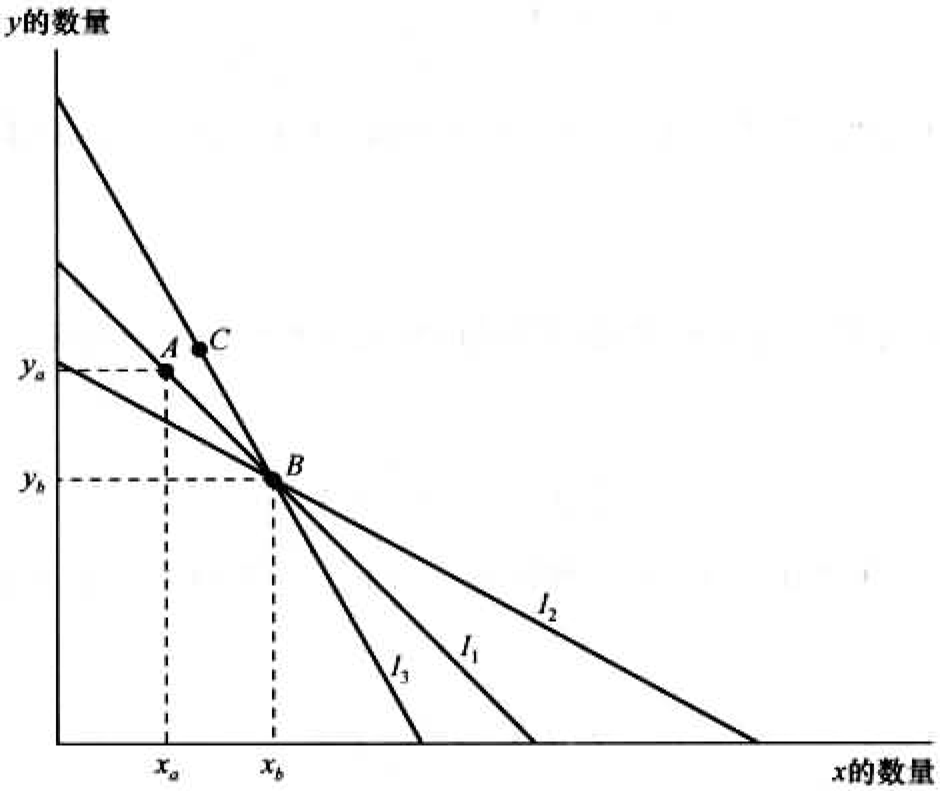


图 5.10　显示性偏好理论中的合理性原则

收入为 I_1 时，消费者既可购买商品组合 A 又可购买商品组合 B。如果选择 A，则对 B 来说，A 具有显示性偏好。在其他的价格—收入配置下，如再发生 B 对 A 具有显示性偏好则是不合理的。

5.9.2　负的替代效应

运用合理性原则，我们现在可以证明为什么替代效应必定为负（或 0）。假设消费者对商品组合 C（由 x_C 与 y_C 构成）与商品组合 D（由 x_D 与 y_D 构成）的偏好是无差异的，设价格为(p_x^C, p_y^C)时选择商品组合 C，价格为(p_x^D, p_y^D)时选择商品组合 D。

既然消费者不介意选择商品组合 C 或者商品组合 D，那么选择 C 时，D 的支付至少与 C 一样

$$p_x^C x_C + p_y^C y_C \leq p_x^C x_D + p_y^C y_D \tag{5.65}$$

同样的道理，如选择 D 时，应有

$$p_x^D x_D + p_y^D y_D \leq p_x^D x_C + p_y^D y_C \tag{5.66}$$

重新排列以上两式有

$$p_x^C (x_C - x_D) + p_y^C (y_C - y_D) \leq 0 \tag{5.67}$$

$$p_x^D (x_D - x_C) + p_y^D (y_D - y_C) \leq 0 \tag{5.68}$$

将这些加在一起有

$$(p_x^C - p_x^D)(x_C - x_D) + (p_y^C - p_y^D)(y_C - y_D) \leqslant 0 \tag{5.69}$$

设仅 x 价格改变，且 $p_y^C = p_y^D$，则有

$$(p_x^C - p_x^D)(x_C - x_D) \leqslant 0 \tag{5.70}$$

式 5.70 说明效用不变时(商品组合 C 与商品组合 D 对消费者的吸引力是一样的)，价格与数量的变动方向相反。这一点正是替代效应为负的精确说明

$$\frac{\partial x^C(p_x, p_y, V)}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x}\bigg|_{U=常量} \leqslant 0 \tag{5.71}$$

现在，我们既不需效用函数的存在又不需假设 MRS 递减，就通过上述方法得出了要求的结论。

5.9.3 数学推广

将显示性偏好的概念推广到 n 种商品的情况也是很简单的。如果价格为 p_i^0，消费者选择为 x_i^0，而选择 x_i^1 也可以满足，那么

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0 \geqslant s \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^1 \tag{5.72}$$

也就是说，相对于组合 1 来讲，0 具有“显示性偏好”。因此，在现行的价格下如购买了组合 1(如 p_i^1)那么一定是因为 x_i^0 更贵

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^0 \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1 \tag{5.73}$$

虽然最初的显示性偏好定义集中于研究两种商品之间的关系，但最常用到的基本原则要求对任意多商品组合的偏好能具有一定程度的传递性，这一点概括在下面的“强”定理中：

定义

显示性偏好强定理。显示性偏好强定理(strong axiom of revealed preference)说明，如果相对于商品组合 1 来说，商品组合 0 具有显示性偏好，而相对于商品组合 2 来说，商品组合 1 具有显示性偏好，相对于商品组合 3 来说，商品组合 2 具有显示性偏好……如果相对于商品组合 K 来说，商品组合 $K-1$ 具有显示性偏好，那么相对于商品组合 0 来说，组合 K 不具有显示性偏好(K 为任意数)。

由效用概念发展而来的其他大多数特性都可用这一显示性偏好定理证明。例如，很容易证明需求函数在各种价格与收入条件下都是零次齐次的。因此，显示性偏好定理与“表现良好”的效用函数的存在条件是等价的，这一点是很明显的。事实上这是由 H. S. 霍撒克(H. S. Houthakker)于 1950 年首次提出的。他证明了总能够从遵守显示性偏好强定理的消费者身上推算出一组无差异曲线来。[①]因此，对于在一组预算约束中，对于经相对简单的比较就建立起来的效用理论来说，显示性偏好强定理提供了普遍而又可信的基础。这种方法广泛地应用于价格指数的建立和各种其他的目的。

---

① H. S. Houthakker, “Revealed Preference and the Utility Function,” *Economics 17* (May 1950): 159—174.

小　结

本章中,我们运用效用最大化模型研究了在商品价格与消费者收入变化的情况下,消费者如何做出反应,选择商品。这一考察的最终结果是得到了一条我们所熟悉的向下倾斜的需求曲线。为了得到这个结果,我们从一般的经济选择理论中挖掘出了大量的有益见解:

- 在所有商品价格与收入都以相同比例变化时,消费的预算约束不受影响,因此消费者对商品组合的选择不变。用规范化的语言来说就是,需求函数在所有商品价格与收入上是零次齐次函数。
- 当购买力变化时(即价格不变时收入增加),预算约束发生变化,消费者将选择新的商品组合。对于正常品来说,购买力增加会导致商品需求的增加。而对劣等品来说,购买力增加会导致对商品需求的减少。因此,虽然通常情况下 $\partial x_i/\partial I \geqslant 0$,但 $\partial x_i/\partial I$ 却既有可能为正又有可能为负。
- 商品价格下降会出现替代效应与收入效应,如果是正常品,则购买量增加,如果是劣等品,替代效应与收入效应作用方向相反,不能做出明确预测。
- 类似地,商品价格上升会减少替代效应与收入效应,在正常品的情况下,会导致商品需求量下降。而对于劣等品,最终的净效应仍是不能确定的。
- 马歇尔需求曲线给出了某种商品在各种可能的价格水平下的需求数量。价格变化,引发替代效应与收入效应,使需求量沿需求曲线运动。对于正常品来说,沿需求曲线移动的情况是 $\partial x_i/\partial p_i \leqslant 0$。如果收入、其他商品价格与消费者偏好改变,则整条需求曲线会移动到新的位置。
- 补偿性需求曲线说明的是价格沿一给定无差异曲线变化的情况。补偿性需求曲线是由假设效用不变、价格变化仅导致替代效应而产生的。因而其斜率必定为负(或0)。
- 需求弹性经常在经验研究中被用于总结消费者对价格和收入变化的反应。其中最重要的弹性是自身需求价格弹性,它衡量了价格改变1%时,需求量改变的比例。对应的补偿性需求的弹性可以通过沿着补偿性需求曲线的运动定义。
- 需求弹性间有很多关系,其中几个重要的关系是:(1) 自身价格弹性决定价格的改变如何影响在该商品上的总支出;(2) 替代效应和收入效应可以用弹性形式的斯拉茨基方程总结;(3) 弹性之间存在很多加和关系——这说明了对不同商品的需求之间的联系。
- 价格变化的福利效应可以用补偿性或一般需求函数下面积的变化量来衡量。这种改变影响了当消费者通过自发市场交易得到的消费者剩余的大小。
- 替代效应的负特性是需求理论中最基本的几个发现之一。这个结论可以用显示性偏好理论证明,而不需要假设效用函数的存在性。

练 习 题

5.1 口渴的 Ed 只喝纯泉水，他有两种容器装的水可以选择，0.75 升或 2 升，因为水本身都是完全相同的，他对于这两种商品是完全替代的。

a. 假设 Ed 的效用只取决于消费水的数量，而容器本身没有价值，请用 0.75 升装水的数量(x)和 2 升装水的数量(y)来表示他的效用。

b. 写出用 p_x, p_y, I 表达的 x 的需求函数。

c. 画出 p_y 和 I 不变时，x 的需求曲线。

d. 当 p_y, I 变化时，x 的需求曲线如何移动?

e. x 的补偿性需求曲线是什么样子的?

5.2 David 每周有 3 美元可自由支配。他只喜欢花生酱与果冻三明治，因此他将所有货币都花费在花生酱(每盎司 0.05 美元)与果冻(每盎司 0.10 美元)上。面包则由一热心的邻居免费提供。David 偏好自己的吃法，严格按 1 盎司果冻、2 盎司花生酱的比例配置三明治，从不改变配方。

a. David 一周中用 3 美元购买花生酱与果冻各多少?

b. 假如果冻价格上升至每盎司 0.15 美元，他购买花生酱与果冻各多少?

c. 果冻价格上涨如 b，David 的可支配收入应增加多少才能补偿价格上涨?

d. 画出 a 到 c 结论的图形。

e. 在何种意义上，该题中的花生酱和果冻三明治是一种商品? 画出这种单一商品的需求曲线。

f. 根据对果冻需求的替代效应与收入效应来讨论这一问题的结论。

5.3 正如第 3 章所定义的，如果任意一条从原点出发的直线通过所有无差异曲线斜率相等的点，即 MRS 只取决于 y/x，那么这一无差异曲线图是同质的。

a. 证明在这种效用函数下 $\partial x/\partial I$ 是常数。

b. 证明如果一个消费者的偏好可用同质无差异曲线图表示，那么价格与他的需求数量反方向变化，即不会产生吉芬之谜。

5.4 如例 5.1，假设效用由下式给出

$$效用 = U(x,y) = x^{0.3}y^{0.7}$$

a. 用例 5.1 中给出的非补偿性需求函数计算本例的直接效用函数与支出函数。

b. 用 a 中计算出的支出函数与谢泼德定理(第 124 页脚注①)计算 x 的补偿性需求函数。

c. 用 b 中得出的结论与 x 商品的非补偿性需求函数证明本题符合斯拉茨基方程式。

5.5 假设 x 与 y 商品的效用函数由下式给出

$$效用 = U(x,y) = xy + y$$

a. 计算 x 与 y 的非补偿性(马歇尔)需求函数并描述收入或其他商品价格变化怎样使 x 与 y 的需求曲线发生变化。

b. 计算 x 与 y 的支出函数。

c. 用 b 中计算出的支出函数计算 x 与 y 商品的补偿性需求函数。描述当收入或其他商品价格发生变化时，x 与 y 的补偿性需求曲线怎样发生变化。

5.6 在第 4 章的扩展部分，我们说明了关于需求理论的大部分经验研究集中于收入份额的研究。对于任一商品 x，其收入份额定义为 $s_x = \frac{p_x x}{I}$。在本题中，我们将说明，

大多数需求弹性可以从对应的份额弹性中得到。

a. 证明一种商品的预算份额收入弹性 $\left(e_{s_x,I}=\frac{\partial s_x}{\partial I}\cdot\frac{I}{s_x}\right)$ 等于 $e_{x,I}-1$，用几个数值的例子来解释这个结论。

b. 证明一种商品的预算份额自身价格弹性 $\left(e_{s_x,p_x}=\frac{\partial s_x}{\partial p_x}\cdot\frac{p_x}{s_x}\right)$ 等于 $e_{x,p_x}+1$，用几个数值的例子来解释这个结论。

c. 用 b 中的结论来证明商品 x 的支出自身价格弹性 $\left(e_{x\cdot p_x,p_x}=\frac{\partial(p_x\cdot x)}{\partial p_x}\cdot\frac{1}{x}\right)$ 等于 $e_{x,p_x}+1$。

d. 证明一种商品的预算份额交叉价格弹性 $\left(e_{s_x,p_y}=\frac{\partial s_x}{\partial p_y}\cdot\frac{p_y}{s_x}\right)$ 等于 e_{x,p_y}。

e. 在第 4 章的扩展部分，我们说明了应用 CES 效用函数的情形时，商品 x 的支出份额为 $s_x=\frac{1}{1+p_y^k p_x^{-k}}$，其中 $k=\frac{\delta}{\delta-1}=1-\sigma$。

用份额方程来证明方程 5.56：

$$e_{x^c,p_x}=-(1-s_x)\sigma。$$

提示：这个问题可以通过假设 $p_x=p_y$（此时 $s_x=0.5$）得到简化。

5.7 假设一个人认为火腿和奶酪是完全互补品，他将总是用一片火腿和一块奶酪来做火腿奶酪三明治，假设他只购买火腿和奶酪，而面包是免费的。证明：

a. 如果火腿和奶酪的价格相等，火腿的需求自身价格弹性为 -0.5，火腿对奶酪的交叉价格弹性也为 -0.5。

b. 解释为什么 a 中的结论只反映了收入效应，而没有反映替代效应。计算这里的补偿性价格弹性。

c. 用 b 中的结论说明如果一片火腿的价格是奶酪价格的两倍，a 的结论将如何改变？

d. 通过假设此人只消费一种商品——火腿奶酪三明治，来解释如何用直觉的方法解决这个问题。

5.8 习题 5.6 有一些有用的应用，因为它说明了价格反应最终取决于效用函数的参数。特别地，使用该结论和弹性形式的斯拉茨基方程可以证明：

a. 在柯布-道格拉斯的情形（$\sigma=1$），下面关于商品 x,y 自身价格弹性的关系成立：$e_{x,p_x}+e_{y,p_y}=-2$。

b. 如果 $\sigma>1$，则 $e_{x,p_x}+e_{y,p_y}<-2$；如果 $\sigma<1$，则 $e_{x,p_x}+e_{y,p_y}>-2$。请给出一个直觉上的解释。

c. 你如何将上面的结论推广到多种商品的情况。讨论这种推广是否有特殊意义。

5.9 本章中提到的三种加合关系可以推广到任意多种商品的情形。本题将让你作这样的推广。我们假设，有 n 种商品，在第 i 种商品上的支出占收入的份额为 s_i，我们定义下面的弹性

$$e_{i,I}=\frac{\partial x_i}{\partial I}\cdot\frac{I}{x_i}$$

$$e_{i,j}=\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\cdot\frac{p_j}{x_i}$$

请证明：

a. 齐次性：$\sum_{j=1}^{n}e_{i,j}+e_{i,I}=0$。

b. 恩格尔加和：$\sum_{i=1}^{n}s_i e_{i,I}=1$。

c. 古诺加和：$\sum_{i=1}^{n}s_i e_{i,j}=-s_j$。

5.10 消费者在三年中的消费行为如下表：

	p_x	p_y	x	y
第一年	3	3	7	4
第二年	4	2	6	6
第三年	5	1	7	3

这一消费行为是否符合显示性偏好强定理？

推荐阅读文献

Cook, P. J. "A 'One Line' Proof of the Slutsky Equation". *American Economic Review* 62 (March 1972): 139.

巧妙地推导斯拉茨基方程，运用了第5章相同的方法，但涉及了较为复杂的概念。

Fisher, E, M., and K. Shell. *The Economic Theory of Price Indices*. New York: Academic Press, 1972.

对不同价格指数的经济特征进行了全面的、专业的讨论，详细描述了基于效用最大化模型的"理想"指数。

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford Univesity Press, 1995

第3章包含了很多本章的内容，但难度大一些。其中第I部分价格变化的福利效应的度量尤其值得推荐。

Samuelson, Paul A. *Foundations of Economic Analysis*, Chap. V. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1947.

提供了对替代效应和收入效应的全面分析，还给出了显示性偏好的概念。

Silberberg, E. and W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston: Irwin/McGraw-Hill, 2001.

对斯拉茨基方程进行了扩展性的推导，并给出了弹性概念的详尽介绍。

Sydsaetter, K., A. Strom, and P. Berck *Economist's Mathematical Manual*, 2003 ed. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

给出了一系列弹性概念的简要总结。对替代弹性概念的总结尤其完备。

Varian, H. *Microeconomic Analysis*, 3rd ed. New York: W. W. Norton, 1992.

正式提出了偏好的概念，大量应用了支出函数及其与斯拉茨基方程之间的关系，同时还给出了罗伊(Roy)恒等式的完美证明。

扩　展

需求概念和价格指数的衡量

在第4章与第5章中，我们引入了一些相关的需求的概念，这些概念都来自于效用最大化的模型。这些不同的概念之间的关系总结在图E5.1中。我们已经考察了图中大部分的联系，还没有讨论间接效用函数和马歇尔需求函数间的数学关系(罗伊恒等式)，这点我们将在下面介绍。图中很清楚地表明，可以有很多方式来了解消费者福利和他们面临的价格之间的关系。在这个扩展中，我们将讨论其中的一些方法。特别地，我们将考察这些概念在消费者物价指数测量准确度上的启发，消费者物价指数主要用来衡量美国的通货膨胀率，世界其他各国也使用着类似的指标。

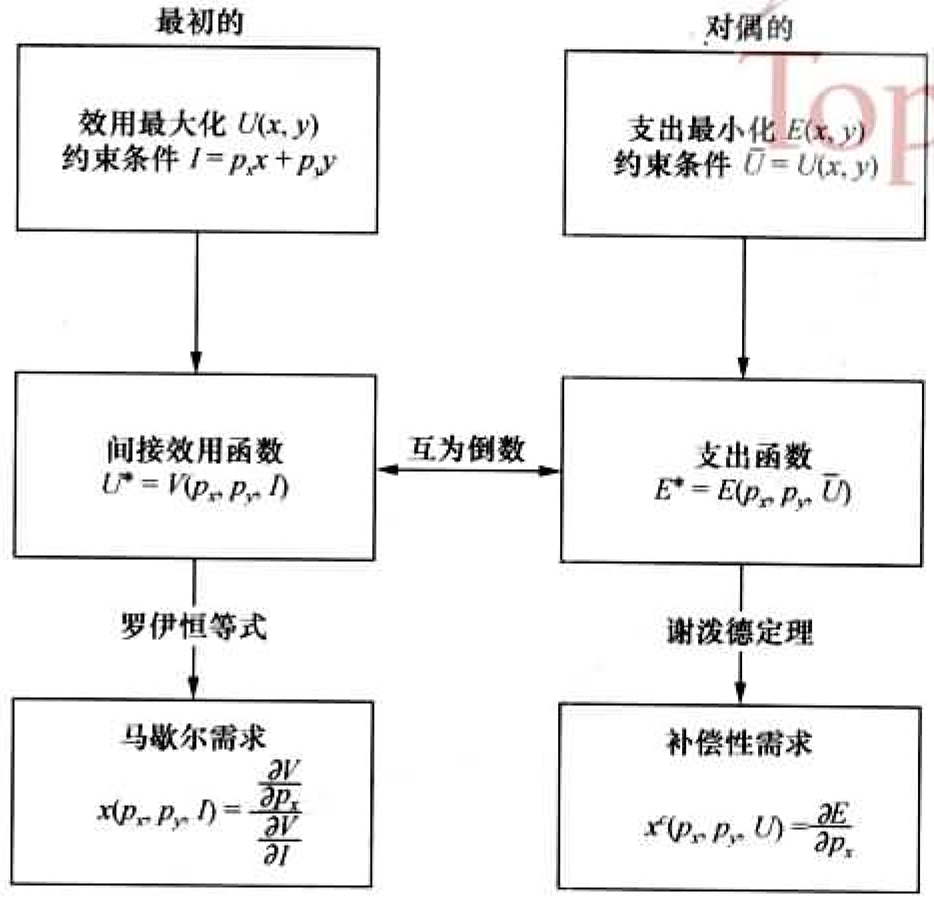


图 E5.1　需求概念之间的关系

消费者物价指数是衡量生活费用的市场篮子指标。研究者通过测量在基期消费的一组商品（在两种商品的情况下，基期消费市场篮子由 x_0,y_0 表示）的现价来计算市场篮子的价格变化。在这一过程中，市场篮子的费用开始为 $I_0=p_x^0x_0+p_y^0y_0$，而在 1 期，费用为 $I_1=p_x^1x_0+p_y^1y_0$。于是生活费用的改变就用 I_1/I_0 来衡量。虽然这一测量通货膨胀的方式在直觉上是可行的，而且它还被广泛应用着，但这些指数仍有很多缺陷。这些缺陷可以用不同的需求函数的概念表现出来。

E5.1　支出方程和替代偏差

市场篮子价格指数因替代偏差而不准确。因为它不允许消费者由于价格的相对变化在市场篮子中作替代调整，它会高估人们由于价格升高而造成的福利损失。这点在图 E5.2 中得到说明。开始为了达到效用水平 U_0，购买商品组合为 (x_0,y_0)，要支出 E_0。如果 p_x/p_y 下降，为达到开始的效用水平，调整消费组合为 (x_1,y_1)，并需要支出 E_1。如果计算继续消费 (x_0,y_0) 的支出水平就夸大了他需要的使其福利保持不变的购买力。经济学家们广泛地研究了这种替代偏差。例如，Aizcorbe 和 Jackman（1993）的结果表明，市场篮子的这一缺陷使 CPI 对通货膨胀率的估计每年高了 0.2 个百分点。

E5.2　罗伊恒等式和新商品偏差

当新产品被引入时，需要一段时间才能将其包含进 CPI。例如，豪斯曼（Hausman，1999，2003）指出，手机在其出现的 15 年之后才进入 CPI 指数。这点滞后使指数不能反映人们在使用新产品中得到的福利收益。为了衡量这种问题，豪斯曼设法找到一种虚拟价格（p^*），以手机为例，可以把虚拟价格定为当人们对手机的需求量为零时的价格。他以此说明，新产品在市场价格的引入代表了消费者剩余的改变，而这种改变是可以被衡量的。所以，作者面临着如何从手机的马歇尔需求函数（他用计量的方法

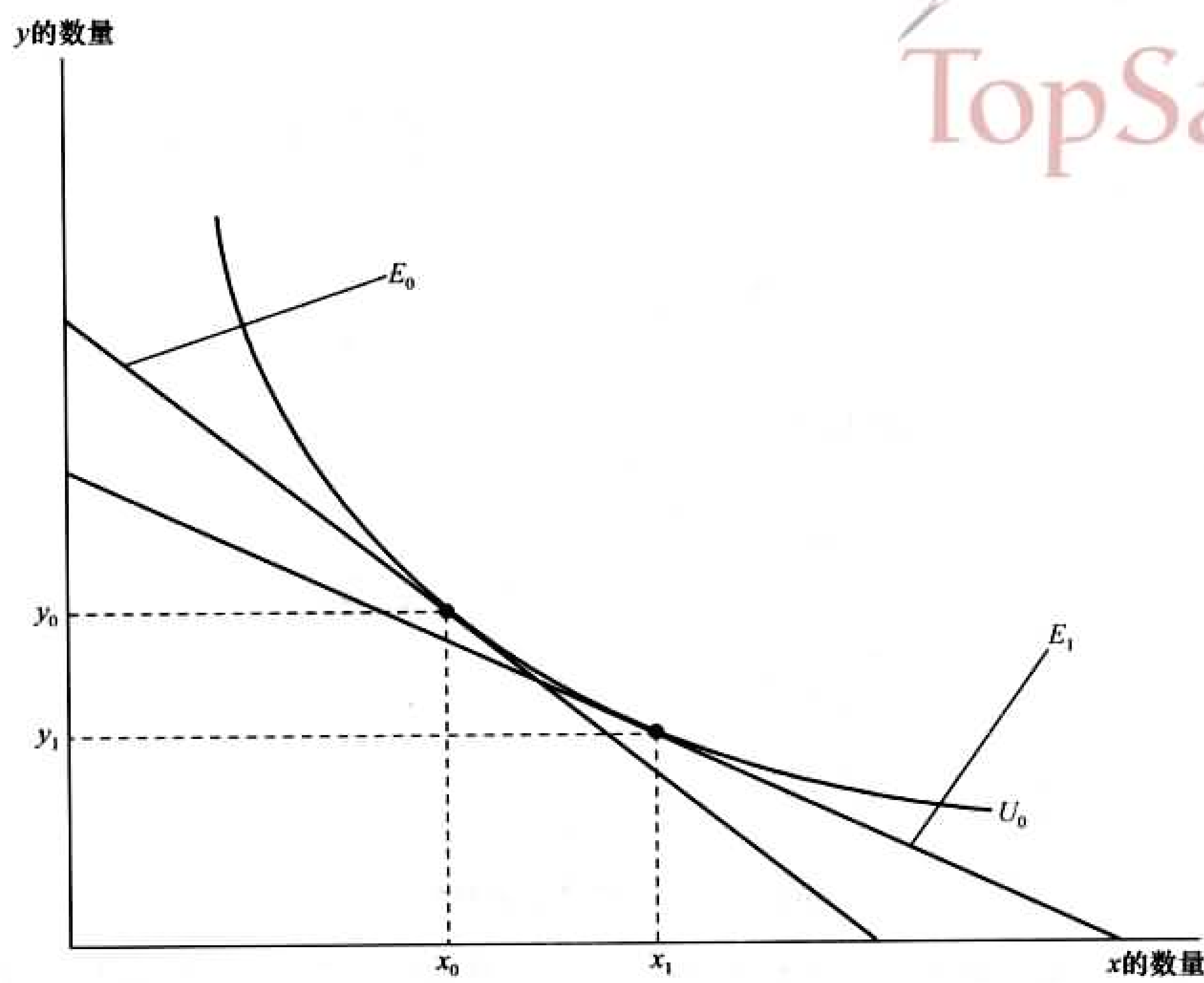


图 E5.2　CPI 中的替代偏差

开始，购买商品组合为(x_0, y_0)，支出为E_0。当p_x/p_y下降时，通过消费(x_1, y_1)，支出E_1可以更容易地达到U_0的效用水平。在新价格下，购买(x_0, y_0)的花费大于E_1。所以，保持消费集不变会引入有关 CPI 计算的向上的偏差。

进行估计）得到支出函数的问题。他使用了罗伊恒等式（参见罗伊，1942）。请记住消费者效用最大化的问题可以用拉格朗日方法表示，如下

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_x} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_x} = -\lambda x(p_x, p_y, I) \qquad \text{(i)}$$

且

$$\frac{\partial U^*}{\partial I} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial I} = \lambda$$

所以马歇尔需求函数由下式给出

$$x(p_x, p_y, I) = \frac{-\partial U^*/\partial p_x}{\partial U^*/\partial I} \qquad \text{(ii)}$$

利用对马歇尔需求函数的估计，豪斯曼对(ii)进行积分，得到了间接效用函数，并计算了其反函数（参见图 E5.1）。虽然这只是一个归约级别的问题，但结果得到的手机带来的消费者福利的估计是很大的，折合到 1999 年的现值，竟超过了每年 1 000 亿美元。在将新产品纳入 CPI 时的时滞使得对消费者福利的衡量是误导性的。

E5.3　其他有关 CPI 的问题

研究者已经发现了 CPI 的几个其他缺陷。大多数都集中在该指数计算中使用的不正确的价格。例如，当一种商品的质量改善时，人们的生活变好了，但这点可能并没有在价格中反映出来。1970 年到 1980 年的彩色电视机的可靠性显著提高，但其价格并没有改变太多。包含一台彩色电视机的市场篮子会漏掉这种福利改进。相似地，1990 年前后开张的“大盒子”零售商，比如 Costco 和 Home Depot 无疑降低了人们

购买的多种商品的价格。但是花了几年时间才将这些新的零售渠道包含进 CPI 的采样计划，所以该指数不能正确地表示人们的实际花费。可以用图 E5.1 中的需求概念来估计 CPI 中这些由于使用不正确价格而带来的错误。关于这方面研究的总结参见 Moulton(1996)。

参考文献

Aizcorbe, Ana M., and Patrick C. Jackman. "The Commodity Substitution Effect in CPI Data, 1982—1991". *Monthly Labor Review* (December 1993): 25—33.

Hausman, Jerry. "Cellular Telephone, New Products, and the CPI". *Journal of Business and Economic Statistics* (April 1999): 188—194.

Hausman, Jerry. "Sources of Bias and Solutions to Bias in the Consumer Price Index". *Journal of Economic Perspectives* (Winter 2003): 23—44.

Moulton, Brent R. "Bias in the Consumer Price Index: What Is the Evidence". *Journal of Economic Perspectives* (Fall 1996): 159—177.

Roy, R. *De l'utilité, contribution à la théoric des choix*. Paris: Hermann, 1942.

第 6 章 商品间的需求关系

在第 5 章我们已经考察了某种特定商品(譬如说商品 x)价格的变化,是如何影响该商品的需求数量的。我们的讨论始终以所有其他商品的价格保持不变为条件。但显然,这些商品价格中的任何一个发生变化必定也会影响商品 x 的需求量。例如,以 x 表示某人汽车行驶的里程数,那么这个数值将随着汽油价格的上涨而减少,或者随着飞机和公共汽车票价的上涨而增加。在本章中,我们将运用效用最大化模型来研究这种关系。

6.1 两种商品的情形

我们仍然从两种商品的情形讨论起。遗憾的是,这章要讨论的关系在两种商品的假设下非常有局限性,然而由于我们只能用二维的几何图形分析两种商品时的情况,因此分析仍然从两种商品的情形开始。图 6.1 表明了商品 y 的价格变化是如何影响商品 x 的需求量的两种情况。在这两张图中,由于 p_y 下降,使预算约束从 I_0 外移到 I_1。如果 y 是正常品,这两种情况下 y 的数量都会随着 p_y 的下降而从 y_0 增加到 y_1。但对商品 x 来说,其结果就有两种不同的情形:在(a)图中,无差异曲线基本上呈 L 形,这表明替代效应非常小。y 的价格下降时,会在 U_0 上发生很小的移动,y 只替代了较少的 x。也就是说,作为替代效应的结果,x 下降相对较小。但是另一方面,收入效应表现为购买力的增加,从而导致 x 的总体数量还是上升的。因此,$\partial x/\partial p_y$ 是负的(x 与 p_y 变动方向相反)。

图 6.1(b)的情况则相反,它的 $\partial x/\partial p_y$ 为正。图 6.1(b)中相对平缓的无差异曲线导致 p_y 下降后产生一个较大的替代效应。在 U_0 上发生以 y 替代 x 时,x 的数量急剧下降。虽然同图 6.1(a)中一样,由于 p_y 的下降而增加的购买力导致购买更多数量的 x,但这里的替代效应处于支配地位,于是 x 的数量下降至 x_1,在这种情况下,x 与 p_y 同方向变动。

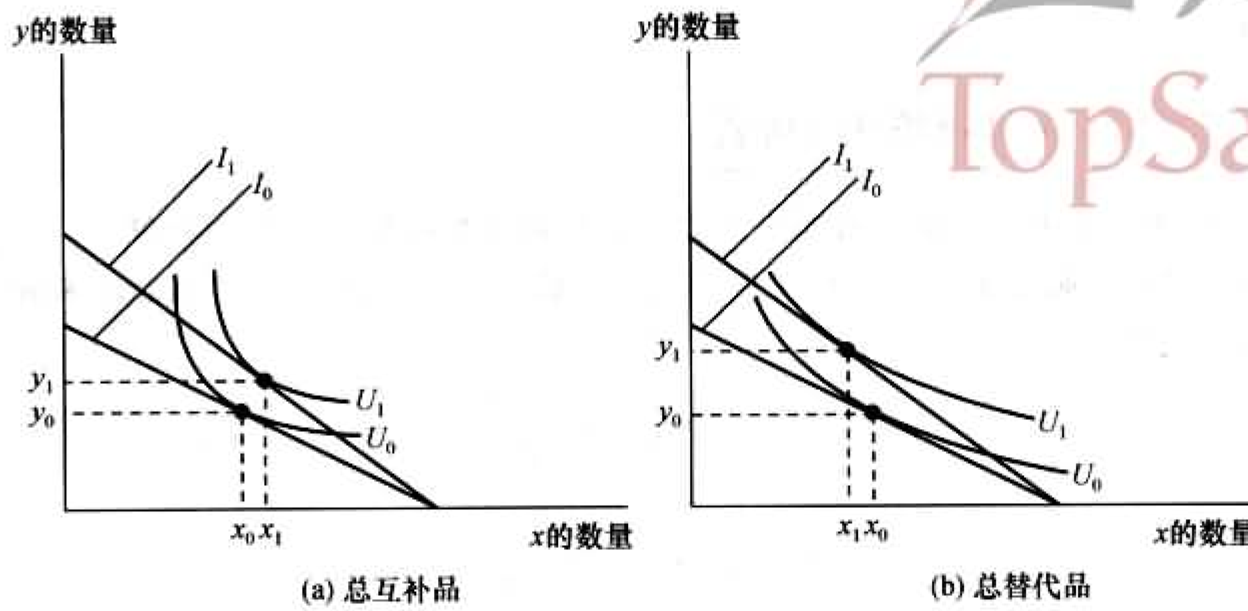


图 6.1　交叉价格效应下的不同方向

在两个图中，y 的价格均下降，但图(a)中的替代效应小，所以商品 x 的消费量随着商品 y 的增加而增加。由于 $\partial x/\partial p_y<0$，$x$ 与 y 为总互补品。而图(b)中的替代效应大，所以商品 x 的需求量下降。由于 $\partial x/\partial p_y>0$，所以，商品 x 与商品 y 可称为**总替代品**(**gross substitutes**)。

数学论述

由于 p_y 变化而造成上述两种可能的情况可进一步用斯拉茨基方程来解释。用类似第 5 章的处理方法，我们可以很容易地证明

$$\frac{\partial x(p_x,p_y,I)}{\partial p_y}=\text{替代效应}+\text{收入效应}=\left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{U=\text{常数}}-y\cdot\frac{\partial x}{\partial I} \tag{6.1}$$

或者用弹性表达

$$e_{x,p_y}=e_{x^c,p_y}-s_y e_{x,I} \tag{6.2}$$

注意收入效应的大小由购买物品 y 占的支出比重 s_y 决定。即，商品 y 对于消费者越是重要，p_y 的变化对消费者购买力影响越大。

对于两种商品的情况，等式 6.1 和 6.2 右边各项符号不同。假设无差异曲线是下凸的，则替代效应$\left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{U=\text{常数}}$是正的。如果我们将变化限制在一条无差异曲线上的移动，则 p_y 上升时 x 的数量增加，p_y 下降时 x 的数量减少。但是假设 x 是正常品，则收入效应($-y\partial x/\partial I$ 或 $-s_y e_{x,I}$)肯定是负的。因此，综合效应的结果就可能有两种情况：$\partial x/\partial p_y$ 既可以为正，也可以为负。可见，即便是只有两种商品的情况，x 的需求量与 p_y 之间的关系也是相当复杂的。

例 6.1

交叉价格效应的另一个斯拉茨基分解式

在例 5.4 中，我们解释了 x 的价格变化对其购买量发生影响的斯拉茨基分解式。现在我们来看一下 y 的价格变化对 x 购买量产生的交叉价格效应。已知软饮料的非补偿性需求函数与补偿性需求函数分别由下式给出

$$x(p_x,p_y,I)=\frac{0.5I}{p_x} \tag{6.3}$$

与

$$x^c(p_x,p_y,V)=Vp_y^{0.5}p_x^{-0.5} \tag{6.4}$$

我们还注意到有时在非补偿性函数下：$\frac{\partial x}{\partial p_y}=0$——这表明 y 的价格变化对 x 的购买没有影响。现在我们来证明这是因为其替代效应和收入效应恰好抵消了。替代效应是

$$\left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{U=\text{常数}}=\frac{\partial x^c}{\partial p_y}=0.5Vp_y^{-0.5}p_x^{-0.5} \tag{6.5}$$

将 V 用间接效用函数的结果（$V=0.5Ip_y^{-0.5}p_x^{-0.5}$）代入，就得到替代效应的最终表达式

$$\left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{U=\text{常数}}=0.25Ip_y^{-1}p_x^{-1} \tag{6.6}$$

利用 y 的马歇尔需求函数（$y=0.5Ip_y^{-1}$），可以计算这个问题的收入效应

$$-y\frac{\partial x}{\partial I}=-[0.5Ip_y^{-1}]\cdot[0.5p_x^{-1}]=-0.25Ip_y^{-1}p_x^{-1} \tag{6.7}$$

总效应是

$$\frac{\partial x}{\partial p_y}=0.25Ip_y^{-1}p_x^{-1}-0.25Ip_y^{-1}p_x^{-1}=0 \tag{6.8}$$

这样我们就清楚了，为什么在柯布-道格拉斯需求函数中 y 的价格变动不影响 x 的购买量：是因为收入效应和替代效应恰好互相抵消掉了，而并不是因为两种效应都不存在。

回到我们代入数字的例子上（$p_x=1,p_y=4,I=8,V=2$），假设现在 p_y 降为 2，这对 x 的需求曲线将没有任何影响。在补偿性需求函数（式 6.4）中，价格的变动会使得 x 的需求量从 4 减少到 2.83（$=2\sqrt{2}$），而 y 的需求量增加以保持总效用不变。而价格下降使得真实的购买力上升，这一收入效应对 x 的需求量的作用与前者刚好相反。

请回答：有人说如果 $\partial x/\partial p_y=0$，那么就说明 x 和 y 之间不能互相替代，即它们必须以一个固定的比例消费。这种看法为什么是错误的？在什么样的条件下才能得出上述结论？

6.2 替代品与互补品

在多种商品的情况下，商品之间的关系变得更加复杂。所以为了简化，我们对任意两种商品 x_i，x_j 写出斯拉茨基等式

$$\frac{\partial x_i(p_1\cdots p_n, I)}{\partial p_j} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U=\text{常数}} - x_j\frac{\partial x_i}{\partial I} \tag{6.9}$$

以及弹性形式表达

$$e_{i,j} = e^c_{i,j} - s_j e_{i,x} \tag{6.10}$$

对任何 i,j（包括 $i=j$），上式都成立。这就是说，任一商品（这里指商品 j）价格上升的变化都会有一收入效应与替代效应，进而又会改变每一种商品的需求数量。公式 6.9 可以用于讨论替代品与互补品的概念。直观地看，这些概念非常简单。如果因为某些因素的改变，使得一种商品可以替代另一种商品来使用，那么这两种商品是**替代品（substitutes）**。茶与咖啡、汉堡包与热狗、黄油与人造黄油都是这方面的例子。反之，**互补品（complements）**是指商品诸如咖啡与奶油、鱼肉与炸薯片，或者白兰地酒与雪茄烟那些需要"彼此配合"使用的商品。在某种意义上，"替代品"在效用功能上可以彼此互相替代，而"互补品"则可以互相补充。

可以用两种不同的方法来准确地描述这些直观的概念。一种是强调价格变化后的总效应，既包括收入效应又包括替代效应；另一种则只强调替代效应。由于两种定义都在使用，我们将对之分别加以详细解释。

6.2.1 总替代品与总互补品

替代与互补的关系可以定义如下：

定义

总替代品与总互补品。两种商品 x_i 与 x_j，如果

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0 \tag{6.11}$$

则它们是总替代品；如果

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0 \tag{6.12}$$

则它们是总互补品。

这就是说，如果一种商品价格的上升导致另一种商品购买量增多，则它们是总替代品。如果一种商品价格的上升导致另一种商品的购买量减少，则它们是总互补品。例如，如果咖啡的价格上升，茶的需求将会增加（它们是替代品），然而奶油的需求将会减少（咖啡与奶油是互补品）。等式 6.9 清楚地表明这个定义是一个"总"定义，因为在这个定义里包括了价格上升后的收入效应与替代效应

两种效应。既然这两种效应在我们所能观察到的现实世界中是结合在一起出现的，那么说它们是“总”替代品与“总”互补品就应是合情合理的。

6.2.2 总定义的非对称性

关于替代品与互补品的“总”定义有些很不好的性质，其中最重要的是这个定义的非对称性。根据这个定义，也许对 x_2 而言，x_1 是其替代品，而同时对 x_1 而言，x_2 则是其互补品。收入效应的存在可能导致自相矛盾的结果。让我们来看一个具体例子：

例 6.2

交叉价格效应中的非对称性

假设两种商品（x 与 y）的效用函数由下式给出

$$U(x,y) = \ln x + y \tag{6.13}$$

建立拉格朗日表达式为

$$\mathscr{L} = \ln x + y + \lambda(I - p_x x - p_y y) \tag{6.14}$$

得出如下的一阶条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= \frac{1}{x} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= 1 - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

将含 λ 项右移并用第二个等式除以第一个等式，有

$$\frac{1}{x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{6.16}$$

$$p_x x = p_y \tag{6.17}$$

代入预算约束方程中，我们就可以解出 y 的马歇尔需求函数

$$I = p_x x + p_y y = p_y + p_y y \tag{6.18}$$

因此

$$y = \frac{I - p_y}{p_y} \tag{6.19}$$

这个等式表明 p_y 的上升会减少花在商品 y 上的支出（即 $p_y y$ 下降）。因此，既然 p_x 与 I 没有变化，则花费在 x 上的支出与 x 的购买量一定会增加，所以有

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} > 0 \tag{6.20}$$

我们将 x 与 y 称之为总替代品。另一方面，等式 6.18 表明在 y 上的支出与 p_x 无关，因此有

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = 0 \tag{6.21}$$

从这方面看，x 与 y 是彼此独立的——它们既不是总替代品，也不是总互补品。可见，根据总的市场反应来定义 x 与 y 之间的关系将会陷入含混不清的境地。

请回答：在例 3.4 中，我们表明由等式 6.13 得出的效用函数形式是非同位偏好的，即 *MRS* 不是仅仅取决于 x 对 y 的比率。非对称性在同位偏好情况下会存在吗？

6.3 净替代品与净互补品

由于总替代品与总互补品定义中的模糊性，所以有时我们使用另一个仅包含替代效应的定义：

定义

净替代品与净互补品。[①] 如果

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U=\text{常数}} > 0 \tag{6.22}$$

则 x_i 与 x_j 称为净替代品；如果

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U=\text{常数}} < 0 \tag{6.23}$$

则 x_i 与 x_j 称为净互补品。

这些定义仅通过替代项来判断两种商品是替代品还是互补品。这个定义在直观上是易接受的（因为它仅考虑无差异曲线的形状），同时在理论上也是符合要求的（因为它不会产生矛盾）。一旦 x_i 与 x_j 被确定是替代关系，不论怎样使用这个定义，它们都是替代品。事实上，这个定义是完全对称的，可以写成

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U=\text{常数}} = \left.\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right|_{U=\text{常数}} \tag{6.24}$$

p_i 的变化对商品 x_j 的替代效应与 p_j 的变化对 x_i 的替代效应是一样的。这种对称性在理论上与实证

① 它们有时被称为"希克斯"替代品与补偿品，以首先提出这些定义的英国经济学家约翰·希克斯（John Hicks）的名字命名。

工作中都很重要。①

关于替代品与互补品两种定义之间的区别可以简单地用图 6.1(a)来说明。在这个图中,x 与 y 是总互补品,但它们也是净替代品。$\frac{\partial x}{\partial p_y}$为负($x$ 与 y 是总互补品),这是因为(负的)收入效应超过了(正的)替代效应(y 商品价格的降低导致真实收入的大量增加,结果 x 的销售量上升)。但是,正如图中所表明的,如果可选择的商品只有两种,它们必是净替代品,虽然它们可能既是总替代品,又是总互补品。由于我们假定边际替代率 *MRS* 是递减的,商品的自身价格替代效应必定是负的,因此其交叉价格替代效应必定是正的。

6.4 多种商品情形下的替代关系

一旦效用最大化模型被推广到多种商品的情况,就可能产生各种不同的需求关系。因为具体某一对商品是净替代的还是净互补的完全是消费者个人的偏好问题,所以各种稀奇古怪的关系都可能出现。经济学家所关心的重要理论问题是,替代与互补哪种更普遍一些。一般而言,我们倾向于认为以替代关系为主(一种物品的价格上涨使得消费者对其他大部分物品需求增加)。要是我们能从理论上证明我们的直觉是否正确,就最好不过。

五十多年前,英国经济学家约翰·希克斯(John Hicks)细致地研究了这个问题,结论是“大多数”商品是替代关系的。这个结论被称为“希克斯第二需求定律”②。通过给定的某种商品的补偿性需求函数 $x_i^c(p_1\cdots p_n,V)$,我们用现代经济学的手段来证明它。

由于该函数对所有价格是零次齐次的(只要效用恒定,所有价格加倍对需求量没有影响,因为达到效用最大化的切点没有改变)。用欧拉定理,有

---

① 这种对称性很容易用谢泼德定理来说明(参见第 125 页的脚注①)。因为补偿性需求函数可以用支出函数的偏导数表示

$$x_i^c(p_1\cdots p_n,V)=\frac{\partial E(p_1\cdots p_n,V)}{\partial p_i} \tag{i}$$

那么替代效应是

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{U=\text{常数}}=\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}=\frac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial p_i}=E_{ij} \tag{ii}$$

但是由杨格定理,

$$E_{ij}=E_{ji}=\frac{\partial x_j^c}{\partial p_i}=\left.\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right|_{U=\text{常数}} \tag{iii}$$

这样我们就得到了对称性。

② 参见 John Hicks, *Value and Capital* (Oxford: Oxford University Press, 1939),数学附录部分。关于这一条应该叫做希克斯“第二”定律还是“第三”定律目前还有争议。事实上他的另外两条定律我们也见过了,它们是:(1) $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_i}\leq 0$(自身的替代效应非正);(2) $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j}=\frac{\partial x_j^c}{\partial p_i}$(净替代效应对称)。但是他自己写的结论中只提到了两条性质。

$$p_1 \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_2} + \cdots + p_n \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_n} \equiv 0. \tag{6.25}$$

对上式各项除以 x_i，就得到弹性表达形式

$$e_{i1}^c + e_{i2}^c + \cdots + e_{in}^c \equiv 0 \tag{6.26}$$

但是 $e_{ii}^c \leqslant 0$ 是必然的，因为一种商品对自身的替代效应总是负的。换言之，一种商品的补偿性需求曲线必向下倾斜。因此就有

$$\sum_{j \neq i} e_{ij}^c \geqslant 0 \tag{6.27}$$

上式用文字描述，就是一种物品对于其他所有物品的补偿性交叉价格弹性是非负的，其含义就是"大多数"商品是替代品。这个结论与现实中观测到的数据基本吻合——物品之间是净互补的情形确实相对罕见。

6.5 组合商品

前面章节的讨论表明商品间的需求关系是十分复杂的。在多数情况下，一个人对几种商品的消费存在$\frac{n(n+1)}{2}$个反映不同替代效应的函数。[①] 当 n 非常大时（消费者实际消费的商品种类的确是非常多的），处理起来很困难。把商品按食物、服装、住房等大组分类要方便得多。在一大类中，我们就可以考察其中某一特定商品（如汽油，称之为 x），并考察它与"其他所有商品"（称之为 y）之间的关系。这种处理方法我们曾在前面很多二维图形中用过，在本书的其他很多地方还会继续使用。在这一节中，我们将说明在什么条件下可使用这种方法。在本章的附录里，我们将探讨更一般的问题，即商品聚合成为大商品群组的问题。

6.5.1 组合商品定理

假设消费者可在 n 种商品中进行选择，但我们只对其中的一种如 x_1 感兴趣。通常情况下，对 x_1 的需求，取决于其余 $n-1$ 种商品的价格。但如果所有这些商品的价格都同时发生变化，那么就可以把它们归并为一组"组合商品"y。如果用 $p_2^0, \cdots, p_n^0$ 代表这些商品的初始价格，再设这些价格只能同时变动。可能它们同时加倍，或同时下降 50%，但 $x_2, \cdots, x_n$ 的相对价格不会改变。现在我们定义组合商品 y 为 $x_2, \cdots, x_n$ 在初始价格 $p_2^0, \cdots, p_n^0$ 条件下的总支出为

$$y = p_2^0 x_2 + p_3^0 x_3 + \cdots + p_n^0 x_n \tag{6.28}$$

该消费者初始的预算约束由下式给出

$$I = p_1 x_1 + p_2^0 x_2 + \cdots + p_n^0 x_n = p_1 x_1 + y \tag{6.29}$$

---

① 考虑全部替代效应可以说明这一点，s_{ij} 表示一个 $n \times n$ 阶矩阵。但替代效应的对称性（$s_{ij} = s_{ji}$）表明，只有主对角线上下的元素才具有彼此不同的可能性。这包括了矩阵$\left(\frac{1}{2}n^2\right)$中半数的项再加上矩阵$\left(\frac{1}{2}n\right)$主对角线上元素的半数项。

根据假设,所有价格 $p_2,\cdots,p_n$ 同步变化。假定所有价格都按 t 变化($t>0$),则现在的预算约束为

$$I = p_1x_1 + tp_2^0y_2 + \cdots + tp_n^0x_n = p_1x_1 + ty \tag{6.30}$$

结果,在此人的预算约束中,t 的作用与前述两种商品情形下的 p_y 是相同的。p_1 与 t 的变化会产生我们已分析过的同样性质的替代效应。所以,只要 $p_2,\cdots,p_n$ 同时改变,就可以将我们对需求选择的考察范围限定在是购买 x_1 还是购买"所有别的其他商品"上。① 经简化后的图形表明,只要"组合商品定理"(即所有其他商品价格同时变动)的条件得以满足,那么这些以两轴表示的两种商品的削减就会受到严格的限制。但应注意这个原理并没有对 $x_2,\cdots,x_n$ 的选择做出预测。它们并不一定是同步变化的。此定理重点在对 $x_2,\cdots,x_n$ 的总支出上,而不在于这些支出是怎样分配在各个不同的商品项目上(虽然我们假设这种分配是按效用最大化的原则进行的)。

6.5.2 组合商品定理的推广与限制

可以证明,组合商品定理适用于任何一组相对价格同步变动的商品。如存在着多个商品组合都符合这一定理,则有可能出现不止一种这样商品的现象(如在食物、服装等上的支出)。因此我们推广成以下定义:

定义

组合商品。组合商品是所有的商品价格同步变动的一组商品。这些商品可以被看做是一个单一的"商品",消费者要将总支出在其他商品与这一组商品之间进行分配。

这一定义及相关的定理是非常有用的结论,它简化了一些若非如此就无法处理的问题。当然,将它应用于实际问题时还需谨慎,因为它的条件是非常严格的。找到一组价格同步变化的商品很困难,在交叉替代效应较大时,对严格成比例的条件稍有背离,就可能导致组合商品定理的失效。在本章的拓展部分,我们将介绍一些方法,用来处理几种商品价格的变动毫不相干的情形。

例 6.3

作为一种组合商品的房屋费用

假设某人从三种商品中获取效用:食物(x),以每百平方英尺计算的房屋(y),以用电量计算的家庭服务(z)。

如果此人的效用由三种商品的 CES 函数给出

$$\text{效用} = U(x,y,z) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \tag{6.31}$$

用拉格朗日法计算三种商品的需求函数得出

---

① 组合商品的概念是由 J. R. 希克斯在《价值与资本》中提出的[John Hicks, *Value and Capital* (Oxford: Oxford University Press, 1939), pp. 312—313]。定理的证明基于这样的结论,即为使效用最大化,当 p_2-p_n 按比例同步变化时,$x_2\cdots x_n$ 的边际效用之比必须保持不变。因此,n 种商品的问题就可以简化成一个二维的问题,即 x 的边际效用与 y 的边际效用之比与"价格比"p_1/t 相等。

$$x = \frac{1}{p_x + \sqrt{p_x p_y} + \sqrt{p_x p_z}}$$

$$y = \frac{1}{p_y + \sqrt{p_y p_x} + \sqrt{p_y p_z}}$$

$$z = \frac{1}{p_z + \sqrt{p_z p_x} + \sqrt{p_z p_y}} \tag{6.32}$$

设初始值 $I = 100, p_x = 1, p_y = 4, p_z = 1$,则需求函数值可得

$$x^* = 25$$

$$y^* = 12.5 \tag{6.33}$$

$$z^* = 25$$

因此,此人在食物上的支出为25,在与住房相关的需求上花费75。假设房价(p_y)与家庭服务价格(p_z)一直同步变化,我们就可以用初始价格来定义"组合商品"住房(h)为

$$h = 4y + 1z \tag{6.34}$$

我们这里仍随意地定义房屋初始价格(p_h)为1,则最初消费房屋的面积简单地说就是在 h 上的总支出

$$h = 4(12.5) + 1(25) = 75 \tag{6.35}$$

进一步看,由于 p_y 与 p_z 总是同步变动,p_h 也总是与这些价格相关

$$p_h = p_z = 0.25p_y \tag{6.36}$$

利用这一信息,可计算出作为 I、p_x 与 p_h 函数的对 x 的需求函数

$$x = \frac{I}{p_x + \sqrt{4p_x p_h} + \sqrt{p_x p_h}} = \frac{I}{p_y + 3\sqrt{p_x p_h}} \tag{6.37}$$

像以前一样,初始时 $I = 100, p_x = 1, p_h = 1$,所以 $x^* = 25$。由于这里在房屋上的花费代表除食物外的"所有其他消费",因此可从预算约束中容易地算出房屋的花费为 $h^* = 75$。

房屋成本的上升。如果 y 与 z 的价格成比例地提高到 $p_y = 16, p_z = 4$(p_x 仍为1),p_h 则也将上升为 $p_h = 4$。现在按式6.33计算的对 x 的需求下降为

$$x^* = \frac{100}{1 + 3\sqrt{4}} = \frac{100}{7} \tag{6.38}$$

对房屋的购买量将由下式给出

$$p_h h^* = 100 - \frac{100}{7} = \frac{600}{7} \tag{6.39}$$

或,由于 $p_h = 4$

$$h^* = 150/7 \tag{6.40}$$

注意,这是由等式6.32三种商品的最初需求函数得到的房屋准确的消费量。由 $I = 100, p_x = 1, p_y = 16, p_z = 4$,可解出

$$x^* = 100/7$$

$$y^* = 100/28 \tag{6.41}$$

$$z^* = 100/14$$

因此,组合商品"房屋"消费的总数量(按式6.34计算)为

$$h^* = 4y^* + 1z^* = 150/7 \tag{6.42}$$

因此，不论是考察 x、y、z 三种商品需求的选择，还是仅考察 x 与组合商品两者之间的选择，所得到的对价格变化的反应都是一样的。

请回答：为什么式 6.37 对 x 的需求函数仍可保证效用最大化？为什么经过式 6.36 表示的替代后，拉格朗日约束下的最大化问题仍保持不变？

6.6 家庭生产的产品成分与隐含价格

到目前为止，我们在本章讨论的焦点主要集中在经济学家所了解到的商品之间的关系上，而对这些关系的了解，是经济学家通过观察在市场价格发生变化时的消费者选择商品的行为也随之变化而获得的。从某种意义上说，这种分析回避了在饮食中为什么咖啡与奶油要配合食用而鱼与鸡可互相替代的中心问题。为对此类问题作更深入的探讨，经济学家开始研究家庭内部的消费活动。也就是说，为研究这些家庭活动对商品市场的影响，这些经济学家已探索了诸如父母照看孩子、自己做饭、自己动手建造等的模型。在这一节里，我们简要地回顾一些模型。主要目的在于说明这种方法对传统选择理论的影响。

6.6.1 家庭生产模型

大多数的家庭生产模型的出发点是假设消费者不是直接从市场上购买的商品中获得效用（如我们到目前为止所一直假设的那样），而是当买来的商品与消费者投入的时间结合起来时才产生效用。从这一观点出发，生牛肉、生土豆没有效用，烹制成土豆烧牛肉才有效用。所以，只有从个人对土豆烧牛肉的偏好以及隐含的他“生产”土豆烧牛肉的“技术水平”，才能正确分析他在市场上购买土豆和牛肉的行为。

用正式术语表示，假设与以前一样，市场上有 x，y，z 三种商品可供某消费者购买。购买这些商品并不提供直接效用，但消费者可以将三者结合，在家中生产出 a_1 商品或 a_2 商品来。这一家庭生产的工艺可由生产函数 f_1 与 f_2 表示（参见第 7 章对生产函数概念的详细讨论）。因此有

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1(x, y, z) \\ a_2 &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \tag{6.43}$$

并且有

$$\text{效用} = U(a_1, a_2) \tag{6.44}$$

消费者的目标是在生产条件的约束与预算约束下，选择 x，y，z 的组合使其效用最大化。消费者预算约束为[①]

① 通常家庭生产理论还注重研究消费者将时间分配于生产或在市场中的工作上。在第 16 章中我们会看到几个这种类型的简单模型。

$$p_x x + p_y y + p_z z = I \tag{6.45}$$

虽然我们不准备详细讨论从这个一般模型中所得出的结论，但有两点需要提及：第一，模型有助于阐明商品间关系的市场性质。只要给出详细的数据，家庭的"生产函数"就是完全可以计量分析的。那么，家庭就可被看做是个"多产品"公司，经济学家研究这种生产的方法有很多。

家庭生产模型的第二个要点是与家庭生产商品 a_1 与 a_2 相联系的隐含价格或"影子"价格的概念。由于要消费更多的 a_1，就要使用更多的 x、y、z，这对于 a_2 的消费来说，就意味着发生了一个机会成本。如某人为生产更多的面包，需要把原来用于生产纸托蛋糕（cupcake）的一部分面粉、牛奶与鸡蛋投入到面包的生产上，不仅如此，由于受式 6.41 的预算约束所限，此人还得改变购买这些商品的相对份额。因此，为能多消费面包，必须放弃一些蛋糕，这样，面包就有了以蛋糕数量度量的影子价格。这种隐含的价格不仅反映了生产面包原材料的市场价格，同时还反映家庭生产的技术水平，在更复杂的模型中，甚至还反映生产两种商品所需投入的相应时间。但是在开始介绍这个隐含价格概念时，我们使用一个最简单的模型来说明。

6.6.2 线性有效成分模型

K. J. 兰开斯特（K. J. Lancaster）首次提出一个非常简单的家庭生产模型用于考察商品的内在"有效成分"①。在这一模型中，商品的有效成分为消费者提供效用，每一种商品包含一组固定数量的有效成分。如果我们只考虑各种食物商品所提供的热量（a_1）与维生素（a_2），那么该模型假设，效用就是这些热量与维生素的函数，消费者购买这些商品仅仅是为了获得这些商品所提供的热量与维生素。用数学方法表示，此模型假设式 6.39 的"生产"函数可有下列简单形式

$$\begin{aligned} a_1 &= a_x^1 x + a_y^1 y + a_z^1 z \\ a_2 &= a_x^2 x + a_y^2 y + a_z^2 z \end{aligned} \tag{6.46}$$

a_x^1 为每单位 x 商品所含的热量，a_x^2 为每单位 x 商品所含的维生素量，其余依此类推。在这一形式的模型中，没有实际的家庭"生产"。决策的关键问题是在给定的食物预算约束下，如何选择各种食品的数量，以达到热量与维生素的最优组合。

6.6.3 预算约束的说明

在我们开始考察有效成分模型下的选择理论时，首先解释一下预算约束。在图 6.2 中的射线 Ox 为随 x 不断增加而得到的 a_1 与 a_2 的各种组合。由于在有效成分模型中，假设生产技术是线性的（式 6.42），所以这些 a_1 与 a_2 的组合成为一条直线，虽然在更复杂的家庭生产模型中并非一定如此。同样地，射线 Ox 与 Oz 分别是可能购买的各种数量的 y 与 z 为消费者提供的 a_1 与 a_2 的有效成分的数量。

如果某人将全部收入都用来购买 x，预算约束（式 6.45）允许他对 x 的购买为

$$x^* = \frac{I}{p_x} \tag{6.47}$$

① 参见 K. J. Lancaster "A New Approach to Consumer Theory", *Journal of Political Economy* 74 (April 1966): 132—157。

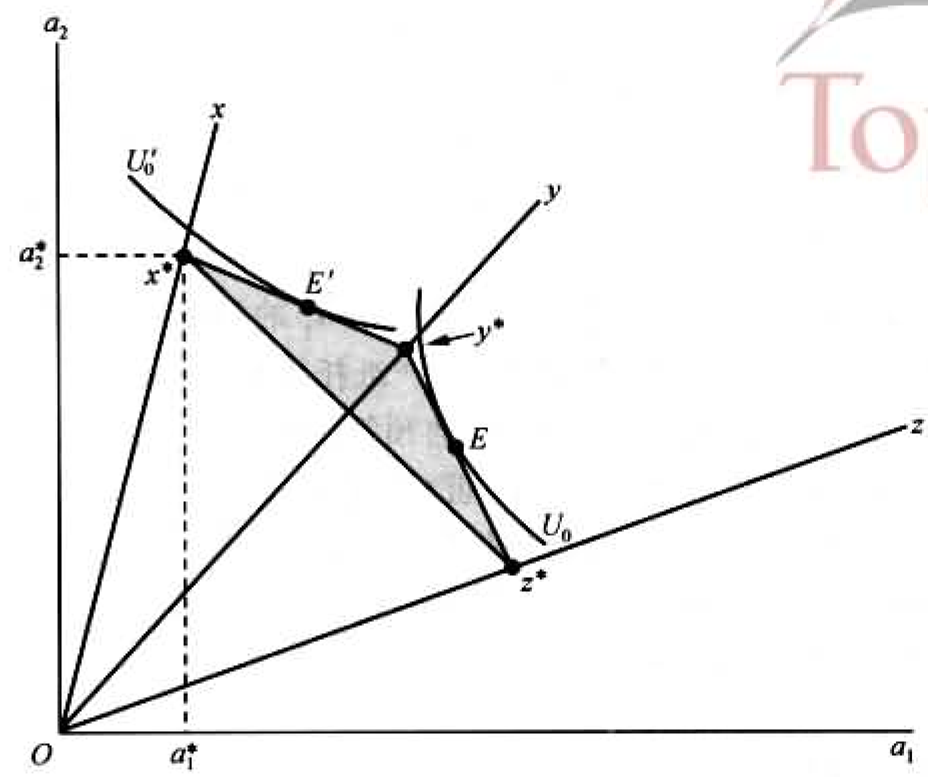


图 6.2　有效成分模型中的效用最大化

点 x^*, y^* 与 z^* 分别为仅购买 x, y 与 z 时可得到的有效成分 a_1 和 a_2 的数量。阴影部分是可以购买的混合商品下所有可能的组合。某些人在 E 点达到效用最大化，另一些人则可能在 E' 点达到效用最大化。

由此会产生

$$a_1^* = a_x^1 x^* = \frac{a_x^1 I}{p_x}$$

与

$$a_2^* = a_x^2 x^* = \frac{a_x^2 I}{p_x} \tag{6.48}$$

此点就是图 6.2 中 Ox 线上的 x^* 点。同样地，y^* 与 z^* 分别为全部收入都花费在 y 与 z 上时 a_1 与 a_2 的组合。

既购买 x 又购买 y（在给定预算约束下）所得到的 a_1 与 a_2 的组合由 x^* 与 y^* 的连线表示。① 同样地，x^* 与 z^* 的连线表示既购买 x 又购买 z 所得到的 a_1 与 a_2 的组合，y^* 与 z^* 的连线是既购买 y 又购买 z 时所得到的 a_1 和 a_2 的组合。而阴影部分的面积 $x^*y^*z^*$ 代表同时从市场上购买三种商品的各种可能的组合。

6.6.4　角点解

从图 6.2 中可观察到一个显而易见的事实——追求效用最大化的消费者绝不会三种商品每样

① 从数学上来看，假设预算的一部分 α 花费在 x 上，$(1-\alpha)$ 花费在 y 上，则，

$$a_1 = \alpha a_x^1 x^* + (1-\alpha) a_y^1 y^*$$

$$a_2 = \alpha a_x^2 x^* + (1-\alpha) a_y^2 y^*$$

直线 x^*y^* 是 α 在 0 与 1 之间变化的轨迹。直线 x^*z^* 与 y^*z^* 画法类似，这样就得到了三角形 $x^*y^*z^*$。

都买。只有右上方向的 $x^*y^*z^*$ 三角形的边界（图上是 x^*y^* 和 y^*z^* 两条边）上的点表示此人在收入与市场价格给定的情况下所能得到的 a_1 与 a_2 的最大组合。消费者如偏好 a_1，则会有类似于 U_0 的无差异线，并选择如 E 那样的点作为效用最大化的解，在这一点只消费了 y，z 两种商品。类似地，如消费者的无差异曲线 U_0' 代表其偏好，则消费者将选则 E'点并仅消费 x 与 y 两种商品。因此，属性模型预测，消费者完全不购买某种商品是很普遍的情况，特别是当市场上可供选择的商品种数（这里为3）多于消费者乐于购买的商品种数（这里为2）时，更是如此。如果收入、价格或偏好发生变化，消费模式也会立即发生变化。以前消费的商品现在可能停止购买，而以前被忽略的商品现在的购买量可能会大增。这是式 6.42 固有的线性消费模式所产生的直接结果。在具有更多替代性假设的家庭生产模型中，这种非连续型的反应则少见多了。

小　结

在本章中，我们应用效用最大化的选择模型来考察各种消费品之间的关系。虽然这些关系有可能非常复杂，但我们的分析提供了多种对这些关系进行分类与简化的方法：

- 当仅有两种商品时，一种商品价格（如 p_y）的变化所产生的替代效应与收入效应，通常与另一种商品（x）的需求变动方向相反。因此 $\partial x/\partial p_y$ 的符号不能确定——这是由于替代效应为正，而收入效应为负所造成的。
- 两种以上商品的需求关系可按两条思路进行分析：对于两种商品 x_i 与 x_j 来说，如果 $\partial x_i/\partial p_j>0$，则两种商品是“总替代品”，如果 $\partial x_i/\partial p_j<0$，则两种商品为“总互补品”。遗憾的是，由于这些价格效应中还包含进了收入效应，而它们并不一定完全对称。也就是说，$\partial x_i/\partial p_j$ 不一定与 $\partial x_j/\partial p_i$ 相等。
- 仅考虑价格变化后所产生的替代效应，便可消除上述含混不清的情况，因为替代效应是对称的：$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{u=\text{常数}}=\left.\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right|_{v=\text{常数}}$。如$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{u=\text{常数}}>0$，则两种商品是“净替代品”；如$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{u=\text{常数}}<0$，则两种商品为“净互补品”。希克斯“第二需求定律”表明，净替代品更为普遍。
- 如果一组商品的价格总是一起变化，在这些商品上的消费就可以看成是消费了一个“组合商品”，其价格由“组合商品”价格成比例变化的大小来决定。
- 另一种研究方向通过考虑买来的商品在家庭内部的“生产”过程来分析商品之间的需求关系，由此引出了决定效用函数的属性模型。这为我们认识商品之间需求的内在关系开辟了一条新的道路。

练 习 题

6.1 Heidi 从羊奶（m）与果馅卷（s）两种商品中获取效用，其效用函数为

$$U(m,s)=m\cdot s$$

a. 说明羊奶价格的上升不会改变 Heidi 对

果馅卷的购买量，即证明 $\partial S/\partial P_m = 0$。

b. 再证明 $\frac{\partial m}{\partial p_s} = 0$。

c. 用斯拉茨基方程和净替代的对称性证明，a、b 两问中涉及的收入效应影响是相等的。

d. 用 m 和 s 的马歇尔需求函数证明 c 的结论。

6.2 困难时期 Burt 仅买劣等威士忌与果冻度日。对于 Burt 来说虽然威士忌与果冻在通常的意义上属于希克斯替代品，但威士忌是具有吉芬悖论的劣等品。从直观上解释为什么在威士忌价格上升的情况下，果冻的购买量一定会减少。也就是说，这两种商品也必定是总互补品。

6.3 Donald 是个很节俭的大学毕业班学生，仅消费咖啡(c)与黄油面包(bt)两种商品。他在学校咖啡厅购买这些食物，并总是按一片面包配两小块黄油的比例吃。这样，他正好将那点可怜的津贴的一半用在咖啡上，另一半用在黄油面包上。

a. 在这一问题中，黄油面包可被看做是一种组合商品。怎样根据黄油的价格(p_b)与面包的价格(p_t)求出黄油面包的价格？

b. 解释为什么 $\partial c/\partial p_{bt} = 0$。

c. $\partial c/\partial p_b$ 与 $\partial c/\partial p_t$ 是否也等于 0？

6.4 Sarah 女士没有小轿车，只能靠乘公共汽车、火车或飞机旅行。她的效用函数如下

$$\text{效用} = b \cdot t \cdot p$$

这里每一个字母代表一种特定旅行方式的里程数。假设乘火车旅行与乘公共汽车旅行的价格比(p_t/p_b)固定不变。

a. 怎样定义陆路运输的组合商品？

b. Sarah 需要在陆地运输工具(g)与航空运输工具(p)中作出选择，试描述她的最优化问题。

c. Sarah 对 g 与 p 的需求函数是什么？

d. 一旦 Sarah 确定了花费在 g 上的货币额，她会怎样将这些货币在 b 与 t 之间进行分配？

6.5 假设某人消费 x_1, x_2 与 x_3 三种商品。x_2 与 x_3 是同类商品（如低档饭馆和高档饭馆的用餐），并且 $p_2 = kp_3, k < 1$，即商品间价格的比例关系不变。

a. 说明 x_2 与 x_3 可被看做是一种组合商品。

b. 假设每一单位的 x_2 与 x_3 都具有一个交易成本 t（见练习题 6.6 中的例子）。这种交易成本将怎样影响 x_2 与 x_3 价格的关系？这种影响将怎样随 t 的不同而变化？

c. 假设当 t 增长时，收入补偿性地同步增长以维持总效用不变。此时 t 的增长如何影响在组合商品 x_2 与 x_3 上的支出？组合商品定理是否严格地适用于此比例？

d. 在 t 上的收入补偿性增长是如何影响在组合商品上的总支出被分配于 x_2 与 x_3 之间的比例的？

[对此问题更深入的讨论参见 T. E. Borcherding and E. Silberberg, "Shipping the Good Apples Out: The Alchian and Allen Theorem Reconsidered", *Journal of Political Economy* (February 1978): 131—138.]

6.6 运用练习题 6.5 的结论解释下述现象：

a. 很难在华盛顿州买到高质量的苹果或在佛罗里达州买到新鲜的橘子。

b. 支付高额育儿费的人们比不支付这种费用的人们更有可能在价格昂贵的饭店用餐。

c. 珍惜时间的人们比不珍惜时间的人们更有可能乘协和式飞机。

d. 人们更有可能在购置贵重商品而不是便宜商品时讨价还价。

(注意:b 与 d 现象可能是仅有的两个经济学家破获神秘谋杀案件的基础,参见 Marshall Jevons, *Murder at the Margin and The Fatal Equilibrium*。)

6.7 在一般情况下,非补偿性的交叉价格效应是不相等的。也就是说

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \neq \frac{\partial x_j}{\partial p_i}$$

运用斯拉茨基方程的一般形式证明,如果不管商品的相对价格如何变化,消费者总是把收入按固定比例支付在每种商品上时,这些效应则成为相等的了。(这是练习题 6.1 的推广)

6.8 在第 5 章中,我们讲过某一种商品价格变化引起的消费者剩余的变化,可以通过支出函数或者补偿性需求曲线来计算。本题要求你将价格的变化推广至两种(或多种)商品。

a. 假设某人共消费 n 种商品,其中两种商品的价格(设为 p_1,p_2)上升了,如何用支出函数计算这个变动造成的补偿性差异(CV)?

b. 如果假设先有一个价格上升,再有另一个价格上升,则福利损失可以用补偿性需求曲线的图形表示,请画图并说明之。

c. 在 b 中,哪种物品先涨价对结论有影响吗?解释之。

d. 一般来说,下述两种情况哪种 CV 会大一些,是两种物品是净替代关系,还是净互补关系?还是说 CV 与此无关?

6.9 如果一个效用函数能被这样表示

$$U(x,y) = U_1(x) + U_2(y)$$

其中 $U_i' > 0, U_i'' < 0$ 并且 U_1 与 U_2 可以不相同,则称之为可分拆的效用函数。

a. 可分拆的性质与 U 的交叉偏导数 U_{xy}'' 有什么联系?现实中什么情况下会出现这种情形?给出一种直观上的解释。

b. 证明如果效用函数可分拆,则每种商品都不可能是劣等品。

c. 可分拆的性质能否保证 x,y 是总替代品或者是总互补品?解释之。

d. 用柯布-道格拉斯函数说明,对效用函数作单调映射不能保持其可分拆的性质。

说明:可分拆函数将在本章扩展部分有更详细的讲述。

6.10 例 6.3 由含有三种商品不变替代弹性效用函数

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$$

计算出了这三种商品的需求函数。

a. 运用式 6.32 中 x 的需求函数来确定 x 与 y 及 x 与 z 是总替代品还是总互补品。

b. 你怎样才能确定 x 与 y 及 x 与 z 是净替代品还是净互补品?

推荐阅读文献

Borcherding, T. E., and E. Silberberg, "Shipping the Good Apples Out—The Alchian-Allen Theorem Reconsidered". *Journal of Political Economy* (February 1978): 131—138.

该文讨论了需求理论中三种商品之间的关系,还请参见练习题 6.5 与 6.6。

Hicks, J. R. *Value and Capital*, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1946. Chaps. I-III and related appendices.

该书证明了组合商品理论,并第一次讨论了净替代与净互补问题。

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. New York Oxford University Press, 1995.

该书详细讲述了补偿性交叉价格弹性的对称性质在各种需求理论中的运用。

Rosen, S. "Hedonic Prices and Implicit Markets". *Journal of Political Economy* (January/February 1974): 34—55.

该文用图形与数学知识很好地讨论了消费者理论的特性问题及特性中的"市场"概念。

Samuelson, P. A. "Complementarity—An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory". *Journal of Economic Literature* (December 1977): 1255—1289.

该文评论了多种互补定义,并说明了它们之间的联系。这包括直观的图形和详细的数学附录。

Silberberg, E., and W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston: Irwin-McGraw-Hill, 2001.

该书很好地讨论了支出函数,并运用间接效用函数说明组合商品理论与它们的一些结论。

扩　展

对需求关系的简化和二步预算模型

在第 6 章,我们看到了效用最大化的条件在一般情况下几乎无法对各种可能发生的情况作任何限制。除了净替代效应必须具有对称性外,商品之间的任何关系都可以和我们的理论相容。这样的话,情况就太不妙了。现实中可能购买的商品成千上万,经济学家想要研究现实世界中人们的行为时,这样的理论提供不了多少有意义的结论。

一般来说化简需求关系有两种方法:第一种就是前面说的组合商品理论。当一类商品价格按比例同步变动时,我们可以将其看成一个商品处理。但是有时经济学家需要研究同一类商品相对价格的变动造成的影响(比如各种能源的相对价格变动),这个方法就行不通了。另一种办法是,假设消费者消费的决策分两步进行:第一步先决定收入分配给各大类商品(食品、服装等)多少比例。然后在给定的预算约束下,在每一子类里购买使得效用最大化。在第二步的分析中,我们只需要知道各个商品的相对价格比例就可以了。这样,每次只需讨论一类商品的消费决策。此即所谓"二步"预算模型。在此扩展章节中,我们先简单介绍其理论,再用经验数据对它进行验证。

E6.1　二步预算模型理论

简单地说,二步预算模型由这样一个问题引出:是否存在一个分类,使得全部商品被划分为 m 个互不相交的子类(记为 $r_1, r_2, \cdots, r_m$),每一类有一个独立的预算 $I_r, r=1,2,\cdots,m$,使得每种商品的需求函数只和同一类商品的价格以及这类商品的预算有关?即,只要我们把商品作某种划分,使得每种商品的需求函数可以写成

$$x_i(p_1 \cdots p_n, I) = x_{i \in r}(p_{i \in r}, I_r) \quad r = 1,2,\cdots,m \tag{i}$$

那么我们就可以考虑在下面两步决策中分别使效用最大化,即

$$V^*(p_1,\cdots,p_n,I_1,\cdots,I_m) = \max_{x_1,\cdots,x_n}\left[U(x_1,\cdots,x_n)\right.$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in r} p_i x_i \leq I_r, r = 1, m \Big] \qquad \text{(ii)}$$

和

$$\max_{I_1, \cdots, I_m} V^* \text{ s.t. } \sum_{r=1}^{m} I_r \leq I$$

而之前考虑的效用最大化模型是这样的

$$\max_{x_i} U(x_1, \cdots, x_n) \text{ s.t. } \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \leq I \quad \text{(iii)}$$

这两式将得到完全相同的结果而不需任何额外的条件,因为(ii)式不过是(iii)式的一种复杂一些的表达形式。但是为了保证效用函数具有(i)式的形式,必须有附加条件。直观上来看,这样的条件应该是任何一种商品价格的改变不影响其他类别中所有商品的购买。在练习题6.9中,我们看到可分拆的效用函数就具有这样的性质,但是可分拆的性质太过特殊了。我们应该从数学的角度,找到一个能保证效用函数能够按类别划分的一个一般化的,“弱”一些的限制条件(参见 Blackorby, Primont, and Russell, 1978),当然这样的条件很不直观。但是,对于希望解析消费者消费决策(或者更为重要的,企业运作的各种决策)的经济学家而言,这样的简化工作必不可少。下面我们再来看几个被实际应用过的化简方法。

E6.2 组合商品定理的关系

很可惜,上述的两种方法都不能让人完全满意。组合商品理论要求一组商品的相对价格不随时间变化,而这个假定在相当多的历史时期中不成立。而二步预算模型中的(i)式要求一种商品的价格变动不影响其余类别的商品消费,这又是一个很强的条件,而且观察到的数据似乎也并不支持这个假设(参见 Diewert and Wales, 1995)。

经济学家尝试过设计一种更精细的、集成性地加总各种商品的模型。比如 Lewbel(1996)曾对组合商品模型作了推广,使之在一组商品内的相对价格有明显变化的情况下仍适用。他用这个推广的模型分析了美国消费者的消费时,将商品划分为六个类别(服装、食品、住房、交通、医疗、娱乐)。他的计算表明这个模型比二步预算模型准确得多。

E6.3 齐次方程和能源需求

这种简化多种商品需求关系的思路是,假设某一子类提供的效用函数关于这一类商品是齐次的,并且独立于其他种类商品的数量。这就是 Jorgenson, Slesnick 和 Stoker(1997)在研究美国能源消费问题时用的办法。他们假设对某种能源消费数量与花费在能源上的总钱数成比例,这样他们就可以集中研究最感兴趣的问题——评估各种能源的需求价格弹性。他们的结论是,大部分能源(如电力、天然气、汽油等)的需求函数需求弹性都相当大,而对价格最敏感的是电力需求函数。

参考文献

Blackorby, Charles, Daniel Primont, and R. Robert Russell. *Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications.* New York: North Holland, 1978.

Diewert, W. Erwin, and Terrence J. Wales. “Flexible Functional Forms and Tests of Homogeneous Separability”. *Journal of Econometrics* (June 1995): 259—302.

Jorgenson, Dale W., Daniel T. Slesnick, and Thomas M. Stocker. “Two-Stage Budgeting and Consumer Demand for Energy”. In Dale W. Jorgenson, ed., *Welfare, Volume 1: Aggregate Consumer Behavior*, pp. 470—510. Cambridge (MA): MIT Press, 1997.

Lewbel, Arthur. “Aggregation Without Separability: A Standardized Composite Commodity Theorem”. *American Economic Review* (June 1996): 524—543.

[illegible]

§6.3 [illegible]

[illegible]

参考文献

Blackorby, Charles, [illegible], and R. [illegible]. [illegible] *Duality, Separability, and Functional Structure* [illegible]. [illegible], 1978.

[illegible] "[illegible] and [illegible] in Homogeneous [illegible] Separability", *Journal of [illegible]* (1959), [illegible].

Jorgenson, Dale W., Daniel T. Slesnick, and Thomas M. Stoker. "Two-Stage Budgeting and Consumer Demand for Energy". In Dale W. Jorgenson, ed., *Welfare*, Volume 1: *Aggregate Consumer Behavior*, pp. [illegible]. Cambridge, MA: MIT Press, 1997.

Lewbel, Arthur. "Aggregation Without Separability: A Standardized Composite Commodity Theorem", *American Economic Review* (June 1996), 524–543.

§6.4 组合商品定理的关系

[illegible] (Lewbel 1996) [illegible]

第3篇

生产与供给

这一部分我们将考察商品的生产和供给。将投入转化为产出的部门就是厂商。它们可能是大机构(像通用汽车、IBM或者美国国防部),也可能是小厂商(像"Mom and Pop"超市或者个体户)。尽管它们追求的目标可能不同(IBM关注利润最大化,而以色列的农场力求使其成员处境尽可能地好),但是所有的厂商在生产过程中都要做一些基本的决策。第三部分的目的就是逐次介绍并分析这些决策的方法。

第7章我们考察建立投入产出模型的方法。我们引入**生产函数(production function)**的概念,生产函数是从复杂的现实生产中抽象出来的一个很有用的概念。我们重点关注生产函数两个可度量的方面:规模报酬(即所有投入增加时产出如何扩张)和替代弹性(即在产出不变时,一种要素投入被其他要素投入替代的难易程度)。我们也将简要介绍技术进步如何在生产函数中体现出来。

在第8章中,我们用生产函数来讨论成本函数。我们假设所有的厂商尽可能以最低的成本生产,这一假设允许厂商成本函数的发展。在这一章里,我们还要关注

短期成本和长期成本的差别。

第9章研究厂商的供给决策。当然，我们还要沿用一贯的假设：厂商关于投入和产出的一切决策均以利润最大化为目标。这一章包括寻求利润最大化的厂商供给行为的基本模型，而这个模型在以后的章节中都会用到。

第 7 章　生产函数

任何厂商的主要活动都是将投入转化为产出。因为经济学家关心的是为了达到这个目标厂商所作的决策，但又想避免讨论许多复杂的技术问题，所以他们决定建立一个抽象的生产模型。在此模型中，投入和产出的关系用生产函数的形式给出

$$q = f(k, l, m, \cdots) \tag{7.1}$$

其中，q 表示厂商在一定时期内某种商品的产出量[①]，k 表示这段时期内使用的机器设备量（亦即资本量），l 表示投入劳动的小时数，m 表示使用的原材料[②]，省略号表示其他可能影响生产过程的变量。对任何可能的一组投入组合，方程 7.1 可以用来提供将这些投入最佳地转化为产出的技术解决方案。

7.1 边际生产力

在这一小节中我们将研究由一种投入要素的变化带来的产出的变化。为了达到这个考察目标（同样也为了达到本书中大多数其他考察目标），使用下面定义的简化的生产函数是极为方便的：

定义

生产函数。厂商生产某种商品的**生产函数（production function）**，q，

$$q = f(k, l) \tag{7.2}$$

表示对于可供选择的资本量（k）和劳动量（l）的组合，能够生产出的最大产量。

使用这个简化形式的目的是我们可以只分析两种投入品。使用术语**资本（capital）**和**劳动（labor）**仅是为了方便。类似地，将我们的讨论扩展到包括更多投入品投入的情形是很容易的，偶尔也确实需要这么做。但是，最重要的是，将讨论限制于两种要素投入将是极为有益的，因为我们可以在

① 此处我们用小写的 q 表示一个厂商的产出量，我们保留大写的 Q 用以表示整个市场的产出量。通常，我们假设一个厂商只生产一种商品，并将在一些注脚和课后习题中讨论生产多种产品的厂商。

② 实证研究中，经常忽略原材料，产出 q 以附加值来计算。

二维图表上表示出这些投入。

7.1.1 边际实物产量

为了研究单一投入的变化，我们将边际实物产量定义如下：

定义

边际实物产量。一种投入的**边际实物产量**（**marginal physical product**）是在保持其他投人不变时，增加一单位该投入，产出的增加量。用数学表示，有

$$\begin{aligned} \text{资本的边际实物产量} &= MP_k = \frac{\partial q}{\partial k} = f_k \\ \text{劳动的边际实物产量} &= MP_l = \frac{\partial q}{\partial l} = f_l \end{aligned} \tag{7.3}$$

需要注意的是，边际产品的数学定义使用的是偏导数，因而它恰当地反映了以下事实，即当标定的要素量变化，而其他要素量不变时，所有的其他投入品是不变的。例如，设想一个农场主多雇用了一个劳动力来收割农作物，但保持其他投入不变，这个劳动力的额外产出就是他的边际实物产量。用实物量予以测度，就是多少蒲式耳小麦、多少箱柑橘，或多少根莴苣。例如，我们可以看到，一个农场的 50 个工人一年可以生产 100 蒲式耳小麦；而耕地相同和设备相同的情况下，51 个工人能生产 102 蒲式耳小麦。所以第 51 个工人的边际实物产量就是每年 2 蒲式耳小麦。

7.1.2 边际生产力递减

我们或许可以认为，一种投入的边际实物产量取决于这种投入的使用量。例如，在某块土地上（当机器设备、化肥等方面的数量保持不变时）劳动不能无限制地增加，否则最终将使生产力下降。在数学上，边际生产力递减的假设表现为生产函数的二阶偏导数为负

$$\begin{aligned} \frac{\partial MP_k}{\partial k} &= \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = f_{kk} = f_{11} < 0 \\ \frac{\partial MP_l}{\partial l} &= \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = f_{ll} = f_{22} < 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

边际生产力递减假设最初是由 19 世纪的经济学家托马斯·马尔萨斯提出的，他担心高速增长的人口会导致较低的劳动生产力。他对人类的悲观预测致使经济学被称为“悲观的科学”，但是生产函数的数学形式告诉我们这是一种无谓的担心。劳动随时间变化的边际生产力不仅取决于劳动如何增长，也取决于其他投入（比如资本）如何增长。也就是说，我们必须关注 $\partial MP_l/\partial k = f_{lk}$。大多数情况下，$f_{lk} > 0$，因此当 l 和 k 均增加时，边际生产力递减并不是必然的。事实上，从马尔萨斯那时起，劳动生产力是显著上升的，因为增加的资本投入抵消了边际生产力递减的影响。

7.1.3 平均实物生产力

在通常的运用中，**劳动生产力**（**labor productivity**）这一术语常用来指**平均生产力**（**average pro-**

ductivity)，当我们说某一特定产业已经历了生产力的增长时，这意味着每单位劳动投入的产出已经增加。虽然平均生产力的概念在理论经济学的讨论中没有边际生产力的概念重要，但是，在实证研究中，它却受到了普遍关注。由于平均生产力很容易被测度(比如，每小时劳动投入所生产的若干蒲式耳小麦)，所以它经常被作为一个衡量效率的指标。我们将劳动的平均产量 AP_l 定义为

$$AP_l = \frac{\text{产出}}{\text{投入的劳动量}} = \frac{q}{l} = \frac{f(k,l)}{l} \tag{7.5}$$

注意，AP_l 也取决于资本的投入水平。在本章的最后讨论技术进步的测度时，我们会发现这个结论非常重要。

例 7.1

两种要素投入的生产函数

假设某一特定时期内苍蝇拍的生产函数为

$$q = f(k,l) = 600k^2l^2 - k^3l^3 \tag{7.6}$$

为了得到此函数中劳动(l)的边际生产力和平均产量函数，我们就必须为另一种投入即资本(k)设定一个值，假定 $k=10$，于是生产函数变为

$$q = 60\,000l^2 - 1\,000l^3 \tag{7.7}$$

边际产量。边际产量函数如下

$$MP_l = \frac{\partial q}{\partial l} = 120\,000l - 3\,000l^2 \tag{7.8}$$

该函数随 l 的增加而减小，最终变为负数，这时意味着 q 达到最大值。设 MP_l 等于 0，

$$120\,000l - 3\,000l^2 = 0 \tag{7.9}$$

得

$$40l = l^2 \tag{7.10}$$

或者

$$l = 40 \tag{7.11}$$

在这一点 q 达到最大值。当劳动投入每期超过 40 单位时，总产量实际是降低的。例如，当 $l=40$ 时，式 7.7 表明生产 $q=32\,000\,000$ 个苍蝇拍，而当 $l=50$ 时，苍蝇拍总数只有 25 000 000 个。

平均产量。为了得到生产苍蝇拍的平均产量，仍假设 $k=10$，我们用 q 除以 l，得

$$AP_l = \frac{q}{l} = 60\,000l - 1\,000l^2 \tag{7.12}$$

同样地，这也是一条开口向下的抛物线，当

$$\frac{\partial AP_l}{\partial l} = 60\,000 - 2\,000l = 0 \tag{7.13}$$

它达到最大值，此时 $l=30$。当劳动投入等于这个值时，式 7.12 表明 $AP_l=900\,000$，而式 7.8 则表明

MP_l 也是900 000。所以，当 AP_l 达到最大值时，劳动的平均产量和劳动的边际产量是相等的。①

值得注意的是，该例中所显示的总产量与平均产量之间的关系。尽管 40 个工人生产苍蝇拍的总产量(3 200 万个)比 30 个工人生产的多，但是第二种情形下每个工人的人均产出更多。40 个工人每时期人均生产 800 000 个苍蝇拍，而 30 个工人每时期人均生产 900 000 个苍蝇拍。由于资本投入(苍蝇拍的压制机械)根据定义是不变的，所以边际劳动生产力的下降最终导致了每个工人产出水平的下降。

请回答：如果 k 从 10 增加到 11，会对 MP_l 和 AP_l 函数产生什么样的影响？请直观地解释你的结论。

7.2 等产量图和技术替代率

为了阐明生产函数中一种投入对于另一种投入替代的可能性，我们使用**等产量图(isoquant map)**。我们再次使用 $q=f(k,l)$ 形式的生产函数进行研究，并认为其中的资本和劳动恰巧是我们所感兴趣的两种投入的代表。一条等产量线表示生产既定数量产出时 k 和 l 的所有组合。例如，落在图 7.1 中 $q=10$ 曲线上的 k 和 l 的所有组合每时期都能生产 10 单位的产品。于是，这条等产量线记录了这样一个事实，即有许多可以生产 10 个单位产品的可供选择的方法。其中一种方法可用点 A 表示：我们可以用 l_A 和 k_A 生产 10 单位的产品。但我们也可能倾向于使用较少的资本和较多的劳动，因而选择像 B 这样的点。因此，我们对等产量线的定义如下：

定义

等产量线。等产量线(isoquant)表示生产既定产出水平(如 q_0)时 k 和 l 的所有组合。数学上，等产量线表示满足

$$f(k,l) = q_0 \tag{7.14}$$

的 k 和 l 的集合。和无差异曲线相似，在 k-l 平面上有无穷多条等产量线。每条等产量线都表示不同的产量水平。越往东北方向的等产量线所代表的产量越高。这里我们假定每一种要素增加投入都能提高产量。图 7.1 还表示了其他两条等产量线(像 $q=20$ 和 $q=30$)。你可能会注意到等产量线图和第二部分讨论的无差异曲线图有相似之处。它们确实是相似的概念，因为它们都是表示特定函数的“等高线图”。尽管如此，对于等产量线图，这些曲线的标记是可以测度的——每时期 10 单位的产出具有确定的数量含义，不像效用函数那样只表示偏好顺序。因此，相比较于考察效用函数的形状，

① 此结论具有一般性。因为

$$\frac{\partial AP_l}{\partial l} = \frac{l \cdot MP_l - q}{l^2}$$

取最大值时 $l \cdot MP_l = q$ 或者 $MP_l = AP_l$。

经济学家更热衷于研究生产函数的具体形状。

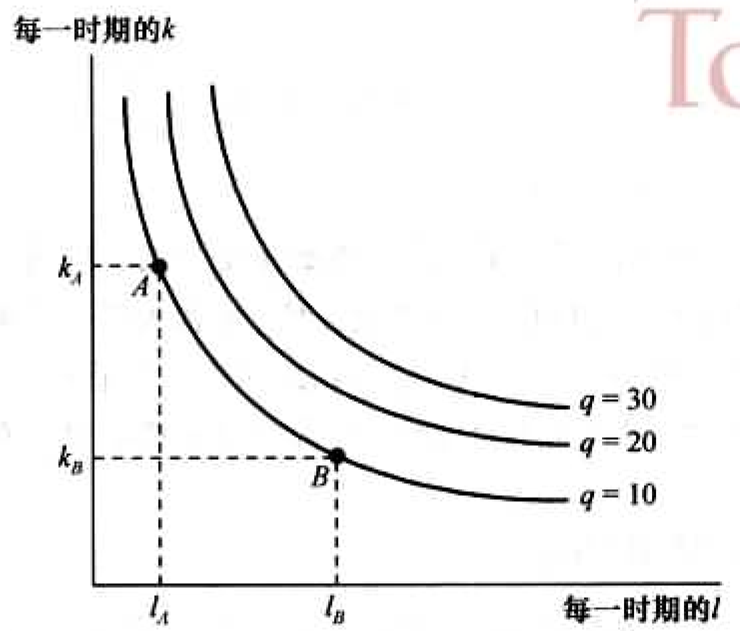


图 7.1　等产量线图

等产量线表示生产既定水平的产出时,可供选择的投入组合。这些曲线的斜率表明保持产出不变时 l 替代 k 的比率。负的斜率被称为(边际)技术替代率(RTS)。在图中,边际技术替代率为正,而且随着劳动的增加,劳动能够替代的资本会递减。

7.2.1　边际技术替代率

等产量线的斜率表明当产出不变时,一种投入如何替换另一种投入。考察斜率可以提供一些关于劳动替代资本的技术可能性的信息。严格的定义如下:

定义

边际技术替代率。边际技术替代率(**marginal rate of technical substitution,** ***RTS***)表示在一条等产量线上保持产出不变时劳动能够替代资本的比率。在数学上,表示为

$$RTS(l\text{ 对 }k) = \left.\frac{-\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\right|_{q=q_0} \tag{7.15}$$

在这个定义中,脚标提醒我们当用 l 替代 k 时,产量保持不变。替代率的具体数值不仅取决于产出水平,还取决于资本和劳动的使用量。其具体数值取决于在等产量线上的哪一点测度斜率。

7.2.2　边际技术替代率和边际生产力

为了考察生产函数的等产量线,我们先证明下面这个结论:l 对 k 的 RTS 等于劳动的边际实物生产力(MP_l)与资本的边际实物生产力(MP_k)的比值。我们首先对生产函数求全微分

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial f}{\partial l}\cdot \mathrm{d}l + \frac{\partial f}{\partial k}\cdot \mathrm{d}k = MP_l\cdot \mathrm{d}l + MP_k\cdot \mathrm{d}k \tag{7.16}$$

上式表明 l 和 k 的微小变化如何对产出产生影响。由于沿着等产量线,$\mathrm{d}q=0$(产出一定),因此

$$MP_l\cdot \mathrm{d}l = -MP_k\cdot \mathrm{d}k \tag{7.17}$$

这就是说，沿着等产量线，由于 l 的微小增加导致的产量的增加被 k 的微小减少所导致的产量减少所平衡。将上式稍作调整，得

$$-\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\right|_{q=q_0}=RTS(l\text{ 对 }k)=\frac{MP_l}{MP_k} \tag{7.18}$$

因此，RTS 等于投入的边际生产力的比率。

方程 7.18 表明，我们实际得到的等产量线的斜率必定是负的。因为 MP_l 和 MP_k 都是非负值（没有厂商选择会减少产出的昂贵的投入），所以 RTS 也是正值（或者为零）。因为等产量线的斜率的值等于负的 RTS，所以没有厂商会在等产量线正的斜率部分组织生产。尽管构建某些生产函数，使其等产量线在某些点上存在正的斜率，在数学上是可能的，但是厂商选择那样的投入在经济学上是没有意义的。

7.2.3 边际技术替代率递减的原因

图 7.1 中的等产量线不仅斜率是负值（它们确实应该是这样的），而且是凸向原点的曲线。沿着任意一条曲线，边际技术替代率都是递减的。当 l 替代 k 的比率较高时，RTS 是较大的正值。这表明如果多增加一单位劳动，就可以节省大量资本。另一方面，已经使用了大量劳动时，边际技术替代率很小。这表明，所追加的额外一单位的劳动力只能替代很少的资本，以保持产量不变。这似乎与边际生产力递减的假设有某种关系。根据公式 7.18 会得出这样的结论：l 增加，同时 k 减少，将导致 MP_k 增大，MP_l 减小，因此 RTS 减小。这一快捷"论证"的问题在于：投入的边际生产力取决于所有要素投入的水平——l 的变化也会影响 MP_k，反之亦然。所以仅从边际生产力递减的假设推断边际技术替代率的假设通常是不可行的。

为了从数学上说明问题，假设 $q=f(k,l)$ 和 f_k、f_l 都为正（即边际生产力为正）。另外，还假设 $f_{kk}<0$ 和 $f_{ll}<0$（即边际生产力递减）。为了证明等产量线凸向原点，我们需要证明 $\mathrm{d}(RTS)/\mathrm{d}l<0$。既然 $RTS=f_l/f_k$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}RTS}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}(f_l/f_k)}{\mathrm{d}l} \tag{7.19}$$

因为 f_l，f_k 是 k 和 l 的函数，我们必须仔细计算这个表达式的微分

$$\frac{\mathrm{d}RTS}{\mathrm{d}l}=\frac{[f_k(f_{ll}+f_{lk}\cdot \mathrm{d}k/\mathrm{d}l)-f_l(f_{kl}+f_{kk}\cdot \mathrm{d}k/\mathrm{d}l)]}{(f_k)^2} \tag{7.20}$$

又因为沿着等产量线 $\mathrm{d}k/\mathrm{d}l=-f_l/f_k$，并且根据杨格定理（$f_{kl}=f_{lk}$），我们有

$$\frac{\mathrm{d}RTS}{\mathrm{d}l}=\frac{(f_k^2f_{ll}-2f_kf_lf_{kl}+f_l^2f_{kk})}{(f_k)^3} \tag{7.21}$$

因为我们假设 $f_k>0$，所以此函数分母为正。因此，如果分子为负，那么整个式子为负；又因为假设 f_{ll} 和 f_{kk} 均为负，所以如果 f_{kl} 为正值则分子就为负值。如果能够假定这一点，就可以证明 $\mathrm{d}RTS/\mathrm{d}l<0$（即等产量线是凸的）。[①]

① 正如我们在第 2 章中所提到的，如果方程 7.21 中的分子为负，那么该函数称为（严格的）拟凹函数。

7.2.4 交叉生产力效应的重要性

直观地看，交叉偏导数$f_{kl}=f_{lk}$是正值是很合理的。如果工人们有更多的资本，他们将有更高的边际生产力。但是，尽管这可能是最典型的例子，但并不说明情况必然如此。因为一些生产函数至少在某一范围内存在$f_{kl}<0$。因此我们假设的"边际技术替代率递减"（一般情况下分析问题都有这一假设）实际上是比某一种要素的边际生产率递减更强的一个假设，它要求一种要素的边际生产率递减得足够快，以至于足够补偿可能出现的负的交叉生产力效应。

例 7.2

递减的边际技术替代率

例 7.1 中，给出苍蝇拍的生产函数是

$$q = f(k,l) = 600k^2l^2 - k^3l^3 \tag{7.22}$$

该生产函数的一般的边际生产力是

$$\begin{aligned} MP_l &= f_l = \frac{\partial q}{\partial l} = 1\,200k^2l - 3k^3l^2 \\ MP_k &= f_k = \frac{\partial q}{\partial k} = 1\,200kl^2 - 3k^2l^3 \end{aligned} \tag{7.23}$$

注意，这两个函数值的大小都取决于两种投入的数量。简单的因式分解表明，对于$kl<400$，这两个边际生产力都为正数。

因为

$$f_{ll} = 1\,200k^2 - 6k^3l$$

和

$$f_{kk} = 1\,200l^2 - 6kl^3 \tag{7.24}$$

当k和l很大时，函数表明边际生产力是递减的。实际上，再次因式分解，可知当$kl>200$时，f_{ll}和f_{kk}均小于零。即便当$200<kl<400$时，虽然生产函数的边际生产力呈现"正常"的状态，但是，生产函数并不必然有递减的RTS。任何边际生产力（式 7.23）的二阶交叉偏导数都为

$$f_{kl} = f_{lk} = 2\,400kl - 9k^2l^2 \tag{7.25}$$

仅当$kl<266$时，上式大于零。

当$200<kl<266$时，式 7.21 的分子必定为负数，但是对于较大规模的苍蝇拍生产厂商而言，情形并不是这么明朗，因为该厂商的f_{kl}是负值。当f_{kl}是负值时，劳动投入的增加会减少资本的边际生产力。因此，当l增加，k减少时，递减的边际生产力假设能做出对$RTS(=f_l/f_k)$变化的明确预测这种直观的认识是不正确的。劳动投入增加时，RTS的变化取决于边际生产力递减的相对影响（倾向于减少f_l而增加f_k）以及交叉边际生产力的反作用（倾向于增加f_l而减少f_k）之间的对比关系。仍然以苍蝇拍为例，RTS确实在k和l的取值范围内递减，此时边际生产力为正。对于$266<kl<400$，函数所表现出的边际生产力递减足以克服负值的f_{kl}对等产量线凸性的影响。

请回答：当 $k=l$ 时，生产函数的边际生产力是怎样的？这将会如何简化方程 7.21 中的分母？对于更大的 k 和 l，你如何更加容易地对此表达式的数值作出估计？

7.3 规模报酬

我们现在继续讨论生产函数的特征。对生产函数可能提出的首要问题就是所有投入同时增加产出会有什么变化。例如，假设所有投入都增加一倍，产出会增加一倍吗？或者事情并非这么简单？这是一个由生产函数表现出来的关于**规模报酬(return to scale)**的问题，也是自从亚当·斯密详细研究过大头针的生产后，经济学家一直很感兴趣的问题。斯密认为如果所有的投入都增加一倍，会有两种力量起作用。第一，规模的扩大会导致更细致的劳动分工和生产的专业化。因此，就存在一种假设，认为效率会提高——即产量增长超过一倍。第二，投入增加一倍也会导致效率的损失，因为管理监督更大规模的工厂会更加困难。而究竟哪种趋势会有更大的影响则是很重要的实证问题。

但是对这些概念给出一个数学上的定义却是十分简单的：

定义

规模报酬。如果生产函数是 $q=f(k,l)$，且所有的投入都以相同的正的常数增加 $t(t>1)$ 倍，我们将生产函数的规模报酬分成以下几类：

对产出的影响	规模报酬
I. $f(tk,tl)=tf(k,l)=tq$	不变
II. $f(tk,tl)<tf(k,l)=tq$	递减
III. $f(tk,tl)>tf(k,l)=tq$	递增

直观地看，投入的增加导致产出相同比例的增加，这是规模报酬不变的情形；若产出增加比例小于投入增加比例，则是规模报酬递减的情形；如果产出增加的比例大于投入增加的比例，则是规模报酬递增的情形。正如我们将要看到的，生产函数在某些投入水平上规模报酬不变，在其他投入水平上规模报酬递增或者递减，这在理论上是可能的。[①] 尽管如此，经济学家在考虑生产函数的规模报酬的水平时，隐含地只考虑投入使用量的小范围变化及与之相关的产出水平。

① 可以用报酬弹性来测度局部的规模报酬，定义如下

$$e_{q,t}=\frac{\partial f(tk,tl)}{\partial t}\cdot\frac{t}{f(tk,tl)}$$

在 $t=1$ 时估计此式。原则上，此参数依赖于不同的使用量从而得出不同的值。此概念的应用，参见本章习题 7.4 和 7.5。

7.3.1 规模报酬不变

一个厂商的生产函数保持规模报酬不变有经济学上的原因。如果厂商有许多相同的工厂，它就可以容易地通过改变当前工厂的数量来增加或减少产量。也就是说，厂商可以通过使其工厂数量增加一倍来增加一倍的产量，而且投入确实是以前的两倍。与此同时，如果想要考察由很多厂商组成的产业，规模报酬不变假设是很有意义的。因为产业是通过增加或减少一定数量的相同厂商来扩张或者收缩的（参见第 10 章）。最后，对于美国经济的整体研究发现，规模报酬不变是对总生产函数的合理并恰当的近似。基于以上原因，似乎值得对规模报酬不变的某些细节进行考察。

当生产函数表现出规模报酬不变时，它符合我们在第 2 章给出的“齐次性”的定义。也就是说，产量是投入的一阶齐次函数。因为

$$f(tk,tl)=t^1f(k,l)=tq \tag{7.26}$$

第 2 章我们介绍了如果一个函数是 k 阶齐次函数，其一阶导数是 $k-1$ 阶齐次函数。这意味着规模报酬不变的生产函数对应的边际生产力函数是零阶齐次函数。即，对于任何 $t>0$，

$$\begin{aligned} MP_k &= \frac{\partial f(k,l)}{\partial k}=\frac{\partial f(tk,tl)}{\partial k} \\ MP_l &= \frac{\partial f(k,l)}{\partial l}=\frac{\partial f(tk,tl)}{\partial l} \end{aligned} \tag{7.27}$$

特别地，我们令 $t=\frac{1}{l}$，式 7.27 化为

$$\begin{aligned} MP_k &= \frac{\partial f\left(\frac{k}{l},1\right)}{\partial k} \\ MP_l &= \frac{\partial f\left(\frac{k}{l},1\right)}{\partial l} \end{aligned} \tag{7.28}$$

这就是说，任何投入的边际生产力只依赖于资本投入和劳动投入的比值，与投入要素的绝对值没有关系。这一点是非常重要的，例如，在解释不同产业或者国家之间的生产力差异时体现得就很明显。

7.3.2 位似生产函数

式 7.28 的结论是：对于任何规模报酬不变的生产函数而言，边际技术替代率 $RTS=(MP_l/MP_k)$ 只依赖于投入要素的比率，而不依赖于它们的绝对水平。也就是说，此生产函数是位似的（参见第 2 章），它的等产量线将沿着射线延伸。如图 7.2 所示。沿着通过原点的任一条射线（一条 k/l 比率不变的射线），其自下而上接连穿过的一条条等产量线的斜率相等。等产量线图的这一性质在某些情况下是非常有用的。

可以用一个简单的具体例子对这个结果作一些直观的说明。假设安装一个屋顶可以由三个工人用一天时间完成，他们每人使用一把锤子；也可以由两个工人用一天时间完成，他们每人使用两把锤子（这些工人都是锤子高手）。锤子对于工人的边际技术替代率是 1:1——一把额外的锤子能够替代一

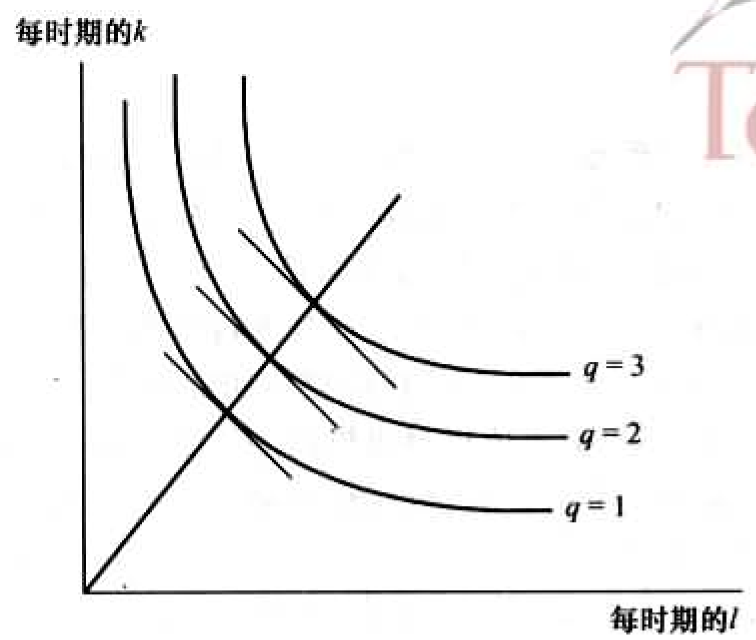


图 7.2　规模报酬不变的生产函数的等产量线图

对于规模报酬不变的生产函数，RTS 只依赖于 k 和 l 的比率，而与生产规模无关。结果，每条等产量线都是单位等产量线的放大。沿着通过原点的任意一条射线（一条 k/l 比率不变的射线），边际技术替代率在所有等产量线上都是相同的。

个工人。如果生产过程是规模报酬不变的，使用拥有六把锤子的六个工人或者使用拥有八把锤子的四个工人，就能安装两个屋顶。这种情况下，两把锤子替代两个工人，因此边际技术替代率（RTS）还是 1:1。规模报酬不变时，扩张生产并不改变投入要素的比率，因此生产函数是位似函数。

即使生产函数不是规模报酬不变的，也仍然是同位的。正如第 2 章中提到的，齐次函数经过单调映射可以保证其同位性质。因此，通过适当的变换，规模报酬递增或者递减的情况可以合并成规模报酬不变的情况。而其中最普遍的变换就是指数变换。因此，如果 $f(k,l)$ 是规模报酬不变的函数，我们可以使其变为

$$F(k,l) = [f(k,l)]^{\gamma} \tag{7.29}$$

其中 γ 是任意正的指数。如果对于任意 $\gamma > 1$，我们有

$$F(tk,tl) = [f(tk,tl)]^{\gamma} = [tf(k,l)]^{\gamma} = t^{\gamma}[f(k,l)]^{\gamma} = t^{\gamma}F(k,l) > tF(k,l) \tag{7.30}$$

因此，经过变换以后的生产函数是规模报酬递增的。同样可以证明，当 $\gamma < 1$ 时，生产函数 F 是规模报酬递减的。因为该函数（f）经过变换后仍然是位似函数，因此我们就证明了存在规模报酬和等产量线的形状无关的一些重要情形。下一小节我们将考察如何对等产量线的形状进行描述。

7.3.3　n 种投入品的情况

规模报酬的定义可以容易地推广至有 n 种投入要素的生产函数。如果生产函数是

$$q = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{7.31}$$

所有要素投入都乘以 $t > 1$，对某一常数 k，我们得到

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t^k q \tag{7.32}$$

当 $k = 1$ 时，生产函数是规模报酬不变的。当 $k < 1$ 或者 $k > 1$ 时，分别对应着规模报酬递减和递增的情况。

此数学定义的关键在于要求所有投入都以相同比例 t 增加。在许多实际生产过程中，这种假设

没有任何经济意义。例如,一个厂商只有一个“老板”,当其他所有要素增加的时候,老板的数量并不必然需要增加一倍。另一个例子是,农场的产出决定于土壤的肥沃程度,将耕种土地的面积扩大一倍并保持土壤的肥沃程度是不可能的,因为新开垦的土地的肥力可能比不上那些已经耕种过的土地。因此,在大多数现实问题中,一些投入可能是保持不变的(或者至少不是完全可变的)。那么对于那些其他可变的投入品,常常存在某种程度上的边际生产力递减,但由于还有不变的要素,所以称其为“规模报酬递减”不大合适。

7.4 替代弹性

生产函数的另一重要特征是它的一种要素替代另一种要素的难易程度。这个问题与独立的一条等产量线的形状有关,而与等产量线图无关。技术替代率会随着资本—劳动比的减小(即 k/l 减小)沿着一条等产量线减小。现在,我们希望能定义一些参数测度这种反应的程度。如果 RTS 不随 k/l 的变化而变化,我们就说替代是容易的,因为当投入组合变化时,两种投入的边际生产力的比率没有变化。相反地,如果对应于 k/l 的微小变化 RTS 变化很快,我们就说替代是困难的,因为投入组合微小的变化会对两种投入的相对生产力产生很大影响。**替代弹性(elasticity of substitution)**,这个我们在第二部分碰到的概念,给出了对这种反应的灵敏性的测度。现在,我们给替代弹性一个正式的定义:

定义

替代弹性。对于生产函数,替代弹性 σ 测度的是沿着等产量线相对于 RTS 变化的比例,k/l 发生变化的比例。即

$$\sigma=\frac{\text{当前 }\Delta(k/l)}{\text{当前 }\Delta RTS}=\frac{\mathrm{d}(k/l)}{\mathrm{d}RTS}\cdot\frac{RTS}{k/l}=\frac{\partial\ln k/l}{\partial\ln RTS}=\frac{\partial\ln k/l}{\partial\ln f_l/f_k} \tag{7.33}$$

因为沿着等产量线,k/l 和 RTS 向同一方向变动,σ 的值总是正数。从图形上看,这一概念体现在图 7.3 中 A 点沿等产量线向 B 点移动。在移动过程中,RTS 和 k/l 都将变化,我们感兴趣的是变化数值的相对大小。如果 σ 很大,相对于 k/l 来说,RTS 变化不会很大,等产量线也相对平坦。另一方面,σ 的较小数值说明等产量曲线十分陡峭;RTS 会对 k/l 的变化作出很大反应。一般地,当沿着等产量线移动和产量水平变化时,替代弹性可能是很不同的。尽管如此,我们还是通常假设替代弹性 σ 沿着等产量线是不变的,因为这会带来很多便利。如果生产函数也是齐次函数,由于所有的等产量线都只是彼此平行移动得到的,所以沿着所有的等产量线 σ 是不变的。本章的后面部分会遇到很多这样的生产函数。①

① 在规模报酬不变的情况下,替代弹性可以直接由生产函数和其导数表示为

$$\sigma=\frac{f_k\cdot f_l}{f\cdot f_{k,l}}$$

但是这个表达式太烦琐。因此式 7.33 的对数定义是最容易应用的。更简洁的总结,参见 P. Berck 和 K. Sydsaeter:《经济学家数学手册》(柏林:Springer-Verlag,1999),第 5 章。

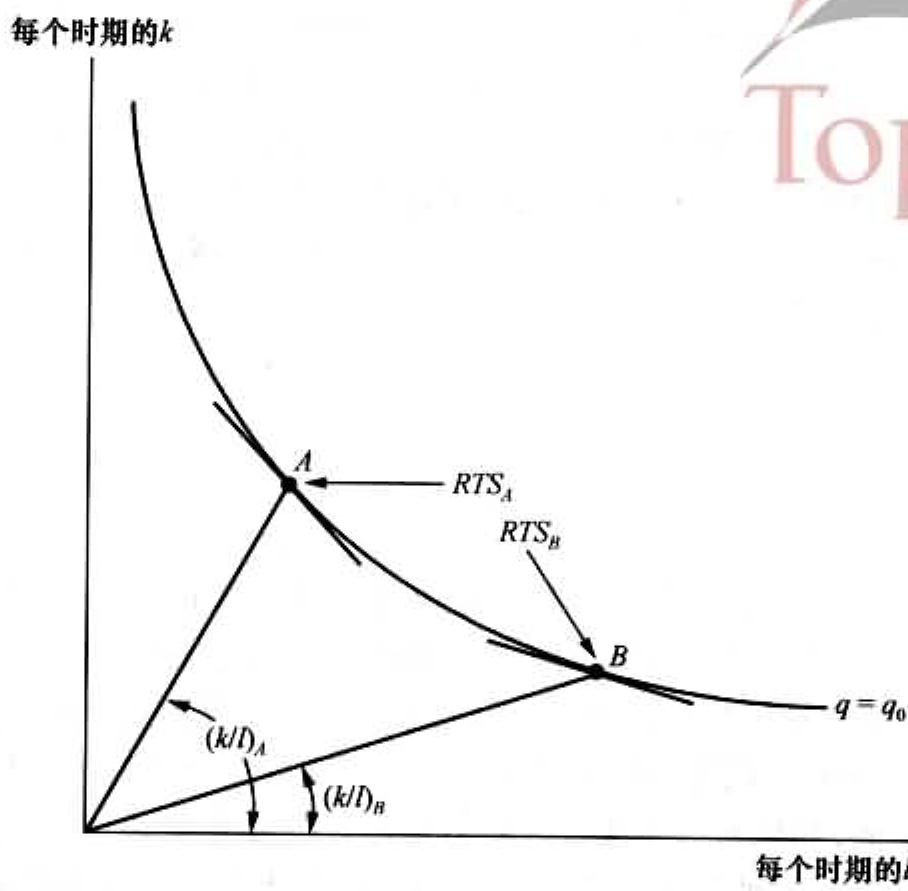


图 7.3　替代弹性的图形表示

在 $q=q_0$ 的等产量线上，从点 A 移动到点 B，资本劳动比（k/l）和 RTS 都会变化。定义替代弹性 σ 是两种相对变化的比值。这也是对等产量线弯曲程度的一种测量。

n 种投入的情形

将替代弹性推广到多种投入的情形会复杂一些。一种可能的方法是采用类似于式 7.33 的定义，即在保持产量不变的条件下，定义两种投入的替代弹性是投入变化的比率与 *RTS* 变化的比率。① 这将要求除了被考量的两种要素投入外其他所有的投入都保持不变，而这个限制（这在只有两种要素投入时是不存在的）使得这个定义实用意义不大。因为在实际的生产过程中，似乎两种要素投入比例的变动总是伴随着其他投入水平的变动。其他投入中的一些投入可能是那些正在变化的投入的互补品，也可能是替代品。限制它们（其他投入）保持不变确实是一种人为的约束。鉴于这个原因，关于替代弹性的另一种定义，即在厂商的生产成本函数中考虑到替代性和互补性的定义，被更普遍地运用于 n 种产品的情形。我们将在下一章介绍该种定义。

---

① 也就是，将投入 i 和投入 j 的替代弹性定义为沿着 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c$，有

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial \ln\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\partial \ln\left(\frac{f_j}{f_i}\right)}$$

注意，为了有效地在定义中运用偏导数，要求沿着等产量线 c 移动时，除了 i 和 j 以外的所有投入都要保持不变。

7.5 四种简单的生产函数

这一节我们将举例介绍四种简单的生产函数，它们具有不同的替代弹性。在此，仅介绍两种投入的情形，但是扩展到更多种投入的一般情形是很容易的（参见本章扩展部分）。

7.5.1 情形 1：线性生产函数（$\sigma=\infty$）

假设生产函数是

$$q=f(k,l)=ak+bl \tag{7.34}$$

很容易看出这个生产函数是规模报酬不变的：对于 $t>1$，

$$f(tk,tl)=atk+btl=t(ak+bl)=tf(k,l) \tag{7.35}$$

该生产函数的所有等产量线都是斜率是 $-b/a$ 的平行直线。其等产量线图如图 7.4(a)所示。因为沿着任何直的等产量线，RTS 是常数，σ 定义（式 7.33）中的分母是 0，因此 σ 无穷大。尽管线性生产函数是一个很有用的例子，但现实中却很少遇到，因为极少的生产过程中存在如此完全的替代。实际上，此情形认为资本和劳动是彼此的完全替代品。有这样生产函数的产业部门只使用资本或只使用劳动，而最终使用哪种投入取决于该投入的价格（因为只要劳动的价格比同样生产力的资本便宜，企业就没有理由不用劳动完全取代资本，反之亦然）。确实很难想象哪种生产过程能适用这样的生产函数，因为不管技术怎样先进或者落后，每台机器总要有个人按电钮，而每个工人要生产也总要有工具可用。

7.5.2 情形 2：固定投入比例的生产函数（$\sigma=0$）

以 $\sigma=0$ 为特征的生产函数是很重要的一种情形，称为**固定投入比例生产函数（fixed-proportions production function）**。此函数中必须以某个固定比例使用资本和劳动，所以该生产函数的等产量线是 L 形的，如图 7.4(b)所示。以该生产函数为特征的厂商总会沿着 k/l 是固定比例的射线生产。在等产量线顶点以外的其他点生产是无效率的，因为沿着等产量线向顶点移动可以用更少的投入生产出相同的产量。因为 k/l 是常数，从替代弹性的定义可以很容易看出 σ 肯定为 0。

固定投入比例生产函数的数学形式是

$$q=\min(ak,bl)\quad a,b>0 \tag{7.36}$$

其中算子 min 表示 q 由括号内的两个值中较小的那个决定。例如，假设 $ak<bl$，则 $q=ak$，我们认为资本是产出的约束因素。雇用更多的劳动并不能增加产出，因此劳动的边际产品是 0，额外的劳动投入是多余的。类似地，如果 $ak>bl$，劳动是产出的制约因素，而且额外的资本投入是多余的。当 $ak=bl$ 时，两种投入都得到充分利用。如果是这样，则 $k/l=b/a$，生产在等产量线图的顶点进行。只要两种投入都是有成本的，这就是进行生产时成本最低的点。所有顶点的轨迹是一条经过原点的斜率为 b/a 的直线。

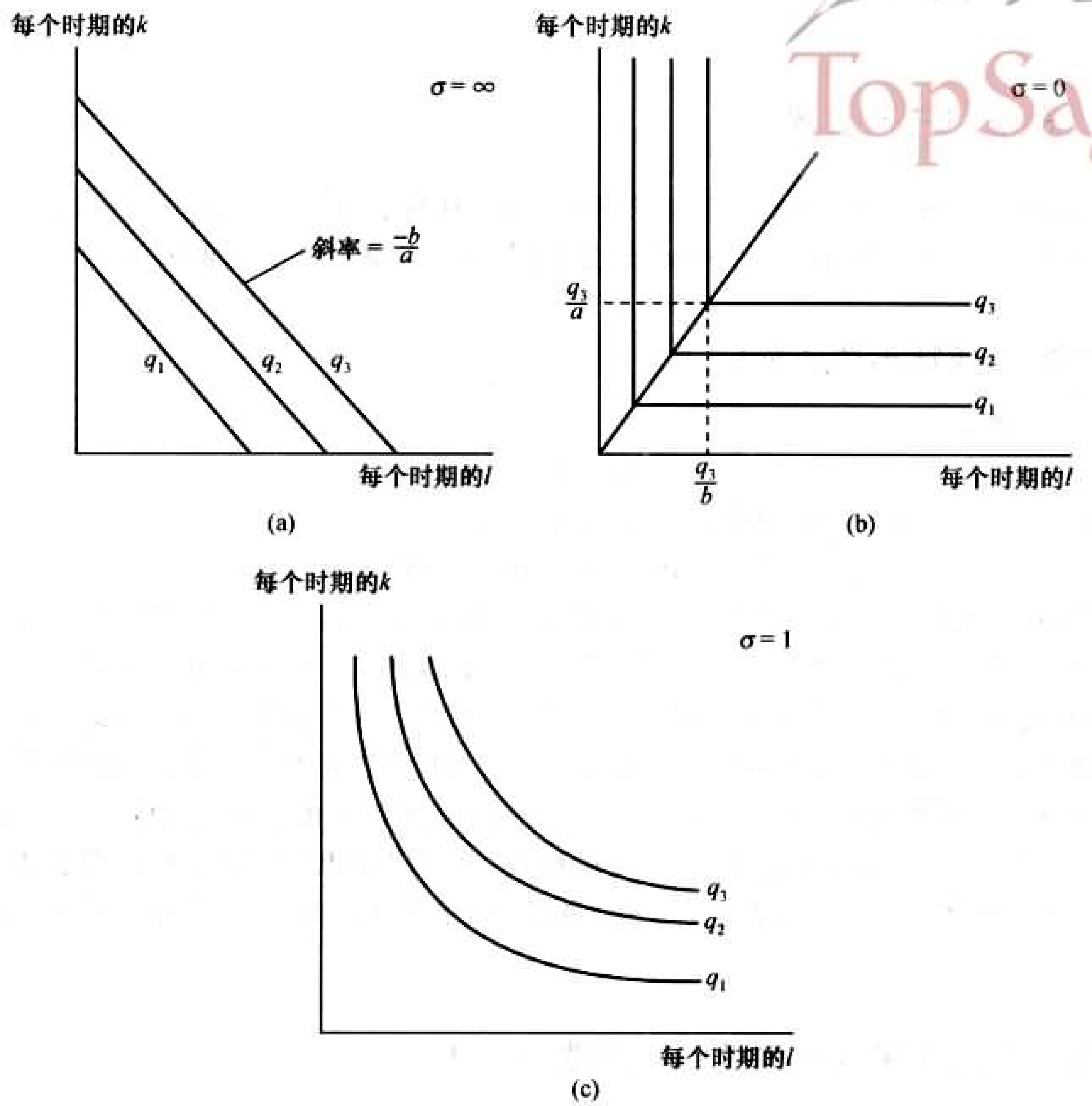


图 7.4　具有不同 σ 值的简单生产函数的等产量图

本图举例说明了替代弹性可能具有的不同值。图(a)中,资本和劳动是完全替代的。在此情况下,当资本—劳动比变化时,*RTS* 不变。图(b)中,固定投入比例的情况下,替代是不可能的。资本—劳动比固定为 b/a。图(c)展示了有限替代的情形。

固定投入比例生产函数的应用范围很广泛。[①] 例如,许多机器需要一定数量的工人操作,但是任何额外的工人都是多余的。再考虑使用资本(一台割草机)和劳动力修剪草坪的情况。我们总是需要一个人操作那台割草机,两样投入缺少一样都不会有产出。很多机器操作的情况可能都如此,而且每台机器都只需要固定数量的人手。[②]

---

① 根据式 7.35 给出的形式,固定投入比例生产函数是规模报酬不变的,因为对于任何 $t>1$,有

$$f(tk,tl) = \min(atk,btl) = t\cdot\min(ak,bl) = tf(k,l)$$

和以前一样,对函数形式使用非线性变换,如 $[f(k,l)]^{\gamma}$,当 γ 大于或者小于 1 的时候,就可以得到规模报酬递增或者递减的函数。

② 然而,割草机的例子也强调了另一种可能性,即,如果有选择割草机的型号的余地,那么,实际购买之前,资本—劳动比可以视为变量:因为任何设备,从大剪刀到巨型割草机,都有可能购买。但是一旦购买了割草机,资本—劳动比就固定下来了。

7.5.3 情形 3：柯布–道格拉斯生产函数($\sigma = 1$)

对于 $\sigma = 1$ 的生产函数，我们将其称为**柯布–道格拉斯生产函数**(**Cobb-Douglas production function**)。[①] 它提供了以上两种极端的情形间的一种中间情况。柯布–道格拉斯生产函数的等产量线具有一般等产量线的形状，如图 7.4(c)所示。柯布–道格拉斯生产函数的数学形式是

$$q = f(k,l) = Ak^a l^b \tag{7.37}$$

其中，a 和 b 均是正常数。

柯布–道格拉斯生产函数的规模报酬如何，取决于 a 和 b 的值。假设所有投入以相同比例 t 增加，则

$$\begin{aligned} f(tk,tl) &= A(tk)^a(tl)^b = At^{a+b}k^a l^b \\ &= t^{a+b}f(k,l) \end{aligned} \tag{7.38}$$

因此，当 $a+b=1$ 时，柯布–道格拉斯生产函数规模报酬不变，因为产出以相同比例 t 增加。如果 $a+b>1$ 时，函数是规模报酬递增的；当 $a+b<1$ 时，对应于规模报酬递减的情形。很容易看出，对于柯布–道格拉斯生产函数，替代弹性是 1。[②] 这一事实使得很多研究者使用其规模报酬不变的性质来一般地描述许多国家的总生产函数间的关系。

柯布–道格拉斯生产函数也被证明在许多实际情况下非常有用，因为其对数形式是线性的

$$\ln q = \ln A + a\ln k + b\ln l \tag{7.39}$$

常数 a 是产出相对于资本投入的弹性，b 是产出相对于劳动投入的弹性。[③] 这些常数有时可以从实际数据中估算出来，而且估算数据可以用来测度规模报酬（通过计算 $a+b$ 的和），以及其他目的。

7.5.4 情形 4：CES(不变替代弹性)生产函数

有一种函数形式，它包含了以上三种情形并且允许 σ 取其他数值，这种函数就是不变替代弹性(CES)生产函数。它最早由阿罗等人于 1961 年提出。[④] 这个函数是，对于 $\rho \leqslant 1, \rho \neq 0, \gamma > 0$

$$q = f(k,l) = [k^\rho + l^\rho]^{\gamma/\rho} \tag{7.40}$$

尽管现在加上了明确反映规模报酬情况的指数因子 γ/ρ，但这个函数与我们在第 3 章讨论的 CES 效

---

① 这是以 C. W. 柯布(C. W. Cobb)和 P. H. 道格拉斯(P. H. Douglas)的名字命名的。参见 P. H. 道格拉斯：《工资理论》(纽约：Macmillan Co., 1934)，pp. 132—135。

② 对于柯布–道格拉斯生产函数，

$$RTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{bAk^a l^{b-1}}{aAk^{a-1}l^b} = \frac{b}{a}\cdot\frac{k}{l}$$

或者

$$\ln RTS = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{k}{l}\right)$$

因此

$$\sigma = \frac{\partial \ln k/l}{\partial \ln RTS} = 1$$

③ 参见本章习题 5。

④ K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, and R. M. Solow, "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics* (August 1961): 225—250.

用函数很类似。对于 $\gamma > 1$，函数是规模报酬递增的，而对于 $\gamma < 1$，它表现出规模报酬递减。

对这个函数[①]直接应用 σ 的定义能够得出一个重要结果，即

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho} \tag{7.41}$$

因此，线性生产函数、固定投入比例生产函数和柯布-道格拉斯生产函数分别对应于 $\rho = 1$，$\rho = -\infty$ 和 $\rho = 0$ 的情况。固定投入比例生产函数与柯布-道格拉斯生产函数的上述结果的证明需要一个简要的论证。

CES 函数经常被赋予一个分配权重 $\beta(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$，以表明各种投入的相对重要性

$$q = f(k,l) = [\beta k^{\rho} + (1-\beta)l^{\rho}]^{\gamma/\rho} \tag{7.42}$$

对于规模报酬不变和 $\rho = 0$，该函数收敛于柯布-道格拉斯形式

$$q = f(k,l) = k^{\beta}l^{1-\beta} \tag{7.43}$$

例 7.3

一般化的里昂惕夫生产函数

假设一种商品的生产函数是

$$q = f(k,l) = k + l + 2\sqrt{k \cdot l} \tag{7.44}$$

这个函数只是一组以俄罗斯裔美国经济学家沃斯利·里昂惕夫(Wassily Leontief)的名字命名的函数中的特例。[②] 很明显，这个函数是规模报酬不变的，因为

$$f(tk,tl) = tk + tl + 2t\sqrt{k \cdot l} = tf(k,l) \tag{7.45}$$

里昂惕夫生产函数的边际生产力是

$$\begin{aligned} f_k &= 1 + (k/l)^{-0.5} \\ f_l &= 1 + (k/l)^{0.5} \end{aligned} \tag{7.46}$$

因此，边际生产力是正数并且是递减的。正如我们所希望的那样(因为函数是规模报酬不变的)，*RTS* 只依赖于两种投入的比例

---

① 对于 CES 函数，我们有

$$RTS = \frac{f_l}{f_k} = \frac{\dfrac{\gamma}{\rho} \cdot q^{(\gamma-\rho)/\gamma} \cdot \rho l^{\rho-1}}{\dfrac{\gamma}{\rho} \cdot q^{(\gamma-\rho)/\gamma} \cdot \rho k^{\rho-1}} = \left(\frac{l}{k}\right)^{\rho-1} = \left(\frac{k}{l}\right)^{1-\rho}$$

因此，应用替代弹性的定义得到

$$\sigma = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln RTS} = \frac{1}{1-\rho}$$

注意，在此计算中，因子 ρ 抵偿了边际生产力函数，因此保证了即使 ρ 是负值(在许多情况下 ρ 是负值)，边际生产力也是正值。这就解释了为什么 ρ 在 CES 函数定义中出现在两个不同的位置。

② 里昂惕夫是进行投入—产出分析研究的先驱。在投入—产出分析中，假定产出是和比例固定的技术相联系的。里昂惕夫生产函数一般化了固定比例的情形。更多关于里昂惕夫生产函数的内容请参见本章扩展部分。

$$RTS=\frac{f_l}{f_k}=\frac{1+(k/l)^{0.5}}{1+(k/l)^{-0.5}} \tag{7.47}$$

RTS 随着 k/l 的减小而减小,因此等产量线具有一般的凸向原点的形状。

计算此生产函数的替代弹性的方法有两种。首先,注意到在此特例中函数可以因式分解为

$$q=k+l+\sqrt{kl}=(\sqrt{k}+\sqrt{l})^2=(k^{0.5}+l^{0.5})^2 \tag{7.48}$$

从中可以看出该函数具有不变替代弹性的形式,其中 $\rho=0.5,\gamma=1$。因此,替代弹性在这里是 $\sigma=1/(1-\rho)=2$。

当然,多数情况下,作如此简单的因式变换是不可能的。一个更加烦琐的方法是应用第 177 页注脚①给出的替代弹性的定义

$$\sigma=\frac{f_kf_l}{f\cdot f_{kl}}=\frac{[1+(k/l)^{0.5}][1+(k/l)^{-0.5}]}{q\cdot(0.5/\sqrt{kl})}$$

$$=\frac{2+(k/l)^{0.5}+(k/l)^{-0.5}}{1+0.5(k/l)^{0.5}+0.5(k/l)^{-0.5}}=2 \tag{7.49}$$

我们看到,计算消去了投入比例(k/l),得出了很简单的结果。在其他情形下,有人可能怀疑这样巧合的结果是否会出现,并且因此置疑替代弹性沿着等产量线可能不是常数(参见本章练习题 7.7)。但是这里的结果 $\sigma=2$ 在直观上是合理的,因为这个值介于此生产函数线性部分($q=k+l,\sigma=\infty$)和其柯布-道格拉斯部分 $q=2k^{0.5}l^{0.5},\sigma=1$ 的替代弹性之间。

请回答:通过绘制 $q=4$ 的等产量线,你从这个生产函数中能够了解到什么?为什么说该函数将固定投入比例的情形一般化了?

7.6 技术进步

生产技术总会随着时间而进步,将这些技术进步补充到生产函数的概念中是十分重要的。图 7.5 提供了这种进步的简化图示。开始时,等产量线 q_0 表明生产 q_0 水平产出时所有资本和劳动的组合。随着先进生产技术的发展,这条等产量线移动到了 q_0'。现在只需要较少的投入就可以生产原来的产出水平。衡量这一进步的一种方法是留意一下,比如在资本投入为 k_1 时,原先生产出 q_0 的产量需要 l_2 单位的劳动,现在则只需要 l_1 单位的劳动。单位工人的产出从 q_0/l_2 上升到了 q_0/l_1。但是进行这种计算时一定要小心,因为沿着初始的等产量线,资本投入增加到 k_2 将会致使劳动投入降低至 l_1。在此情形下,尽管没有真正的技术进步,劳动者的产出也会上升。使用生产函数的概念将有助于区别这两个概念,因而也使经济学家可以对于技术进步率做出更加准确的估计。

7.6.1 技术进步的测度

关于技术进步的第一个表象是:从历史上看,随着时间的推移,产出的增长率已经超过了传统意

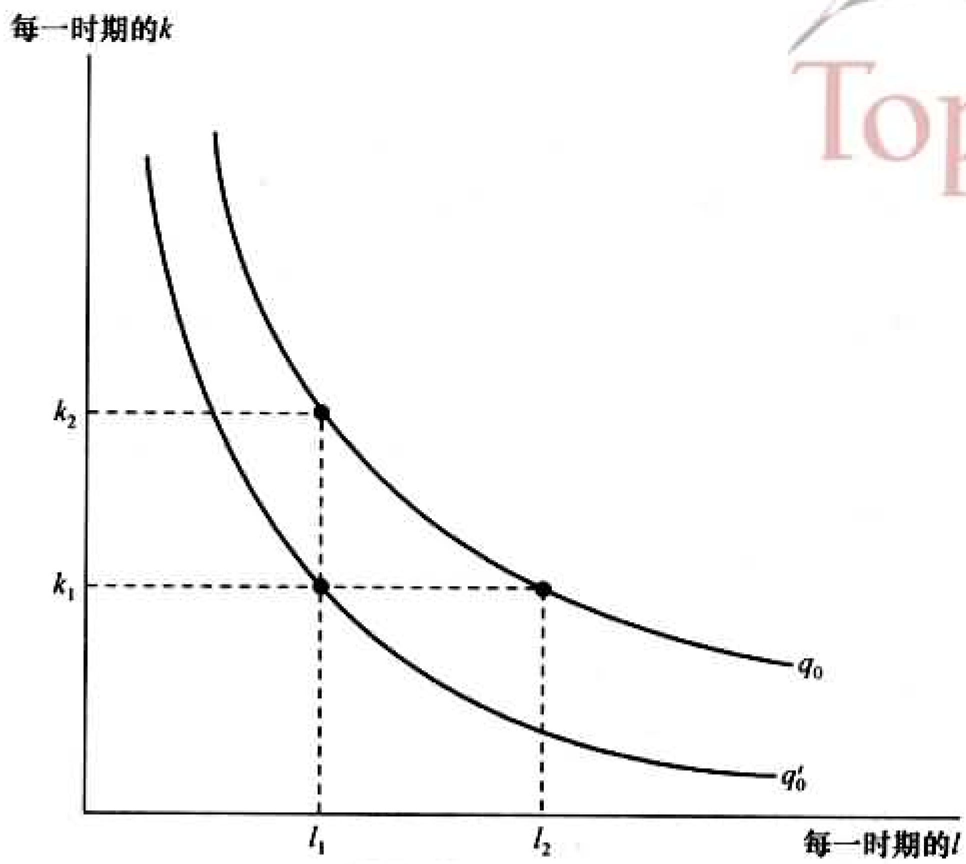


图 7.5　技术进步

技术进步使得等产量线 q_0 向原点移动。新的等产量线 q_0'，说明可以使用更少的投入达到既定的产出水平。例如，对于 k_1 单位资本而言，现在只需要 l_1 单位的劳动就能生产出 q_0，而在技术进步之前，需要使用 l_2 单位的劳动。

义上认为的由投入的增长带来的产出的增长率。我们假设一些商品的生产函数（或者是社会总体的产出）是

$$q = A(t)f(k,l) \tag{7.50}$$

式中的 $A(t)$ 表示除了 k（机器每小时）和 l（劳动每小时）之外所有决定 q 的影响因素。$A(t)$ 随时间而变化体现了技术进步的因素。因此，A 是时间的函数。假设 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t>0$；特定投入水平的劳动和资本随着时间的推移生产能力变得更强。

式 7.50 中对时间 t 求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\cdot f(k,l) + A\cdot\frac{\mathrm{d}f(k,l)}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{q}{A} + \frac{q}{f(k,l)}\left[\frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right]\end{aligned} \tag{7.51}$$

上式除以 q，得到

$$\frac{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t}{q} = \frac{\mathrm{d}A/\mathrm{d}t}{A} + \frac{\partial f/\partial k}{f(k,l)}\cdot\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f/\partial l}{f(k,l)}\cdot\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \tag{7.52}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t}{q} = \frac{\mathrm{d}A/\mathrm{d}t}{A} + \frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{k}{f(k,l)}\cdot\frac{\mathrm{d}k/\mathrm{d}t}{k} + \frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{l}{f(k,l)}\cdot\frac{\mathrm{d}l/\mathrm{d}t}{l} \tag{7.53}$$

现在,对于任何变量 x,$(dx/dt)/x$ 是 x 在单位时间内的增长率。我们用 G_x 来表示。[①] 因此,式 7.53 可以以增长率的形式写成

$$G_q = G_A + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{k}{f(k,l)} \cdot G_k + \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{l}{f(k,l)} \cdot G_l \tag{7.54}$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{k}{f(k,l)} = \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{k}{q} = \text{资本投入的产出弹性} = e_{q,k}$$

及

$$\frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{l}{f(k,l)} = \frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{l}{q} = \text{劳动投入的产出弹性} = e_{q,l}$$

7.6.2 增长的测算

因此我们的增长函数最终变为

$$G_q = G_A + e_{q,k} G_k + e_{q,l} G_l \tag{7.55}$$

这表明产出的增长可以分解为两部分的和:归因于投入(k 和 l)变化的增长和"其余"的(即,A 的变化)体现技术进步的增长。

式 7.55 提供了一种考量产出增长时估计技术进步 G_A 的相对重要性的方法。例如,在对 1909 年到 1949 年间美国整体经济所作的开拓性研究中,R. M. 索洛记录下了以下数据[②]

$$G_q = 2.75\% / \text{每年}$$
$$G_l = 1.00\% / \text{每年}$$
$$G_k = 1.75\% / \text{每年}$$
$$e_{q,l} = 0.65$$
$$e_{q,k} = 0.35$$

因此

$$\begin{aligned} G_A &= G_q - e_{q,l} G_l - e_{q,k} G_k \\ &= 2.75\% - 0.65\%(1.00) - 0.35\%(1.75) \\ &= 2.75\% - 0.65\% - 0.60\% \\ &= 1.50\% \end{aligned} \tag{7.56}$$

索洛得出的结论是:从 1909 年到 1949 年,技术进步率是每年 1.5%。实际产出的增长一半以上归因于技术进步而非生产投入的数量增长。更多新近的迹象也更倾向于证明索洛关于技术进步相对重要性的结论。尽管如此,产生这种变化的准确原因还很不确定。

---

① 该定义的两个有用的性质是:(1) $G_{x \cdot y} = G_x + G_y$,即有两个变量的产品的增长率等于每个变量的增长率之和;(2) $G_{x/y} = G_x - G_y$。

② R. M. Solow, "Technical Progress and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics 39* (August 1957): 312—320.

例 7.4

柯布-道格拉斯生产函数中的技术进步

柯布-道格拉斯生产函数提供了一个说明技术进步的十分简单的途径。假设规模报酬不变，那么带有技术进步色彩的生产函数可以写作

$$q = A(t)f(k,l) = A(t)k^{\alpha}l^{1-\alpha} \tag{7.57}$$

如果我们假设技术进步以固定的指数 θ 发生，我们可以将其写为：$A(t)=Ae^{\theta t}$，则生产函数变为

$$q = Ae^{\theta t}k^{\alpha}l^{1-\alpha} \tag{7.58}$$

研究这种随时间变化的生产函数的性质有种特别简单的办法，那就是使用对数求导

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln q}{\partial t} &= \frac{\partial \ln q}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q/\partial t}{q} = G_q = \frac{\partial(\ln A + \theta t + \alpha \ln k + (1-\alpha)\ln l)}{\partial t} \\ &= \theta + \alpha\cdot\frac{\partial \ln k}{\partial t} + (1-\alpha)\cdot\frac{\partial \ln l}{\partial t} = \theta + \alpha G_k + (1-\alpha)G_l\end{aligned} \tag{7.59}$$

因此求导结果只是重复了式 7.55 用于柯布-道格拉斯生产函数的情形。该式清晰地模拟了技术进步的因素，并且由柯布-道格拉斯生产函数的指数给出了产出弹性。

技术进步的重要性在此函数中被量化出来。假设 $A=10$，$\theta=0.03$，$\alpha=0.5$，一个厂商使用 $k=l=4$ 的投入进行生产。那么，在 $t=0$ 时，产出是 40（$=10\cdot4^{0.5}\cdot4^{0.5}$）。20 年后（$t=20$），生产函数变为

$$q = 10e^{0.03\cdot20}k^{0.5}l^{0.5} = 10\cdot(1.82)k^{0.5}l^{0.5} = 18.2k^{0.5}l^{0.5} \tag{7.60}$$

第 20 年的时候，初始的投入组合能够生产产出 $q=72.8$。当然，也可以在开始的时候就生产 $q=72.8$，但是这需要更多投入。例如，对于 $k=13.25$，$l=4$，产出确实是 72.8，但这需要更多的资本。在两种情况下，劳动投入的单位产出都可以从 10（$q/l=40/4$）增长到 18.2（$=72.8/4$），但是只有在第一种情况下才真正体现出技术进步。

投入的技术进步。我们很容易将例子中的劳动生产力平均水平的提高归结于工人技术水平提高之类的因素，但这在柯布-道格拉斯生产函数的情形下会令人误解。也有人会说资本的单位产出在过去 20 年从 10 提高至 18.2 是因为机器的进步。分别模拟劳动和资本的技术进步的一个可能的方法就是假设生产函数是

$$q = A(e^{\phi t}k)^{\alpha}(e^{\varepsilon t}l)^{1-\alpha} \tag{7.61}$$

其中，ϕ 表示资本投入的年进步率，ε 表示劳动投入的年进步率。但是，由于柯布-道格拉斯生产函数本身就是指数形式的，这将无法和我们之前的例子相区别，之前的例子是

$$q = Ae^{[\alpha\phi+(1-\alpha)\varepsilon]t}k^{\alpha}l^{1-\alpha} = Ae^{\theta t}k^{\alpha}l^{1-\alpha} \tag{7.62}$$

其中，$\theta=\alpha\phi+(1-\alpha)\varepsilon$。因此，要想分别研究投入的技术进步，或者采取更加复杂的测度投入的方法来考量技术进步的因素，或者使用有多种投入的生产函数来达到相同目的。

请回答：对于柯布-道格拉斯生产函数的实证研究发现 $\alpha\approx0.3$。使用这个数字和式 7.62 讨论资本和劳动的质量改进对于总的技术进步率的相对重要性。

小结

本章我们阐述了经济学家对把投入转化为产出的生产过程进行概念化的方法。基本的工具是生产函数，其最简单的形式就是假设一定时期内的产出 q 仅是该时期内资本和劳动的简单函数，$q=f(k,l)$。以此为基础，我们得出了关于生产理论的一些基本的结论。

- 如果除了一种投入外，其他投入都不变，则可以建立这种投入变量和产出之间的关系。根据这种关系，我们可以得到此投入的边际生产力（*MP*），它表示增加一单位投入带来的产出的变化量。我们假设投入的边际生产力随着投入的增加而减少。
- 整个生产函数可以由它的等产量线图表示。等产量线斜率（负的）被称之为边际技术替代率（*RTS*），因为它表示保持产出水平不变时，一种投入如何被另一种投入所替代。边际技术替代率是两种投入要素的边际生产力的比值。
- 通常假设等产量线是凸向原点的——它们遵循边际技术替代率（*RTS*）递减的假设。这一假设不可能完全从边际生产力递减的假设中推断而来。我们必须注意到一种投入要素的改变对于其他投入要素边际生产力的影响。
- 生产函数的规模报酬表示产出如何对于所有投入要素都成比例增加做出反应。如果产出与投入以相同比例增加，则规模报酬不变。如果产出增加比例高于投入增加比例，则规模报酬递增；相反，如果产出增加比例小于投入增加比例，则规模报酬递减。
- 替代弹性为测度生产中一种投入替代另一种投入的难易程度提供个一种方法。较大的 σ 值表明等产量线更接近于直线，而较低的 σ 值表明等产量线更接近于 L 型。
- 技术进步将使整个生产函数和其相关的等产量线移动。技术进步可能来自于使用了更先进的、生产效率更高的投入，也可能是因为经营管理的水平有所提高。

练习题

7.1 动力山羊草坪公司使用两种大小不同的割草机割草。较小的割草机有一个 24 英尺长的刀片，并被用于有许多树和障碍物的草地上。较大的割草机是小割草机的两倍大小并被用于机器性能发挥比较好的开阔草坪上。动力山羊草坪公司的两个生产函数是：

	每小时产出（平方英尺）	资本投入（24 小时用电量）	劳动投入
大型割草机	8 000	2	1
小型割草机	5 000	1	1

a. 画出第一个生产函数 $q = 40\,000$ 平方英尺的等产量线。如果不产生浪费，应该投入多少 k 和 l？

b. 对于第二个生产函数回答问题 a。

c. 如果 40 000 平方英尺草地中的一半由第一种生产方法来完成，另一半由第二种生产方法来完成，为了不浪费，应该使用多少 k 和 l？如果第一种方法割 3/4，第二种方法割 1/4，应该使用多少 k 和 l？如果 k 和 l 是分数意味着什么？

d. 在你对问题 c 回答的基础上，画出结合两种生产函数的 $q = 40\,000$ 的等产量线。

7.2 假设小饰品的生产函数是

$$q = kl - 0.8k^2 - 0.2l^2$$

其中 q 表示每年生产的小饰品总量，k 表示每年的资本投入量，l 表示劳动投入量。

a. 假设 $k = 10$，画出劳动的总产量线和平均产量线。劳动投入什么时候使平均产量最大？此时生产了多少小饰品？

b. 同样假设 $k = 10$，画出 MP_l 曲线。在哪一点劳动投入使得 $MP_l = 0$？

c. 假设资本投入增加到 $k = 20$。a 和 b 中的答案如何变化？

d. 小饰品生产函数是规模报酬不变的，还是规模报酬递增或递减的？

7.3 Sam Malone 正在考虑改良在切尔斯的酒吧的座椅。新座椅的生产函数是

$$q = 0.1k^{0.2}l^{0.8}$$

其中 q 是在改良的一周内生产的座椅的数量，k 表示在这一周内使用生产座椅的车床的时间（小时），l 表示这段时间内雇用的工人数量。Sam 想生产 10 把新的酒吧座椅，并且他为这一工程做出了 10 000 美元的预算。

a. Sam 考虑到使用一台座椅加工车床和雇用一个熟练的技术工人的成本是相等的（每小时 50 美元），因此他打算使用同样多的两种投入。如果这样生产，他将对两种投入要素各使用多少？他的改良工程的成本是多少？

b. Norm（对于酒吧座椅有一些了解）认为 Sam 又一次忘记了他的微观经济学。他断言 Sam 应该选择两种投入的数量使其边际（而非平均）生产力相等。如果 Sam 选择了这个计划，每种投入要素应该各使用多少？整个改良工程的成本是多少？

c. 因为听说采用 Norm 的方案后会剩余一部分钱，Cliff 建议 Sam 用剩余的钱添置更多的座椅，以便为他 USPS 的同事提供更多的座位。如果 Sam 采用 Norm 的建议，用他预算内的钱 Sam 能够多添置几把座椅？

d. Carla 担心 Cliff 的建议会增加她为客人送食物的工作量。她如何说服 Sam 坚持他起初只改良 10 把座椅的计划呢？

7.4 规模弹性 $e_{q,t} = \frac{\partial f(tk, tl)}{\partial t} \cdot \frac{t}{q}$ 在 $t = 1$ 时的值给出了局部测算生产函数规模报酬的方法。

a. 证明生产函数规模报酬不变时，$e_{q,t} = 1$。

b. 我们将投入 k 和 l 的产出弹性定义为

$$e_{q,k} = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k} \cdot \frac{k}{q}$$

$$e_{q,l} = \frac{\partial f(k,l)}{\partial l} \cdot \frac{l}{q}$$

证明：$e_{q,t} = e_{q,k} + e_{q,l}$。

c. 有一个规模弹性是变量的函数

$$q = (1 + k^{-1}l^{-1})^{-1}$$

证明对此函数：对于 $q < 0.5$，$e_{q,t} > 1$；对于 $q > 0.5$，$e_{q,t} < 1$。

d. 从直观上解释你在 c 中得到的结果。（提示：生产函数的 q 是否有上限？）

7.5 正如我们在许多地方看到的，两种投入的柯布-道格拉斯生产函数的一般形式是：

$$q = f(k,l) = Ak^{\alpha}l^{\beta}$$

其中 $0<\alpha<1, 0<\beta<1$。对此生产函数：

a. 证明 $f_k>0, f_l>0, f_{kk}<0, f_{ll}<0, f_{kl}=f_{lk}>0$。

b. 证明：$e_{q,k}=\alpha, e_{q,l}=\beta$。

c. 由 b 得出的结果，可以得到对于此函数：$e_{q,t}=\alpha+\beta$。通过直接应用规模弹性（产出弹性）的定义证明这是正确的。

d. 证明此函数的图形是拟凹的。

e. 证明对于 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 该函数是凹的，对于 $\alpha+\beta>1$ 则不是凹的。

7.6 证明对于规模报酬不变的 CES 生产函数

$$q = [k^{\rho}+l^{\rho}]^{1/\rho}$$

a. $MP_k=\left(\dfrac{q}{k}\right)^{1-\rho}$ 且 $MP_l=\left(\dfrac{q}{l}\right)^{1-\rho}$。

b. $RTS=\left(\dfrac{l}{k}\right)^{1-\rho}$。并用此证明 $\sigma=1/(1-\rho)$。

c. 确定 k 和 l 的产出弹性。并证明它们的和等于 1。

d. 证明

$$\frac{q}{l}=\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)^{\sigma}$$

因此得到

$$\ln\left(\frac{q}{l}\right)=\sigma\ln\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)$$

注意：后一个等式在实证中很有用，因为我们将通过既定的、竞争性的工资率来估算 $\partial q/\partial l$ 的大概值。

7.7 考虑例 7.3 中生产函数的一般形式

$$q=\beta_0+\beta_1\sqrt{kl}+\beta_2 k+\beta_3 l$$

其中

$$0\leqslant\beta_i\leqslant 1 \quad i=1,\cdots,3$$

a. 如果该函数是规模报酬不变的，对于参数 $\beta_0,\cdots,\beta_3$ 有何约束？

b. 证明在规模报酬不变情形下，该函数边际生产力递减且其边际生产力函数是零次齐次函数。

c. 计算此时的 σ 值。尽管 σ 不是普通常数，当 β 取什么值时 $\sigma=0,1$ 或 ∞？

7.8 证明：欧拉定理表明对于规模报酬不变的生产函数 $q=f(k,l)$，存在

$$q=f_k\cdot k+f_l\cdot l$$

使用该结论证明对于该生产函数，如果 $MP_l>AP_l$，MP_k 一定是负值。这对于生产在何处进行有什么启示？一个厂商可能在 AP_l 处于上升阶段的点上组织生产吗？

7.9 和练习题 7.8 类似，对于规模报酬不变的只有两种投入（k 和 l）的生产函数再次应用欧拉定理，证明 f_{kl} 肯定是正值并解释这个结果。对于有许多要素投入的生产函数是否有类似的约束？

7.10 尽管我们对各种不同的生产函数的替代弹性进行测度时，都假设其是规模报酬不变的，但是很多情况下这种假设是不必要的。本问题阐述其中的一些情况。

a. 从第 177 页的脚注①我们看到，在规模报酬不变的情况下，两种投入的生产函数的替代弹性是

$$\sigma=\frac{f_k f_l}{f\cdot f_{kl}}$$

我们现在假定一个齐次生产函数 F，

$$F(k,l)=[f(k,l)]^{\gamma}$$

其中 $f(k,l)$ 是规模报酬不变的生产函数，γ 是正指数。证明该生产函数的替代弹性和函数 f 的替代弹性相同。

b. 说明如何将此结果应用于柯布-道格拉斯生产函数和 CES 生产函数。

推荐阅读文献

Clark, J. M. "Diminishing Returns". In *Encyclopaedia of the Social Sciences*, vol. 5. New York: Crowell-Collier and Macmillan, 1931, pp. 144—146.
该书对于报酬递减概念的发展历史有清晰的介绍。

Douglas, P. H. "Are There Laws of Production?" *American Economic Review* 38 (March 1948): 1—41.
该文对于生产函数的使用和误用作了很好的方法论分析。

Ferguson, C. E. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*. New York: Cambridge University Press, 1969.
该书对于生产函数理论作了深刻全面的分析,并有效地使用了三维图。

Fuss, M., and D. McFadden. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Application*. Amsterdam: North-Holland, 1980.
该书提出了一种现代分析方法,尤其强调对偶的运用。

Mas-Collell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green, *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press, 1995.
本书第5章提供了精密的对于生产函数理论的回顾。利润函数的使用(参见第9章的扩展部分)十分流畅并且很有启示性。

Shephard, R. W. *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1978.
该书扩展性地分析了成本和生产函数之间的对偶关系。

Silberberg, E., and W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston: Irwin, McGraw-Hill, 2001.
该文对于生产函数和成本曲线之间的关系作了深入而全面的分析。证明了替代弹性可以用第177页注脚①的方法得出。

Stigler, G. J. "The Division of Labor Is Limited by the Extent of the Market." *Journal of Political Economy* 59 (June 1951): 185—193.
该文对于查尔斯关于规模经济的思想的发展作了详尽追踪。

扩　展

有多种要素投入的生产函数

第7章阐述的大部分生产函数都能很容易地扩展到有很多要素投入的情形。这里,我们将说明在柯布-道格拉斯生产函数与CES生产函数下的情况,并且考察这类生产函数可以采取的两种相当灵活的形式。在所有这些例子中,β是非负参数,n种投入被表示为$x,\cdots,x_n$。

E7.1 柯布-道格拉斯生产函数

多种投入的柯布-道格拉斯生产函数是

$$q = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i} \tag{i}$$

a. 如果

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1 \tag{ii}$$

则该函数是规模报酬不变的。

b. 在规模报酬不变的柯布-道格拉斯生产函数中,β_i是q对于投入x_i的弹性。因为$0 \leqslant \beta_i < 1$,所以每种投入的边际生产力都是递减的。

c. 规模报酬递增的程度也可以综合进这个函数中，这依赖于

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

E7.2 索洛增长模型

多种投入的柯布-道格拉斯生产函数是许多经济增长模型的雏形。例如，索洛较早的关于均衡增长的模型(1956)可以很容易地用规模报酬不变的两种投入的柯布-道格拉斯生产函数推导出来

$$\gamma = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad \text{(iii)}$$

其中 A 是可以用指数增长形式表示的技术进步因素

$$A = e^{at} \qquad \text{(iv)}$$

(iii)式两边都除以 L 得到

$$y = e^{at}k^{\alpha} \qquad \text{(v)}$$

其中

$$y = \gamma/L, \quad k = K/L$$

索洛证明经济将向着 k(资本—劳动比)的均衡值演进。因此，不同国家之间差别巨大的经济增长率只能由技术进步因素 a 来说明。

方程 v 的两个特点对于包含更多投入的索洛模型也很适用。首先，方程的形式并不能解释为什么全球范围内的单位资本产出(y)存在巨大差异。例如，假设 $\alpha = 0.3$(其与众多实证数据相符合)，必须使用各个国家 k/l 大到 4 000 000/1 的差异来解释观察到的 100/1 的资本产出差别——这明显是不合理的。但是通过引入其他投入(如人力资本等)，这些差异开始变得易于解释了。

索洛模型中简单的柯布-道格拉斯公式的另一个缺点就是其没有解释技术变化参数 a——其值是外生的。将其他投入要素加入其中就很容易理解参数 a 如何对经济激励作出反应。这是最近经济内生性增长理论的核心观点(对于该理论的总结，请参见 Romer,1996)。

E7.3 CES 生产函数

有多种投入的替代弹性不变的生产函数是

$$q = \left[\sum \beta_i x_i^{\rho}\right]^{\epsilon/\rho}, \quad \rho \leq 1 \qquad \text{(vi)}$$

a. 用 mx_i 替代每种投入，很容易证明对于 $\epsilon = 1$，该函数是规模报酬不变的；对于 $\epsilon > 1$，函数规模报酬递增。

b. 因为 $\rho \leq 1$，所以该生产函数每种投入的边际生产力是递减的。

c. 和两种投入时的情形一样，此处的替代弹性是

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho} \qquad \text{(vii)}$$

且该弹性适用于任意两种投入的替代。

在前苏联的环境中验证柯布-道格拉斯生产函数

运用有多种投入的 CES 生产函数的方法就是看看估计的替代参数(ρ)是否与柯布-道格拉斯生产函数计算的数值($\rho = 0, \sigma = 1$)相一致。例如，在对前苏联的五种主要的产业进行研究时，E. Bairam(1991)发现柯布-道格拉斯生产函数对于大部分主要制造业的产出变化作出了相当好的解释。只有食品加工工业得出了较低的 σ 值，但看起来似乎也是正确的。

下面两个例子将介绍一些形式更加灵活的生产函数，它们可能更接近于 n 种要素投入的一般性的生产函数。在第 8 章的扩展部分，我们将考察类似于这其中某些函数的成本函数，因为这种运用比生产函数本身更加广泛。

E7.4 一般化的里昂惕夫生产函数

$$q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \sqrt{x_i x_j}$$

其中，$\beta_{ij} = \beta_{ji}$。

a. 本章练习题 7.7 中提到的函数就是此函数在 $n=2$ 情形下的一个简单例子。对

于 $n=3$,该函数的线性部分表示三种投入,根式部分表示投入所有可能的交叉产量。

b. 使用 mx_i 可以说明该函数规模报酬不变。通过使用变换

$$q' = q^{\epsilon}, \quad \epsilon > 1,$$

可以令函数的规模报酬递增。

c. 因为每种投入要素都出现在线性部分和根式部分,所以每种投入的边际生产力递减。

d. 使用 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$ 的约束条件来保证函数二阶偏导数的对称性。

E7.5 对数变换

$$\ln q = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln x_i + 0.5 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln x_i \ln x_j,$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}$$

a. 注意柯布-道格拉斯生产函数只是该函数对于所有 $i, j, \beta_0 = \beta_{ij} = 0$ 时的特例。

b. 和柯布-道格拉斯生产函数一样,该函数可以设定任何规模报酬程度。

如果

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

且

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0$$

对于所有 i,该函数规模报酬不变。其证明需要注意处理二次求和符号。

c. 同样,要求 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$ 以保证交叉偏导数是相等的。

移民

因为对数变换生产函数包含了各种不同的投入间存在的大量的替代可能性,所以它常被广泛地用来研究新来工人对原有工人的替代方式。我们尤其感兴趣的是,技术移民通过何种方式对本国经济中技术工人和非技术工人的需求产生不同影响。对于美国和其他许多国家(加拿大、法国、德国等)的研究表明这种影响的总效应是温和的,考虑到较少的移民流入时尤其是这样。但是也有证据表明非技术工人移民对于本国的非技术工人具有替代性,但是对于本国技术工人则是互补的。因此,增加的移民流将加剧工资鸿沟扩大的趋势。更多内容请参见 Borjas(1994)。

参考文献

Bairam, Erkin. "Elasticity of Substitution, Technical Progress and Returns to Scale in Branches of Soviet Industry: A New CES Production Function Approach". *Journal of Applied Economics* (January—March 1991): 91—96.

Borjas, G. J. "The Economics of Immigration". *Journal of Economic Literature* (December 1994): 1667—1717.

Christenson, L. R., D. W. Jorgenson, and L. J. Lau. "Transcendental Logarithmic Production Frontiers". *Review of Economics and Statistics* (February 1973): 28—45.

Fuss, M., and D. McFadden, eds. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1978. See especially ch. I. 1, "Cost Revenue and Profit Functions", and ch. II. 1, "A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production".

Romer, David. *Advanced Macroeconomics.* New York: McGraw-Hill, 1996.

Solow, R. M. "A Contribution to the Theory of Economic Growth". *Quarterly Journal of Economics* (1956): 65—94.

第 8 章　成本函数

本章将阐述厂商在生产商品时遇到的成本问题。第 9 章将深入讨论厂商如何作出能够达到利润最大化的投入产出决定。

8.1　成本的定义

在我们讨论成本理论之前，必须对一些关乎是否能够准确定义成本的难点进行澄清，尤其是必须区分(1) 会计成本和(2) 经济成本。会计师对于成本的观点是强调现金支出的费用、历史成本、折旧和其他会计记账科目。经济学家对于成本的定义（带有明显的机会成本意义）是：任何投入的成本都是确保这些资源处于现有使用状态所必需的支付数量。另一种说法是，一种投入的经济成本是假设该投入用作他用后，能够得到的最高报酬额。区分这两种观点的方法是，考虑各种各样投入（劳动、资本和企业家才能）的成本在各自的体系下是如何定义的。

8.1.1　劳动力成本

经济学家与会计师对劳动力成本的观点具有很强的一致性。对于会计师，对劳动力的支出是现行费用，因此算作生产成本。对于经济学家，劳动力是显性成本。劳动服务（劳动时间）以每小时工资率(w)写入合同，而且通常假设，这是劳动服务在其可供选择的各种雇用中可以获得的最佳报酬。当然，每小时工资率也包括为员工提供额外福利而产生的成本。

8.1.2　资本成本

关于资本服务（机器用时），经济学家与会计师的观点是不同的。计算资本成本时，会计师是使用利用投资购买的机器的历史价格，并且按照带有或多或少主观色彩的折旧规则决定将该机器的原始价格折算成多少当前成本。经济学家则将一台机器的历史价格视为“沉没成本”，它与产出决策无关。相反，他们认为使用机器的隐性成本是他人为使用它而愿意支付的价格。因此，每台机器每小时的使用成本是机器给别人用时能获得的最高租金。继续使用这些机器，意味着厂商放弃了其他人

愿为使用该机器而支付的租金。对于每台机器每小时的租金率,我们用 v 来表示。[①]

8.1.3 企业家才能的成本

企业主是剩余的索取者,他们有权利获得扣除其他投入成本后的多余收入或损失(收入为负)。对于会计师而言,这些被称为“利润”(可能为正,也可能为负)。与此相对,经济学家则要考虑工厂主与企业家在为某个厂商工作或投入资金运作时是否也面临机会成本的问题。如果有,那么它们也是经济成本的一部分。例如,假设一位高级计算机编程人员为了获得一些(会计)利润,开创了一家软件公司。编程工程师的时间对于公司显然是一种投入,同时也是一种应该得到支付的成本。比如说,我们可以认为这个成本等于他为别的企业干同样的活能挣到的钱。因此,公司产生的会计利润的一部分要被经济学家列为企业家成本。经济学上的利润比会计利润少,而且如果编程工程师的机会成本超过公司运转赚取的利润,经济利润就可能是负的。对于企业家投入企业的资本,上述讨论一样适用。

8.1.4 经济成本

理所当然,在本书中我们使用经济学家对成本的定义:

定义

经济成本。任何投入的**经济成本(economic cost)**是保证此投入处于现行使用状态而必须支付的费用。或者等价地讲,一种投入的经济成本是该投入在其他用途上获得的最高回报。

使用该定义并不意味着会计上的概念和经济行为没有任何关系。相反,会计数据对于任何管理者进行生产决策都是非常重要的,因为它能在很大程度上影响纳税额,进而影响利润。而且经济成本需要另行计算,会计成本却是现成的。但是,当我们研究一个适用于所有厂商决策的理论体系时,经济成本的概念有其不可替代的优势,所以以下“成本”的概念均指经济成本。

8.1.5 两个简化假设

首先,我们对厂商使用的投入作两个简化。第一,我们假设只有两种投入:同质劳动(l,用劳动时间来计量)和同质资本(k,用机器使用时间来计量)。企业家成本计算在资本成本中。也就是说,我们假设厂商最初面临的全部机会成本都记入厂商投入的资本中去。

第二,我们假设所有要素投入来源于完全竞争市场。厂商能够以当前的价格(w 和 v)购买(或者出售)所需要的所有资本和劳动。在图形上,这些资源的供给曲线在当前的价格水平上表现为一条水平的直线。w 和 v 在厂商的决策过程中都被作为“参数”;厂商不能对其施加任何影响。这些条件在以后几章都会放宽(尤其是第 16 章),但是现在,完全竞争市场假设不失为一个方便而有效的假设。

---

① 有时选用符号 r 表示资本的租金率。因为这个变量经常和与其相关的但是不同的概念——市场利率相混淆,因此这里选用了另外一个符号来标记它。我们将在第 17 章考察 v 和利息率的确切关系。

8.1.6 经济利润和成本最小化

厂商在一定时期内的总成本是

$$总成本 = C = wl + vk \tag{8.1}$$

一如上文的定义，k 和 l 代表一定时期内使用的投入品。假设厂商只生产一种产出品，它的总收入等于产品价格(p)乘以总产量[$q=f(k,\ l)$，$f(k,\ l)$是厂商的生产函数]。经济利润(π)是总收入和总经济成本的差：

定义

经济利润。经济利润(economic profits，记为 π)：一个厂商总收入和其总成本之间的差值

$$\begin{aligned}\pi &= 总收入 - 总成本 = pq - wl - vk \\ &= pf(k,l) - wl - vk\end{aligned} \tag{8.2}$$

式 8.2 表明，一个生产厂商获得的经济利润是其所使用的资本和劳动的函数。正如我们在本书很多地方的假设，如果厂商寻求利润最大化，我们可以通过考察厂商如何使用 k 和 l 以最大化式 8.2 来研究厂商行为。这反过来将推演出一个供给理论和一个针对资本和劳动投入的"引致需求"理论。我们将在下一章详细讨论这些理论。尽管如此，我们将在本章构建一套独立的成本理论，使其具有一般性，并且适用于那些并不必然以利润最大化为目标的企业。为达到这个目标，我们通过对现有的产出选择讨论进行巧妙的转换来开始对成本的研究。也就是说，我们假设由于某种原因，厂商决定生产某一水平的产出(假设为 q_0)，其总收入因此固定为 pq_0。下面我们考虑厂商如何以最小的成本生产 q_0 的产量。

8.2 成本最低的投入选择

在数学上，这是一个约束最小化问题。在进行严格的数学推导之前，我们首先对成本最低的投入选择过程进行直观描述：为了在既定的产出水平下成本最低，厂商应该在等产量线上选择这样一点，该点上 l 对于 k 的技术替代率等于 w/v，也即 l 对于 k 在生产中的替代比率等于它们在市场上交易价格的比率。否则，假设厂商使用 $k=10$，$l=10$ 生产 q_0 的产出水平，并且该点的技术替代率 RTS 等于 2，而 $w=1$ 美元，$v=1$ 美元。因此 $w/v=1$(不等于 2)，在这样的投入组合下，生产 q_0 的成本是 20 美元。很明显这并不是最小的投入成本，比如厂商也可以用 $k=8$，$l=11$ 生产出 q_0。在该投入组合下，生产 q_0 的成本是 19 美元。因此第一个的投入组合并非最佳选择。与此类似的例子可以反映出当 RTS 与投入成本比率不等时的情形。

8.2.1 数学分析

数学上，我们对 $q=f(k,l)=q_0$ 寻求总成本的最小化，建立拉格朗日函数：

$$\mathscr{L} = wl + vk + \lambda[q_0 - f(k,l)] \tag{8.3}$$

存在约束时最小化的一阶条件是

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l} &= w - \lambda \frac{\partial f}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} &= v - \lambda \frac{\partial f}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= q_0 - f(k,l) = 0\end{aligned} \tag{8.4}$$

前两个等式相除，得

$$\frac{w}{v} = \frac{\partial f/\partial l}{\partial f/\partial k} = RTS(l\text{对于}k) \tag{8.5}$$

这意味着成本最小化的厂商应当使两种投入的技术替代率（RTS）与它们的价格比率相等。

8.2.2 进一步的说明

由成本最小化的一阶条件可以得到一些有趣的结果。例如，式 8.5 两端交叉相乘得到

$$\frac{f_k}{v} = \frac{f_l}{w} \tag{8.6}$$

也就是说，为了使成本最低，对所有要素投入所花费的每美元产生的边际生产力应该相等。如果增加一种投入可以更大程度地增加所花费每美元的产出，则该投入组合的成本不是最低的——厂商应该更多地使用能提供更高产出的投入，减少使用（在生产力方面）昂贵的投入。厂商不应该使用任何不符合式 8.6 中指出的普遍成本利润比的投入。

当然，式 8.6 也可以由式 8.4 推导而来。下面请注意它倒数的含义

$$\frac{w}{f_l} = \frac{v}{f_k} = \lambda \tag{8.7}$$

式 8.7 指出了通过增加劳动或者资本投入而增加一单位产出所需要的额外的成本。因为要使成本最小化，因此不管使用哪种要素，边际成本都是相等的。边际成本也可以在成本最小化问题中由拉格朗日乘数来计算。和所有约束条件下求最优解的问题一样，此处拉格朗日乘数表明在约束条件下增加产出将导致增加多少额外成本。因为边际成本在厂商的供给决策中具有很重要的作用，我们将经常回到成本最小化的这个特点上来。

8.2.3 图形分析

成本最小化如图 8.1 所示。对于给定等产量线 q_0，我们希望在等产量线上找出成本最小的点。等成本线就是一组斜率为 w/v 的平行直线。图 8.1 中有三条等成本线，$C_1 < C_2 < C_3$。从图中可以清楚地看出，生产 q_0 产量的最小成本由 C_1 给出，此时总成本曲线和等产量线恰好相切。成本最低时的投入组合是（l^*, k^*）。如果等产量线是凹向原点的（也即 RTS 随 k/l 的减小而减小），那么这种组合确实是成本最低的投入组合。数学方法和图形方法得到了相同的结论。

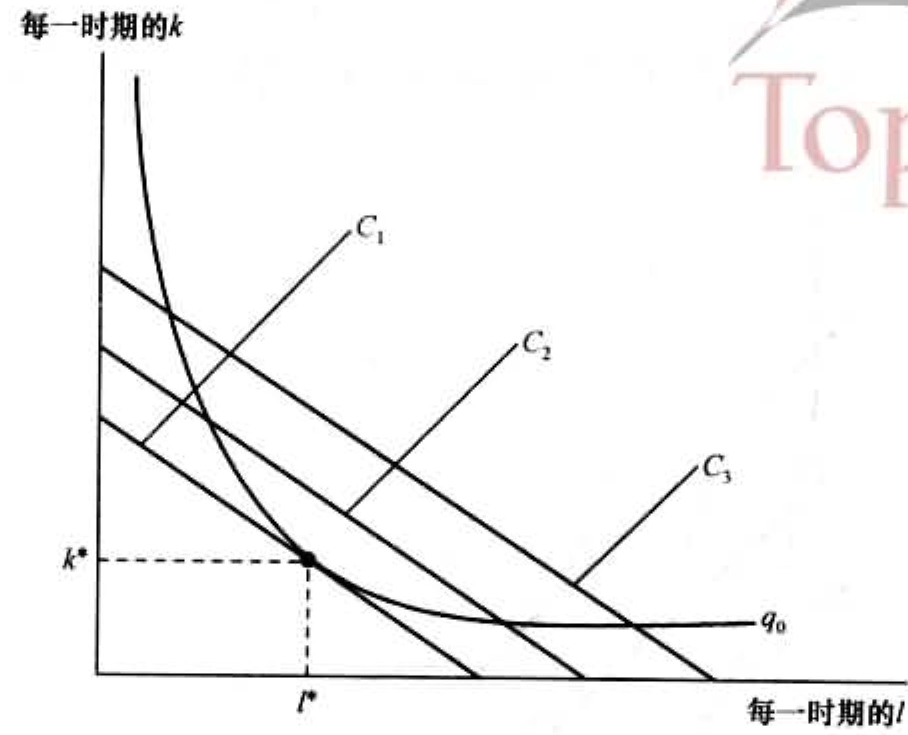


图 8.1　$q=q_0$ 时成本最小化

假定厂商通过选择 k 和 l 来最小化其成本。最小化的条件是：k 和 l 在技术上交换的比率（保持 $q=q_0$）应该与这两种投入在市场上的交换比率相等。换言之，l 对于 k 的边际技术替代率 RTS 应该和价格比率 w/v 相等。图中展示了这种相切关系；在 C_1 上选择（l^*，k^*）组合可以使利润最大化。

最优化原理

成本最小化。为了使任意给出的产出水平（q_0）上的成本最小化，厂商应该在等产量线 q_0 上的这样一点组织生产，在这一点 l 对于 k 的边际技术替代率（RTS）等于投入的租金价格的比率（w/v）。

8.2.4　投入的引致需求

图 8.1 显示出了厂商生产成本最小化问题和个人支出最小化问题（第 4 章研究的问题）在形式上的相似性。在这两个问题中，理性人希望以最低的成本达到他的（产出或者效用）目标。第 5 章我们描述了如何用该过程建立起一套关于某种商品的收入补偿需求理论。在考虑投入组合的情况时，追求成本最小化导致了生产一定产出对于资本和劳动的引致需求。因此，以上并不是关于厂商投入要素需求的全部理论，因为它没有考虑到产出决策的问题。但是，研究投入的引致需求，对于分析厂商对投入品的总需求是十分重要的，我们将在本章的后半部分详细介绍。

8.2.5　厂商的扩展线

对于任意水平的产出，厂商都可以追求成本最小化：对于每个 q，总能够找到使其成本最小的投入组合。如果厂商在任何产量下都有唯一确定的最小化组合（w，v），我们可以很容易地找到成本最小化选择的点的轨迹。图 8.2 展示了这个过程。线 $0E$ 表示较高产量水平的成本最小化切点的连续

轨迹，例如，生产由 C 给出的 q_1 产量水平所需的最小成本的投入组合是 k_1 和 l_1，其余的切点类似。这些切点的连续轨迹被称为厂商的**扩展线(expansion path)**，因为它记录了投入要素的价格保持不变时，投入如何随着产出的增加而扩展。

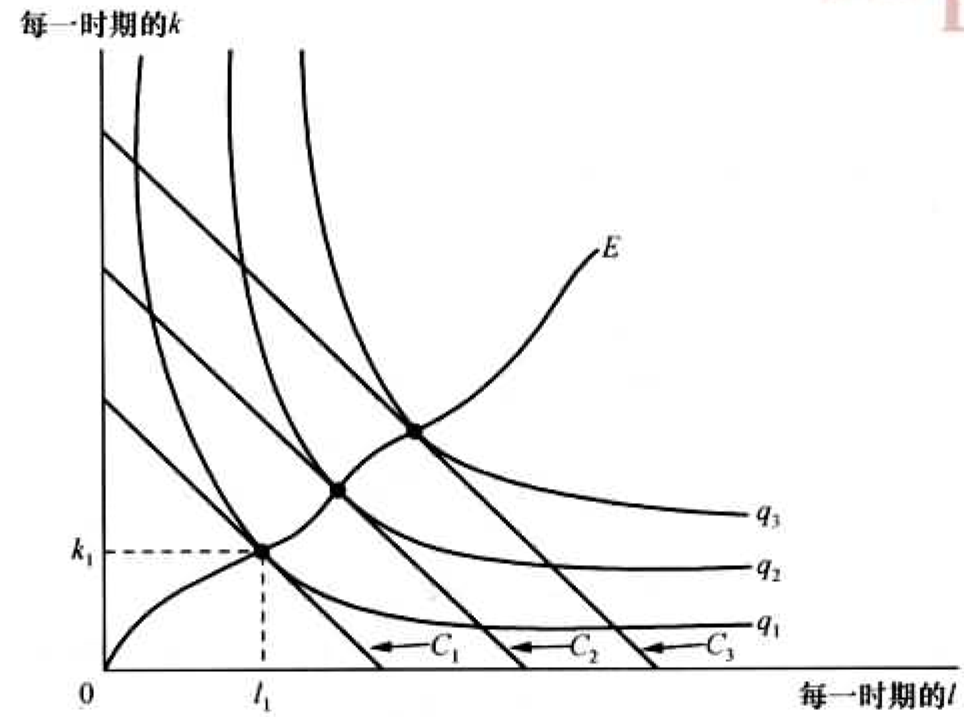


图 8.2　厂商的扩展线

厂商的扩展线是成本最小化切点的轨迹。假设投入价格不变，该曲线表明了随着产出的增加投入将如何增加。

正如图 8.2 所示，扩展线并不一定是直线。当产出扩大时，一些投入要素使用量的增加要快于其他要素，而哪些要素的增加快一些取决于生产函数等产量线的形状。因为成本最小化等价于：RTS 总等于 w/v，而 w/v 是被假设为不变的，扩展线的形状就取决于有特定的 RTS 的点在一系列等产量线上的轨迹。如果生产函数的规模报酬不变(或者更一般地说，它是同位的)，扩展线将是直线。因为这时，RTS 只依赖于 k 与 l 的比率，此比率在该扩展线上处处相等。

假设扩展线具有正的斜率通常是合理的。也就是说，较高的产出水平需要同时更多地投入两种要素。实际上不必然如此，正如图 8.3 所示。产出增长超过 q_2 将导致使用的劳动数量递减。在这个范围内，劳动是**劣等投入要素(inferior input)**。即使等产量线具有一般的凸的形状，劣质投入状况的发生在理论上也是可能的。

许多理论探讨都集中在对劣质要素的分析上。要回答劣质要素在实际生产中是否可能发生是一个有难度的实证问题。"资本"与"劳动"这两种广义的投入似乎不可能成为劣等投入要素，但如果将这两种投入细致划分，便可能出现劣等性问题。例如，随着建筑工艺和设备的改进(比如铲土机的应用)，铁铲的使用量将下降。尽管我们会在本书中涉及一些由于劣等要素而产生的复杂问题，但不会特别关注由该因素派生出的理论分析。

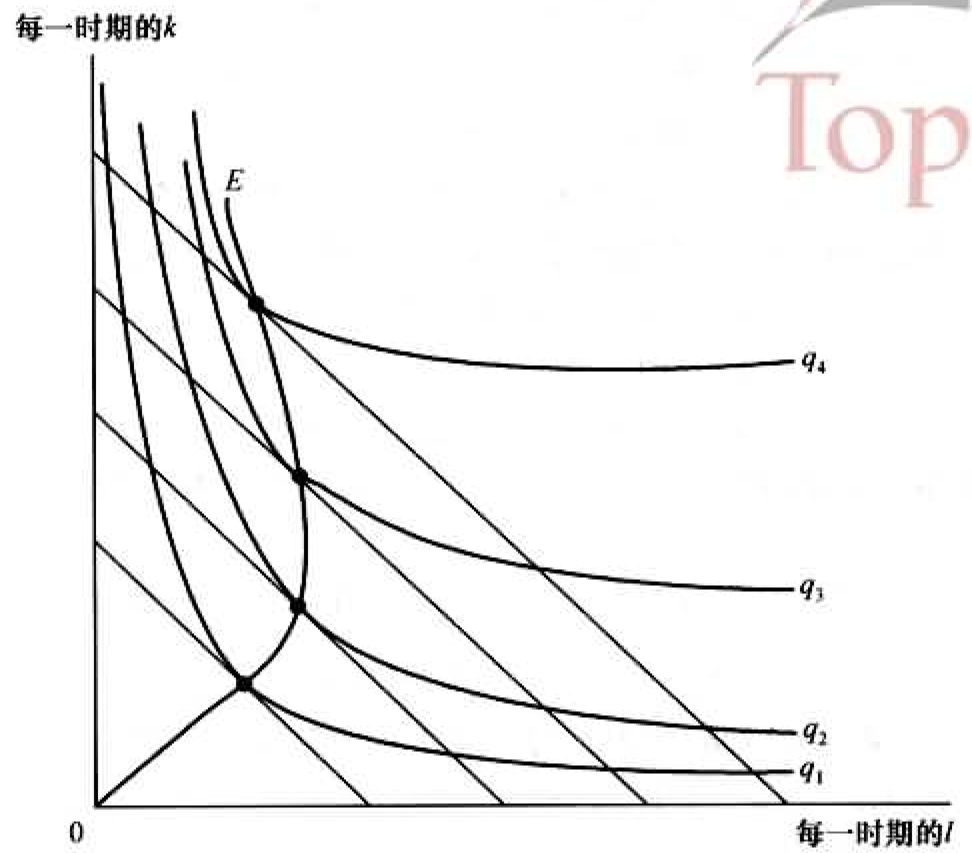


图 8.3　劣等要素

在这一组特殊的等产量线中，劳动是劣等要素，因为当产量超过 q_2 时，只需投入较少劳动。

例 8.1

成本最小化

用我们在上一章涉及的两个生产函数可以容易地说明生产成本最小化过程。

a. 柯布-道格拉斯生产函数：$q=f(k,l)=k^{\alpha}l^{\beta}$

此时生产 q_0 产量成本最小化的拉格朗日表达式是

$$\mathscr{L}=vk+wl+\lambda(q_0-k^{\alpha}l^{\beta}) \tag{8.8}$$

最小化的一阶导数条件是

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial k}&=v-\lambda\alpha k^{\alpha-1}l^{\beta}=0\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial l}&=w-\lambda\beta k^{\alpha}l^{\beta-1}=0\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}&=q_0-k^{\alpha}l^{\beta}=0\end{aligned} \tag{8.9}$$

第二个等式除以第一个等式得到

$$\frac{w}{v}=\frac{\beta k^{\alpha}l^{\beta-1}}{\alpha k^{\alpha-1}l^{\beta}}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{k}{l} \tag{8.10}$$

这再一次证明了当两种投入的价格比率等于 RTS 时，成本是最小的。因为柯布-道格拉斯生产函数是位似函数，RTS 只依赖于两种投入的比例。如果投入成本的比率不变，厂商将使用相同的投入比

例，无论它们生产多少——也就是说，扩展线将是通过原点的直线。

举一个具体的例子，假设 $\alpha=\beta=0.5, w=12, v=3$，厂商希望生产 $q_0=40$ 的产量。成本最小化的条件要求 $k=4l$。将其代入生产函数（式 8.9 的最终结果），我们有 $q_0=40=k^{0.5}l^{0.5}=2l$。因此成本最小的投入组合是 $l=20, k=80$，总成本是 $vk+wl=3(80)+12(20)=480$。通过考察能够达到相同生产水平的 $q_0=40$ 的其他投入组合，可以看到这的确是使成本最小化的组合。

$$
\begin{aligned}
k &= 40,\quad l = 40,\quad C = 600\\
k &= 10,\quad l = 160,\quad C = 2\,220\\
k &= 160,\quad l = 10,\quad C = 600.
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

任何其他能够生产 40 单位产出的投入组合所需要的成本都高于 480。通过考察边际生产力，我们会发现在最佳点

$$
\begin{aligned}
MP_k &= f_k = 0.5k^{-0.5}l^{0.5} = 0.5(20/80)^{0.5} = 0.25\\
MP_l &= f_l = 0.5k^{0.5}l^{-0.5} = 0.5(80/20)^{0.5} = 1.0
\end{aligned}
\tag{8.12}
$$

此时劳动的边际生产力是资本的四倍，恰好补偿了每单位劳动投入比资本高出的价格。

b. CES 函数：$q=f(k,l)=(k^\rho+l^\rho)^{\gamma/\rho}$

我们再一次设定拉格朗日表达式

$$\mathscr{L}=vk+wl+\lambda[q_0-(k^\rho+l^\rho)^{\gamma/\rho}] \tag{8.13}$$

成本最小化的一阶导数条件是

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial k} &= v-\lambda(\gamma/\rho)(k^\rho+l^\rho)^{(\gamma-\rho)/\rho}(\rho)k^{\rho-1}=0\\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial l} &= w-\lambda(\gamma/\rho)(k^\rho+l^\rho)^{(\gamma-\rho)/\rho}(\rho)l^{\rho-1}=0\\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \lambda} &= q_0-(k^\rho+l^\rho)^{\gamma/\rho}=0
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

式中的前两个式子相除，可以约去很多烦琐的符号，得到

$$\frac{w}{v}=\left(\frac{l}{k}\right)^{\rho-1}=\left(\frac{k}{l}\right)^{1-\rho}=\left(\frac{k}{l}\right)^{1/\sigma},\quad 或者\quad \frac{k}{l}=\left(\frac{w}{v}\right)^{\sigma} \tag{8.15}$$

因为 CES 函数也是齐次函数，所以成本最小化时，投入比率不依赖于产出的绝对水平，式 8.15 的结果是柯布-道格拉斯生产函数结果（$\sigma=1$）的一般性推广。在柯布-道格拉斯生产函数成本最小时，资本劳动比率变化直接与工资—资本租金变化成比例。在替代性更大的情况之下（$\sigma>1$），工资—资本租金的变化比率大于成本最低时的资本—劳动变化比率。替代性较小的情况下（$\sigma<1$），工资—资本租金的变化比率小于成本最低时的资本—劳动变化比率。

请回答：在 $w/v=4$ 的柯布-道格拉斯生产函数的例题中，我们发现生产 40 单位产出，成本最低时要素投入比例是 $k/l=80/20=4$。对于 $\sigma=2$ 或是 $\sigma=0.5$，这个数值应该如何变化？实际应该使用什么样的投入组合？总成本是多少？

8.3 成本函数

我们现在来研究厂商的总成本结构,通过扩展线推导总成本函数将是十分方便的。

定义

总成本函数。总成本函数(total cost function)描述对于任意一组投入组合和任意产出水平,厂商的最小总成本

$$C = C(v, w, q) \tag{8.16}$$

图 8.2 清晰地展示了总成本随着产出 q 的增加而增加。保持投入要素的价格固定,分析总成本和产出之间的关系,将是我们研究的出发点。随后,我们将考察投入要素价格的变化将如何改变扩展线和与其相关的成本函数。

8.3.1 平均成本函数和边际成本函数

尽管总成本函数提供了关于产出—成本的总体信息,但是研究每单位产出的成本更加具有现实意义,因为这更加接近每单位商品价格的需求分析。两种不同的单位成本测量方法在经济学中都有着广泛的应用:(1) 平均成本,每单位产出的成本;(2) 边际成本,多生产一单位商品的成本。下面的定义将说明这两个概念和总成本之间的关系:

定义

平均成本和边际成本。平均成本(average cost function, *AC*)是通过计算每单位产出的总成本而得到的

$$\text{平均成本} = AC(v, w, q) = \frac{C(v,w,q)}{q} \tag{8.17}$$

边际成本(marginal cost function, *MC*)是通过计算每单位产出变化导致的总成本变化而得到的

$$\text{边际成本} = MC(v, w, q) = \frac{\partial C(v,w,q)}{\partial q} \tag{8.18}$$

注意,在这些定义中,平均成本和边际成本都依赖于生产的产出水平和投入要素的价格。在本书的许多地方,都使用二维图形来描述成本和产出之间的关系。正如在上面的定义中所阐明的,所有的图形都建立在这样的假设之上:投入要素的价格不变并且技术水平不发生变化。如果投入价格发生变化或者技术取得进步,成本曲线一般会移动到新的位置。在本章后面的部分,当详细研究完整的生产函数时,我们将探讨成本曲线移动的方向和大小。

8.3.2 总成本的图形分析

图 8.4(a)和图 8.5(a)给出了总成本和厂商产出水平之间的关系及其可能存在的两种形状。在

图 8.4(a)中,总成本只是简单地与产出成比例关系。当生产函数呈现规模报酬不变时,会出现这种情形。此时,假设生产一单位产出需要 k_1 单位资本投入和 l_1 单位劳动投入。那么,

$$C(q=1)=vk_1+wl_1 \tag{8.19}$$

由于规模报酬不变,为了生产 m 单位产出,需要 mk_1 单位资本和 ml_1 单位劳动。① 因此,

$$\begin{aligned} C(q=m) &= vmk_1+wml_1=m(vk_1+wl_1) \\ &= m\cdot C(q=1) \end{aligned} \tag{8.20}$$

与此同时,也建立起了产出和成本之间的比例。

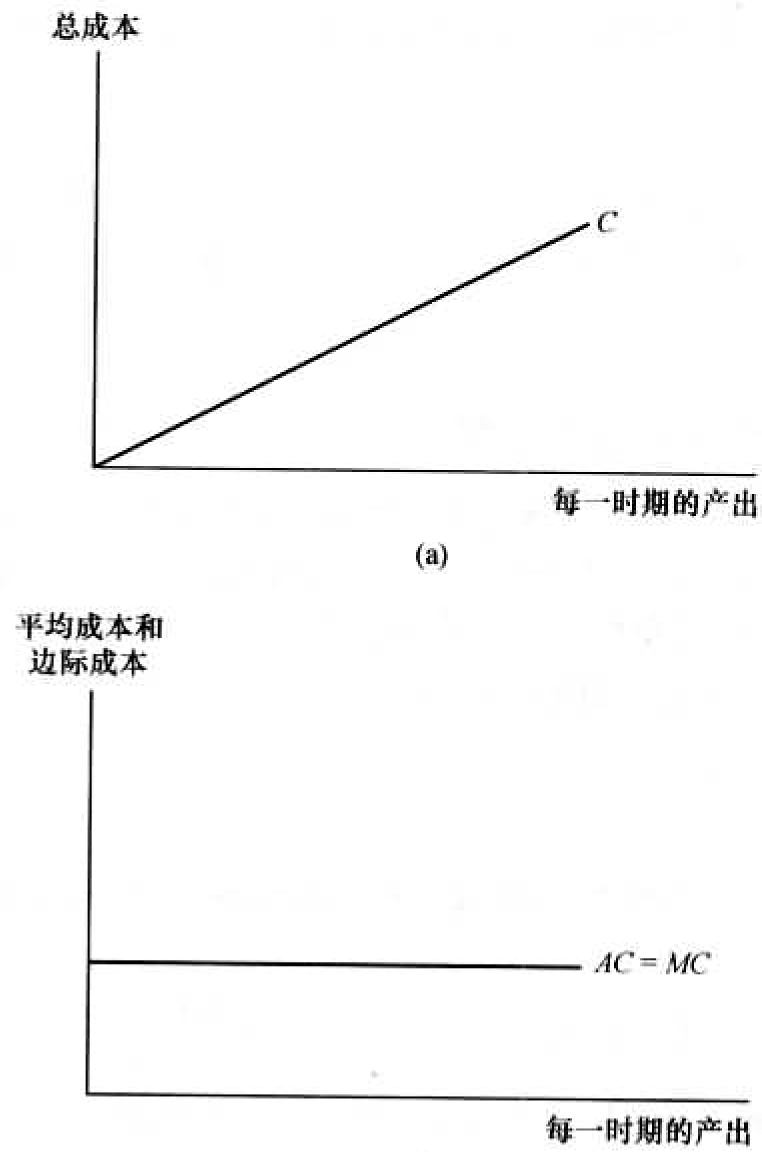


图 8.4　规模报酬不变的总成本、平均成本和边际成本曲线

图(a)中,总成本与产出水平对应成比例。图(b)中,平均成本和边际成本相等且对于所有产出水平都是常数。

图 8.5 中的情况更加复杂。初始时,总成本曲线是凹的,虽然成本随产量增长很快,增长率却逐渐降低;而当曲线超过中间某一点后,总成本曲线开始变成凸,成本开始以更快的速度增长。总成本曲线有如此形状的一个可能原因是生产的其他投入要素(如企业家才能)并没有随着劳动和资本的

① 投入组合(mk_1,ml_1)可以使生产 m 单位产出成本最小,因为投入比例仍然是 k_1/l_1,并且规模报酬不变的生产函数的 *RTS* 取决于这个比例。

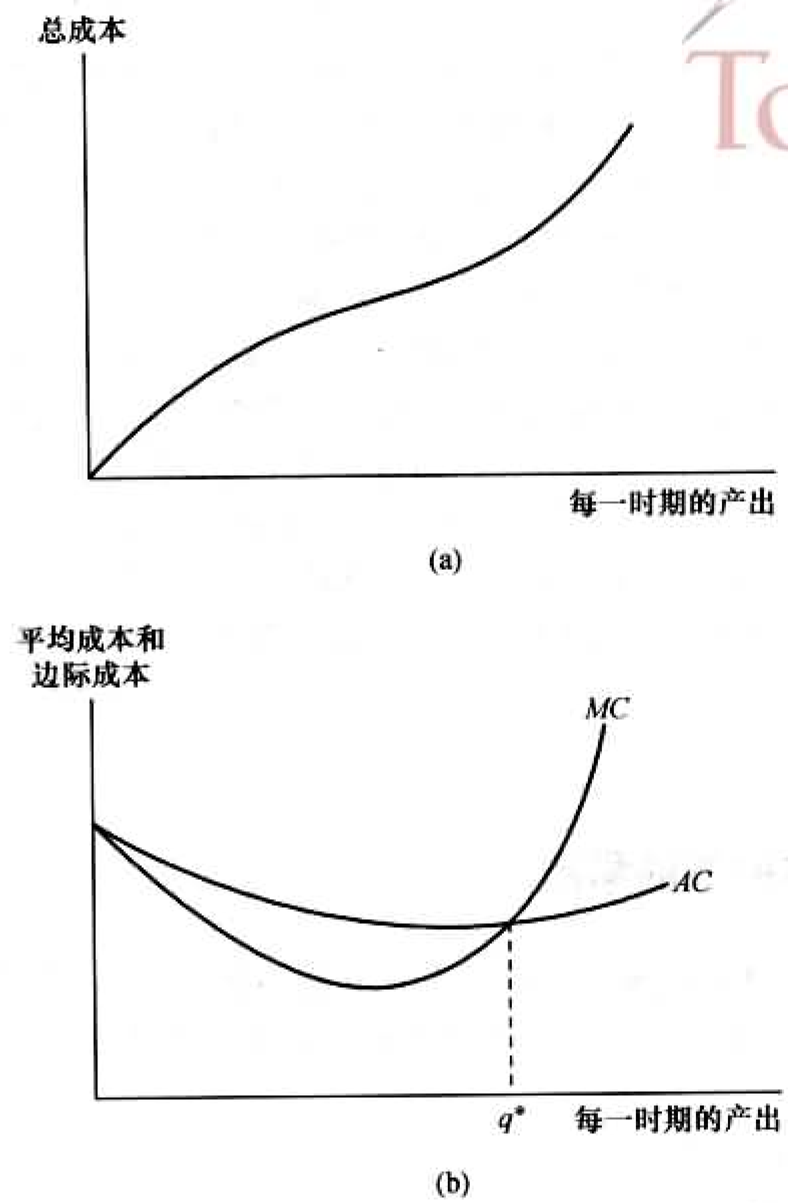


图 8.5　总成本曲线是立方形式时的总成本、平均成本和边际成本曲线

如果总成本曲线有图(a)所示的三次方的形式，平均成本曲线和边际成本曲线都是 U 型的。在图(b)中，边际成本曲线在 q^* 产出水平上穿过平均成本曲线的最低点。

增加而增加。在这个例子中，总成本曲线中最初之所以是凹的，可以解释为随着产量上升，企业家能更好地发挥其管理才能——他需要一个适量的产出以充分发挥其作用。然而，当超过这一折点的时候，企业家才能对于协调生产是力不从心的，所以产出是递减的。所以，总成本上升很快。

人们对于图 8.5(a)中三次方形式的总成本曲线有一系列其他解释，但此处不对其进行讨论。归根结底，总成本曲线的形状是一个实证问题，唯一地决定于实际数据。在本章的扩展部分，我们将详细阐述成本函数方面的问题。

8.3.3　平均成本和边际成本的图形分析

利用从总成本中得到的信息，我们可以建立图 8.4(b)和 8.5(b)中的平均成本和边际成本曲线。对于规模报酬不变的情况(图 8.4)这很简单，因为总成本和产出对应成比例，平均成本和边际

成本是常数且在任何产量水平下都是相等的。[①] 如图 8.4(b)中的水平直线所示。

对于图 8.5 中三次方形式的总成本曲线，计算平均成本和边际成本曲线需要一些几何直觉。如式 8.18 所指出，边际成本是总成本曲线的斜率。因此，根据假设的三次方形式的总成本曲线形状，*MC* 曲线是 U 型的，对应于总成本曲线，它在其凹的部分下降，在折点以后上升。由于总成本曲线的斜率始终为正，所以 *MC* 总大于零。平均成本(*AC*)在第一单位产出上等于其边际成本。[②] 随着产出的增加，*AC* 将大于 *MC*，因为 *AC* 既反映最后一单位产品的边际成本也反映以前生产产品的边际成本，只要 $AC > MC$，平均成本必然是下降的。因为新生产的商品成本低于平均成本，它们会将平均成本持续拉下。与此同时，边际成本是逐渐提高的，并且最终在 q^* 处等于平均成本。若边际成本超过这一点，$MC > AC$，平均成本也会上升，因为较高的边际成本会将拉动平均成本的上升。因此，我们看到 *AC* 曲线也是 U 型的，并且在 q^* 达到最低，*AC* 和 *MC* 也相交于此。[③] 在成本函数的实证分析中，研究者对于平均成本达到最小的这一点十分关注。它反映了所考察的特定生产过程的"最小有效率规模"。这个点之所以在理论中有如此之大的重要性，是因为其在完全竞争市场的长期价格决策中扮演重要角色(参见第 10 章)。

8.4 成本函数和成本曲线的移动

图 8.4 和图 8.5 中的成本曲线显示了在所有其他投入要素保持不变的前提下，成本和产量之间的关系。值得注意的是，曲线的建立基于投入要素的价格和技术水平不变的假设。[④] 如果这些因素

---

① 数学上，因为 $C = aq$(其中 a 是单位产出的成本)

$$AC = \frac{C}{q} = a = \frac{\partial C}{\partial q} = MC$$

② 从数学推导上看，当 $q = 0$ 时，$AC = MC$。这可以由洛必达法则证明。洛必达法则是：如果 $f(a) = g(a) = 0$，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

此处，在 $q = 0$ 时 $C = 0$，因此

$$\lim_{q \to 0} AC = \lim_{q \to 0} \frac{C}{q} = \lim_{q \to 0} \frac{\partial C/\partial q}{1} = \lim_{q \to 0} MC$$

或者

$$q = 0 \text{ 时}, \quad AC = MC$$

因此得证。

③ 数学上，我们通过使其导数等于零，得到 *AC* 的最小值

$$\frac{\partial AC}{\partial q} = \frac{\partial \dfrac{C}{q}}{\partial q} = \frac{q \cdot \dfrac{\partial C}{\partial q} - C \cdot 1}{q^2} = \frac{q \cdot MC - C}{q^2} = 0$$

或者

$$q \cdot MC - C = 0$$

即

$$MC = C/q = AC$$

④ 对于多产的厂商而言，必须考虑另外一种复杂的情况。对于这些厂商而言，生产一定产量(比如 q_1)相关的成本可能会受到生产其他产量(比如 q_2)的影响。这种情况下，就称厂商表现出"范围经济性"，并且总成本函数的形式是 $C(q_1, q_2, w, v)$。因此，建立 q_1 成本函数时必须保持 q_2 不变。假设 q_2 增加会使 q_1 成本曲线向下移动。尽管本章不会涉及多产的例子，但是本章练习题 12.2 和扩展部分都主要是关于范围经济问题的概念的。

改变，成本曲线将发生移动。下面，我们通过深入分析成本函数的数学形式来研究它们的移动。我们以相同的例子开始。

例 8.2

一些典型的成本函数

在本例中，我们计算与三种不同的生产函数相联系的成本函数。稍后，我们将使用这些例子来阐明成本函数的一般性质。

a. 固定投入要素比例生产函数：$q=f(k,l)=\min(ak,bl)$。

通过生产函数计算成本函数，对经济学专业的学生来说是一件备受打击的事情。因此，让我们从一个简单的例子开始，来说明总成本是如何依赖于投入的成本和生产的产量。我们知道在固定投入比例的情况下，厂商将在 L 型等产量线的顶点进行生产，此时 $q=ak=bl$。因此，总成本是

$$\text{总成本}=C(v,w,q)=vk+wl=v(q/a)+w(q/b)=q\left(\frac{v}{a}+\frac{w}{b}\right) \tag{8.21}$$

这确实是我们想要得到的函数类型，因为它将总成本函数以 v,w,q 的函数形式表达出来，并且用到了原生产函数的一些参数。因为该函数规模报酬不变，采用其特殊形式

$$C(v,w,q)=qC(v,w,l) \tag{8.22}$$

也就是说，总成本等于产量乘以生产每单位产出的成本。投入要素价格增加将显著增加该函数值，也即总成本；而参数 a 和 b 的增加则表现出技术的进步会降低总成本。

b. 柯布-道格拉斯生产函数：$q=f(k,l)=k^{\alpha}l^{\beta}$。

这是我们进行烦琐计算的第一个例子，但是要清楚的是，我们的最终目标是使用成本最小化的结果替代生产函数中的投入以更加清晰地描述生产过程。从例 8.1 中可知要达到成本最小化，要求

$$\frac{w}{v}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{k}{l}\quad\text{因此，}\quad k=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{v}\cdot l$$

将其代入生产函数可以得到劳动投入以 q,v 和 w 表示的解

$$q=k^{\alpha}l^{\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{v}\right)^{\alpha}l^{\alpha+\beta}\quad\text{或者}\quad l=q^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha/\alpha+\beta}w^{-\alpha/\alpha+\beta}v^{\alpha/\alpha+\beta} \tag{8.23}$$

可以得到一组类似的解

$$k=q^{1/\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta}v^{-\beta/\alpha+\beta} \tag{8.24}$$

现在我们得到总成本函数

$$C(v,w,q)=vk+wl=q^{1/\alpha+\beta}Bv^{\alpha/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta} \tag{8.25}$$

其中，$B=(\alpha+\beta)\alpha^{-\alpha/\alpha+\beta}\beta^{-\beta/\alpha+\beta}$，是一个只包括参数 α 和 β 的常量。尽管这个式子有一点烦琐，但是柯布-道格拉斯生产函数的一些有趣性质已经凸显出来。首先，该函数是关于产出的凸函数、线性函数还是凹函数取决于生产函数是规模报酬递减（$\alpha+\beta<1$）、规模报酬不变（$\alpha+\beta=1$）的还是规模报酬递增（$\alpha+\beta>1$）的。其次，任何投入价格的上升都会增加成本，增加的程度取决于投入的相对重要性，可以通过其在生产函数中的指数反映出来。最后，成本函数是投入成本的一次齐次函数——正如我们下面要证明的，这是所有成本函数的一般特征。

c. CES(替代弹性不变)函数：$q=f(k,l)=(k^{\rho}+l^{\rho})^{\gamma/\rho}$。

这种情况下，我们省去了计算这些式子的烦琐步骤。为了得出总成本函数我们使用式 8.15 中给出的成本最小化的条件，分别解得每种要素投入，最终得到

$$\begin{aligned}C(v,w,q) &= vk+wl = q^{1/\gamma}(v^{\rho/\rho-1}+w^{\rho/\rho-1})^{(\rho-1)/\rho}\\ &= q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}\end{aligned} \tag{8.26}$$

其中替代弹性由 $\sigma=1/(1-\rho)$ 给出。再一次地，总成本的形状由生产函数的规模参数(γ)决定，而且总成本函数随着两种投入要素价格的升高而增加。此函数也是这些要素投入价格的一次齐次函数。CES 函数一个不理想之处在于，要想赋予各种投入品不同的权重，就办不到了，因为函数中每种要素的地位是对称的。不过，要解决这个问题也不难，具体怎么操作，请参见本章练习题 8.7。

请回答：CES 函数内在的各种不同的替代可能性是如何在式 8.26 的 CES 成本函数中反映出来的？

8.4.1 成本函数的性质

以上例子阐述了总成本函数的一般性质，包括：

1. 齐次性：例 8.3 中的总成本函数都是投入要素的一次齐次函数。也就是说，对于任何产量水平，如果投入的价格增加一倍，生产成本也会相应地增加一倍(你可以自己验证这个结论)。这是以上所有生产函数的一个共有性质。当所有投入价格都增长一倍(或者以相同比例增长)，任意两种投入的价格比率将保持不变。因为成本最小化要求生产必须在等产量线上投入的价格比率等于 *RTS* 的那一点进行，所以成本最小化的投入组合也不会改变。因此，厂商必须购买相同的要素投入并为其付出相当于原来两倍的支出。其含义是如果所有投入的价格以相同的幅度增长，将不会改变厂商的投入组合决策，且其成本曲线将因此直接向上移动。

2. 总成本函数是 q, v 和 w 的单调非减函数：这个结果显而易见，但还是有必要对其进行进一步分析。因为成本函数是由成本最小化推导而来的，因此成本函数中任何一个因数的增大会导致成本降低将产生一个矛盾。例如，如果产出从 q_1 增加到 q_2 将使成本降低，那么厂商初始时肯定没有在成本最小化的点上进行生产。它应该生产 q_2 产量并放弃 q_2-q_1 的产出，就可以以更低的成本生产 q_1。类似地，如果投入的价格上涨能降低总成本，那么厂商初始时肯定没有使成本最小化。证明如下：假设厂商开始使用(k_1,l_1)的投入组合是成本最小化的，现在 w 上升了，显然保持(k_1,l_1)的初始投入会使得成本增加。但是如果投入决策改变确实能够使总成本减少，那么在更高的 w 下就存在比初始投入(k_1,l_1)成本更低的投入组合，这个组合在工资上涨前必然更低，这样就推出(k_1,l_1)不是成本最小

化组合,产生了矛盾。这样我们就证明了成本函数的这个性质。[①]

3. 总成本函数对于投入价格是凹的:用图形来证明这个性质是最简单的。图 8.6 表示的是一种投入要素在不同价格上对应的总成本。具体来说,保持 q 和 v 不变,w 的不同值对应着不同的总成本。假设初始时普遍工资率是 w,生产 q_1 的总成本由 $C(v, w, q_1)$ 给出。如果厂商的投入决策不随工资的改变而改变,其总成本曲线将会是线性的,如图中直线 $C(v, w, q_1)$ 所示。但当工资率变化时,追求成本最小化的厂商可能会改变其生产 q_1 产量的投入组合,实际的成本曲线[$C(v, w, q_1)$]将会下降到伪成本曲线以下。因此,总成本曲线将具有图 8.6 所示的凹的形状。这一结果的含义是:当一个厂商面临的投入价格在某一水平上下波动时,相对于该价格不变,厂商的生产成本将更低。伴随着价格的波动,厂家可以灵活采用不同的投入组合来利用价格波动的优势,比如,工资率低的时候使雇用更多劳动力;而在工资升高时,节省劳动投入。

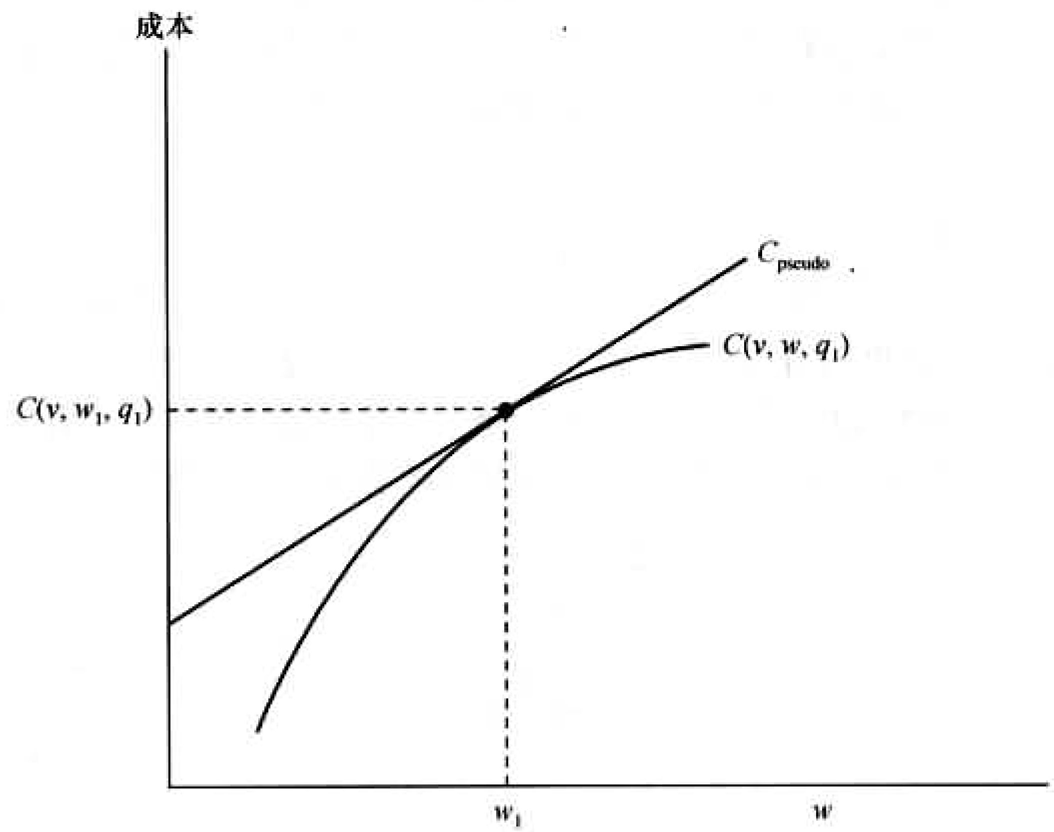


图 8.6 总成本曲线是投入要素价格的凹函数

工资率是 w_1 时,生产 q_1 的总成本是(v, w, q_1)。如果厂商不改变其投入组合,生产 q_1 的成本将为直线 C_{pseudo}。但由于投入可以相互替代,实际成本 $C(v, w, q_1)$ 将落在这条线下面,因此成本函数对于 w 是凹的。

① 严格的证明要用到包络定理,该法则也应用于有约束条件的最小化问题。我们看式 8.3 中的拉格朗日表达式,正如第 2 章指出的那样,通过对拉格朗日表达式的变量进行微分,我们可以计算该表达式中(此处是总成本)的目标变量的变化。进行微分,得

$$\frac{\partial C^*}{\partial q} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = \lambda \quad (= MC) \geqslant 0$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial v} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v} = k \geqslant 0$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial w} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = l \geqslant 0$$

这些包络的结果不仅仅可以证明成本函数的性质,它们本身在本章的后面部分也很有用。

4. 平均成本和边际成本：总成本的有些（并非全部）性质也适用于与其相关的平均成本和边际成本函数。齐次性就是一个直接的例子。由 $C(tv,tw,q)=tC(v,w,q)$，我们有

$$AC(tv,tw,q)=\frac{C(tv,tw,q)}{q}=\frac{tC(v,w,q)}{q}=tAC(v,w,q) \tag{8.27}$$

并且①

$$MC(tv,tw,q)=\frac{\partial C(tv,tw,q)}{\partial q}=\frac{t\partial C(v,w,q)}{\partial q}=tMC(v,w,q) \tag{8.28}$$

尽管如此，q、v、w 的变化对于平均成本和边际成本的影响有时是不明确的。我们已经看到平均成本和边际成本有斜率为负的部分，所以 AC 和 MC 都不是 q 的非减函数。因为当投入价格上升时总成本肯定不会减少，所以很明显，平均成本随着 w 和 v 的增长而增加。当考虑到投入劣质要素的可能性时，情况将更加复杂。在这种情况下（当然，这种情况很少见），劣质要素价格上涨实际上会使边际成本下降。尽管这样的证明是直截了当的②，但是如此直观的解释是难以令人信服的。在大部分情况下，很明显，一种投入要素的价格上升还是会增加边际成本的。

8.4.2 投入要素替代

一种投入品价格的变化将促使厂商改变其投入组合。因此，当投入价格变化时，对成本曲线变化的全面分析应该包括针对投入间相互替代性的考察。为了研究此过程，经济学家逐步掌握了一套测度替代弹性的方法。这种方法与我们之前在生产函数理论中用到的方法稍有不同，尤其是我们将考察在 q 保持不变的前提下，要素使用的比率（k/l）如何随着 w/v 的变化而改变。也就是说，我们希望沿着等产量线考察导数

$$\frac{\partial\left(\frac{k}{l}\right)}{\partial\left(\frac{w}{v}\right)} \tag{8.29}$$

将其化成比例形式

$$s=\frac{\partial k/l}{\partial w/v}\cdot\frac{w/v}{k/l}=\frac{\partial \ln k/l}{\partial \ln w/v} \tag{8.30}$$

该式给出了替代弹性的另一种更加直观的定义。③ 在有两种要素投入的情况下，s 一定是非负的；w/v 的增加将会使 k/l 增加（或者在各种要素比例必须固定的情况下，k/l 保持不变）。较大的 s 值表明厂商的要素投入比例将随着投入价格的变化发生显著变化；反之，较小的 s 值表明投入要素的价

① 这一结果并不和以下准则，即 k 次齐次函数的微分是 $k-1$ 次齐次函数相背离，因为我们只是对 q 求导，因此总成本函数仍然只是投入要素价格的齐次函数。

② 该证明使用了第 207 页注脚①的包络定理。因为边际成本函数（MC）可以通过成本最小化条件下对拉格朗日表达式求导得出，所以我们可以使用杨格定理证明

$$\frac{\partial MC}{\partial v}=\frac{\partial(\partial\mathscr{L}/\partial q)}{\partial v}=\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial v\partial q}=\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial q\partial v}=\frac{\partial k}{\partial q}$$

因此，如果资本是正常投入，则 v 的增加将会使 MC 增加；同时，如果资本是劣质投入，v 的增加实际上会使 MC 减小。

③ 通常把这个定义归功于 R. G. D. Allen，在他的《经济学的数理分析》（*Mathematical Analysis for Economists*）（New York：St. Martin's press，1938，pp. 504—509）中，他以另外一种方法对其进行了发展。

格变化造成的影响相对较小。

8.4.3 局部替代弹性

如果只有两种投入，式 8.30 定义的替代弹性和第 7 章的定义（式 7.32）是相同的。这可以由成本最小化[①]厂商将在 l 对于 k 的边际技术替代率 RTS 等于投入价格比率 w/v 的点进行生产来解释。式 8.30 定义的最显著优点是它可以比以往章节中的定义更加容易地推广到多种投入的一般情况。特别地，我们有以下定义：

定义

局部替代弹性（s_{ij}）。价格 w_i 和 w_j 的两种投入间的替代弹性是

$$s_{ij} = \frac{\partial x_i/x_j}{\partial w_j/w_i} \cdot \frac{w_j/w_i}{x_i/x_j} = \frac{\partial \ln(x_i/x_j)}{\partial \ln(w_i/w_j)} \tag{8.31}$$

其中产出与除去这两种投入外的其他投入价格保持不变。

该定义突出“局部”一词，是为了与以生产函数为基础的定义相区分。实际上 s_{ij} 这个定义是更加贴近实际的，因为它考虑到了当 x_i 或 x_j 的价格改变时，厂商将可能改变除了 x_i 和 x_j 之外的要素投入；而不像第 7 章的定义那样，人为地限定保持其他投入不变。例如，假设能源的价格上涨，我们想知道若要保持产量不变，这种价格变化对能源—资本投入的使用比例将有何影响。当然我们能猜到能源投入会减少，但是厂商还可能使用第三种投入，比如劳动，来替代能源和资本，使得它们都减少，所以最后得出能源—资本的比例上升了也有可能。要是这样，我们就称资本和能源是互补品，因为相对于“劳动”而言，它们俩是结合在一起使用的。至于这对于成本函数意味着什么，我们不再深究。本章的扩展部会介绍已知成本函数 s_{ij} 的计算方法。

8.4.4 成本曲线移动的数量规模

我们已经证明了如果投入要素价格上涨，将会增加总成本、平均成本和边际成本（劣等投入的情况除外）。我们现在想知道成本增加的幅度。首先最明显的是，生产过程中投入的相对重要性将对成本的增加产生重要影响。如果一种投入要素构成总成本的很大份额，则此投入价格的上升将显著增加成本。工资率的增加将急剧增加房屋建筑商的成本，因为劳动是建筑行业中主要的投入要素。另一方面，相对次要的投入价格上涨将对成本产生较小的影响。钉子价格上涨将不会使房屋成本大幅度上升。

决定成本增加程度的另一个因素是投入的可替代性，虽然该因素并不是显而易见的。如果厂商可以轻易地用另一种投入代替那种价格上涨的投入，成本将不会上升。例如，20 世纪 60 年代末铜的

---

① 在例 8.1 中我们发现，对于 CES 生产函数而言，成本最小化要求 $\frac{k}{l} = \left(\frac{w}{v}\right)^{\sigma}$，因此，$\ln(k/l) = \sigma\ln(w/v)$，所以 $s_{k,l} = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln(w/v)} = \sigma$。

价格上升，对于电力厂商输送电力的成本基本上没有影响，因为它们发现可以很容易地用铝线来代替铜线。反之，如果厂商发现很难或者根本不可能替代价格变得昂贵的投入，成本会很快上升。20世纪70年代早期，黄金饰品的成本随着黄金价格快速上升，这是因为基本上没有东西能够替代这种稀有投入。

当然我们可以用局部替代弹性对所有这些影响的数量与规模作出精确的数学描述，但将使本书充满了令人费解的数学符号而显得很混乱。① 要达到我们的目标，以上的直观性讨论就足够了。综上所述，一项投入的价格变化将对厂商成本曲线的移动产生影响，而移动的幅度则取决于投入的相对重要性以及获得其替代品的可能性。

8.4.5 技术进步

技术进步可以使厂商使用更少的投入生产既定产出。因此，这样的技术进步显然使总成本曲线向下移动（如果投入价格保持不变）。尽管实际上用数学形式解释技术变化对总成本曲线的影响很复杂，但是也有一些例子，我们可以从中得到简单的结论。例如，假设生产函数是规模报酬不变的，技术进步可以以我们在第7章中描述的方式表现在生产函数中[即 $q=A(t)f(k,l)$，其中 $A(0)=1$]。这种情况下，初始时期的总成本可以写成

$$C_0 = C_0(v,w,q) = qC_0(v,w,1) \tag{8.32}$$

因为在 $t=0$ 时期生产一单位产出的投入在 t 时期将生产 $A(t)$ 单位产出，得到

$$C_t[v,w,A(t)] = A(t)C_t(v,w,1) = C_0(v,w,1) \tag{8.33}$$

由此，我们可以计算 t 时期的总成本函数，得

$$C_t(v,w,q) = qC_t(v,w,1) = qC_0(v,w,1)/A(t) = C_0(v,w,q)/A(t) \tag{8.34}$$

因此，总成本以技术变化率随时间降低。注意，在这个例子中，技术变化是“中性的”，它不影响厂商的投入决策（只要投入的价格保持不变）。这个中性结果可能在技术进步有更加复杂的形式时并不适用，或者规模报酬是可变的时候也不适用。但无论如何，技术进步总是能使成本降低的。

例 8.3

柯布-道格拉斯成本函数的移动

例 8.2 中，我们计算了柯布-道格拉斯成本函数是

$$C(v,w,q) = q^{1/\alpha+\beta}Bv^{\alpha/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta} \tag{8.35}$$

其中，$B=(\alpha+\beta)\alpha^{-\alpha/\alpha+\beta}\beta^{-\beta/\alpha+\beta}$。和例 8.1 中的数学证明一样，我们假设 $\alpha=\beta=0.5$，其中总成本函数被简化为

$$C(v,w,q) = 2qv^{0.5}w^{0.5} \tag{8.36}$$

如果确定了投入价格的数值，这个方程可以得出一条关于总成本和投入的总成本曲线。和以前一

① 想阅读全面的阐述，请参见 Ferguson, *Neoclassical Theory of Production and Distribution*, (Cambridge: Cambridge University Press, 1969), pp. 154—160。

样，我们假设，$v=3$ 且 $w=12$，它们之间的关系是

$$C(3,12,q) = 2q\sqrt{36} = 12q \tag{8.37}$$

并且，与例 8.1 相同，生产 40 单位产出耗费 480 的成本。此处，很容易计算得出平均成本和边际成本

$$\begin{aligned} AC &= \frac{C}{q} = 12 \\ MC &= \frac{\partial C}{\partial q} = 12 \end{aligned} \tag{8.38}$$

正如我们所期望的那样，平均成本和边际成本都是常数并且它们对于该规模报酬不变的生产函数是相等的。

投入价格的变化。如果其中一种投入的价格发生了变化，所有的成本也将发生变化。例如，如果工资上升到 27（这是一个便于计算的数字），成本将变成

$$\begin{aligned} C(3,27,q) &= 2q\sqrt{81} = 18q \\ AC &= 18 \\ MC &= 18 \end{aligned} \tag{8.39}$$

注意，工资上涨了 125%，成本只上涨了 50%，这是因为劳动在所有成本中只占 50%，而且该投入价格的变化刺激厂商用资本替代劳动。由于总生产函数由成本最小化推导而来，所以这种替代是在“幕后”完成的，它只反映了工资上涨对总成本的最终影响。

技术进步。我们现在来考察技术进步对于成本的影响。特别地，假设柯布-道格拉斯生产函数是

$$q = A(t)k^{0.5}l^{0.5} = e^{0.3t}k^{0.5}l^{0.5} \tag{8.40}$$

也就是说，技术进步以指数形式表现出来并且变化率是每年 3%。使用以前的式子（式 8.34），得

$$C_t(v,w,q) = C_0(v,w,q)/A(t) = 2qv^{0.5}w^{0.5}e^{-0.03t} \tag{8.41}$$

因此，如果投入价格保持不变，总成本以技术进步率——即每年 3% 的比率降低。比如，20 年以后，成本将变成（$v=3, w=12$）

$$\begin{aligned} C_{20}(3,12,q) &= 2q\sqrt{36}\cdot e^{-0.60} = 12q\cdot(0.55) = 6.6q \\ AC_{20} &= 6.6 \\ MC_{20} &= 6.6 \end{aligned} \tag{8.42}$$

结果，作为技术变化的结果，成本下降了近 50%。这可能会抵消之前讲到的工资上升对总成本造成的影响。

请回答：此例中，总成本关于投入成本的变化的弹性是什么？弹性大小是否受到技术变化的影响？

8.4.6 投入的引致需求和谢泼德引理

正如我们早前描述的那样，成本最小化过程包含着对于投入的隐含的需求。因为在推导过程中保持产出数量不变，所以这种对于投入的需求也是对于产出的引致需求。这种关系全面地反映在厂商的总成本函数中，而且，令人吃惊的是，对于厂商所有投入的引致需求可以从此函数中得出。这个方法用到我们所谓的“谢泼德引理”(Shephard's lemma)[①]，其证明了对于任何投入的引致需求可以通过对含有该投入价格的生产函数求偏导数求得。因为谢泼德引理广泛地应用于经济研究的多个领域，我们将对其进行相对较为详尽的考察。

谢泼德引理是显而易见的。假设劳动的价格(w)将略微上涨，这将如何影响总成本？如果其他什么都没有改变，似乎成本将近似地以当前公司雇用的劳动的数量(l)增长，那么$\partial C/\partial w = l$，这就是引理的内容。图 8.6 通过图示基本上得到了相同的结论。沿着伪成本函数，所有投入都保持不变。所以工资的增长直接以劳动使用量的比例增加总成本。因为实际的成本函数在当前的工资上和伪成本函数相切，其斜率(即其偏导数)也表明了当前对于劳动投入的需求数量。

从数学推导上讲，谢泼德引理是我们在第 2 章引入的包络定理的一个结论。在那里我们证明了问题中的某一参数的变化对约束条件下最优解的影响可以通过求解该最优问题的拉格朗日表达式对于该参数的偏导数来解决。成本最小化时，拉格朗日表达式是

$$\mathscr{L} = vk + wl + \lambda[\bar{q} - f(k,l)] \tag{8.43}$$

对任何一种投入使用包络定理，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(v,w,q)}{\partial v} &= \frac{\partial \mathscr{L}(v,w,q,\lambda)}{\partial v} = k^c(v,w,q)\\ \frac{\partial C(v,w,q)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathscr{L}(v,w,q,\lambda)}{\partial w} = l^c(v,w,q)\end{aligned} \tag{8.44}$$

其中上标用来明确对资本和劳动的最终需求函数只依赖于v,w和q。由于生产数量作为变量进入了该函数，投入需求实际是生产数量的引致量。需求函数的这一特性也在上标“c”中反映出来。[②] 因此，式 8.44 中的需求关系并非只依赖于投入需求，因为它还取决于厂商控制的一个变量。在下一章中，我们将通过证明利润最大化假设如何使我们用厂商产出的市场价格p来有效替代投入需求中的q，以全面研究投入需求。

例 8.4

投入的引致需求函数

本例将介绍如何运用例 8.2 中得到的总成本函数推导资本和劳动投入的引致需求函数。

a. 固定投入比例成本函数： $C(v,w,q) = q\left(\dfrac{v}{a} + \dfrac{w}{b}\right)$。

---

① 以 R. W. Shephard 命名，他在他的《生产和成本函数》(*Cost and Production Functions*) (Princeton: Princeton University Press, 1970) 中强调了生产函数和投入需求函数之间的重要关系。

② 上标反映了第 5 章中使用的收入补偿需求曲线(从支付函数得来)。此种情况下，需求函数是所假设的目标效用的引致量。

对于此成本函数，引致需求函数很简单

$$
\begin{aligned}
k^c(v,w,q) &= \frac{\partial C(v,w,q)}{\partial v} = \frac{q}{a} \\
l^c(v,w,q) &= \frac{\partial C(v,w,q)}{\partial w} = \frac{q}{b}
\end{aligned}
\tag{8.45}
$$

为了以最小的成本，采用固定投入比例生产既定的产出，不管投入价格如何，厂商都必须在等产量线的顶点进行生产。因此，投入需求只依赖于产量水平，v 和 w 不进入投入的引致需求的表达式。尽管如此，在固定投入比例的情况下，投入的价格还是能够影响总的投入需求，因为它将对厂商销售数量产生影响。

b. 柯布-道格拉斯成本函数：$C(v,w,q)=q^{1/\alpha+\beta}Bv^{\alpha/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta}$。

这种情况下，偏导数的形式稍微复杂一些，但更具说明性

$$
\begin{aligned}
k^c(v,w,q) &= \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}Bv^{-\beta/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}B\left(\frac{w}{v}\right)^{\beta/\alpha+\beta} \\
l^c(v,w,q) &= \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}Bv^{\alpha/\alpha+\beta}w^{-\alpha/\alpha+\beta} \\
&= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot q^{1/\alpha+\beta}B\left(\frac{w}{v}\right)^{-\alpha/\alpha+\beta}
\end{aligned}
\tag{8.46}
$$

因此，投入的引致需求决定于两种投入的价格。如果我们假设 $\alpha=\beta=0.5$（从而 $B=2$），由此推导出

$$
\begin{aligned}
k^c(v,w,q) &= 0.5\cdot q\cdot 2\cdot\left(\frac{w}{v}\right)^{0.5} = q\left(\frac{w}{v}\right)^{0.5} \\
l^c(v,w,q) &= 0.5\cdot q\cdot 2\cdot\left(\frac{w}{v}\right)^{-0.5} = q\left(\frac{w}{v}\right)^{-0.5}
\end{aligned}
\tag{8.47}
$$

当 $v=3, w=12, q=40$ 时，会得到与以前相同的结果——即厂商应该选择 $k=80, l=20$ 的投入组合来实现用最低的成本生产 40 单位产出。如果工资增加到 27，厂商应该选择 $k=120, l=40/3$ 的投入组合生产 40 单位产出。总成本将由 480 上升到 520，但是厂商用资本来代替现在变得比较昂贵的劳动为其节省了很多成本。因为如果使用初始的投入组合，成本将是 780。

c. CES 成本函数：$C(v,w,q)=q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}$。

投入替代性的重要程度在由 CES 成本函数得出的投入的引致需求函数中表现得更加明显。对于该函数

$$
\begin{aligned}
k^c(v,w,q) &= \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{1}{1-\sigma}\cdot q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma}(1-\sigma)v^{-\sigma} \\
&= q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma}v^{-\sigma} \\
l^c(v,w,q) &= \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{1}{1-\sigma}\cdot q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma}(1-\sigma)w^{-\sigma} \\
&= q^{1/\gamma}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{\sigma/1-\sigma}w^{-\sigma}
\end{aligned}
\tag{8.48}
$$

这些函数在 $\sigma=1$ 时(柯布-道格拉斯函数的情形)是不成立的,但我们可以研究替代性大于(如 $\sigma=2$)或者小于(如 $\sigma=0.5$)1 的情形,并且将 b 的情形作为一种中间状态。如果我们假设规模报酬不变($\lambda=1$),$v=3$,$w=12$ 和 $q=40$,当 $\sigma=2$ 时投入的引致需求是

$$\begin{aligned} k^c(3,12,40) &= 40(3^{-1}+12^{-1})^{-2}\cdot 3^{-2} = 25.6 \\ l^c(3,12,40) &= 40(3^{-1}+12^{-1})^{-2}\cdot 12^{-2} = 1.6 \end{aligned} \tag{8.49}$$

也就是说,资本投入的数量是劳动投入数量的 16 倍。对于替代性较小的($\sigma=0.5$)投入的引致需求是

$$\begin{aligned} k^c(3,12,40) &= 40(3^{0.5}+12^{0.5})^{1}\cdot 3^{-0.5} = 120 \\ l^c(3,12,40) &= 40(3^{0.5}+12^{0.5})^{1}\cdot 12^{-0.5} = 60 \end{aligned} \tag{8.50}$$

因此在这种情况下,资本投入只是劳动投入的两倍。实际上,这些不同的情形不能直接进行对比,因为不同的 σ 值对产出影响不同。例如,我们可以考察一下替代率较低的情形下 w 上升至 27 后的情况。当 $w=27$ 时,厂商将选择 $k=160$,$l=53.3$。由此可以通过比较初始时投入组合的总成本($=120\times3+27\times60=1\,980$)和最佳投入组合的总成本($=160\times3+27\times53.3=1\,919$)计算由于替代性而节省的成本。可以看到移动至最优生产组合将总成本降低了 3%。在柯布-道格拉斯情形下,成本节省超过了 20 个百分点。

请回答:如果 w 从 12 上升到 27,生产函数是线性形式 $q=k+4l$,总成本将如何变化?这个结果对于本例中的其他情形有什么启示?

8.5 短期和长期的区别

在经济学中,对“短期”和“长期”进行区分是一个惯例。虽然多长算是“短期”,多长算是“长期”没有精确定义,但这种区分是很重要的,因为短期内厂商的决策灵活性有限,而长期中则自由得多。在关于厂商和成本的理论研究领域中,这种区分十分重要。因为经济学家要考察在不同的时间段下,供给对其他因素的反应。在本章的余下部分,我们将具体考察这种不同反应。

为了阐明为什么厂商对于短期和长期的反应会有所不同,我们假设资本投入处于某一固定水平 k_1,并且在短期厂商只能自由改变其劳动投入。① 就是说,假设短期内改变资本投入水平的成本将是极其高昂的。那么,我们可以将短期生产函数写为

$$q = f(k_1, l) \tag{8.51}$$

其中下脚标表明了资本投入是不变的。而当厂商的劳动投入改变,产出水平可能会发生变化。

① 当然,这只是为了阐明目标起见。在大多数实际情况下,短期的劳动投入比资本投入更不具有弹性。

8.5.1 短期总成本

继续将厂商的总成本定义为

$$C = vk + wl \tag{8.52}$$

但是在我们当前的短期分析中，资本投入被固定为 k_1。为了说明这个假设，我们将其写成

$$SC = vk_1 + wl \tag{8.53}$$

其中 S 表明我们研究的是资本投入固定不变的短期成本。这种标记方法（用 S 表示短期）将贯穿这部分的始终。与此同时我们使用 C,AC 和 MC 来表示长期成本。尽管通常我们并不明显地标记资本投入的水平，但是这种投入水平在短期是固定的却是确定无疑的。

8.5.2 固定成本和可变成本

式 8.53 中两种投入的成本都有各自的特殊含义。vk_1 一项是短期的**固定成本(fixed costs)**，因为 k_1 是常数，且短期中这些成本不会发生变化。wl 一项是短期的**可变成本(variable costs)**——劳动投入在短期可以变化。由此我们得到以下定义：

定义

短期固定成本和短期可变成本。短期固定成本(short-run fixed costs)是和那些在短期内不能变化的投入相联系的成本。**短期可变成本(short-run variable costs)**是那些可以发生变化以改变厂商的产出水平的要素投入的成本。

区别这两个定义的重要性在于可以将厂商通过在短期内不进行生产而避免的可变成本与那些不管选择怎样的产量水平（甚至为零）都必须支付的固定成本区分开来。

8.5.3 短期成本的不可选择性

明确短期总成本对于各种不同的产量水平并非最小成本这一点是至关重要的。因为在短期我们保持资本投入不变，厂商并不像我们在本章前面讨论成本最小化的部分所讲的那样，具有投入选择的自主性。而且为了在短期生产不同的产出水平，厂商只能使用“非最优化”的投入组合：RTS 并不等于投入要素的价格比率。如图 8.7 所示。在短期内，厂商只能使用 k_1 单位的资本投入，为了生产 q_0 的产量水平，其将使用 l_0 单位的劳动。类似地，厂商将使用 l_1 单位劳动生产 q_1 产量水平，使用 l_2 单位劳动生产 q_2 产量水平。这些投入组合的总成本分别由 SC_0,SC_1 和 SC_2 表示。只有对于投入组合(k_1,l_1)，产出是在最小成本下生产的，也只有在那一点 RTS 等于投入要素的价格比率。在图 8.7 中，很明显短期情况下使用了“过多”的资本来生产产量 q_0。成本最小化将要求生产的点沿着 q_0 等产量线向东南方向移动，预示着生产中应该用劳动替代资本。类似地，生产 q_2 使用了“过少”的资本，使用资本替代劳动可以使成本变小。但是这两种替代在短期都是不可能的，而在长期厂商将可以改变其资本投入水平，并调整其投入使成本最小化。我们在本章的前面部分已经讨论了这种可以

变动的情况，在阐释长期成本曲线和短期成本曲线间的关系时我们还将回到这个讨论上。

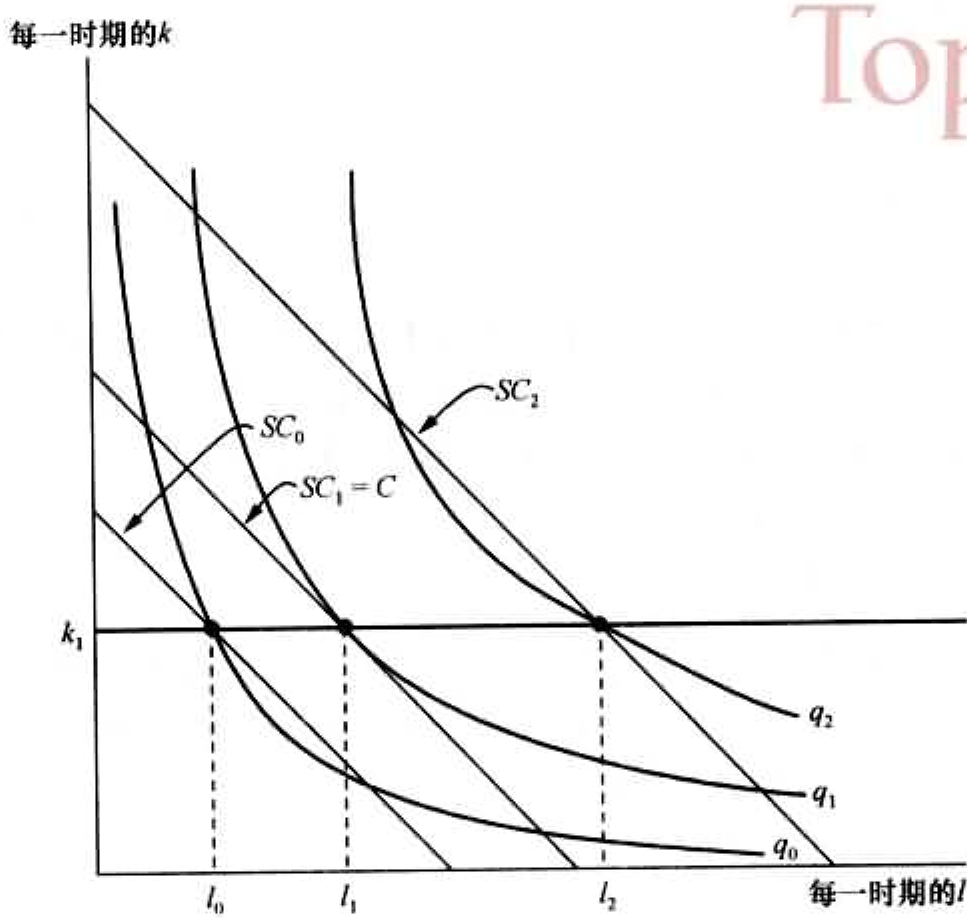


图 8.7　短期必须作出的"非最优化"的投入选择

因为在短期中资本投入被确定在 k_1，厂商无法使其 RTS 等于投入要素价格的比率。在给定的投入价格水平下，厂商应该使用更多的劳动和更少的资本生产 q_0，却应该使用更多的资本和更少的劳动生产 q_2。

8.5.4　短期边际成本和平均成本

在通常情况下，以每单位产出为基础分析短期成本要比以总成本的分析更加有效。从短期总成本函数中推出的两个最为重要的单位概念是**短期平均总成本函数(short-run average total cost function，*SAC*)**和**短期边际成本函数(short-run marginal cost function，*SMC*)**。这些概念定义如下

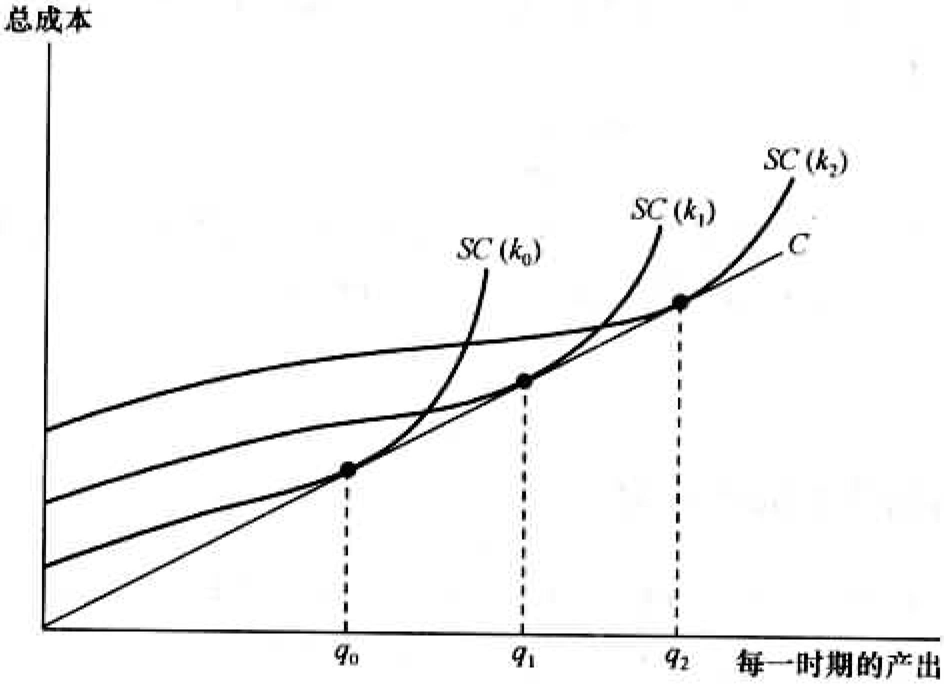
$$
SAC=\frac{\text{总成本}}{\text{总产出}}=\frac{SC}{q}
$$
$$
SMC=\frac{\text{总成本变化}}{\text{产出变化}}=\frac{\partial SC}{\partial q} \tag{8.54}
$$

这些关于平均成本和边际成本的定义都基于某一特定的资本投入水平上，它们与之前在长期、完全可变的情形下使用的是相同的定义方法，并且从总成本曲线推导出平均成本曲线和边际成本曲线的方法也是相同的。因为短期总成本曲线和图 8.5 中的总成本曲线具有相同的形状(总成本函数是三次方形式)，由此短期的平均成本曲线和边际成本曲线都呈 U 型。

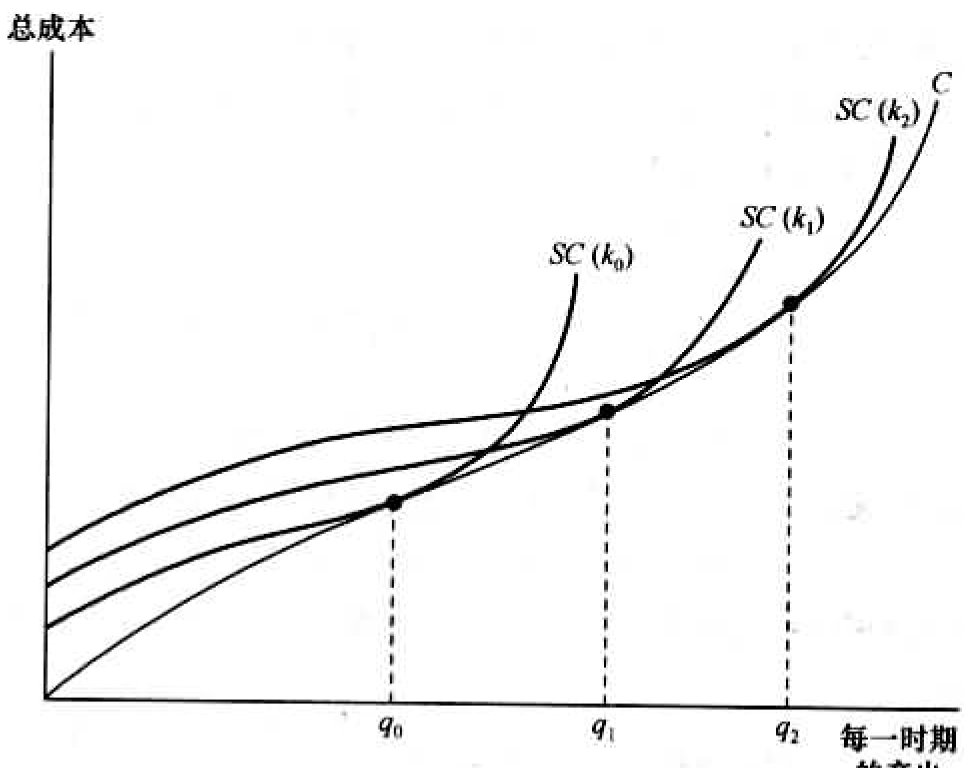
8.5.5　短期成本曲线和长期成本曲线的关系

考虑到资本投入的所有可能变化，我们就能够在短期成本与完全自由的长期成本之间建立起一

种关系。图 8.8 表示的是规模报酬不变和成本函数是三次方形式时,短期和长期之间的关系。数据表明,除了当给定的资本投入水平接近于长期成本最小化时的投入水平时,长期总成本(C)总是低于短期总成本的。如图 8.7 所示,在既定的资本投入 k_1 下,只有生产 q_0 产量,厂商才能实现完全的成本最小化。因此,在这一点短期成本和长期成本是相等的,而对于产出不是 q_0 的点而言 $SC > C$。



(a) 规模报酬不变



(b) 总成本函数是三次方的情况

图 8.8　长期总成本曲线两种可能的形状

通过考察所有可能的资本投入水平,可以画出长期总成本曲线的轨迹 C。在(a)中,生产函数表现出规模报酬不变的性质——在长期是这样的,尽管在短期不是——产出与投入成比例。在(b)中,长期总成本曲线具有三次方函数的形状,短期生产函数也如此。由于假设资本投入水平是固定的,短期曲线收益递减得更快。

在数学推导上，我们将图 8.8 中的长期总成本曲线称为其各自短期成本曲线的“包络线”。将该短期成本曲线用参数表示为

$$短期总成本 = SC(v,w,q,k) \tag{8.55}$$

商家的短期总成本曲线是在保持 v 和 w 不变的前提下，根据 k 的变化而得出的。长期总成本曲线 C 必须遵循式 8.55 中所描述的基于短期成本曲线的关系，进而选择 k 使任意产出水平的成本都是最小。该最小化的一阶条件是

$$\frac{\partial SC(v,w,q,k)}{\partial km} = 0 \tag{8.56}$$

同时解方程 8.55 和 8.56 得到长期总成本方程。尽管这是另一种得到总成本函数的方法，但是它可以得出与我们在本章的前面部分相一致的结论——如下例所示。

例 8.5

包络关系和柯布-道格拉斯成本函数

我们再次从柯布-道格拉斯生产函数 $q = k^{\alpha}l^{\beta}$ 出发，但是将资本投入固定在 k_1，在短期内，

$$q = k_1^{\alpha}l^{\beta} \quad 或者 \quad l = q^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta} \tag{8.57}$$

总成本由下式给出

$$SC(v,w,q,k_1) = vk_1 + wl = vk_1 + wq^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta} \tag{8.58}$$

注意，固定的资本投入水平以两种方式进入了短期总成本函数：(1) k_1 决定了固定成本；(2) k_1 也部分地决定了可变成本，因为它决定了需要多少可变投入（劳动）来生产不同水平的产出。为了推导出长期成本，我们选择能使成本最小化的 k 值

$$\frac{\partial SC(v,w,q,k)}{\partial k} = v + \frac{-\alpha}{\beta} \cdot q^{1/\beta}k^{-(\alpha+\beta)/\beta} = 0 \tag{8.59}$$

虽然代数式很繁复，但我们可以从此式中解得 k，并将其代入式 8.58，重新得到的柯布-道格拉斯成本函数是

$$C(v,w,q) = Bq^{1/\alpha+\beta}v^{\alpha/\alpha+\beta}w^{\beta/\alpha+\beta} \tag{8.60}$$

一个具体的例子。 如果令 $\alpha = \beta = 0.5, v = 3, w = 12$，短期成本函数是

$$SC(3,12,q,k) = 3k_1 + 12q^2k_1^{-1} \tag{8.61}$$

在例 8.1 中，对于 $q = 40$ 而言，使成本最小化的资本投入 $k = 80$。而式 8.61 表明 $k = 80$，生产 40 单位产出的短期成本是

$$SC(3,12,q,80) = 3 \cdot 80 + 12 \cdot q^2 \cdot \frac{1}{80} = 240 + \frac{3q^2}{20}$$

$$= 240 + 240 = 480 \tag{8.62}$$

这正是我们之前得出的结论。我们也可以使用式 8.61 说明短期和长期成本有何不同。表 8.1 表明除 $q = 40$ 的产出以外，短期成本都高于长期成本并且产出水平越是偏离 $k = 80$ 的最优水平，这种差别就越大。

研究这种情形下长期和短期单位成本间的差别也是很有益的。此处 $AC = MC = 12$，我们可以计

算得出短期的成本是($k=80$ 时)

$$SAC=\frac{SC}{q}=\frac{240}{q}+\frac{3q}{20}$$
$$SMC=\frac{\partial SC}{\partial q}=\frac{6q}{20} \tag{8.63}$$

当 $q=40$ 时,这两个短期单位成本都等于 12。而在别的产量水平,这两个数可以相差甚远。

需要特别注意的是,当产出的扩张超出 $q=40$ 时,短期边际成本增加很快,这是因为可变投入(劳动)的规模报酬递减。这个结论在短期的价格决定理论中扮演很重要的角色。

请回答:试解释为什么本例中 w 的增加将提高短期平均成本和短期边际成本?而 v 的提高只影响短期平均成本?(假定各要素的使用量不变)

表 8.1　$k=80$ 时短期和长期总成本的区别

q	$C=12q$	$SC=240+\dfrac{3q^2}{20}$
10	120	255
20	240	300
30	360	375
40	480	480
50	600	615
60	720	780
70	840	975
80	960	1 200

表 8.2　当 $k=80$ 时,长期和短期的单位成本

q	AC	MC	SAC	SMC
10	12	12	25.5	3
20	12	12	15	6
30	12	12	12.5	9
40	12	12	12	12
50	12	12	12.3	15
60	12	12	13	18
70	12	12	13.9	21
80	12	12	15	24

8.5.6 单位成本曲线的图形

图 8.8 中表现出来的总成本曲线的包络关系可以用来描述短期的平均成本与边际成本曲线和长期的平均成本与边际成本曲线之间的几何关系。图 8.9 表示的是总成本曲线是三次方形式的情形。图中，在（固定）资本投入合适的产出水平上，短期和长期的平均成本是相等的。例如，q_1 上 $SAC(k_1)=AC$，在该点厂商使用 k_1 以最小的成本生产 q_1。只要偏离 q_1，都会使短期平均成本超过长期平均成本，从而反映了长期总成本最小化的本质。

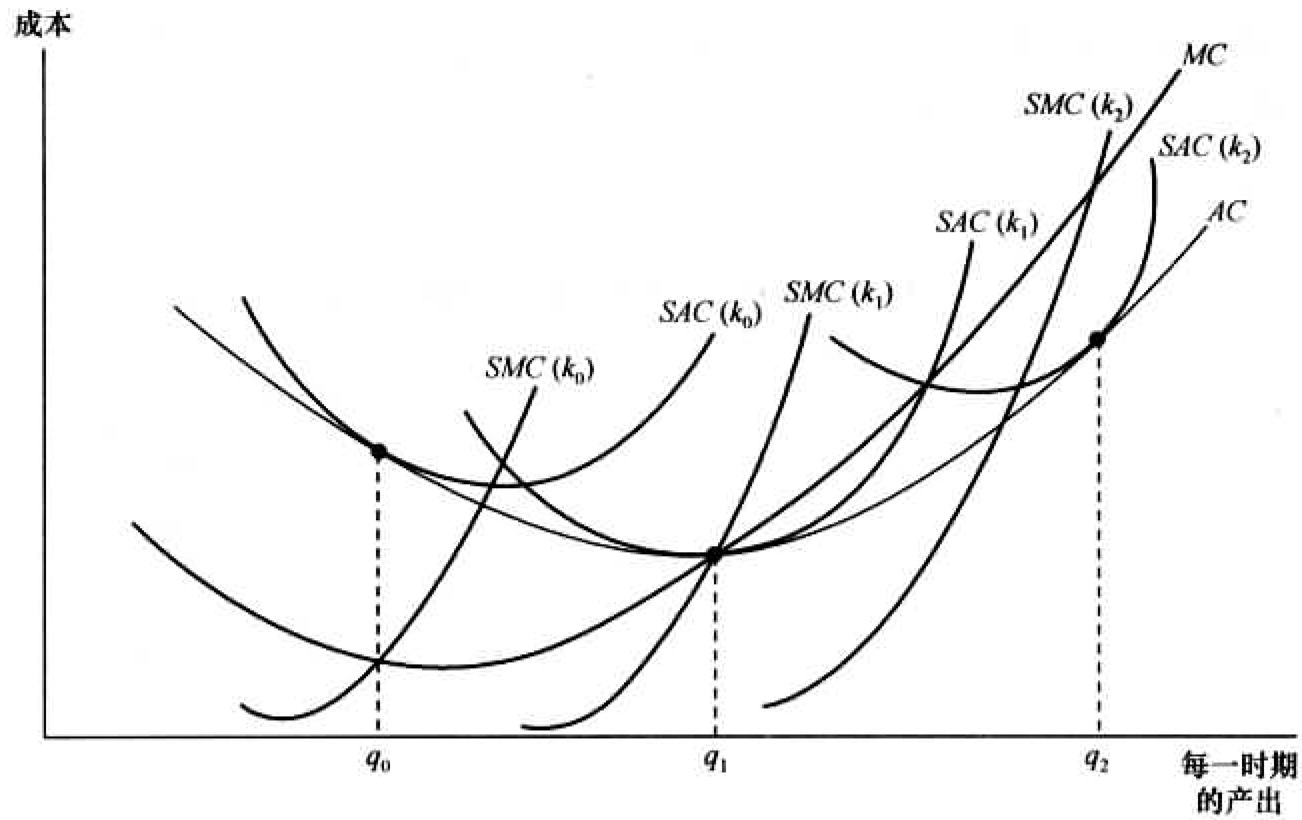


图 8.9　总成本是立方形式的情形下平均成本曲线和边际成本曲线

这一组曲线是由图 8.8 所示的总成本曲线推导而来的。AC 和 MC 曲线具有一般的 U 型，短期成本曲线亦然。在 q_1 点长期平均成本是最小的。曲线在此成本最小点的形状非常重要。

因为长期平均成本曲线（AC）的最低点在长期价格决定理论中扮演主要角色，所以关注图 8.9 中经过这一点的各种曲线是至关重要的。首先，对于平均成本和边际成本始终适用的是，MC 曲线经过 AC 曲线的最低点。在 q_1，长期平均成本和边际成本相等。与 q_1 相联系的是某一资本投入的水平（比如说 k_1），这一资本投入对应的短期平均成本曲线与 AC 曲线在其成本最小化那一点相切。SAC 曲线也在产出水平 q_1 达到最小值。对于任何偏离 q_1 的地方，AC 曲线比 SAC 曲线平坦许多，这显示了长期厂商有更大的灵活性和自由度。短期成本上升很快是因为资本投入是固定不变的。就长期而言，那样的投入并不是固定的，边际生产力递减并不是很突然地发生的。最后，因为 SAC 曲线在 q_1 达到最小，所以短期边际成本曲线 SMC 经过这一点。AC 曲线的最低点因此将四个最重要的单位成本结合在一起了。在这一点

$$AC = MC = SAC = SMC \tag{8.64}$$

正是由于这个原因，正如我们即将在第 10 章中要讨论的那样，产出水平 q_1 对于完全竞争厂商是一个

很重要的均衡点。

小结

本章我们考察了厂商生产的产出水平和生产这些产出的投入成本之间的关系。得出的成本曲线大家应该很熟悉,因为它们被广泛地用于经济学的入门教材之中。在这里我们阐明了这些曲线如何反映厂商生产函数和其潜在的使成本最小化的意愿。从这些基本点出发来进一步考察成本函数,我们就能得到一些重要发现:

- 一个希望将生产某一特定产出的经济成本最小化的厂商将选择这样的投入组合进行生产:技术替代率(RTS)等于投入要素的租价。
- 对于此成本最小化程序的应用得出了厂商的扩展线。由于扩展线表明了使用的投入如何随着产出水平而扩展,其也说明了产出水平和总成本之间的关系。这种关系表现在总成本函数中——$C(q,v,w)$——说明生产成本是产出水平和投入要素价格的函数。
- 厂商的平均成本函数($AC=C/q$)和边际成本函数($MC=\partial C/\partial q$)可以直接从总成本函数中推导出来。如果总成本函数具有一般的三次方的形式,AC 和 MC 曲线都将呈现出 U 型。
- 所有的成本曲线都建立在投入要素的价格不变的假设之上。当投入要素的价格发生变化时,成本曲线将移动到新的位置。移动的幅度取决于价格发生变化的投入要素在投入组合中占有的权重和厂商以另一种要素代替该要素的难易程度。同样,技术的进步也将使成本曲线发生移动。
- 对投入的需求函数可以通过偏导数从厂商的总成本函数中推导出来。这些投入的需求函数将依赖于厂商选择生产的产量,并且因此被称为"引致需求函数"。
- 在短期内,厂商将不能调整一些要素的使用,而只能通过调整其可变要素的使用来改变其产量水平。这样,它就可能使用并非最优的、成本更高的投入组合来进行生产,而无法选择其在可以改变所有投入时所选择的投入组合。

练习题

8.1 在一篇著名的文章中[J. Viner, "Cost Curves and Supply Curves," *Zeitschrift fur Nationalokonomie 3* (September 1931): 23—46], Viner 批评他的绘图员不能画出一组 SAC 曲线,并令其与 U 型 AC 线的切点分别是每一条 SAC 线的最低点。绘图员抗议说这种画法是不可能实现的。在这一辩论中,你将支持哪一方?

8.2 假设厂商生产两种不同的产品,数量分别为 q_1 和 q_2。一般地,厂商的总成本可以用 $C(q_1,q_2)$ 表示。如果对于任何一种商品的所有产出水平都有:$C(q_1,0)+C(0,q_2)>C(q_1,q_2)$,则此函数表现出范围经济性。

a. 口头解释一下,为什么这个数学公式说明厂商混合生产的成本低于两个分别生产一种商品的厂商的成本?

b. 如果两种产出实际上是一种产品,我们可以将总产出定义为 $q = q_1 + q_2$。假设此种情况下平均成本($= C/q$)随着 q 的增加而降低。试说明此厂商在此条件下仍然享受范围经济性。

8.3 Smith 教授和 Jones 教授将著作一本新的概论性教科书。作为真正的科学家,他们将书的生产函数设为

$$q = S^{1/2}J^{1/2}$$

其中 q = 已完成书稿的页数, S = Smith 先生花费的工作时间, J = Jones 先生花费的工作时间。

Smith 将劳动价格定为每小时 3 美元。他花费了 900 小时准备初稿。Jones 的劳动价格是每小时 12 美元,他将把 Smith 的初稿校订成书。

a. Jones 先生将花费多长时间校订一本 150 页的书? 300 页的书呢? 450 页的书呢?

b. 这本成书第 150 页的边际成本是多少? 第 300 页呢? 第 450 页呢?

8.4 假设一个厂商的固定比例生产函数是

$$q = \min(5k, 10l)$$

其中资本和劳动的租金率是 $v = 1, w = 3$。

a. 计算厂商的长期总成本、长期平均成本、长期边际成本曲线。

b. 假设短期将 k 固定在 10。计算厂商的短期总成本、短期平均成本、短期边际成本曲线。生产第 10 个单位产出的边际成本是多少? 第 50 个呢? 第 100 个呢?

8.5 一个生产曲棍球球棒的厂商的生产函数是

$$q = 2\sqrt{k \cdot l}.$$

短期中,厂商的资本设备数量固定为 $k = 100$。k 的租金率是 $v = 1$ 美元,劳动的租金率是 $w = 4$ 美元。

a. 计算厂商的短期总成本曲线。计算短期平均成本曲线。

b. 厂商短期边际成本函数是什么? 如果厂商生产 25 个曲棍球球棒, SC, SAC 和 SMC 是多少? 如果生产 50 个呢? 100 个又会怎样? 200 个呢?

c. 画出厂商的 SAC 和 SMC 图形。并回答 b 中的问题。

d. SMC 曲线和 SAC 曲线在哪里相交? 解释为何 SMC 曲线总交于 SAC 曲线的最低点。

现在假设短期生产曲棍球球棒的资本投入固定为 $\bar{k}$。

e. 计算厂商的总成本使其为 q, w, v, 和 $\bar{k}$ 的函数。

f. 给定 q, w 和 v,厂商将如何选择资本存货以使总成本最小化?

g. 使用你从 f 中得出的结果计算曲棍球球棒生产的长期总成本。

h. 对于 $w = 4$ 美元, $v = 1$ 美元,画出曲棍球球棒生产的长期总成本曲线。并通过考察 $\bar{k}$ 的值等于 100,200 或者 400 时,证明其是 a 中计算出的短期曲线的包络线。

8.6 一个有魄力的企业家收购了两个工厂来生产装饰品。每个工厂生产相同的商品,并且每个工厂的生产函数是

$$q = \sqrt{k_i l_i} \quad i = 1, 2$$

尽管如此,但每个工厂的资本设备的数量是不同的。特别是,工厂 1 的 $k_1 = 25$,但工厂 2 的 $k_2 = 100$, k 和 l 的租金率都是 $w = v = 1$ 美元。

a. 如果企业家想使短期生产装饰品的成本最小化,他将如何在两个厂商间分

配产量？

b. 如果在两个工厂间最优分配产量，计算短期总成本、短期平均成本和短期边际成本。第100个装饰品的边际成本是多少？第125个呢？第200个呢？

c. 企业家长期如何在两个工厂间分配生产？计算生产装饰品的长期总成本、长期平均总成本和长期边际成本。

d. 如果两个工厂都呈现出规模报酬递减，你将如何回答c中的问题？

8.7 CES生产函数可用来一般化地估计投入的权重。在两种投入的情况下，此函数是

$$q = f(k,l) = [(ak)^{\rho} + (bk)^{\rho}]^{\gamma/\rho}$$

a. 生产函数是CES生产函数的厂商的总成本函数是什么？（提示：当然，你可以从草图中得出函数。使用例8.2中的结果可能更简单，并且证明此生产函数中每单位资本投入的价格是 v/a，并且每单位的劳动投入的价格是 w/b）。

b. 如果 $\gamma=1$ 并且 $a+b=1$，可以证明当 $\rho\to 0$ 时，此生产函数收敛于柯布-道格拉斯生产函数形式。CES函数的这种特殊形式的总成本函数是什么？

c. 两种投入的生产函数中劳动成本的相对份额是 wl/vk。证明这种份额对于b中的柯布-道格拉斯生产函数是常数。参数 a 和 b 是如何影响劳动成本的相对份额的？

d. 计算前面介绍的一般的CES函数的劳动成本的相对份额。w/v 的变化如何影响这种份额？替代弹性 σ 是如何决定这种影响的方向的？参数 a 和 b 的大小如何对其产生影响？

8.8 对于劳动和资本的引致投入需求的固有价格弹性是

$$e_{l^c,w} = \frac{\partial l^c}{\partial w}\cdot\frac{w}{l^c},\quad e_{k^c,v} = \frac{\partial k^c}{\partial v}\cdot\frac{v}{k^c}$$

a. 计算例8.2中的各个成本函数的 $e_{l^c,w}$ 和 $e_{k^c,v}$。

b. 证明，一般情况下，$e_{l^c,w}+e_{l^c,v}=0$。

c. 证明引致需求函数的交叉价格偏导数相等，即，证明 $\frac{\partial l^c}{\partial v}=\frac{\partial k^c}{\partial w}$。并使用此结果证明 $s_l e_{l^c,v}=s_k e_{k^c,w}$，其中 s_l, s_k 分别是总成本的劳动份额（wl/C）和总成本的资本份额（vk/C）。

d. 使用b和c的结果证明 $s_l e_{l^c,w}+s_k e_{k^c,w}=0$。

e. 口头解释这些不同的弹性之间的关系并在一般的投入需求理论中讨论它们的整体相关性。

8.9 假设一个厂商的总成本函数是

$$C = qw^{2/3}v^{1/3}$$

a. 使用谢泼德引理计算固定产出下对于投入 l 和 k 的需求函数。

b. 使用你从a中得出的结果计算 q 的生产函数。

8.10 假设一个厂商的总成本函数是

$$C = q(2 + v\sqrt{vw} + w)$$

a. 使用谢泼德引理计算 k 和 l 的固定产出需求函数。

b. 使用a中的结果计算 q 的生产函数。

c. 你可以用例8.2的结果来检验这个结论，证明 $\sigma=0.5,\rho=-1$ 的CES成本函数可以得出此总成本函数。

推荐阅读文献

Allen, R. G. D. *Mathematical Analysis for Economists*. New York: St. Martin's Press, 1938.

该书对替代的可能性与成本函数作了全面的数学分析,读起来有些困难。

Ferguson, C. E. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*. Cambridge: Cambridge University Press, 1969. Chap. 6.

该书推导了成本曲线,特别强调了图形分析。

Fuss, M., and D. McFadden, eds. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1978.

该书对生产与成本函数的对偶关系作了艰深而又全面的论述,并有一些实证讨论。

Knight, H. H. "Cost of Production and Price over Long and Short Periods." *Journal of Political Economy*, 29 (April 1921): 304—335.

该文对短期与长期定义的差别作了经典的论述。

Silberberg E. and W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston: Irwin/McGraw-Hill. 2001.

第 7 章到第 9 章有关于成本函数的大量资料。尤其推荐的是作者对于"互惠效应"的讨论和其将长期和短期的区别当做物理学中的 Le chatelier 的应用来处理。

Sydsaeter, K., A Strom, and P. Berck. *Economists' Mathematical Manual*, 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

第 25 章提供了对此章的数学概念的简单总结。这是一个对于有多种投入的成本函数很好的总结,尽管只是草稿。

扩　展

成本函数的对数变换

第 8 章研究的两个成本函数(柯布-道格拉斯成本函数和 CES 生产函数)在替代可能性方面的要求十分严格。柯布-道格拉斯函数隐含地假设各种投入间 $\sigma=1$。CES 函数允许 σ 取任何值,但是其要求任意两种投入间的替代弹性相等。因为规范经济学家更希望用数据表现其投入间实际的替代可能性,所以他们试图找到更加灵活的函数形式。一种尤其普遍的形式是对数成本函数,首先由 Fuss 和 McFadden (1978)提出,并被广泛应用。在此扩展中,我们将考察这个函数。

E8.1　两种投入成本函数的对数变换

例 8.2 中我们计算了两种投入下的柯布-道格拉斯成本函数为 $C(q,v,w)=Bq^{1/\alpha+\beta}v^{\alpha/\alpha+\beta}\cdot w^{\beta/\alpha+\beta}$。如果我们对其取自然对数,得到

$$\begin{aligned}\ln C(q,v,w) &= \ln B+[1/(\alpha+\beta)]\ln q\\ &\quad+[\alpha/(\alpha+\beta)]\ln v\\ &\quad+[\beta/(\alpha+\beta)]\ln w \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

也就是说,总成本的对数对于产出的对数是线性的。对投入价格进行二次展开使得函数的对数变换一般化

$$\ln C(q,v,w) = \ln q + \beta_0 + \beta_1 \ln v + \beta_2 \ln w + \beta_3 (\ln v)^2 + \beta_4 (\ln w)^2 + \beta_5 \ln v \ln w \quad \text{(ii)}$$

其中，此函数的隐含假设是规模报酬不变（因为 $\ln q$ 的系数是 1.0），但实际情况未必如此。

此函数的一些性质如下：

- 如果函数是投入价格的一次齐次函数，则一定存在 $\beta_1 + \beta_2 = 1$ 和 $\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 0$。
- 此函数在 $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ 的特殊情况下包括柯布-道格拉斯函数。因此，可以用此函数从统计上来检验柯布-道格拉斯函数是否合适。
- 对数函数可以使用谢泼德引理来计算投入的引致需求

$$k^c = \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{\partial C}{\partial \ln C} \cdot \frac{\partial \ln C}{\partial \ln v} \cdot \frac{\partial \ln v}{\partial v} = \frac{C}{v} \cdot [\beta_1 + 2\beta_3 \ln v + \beta_5 \ln w]$$

$$l^c = \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\partial C}{\partial \ln C} \cdot \frac{\partial \ln C}{\partial \ln w} \cdot \frac{\partial \ln w}{\partial w} = \frac{C}{w} \cdot [\beta_2 + 2\beta_4 \ln w + \beta_5 \ln v] \quad \text{(iii)}$$

并且投入的份额是

$$s_k = \frac{vk}{C} = \beta_1 + 2\beta_3 \ln v + \beta_5 \ln w$$

$$s_l = \frac{wl}{C} = \beta_2 + 2\beta_4 \ln w + \beta_5 \ln v \quad \text{(iv)}$$

这就证明，与柯布-道格拉斯函数的情况相反，对数函数中投入的份额不是常数，而是依赖于投入要素的价格。由于方程 iv 十分简单，因此这是计量经济学上建立对数函数的典型方式。

- 此函数中资本和劳动的部分替代弹性是 $s_{k,l} = (\beta_5 + s_k s_l)/s_k s_l$。因此这个参数也由所得到的数据决定。值得注意的是，此参数的重要组成部分是表示 v 和 w 相互影响的系数 β_5。如果系数等于 0，我们得到柯布-道格拉斯函数的结果是 $s_{k,l} = 1$。

E8.2 多种要素投入成本函数的对数变换

多数的实际研究都包括多于两种投入的情形。对于成本函数的对数变换可以很容易地推广到这种情形。如果我们假设有 n 种投入，每种投入的价格是 $w_i (i = 1, \cdots, n)$，则函数是

$$C(q, w_1, \cdots, w_n) = \ln q + \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln w_i + 0.5 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln w_i \ln w_j \quad \text{(v)}$$

其中，我们再一次假设规模报酬是不变的。这个函数要求 $\beta_{ij} = \beta_{ji}$，因此对于 $i \neq j$ 的每一项在最后的二次求和中出现了两次（这就解释了表达式中出现的 0.5）。作为投入价格的一次齐次函数，此函数肯定是 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ 和 $\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0$ 的情况。此函数的两个有用的性质是：

- 投入的份额是线性形式

$$s_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln w_j \quad \text{(vi)}$$

这再一次证明了为什么份额总是用对数形式来估计。有时也会将含有 $\ln q$ 的项加入表达式以考虑规模效应对份额的影响（参见 Sydsaeter, Strom 和 Bercke, 2000）。

- 对数函数中任意两种投入的局部替代弹性是

$$s_{i,j} = (\beta_{ij} + s_i s_j)/s_i s_j \quad \text{(vii)}$$

因此可以直接通过对数函数的估计参数对替代性进行判断。

E8.3 一些应用

对数变换的成本函数已经成为对生产进行规范研究的首选。有两个原因可以解释这种这种方法为什么如此盛行。首先，此函数对于投入间的替代类型有相当完整的描述。其次，此函数的形式以一种很灵活的方式将投入价格吸

收进去，以至于有理由充分地保证他或者她能够在分析中控制价格。如果这种控制能够保证，对成本函数其他方面的测度(如其规模报酬)就会更加可靠。

使用对数函数对投入替代进行研究的一个例子是 Westbrook 和 Buckley 的一项研究。他们研究了托运者对运输货物的相对价格的变化作出的反应，这种价格变化是由于美国铁路业和货车运输业的价格波动造成的。研究者们尤其对那些从西部地区运输水果和蔬菜到芝加哥和纽约的运输商们进行了详细的研究。他们发现运输方式有相对较高的替代弹性并因此推断出价格波动有很大的福利收益。

Doucouliagos 和 Hone(2000)对澳大利亚牛奶制品的价格反常作了类似的分析。他们证明了牛奶原材料价格的变化使牛奶加工厂商承担了投入使用方面的巨大变化。他们还证明为了应对价格变化，行业会采用新的技术工艺。

使用对数函数来判断规模报酬的一个有趣研究是 Latzko(1999)对于美国共有基金行业的分析。他发现除了最大的基金(拥有多于 40 亿美元的资产)以外，总成本对于基金所管理的总资产的弹性都小于 1。因此，研究者得出结论，资本管理的规模报酬是递增的。其他一些使用对数函数估计经济规模的研究都集中于地方性的服务上。例如，Garcia 和 Thomas(2001)研究了一个法国社区的供水系统。他们的结论是，在那样的系统中明显存在规模经济。Yatchew(2000)对加拿大安大略湖的一些小型社区的配电系统进行研究时得到了类似的结论。他发现电力配送系统对于大约 20 000 个消费者存在规模效应。并且，进入比此规模小的系统会很有效率。

参考文献

Doucouliagos, H. and P. Hone. "Deregulation and Subequilibrium in the Australian Dairy Processing Industry". *Economic Record* (June 2000): 152—162.

Fuss, M. and D. McFadden, eds. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*. Amsterdam: North Holland, 1978.

Garcia, S., and A. Thomas. "The Structure of Municipal Water Supply Costs: Application to a Panel of French Local Communities". *Journal of Productivity Analysis* (July 2001): 5—29.

Larzko, D. "Economics of Scale in Mutual Fund Administration". *Journal of Financial Research* (Fall 1999): 331—339.

Sato, R., and T. Koizumi. "On Elasticities of Substitution and Complementarity". *Oxford Economic Papers* (March 1973): 44—50.

Sydsaeter, K., A. Strom, and P. Berck. *Economist's Mathematical Manual*, 3th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

Westbrook, M. D., and P. A. Buckley. "Flexible Functional Forms and Regularity: Assessing the Competitive Relationship Between Truck and Rail Transportation". *Review of Economics and Statistics* (November 1990): 623—630.

Yatchew, A. "Scale Economies in Electricity Distribution: A Semiparametric Analysis". *Journal of Applied Econometrics* (March—April 2000): 187—210.

第 9 章　利润最大化

第 8 章我们考察了厂商使任何水平的产出成本最小化的方式，本章我们将着眼于考察利润最大化的厂商如何选择最优的产出水平。在考察产量决策之前，先简短地讨论一下厂商的性质及我们分析厂商行为选择所采取的方式。

9.1　厂商的性质与行为

正如我们在开始对生产进行分析时指出的那样，厂商是为了实现将投入转化为产出而组织起来的许多个人的联合体。不同的个体提供不同形式的投入，比如工人的劳动技术和资本家的各种各样的资本设备。他们投入这些要素，期望由此获得某种形式的回报。

9.1.1　厂商内部的契约关系

厂商各种要素提供者之间的契约关系可能很复杂，每一个提供者之所以同意将其投入贡献于生产活动，是因为他对如何运用该要素以及由此可期望获得何种利益有一个估量。某些情况下，这些契约是明确的，工人们常常将劳动契约谈判到相当具体的程度，包括每天工作多少小时、工作时遵循何种规则、期望的工资率有多高这些细节。类似地，资本所有者在投资于企业时也有一系列公开的法定原则，以确定资本运用的方式、所有者期望获得的补偿，以及资本所有人在支付了其所有经济成本之后是否有权保留剩余的利润或是否有义务承担企业的亏损。除了这些正式的安排之外，各种投入的提供者之间还有着许多隐含的安排：经理与工人之间的关系遵循某种原则——谁有权利在生产决策的哪些部分拍板。在工人之间则存在着工作任务如何分担的无数隐含的约定；而资本所有者可能将他们在某些层次上作出决策的大多数权利赋予经理和工人（例如，通用汽车公司的股东从未行使过如何使用生产线设备的决策权，尽管在理论上他们拥有这一权利）。所有这些公开的和隐含的契约关系都会随着厂商的外部环境与内部情况的变化而改变。正如一个篮球队常常试行新的打法

与防守策略一样，厂商在环境变化时也会改变其内部组织的性质以达到更好的长期目标。①

9.1.2 为厂商行为建模

尽管有一些经济学家采用了一种"行为"方法来研究厂商的决策，但是，大多数人发现这种方法对于我们一般的研究目的而言太复杂了。于是，他们采用了一种"整体性"方法，将厂商视为单个决策主体而忽略有关投入的提供者之间的所有复杂关系。这一方法常常可以方便地假设一个厂商的决策由理性地追求厂商目标（通常是利润最大化）的单个独裁经理人作出。这就是在本章我们要使用的方法。第 19 章我们将看到厂商内部契约产生的一些信息问题。

9.2 利润最大化

大多数供给模型都假设厂商及其经理人追求尽可能达到经济利润最大化的目标。为此，我们使用以下定义：

定义

利润最大化的厂商。一个**利润最大化的厂商（profit-maximizing firm）**以达到经济利润最大化为单一目标来选择其投入和产出。也就是说，厂商力图使其总收入和总成本之间的差额尽可能地大。

这个假设——厂商追求最大经济利润——很早就出现在经济文献中，而且备受推崇。这一假设看起来似乎是合情合理的，因为工厂主可能确实想让其资产尽可能地实现价值，而且激烈的市场竞争会惩罚那些放弃利润最大化目标的厂商。同时，这一假设也能够得出有趣的理论结果来解释厂商实际的决策行为。

9.2.1 利润最大化和边际主义

如果厂商严格遵守利润最大化的原则，那么它会以一种"边际的"方式作出决策。企业家将依据感性的经验来调整那些可控变量，直到不可能进一步增加利润时为止。这就涉及，譬如说，考察由多生产一个单位的产出或多雇用一个单位劳动可获得的额外的或"边际"利润。只要这种增量是正值，厂商就会生产额外的产出或者雇用额外的工人。当一种经营导致的利润增量变为零时，企业家的本事就算发挥到极致了，再多赚一分钱都不可能了。本章中，我们将通过使用日渐完备的数学工具来探讨这一假设的结果。

9.2.2 产出决定

首先考虑一个非常熟悉的问题——为了实现利润最大化，厂商应该选择生产什么样的产出水

① 由契约关系这一概念形成的最早的厂商理论见于 R. H. Coase, "The Nature of the Firm", *Economica* (November 1937): 386—405。

平。厂商以市场价格 p(每单位价格)出售 q 单位产出。总收益是

$$R(q) = p(q) \cdot q \tag{9.1}$$

此处我们考虑到了厂商接受的售价可能会受到出售数量的影响这一可能性。在生产 q 的过程中,发生了某些经济成本,就像在第 8 章中指出的那样,我们以 $C(q)$ 来表示。

收益和成本之间的差额被称为**经济利润(economic profits**,记为 π)。因为收入和成本都依赖于产量,所以经济利润也是产量的函数。也就是说,

$$\pi(q) = p(q) \cdot q - C(q) = R(q) - C(q) \tag{9.2}$$

通过对方程 9.2 求 q 的导数并令其等于 0 得到选取最大化利润时 q 值的必要条件①

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q} = \pi'(q) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q} - \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} = 0 \tag{9.3}$$

所以最大化的一阶条件是

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} \tag{9.4}$$

这是一般的经济学概论教程中对于边际收益等于边际成本规则的数学描述。因此,我们有以下结论:

最优化原则

利润最大化。为了使经济利润最大化,厂商应该选择边际收益等于边际成本的产出水平。即

$$MR = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} = MC \tag{9.5}$$

9.2.3 二阶条件

方程 9.4 或 9.5 仅仅是利润最大化的一个必要条件,要满足它的充分条件还要求有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q^*} = \left.\frac{\mathrm{d}\pi'(q)}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q^*} < 0 \tag{9.6}$$

或者说"边际利润"在最优产量水平 q 是递减的。当 q 小于 q^*(最优产出水平)时,利润肯定是递增的[$\pi'(q)>0$];当 q 大于 q^* 时,利润肯定是递减的[$\pi'(q)<0$]。只有这个条件满足时,才真正达到了利润最大化。

9.2.4 图形分析

以上关系可以在图 9.1 中得到说明,图 9.1(a)描述了典型的成本函数和收益函数。对于较低的产出水平,成本超过了收益,因此经济利润是负值。在产出的中间阶段,收益超过了成本,这意味着利润是正值。最后,在较高的产出水平上,成本迅速增加并且再一次超过收益。收益和成本曲线的垂直距离(即利润)表示在图 9.1(b)中。该图中利润在 q^* 处达到最大。在这一产出水平,收益曲

① 注意这是一个无约束条件的极大值问题;这一问题的约束隐含在收益与成本函数之中。具体而言,厂商面临的需求曲线决定了收益函数,而厂商的生产函数(连同投入价格)决定了它的成本。

线的斜率（边际收益）确实等于成本曲线的斜率（边际成本）。从图中可看出，利润最大化的充分条件在这一点也得到了满足，因为在 q^* 的左边利润是上升的，而在 q^* 的右边利润是下降的。因此，q^* 就是满足利润最大化的产出水平。但是在 q^{**} 情况却不是这样。尽管在此产出水平上边际收益也等于边际成本，但是利润在这一点却是最小的。

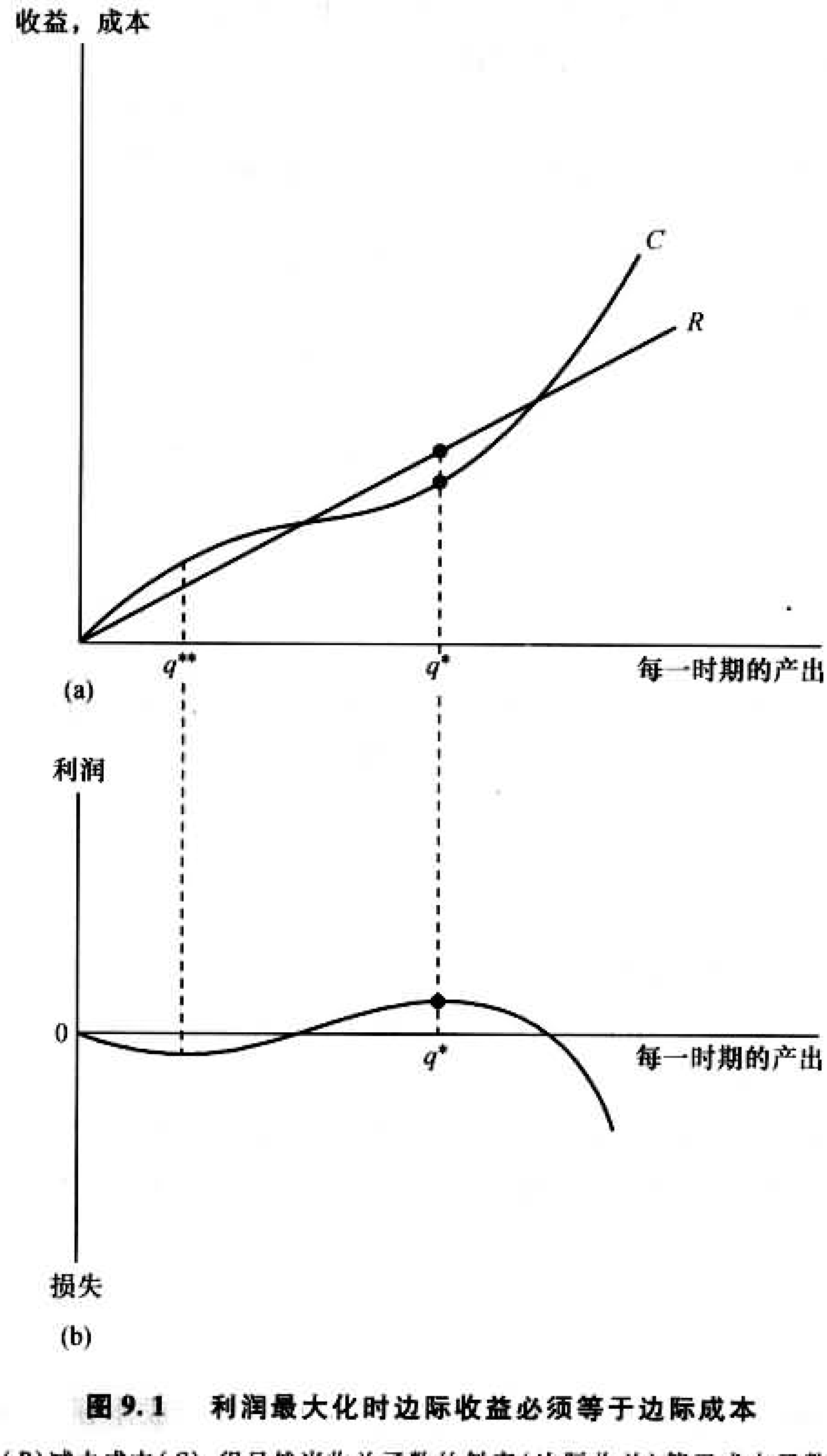


图 9.1　利润最大化时边际收益必须等于边际成本

由于利润被定义为收益（R）减去成本（C），很显然当收益函数的斜率（边际收益）等于成本函数的斜率（边际成本）时，利润实现最大化。但这个等式只是最大化的一个必要条件，这可以通过比较 q^*（实际的利润最大化点）和 q^{**}（实际的利润最小化点）看出，而在这两个点上边际收益都等于边际成本。

9.3 边际收益

多销售一单位产品的收益与一个利润最大化厂商的产出决策是相关的。如果厂商无论出售多少产品都不会影响市场价格，那么，市场价格就是多出售一单位产品所得的额外收益。换句话说，如果厂商的产出决策不影响市场价格，边际收益就等于出售一单位产品的价格。

尽管如此，厂商并不总能以市场价出售它想出售的所有商品。如果其面临向下倾斜的需求曲线，那么只有降低商品价格才能销售更多商品。在这种情况下，厂商多出售一单位商品获得的收益低于商品的单位价格，因为为了使消费者多购买一单位商品，其他单位的商品价格也必须降低。可以很容易证明这个结果。和以前一样，总收益(R)是产量(q)和销售这些产量的商品价格(p)的乘积，其中价格和产量有关。边际收益(MR)被定义为随着 q 的变化 R 所发生的变化：

定义

边际收益。

$$\text{边际收益} = MR(q) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}[p(q)\cdot q]}{\mathrm{d}q} = p + q\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} \tag{9.7}$$

值得注意的是，边际收益是产出的函数。一般地，对于不同的产量水平 MR 是不同的。从式 9.7 容易看出，如果产量增加时价格不变($\mathrm{d}p/\mathrm{d}q=0$)，边际收益便等于价格。在这种情况下，我们称这个厂商是**价格接受者(price taker)**，因为它的决策不影响它所接受的价格水平。另一方面，如果产量增加时价格下跌($\mathrm{d}p/\mathrm{d}q<0$)，边际收益将小于价格。一个利润最大化的企业家在作出最优产出决策之前，必须了解产出的增长将如何影响价格水平。如果 q 的增加引起市场价格下跌，作决策时就必须考虑到这一点。

例 9.1

由线性需求函数得出的边际收益

假定一个三明治厂商在一定时期内的日产出面临的是线性需求函数，其形式是

$$q = 100 - 10p \tag{9.8}$$

从中解得厂商接受的价格是

$$p = -q/10 + 10 \tag{9.9}$$

厂商的总收益曲线(q 的函数)是

$$R = pq = -q^2/10 + 10q \tag{9.10}$$

则该厂商的边际收益函数是

$$MR = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q} = \frac{-q}{5} + 10 \tag{9.11}$$

在此种情况下，对于所有的 q 值，$MR < p$。例如，如果厂商每天生产 40 个单位产品，式 9.9 表明他将接受每个三明治 6 美元的价格。但是在此产出水平，式 9.11 表明 MR 只有 2 美元。如果厂商每天生产 40 单位产品，总收益是 240 美元；但是如果生产 39 单位，因为当产量减少时，价格将略微上升，所以总收益将是 238($=6.1\times39$)美元。因此，从出售第 40 单位商品得到的边际收益小于其价格。事实上，当 $q=50$ 时，厂商的边际收益等于 0（总收益达到最大 $5\times50=250$ 美元），此时厂商进一步的产量扩张实际上会减少厂商的总收益。

为了得到厂商利润最大化的产量水平，我们必须知道厂商的成本。如果厂商以 4 美元的不变平均成本和边际成本来生产三明治，式 9.11 表明日产出 30 单位时 $MR=MC$。在此产出水平，每个三明治的售价是 7 美元，利润将是 90[$=(7-4)\times30$]美元。尽管此时价格很大程度上超过了边际成本，但厂商并无兴趣扩张产量水平。例如，对于 $q=35$，价格将降至 6.5 美元，利润将降低至 87.50[$=(6.50-4.00)\times35$]美元。边际收益而非价格，是厂商利润最大化行为的首要决定性因素。

请回答：要是三明治的边际成本上升到 5 美元，该厂商的产量水平和利润水平如何变动？

9.3.1 边际收益和弹性

边际收益的概念和厂商面临的需求曲线的弹性直接相关。我们还记得市场的需求弹性($e_{q,p}$)，被定义为价格变动百分之一所导致的需求量变动的百分比

$$e_{q,p}=\frac{\mathrm{d}q/q}{\mathrm{d}p/p}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{q}$$

现在，这一定义与方程 9.7 结合起来可以得到

$$MR=p+\frac{q\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=p\left(1+\frac{q}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right)=p\left(1+\frac{1}{e_{q,p}}\right) \tag{9.12}$$

如果厂商面临的需求曲线的斜率是负的，$e_{q,p}<0$，则正如我们已经说明的那样，边际收益小于价格。如果需求是富于弹性的($e_{q,p}<-1$)，则边际收益是正值。也就是说，如果需求富于弹性，多出售一单位产品将不会“很大”程度地影响价格，从而可以由此得到更多的收益。事实上，如果厂商面临的需求具有无限弹性($e_{q,p}=-\infty$)，边际收益将等于价格。在这种情况下，厂商是一个价格接受者。然而，如果需求缺乏弹性($e_{q,p}>-1$)，边际收益将是负值。如果只有“大幅度”地降低市场价格才能增加 q，那么实际上降价将引起总收益的减少。

我们将边际收益和弹性的关系总结于表 9.1 中。

表 9.1 弹性和边际收益的关系

$e_{q,p}<-1$	$MR>0$
$e_{q,p}=-1$	$MR=0$
$e_{q,p}>-1$	$MR<0$

9.3.2 逆弹性规则

如果我们假设厂商追求利润最大化,可以将此分析扩展以阐明价格和边际成本之间的联系。由于 $MR = MC$,我们得到

$$MC = p\left(1 + \frac{1}{e_{q,p}}\right)$$

或者

$$\frac{p - MC}{p} = -\frac{1}{e_{q,p}} \tag{9.13}$$

也就是说,随着厂商面临的需求曲线变得越来越有弹性,价格和边际成本之间的差额会减小。

实际上,对于作为价格接受者的厂商而言,$e_{q,p} = -\infty$,因此 $p = MR = MC$,价格和成本之间没有差额。我们将在以后章节看到,由于价格与边际成本之间的差额是资源配置无效率的重要测度,方程 9.13 被广泛地运用于市场组织的实证研究中。还要注意的是,方程 9.13 只有在厂商面临的需求曲线富于弹性($e_{q,p} < -1$)时才有意义。如果 $e_{q,p} > -1$,方程 9.13 将意味着边际成本是负值——显然不可能出现这样的情形。因此,利润最大化的厂商只选择其面临的富有弹性的需求曲线上的点进行经营活动。当然,如果众多厂商都生产同一种商品,则一个厂商面临的需求曲线将是极其富有弹性的,尽管整个市场的需求曲线可能相对缺乏弹性。

9.3.3 边际收益曲线

任何需求曲线都有相应的边际收益曲线。如果像我们有时假设的那样,厂商必须在一个价格水平上售出其所有产出,则将厂商面临的需求曲线视为一条**平均收益曲线(average revenue curve)**是很方便的。也就是说,需求曲线显示了可选择的各种产出水平上每单位产出能够带来的收益(换言之,即价格)。而另一方面,边际收益曲线显示的是最后售出的一单位产出所带来的额外收益。在通常需求曲线向下倾斜的情况下,边际收益曲线位于需求曲线的下方。因为依据方程 9.7,$MR < p$。在图 9.2 中,我们画出了需求曲线和由其推导出的这样的一条边际收益曲线。值得注意的是,产出水平大于 q_1 时,边际收益是负的。当产出从 0 增加到 q_1 时,总收益($p \cdot q$)增加。然而,在 q_1 点总收益($p_1 \cdot q_1$)已经达到最大,超过这一产出水平,价格下降的比率就快于产出增加的比率。

在第 2 篇中我们详细探讨了需求曲线移动的可能性,这种移动可能是由收入水平、其他商品的价格或者消费者偏好等的变化造成的。一旦需求曲线发生移动,其相对应的边际收益曲线也将发生移动。原因很明显,因为不可能在不涉及某一特定的需求曲线时计算得出边际收益曲线。

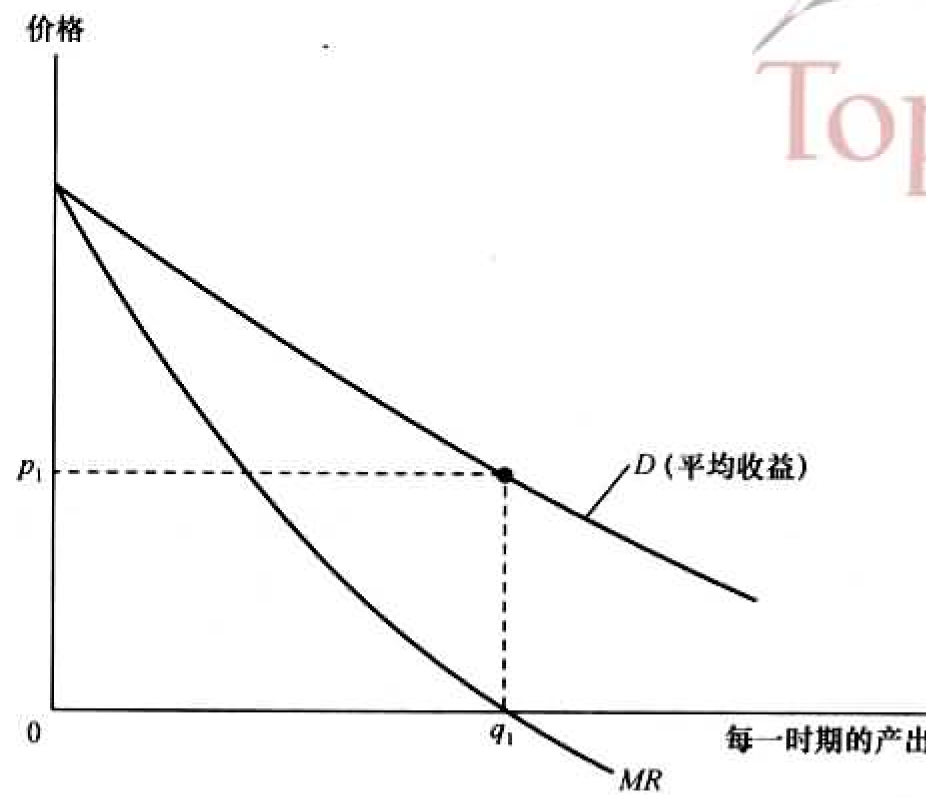


图 9.2　市场需求曲线和相应的边际收益曲线

由于需求曲线斜率为负值，边际收益曲线将位于需求曲线（"平均收益"）的下方。对于超出 q_1 的产出水平，MR 是负的。在 q_1 点，总收益（$p_1 \times q_1$）为最大值；超过这一点，q 的进一步增加实际上会导致总收益下降，因为产量增加同时伴随着价格的下降。

例 9.2

弹性不变的情况

第 5 章中我们研究了一种需求函数，它具有以下形式

$$q = ap^b \tag{9.14}$$

这个函数具有不变的需求价格弹性，并且此弹性等于参数 b。为了计算这个函数的边际收益，我们首先解得

$$p = (1/a)^{1/b} q^{1/b} = kq^{1/b} \tag{9.15}$$

其中，$k = (1/a)^{1/b}$。因此，

$$R = pq = kq^{(1+b)/b}$$

并且

$$MR = \mathrm{d}R/\mathrm{d}q = [(1+b)/b]kq^{1/b} = [(1+b)/b]p \tag{9.16}$$

那么，对于这个特殊的函数而言，MR 和价格成比例。例如，当 $e_{q,p} = b = -2$ 时，$MR = 0.5p$。对于更富有弹性的情况：假设 $b = -10$，则 $MR = 0.9p$。当需求变得更加具有弹性时，MR 曲线更加接近需求曲线。再次，我们假设 $b = -\infty$，则 $MR = p$；也就是说，需求弹性无穷大时，厂商是价格的接受者。另一方面，如果需求缺乏弹性，MR 是负值（从而无法达到利润最大化）。

请回答：假设需求除 p 之外还依赖其他因素，会对此例的分析产生什么影响？这些其他因素的

变化会如何移动需求曲线和其边际收益曲线?

9.4 作为价格接受者的厂商的短期供给

我们现在准备研究一个利润最大化厂商的供给决策。本章只考虑厂商作为价格接受者的情况，其他情况我们将在第5篇作更为详尽的分析。在这里仅集中力量探讨短期的供给决策，长期问题将留到下一章作重点研究。因此，厂商的短期成本曲线簇可以作为合适的分析模型。

9.4.1 利润最大化的决策

图9.3显示了厂商的短期决策。给定的市场价格为 P^*①，因此厂商面临的需求曲线是一条通过 P^* 的水平线。这条线标记为 $P^*=MR$，它表示作为价格接受者的厂商总能够出售额外的一单位产品而不会影响价格水平。产出水平 q^* 带来最大利润，因为在 q^* 点价格等于短期边际成本。由于在 q^* 点价格超过平均成本，可以看到这时的利润为正。厂商可以从每一单位售出的产品上获得一些利润。如果价格低于平均成本(如点 P^{***} 的情形)，厂商售出的每一单位产品都会带来一些亏损。如果价格与平均成本相等，则利润为零。值得注意的是，在 q^* 点边际成本曲线的斜率是正值。如果要实现利润最大化，这是必须满足的条件。如果边际成本曲线斜率为负的部分存在 $P=MC$，则这不可能是利润最大化的点，因为增加产出得到的收益(价格乘以产量)多于生产的成本(如果 MC 曲线具有负的斜率，边际成本是递减的)。因此，利润最大化既要求 $P=MC$，也要求边际成本在这一点是上升的。②

9.4.2 厂商的短期供给曲线

短期边际成本曲线的正斜率部分是作为价格接受者的厂商的短期供给曲线，因为这一曲线恰好表示了厂商在每一个可能的市场价格水平上将生产多少产品。例如，如图9.3所示，在一个更高的价格水平点 P^{**} 上，厂商将生产 q^{**}，因为它发现尽管产量为 q^{**} 时边际成本更高，但仍然是有利可图的。另一方面，当价格是 P^{***} 时，厂商倾向于减少生产(q^{***})，因为只有降低产出水平才可能降低边际成本，使之与更低的价格水平相等。考虑到厂商可能面临的所有价格，我们可以从边际成本曲线上看出厂商将在每一价格水平上供给多高水平的产出。

---

① 我们在本章和以后章节通常用大写斜体的 P 来表示某一种商品的市场价格。尽管如此，当标记比较繁杂时，有时我们也会使用小写的 p。

② 数学上，因为

$$\pi(q)=Pq-C(q)$$

利润最大化(一阶条件)要求

$$\pi'(q)=P-MC(q)=0$$

和(二阶条件)

$$\pi''(q)=-MC'(q)<0$$

因此，要求 $MC'(q)>0$；边际成本必须是增加的。

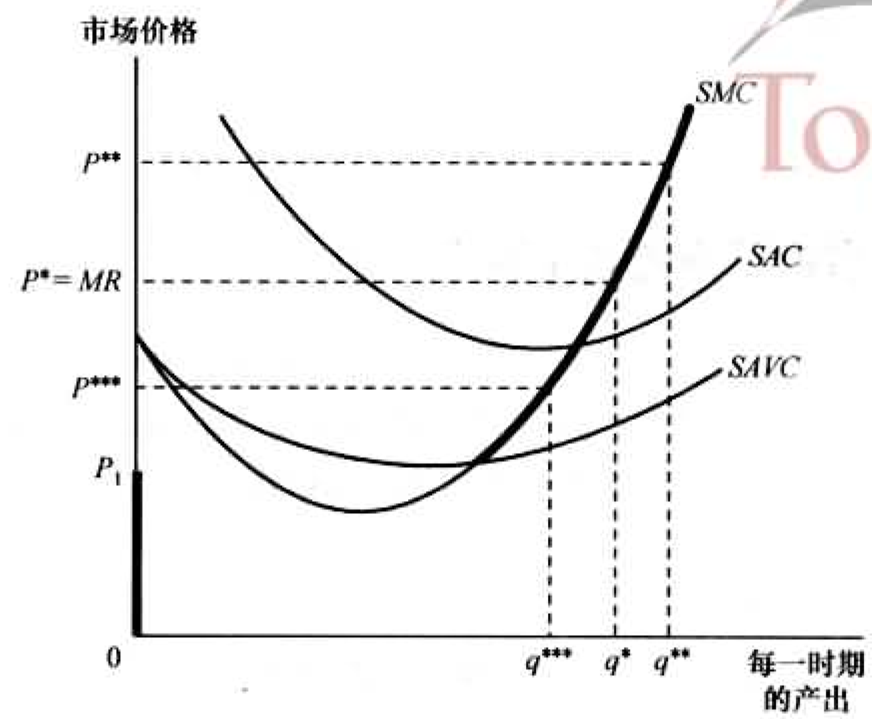


图 9.3　作为价格接受者的厂商短期供给曲线

在短期，一个作为价格接受者的厂商将生产这样的产出水平：此时 $SMC=P$。例如，在点 P^*，厂商产出为 q^*。SMC 曲线也表示在其他价格水平上将生产多少，但是，当价格低于 $SAVC$ 时，厂商将不生产。图中的黑体粗线部分代表厂商的短期供给曲线。

当价格水平很低时，我们必须慎重对待这一结论。当市场价格低于 P_1 时，利润最大化的决策将是不生产。如图 9.3 所示，价格低于 P_1 时，销售收入尚不能弥补平均可变成本。这时除了损失固定成本之外，每生产一单位还要承担进一步的损失。而如果停产，厂商虽仍须支付固定成本，但可以避免生产带来的进一步损失。由于在短期，厂商不能退出这一行业，因此无法保证所有的成本都不损失，所以，最好的决策便是停产。不过，当价格稍稍高于 P_1 时，就意味着厂商将进行一定规模的生产。即便利润可能是负的（当价格跌到低于短期平均总成本时便是这样，比如 P^{***} 点），但只要价格可以弥补可变成本，利润最大化的决策便是继续生产。因为，在任何情况下厂商都必须支付固定成本，而任何超过可变成本的价格都将带来一部分收益以部分弥补固定成本的损失。① 因此，我们便得到了不同价格水平下厂商产出供给决策的完整描述。其被归纳于如下定义中：

定义

短期供给曲线。厂商的**短期供给曲线（short-run supply curve）**表示在各种可能的价格水平下厂商将生产多少产出。对于一个接受既定的产出价格并追求利润最大化的厂商来说，这条曲线由厂

---

① 运用一些代数式可使问题变得更清晰。由于我们知道总成本等于固定与可变成本的总和

$$SC=SFC+SVC$$

利润等于

$$\pi=R-SC=P\cdot q-SFC-SVC$$

如果 $q=0$，可变成本和收益都等于零，因此

$$\pi=-SFC$$

只要 $\pi>-SFC$，厂商将生产一些产量。但是这意味着

$$Pq>SVC\quad 或者\quad P>SVC/q$$

商的短期边际成本曲线上高于平均可变成本最低点的有正斜率的那一段组成。当价格低于供给曲线最低点时，厂商利润最大化的决策将是停业、停产。

当然，任何导致厂商的短期边际成本曲线移动的因素（比如投入价格的变动或者所使用的固定投入水平的变动）也将引起短期供给曲线移动。在第 10 章我们将对这种分析的运用予以扩展以研究完全竞争市场的运行。

例 9.3

短期供给

例 8.5 中我们计算的柯布-道格拉斯生产函数的短期总成本函数是

$$SC(v,w,q,k) = vk_1 + wq^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta} \tag{9.17}$$

其中，k_1 表示资本投入水平，并且在短期内保持不变。① 可以很容易计算得到短期边际成本是

$$SMC(v,w,q,k_1) = \frac{\partial SC}{\partial q} = \frac{w}{\beta}q^{(1-\beta)/\beta}k_1^{-\alpha/\beta} \tag{9.18}$$

注意，短期边际成本随着产出水平 q 递增。对作为价格接受者的厂商而言，追求短期利润最大化要求选择能使市场价格（P）等于短期边际成本的产出

$$SMC = \frac{w}{\beta}q^{(1-\beta)/\beta}k_1^{-\alpha/\beta} = P \tag{9.19}$$

解出供给产量，得

$$q = \left(\frac{w}{\beta}\right)^{-\beta/(1-\beta)}k_1^{\alpha/(1-\beta)}P^{\beta/(1-\beta)} \tag{9.20}$$

供给函数提出了一些我们在以前的经济学课程中已经很熟悉的见解：（1）供给曲线的斜率是正值——P 的增加会促使厂商生产更多产品，因为这将使边际成本提高②；（2）工资率 w 上升将使供给曲线向左移动——也就是说，对于任意给定的产出价格，工资率越高，供给越少；（3）资本投入 k 的增加将使供给曲线向外移动——短期内投入更多的资本将使厂商在更高的产出水平上达到既定的短期边际成本；（4）资本的租金率 v 与短期供给决策无关，因为它只是固定成本的一部分。

一个具体的例子。我们可以再次从例 8.5 中得出具体的例子，其中，$\alpha=\beta=0.5$，$v=3$，$w=12$，$k_1=80$。对于这些具体的参数，供给函数是

$$q = \left(\frac{w}{0.5}\right)^{-1}\cdot(k_1)^1\cdot P^1 = 40\cdot\frac{P}{w} = \frac{40P}{12} = \frac{10P}{3} \tag{9.21}$$

通过比较不同价格下的供给数量和表 8.2 中计算出的短期边际成本，可以证明此结果是正确的。例如，如果 $P=12$，供给函数预计将生产 $q=40$ 的产出，而表 8.2 证明这满足 $P=SMC$ 的条件。如果价格提高一倍到 $P=24$，将生产 80 单位的产出，而表 8.2 也再一次证明当 $q=80$ 时，$SMC=24$。更低的价格（比如 $P=6$）将会致使厂商生产得更少（$q=20$）。

① 因为资本投入保持不变，短期成本函数表现出边际成本递增并且因此导致只有唯一的利润最大化的产出水平。如果我们在长期使用规模报酬不变的生产函数，就不会有那样唯一的最优产出水平。我们将在本章的后面部分和第 10 章对此进行详细论述。

② 事实上，短期供给弹性可以直接从式 9.20 中得出，它是 $\beta/(1-\beta)$。

在采用式 9.21 作为供给函数之前，我们应考虑一下厂商的停业决策。是否存在一个价格使生产 $q=0$ 比遵从 $P=SMC$ 原则更加有利可图？从式 9.17 中我们知道短期可变成本是

$$SVC = wq^{1/\beta}k_1^{-\alpha/\beta} \tag{9.22}$$

因此，

$$\frac{SVC}{q} = wq^{(1-\beta)/\beta}k_1^{-\alpha/\beta} \tag{9.23}$$

式 9.23 和式 9.18 的比较说明如果 $\beta<1$，则对于所有的 q 值，都有 $SVC/q<SMC$。因此在此问题中，不存在很低的价格使厂商按照 $P=SMC$ 进行生产比不生产损失得多。也就是说，厂商应该生产。

在我们所举的数字例子中，考虑 $P=3$ 的情形。对于这样的低价，厂商的最优选择是 $q=10$。总收益将是 30，总的短期成本将是 $SC=255$（见表 8.1）。因此，利润是 $\pi=R-SC=-225$。尽管对厂商来说，这是一个令人沮丧的数字，但是这比选择不生产要好。如果厂商为了避免所有的可变成本（劳动）的损失而不进行生产，它将损失 240 的固定资本。生产 10 单位产出，其收益可以弥补可变成本（$R-SVC=30-15=15$），并且还可以抵消 15 的固定成本的损失。

请回答：如何绘制式 9.21 中的短期供给曲线？如果 w 上升到 15，曲线将如何移动？如果资本投入增加到 $k_1=100$，曲线将如何移动？如果 v 降至 2，短期供给曲线将如何移动？这些变化会改变厂商避免短期内停产的决策吗？

9.5 利润函数

对作为价格接受者[①]的厂商利润最大化过程的另一种研究就是考察其利润函数。此函数表明厂商的（最大）利润只依赖于厂商面临的市场价格。为了阐明其结构的逻辑性，请记住经济利润的定义如下

$$\pi = Pq - C = Pf(k,l) - vk - wl \tag{9.24}$$

此式中只有变量 k 和 l［还有 $q=f(k,l)$］是厂商可以控制的。厂商选择这些投入的水平以使利润最大化，并在其决策过程中将三种价格 P,v 和 w 视为固定的参数。以这种方式进行考察可以看出，厂商的最大利润最终只依赖于这三个外生价格和生产函数的形式。我们将这种关系归结于利润函数中：

定义

利润最大化。厂商的利润函数表明其最大化利润是它面临的价格的函数

① 此处的大部分分析也适用于对市场上其商品价格有一定影响力的厂商，但是我们将对这种可能性的讨论集中在第 5 篇进行。

$$\Pi(P,v,w) = \max_{k,l} \pi(k,l) = \max_{k,l}[Pf(k,l) - vk - wl] \tag{9.25}$$

此定义中我们使用大写的 Π 表示函数值是在给定的价格下的最大利润值。这个函数隐含地合并了厂商的生产函数——这一过程我们将在例 9.4 中作简略阐述。利润函数既可以是长期的也可以是短期的，但是在短期必须明确固定要素投入的水平。

9.5.1 利润函数的性质

和我们所考察的其他最优函数一样，利润函数也有一些对于经济学分析很有用的性质。它们是：

(1) 齐次性。利润函数中的所有价格都增加一倍将使利润增加一倍——也就是说，利润函数是所有价格的一次齐次函数。我们已经证明边际成本是投入价格的一次齐次函数，因此，投入价格增长一倍和厂商产品的市场价格增长一倍将不会改变厂商达到利润最大化时的决定生产的商品数量。但是，由于收益和成本都加倍，利润也会增长一倍。这说明在纯粹的通货膨胀（其中所有价格一起上涨）下，厂商不会改变生产计划，并且其利润水平和通货膨胀保持同步。

(2) 利润函数是产出价格 P 的非减函数。这个结果似乎是显而易见的——厂商总会对其产品的价格上涨作出这样的应对：不改变投入或者产出计划。根据利润的定义，厂商应该增加投入或者产出。因此，如果厂商改变了其计划，他肯定是为了获得更多利润。如果利润将下降，厂商就达不到利润最大化了。

(3) 利润函数是投入价格 v 和 w 的非增函数。利润函数的这个性质也是显而易见的。其证明和上面对于产品价格的讨论类似。

(4) 利润函数是产出价格的凸函数。利润函数的这一重要性质的意思是两种不同价格下的利润函数的平均值大于等于两种价格平均值[①]对应的利润函数。数学上

$$\frac{\Pi(P_1,v,w) + \Pi(P_2,v,w)}{2} \geqslant \Pi\left[\frac{P_1 + P_2}{2},v,w\right] \tag{9.26}$$

直观上的理解就是：厂商在随着两种不同价格自由调整其决策的情况下，比在一种单一价格下作出决策的情况下能得到较好的结果。下面给出正式的证明：令 $P_3 = (P_1 + P_2)/2$，q_i, k_i, l_i 表示对应这些不同的价格利润最大化时的产出和投入决策。由于函数 Π 隐含了利润最大化假设，我们可以将其写成

$$\begin{aligned}\Pi(P_3,v,w) &\equiv P_3q_3 - vk_3 - wl_3\\ &= \frac{P_1q_3 - vk_3 - wl_3}{2} + \frac{P_2q_3 - vk_3 - wl_3}{2} \leqslant \frac{P_1q_1 - vk_1 - wl_1}{2} + \frac{P_2q_2 - vk_2 - wl_2}{2}\\ &\equiv \frac{\Pi(P_1,v,w) + \Pi(P_2,v,w)}{2}\end{aligned} \tag{9.27}$$

上式证明了式 9.26。利润函数的凸性在价格稳定等方面有许多应用。本章的扩展部分对此有一些

① 尽管此处我们只讨论了一种简单的平均价格，但是对于赋予权重的平均价格 $\bar{P} = tP_1 + (1-t)P_2$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，也是凸性的，并且和式 9.26 的情况类似。这一点是显而易见的。

讨论。

9.5.2 包络结果

因为利润函数反映了非约束条件下的潜在的最大化过程，因此我们也将包络理论用于其中以考察利润如何对投入和产出价格作出反应。此理论的应用得出了多个很有用的结论。尤其是，使用利润的定义我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi(P,v,w)}{\partial P} &= q(P,v,w)\\ \frac{\partial\Pi(P,v,w)}{\partial v} &= -k(P,v,w)\\ \frac{\partial\Pi(P,v,w)}{\partial w} &= -l(P,v,w)\end{aligned} \tag{9.28}$$

这些方程再一次给我们一个直观的感觉——产品价格的微小变化将以厂商的产量为比例增加利润，而投入价格的微小增加将以投入使用的数量为比例减少利润。第一个方程说明可以通过对厂商的利润函数求产出价格的偏导数来计算其供给函数。[①] 第二和第三个方程说明投入需求函数[②]也可以从利润函数中推导得出。因为利润函数本身是一次齐次函数，所以方程 9.28 中的所有函数都是零次齐次函数。也就是说，产出价格和投入价格都增加一倍将不会改变厂商决定的投入水平，也不会改变厂商利润最大化的产出水平。所有这些结果对于短期也都是适用的，后面将给出一个具体的例子来说明。

9.5.3 短期的生产者剩余

第 5 章我们讨论了"消费者剩余"的概念，并说明了如何使用需求曲线下面的区域测度价格变化时的消费者福利。我们也介绍了如何在个人消费函数中考察福利的变化。在短期分析中，测度价格变化对厂商福利的影响过程是与之类似的。这是我们在这部分要重点探讨的问题。但是，就像我们将在下一章说明的那样，在长期，测度价格变化对于生产者福利的影响需要采取很不同的方法，因为不仅厂商自己，包括其投入的供给者都会察觉到大部分的长期影响。一般来说，在对价格变化对福利的影响作进一步研究时，长期的方法更加有用。

由于利润函数是产出价格的非减函数，我们知道，对于 $P_2 > P_1$，

$$\Pi(P_2,\cdots) \geqslant \Pi(P_1,\cdots)$$

并且对厂商由价格变化得到的福利的测度也是很简单的，其是

$$\text{获得的福利} = \Pi(P_2,\cdots) - \Pi(P_1,\cdots). \tag{9.29}$$

图 9.4 说明了如何从图形中，即由两个价格和短期供给曲线（以上）围成的区域来测度这个值。直觉上，供给曲线表示厂商生产的产出能够接受的最低价格。因此，当市场价格从 P_1 上升到 P_2 时，厂商

① 自从经济学家 Harold Hotelling 在 1930 年发现了这种关系后，有时它也被称为霍德林引理。

② 与第 8 章推导出的投入需求函数不同，这些需求函数对产出水平并无要求。但是厂商的利润最大化决策已经被考虑进去了。因此，这个需求的概念比我们第 8 章中介绍的要更具有一般性，下一部分我们将对此进行深入阐述。

既能够以更高的价格出售其初始的产出(q_1),也能够选择以边际成本出售多余的产出($q_2 - q_1$)。这样,厂商还赚取了除最后一单位产出外的其他产出的多余利润。因此,厂商获得的总的利润增加由区域 P_2ABP_1 给出。数学上,我们可以使用前面章节的包络结果推导出

$$\text{获得的福利} = \int_{P_1}^{P_2} q(P)\,\mathrm{d}P = \int_{P_1}^{P_2} (\partial\Pi/\partial P)\,\mathrm{d}P = \Pi(P_2,\cdots) - \Pi(P_1,\cdots). \tag{9.30}$$

因此,图形上和数学上对于福利变化的测度是一致的。

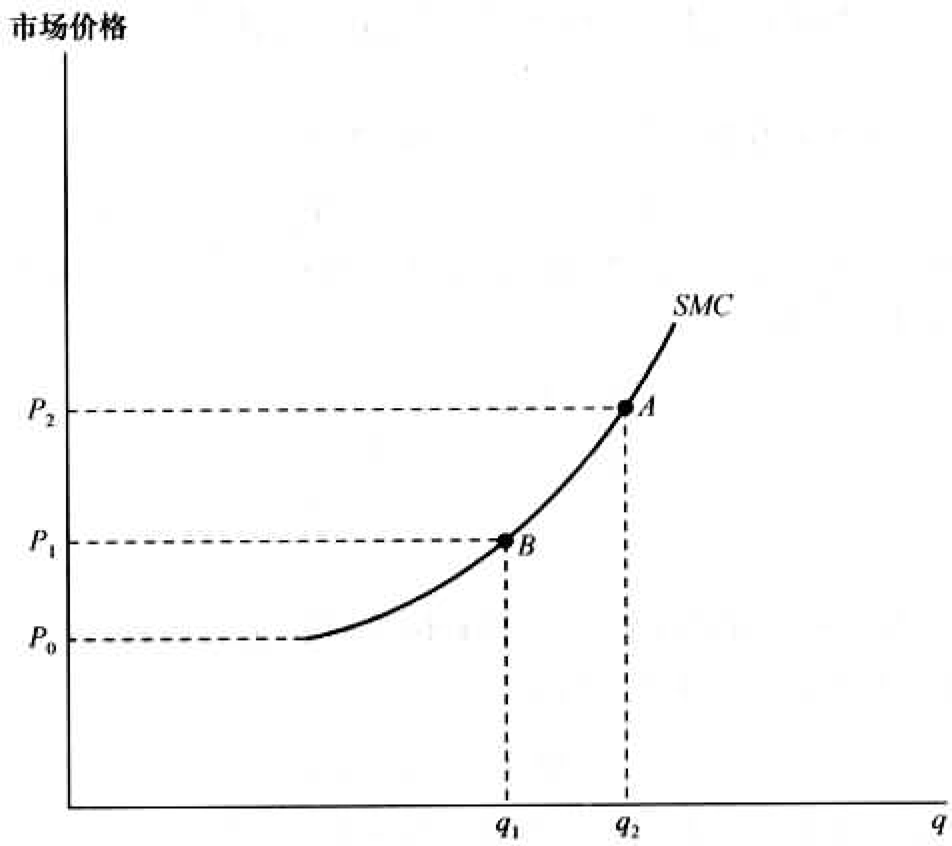


图 9.4　短期生产者剩余的变化测度厂商的利润

如果价格从 P_1 上升到 P_2,厂商利润的增加由区域 P_2ABP_1 给出。厂商在价格 P_1 上得到的短期生产者剩余由区域 P_0BP_1 给出。这测度了当厂商生产 q_1 产量而非停业生产的 P_0 或更低产量时,厂商短期利润的增加。

使用这种方法,我们也可以测度相对于不生产任何产出的情况,厂商在多大程度上重视其在现行市场价格下生产的权利。如果我们将短期内停产的价格记为 P_0(实际上有可能此价格是零,但不必然如此),那么厂商在 P_1 的价格下获得的额外的利润被定义为生产者剩余

$$\text{生产者剩余} = \Pi(P_1,\cdots) - \Pi(P_0,\cdots) = \int_{P_0}^{P_1} q(P)\,\mathrm{d}P \tag{9.31}$$

这在图 9.4 中表示为区域 P_1BP_0。因此我们得到了正式的定义:

定义

生产者剩余。生产者剩余是生产者通过以市场价格进行交易所获得的超过什么都不生产时的所得的那部分额外回报。图中用市场价格线以下和供给曲线以上的那部分区域的面积表示。

在定义中,我们没有对短期和长期进行区分,尽管我们的分析到目前为止只包含短期。下一章我们将通过描述长期的生产者剩余考察能够用于两种情况的定义,则这个一般的定义就可以运

用于两种概念了。当然，正如我们所要说明的，长期生产者剩余的含义和我们此处的研究有很大的不同。

我们必须指出短期生产者剩余的另一个方面。因为厂商在停止营业点不生产，我们得知 $\Pi(P_0,\cdots) = -vk_1$ —— 也就是说，停止营业点的利润只由所有固定成本的损失组成。因此

$$\begin{aligned}\text{生产者剩余} &= \Pi(P_1,\cdots) - \Pi(P_0,\cdots)\\ &= \Pi(P_1,\cdots) - (-vk_1) = \Pi(P_1,\cdots) + vk_1\end{aligned} \tag{9.32}$$

也就是说，生产者剩余由当前获得的利润加上短期固定成本组成。经过进一步处理，公式可以表达如下

$$\begin{aligned}\text{生产者剩余} &= \Pi(P_1,\cdots) - \Pi(P_0,\cdots)\\ &= P_1q_1 - vk_1 - wl_1 + vk_1 = P_1q_1 - wl_1\end{aligned} \tag{9.33}$$

总之，一个厂商的短期生产者剩余由其收益超过可变成本的程度决定——就是厂商通过短期生产而非停止营业和不生产所获得的收益。

例 9.4

短期利润函数

这些对于利润函数的不同使用可以由我们前面使用的柯布-道格拉斯生产函数来说明。因为 $q = k^\alpha l^\beta$，我们在短期将资本视为固定于 k_1，利润是

$$\pi = Pk_1^\alpha l^\beta - vk_1 - wl \tag{9.34}$$

为了得到利润函数，我们用求最大值的一阶条件从此式中估计 l 的值

$$\frac{\partial\pi}{\partial l} = \beta Pk_1^\alpha l^{\beta-1} - w = 0 \quad 因此 \quad l = \left(\frac{w}{\beta Pk_1^\alpha}\right)^{1/(\beta-1)} \tag{9.35}$$

可以令 $A = (w/\beta Pk_1^\alpha)$ 并将上式代入利润方程以简化求利润的过程。利用这个便捷的方法，我们得到

$$\begin{aligned}\Pi(P,v,w,k_1) &= Pk_1^\alpha A^{\beta/(\beta-1)} - vk_1 - wA^{1/(\beta-1)}\\ &= wA^{1/(\beta-1)}[Pk_1^\alpha(A/w) - 1] - vk_1\\ &= wA^{1/(\beta-1)}[(1-\beta)/\beta] - vk_1\end{aligned} \tag{9.36}$$

尽管这个式子很复杂，但是这个解是我们希望得到的——厂商的最大利润只是它所面对的价格和技术的函数。注意，厂商的固定成本(vk_1)以简单的线性方式进入了表达式。厂商面临的价格决定了收益超过可变成本的程度，然后减去固定成本就得到了最终利润。

因为用代数来检验总是十分明智的，所以我们还用以前的数字为例来检验一下。当 $\alpha = \beta = 0.5$，$v = 3$，$w = 12$，$k_1 = 80$ 时，我们知道在 $P = 12$ 的价格水平下，厂商将生产 40 单位的产出并且使用的劳动投入是 $l = 20$。因此利润将是 $\pi = R - C = 12\times40 - 3\times80 - 12\times20 = 0$。厂商将在 $P = 12$ 的价格暂停生产。使用利润函数，得到

$$\begin{aligned}\Pi(P,v,w,k_1) &= \Pi(12,3,12,80)\\ &= 12\cdot[12/(0.5\cdot12\cdot80^{0.5})]^{-2}(1)-3\cdot80\\ &= 12\cdot(80^{0.5}/2)^2-240=240-240=0\end{aligned}\tag{9.37}$$

因此，当 $P=12$ 时，厂商在其可变成本之上赚取 240 的利润，并且这些利润最后被固定成本所抵消。当商品的价格更高时，厂商赚取正的利润。但是，如果价格跌到 12 以下，厂商将遭遇短期损失。①

霍德林引理(Hotelling's lemma)：我们可以使用式 9.36 中的利润函数和包络理论来推导厂商的短期供给函数

$$\begin{aligned}q(P,v,w,k_1) &= \frac{\partial\Pi}{\partial P}=\frac{-w}{\beta}\cdot A^{(2-\beta)/(\beta-1)}\cdot\left(\frac{-w}{\beta P^2k_1^{\alpha}}\right)\\ &= \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta/\beta-1}k_1^{\alpha/(1-\beta)}P^{\beta/(1-\beta)}\end{aligned}\tag{9.38}$$

这就是我们从例 9.3 中计算得出的短期供给函数(见式 9.20)。

生产者剩余：我们也可用供给函数计算厂商的短期生产者剩余。为了达到该目的，再一次回到我们的数字：$\alpha=\beta=0.5$，$v=3$，$w=12$，$k_1=80$。使用这些参数得到短期供给关系是 $q=10P/3$，厂商停止营业的价格是零。因此，在 $P=12$ 的价格水平下，生产者剩余是

$$\text{生产者剩余}=\int_0^{12}(10P/3)\,\mathrm{d}P=\left.\frac{10P^2}{6}\right|_0^{12}=240\tag{9.39}$$

这是价格为 12 时($\pi=0$)的短期利润加上短期固定成本($=vk_1=3\times80=240$)得到的精确值。如果价格上升到比如说 15，生产者剩余将上升至 375，这包括 240 的固定成本加上在较高价格下获得的利润($\pi=135$)。

请回答：资本租金率(v)的变化如何对此处的短期生产者剩余产生影响？劳动租金率(w)的变化又会对其产生什么影响呢？

9.6 利润最大化与要素投入需求

至此，我们将厂商的决策问题看做一个选择利润最大化的产出问题。但是，我们贯穿全书的讨论已说明，事实上厂商的产出取决于它所运用的投入，并且生产函数 $q=f(k,l)$ 概括了这一关系。因此，厂商的经济利润也可以表示为它所使用的投入的函数

$$\pi(k,l)=Pq-C(q)=Pf(k,l)-(vk+wl)\tag{9.40}$$

这样来看，利润最大化厂商的决策问题变为选择合适的资本与劳动投入水平的问题了。② 最大值的

① 表 8.2 中，我们证明如果 $q=40$，则 $SAC=12$。因此零利润也可以用 $P=12=SAC$ 来表示。

② 我们在这一部分的整体讨论中，假定厂商是一个价格接受者，于是其产出与投入的价格可以被当做固定的参数。当考虑价格依从于数量的情形时，我们的分析结果也可以相当容易地进行一般化处理。

一阶条件为

$$\frac{\partial\pi}{\partial k}=P\frac{\partial f}{\partial k}-v=0$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial l}=P\frac{\partial f}{\partial l}-w=0 \tag{9.41}$$

这些条件给我们带来一个直观的含义就是，一个利润最大化的厂商应该将投入使用到这样的程度：在这一点上投入对收益的边际贡献等于使用这一投入的边际成本。因为我们假设厂商是一个投入价格的接受者，所以使用任何一单位投入的边际成本都等于其市场价格。而要素投入对于收益的边际贡献由其生产的额外产出（边际产品）乘以此商品的市场价格得出。我们给这种需求概念起一个专门的名称：

定义

边际收益产品。即厂商多使用一单位要素投入所得到的额外的收益。在厂商是价格接受者[①]的情况下，$MRP_l=Pf_l$，$MRP_k=Pf_k$。

因此，利润最大化要求厂商对每种要素投入的使用达到这样一种水平：在这一点要素投入的边际收益产品等于其市场价格。还需注意的是利润最大化表达式9.41同时有成本最小化的含义，因为 $RTS=f_l/f_k=w/v$。

9.6.1 二阶条件

因为式9.40中的利润函数取决于两个变量——k 与 l，这时利润最大化的二阶条件在某种程度上要比我们以前所考察的单变量情况更为复杂。在第2章的附录中，我们知道为了保证真正取得最大值，利润函数应该是凹函数。也就是说，

$$\pi_{kk}=f_{kk}<0 \quad \pi_{ll}=f_{ll}<0 \tag{9.42}$$

并且，

$$\pi_{kk}\pi_{ll}-\pi_{kl}^2=f_{kk}f_{ll}-f_{kl}^2>0$$

因此，要求利润函数是凹函数等价于要求生产函数是凹函数。但是，值得注意的是，每一投入的边际生产力递减并不足以保证边际成本递增，由于扩大产出通常要求厂商同时使用更多的资本与更多的劳动，因此我们还必须保证资本投入的增加不会导致劳动的边际生产力提高（由此而降低边际成本）足够大的幅度以至于抵消了劳动自身边际生产力递减的效果。因此方程9.42的第二部分要求这种交叉生产力效应相对地小一些——从而保证投入的边际生产力递减趋势居于支配地位。如果满足这些条件，在利润最大化时选择的 k 与 l 的边际成本将是递增的，一阶条件则代表了一个局部最大值。

---

① 如果厂商在产品市场上不是价格接受者，使用边际收益替代价格就能够将此定义一般化。也就是说，$MRP_l=\partial R/\partial l=\partial R/\partial q\cdot\partial q/\partial l=MR\cdot MP_l$。对于资本投入的推导也与此类似。

9.6.2 投入需求函数

原则上讲，可以用利润最大化时要素使用的一阶条件得出投入需求函数。需求函数说明的是要素投入的使用量如何依赖于厂商所面对的投入价格。我们将其记为

$$\begin{aligned}\text{资本需求} &= k(P,v,\ w)\\ \text{劳动需求} &= l(P,v,\ w)\end{aligned}\tag{9.43}$$

值得注意的是，和在第 8 章的讨论的投入需求概念不同，第 8 章的投入引致需求是给定产量的条件下对投入的需求；而这里需求函数是"无条件的"——也就是说，它们暗含允许厂商根据价格调整产出的意思。因此，相较于第 8 章介绍的引致需求函数，这些需求函数能够对价格如何影响投入需求这一问题提供更为完整的描述。我们已经证明这些投入需求函数可以通过对利润函数求导并推导得出。但是，首先我们得探讨如何预计投入价格的变化对需求的影响。为简化起见，我们只考虑劳动需求，但对于其他投入的需求分析也是适用的。一般地，我们得出的结论是：这种影响的方向在所有情况下都是确定的——也就是说，无论投入是多少，都有$\partial l/\partial w \leqslant 0$。为了得出这一结论，我们从几个简单的例子开始。

9.6.3 单一投入的情形

预计$\partial l/\partial w$是负值的一个原因是因为我们假设劳动的边际产品随着劳动使用量的增加而递减。w的递减意味着需要使用更多的劳动以满足等式$w = P \cdot MP_l$：w的减少必须由MP_l的减少（因为P是固定不变的）和l的增加来实现。此讨论对于只有一种要素投入的情形是十分正确的，证明如下。将式 9.41 中利润最大化的全微分写作

$$\mathrm{d}w = P \cdot \frac{\partial f_l}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial w} \cdot \mathrm{d}w$$

或者

$$1 = P \cdot f_{ll} \cdot \frac{\partial l}{\partial w}\tag{9.44}$$

或者

$$\frac{\partial l}{\partial w} = \frac{1}{P \cdot f_{ll}} \leqslant 0$$

其中，最后一个不等式成立是因为劳动的边际生产力被假设为递减的（$f_{ll} \leqslant 0$）。至此，我们已经证明，至少对于单一投入的情况，其他条件不变而工资增加将致使厂商雇用更少的劳动力。

9.6.4 两种投入的情形

对于有两种（或者更多）要素投入的情形，分析会复杂一些。劳动边际产品递减的假设在此处会产生误解。如果w下降，作为成本最小化下选择的新的投入组合，不仅l会发生变化，而且k也会发生变化。当k变化时，整个f_l函数会发生变化（此时劳动需要不同的资本数量），而且我们不能像单一投入的情形那样进行简单的讨论。在这一小节的剩余部分中，我们将使用图解的方法来解释在两

种投入的情况下 $\partial l/\partial w$ 为什么必须是负值。下部分将对其进行更加精确和严格的分析。

9.6.5 替代效应

对于两种投入的分析在某些方面类似于第 5 章中讲到的个人对于商品价格变动的反应。当 w 下降时,我们可以把其对 l 使用量的影响分解成两部分。第一部分叫做替代效应,如果 q 保持不变为 q_1,那么在生产过程中将存在用 l 替代 k 的趋势。这种效应如图 9.5(a)所示。因为生产 q_1 产量的成本最小化条件为 $RTS = w/v$, 所以 w 的减小必然会使投入组合从 A 移动到 B。由于等产量线表现出 RTS 递减,所以图中清晰地表明替代效应肯定是负的。如果产出保持不变,w 的减小将导致劳动使用量的增加。

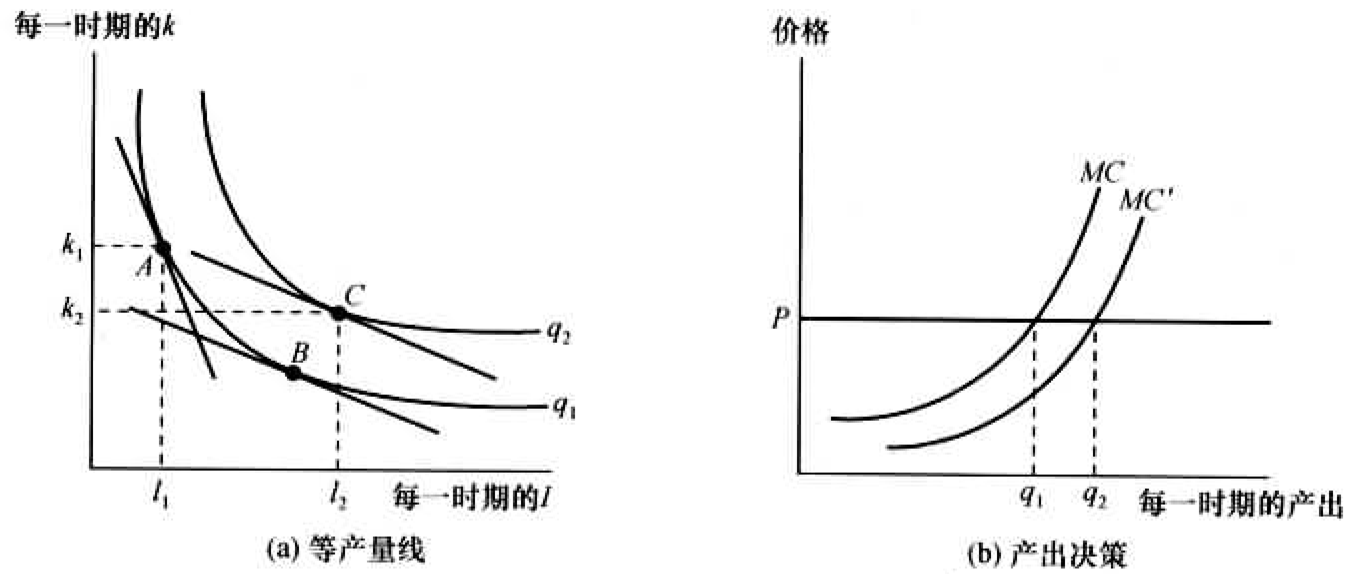


图 9.5 一种要素价格下降的替代效应和产出效应

当劳动价格降低时,两种因素得到的不同效应一起作用。其中一个是替代效应,如果产出保持不变,它将增加劳动的使用量。表现为图(a)中点 A 到点 B 的移动。点 B 满足了新的、更低的 w 成本最小化条件($RTS = w/v$)。w/v 的变化也使厂商的扩展线和边际成本曲线发生移动。一般的情况可能是 w 降低时 MC 曲线向下移动,如图(b)所示。对应于新的曲线(MC'),厂商将选择更高的产出水平。其结果是,由于这种产出效应,劳动的使用量将增加(至 l_2)。

9.6.6 产出效应

尽管如上所述,但是保持产出不变是不对的。认为 q 的变化(产出效应)类似于个人效用最大化问题是成立的。消费者有预算约束,但是厂商没有。厂商尽可能多地生产市场所需要的产量。为了研究生产数量的变化,我们必须考察厂商利润最大化的产出决策。由于改变了相关的投入成本,所以 w 的变化将使厂商的扩展线发生移动。结果,厂商所有的成本曲线都移动了,厂商可能选择 q_1 之外的其他产量水平。图 9.5(b)展示的是被认为"正常"的情况。其中 w 的下降使 MC 向右下方移动到 MC'。结果,利润最大化的产出水平从 q_1 上升到 q_2。利润最大化的条件($P = MC$)在更高的产出水平上得到了满足。回到图 9.5(a),如果 l 不是劣等投入要素(如下),产出的增加将致使厂商对 l 的需求量加大。替代效应和产出效应都会将厂商的投入决策移动到等产量线上的 C 点。两种效应都使对实际工资的降低的反应表现为劳动使用量的增加。

图 9.5 中的分析假设市场价格(或者边际收益,如果边际收益不等于价格)在生产商品的过程中

保持不变。只有当某一产业中的一个厂商的单位劳动成本降低时,这可能是一个恰当的近似。但是,如果降价是行业性的(这更可能发生),那么分析就会有一些细微的不同。此时,所有厂商的边际成本曲线都会向外移动,并且行业的供给曲线也会移动。假设需求具有负斜率,这将会使生产价格下降。行业和有代表性的厂商的产出会增加,并且和以前一样,劳动的雇用量也将增加。

9.6.7 交叉价格效应

我们已经证明至少在简单的情况下,$\partial l/\partial w$ 肯定是负值;当工资率下降时,替代效应和产出效应导致厂商使用更多的劳动。从图 9.5 中可以清楚地看出,对于资本使用如何对工资变化作出反应这一点并没有明确的论述。也就是说,$\partial k/\partial w$ 的符号是不确定的。在简单的两种投入情况下,工资的降低将导致劳动对资本的替代;也就是说,生产既定产出水平只需要更少的资本投入。但是作为厂商增加产量计划的一部分,产出效应将导致更大的资本需求量。因此,替代效应和产出效应此时的作用方向是相反的,并且对于$\partial k/\partial w$ 可能的符号并无定论。

9.6.8 替代效应和产出效应的总结

以上讨论的结果可用如下原则进行总结:

最优化原则

投入需求的替代效应和产出效应。当一种投入的价格下降时,两种效应使得对此投入的需求量增加:

1. 替代效应使得生产既定产出需要更多的这种投入;
2. 成本下降使厂商能够出售更多商品,因此产生了使这种投入需求增加的另外一种产出效应。

当要素投入的价格上升时,替代效应和产出效应导致对于该投入的需求量下降。

我们现在使用数学方法对这些概念作更精密准确的分析。

9.6.9 数学分析

我们对由于投入要素的价格变化产生的替代效应和收入效应的数学分析遵循消费者理论中对价格变化产生的影响的分析。最终结果类似于我们从第 5 章中推导出的 Slutsky-style 方程。尽管如此,消费者需求理论中吉芬悖论的不确定性在这里并没有出现。

首先回想,对于任何投入要素(如劳动)的需求我们都有两个概念:(1) 对于劳动有条件的需求,用 $l^c(v,w,q)$ 来标记;(2) 对于劳动无条件的需求,用 $l(P,v,w)$ 标记。在利润最大化前提下对劳动投入作出决策时,这两个概念在劳动量使用方面是一致的

$$l(P,v,w) = l^c(v,w,q) \tag{9.45}$$

将这个恒等式对市场工资进行微分得到

$$\frac{\partial l(P,v,w)}{\partial w} = \frac{\partial l^c(v,w,q)}{\partial w} + \frac{\partial l^c(v,w,q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial w} \tag{9.46}$$

所以，工资变化对于劳动需求的总影响可以分解成两部分：(1) 劳动的引致需求的变化，保持 q 不变（替代效应）；(2) 产出水平的变化引起的劳动引致需求的变化（产出效应）。第一个影响明显是负的，因为厂商的等产量线是凸向原点的。为了研究第二种效应的符号，看看下面的准数学分析，它将准确地证明工资的变化如何影响产出

$$\text{产出效应} = \frac{\partial l^c}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial w} = \frac{\partial l^c}{\partial q}\cdot\frac{\partial q(P=MC)}{\partial MC}\cdot\frac{\partial MC}{\partial w} \tag{9.47}$$

现在 $\partial q/\partial MC$ 明显是负值——因为既定的市场价格下，边际成本曲线向上移动将导致生产更少的产量。对于正常品而言，$\partial l^c/\partial q$ 和 $\partial MC/\partial w$ 都是正值，因此收入效应肯定是负值。即使是在劣质投入这样极端的情况下，第 208 页的脚注③证明这两个导数都是负值，因此其乘积是正值。所以，即使是劣质品，其产出效应也是负值。

我们的数学方法也支持了图 9.5 中的图形分析。投入要素的价格上涨对此要素需求的影响肯定是负的。由于存在利润最大化假设，所以像吉芬悖论这样奇怪的情况才不会发生。式 9.46 对于投入需求的进一步分解使我们可以研究投入价格变化所产生的影响，正如下一个例子所展示的那样。

例 9.5

将投入需求分解为替代和产出两部分

为了研究投入需求，我们首先需要一个具有以下两种特征的生产函数：(1) 该函数允许资本和劳动相互替代（因为替代是该分析的重要组成部分）；(2) 生产函数必须是边际成本递增的（因此可以满足利润最大化的二阶条件）。满足以上要求的生产函数是三种投入的柯布-道格拉斯函数，其中有一种投入保持不变。因此，令 $q=f(k,l,g)=k^{0.25}l^{0.25}g^{0.5}$，其中 k 和 l 是我们熟悉的资本和劳动投入，g 是第三种投入要素（厂商的规模），在我们所有的分析中其值固定为 $g=16$（平方米）。短期生产函数因此是 $q=4k^{0.25}l^{0.25}$。我们假设厂商一定时期内每平方米的租金成本是 r。为了研究劳动投入的需求，我们需要知道此函数暗含的成本函数和利润函数。幸运的是，这些函数已经计算如下

$$C(v,w,r,q) = \frac{q^2v^{0.5}w^{0.5}}{8} + 16r \tag{9.48}$$

且

$$\Pi(P,v,w,r) = 2P^2v^{-0.5}w^{-0.5} - 16r$$

正如我们所预计的，固定投入(g)以常数形式进入了这些方程，并且这些成本在我们的分析中起的作用不大。

包络结果

通过对这些函数求微分可以推导得出劳动的需求关系

$$l^c(v,w,r,q) = \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{q^2v^{0.5}w^{-0.5}}{16} \tag{9.49}$$

和

$$l(P,v,w,r) = -\frac{\partial \Pi}{\partial w} = P^2 v^{-0.5} w^{-1.5}$$

这些函数已经说明工资变化对于劳动总需求的影响大于其对于劳动引致需求的影响,因为总需求方程中 w 的负指数绝对值更大,也就是说,产出效应在此处起了作用。为了直观起见,我们举几个数字例子。

一个具体的例子:我们使用一些前面的例子中用到的数值:$v=3$,$w=12$,并且令 $P=60$。我们首先计算厂商在这种情况下的产出决定。为了达到目的,需要其供给函数

$$q(P,v,w,r) = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = 4Pv^{-0.5}w^{-0.5} \tag{9.50}$$

在此函数和我们选定的价格水平下,厂商利润最大化的产出水平是 $q=40$。根据式 9.49 中的需求函数,在这样的价格水平下和 40 单位的产出水平上,预计厂商将使用 $l=50$ 的劳动投入。因为此处 RTS 等于 k/l,我们又知道 $k/l=w/v$,所以此价格下 $k=200$。

现在假设工资率上升到 $w=27$,但其他价格保持不变。厂商的供给曲线(式 9.50)表明产出将是 $q=26.67$。因为工资的上升使厂商的边际成本曲线向上移动但此时产出价格不变,这就会致使厂商的产出减少。为了达到这样的产出,无论哪个劳动需求函数都可以证明厂商将使用 $l=14.8$ 的劳动。而资本的使用量将由于产出的大幅度减少而下降到 $k=133.3$。

我们可以用引致需求函数将劳动的使用量从 $l=50$ 变到 $l=14.8$ 分解成替代效应和产出效应。如果厂商不顾工资的上升继续生产 $q=40$ 的产量,式 9.49 表明其将使用 $l=33.33$ 的劳动。资本投入也将上升到 $k=300$。由于我们将产出保持在其初始的水平 $q=40$ 不变,这些变化则代表了对应于更高的工资率的替代效应。

为了保持利润最大化,厂商不得不减少产出,这样厂商也会减少其对投入要素的使用。尤其需要注意的是,本例中工资的上升不仅导致劳动使用量急剧减少,而且由于巨大的产出效应,还导致资本的使用量也减少。

请回答:如果所有厂商的工资都上涨,本例中的计算将受到什么影响?劳动(和资本)需求的减少比本例中的结果大还是小?

小　结

这章我们研究了利润最大化厂商的供给决策。我们的目的是看看这样的厂商如何对市场上的价格信号作出反应。为了得到答案,我们进行了一系列的分析:

- 为了实现利润最大化,厂商应该选择生产这样的产出水平:这一点的边际收益(多出售一单位产品得到的收益)等于边际成本(多生产一单位产出的成本)。

- 如果厂商是价格接受者,其产出决策对于其产出价格没有影响,因此边际收益等于此价格。但是,如果厂商面对的产品需求曲线是向下倾斜的,它可以以更低的价格出售更多的

产品。这种情况下，边际收益可能低于价格甚至可能是负值。

- 边际收益和需求的价格弹性有以下关系

$$MR = P\left(1 + \frac{1}{e_{q,p}}\right)$$

其中 P 是厂商产出的市场价格，$e_{q,p}$ 是其产品的需求价格弹性。

- 作为价格接受者并追求利润最大化的厂商的供给曲线，是其边际成本曲线上高于平均可变成本（AVC）最低点的斜率为正值的部分。如果价格低于 AVC 的最低点，厂商的利润最大化决策将使他暂停生产。

- 厂商对其面对的各种价格变化作出的反应可以通过使用利润函数 $\Pi(P, v, w)$ 来衡量。此函数表示在既定的产出价格和投入价格及技术水平下厂商能够得到的最大利润。利润函数得到了特别有用的包络结果。利润函数对市场价格求导数可以得到产品的供给函数，而且它对任何投入的价格求导数可以得到此种投入的需求函数的负值。

- 市场价格的短期变化会导致厂商短期利润的改变。这可以用图形对生产者剩余大小的变化进行测度来说明，也可以使用利润函数来计算生产者剩余。

- 利润最大化产生了一套关于厂商要素投入的需求理论。厂商对任何一种要素投入的使用都应该达到这样一点：其边际收益产品恰好等于投入的单位价格。厂商投入要素价格的提高将引致替代效应和产出效应，它们会使厂商减少投入的使用量。

练　习　题

9.1 John 割草服务公司是一个小厂商，它是一个价格接受者（即 $MR = P$）。修剪草坪的现行市场价格为每亩 20 美元，John 公司的成本为

$$总成本 = 0.1q^2 + 10q + 50$$

其中，q = John 公司选择的每天修剪的亩数。

a. 为达到利润最大化，John 公司将选择修剪多少亩草坪？

b. 计算 John 公司每日的最大利润额。

c. 以图显示这些结果并画出 John 公司的供给曲线。

9.2 固定的一次付清的总利润税会影响利润最大化的产量吗？如果对利润计征比例税呢？如果按每单位产出征收一定的税对产量有影响吗？如果是对劳动投入征税呢？

9.3 本题与一些函数的需求和边际收益曲线之间的关系有关。请证明：

a. 对于一条线性需求曲线，在任何价格水平上，边际收益曲线都处在纵轴与需求曲线之间的平分点上。

b. 对于任一条线性需求曲线，需求曲线与边际收益曲线之间的垂直距离为 $-1/(b \cdot q)$，其中 $b(<0)$ 是需求曲线的斜率。

c. 对于形式是 $q = aP^b$ 的不变弹性需求曲线，需求曲线与边际收益曲线之间的垂直距离与需求曲线的高度成一固定的比率，这一比率取决于需求的价格弹性。

d. 对于任何向下倾斜的需求曲线，在任一点上需求曲线与边际收益曲线之间的垂直距离可以通过在该点对需求曲

线作线性趋近，并应用 b 中所描述的程序得到。

e. 将从 a 到 d 所得的结果在图上表示出来。

9.4 U.W.公司在它设在内华达州的工厂生产高质量的小器械，销往世界各地。小器械的总成本函数为

$$总成本 = 0.25q^2$$

小器械的需求地只有澳大利亚（其需求曲线为 $q=100-2P$）与拉普兰（其需求曲线为 $q=100-4P$）。如果该公司能够控制它在每一市场上的供给量，为了使总的利润最大化，它应该在每个地方各出售的产品数量是多少？在每个地方以什么价格出售？

9.5 一个集成计算器生产厂商的生产函数为

$$q = 2\sqrt{l}$$

其中，q 为完成的计算器产量，l 代表劳动投入的小时数。这个厂商在计算器（售价为 P）与劳动（工资率为每小时 w）市场上，是一个价格接受者。

a. 此厂商的总成本函数是怎样的？

b. 厂商的利润函数是怎样的？

c. 集成计算器的供给函数［$q=f(P,w)$］是怎样的？

d. 厂商的劳动需求函数［$l(P,w)$］是怎样的？

9.6 优质鱼子酱的市场取决于天气，如果天气很好，便会有很多人买，售价为每磅鱼子酱 30 美元。天气不好时，每磅只能售 20 美元。一周前生产的鱼子酱不能保留到下一周，有一个小规模的鱼子酱生产者的成本函数为

$$C = \frac{1}{2}q^2 + 5q + 100$$

其中 q 为每周鱼子酱的产量，生产者的决策必须在知道天气情况（与鱼子酱的价格）之前作出，不过我们知道好天气与坏天气出现的概率各为 0.5。

a. 如果厂商希望使其预期利润值最大化，它应该生产多少鱼子酱？

b. 假设此工厂主有这样的效用函数

$$效用 = \sqrt{\pi}$$

其中，π 是每周的利润。则按 a 中所确定的产出策略，其预期效用是多少？

c. 这个工厂主能通过生产不同于 a 与 b 中所得出的具体产量而获得更高的利润吗？对此加以解释。

d. 假定这个厂商能预测出每周的价格，但不能影响每周的价格，在这种情况下，为使预期利润最大化应采取什么策略？这时的预期利润是多少？

9.7 重型机械学校教学生如何操作建筑机器。学校每个星期能够培训的学生数量是 $q=10\min(k,l)^{\gamma}$，其中 k 是学校每个星期租用的锄耕机的数量，l 是学校每星期雇用的老师的数量，并且 γ 表示生产函数的规模报酬。

a. 解释为什么这个利润最大化模型要求 $0<\gamma<1$。

b. 假设 $\gamma=0.5$，计算厂商的总成本和利润函数。

c. 如果 $v=1000$，$w=500$，并且 $P=600$，这个学校能够服务多少学生？其利润是多少？

d. 如果学生愿意支付的费用上涨为 $P=900$，利润将如何变化？

e. 画出学校对学生的供给曲线，并用图形证明 d 部分中得出的利润的增加量。

9.8 你认为产出价格 P 的上升将如何影响对资本和劳动投入的需求？

a. 用图形解释当投入看起来都不是劣质投入时，价格 P 的上升将不必然减少对这些要素的需求的原因。

b. 证明 a 中的图形假设可以用柯布–道格拉斯情形下推导出的投入需求函数证明。

c. 使用利润函数证明劣质投入将如何使 P 对投入需求的影响变得不确定。

9.9 使用形式为 $q=(k^{\rho}+l^{\rho})^{\gamma/\rho}$ 的 CES 生产函数，可以通过很多的代数知识来计算利润函数，$\Pi(P,v,w)=KP^{1/(1-\gamma)}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{\gamma/(1-\sigma)(\gamma-1)}$，其中 $\sigma=1/(1-\rho)$，并且 k 是常数。

a. 如果你不嫌麻烦（或者你的老师不怕麻烦），请证明利润函数是这种形式的——可能最简便的方法是从例 8.2 中的 CES 函数开始。

b. 解释为什么只有在 $0<\gamma<1$ 时，利润函数是对厂商行为合理的表示。

c. 说明替代弹性（σ）在利润函数中的作用。

d. 这种情况下的供给函数是什么？当要素投入的价格变化时，替代弹性（σ）如何决定函数移动的程度？

e. 推导此情况下的投入需求函数。替代弹性（σ）的大小如何影响这些函数？

9.10 可以将杨格定理与本章中的包络结果结合使用推导得出一些有用的结论。

a. 证明 $\partial l(P,v,w)/\partial v=\partial k(P,v,w)/\partial w$，并解释。

b. 使用 a 的结论证明对每单位劳动征税将如何影响资本投入。

c. 证明 $\partial q/\partial w=-\partial l/\partial P$，并解释。

d. 使用 c 的结果讨论对于每单位劳动投入征税将如何影响供给量。

推荐阅读文献

Ferguson, C. E. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1969.

本书对于投入需求的产出效应作了完整的分析，并且展示了本章中许多结论的替代效应的程度。

Hicks, J. R. *Value and Capital*, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1947.

附录中对要素的互补性作了详细论述。

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory.* New York: Oxford University Press, 1995.

此文使用向量和矩阵分析的方法对于生产理论提供了规范的介绍，并且考虑了投入和产出的任意数值。

Samuelson, P. A. *Foundations of Economic Analysis.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1947.

该文较早地对利润函数进行了发展，并且对于规模报酬不变对市场均衡的影响进行了较好的讨论。

Sydsaeter, K., A. Storm, and P. Berck. *Economists' Mathematical Manual*, 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

第 25 章提供了一些利润函数和需求函数的公式。

Varian, H. R. *Microeconomic Analysis*, 3rd ed. New York: W. W. Norton, 1992.

本书中有一章都是关于利润函数的。Varian 运用 LeChatelier 原理采用了新颖的研究方法比较了短期和长期反应。

扩　展

利润函数的应用

第9章我们介绍了利润函数。它根据厂商面对的产品价格和投入价格，总结出了厂商的"底线"。在扩展部分我们说明如何使用利润函数的一些性质来估计重要的实证和理论问题。

E9.1　凸性和价格稳定

利润函数凸性的含义是，单个厂商一般都比较钟爱波动的产出价格而非处于平均值的平稳的产出价格(比如，这个价格是通过政府调控得到的)。在许多欠发达国家，这种愿望背离了强调价格平稳的经济政策的方向。有一些原因可以说明这个矛盾。首先，很多想要"稳定"物价的政策实际上都是提高平均物价的政策。比如说，价格卡特尔就将这作为其首要目标。其次，凸性结论只适用于单个的作为价格接受者的厂商。从整个市场的角度来说，稳定的或者波动的价格带来的总收益都依赖于对这种产品需求的性质。[①] 另一个评价稳定价格时需要强调的概念是厂商对于未来的预期。如果产品可以被储存起来，政府希望稳定价格的政策会使生产决策变得十分复杂。最后，在某些情况下，价格稳定政策的目的是规避消费者的基本生活用品(比如说食品)的价格波动带来的风险，而非生产者的福利。不管怎么说，对于那些试图制定"能够稳定价格，以便使生产者长期受益"的政策的人来说，利润函数的这个性质是一个不可忽视的警告。想要进一步了解此问题，请参见 Newbury and Stiglitz (1981)。

E9.2　生产者剩余和流行病的短期成本

流行病的爆发将严重损害市场，并且导致生产者和消费者剩余的短期损失。对于厂商，这些可以算做由于暂时较低的产品价格或者较高的投入价格导致的短期利润损失。Harrington, Krupnick 和 Spofford(1991)在其对1983年宾夕法尼亚爆发的贾第鞭毛虫病的深入研究中提供了此类计算详细的扩展。尽管消费者承受了疾病爆发带来的大部分损失，但是研究者也计算出其紧邻地区的餐馆和酒吧的物质损失。这些损失既来源于这些厂商生意的减少，也来源于对于瓶装水的暂时性需求的增加，还有其运营中的高投入。对于损失的数值计算都基于研究者提出的利润函数。

E9.3　利润函数和生产力的测度

第7章中我们提到技术水平意义上的生产力增长率通常是这样计算的

$$G_A = G_q - s_k G_k - s_l G_l$$

其中，

$$G_x = \frac{dx/dt}{x} = \frac{d\ln x}{dt}$$

并且 s_k，s_l 分别是资本和劳动在总成本中所占的份额。计算的一个难点是其需要计算投入使用量随着时间的变化——而这对于资本的计算则更加困难。利润函数提供了另外一种测度方法，并且不需要直接估计投入的使用量。为了更好地了解这种方法的逻辑，先考察我们要研

① 特别地，对于需求弹性是常数的需求函数而言，如果需求是缺乏弹性的，则总收益将是价格的凹函数；但是如果需求是有弹性的，则总收益是价格的凸函数。因此，在具有弹性的情况下，生产者从波动的价格中获得的收益水平比价格稳定于平均水平时高。

究的生产函数 $q=f(k,l,t)$。我们想知道其他投入水平保持不变时产出将随着时间如何变化。也就是说，我们要计算 $\partial \ln q/\partial t=f_t/f$，注意，这一表达式中使用了偏导数。如果生产函数是规模报酬不变的，并且厂商对于投入和产出都是价格接受者，那么可以很容易证明[①]偏导数可以测度我们想要的总的要素生产率，即 $G_A=f_t/f$。现在来看利润函数 $\Pi(P,v,w,t)$。由于利润函数的定义是

$$\pi = Pq - vk - wl = Pf - vk - wl,$$

所以

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial t} = \frac{Pf_t}{\Pi}$$

并且因此，

$$G_A = \frac{f_t}{f} = \frac{\Pi}{Pf} \cdot \frac{\partial \ln \Pi}{\partial t} = \frac{\Pi}{Pq} \cdot \frac{\partial \ln \Pi}{\partial t} \qquad \text{(i)}$$

所以，在这种特殊情况下，总的要素生产率可以从总收益中的利润份额和利润函数的对数对时间的求导中推出。而且这个结论可以很容易地推广到规模报酬不是常数的情况甚至可以推广至生产多种产品的厂商（参见 Kumbhaker，2002）。因此当投入和产出的价格比投入数量容易得到时，使用利润函数计算是很不错的方法。

以上三个使用利润函数的例子可能经常会被提及。Karagiannis 和 Mergos（2000）用利润函数的方法重新估算了美国过去 50 年中农业总的要素生产率的主要增长。他们得出的结论和使用传统的方法得到的结论大体上是一致的。Huang（2000）采用了相同的方法来研究中国台湾的银行业并且得出了使用其他方法不能得出的生产率增长的重大结论。最后，Coelli 和 Perelman（2000）使用了修正的利润函数测度了欧洲铁路的相对效率。结果可能并不奇怪，因为他们发现荷兰的铁路是欧洲最有效率的，而意大利的铁路效率最低。

参考文献

Coelli, T., and S. Perelman. "Technical Efficiency of European Railways: A Distance Function Approach". *Applied Economics* (December 2000): 1967—1976.

Harrington, W. A., J. Krupnick, and W. O. Spofford. *Economics and Episodic Disease: The Benefits of Preventing a Giardiasis Outbreak.* Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1991.

Huang T. "Estimating X-Efficiency in Taiwanese Banking Using a Translog Shadow Profit Function". *Journal of Productivity Analysis* (November 2000): 225—245.

Karagiannis, G., and G. J. Mergos. "Total Factor Productivity Growth and Technical Change in a Profit Function Framework". *Journal of Productivity Analysis* (July 2000): 31—51.

Kumbhakar, S. "Productivity Measurement: A Profit Function Approach". *Applied Economics Letters* (April 2002): 331—334.

Newbury, D. M. G., and J. E. Stiglitz. *The Theory of Commodity Price Stabilization.* Oxford: Oxford University Press, 1981.

① 对生产函数取对数后对 t 求偏导数，有 $G_q=\mathrm{d}\ln q/\mathrm{d}t=e_{q,k}G_k+e_{q,l}G_l+f_t/f$，注意，在规模报酬不变、厂商是价格接受者的条件下，有 $e_{q,k}=S_k e_{q,l}=s_l$。

第4篇

竞争性市场

在第2篇和第3篇，我们运用了不同的最优化假说去建立模型：通过追求效用最大化的个人来解释商品的需求，通过追求利润最大化的厂商来解释商品的供给。在这一篇，我们要把这两股分析拧在一起去描述价格决定的过程。我们将只集中在一个特定的价格决定模型上，那就是完全竞争模型。该模型假定对于每一种商品都有数量足够多的需求者与供给者，以至于每个人都只能是价格的接受者。在第5篇，我们会说明一些其他的模型，那些模型产生于把竞争性情况中严格的价格接受者假定加以放宽后的情形。不过，在这里，贯穿全篇的还是价格接受者行为的假定。

在第10章，也就是第5篇的第1章，我们将建立在竞争性市场上的关于价格决定的局部均衡模型，这种模型我们已经熟悉了。主要结果是我们在第1章中就讨论过的供求之间的马歇尔供求曲线。由于此模型只集中于单一市场，因此，它表示了价格决定的"局部"均衡观点。

第11章通过研究这些模型的应用方式继续对局部均衡竞争模型进行了分析。

在这一章要特别注意的地方是，表明竞争模型如何被用于判断在市场均衡的各种变化之中对市场参与者的福利效应。

虽然局部均衡竞争模型对于详细研究单一市场相当有用，但是，它对于研究市场之间的关系却并不适用。因为，它并不能简要地说明在一个市场中均衡价格的变化会怎样影响其他市场中的价格。为了获得这种跨市场的效应，需要建立"一般"均衡模型——这是我们在第12章中要讨论的主题。在那里，我们将要显示一个完整的经济怎样可以被看做一个同时决定所有价格的、相互联系的竞争性市场体系。我们将建立这样一个模型，然后运用这一模型去研究竞争性价格体系的某些特征。

第 10 章 竞争性价格决定的局部均衡模型

本章中，我们将说明在完全竞争条件下的价格决定模型，这个熟悉的模型是由阿尔弗雷德·马歇尔(Alfred Marshall)在 19 世纪末期首先建立起来的，我们运用该模型对应用于单一市场的供求机制作了相当完整的分析。有关这方面的详尽知识，可以说是经济学家工具箱中最为重要的部分。

10.1 市场需求

第 2 篇中我们研究了怎么在效用最大化的假设下，建立个人的购买决策随市场价格及其他因素改变的函数。如果只考虑两种商品的情况，马歇尔需求函数可以写作

$$\text{对 } x \text{ 的需求量} = x(p_x, p_y, I) \tag{10.1}$$

现在我们要通过把所有市场上的"个人"的需求加总。用脚标 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示每个人的需求，则市场上的总需求可定义为

$$X \text{ 的市场需求} = \sum_{i=1}^{n} x_i(p_x, p_y, I_i) \tag{10.2}$$

注意我们的"加总"过程：首先，我们假定两种商品对所有消费者价格相同。即 p_x, p_y 的值与个人无关。其次，总需求量涉及每个人的收入 I_i。即市场上的需求量不但与消费人群的总收入相关，还和收入的分配相关。最后，我们用大写字母 X 表示总需求量，这个记号我们在下面会作些微调。

10.1.1 市场需求曲线

式 10.2 表明一种商品的需求量除了和自己的价格有关外，还与每个人的收入和其他商品价格有关。为了作出市场需求曲线，我们保持其他变量不变而变动 p_x。图 10.1 表示的就是在一种简单的情形下——只有两个消费者时，构建需求曲线的过程：即对于每一个 x 可能的价格，将两个个人的需求相加。比如当价格为 p_x^* 时，第一个人需求量是 x_1^*，第二个人需求量是 x_2^*，则市场的总需求量是 $X^* = x_1^* + x_2^*$。所以 X^* 就是需求曲线上的一点。需求曲线上每一点都是这样将个人需求曲线水平

相加得到的。[1]

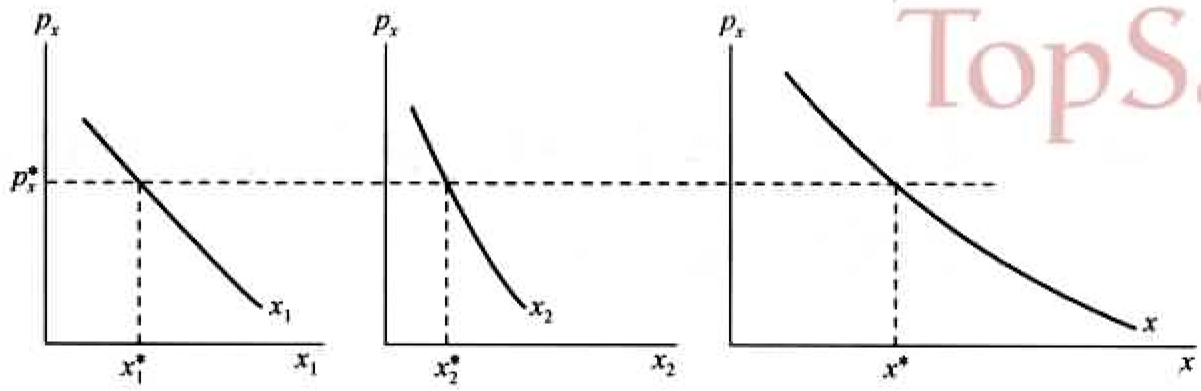


图 10.1　用个人需求曲线推导市场需求曲线

市场需求曲线是所有个人需求曲线的水平加总。在每一个给定的价格上，市场需求量是每一个个人需求量相加。比如当价格为 p_x^* 时市场需求量是 $x^* = x_1^* + x_2^*$

10.1.2　市场需求曲线的移动

市场需求曲线概括了在其他条件不变的情况下 p_x 与 X 的关系。读者要时刻记住，这条二维曲线只是一个多元函数的两个变量之间的关系。p_x 的改变使价格沿着曲线移动；而其他影响需求的因素的改变则使整条曲线移动。比如说，"收入普遍提高"会使需求曲线向外移动（假设 X 是正常品），因为价格给定的情况下，每个人选择消费更多的 X。类似地，如果人们将 Y 和 X 视作替代品，p_Y 的上升也使 X 的需求曲线向外移动，但如果是互补品则向内移动。考虑这一切的影响时，有时可能需要回顾一下个人的需求函数的性质，特别是考虑收入再分配时，因为它增加了一部分人的收入而减少了另一部分人的收入。为了简便起见，经济学家将其他条件不变而价格改变的情形称为"需求量的变化"，而将由于其他原因造成的需求曲线位置的移动称为"需求的变化"。

例 10.1

需求曲线移动

我们用一组简单的需求函数来说明这个概念。假设甲对橘子的需求函数如下[2][x 的单位是打（12 个）/年]

$$x_1 = 10 - 2p_x + 0.1I_1 + 0.5p_y \tag{10.3}$$

其中

$$p_x = \text{橘子的价格（美元 / 打）}$$

① 补偿性的市场需求曲线可以由完全相同的方法对补偿性的个人需求曲线水平加总得到。它在价格变动时保持每个个人效用不变。

② 线性形式的需求函数有时拿来处理一些涉及总需求的问题，但其实这种形式并不很符合实际情况。比如，它对所有价格和收入不是零次齐次的。

I_1 = 甲的收入(千美元)

p_y = 葡萄柚的价格(是橘子的一种总替代品,单位为美元/打)

乙的需求函数是

$$x_2 = 17 - p_x + 0.05I_2 + 0.5p_y \tag{10.4}$$

所以,市场需求函数是

$$X(p_x, p_y, I_1, I_2) = x_1 + x_2 = 27 - 3p_x + 0.1I_1 + 0.05I_2 + p_y \tag{10.5}$$

关于橘子的价格和葡萄柚的价格的系数都是两个个人需求函数的系数直接相加得到的,这是由单一价格假设(即所有人面对的价格相同)保证的。而每个人需求函数对收入的系数不同,所以市场需求是和收入分配有关的。

要画出式10.5对应的需求曲线,我们必须假设 I_1, I_2, p_y 不变。如果给定 $I_1 = 40, I_2 = 20, p_y = 4$ 则市场需求曲线是

$$X = 27 - 3p_x + 4 + 1 + 4 = 36 - 3p_x \tag{10.6}$$

这是一个简单的线性函数。如果假设收入不变,而葡萄柚价格涨到 $p_y = 6$,则需求曲线向外移动到

$$X = 27 - 3p_x + 4 + 1 + 6 = 38 - 3p_x \tag{10.7}$$

如果是通过向甲征收10(千美元)收入税并把其转移支付给乙,则收入曲线向内移动到

$$X = 27 - 3p_x + 3 + 1.5 + 4 = 35.5 - 3p_x \tag{10.8}$$

这是因为甲对橘子的边际消费倾向更大。各种改变需求的影响都是平行地移动需求曲线,因为没有哪种影响改变了个人对价格的敏感度。不管哪一条需求曲线,p_x 上升0.1(10美分)的结果都是 X 减少0.3[打(12个)/每年]。

请回答:在线性的情况下,要使得市场需求是总收入($I_1 + I_2$)的函数需要满足什么条件?要是每个人的需求函数对 p_y 的参数不同,基本的分析方法有变化吗?

10.1.3 推广

尽管到目前为止,我们只讨论了两种商品和两个人的情形,但推广到一般情况也没什么困难。设市场上共有 n 种商品,记为 $x_i, i = 1, \cdots, n$,价格分别为 $p_i, i = 1, \cdots, n$。假设市场上有 m 个人,那么第 j 个人对第 i 种商品的需求应是所有商品的价格以及他的收入 I_i 的函数,可记作

$$x_{i,j} = x_{i,j}(p_1, \cdots, p_n, I_j) \tag{10.9}$$

现在,我们用个人需求函数给市场需求这个概念下定义。

定义

市场需求。对某种物品(X_i)的**市场需求函数(market demand function)**是所有个人的需求的和

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i,j}(p_1, \cdots, p_n, I_j) \tag{10.10}$$

市场需求曲线(market demand curve)是保持其他变量不变,变动函数中的价格 p_i 形成的曲线。因为我们假设每个人的需求曲线都是向下倾斜的,所以市场需求曲线也应该是向下倾斜的。

当然，这个定义就是刚才推广到多人多商品时的情形，但我们还要重复一遍三条需要注意的性质：第一，式 10.10 很明确地表明了对 X_i 的需求取决于所有商品的价格而非只取决于 p_i，其余的商品价格有任何变化都会使需求曲线移动。第二，需求函数与收入的分配有关。所以有的经济问题考虑需求量与整体购买力的关系，这实际上是对现实情况过分简化了，因为事实上即使整体购买力变化相同，每个人的变化也未必就相同，因此需求量的变化可能就不相同了。第三，是关于人的偏好的问题：虽然表达式里看不出来，但偏好改变的影响我们不能不提。我们在构建个人需求函数时，就已经假设偏好（由无差异曲线表示）不变。如果人们的偏好改变了，那么个人需求函数也会改变，进而市场需求也会改变。所以偏好的改变当然会改变市场需求。但大部分经济问题分析中，我们认为这种偏好改变过程很慢，所以视其为不变的因素也不会出太大偏差。

10.1.4 关于记号

在本书中的大部分情况下我们只讨论一个市场，所以为了方便起见，我们约定用 Q_D 表示一种物品在这个市场中的需求量，用 P 表示其价格。我们说的需求曲线都是在 Q-P 坐标平面上作出的（假设其他条件不变）。如果之前提到的那几个其他条件变了（其他商品价格、每个人的收入、人们的偏好），则 Q-P 需求曲线移动，这些情况读者要很熟悉才行。但是只要我们讨论两种以上商品之间的关系时，就用回我们刚才用的那些记号（用 x,y，或 x_i 表示商品）。

10.1.5 市场需求弹性

像市场需求一样，我们也为市场需求弹性定义一个简单的记号

$$\text{市场需求的价格弹性} = e_{Q,P} = \frac{\partial Q_D(P,P',I)}{\partial P}\cdot\frac{P}{Q_D} \tag{10.11}$$

用偏导数的记号是为了强调 Q 是由包括很多价格之外的因素共同决定的，比如其余商品的价格（P'）和所有潜在购买者的收入（I）。在考虑弹性时，我们认为这些因素不变。像第 5 章讲的那样，弹性度量的是当价格改变一个百分点，需求量变化的百分数。市场需求也分为富有弹性（$e_{Q,P} < -1$）和缺乏弹性（$0 > e_{Q,P} > -1$）两类，而第 5 章里其他关于弹性的概念也可以直接拿过来套用在市场需求上。①

$$\begin{aligned}\text{市场需求的交叉价格弹性} &= \frac{\partial Q_D(P,P',I)}{\partial P'}\cdot\frac{P'}{Q_D}\\ \text{市场需求的收入弹性} &= \frac{\partial Q_D(P,P',I)}{\partial I}\cdot\frac{I}{Q_D}\end{aligned} \tag{10.12}$$

有了市场需求的这些概念，我们接下来将研究完全竞争市场下的供给及市场均衡模型。

10.2 供给反应的时间

在分析竞争性定价时，一定要先明确供给者能够对市场变化作出反应的时间长度。如果我们讨

① 有时用市场需求除以人数得到一个人均需求，并将其视作一个“典型的”个人处理。这时第 5 章讨论的各种弹性概念仍然适用。至于可以这么处理问题需要满足什么条件，将在本章的扩展部分简要讨论。

论一个非常短的时间，在这一段时间里最重要的投入就是固定的；而如果我们正在考虑一个相当长的过程，那么，在这一期间内该行业就可能有新厂商进入。在这两种情况下，均衡价格的建立会有所不同。所以，按经济学惯例将时间段划分成三个：(1) 极短期；(2) 短期；(3) 长期。虽然不可能对这些时间段下一个确切的时间长度上的定义，但是它们是有本质区别的，就是允许供给者作出的反应不同。在**极短期(very short run)**，供给量是不变的，对需求的变化来不及作出任何反应；在**短期(short run)**，已有的厂商会改变它们的供给数量，不过，没有新厂商加入到该行业中来；在**长期(long run)**，新厂商会进入到该行业中，因此，会产生一个非常有弹性的供给反应。在这一章，我们将讨论这些可能性中的每一种情况。

10.3 极短期定价

在极短期，或叫**市场期(market period)**，没有供给反应。商品已经"在"市场之中了；并且，无论市场状况怎样，它都要被卖出。在这种情况下，价格只是作为对需求进行配额的一种机制。价格会进行调节，以便使数量给定的商品在给定的时间内出清。虽然市场价格可以作为对生产者在未来时期的信号，但由于当期的产出量是固定的，所以在当期它并不能发挥这种作用。图 10.2 描述了这种情况。市场需求由曲线 D 表示。供给固定在点 Q^* 上，并且，使市场出清的价格为 P_1。在点 P_1 上，消费者愿意接受一切在市场上供应的商品。无论价格如何，卖主都愿意出售 Q^* 的数量(假定我们讨论中的商品是如果在极短期中不被售出，就会烂掉而一钱不值)。因此，(P_1, Q^*) 就是一个均衡价格与均衡数量的组合。如果需求移至 D'，均衡价格就会增加到 P_2，由于不可能有供给反应，所以 Q^* 就会保持不变。在这种情况下，供给曲线于是就是一条产出为 Q^* 的垂直线。

对于许多市场，极短期分析并不特别有用。这一理论可能充分地反映了商品是易腐坏的，或是必须在既定日期中出售完毕的情形，譬如在拍卖的情况下。事实上，我们在第 15 章将要讨论的，与达成均衡价格相关的信息问题，会对有关拍卖的研究提供一些深入的见解。然而通常拍卖会上的价格不能认为是固定的。我们讨论的一般情况是供给会对需求变化作出一些反应。通常假定，价格的上升会带来市场上供给数量的增加。本章的其余部分将研究这一过程。

在开始分析之前，我们需要指出，供给数量的增加并不一定来自于生产的增加。在某些商品具有耐久性(即能在较长时间内保持价值)的情况下，这些商品的当前所有者就会在价格上升时向市场提供更多的数量。例如，即使伦勃朗的画的供给是一定的，我们也不愿意把这些画的市场供给曲线画成一条垂直线，就像图 10.2 中表示的那样。当伦勃朗的画的价格上涨时，个人与博物馆都会变得更加愿意将之出手。由此，从市场的观点看，即使并没有新的商品被生产出来，伦勃朗的画的供给曲线仍会有一个正的斜率。类似的分析也适用于其他一些类型的耐用品，诸如古董、二手车、旧的《国家地理》杂志，或者公司的股票等，所有的这些东西名义上的供给都是不变的。由于我们对于研究需求和产量的关系更感兴趣，所以，这些问题我们只在第 13 章作简单的讨论。

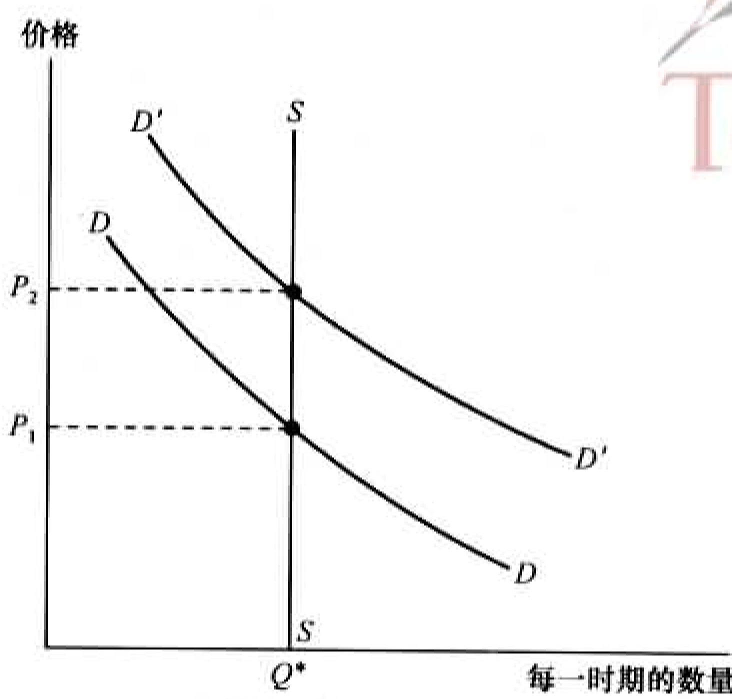


图 10.2　极短期定价

在极短期中，数量是固定的，价格就只是作为一种对需求进行配额的机制。数量固定于点 Q^* 时，如果 D 是市场需求曲线，那么 P_1 就是市场的支配价格。在这一价格上，个人愿意完全消费可得到的数量。如果需求向上移至 D'，则均衡的市场价格就会移至 P_2。

10.4　短期的价格决定

在短期分析中，行业中厂商的数量是一定的。假定厂商并没有进入或退出该行业的充分灵活性。不过，行业中的这些厂商针对变化着的情况可以调整其生产数量。它们将通过改变那些在短期可以变动的投入的使用水平来做到这一点，这里我们也将研究这种供给决策。在展开分析之前，我们应该明确地表述完全竞争模型的假定。

定义

完全竞争。完全竞争行业(perfectly competitive industry)是服从下述假定的行业：

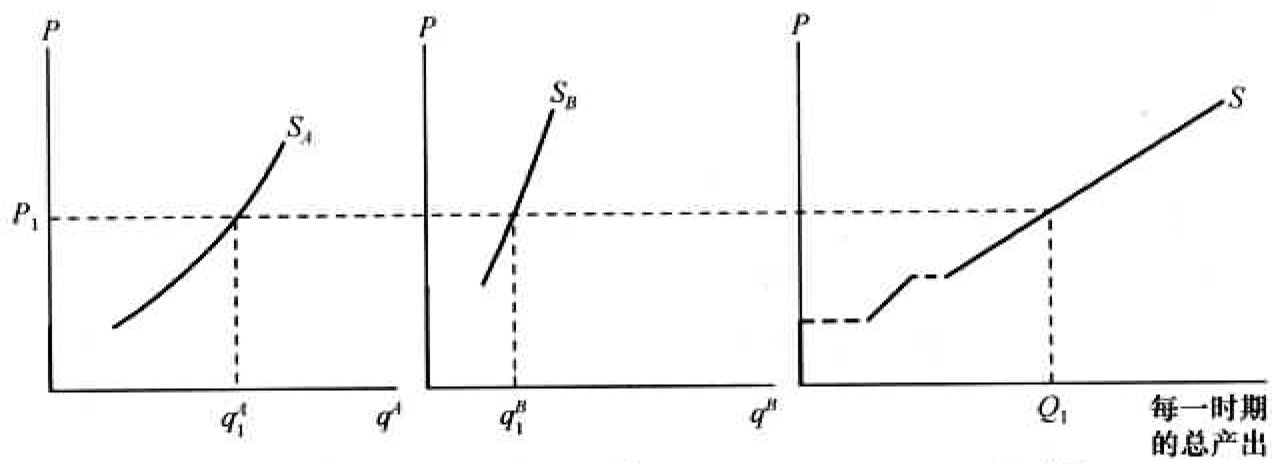
1. 厂商数目众多，每个厂商都生产同质的商品。
2. 每个厂商都试图使利润最大化。
3. 每个厂商都是价格的接受者：假定它的行动对市场价格没有影响。
4. 假定所有的市场参与者都知道价格——信息是完全的。
5. 交易没有成本：买主与卖主在进行交易时都不会发生什么交易费用(关于这一假定及上述的假定，请参见第 19 章)。

现在，我们利用这些假定来研究短期的价格决定。

10.4.1　短期市场的供给曲线

在第 9 章中，我们显示了对于单一的利润最大化，厂商怎样画出短期的供给曲线。为了画出市

场的供给曲线，我们从承认在短期整个市场所提供的产出数量简单地就是每一个厂商所提供的数量之和开始。由于每个厂商在决定生产多少时都使用了相同的市场价格，所以，所有厂商向市场供应的总量显而易见地就由价格决定。价格与供给量之间的关系被称为**短期市场供给曲线(short-run market supply curve)**。图 10.3 说明了画出曲线的过程。为了方便，我们假定只有两个厂商 A 与 B。它们的短期供给曲线(即边际成本曲线)由图 10.3(a)与 10.3(b)表示。在图 10.3(c)中表示的市场供给曲线是这两条曲线的水平加总。例如，在价格为 P_1 时，厂商 A 愿意供给 q_1^A，而厂商 B 则愿意供给 q_1^B。于是，在此价格上，市场上的总供给量便为 Q_1，它等于 $q_1^A + q_1^B$。曲线上的其他点也是以同样的方法得到的。由于每个厂商的供给曲线都有一个正斜率，因此，市场供给曲线也有一正斜率。正斜率反映了在厂商试图增加其产出时，其短期边际成本也在增加的事实。



(a) 厂商A　　(b) 厂商B　　(c) 市场

图 10.3　短期市场的供给曲线

两个厂商的供给曲线(边际成本曲线)由(a)与(b)来表示。于是，市场供给曲线就由这些曲线的水平加总而求得。例如，在点 P_1 上，厂商 A 的供给为 q_1^A，厂商 B 的供给为 q_1^B，则总的市场供给由 $Q_1 = q_1^A + q_1^B$ 决定。

10.4.2　短期市场供给

更为一般地，如果我们对行业中 n 个厂商的每一个都用 $q_i(P,v,w)$ 表示其短期供给函数的话，我们就能把短期市场供给函数定义如下：

定义

短期市场供给函数。短期市场供给函数(short-run market supply functions)表示了由每一个厂商向市场提供的总供给量

$$Q_s(P,v,w) = \sum_{i=1}^{n} q_i(P,v,w) \tag{10.13}$$

请注意，假定行业中的厂商面对着相同的市场价格与相同的投入品价格。[①] 假定 v 与 w（以及每个厂商的基本技术）不变，短期市场供给曲线表示了 Q 与 P 之间的关系。这个公式也清楚地说明，如果

① 后面我们会讲这个假定会被怎样放松。

v、w 或技术改变了，供给曲线也会移动到新的位置。

10.4.3 短期供给弹性

对在一个行业中厂商的产出关于较高价格的反应程度进行概括的方式之一是计算**短期供给弹性(short-run supply curve)**。这个指标表示市场价格的变化率所带来的总产出的变化率。与在第 7 章建立的弹性概念相一致，我们将短期供给弹性定义如下：

定义

短期供给弹性($e_{S,P}$)

$$e_{S,P} = \frac{Q\text{ 改变的百分比}}{P\text{ 改变的百分比}} = \frac{\partial Q_S}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_s} \tag{10.14}$$

由于供给量是价格的一个增函数（$\partial Q_S/\partial P > 0$），所以供给弹性是正的。$e_{S,P}$ 的值大，就意味着市场价格上的一个小小的增加就会导致厂商一个相当大的供给反应；原因通常是生产它的边际成本的上升并不急剧，并且投入品价格相互影响的效应也不大。与此相对应，$e_{S,P}$ 的值小，则意味着为了使厂商改变其产出水平，需要价格上有相对较大的变化；这是由于边际成本上升得很快。请注意，对于所有的弹性概念，$e_{S,P}$ 的计算都要求投入品价格与技术保持不变。而当我们论及"市场的"供给反应时，还要求所有厂商接受的价格相等。如果各厂商产品价格不同，我们就需要为每个厂商定义一个供给弹性。

例 10.2

短期供给函数

在例 9.3 中，我们用柯布-道格拉斯函数写出了单个厂商在短期内对含两种投入品的产品的生产函数

$$q_i(P,v,w) = \left(\frac{w}{\beta}\right)^{-\beta/(1-\beta)} k_1^{\alpha/(1-\beta)} P^{\beta/(1-\beta)} \tag{10.15}$$

如果给定 $\alpha = \beta = 0.5, v = 3, w = 12, k_1 = 80$，就得到了单一厂商的供给函数

$$q_i(P,v,w = 12) = \frac{10P}{3} \tag{10.16}$$

假设市场上有 100 家完全相同的这样的厂商，并且它们面对的产品的市场价格和投入品的价格也完全相同。那么短期市场供给函数就是

$$Q_S(P,v,w = 12) = \sum_{i=1}^{100} q_i = \sum_{i=1}^{100} \frac{10P}{3} = \frac{1\,000P}{3} \tag{10.17}$$

比如说当 $P = 12$ 时，市场的总供给是 4 000，每个厂商的供给是 40。我们可以计算此时它的短期供给弹性，只要把 P 代入表达式

$$e_{S,P} = \frac{\partial Q_S(P,v,w)}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_S} = \frac{1\,000}{3} \cdot \frac{P}{1\,000P/3} = 1 \tag{10.18}$$

w 上升的影响。如果所有厂商需要支付的工资同时上升了，短期供给曲线就会移动。我们通过单个厂商的供给函数（式 10.15）来计算移动的幅度。比如说，现在工资上升到 $w=15$，而其他参量（厂商的生产函数、短期内的资本性投入等）不变，供给函数变成

$$q_i(P,v,w=15)=\frac{8P}{3} \tag{10.19}$$

市场供给函数相应地变成了

$$Q_S(P,v,w=15)=\sum_{i=1}^{100}\frac{8P}{3}=\frac{800P}{3}. \tag{10.20}$$

现在，$P=12$ 时供给量只有 $Q_S=3\,200$，每个厂商供给量是 $q_i=32$。可见，由于工资提高，供给曲线向外移动了。然而，我们要注意到供给弹性并没有变化，还是 $e_{S,P}=1$。

请回答：如果"劳动"在生产函数中的地位发生变化（即改变 α，β），结果会受怎样的影响？

10.4.4 均衡价格的决定

现在，我们准备把需求曲线与供给曲线放在一起，来说明市场均衡价格的确定。图 10.4 显示了这一过程。首先请看图 10.4(b)，我们会看到市场需求曲线 D（此时请不要注意 D'），以及短期供给曲线 S。两条曲线相交于价格为 P_1 与数量为 Q_1 的点上。这一价格数量组合代表了个人需求与厂商成本之间的**均衡（equilibrium）**。均衡价格 P_1 有两个重要的功能。首先，该价格提供给生产者一个信号，向生产者提供了决定生产多少所需的信息。为了使利润最大化，厂商会在边际成本等于 P_1 的产出水平上进行生产。于是，在总体上产量将为 Q_1。价格的第二个功能是对需求进行分配。在既定的市场价格 P_1 下，追求效用最大化的个人会决定在其有限收入中用于购买特定商品的数量比

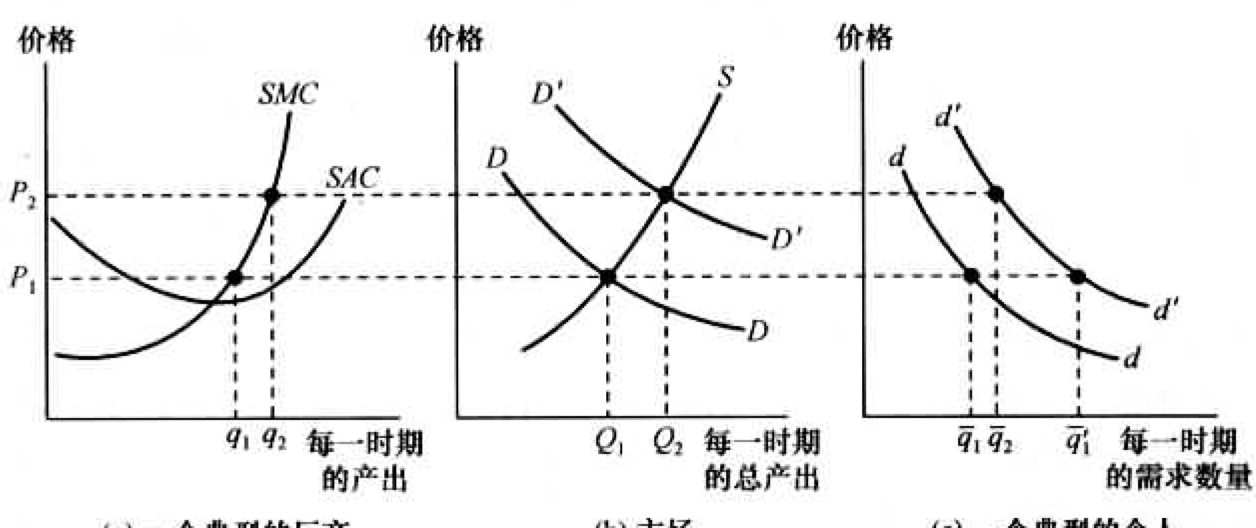


图 10.4　在短期众多个人与厂商决定市场价格的相互作用

图(b)中的市场需求曲线和供给曲线分别是由全体消费者的需求曲线和全体厂商的供给曲线水平相加而得到的。价格一旦确定，每个厂商和每个个人都将视价格为一确定的参数，并据此作出决策。尽管单个厂商与个人无力决定价格，但是，他们作为一个整体却是价格的唯一决定因素。这通过个人需求曲线向 d' 的移动得以说明。如果只有一个人以这种方式进行反应，市场价格就不会受到影响。然而，如果每一个人都表现出需求有所增加，市场需求就会移到 D'；在短期，价格会上升到 P_2。

率。在 P_1 的价格上，总需求量将是 Q_1，并且，这正好就是将要被生产出来的数量。因此，我们可以把均衡价格定义如下：

定义

均衡价格。均衡价格(equilibrium price)就是需求量等于供给量时的价格。在这一价格下，需求者与供给者都没有激励去改变其经济决策。从数学上讲，解下面的方程，可以得出均衡价格 P^*

$$Q_D(P^*, P', I) = Q_S(P^*, v, w) \tag{10.21}$$

或者写得更简单些

$$Q_D(P^*) = Q_S(P^*) \tag{10.22}$$

方程 10.22 给出的定义明确了均衡价格由许多诸如收入、其他商品的价格，以及厂商投入品价格等外生因素决定。正如我们会在下一节所看到的那样，这些因素中的任何一个发生变化都会导致均衡价格的变化，从而使供给量与需求量发生相应的变化。

均衡价格(P_1)对一个典型的厂商以及对一个典型的个人的含义分别参见图 10.4(a)与 10.4(c)。对于一个典型的厂商，价格 P_1 会使产出水平为 q_1。由于短期平均总成本能够得以补偿，所以，在这个特定的价格上厂商会赚到一个不大的利润。对于一个典型的个人，需求曲线 d(此时请不要注意 d')由图 10.4(c)表示。在价格为 P_1 的点上，该人的需求为 $\bar{q}_1$。通过把在价格为 P_1 时的所有个人需求的数量与所有厂商供给的数量加总，我们可以看到市场处于均衡状态。市场供给曲线与需求曲线提供了一种进行此类求和的简便方式。

10.4.5 对于需求移动的市场反应

图 10.4 中的三个图可用来表明关于短期市场均衡的两个重要事实：市场个体的“无能为力”与短期供给反应的性质。首先，假定如图 10.4(c)所示，某单一个人的需求曲线向外移动到 d'。由于假设有许多需求者，所以，这种移动实际上对市场需求曲线不会有什么影响。结果，市场价格将不会受这种到 d' 的移动的影响；也就是说，价格保持在 P_1 不变。当然，在这一价格上，其需求曲线已经发生移动的那个人会消费得稍多一点($\bar{q}_1'$)，如图 10.4(c)所示。但是，这一数量只是市场上一个无关紧要的部分。

如果许多人的需求曲线都经历了这种向外的移动，那么，整个市场的需求曲线也会移动。图 10.4(b)表示了新的需求曲线 D'。新的均衡点就为(P_2, Q_2)：在这一点上，供求均衡得以重建。对应于需求移动，价格从 P_1 增加到 P_2。请注意，市场上交易量也从 Q_1 增加到了 Q_2。价格的上升有两个功能。其一，同我们在前面极短期的分析一样，它对需求进行分配。在 P_1 点时，一个典型个人的需求量为 $\bar{q}_1'$；而现在在价格为 P_2 时，需求量只有 $\bar{q}_2$。价格的上升对于典型的厂商也是增加生产的信号。在图 10.4(a)中，对应于价格的上升，厂商的利润最大化产出水平也从 q_1 增加到 q_2。这就是我们所说的**短期供给反应(short-run supply response)**：市场价格的上升对生产的增加起到了诱导的作用。由于价格上升，厂商愿意去增加生产(并且引致了较高的边际成本)。如果不允许市场价格上升(假定政府对价格的控制是有效的)，那么，厂商将不会增加其产出。在 P_1 点上，对于讨论中的商品存在着过度(未满足的)需求。如果允许市场价格上升，就可以重建市场的供求均衡，结果在调整后

的价格下，厂商的生产又会与个人所需要的数量相等。同样需要注意的是，在新价格 P_2 点上，典型的厂商在利润上有所增加。短期中利润可以增加的性质对于我们在本章后面关于长期定价的讨论将很重要。

10.5 供给曲线与需求曲线的移动:图形分析

在前面的各章中，我们已经分析了为什么供给曲线与需求曲线都会移动。在表 10.1 中对这些原因进行了简要的总结。尽管其中绝大多数原因都不用再作解释，但指出厂商数目的变化会使短期市场供给曲线发生移动这一点是重要的(这在于，方程 10.13 中的加总是针对厂商数目的不同的)：这种观察就使我们把短期分析与长期分析结合起来了。

表 10.1 需求曲线或供给曲线移动的原因

需求曲线的移动是由于:	供给曲线的移动是由于:
• 收入变化	• 投入品价格的变化
• 替代品或互补品的价格变化	• 技术变迁
• 偏好的变化	• 生产者数量的变化

在现实世界的市场中，现实的市场似乎永远避免不了碰到表 10.1 所列的各种变化。表 10.1 中所描述的种种变化总是在发生作用，这看起来是可能的。当供给曲线与需求曲线都发生移动时，均衡价格与均衡数量就会发生变化。在这一节，我们将从图形上研究上述变化的程度大小，下一节我们用数学语言来描述它。

10.5.1 供给曲线的移动:需求曲线形状的重要性

首先，请考虑一种商品的短期供给曲线向上移动的情形。如例 10.2 所示，这样的移动可能是由投入品的价格上涨引起的。无论是什么引起了这种移动，均衡点离开 (P,Q) 的大小是与需求曲线的形状密切相关的。图 10.5 说明了两种可能的情况。在图 10.5(a) 中，需求曲线是相对具有价格弹性的；也就是说，价格上的变化会较大地影响需求量。在这种情况下，供给曲线从 S 到 S' 的移动会使均衡价格只有一个微小的上升(从 P 到 P')，而同时均衡数量却下降很大(从 Q 到 Q')。这时，与其说厂商投入成本的增加表现在价格的上涨上，不如说主要表现在供给数量的减少上(使每个厂商的边际成本曲线向下的运动)，因为在价格上只有一个轻微的增加。

当市场需求曲线缺乏弹性时，情况就会相反。在图 10.5(b) 中，供给曲线的移动会引致均衡价格大幅上升，但数量变化却不大。之所以会如此的原因在于，当价格上升时，个人并不会非常大量地减少其需求。这样，供给曲线的向上移动就以价格上升的形式几乎被完全传递给了需求者。

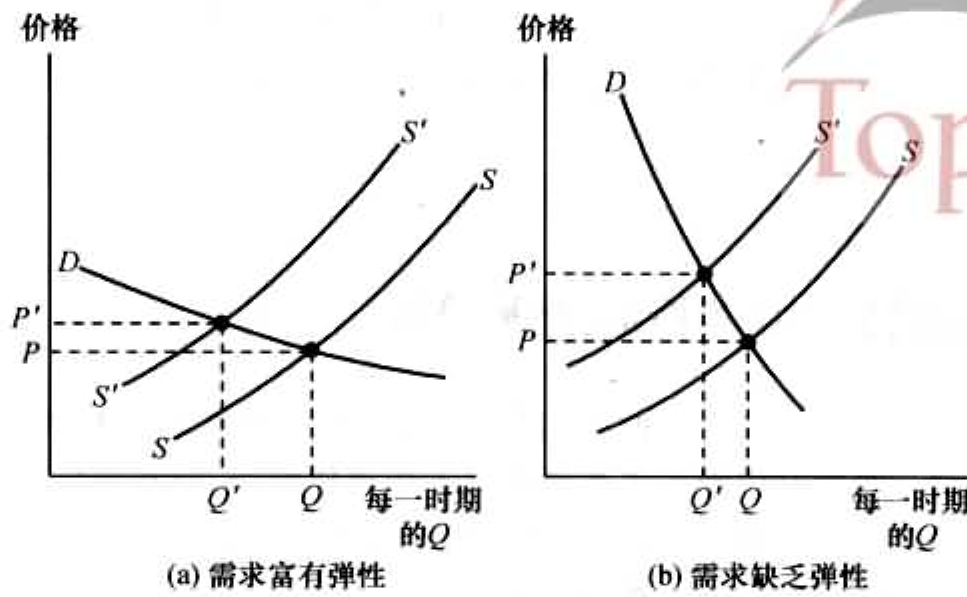


图 10.5　短期供给曲线移动的效应取决于需求曲线的形状

在图(a)中,供给曲线的向上移动只会引起价格的轻微增加,但数量却下降很快。这源自于需求曲线的弹性形状。在图(b)中,需求曲线是缺乏弹性的;价格增加很多,但数量却只有轻微的下降。

10.5.2　需求曲线的移动:供给曲线形状的重要性

与以上分析相似,我们也可以表示市场需求曲线的一个给定的移动对 P 与 Q 的不同含义,这取决于短期供给曲线的形状。图 10.6 说明了这一点。在图 10.6(a)中,所讨论商品的供给曲线是缺乏弹性的。在这种情况下,市场需求曲线的向外移动会引起价格的大幅上升。但是,另一方面,交易量却只有轻微的增加。直观上解释就是,需求(以及 Q)的增加已经引致厂商沿其陡斜的边际成本曲线上移。与此相伴,价格的大幅上升只是为了对需求进行分配。

图 10.6(b)中表示的是一个相对有弹性的短期供给曲线。这样一条曲线会出现在边际成本并

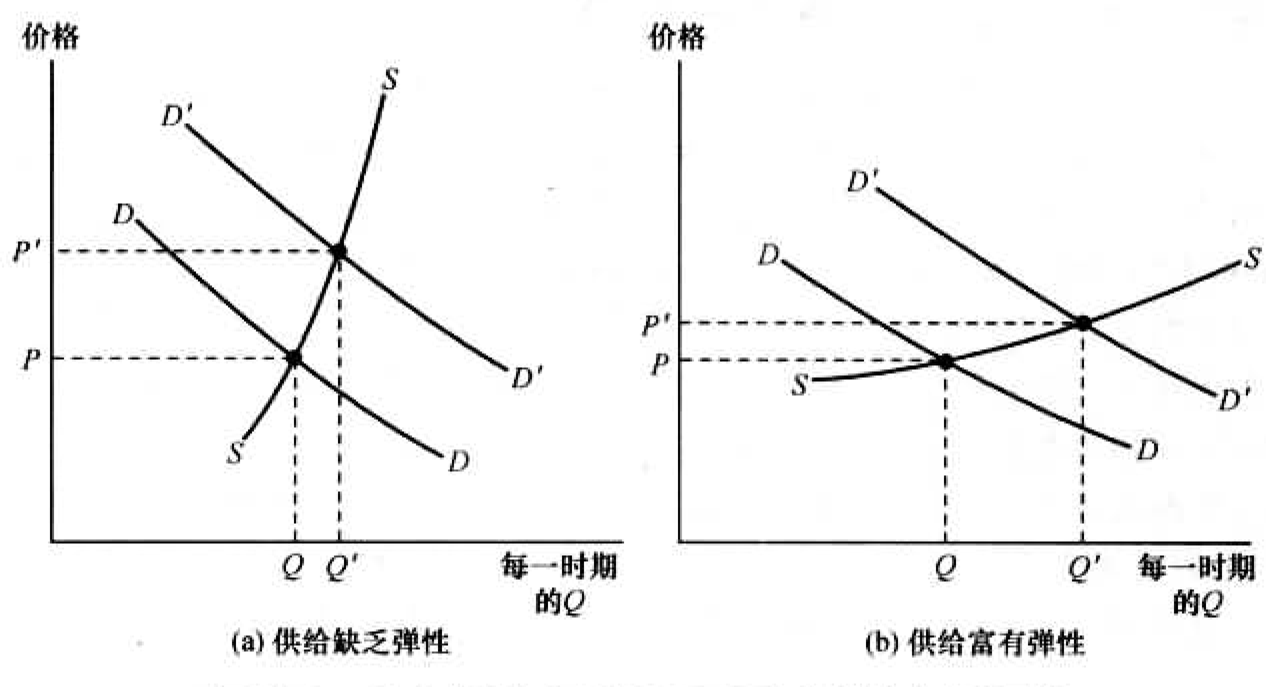


图 10.6　需求曲线的移动效应取决于短期供给曲线的形状

在图(a)中,供给是缺乏弹性的,需求上的移动会使价格有较大的上升,而数量却只有少许增加。而另一方面,在图(b)中,供给是有弹性的,对应于需求的移动,价格只有轻微的上升。

不随产出增加而大量上升的行业中。在这种情况下，需求上的增加会带来 Q 的大量增加。而且，由于供给曲线的性质，这种增加并不伴随着成本的大幅上升。结果，价格只是适度地上升了。

这些例子再一次证明了马歇尔关于需求与供给同时决定价格与数量的观察。我们可以回忆他在第 1 章中的比喻：正如不可能说是剪子的哪一边起了作用，同样也不可能把价格的变化单单归结为是需求，或是供给方面的作用。相反，需求曲线与供给曲线发生移动的效应将会依赖于两条曲线的形状。例 10.3 将说明这些要点。

例 10.3

短期均衡

下面我们将例 10.2 中得到的短期供给函数应用在，比如，古驰沙滩披巾上（Gucci beach towels），用定量化的分析来表述之前说的各种观点。我们假设对这种奢侈品——披肩的需求函数为

$$Q_D(P,P',I) = 4\,000 - 500P + 200P' + 0.1I \tag{10.23}$$

其中 P' 表示古姿沙滩披巾的替代品［比如说，马球牌披巾（Polo towel）］的价格，I 表示披巾的潜在购买者的平均年收入。为了研究均衡，我们要把除了 P 以外的参数设定好。假设初始时 $P' = 10$，$I = 40\,000$。这样，需求函数为

$$Q_D = 4\,000 + 200 \times 10 + 0.1 \times 40\,000 - 500P = 10\,000 - 500P \tag{10.24}$$

由供给量等于需求量，得到

$$\begin{aligned} Q_S = 1\,000P/3 = Q_D &= 10\,000 - 500P \\ 2\,500P &= 30\,000 \end{aligned} \tag{10.25}$$

所以市场均衡点为

$$\begin{aligned} P^* &= 12 \\ Q^* &= Q_D = Q_S = 4\,000 \end{aligned} \tag{10.26}$$

其中每个厂商生产 40 个披巾。

需求的移动。马球牌披巾涨价（比如涨到 $P' = 22.50$）会使古驰沙滩披巾的需求曲线外移到 $Q'_D = 12\,500 - 500P$，新的市场均衡是

$$\begin{aligned} Q_S = 1\,000P/3 = Q'_D &= 12\,500 - 500P \\ P^* = 15, Q^* &= 5\,000 \end{aligned} \tag{10.27}$$

可见，替代品马球牌披巾的价格上涨会使古驰牌披巾的均衡价格和均衡数量都上升。如果价格保持 $P = 12$ 不变，则需求会超过供给 $Q_D(P = 12) - Q_S(P = 12) = 6\,500 - 4\,000 = 2\,500$ 单位。价格从 12 涨到 15 既鼓励了厂家多生产 1 000 单位，也使需求降低了 1 500 单位，平衡了供求。①

供给的移动。另外的变动，比如说剪披巾的工人工资上涨，也会改变式 10.26 中的均衡。如果工资上涨到 $w = 15$，我们在例 10.2 中算过供给函数变为 $Q_S = 800P/3$，如果需求不变，均衡结果应该是

① 在这里你也可以看出，这个供给函数的弹性是 1，因为当价格上涨了 25% 时，供给量也增加了 25%。

$$Q_S = 800P/3 = Q_D = 10\,000 - 500P$$

$$P^* = 300/23 = 13.04, Q^* = 3\,480 \tag{10.28}$$

可见,供给曲线向上移动导致均衡价格上升,均衡数量减少。

请回答:要使式10.28里发生的供给变化造成更小的降价和更大的数量减少,应该对需求函数作怎样的修改?

10.6 市场均衡的数学模型

通过使均衡价格与均衡数量变化的比较静态分析,我们可以进一步阐明关于供求过程一般的数学模型。假定需求曲线能以下式表示

$$Q_D = D(P, \alpha) \tag{10.29}$$

这里,α 是能允许我们移动需求曲线的参数。它可能代表消费者收入、其他商品的价格(这会使几个相关市场的供给与需求联系在一起),或是变化着的偏好。一般地,我们预期 $\partial D/\partial P = D_P < 0$,但 $\partial D/\partial \alpha = D_\alpha$ 的符号却不确定,它是由参数的含义决定的。类似地,我们也可以把供给关系写为

$$Q_S = S(P, \beta) \tag{10.30}$$

这里,β 是使供给曲线移动的参数。它可能包括诸如投入价格、技术变革,或者(对于多产品厂商)其他潜在产出的价格。这里,$\partial S/\partial P = S_P > 0$,但是,$\partial S/\partial \beta = S_\beta$ 的符号并不确定。通过使均衡时下式成立,建立模型[①]

$$Q_D = Q_S \tag{10.31}$$

为了对这个简单模型进行比较静态分析,我们求出需求函数与供给函数的全微分如下

$$\begin{aligned} dQ_D &= D_P dP + D_\alpha d\alpha \\ dQ_S &= S_P dP + S_\beta d\beta \end{aligned} \tag{10.32}$$

由于均衡的保持要求下式成立

$$dQ_D = dQ_S \tag{10.33}$$

所以,我们对任何需求(α)与供给(β)移动的组合,对均衡价格的改变,都可以通过解这些方程获得。例如,在 β 保持不变的情况下,需求参数 α 是变化的。那么,运用均衡条件,有

$$D_P dP + D_\alpha d\alpha = S_P dP \tag{10.34}$$

或者,对其略作整理,有

① 对此模型稍加改动可以用来表示均衡产量在各个厂商间的分配。比如,假设该行业由 n 个相同的厂商组成,每个厂商的产量就是:

$$q = \frac{Q}{n}$$

短期内,n 的数值不变,也就没什么可分析的。但在长期中,n 的变动也由模型确定。相关的分析随后给出。

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{D_{\alpha}}{S_P - D_P} \tag{10.35}$$

由于上式中分母是正的，所以，$\partial P/\partial \alpha$ 的符号将与 D_{α} 的符号相同。如果 α 代表消费者收入（并且我们所讨论的商品也是正常品），那么，D_{α} 将是正的，收入曲线的上升就会使需求曲线上移。就像方程 10.35 所显示的那样，这也会使均衡价格上升，这也是图 10.6 从几何上所反映出来的结果。

弹性解释

对方程 10.35 作进一步的代数处理可以得到更为有用的比较静态结果。将该方程两边同乘以 α/P 可得到

$$e_{P,\alpha} = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{P} = \frac{D_{\alpha}}{S_P - D_P} \cdot \frac{\alpha}{P} = \frac{D_{\alpha}\dfrac{\alpha}{Q}}{(S_P - D_P) \cdot \dfrac{P}{Q}} = \frac{e_{Q,\alpha}}{e_{S,P} - e_{Q,P}} \tag{10.36}$$

由于方程中的弹性通常可以从实证研究中得到，所以可以通过它对各种事件对均衡价格的影响作粗略的估计。例如，还是假定 α 代表消费者的收入，我们要预测这个参数的增加会怎样影响比如说汽车的均衡价格。假定经验数据表明 $e_{Q,I} = e_{Q,\alpha} = 3.0$，$e_{Q,P} = -1.2$（这些数字来自于表 10.3），并且假定 $e_{S,P} = 1.0$。把这些数字代入方程 10.36，可以得到

$$e_{P,\alpha} = \frac{e_{Q,\alpha}}{e_{S,P} - e_{Q,P}} = \frac{3.0}{1.0 - (-1.2)} = \frac{3.0}{2.2} = 1.36 \tag{10.37}$$

这样，实证的弹性估计表明，消费者收入每增加 1% 会引致汽车的均衡价格上升 1.36%。通过对方程 10.32 与 10.33 进行整理，并且得到有关必要参数的实证估计，同样可以建立起对其他类型供求变动进行估计的模型。

例 10.4

不变弹性函数的均衡

如果我们使用特定的函数形式，可以进行关于供求均衡的更为复杂的分析。要实现这一目的，不变弹性函数特别有用。假定汽车需求为

$$Q_D(P,I) = 0.1P^{-1.2}I^3 \tag{10.38}$$

这里，P 是价格，I 是家庭真实收入，单位都是美元。对于汽车的供给函数为

$$Q_S(P,w) = 6\,400Pw^{-0.5} \tag{10.39}$$

这里，w 是汽车工人的小时工资。请注意，此处所用的弹性就是在前面章节中的数据（$e_{Q,P} = -1.2$，$e_{Q,I} = 3.0$ 与 $e_{S,P} = 1$）。如果“外生”变量 I 与 w 的值分别为 20 000 美元与 25 美元，那么，供求均衡就要求

$$\begin{aligned} Q_D &= 0.1P^{-1.2}I^3 = 8 \times 10^{11}P^{-1.2} \\ &= Q_S = 6\,400Pw^{-0.5} = 1\,280P \end{aligned} \tag{10.40}$$

或

$$P^{2.2} = 8 \times 10^{11} / 1\,280 = 6.25 \times 10^{8}$$

或

$$P^{*} = 9\,957$$
$$Q^{*} = 1\,280P^{*} = 12\,745\,000 \tag{10.41}$$

这样,汽车市场上的最初均衡为:价格约等于 10 000 美元,销售量约等于 1 300 万辆汽车。

需求的移动。在其他因素不变的情况下,家庭真实收入增加 10% 会使需求函数移至

$$Q_D = 1.06 \times 10^{12} P^{-1.2} \tag{10.42}$$

与前述推导类似,有

$$P^{2.2} = 1.06 \times 10^{12} / 1\,280 = 8.32 \times 10^{8} \tag{10.43}$$

或

$$P^{*} = 11\,339$$
$$Q^{*} = 14\,514\,000 \tag{10.44}$$

如前面所预测的一样,真实收入上升 10% 会使汽车价格上升近 14%。在这一过程中,汽车销售量增加约 177 万辆。

供给的移动。一个外生的供给移动,如生产汽车的工人工资变动,也会影响市场均衡。如果每小时的工资上升到 30 美元,那么,供给函数(方程 10.39)就会移到

$$Q_S(P, w) = 6\,400P\,(30)^{-0.5} = 1\,168P \tag{10.45}$$

如果回到我们最初的需求函数($I = 20\,000$ 美元时),有

$$P^{2.2} = 8 \times 10^{11} / 1\,168 = 6.85 \times 10^{8} \tag{10.46}$$

或

$$P^{*} = 10\,381$$
$$Q^{*} = 12\,125\,000 \tag{10.47}$$

因此,工资上升 20%,就会使汽车价格上升 4.3%,销售量下降超过 60 万辆。在许多市场类型中均衡的变化都可以依照相关弹性的实证估计,运用这种一般性的方法进行大致的判断。

请回答:汽车工人工资变化的结果,与运用类似于方程 10.36 的方程可以预测到的结果是否一致?

10.7 长期分析

在第 8 章我们已经知道,在长期厂商为了适应市场状况能够调整其所有的投入。因此,对于长期分析,由于长期成本曲线反映了所有投入的弹性,所以,我们要使用长期成本曲线。一个作为价格接受者、追求利润最大化的厂商,会在使其价格等于长期边际成本(MC)的产量水平上从事生产。而且,我们也一定要注意到在长期对价格产生影响的第二个,从根本上说也是更为重要的因素,即新厂商进入行业之中或是现存厂商从行业中退出的可能性。用数学形式表示就是,我们要让厂商的数目

n 随着经济激励的变化而变化。完全竞争模型假定,厂商进入或退出某一行业,不存在特殊的成本。因此,在有利可图时,新厂商就会被吸引进入市场。同样,在无钱可赚时,厂商又会退出该行业。由于有比目前数量更多的厂商从事生产,因此,新厂商的进入会引致行业的短期供给曲线向外移动。而短期供给曲线的外移将引起市场价格(与行业利润)的下降。这一过程会持续到打算进入该行业的厂商无利可图时为止。[①] 在这一点上,不会再有进入,并且行业中的厂商数目将达到均衡。对于行业中的某些厂商正在遭受短期亏损的情况,也可以得到相同的结论。一些厂商选择退出行业,将使供给曲线左移。市场价格将上升,结果使仍留在行业中的厂商保持了盈利能力。

均衡条件

由于本章的目的,我们假定行业中的厂商有着相同的成本曲线,即没有厂商控制任何特定资源或特定技术。[②] 由于所有的厂商都是相同的,均衡的长期位置就要求每个厂商的经济利润都为零。用图形表示,长期均衡价格一定在每个厂商的长期平均总成本曲线的最低点上。只有在这一点上,$P = MC$(这为利润最大化所要求)与 $P = AC$(这为零利润所要求)这两个均衡条件才成立。要强调的是,这两个均衡条件的原因完全不同。利润最大化是厂商的目标。所以,$P = MC$ 法则源自于我们关于厂商所作的行为假定,并且,这也类似于在短期运用的产出决策规则。而零利润条件不是厂商的目标,厂商毫无疑问愿意有更多的数量为正的利润。但是,对应于获得超常规收益的可能性,由于厂商可以自愿进入或退出行业,所以,市场的长期运作会让所有厂商都只能得到一个零经济利润($P = AC$)。尽管在完全竞争行业中的厂商在短期所得到的利润有正有负,但在长期,利润一定为零。因此,我们可以把这个分析归纳为如下定义:

定义

长期竞争均衡。完全竞争市场长期均衡的定义是:没有任何厂商有激励进入或退出该行业的状态。这种情况出现于厂商的数量可以使得 $P = MC = AC$ 的时候,并且每个厂商都在其长期平均成本曲线的最低点上进行生产。

10.8 长期均衡:成本不变的情况

为了详细讨论长期定价,我们必须对新厂商进入行业会对厂商投入成本产生怎样的影响作出假定。我们可以作出的最简单的假定是,假设新厂商进入对投入的成本没有影响——这或许是由于行业所运用的投入品在各个投入市场中所占的份额都相对较少。在这个假定下,无论多少厂商进入(或离开)行业,每个厂商都将保持其与开始时相同的成本曲线束。在许多重要的情况下,这种不变

---

① 记住,我们讲的利润都是指"经济利润",即厂商从事此行业能够比其他行业赚得更多的,从而确保他一定会待在本行业的那部分利润。因此"零"经济利润的含义是:没有厂商能够在这里赚取比其他投资渠道更高的收益。

② 如果厂商的成本不同,成本非常低的厂商就具有正的长期利润,这种额外利润将反映在带来厂商低成本的资源的价格上。在这个意义上,相同成本的假定并不非常严格。这在于,一个活跃的投入品市场将会保证所有厂商的平均成本(包括机会成本)是相同的。也请参见本章后面关于李嘉图租金的讨论。

投入成本假定并不能站住脚，这一点我们在下一节将会看到。但在这一节，我们还是首先讨论成本不变行业的均衡条件。

10.8.1 初始均衡

图 10.7 说明了一个行业的长期均衡。对于作为整体的市场[图 10.7(b)]，需求曲线是 D，短期供给曲线是 SS。这样，短期均衡价格为 P_1。而一个典型的厂商[图 10.7(a)]会在产出水平为 q_1 的点上进行生产；这是由于，在这一产出水平上，价格与短期边际成本(SMC)相等。另外，在市场价格为 P_1 时，产出水平 q_1 也是厂商的长期均衡点。由于价格与长期边际成本(MC)相等，所以，厂商得到了最大化的利润。图 10.7(a)也意味着第二个长期均衡性质：价格等于长期的平均成本(AC)。这样，经济利润为零，也就不存在让厂商进入或退出该行业的激励。也正由于此，图 10.7 所描述的市场既处于短期均衡，也处于长期均衡。由于厂商的利润最大化，因此，它们处于均衡之中；也由于经济利润为零，厂商的数量是稳定的。只要供给与需求的条件不变，这种均衡就会保持下去。

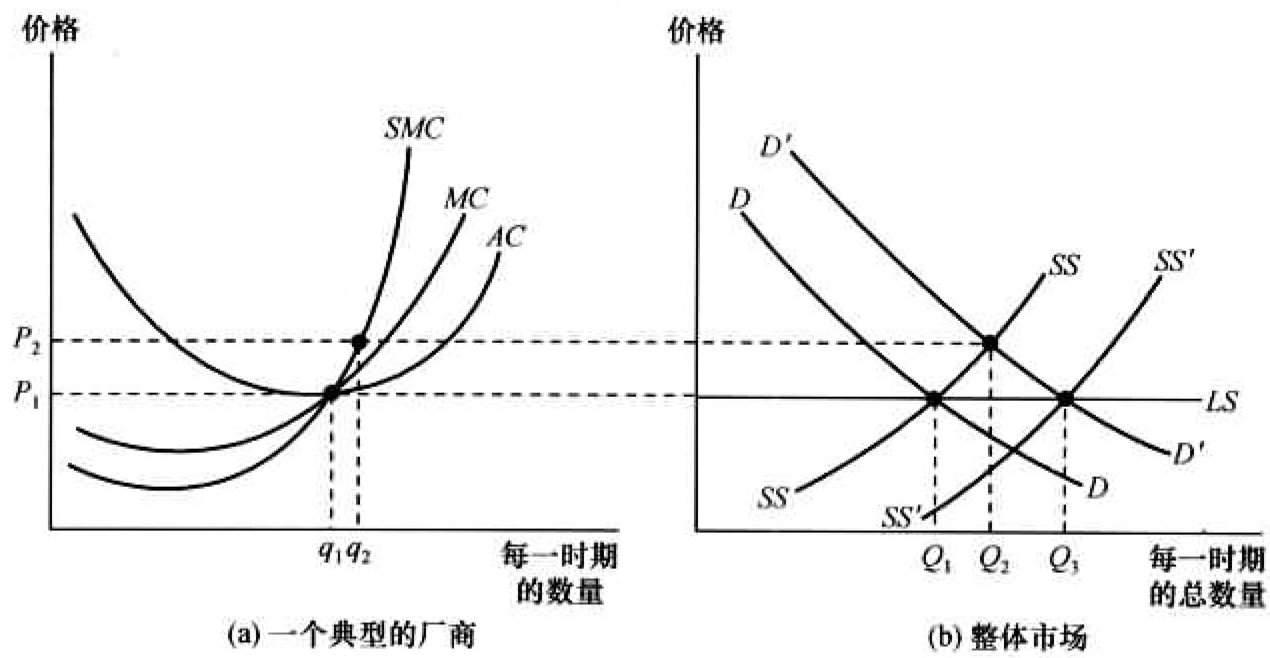


图 10.7 对于一个完全竞争行业的长期均衡：成本不变的情形

需求从 D 到 D' 的增加在短期内将引起价格从 P_1 上升到 P_2。这种较高的价格在行业中会创造利润，新厂商会被吸引进入市场。如果假定新厂商的进入对于行业中厂商的成本曲线没有影响，那么，新厂商就会不断进入，直到价格被压回到 P_1。在这个价格上，经济利润为零。因此，长期供给曲线 LS 就是过点 P_1 的一条水平线。沿着 LS，由于每个厂商都生产 q_1，所以这里增加的产出完全是由厂商数增加造成的。

10.8.2 对于需求增加的反应

现在，图 10.7(b)中的市场需求曲线被假设向外移动到 D'。如果 SS 仍是行业中相应的短期供给曲线，那么，价格在短期就会上升到 P_2。短期中典型的厂商会选择生产数量 q_2，并在这个产出水平赚取利润。而在长期，这些利润会吸引新厂商进入市场。由于假设成本不变，新厂商的进入对投入成本不会产生影响。这样，新厂商会不断进入市场，直到价格被压低到不再存在经济利润那一点为止。因此，新厂商的进入会使短期供给曲线移动到 SS'，在那里均衡价格(P_1)得以重建。在这个新

的长期均衡点上，价格与数量的组合(P_1, Q_3)会支配市场。虽然在这一点上比初始情况时有更多的厂商，但这个典型的厂商会再一次在产出水平为 q_1 的水平上进行生产。

10.8.3 供给的无限弹性

我们已经表明，成本不变行业的长期供给曲线是通过价格为 P_1 的一条水平线。在图 10.7(b)中，这条曲线被标为 LS。无论需求发生什么变化，零长期利润(由于假定自由进入)与利润最大化这两个均衡条件都将保证在长期不存在高于 P_1 的价格取得支配地位的情况。① 由于这个原因，P_1 可以被认为是这种商品的"正常"价格。不过，如果放弃成本不变假定，正如我们在下一节所表明的那样，长期供给曲线就不一定具有这种无限弹性的形状了。

例 10.5

无限弹性的长期供给

手工制作的自行车架由许多规模相同的厂商生产。其中一个典型厂商的(长期)总的月成本为

$$C(q) = q^3 - 20q^2 + 100q + 8\,000 \tag{10.48}$$

其中 q 是每月生产车架的数量。手工自行车架的需求由下式给出

$$Q_D = 2\,500 - 3P \tag{10.49}$$

这里，Q_D 是每月的需求量，而 P 是每个车架的价格。为了决定这一市场的长期均衡点，我们必须找到典型厂商平均成本曲线的最低点。由于

$$AC = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 20q + 100 + \frac{8\,000}{q} \tag{10.50}$$

并有

$$MC = \frac{\partial C(q)}{\partial q} = 3q^2 - 40q + 100 \tag{10.51}$$

我们知道，只有 $AC = MC$ 时，才有最小点。我们可以由下式求出这个产出水平

$$q^2 - 20q + 100 + \frac{8\,000}{q} = 3q^2 - 40q + 100$$

或

$$2q^2 - 20q = \frac{8\,000}{q} \tag{10.52}$$

有一个可行解 $q = 20$。在月产出为 20 个车架的情况下，每一个生产者的长期平均与边际成本都是 500 美元。这样，它就是自行车架(手工架子贵得很，骑车的人都知道)的长期均衡价格。在 $P = 500$ 美元的情况下，方程 10.49 表明 $Q_D = 1\,000$。因此，厂商的均衡数量就是 50 个。当这 50 个厂商每一家一个月都生产 20 个车架时，供给量就恰好与在价格为 500 美元时的需求量相等。

① 在完全竞争市场的长期均衡中，均衡条件还能保证经济是"有效率的"，即产品的平均成本达到最小。关于经济的有无效率问题详见第 12 章。

在这个问题中，如果需求增加到

$$Q_D = 3\,000 - 3P \tag{10.53}$$

我们可以预期长期的产出与车架数会上升。假定进入到车架市场是自由的，这种进入并不改变一个典型的自行车厂商的成本。那么，长期均衡价格就仍会保持在 500 美元，每月的总需求量仍为 1 500。这要求有 75 个车架生产者，即有 25 个新厂商进入市场。

请回答：在长期，需求增加导致行业短期盈利，从而激励车架生产者的进入。假定每个厂商的短期成本为 $SC = 50q^2 - 1\,500q + 20\,000$。请说明，当行业处于长期均衡时，短期利润为零。当需求增加时，行业的短期利润会是多大？

10.9 长期供给曲线的形状

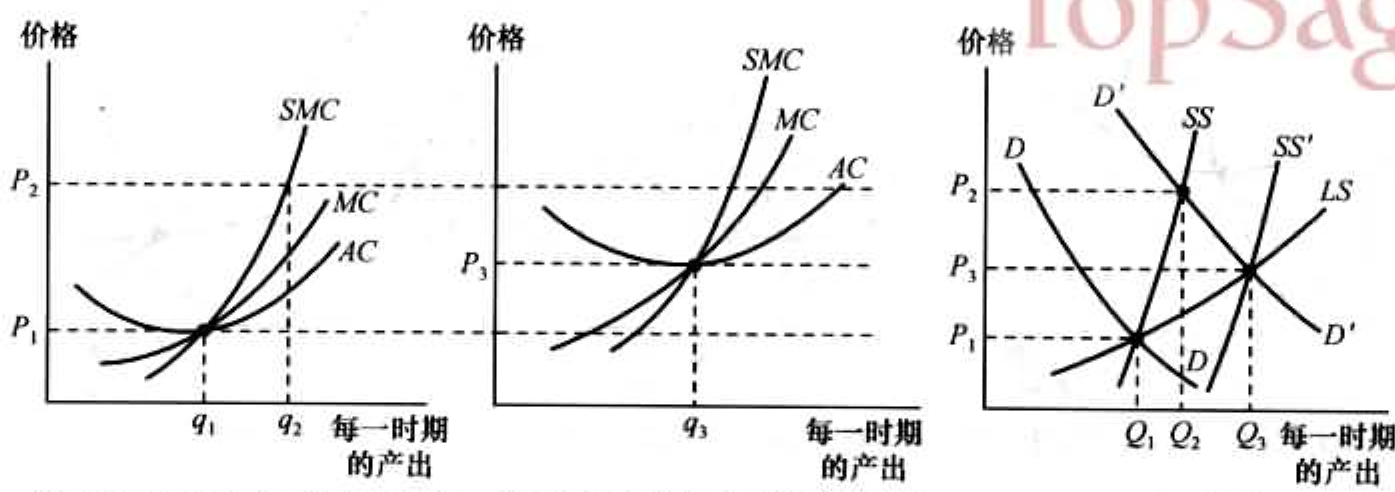
与短期的情况不同，长期分析与（长期）边际成本曲线的形状几乎没有关系。相反，零利润条件把注意力都集中于长期平均成本曲线的最低点，并将其作为与长期价格决定最为相关的因素。在成本不变的情况下，当新厂商进入行业时，这个最低点的位置不会改变。这样，无论需求曲线怎样移动，都只有一个价格在长期能够支配市场——长期供给曲线就是通过此价格的水平线。但是，一旦放弃成本不变的假定，情况就全变了。当新厂商的进入引起平均成本上升，长期供给曲线就将有一个正斜率。而另一方面，如果进入使平均成本下降，则长期供给曲线甚至可能有负斜率。我们现在就讨论这些可能性。

10.9.1 成本递增的行业

由于以下几个原因，新厂商进入行业会引起所有厂商的平均成本上升。新厂商会和现有的厂商争夺稀缺资源，由此引致价格上升；新厂商也会以空气污染或水污染的形式对现有厂商（以及它们自己）施加“外部成本”；并且，新厂商可能增加了对于那些靠税收支持的服务（警察力量、污水处理厂等）的需要，由此引致的税收就可能表现为所有厂商成本的增加。图 10.8 说明了在这种**成本递增行业（increasing cost industry）**中的两个市场均衡。初始的均衡价格为 P_1，在这个价格上，典型的厂商生产 q_1，而总的行业产出为 Q_1。现在，假定行业的需求曲线向外移动到 D'。在短期，由于 D' 与行业的短期供给曲线 SS 相交，所以，价格会上升到交点 P_2。在这个价格上，典型的厂商会生产 q_2，并会赚取大量利润。这个利润会吸引新厂商进入市场，并使短期供给曲线向外移动。

假定新厂商的进入使所有厂商的成本曲线上升。新厂商可能为了稀缺的投入品而竞争，结果使投入价格上升。一个典型厂商的新的（较高的）成本曲线束如图 10.8（b）所示。行业的新长期均衡价格是 P_3（这里 $P_3 = MC = AC$），在此价格上需求量为 Q_3。现在，我们确定了长期供给曲线上的两点 (P_1, Q_1) 与 (P_3, Q_3)。曲线上的其他点都可以通过研究需求曲线所有可能的移动以类似方式得到。于是，这些移动就画出了长期供给曲线 LS。这里，由于行业具有成本递增的性质，所以，LS 具有正斜率。请注意，LS 曲线比短期供给曲线平缓。这表明，在长期可能出现的供给反应会有较大的弹性。

另外，曲线是向上倾斜的，于是，价格会随需求的增加而上升。这种情况可能相当普遍，我们在后面的各节中将会更多地谈及。



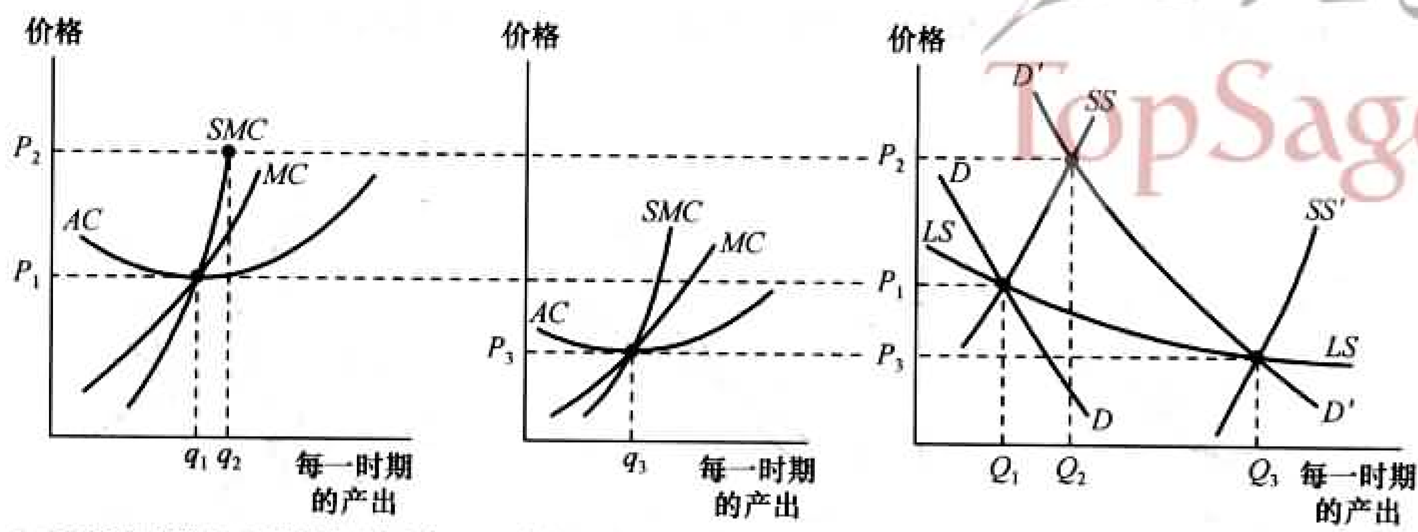
(a) 有新厂商进入之前的典型厂商　(b) 有新厂商进入之后的典型厂商　(c) 市场

图 10.8　成本递增行业的长期供给曲线斜率为正

开始时，市场的均衡点应为(P_1,Q_1)。需求上的增加（到 D'）在短期会引起价格上升到 P_2。典型的厂商会生产 q_2 以有所盈利。这个利润会吸引新厂商进入到该行业中。这些新厂商的进入就引起了典型厂商的成本上升到图(b)中表示的水平。在新的曲线束中，均衡在市场处于(P_3,Q_3)时得以重建。通过考察需求移动的多种可能，并把得到的所有均衡点连接在一点，就可以画出长期供给曲线 LS 了。

10.9.2　成本递减行业

并非所有的行业都表现出成本不变或成本递增，在某些情况下，新厂商的进入还会减少行业中厂商的成本。例如，新厂商的进入会提供比原来规模更大的、可以从中得到熟练劳动力的储备，而这就会减少与雇用新工人相关联的成本。同样，新厂商的进入也可能提供工业化的"关键部分"，这保证了更有效率的运输网与通讯网的发展。无论使成本减少的具体原因是什么，最终的结果由图 10.9 中的三张图来说明。最初的市场均衡由图 10.9(c)中的价格数量组合(P_1,Q_1)表示。在这个价格上，典型的厂商生产 q_1，经济利润为零。现在假定市场需求向外移动到 D'。在短期，价格将增加到 P_2，典型的厂商会生产 q_2。在这一价格水平上，可以得到正的利润。这些利润会使新的生产者进入市场，如果这种进入使成本下降，那么，对于典型厂商的一系列新成本曲线就类似于图 10.9(b)中所示。现在新的均衡价格为 P_3；在此价格上，需求量为 Q_3。通过研究需求上所有可能的移动，就能够"扫描"出长期供给曲线 LS。由于行业成本递减的性质，该曲线有负斜率。这样，当产出扩张时，价格下降。这种可能性已经被用来作为保护性关税可以使新产业免受外来竞争的理由。人们假定（实际上未必正确），对"幼稚工业"的保护将会使其成长，并最终以低于世界价格水平的价格进行竞争。



(a) 有新厂商进入之前的典型厂商 (b) 有新厂商进入之后的典型厂商 (c) 市场

图 10.9 成本递减行业的长期供给曲线斜率为负

市场均衡的最初位置在(P_1,Q_1)。需求到 D'的增加使价格在短期上升至 P_2,典型的厂商生产 q_2 这一数量已有所盈利。这个利润吸引新厂商进入到该行业中来。如果这些新厂商的进入引致典型厂商的成本下降,那么,一系列新的成本曲线看起来就像图(b)中的那样。在这些曲线中,市场均衡在点(P_3,Q_3)上得以重建。通过把这些均衡点连接起来,可以画出斜率为负的长期供给曲线 LS。

10.9.3 长期供给曲线的分类

由此,我们已经表明了完全竞争行业的长期供给曲线可以假定有多种形状。决定这些形状的主要因素为厂商进入行业对成本的影响方式。下面的定义包含了各种可能性:

定义

成本不变、成本递增和成本递减的行业。一个行业的供给曲线一定表现为下面三种形状之一:

成本不变:进入并不影响投入成本;长期供给曲线是通过长期均衡价格的水平线。

成本递增:进入使投入成本增加;长期供给曲线有正斜率。

成本递减:进入使投入成本减少;长期供给曲线有负斜率。

现在,我们将对长期供给曲线的形状作进一步的定量分析。

10.10 长期供给弹性

行业的长期供给曲线综合了以下两方面的信息:一是来自于针对价格变化厂商所作的内部调整;二是盈利机会、厂商数目与投入成本上的变化。以下概念概括了所有这些供给反应:

定义

长期供给弹性。长期供给弹性($e_{LS,P}$)表示了长期行业产出变化率与商品价格变化率之比。用

数学公式表示，有

$$e_{LS,P}=\frac{Q\text{ 改变的百分比}}{P\text{ 改变的百分比}}=\frac{\partial Q_{LS}}{\partial P}\cdot\frac{P}{Q_{LS}} \tag{10.54}$$

上述弹性的数值可正可负，取决于行业是成本递增，还是成本递减。正如我们已经看到的，在成本不变的情况下，$e_{LS,P}$ 是无限的；这是因为，行业的扩张或收缩可以在对商品价格没有任何影响的情况下发生。

经验估计

表 10.2　长期供给弹性的一些估计值

农业亩数	
谷物	0.18
棉花	0.67
小麦	0.93
铝	近乎无限
铬	0—3.0
煤（东部储量）	15.0—30.0
天然气（全美储量）	0.20
石油（全美储量）	0.76
城市的住房	
密度	5.3
质量	3.8

资料来源：农业亩数：M. Nerlove，"Estimates of the Elasticities of Supply of Selected Agriculture Commondities"，*Journal of Farm Economics* 38（May 1956）：496—509。铝与铬：源自于美国内政部的估计，*Critical Materials Commondity Action Analysis*（Washington，D. C.：U. S. Government Printing Office，1975）。煤：M. B. Zimmerman，"The Supply of Coal in the Long Run：The Case of Eastern Deep Coal"，MIT Energy Laboratory Report No. MITEL 75-021（September 1975）。天然气：基于对石油的估计，以及 J. D. Khazzoom，"The FPC Staff's Econometric Model of Natural Gas Supply in the United States"，*The Bell Journal of Economics and Management Science*（Spring 1971）：103—117。石油：E. W. Erickson，S. W. Millsaps，and R. M. Spann，"Oil Supply and Tax Incentives"，*Brookings Papers on Economic Activity* 2（1974）：449—478。城市住房：B. A. Smith，"The Supply of Urban Housing"，*Journal of Political Economy* 40（August 1976）：389—405。

10.11　长期均衡的比较静态分析

在本章的前面，我们说明了如何对竞争性市场上短期均衡的改变进行简单的比较静态分析。通过运用对需求与供给的长期弹性的估计，也可以作完全相同的分析。

例如，虽然在进行解释时会有一些不同，但在例 10.4 中所假设的汽车市场模型可能对于长期分析会同样有效。事实上，通常在所使用的供求模型中，我们并不清楚模型的作者是打算用其结果去反映短期的情况，还是长期的情况。因此我们总是要付出一定的努力去理解进入的问题是怎样得到处理的。

10.11.1　行业结构

在完全竞争市场中，当市场均衡变化时，厂商的数量会有什么变化是用简单的供求分析难以理

解的。正如我们将在第 6 篇中所看到的，由于在某些情况下市场的运作会受到厂商数量的影响，也由于在进入与退出行业时会受直接的公共政策利益的影响，所以，需要一些其他的分析。在这一节，我们将详细研究在成本不变的情况下厂商数量的决定因素。我们也将对成本递增的情况作一简要介绍，本章讨论的某些问题还将详细考察这一情况。

10.11.2 需求的移动

由于成本不变行业中的长期供给曲线是无限弹性的，所以，对于市场需求移动进行分析就特别容易。如果最初的均衡行业产出是 Q_0，并且 q^* 代表使典型厂商的长期平均成本为最小时的产出水平，于是，最初的均衡厂商数量 n_0 由下式确定

$$n_0 = \frac{Q_0}{q^*} \tag{10.55}$$

使均衡产出变化到 Q_1 的需求变动在长期将改变厂商的均衡数目，有

$$n_1 = \frac{Q_1}{q^*} \tag{10.56}$$

厂商数目上的变化由下式确定

$$n_1 - n_0 = \frac{Q_1 - Q_0}{q^*} \tag{10.57}$$

即厂商均衡数目的变化完全由需求移动的程度与对典型厂商来说最适合的产出水平决定。

10.11.3 投入成本的变化

即便在简单的成本不变行业的情况下，分析投入品价格上升（由此有一无限弹性的长期供给曲线上移）的影响都是相对复杂的。首先，为了计算行业产出的下降，必须知道由于投入品价格的上升，最低平均成本会因此增加多少，以及在长期均衡价格上的这样一个增加又会怎样影响总需求量。关于典型厂商平均成本函数的知识和关于需求价格弹性的知识使得可以用一种直接的方式完成这种计算。不过，投入品价格的增加也会改变典型厂商的最低平均成本产出水平。这个可能性由图 10.10 来说明。由于投入品价格上升，平均成本与边际成本都向上移动，但是，由于平均成本向上移动的程度比边际成本相对要大，所以，典型厂商的最优产出水平就由 q_0^* 增加到 q_1^*。不过，如果成本曲线移动的相对大小与前述情况相反，那么，典型厂商的最优产出水平就会下降。① 考虑到最优规

---

① 一个简单的数学证明可以表述如下。最优产出 q^* 由下式决定

$$AC(v,w,q^*) = MC(v,w,q^*)$$

该表达式两边对 v 求导，得到

$$\frac{\partial AC}{\partial v} + \frac{\partial AC}{\partial q^*} \cdot \frac{\partial q^*}{\partial v} = \frac{\partial MC}{\partial v} + \frac{\partial MC}{\partial q^*} \cdot \frac{\partial q^*}{\partial v}$$

但是，由于平均成本最小，$\partial AC/\partial q^* = 0$。对上式进行整理，得

$$\frac{\partial q^*}{\partial v} = \left\{\frac{\partial MC}{\partial q^*}\right\}^{-1}\left[\frac{\partial AC}{\partial v} - \frac{\partial MC}{\partial v}\right]$$

由于在 AC 最小时，$\partial MC/\partial q > 0$，所以，$\partial q^*/\partial v$ 就是可正可负的，由 AC 和 MC 曲线移动的相对大小决定。

模上的这种变化，方程 10.57 变为

$$n_1 - n_0 = \frac{Q_1}{q_1^*} - \frac{Q_0}{q_0^*} \tag{10.58}$$

这样就产生了多种可能性。

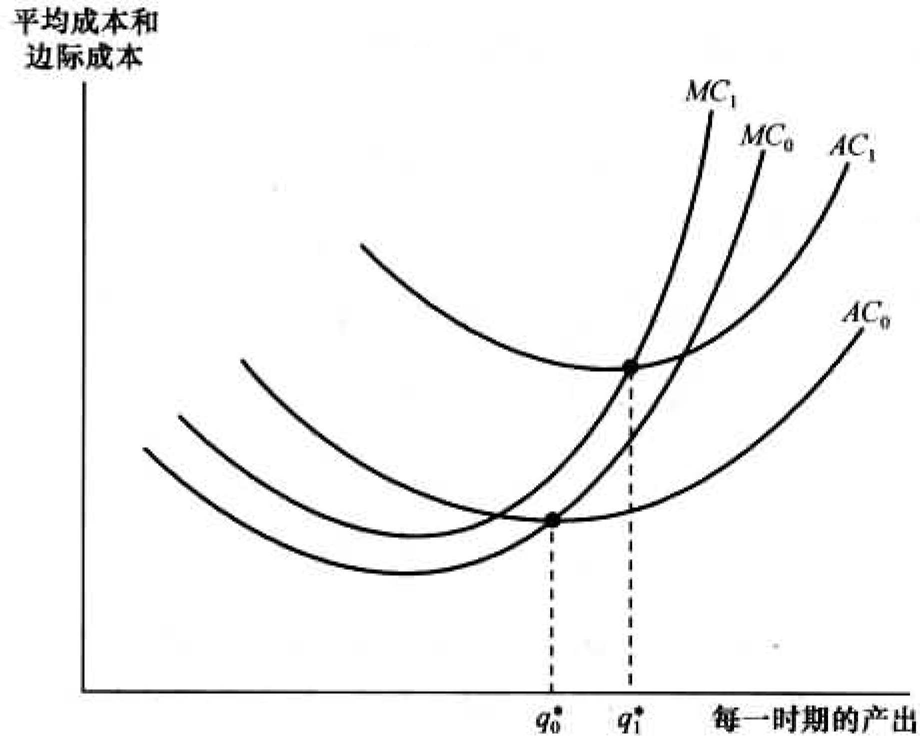


图 10.10　投入品价格的上涨可能导致典型厂商的长期均衡产出的变化

投入品价格的上涨将使平均成本曲线与边际成本曲线上移，这一移动对典型厂商的最优化产出水平(q^*)的精确影响取决于移动的相对程度。

如果 $q_1^* \geq q_0^*$，则由市场价格上升而引致的产出数量的下降就毫无疑问会使厂商数目有所减少；但是，如果 $q_1^* < q_0^*$，上述结果就会是不确定的。行业产出会下降，但最优厂商规模也会下降，结果，对于厂商数目的最终影响就由这些变化的相对大小决定。当投入品价格的上升引起行业产出下降时，厂商数目的下降似乎仍是最可能的结果，但 n 的增加至少理论上也是可能的。

例 10.6

投入成本递增与行业结构

自行车架生产者的成本增加会改变在例 10.5 中所描述的均衡，但是，对于市场结构的准确影响将由成本如何增加决定。不变成本增加的效应是相对清楚的——长期均衡价格会上升，典型厂商的规模也会增加。由于不变成本的增加只提高了 AC，而不是 MC，所以，才会有后一种效应。为了保证均衡条件 $MC = AC$ 成立，产出(以及 MC)也一定要上升。例如，如果车架商店租金的上涨使得典型的自行车架生产者的成本增加到

$$C(q) = q^3 - 20q^2 + 100q + 11\,616 \tag{10.59}$$

那么，可以很容易地说明，当 $q = 22$ 时，$MC = AC$。因此，成本的上升就使得自行车架生产的有效率的规模每月增加 2 辆。在 $q = 22$ 时，长期的平均成本与边际成本为 672，这也将是车架的长期均衡价

格。在这个价格上

$$Q_D = 2\,500 - 3P = 484 \tag{10.60}$$

这样，现在的市场上就只能容纳 22($=484 \div 22$)家厂商。不变成本的上升并未导致价格的增加，而是主要使车架生产者的数目减少(从 50 减到 22)。

而且，其他形式的投入品成本的增加有着更为复杂的效应。尽管进行完整的分析要研究车架生产者的生产函数及其相关的投入选择，但是，通过假定某些可变投入品价格的提高会引致典型厂商的总生产函数变为

$$C(q) = q^3 - 8q^2 + 100q + 4\,950 \tag{10.61}$$

我们仍可以进行一个简单的证明。

现在，有

$$MC = 3q^2 - 16q + 100$$

和

$$AC = q^2 - 8q + 100 + \frac{4\,950}{q} \tag{10.62}$$

因此，假定 $MC = AC$，就有

$$2q^2 - 8q = \frac{4\,950}{q} \tag{10.63}$$

该式有解，$q = 15$。因此，TC 曲线的这一特定变化就在较大程度上降低了车架商店的最佳规模。在 $q = 15$ 时，由方程 10.62 可以算出 $AC = MC = 535$，并且，在这个新的长期均衡价格上

$$Q_D = 2\,500 - 3P = 895 \tag{10.64}$$

在均衡点上，这 895 个车架将由大约 60(895 ÷ 15 = 59.67——这样的问题不一定有整数解)个厂商生产出来。即便成本上的增加导致了较高的价格，由于每一家商店的规模现在更小了，车架生产者的均衡数目会从 50 扩张到 60。

请回答：从方程 10.61 中推导出的总成本函数、平均成本函数和边际成本函数与在例 10.5 中的有什么不同？前面的成本曲线上的成本是否(对于所有的 q 的水平)都比较大？为什么与前面的曲线相关的长期均衡价格较高？(正式的讨论请参见第 280 页脚注①。)

10.12 长期生产者剩余

在第 9 章中，我们描述了短期生产者剩余的概念，短期生产者剩余可以表示为厂商的所有者赚得的比完全不生产状态多的那部分钱。我们已经表明，短期生产者剩余是短期利润与短期不变成本之和。由于在长期，均衡利润为零，并且不存在不变成本，所以，所有这种短期剩余都将消失。厂商的所有者无论是否在某一特定市场上，对他们来说都是无差异的，因为他们在别的地方投资也可以赚取相同的收益。但是，厂商所用投入品的供给者在特定行业中的产出水平可能并不是无差异的。当然，在成本不变的情况下，投入品的投入/产出比例固定，投入品价格应该是恒定不变的。但是，在成本递增的情况下，新厂商进入行业则会使某些要素的价格上升，而这些要素的供应者的境况会改善。如果考虑到这些价格效应就可以引出长期生产者剩余的概念。

定义

长期生产者剩余。长期生产者剩余是指一个行业投入的供给者当前的收益与当行业产出为零时的收益之差。

多少有些令人惊讶的是,长期生产者剩余与短期生产者剩余可以用差不多的图形来表示。它就是长期供给曲线以上与均衡市场价格以下部分的面积。在成本不变的情况下,供给是无限弹性的,因此,这块区域的面积为零,表示不存在这类额外的收益。然而,在成本递增的情况下,长期供给有一正斜率,当行业产出扩张时,投入的额外收益就会产生。由于在应用分析中(参见第 11 章),这种长期生产者剩余的概念被广泛采用,所以,我们将提供一个正式的表述。

10.12.1 李嘉图租金

在 19 世纪早期,大卫·李嘉图第一个描述了可以使长期生产者剩余最容易地得以说明的一种情形。[①] 他假定有许多块可以生长某种谷物的土地。它们有的非常丰饶(耕种成本低),有的很贫瘠(耕种成本高)。谷物(Q)的长期供给曲线被构造如下。在价格低时,只有最好的土地才被耕种。随着产出的需求增加,谷物价格提高,由于较高的价格使耕种劣等土地也有利可图,所以,高成本土地也得到了使用。但因为使用劣地会导致成本递增,所以,长期供给曲线就有一个正斜率。

此时的市场均衡在图 10.11 中作了说明。在均衡价格为 P^* 时,低成本厂商与中等成本厂商的所有者都得到了(长期)利润。"边际厂商"刚好赚到零经济利润。但是,因为较高成本的厂商在价格 P^* 上会赔钱,所以,它们并没有进入市场。不过,由于反映了对独特的资源——低成本土地的收益,所以,在边际厂商之内的厂商所赚取的利润在长期可以保持。即便在整个长时期内,自由进入也不可能侵蚀掉这些利润。这些长期利润的总和就构成了长期生产者剩余,就如在图 10.11(d)中面积 P^*EB 所表示的那样。通过了解到图 10.11(d)中供给曲线上的每一点都代表着某些厂商的最低平均成本,就可以由此表示出这些面积的大小。对于每一个这样的厂商,$P-AC$ 代表着每一单位产出的利润。于是,对所有单位的产出求和,就能计算出总的长期利润。[②]

---

① 请参见 David Ricardo, *The Principle of Political Economy and Taxaion* (1817; reprinted London: J. M. Dent and Son, 1965), 第 2 章与第 32 章。

② 更为正式地,假定每个厂商都生产 q^*,并且在长期均衡中有 $Q^*=n^*q^*$(其中,n^* 是均衡的厂商数目,Q^* 是总的行业产出)。同样假定供给函数的反函数(竞争性价格作为供给量的一个函数)为 $P=P(Q)=P(iq^*)$ 以及 $P^*=P(Q^*)=P(n^*q^*)$。现在,在长期均衡中,第 i 个厂商的利润就为

$$\pi_i=(P^*-AC_i)q^*$$

总利润为

$$\begin{aligned}\pi&=\int_0^{n^*}\pi_i\,di=\int_0^{n^*}(P^*-AC_i)q^*\,di\\&=\int_0^{n^*}P^*q^*\,di-\int_0^{n^*}AC_iq^*\,di\\&=P^*n^*q^*-\int_0^{n^*}P(iq^*)q^*\,di\\&=P^*Q^*-\int_0^{Q^*}P(Q)\,dQ\end{aligned}$$

这就是图 10.11(d)中阴影部分的面积。

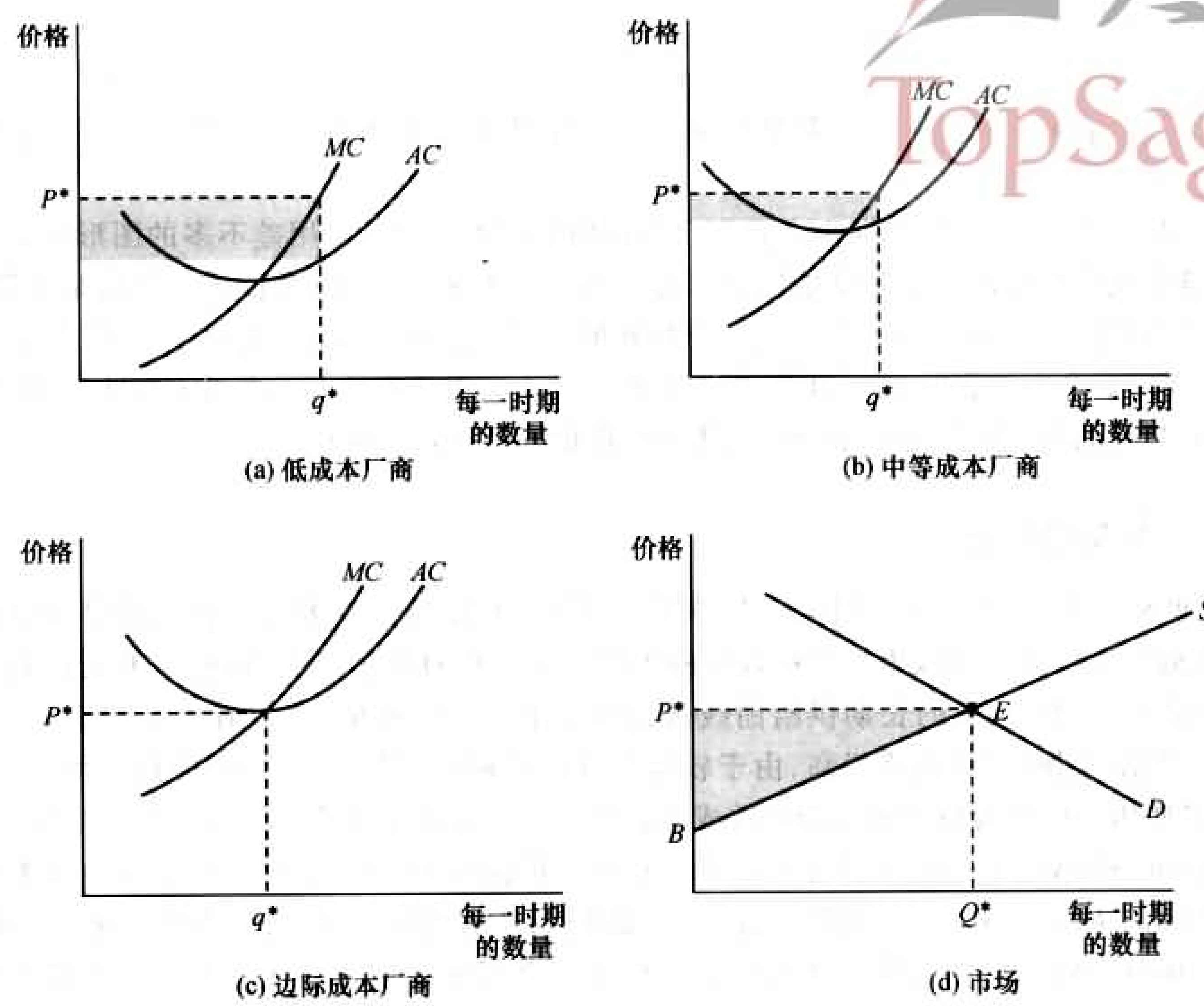


图 10.11　李嘉图租金

低成本与中等成本土地的所有者可以得到长期利润。长期生产者剩余代表了所有这些租金的总和——图(d)中的 P^*EB 区域。通常李嘉图租金会资本化为投入品价格。

10.12.2　租金的资本化

图 10.11 中低成本厂商的长期利润通常会被反映在由这些厂商所拥有的独特资源的价格上。例如,在李嘉图最初的分析中,人们可以预期肥沃土地比贫瘠土壤的卖价要高。由于这种价格反映了所有未来利润的现值,这些利润就可以说是被"资本化"为投入品价格。资本化的例子包括一些看似完全不同的情况:诸如,远距离上班族愿意为交通方便的好房子支付较高的价钱;摇滚歌星或体育明星会在合同中索要高价;而靠近有毒废物的土地地价会低,等等。请注意,在所有这些例子中,正是市场需求决定了租金——这些租金不是那些表示未来机会的传统的投入品成本。

10.12.3　投入品供给与长期生产者剩余

正是低成本投入的稀缺导致李嘉图租金出现的可能性。如果低成本的农场土地可以以无限弹性的供给得到,就不会再出现这种租金。更一般地,任何"稀缺性"投入(在对特定行业来说有一正斜率供给曲线这个意义上)都会获得租金,其形式为比在行业产出为零时所得到的更高的收益。在这种情况

下，产出的增加不仅会提高厂商的成本（并且借此提高产品出售的价格），而且还产生了投入品的要素租金。所有这些租金的总和由长期供给曲线以上、均衡价格以下的面积来测度。长期生产者剩余的面积大小的变化表明对行业的投入所赚取的租金的变化。请注意，尽管长期生产者剩余用市场供给曲线来测度，但正是对行业的投入实际得到了这块剩余。在应用性福利分析中，对长期生产者剩余改变的经验测度被广泛应用，以表明在条件变化时，不同投入品供应商的状况会如何变化。本章练习题 10.7 和第 11 章的几个问题对于在投入品租金与长期生产者剩余之间的联系提供了某些数字上的证明。

小　结

在本章，我们建立了一个详细的关于单一市场竞争性价格决定的模型。这种供求模型首先由马歇尔在 19 世纪后期作了清楚的表达，这一模型也是微观经济分析中许多内容的核心。其主要性质如下：

- 在短期，通过需求者愿意去买什么（由需求曲线表示）和生产者愿意生产什么（由短期供给曲线表示）之间的相互作用，均衡价格得以建立。这些价格在需求者与供给者各自的决策过程中都被看做是固定的。
- 需求与供给上的变动会引起均衡价格的变化。其变化的程度将取决于不同曲线的斜率，这可以通过相当简单的比较静态技术来建立模型。
- 厂商在短期可能有正的利润。由于总是一定要支付不变成本，所以，当收益超过可变成本时，厂商就会进行生产。
- 在长期，对应于不同的利润机会，厂商的数目是可变的。自由进入与退出的假定意味着竞争性行业中的厂商在长期的经济利润为零。由于厂商总是寻求利润最大化，等式意味着厂商将在其长期平均成本曲线的最低点从事生产经营。
- 长期供给曲线的形状取决于进入与退出对厂商的投入成本会产生什么影响。在成本不变的情况下，投入品价格不变，长期供给曲线是一条水平线。如果进入使投入成本增加，则长期供给曲线会有正斜率。
- 长期市场均衡的变化会改变厂商的数目。通过投入品成本变化或是技术进步对最低平均成本的产出水平的影响的考察，很难得出这一变化程度的精确预测。
- 如果市场中长期均衡的变化改变了对于该市场的投入品价格，就会影响那些投入品供给者的福利。这种变化可以通过长期生产者剩余在数量上的变化得到测度。

练　习　题

10.1 假定在完全竞争的行业中有 100 个相同的厂商。每个厂商的短期总成本曲线为

$$C(q)=\frac{1}{300}q^{3}+0.2q^{2}+4q+10$$

a. q 是市场价格 P 的函数，请计算厂商

的短期供给曲线。

b. 假定行业中各厂商的成本之间不存在相互影响，请计算行业的短期供给曲线。

c. 假定市场需求为 $Q = -200P + 8\,000$。短期的均衡价格与均衡数量的组合是什么？

10.2 假定有 1 000 个相同的厂商生产钻石，每个厂商的总成本曲线为

$$C(q) = q^2 + wq$$

这里，q 是厂商的产出水平，w 是钻石工人的工资率。

a. 如果 $w = 10$，厂商的（短期）供给曲线会如何？行业的供给曲线呢？在每一个钻石价格为 20 时，会生产多少钻石？在价格为 21 时，会多生产多少钻石？

b. 假定钻石工人的工资由钻石生产的总量决定，并且这种关系的形式为

$$w = 0.002Q$$

这里，Q 为行业的总产出，它是典型厂商产出的 1 000 倍。

在这种情况下，请说明厂商的边际成本（短期供给）曲线由 Q 决定。行业的供给曲线是什么？在价格为 20 时会生产多少？在价格为 21 时会多生产多少？从短期供给曲线的形状上，你能得出什么结论？

10.3 一个完全竞争市场上有 1 000 家厂商。在极短期，每个厂商都固定供给 100 个单位。市场需求为

$$Q = 160\,000 - 10\,000P$$

a. 请计算极短期的均衡价格。

b. 请计算该行业中任何一个厂商所面对的需求表。

c. 如果有一个销售者决定不出售任何单位，或一个销售者决定出售 200 个单位，请计算均衡价格是多少。

d. 在最初的均衡点上，请计算行业需求曲线的弹性，以及任何一个销售者面对的需求曲线的弹性。

现在假定在短期，每个厂商具有表现为厂商供给的数量（q_i）是市场价格的函数这样的供给曲线。这种供给曲线的特定形式为

$$q_i = -200 + 50P$$

请用这一短期的供给反应，回答问题 a 到 d。

10.4 假定对塑料飞碟的需求为

$$Q = 100 - 2P$$

并且供给为

$$Q = 20 + 6P$$

a. 塑料飞碟的均衡价格和均衡数量是多少？

b. 假定政府对每个塑料飞碟征收 4 美元的税收。假定现在的生产数量是均衡数量，消费者会支付的价格与生产者会收到的价格各是多少？税收是怎样由买者与卖者分担的？

c. 如果供给曲线变为

$$Q = 70 + P$$

上面 a 与 b 问题中的答案会怎样变化？比较这两种情况，你能得出什么结论？

10.5 小麦是在完全竞争市场上生产的。单个的小麦生产者都具有 U 型的长期平均成本曲线；并且，在产量为 1 000 蒲式耳时，达到最低平均成本——每蒲式耳 3 美元。

a. 如果对小麦的需求曲线为

$$Q_D = 2\,600\,000 - 200\,000P$$

这里，Q_D 是每年小麦的需求量，P 是每蒲式耳小麦的价格。那么，在长期均衡时，小麦的价格会是多少？小麦的总需求量会是多少？会有多少个小麦生产者？

b. 假定需求向外移动到

$$Q_D = 3\,200\,000 - 200\,000P$$

如果小麦生产者在短期不能调整其产出，那么，伴随新需求曲线的市场价格会是多少？典型生产者的利润又会为多少？

c. 在 b 中所描述的需求曲线下，新的长期均衡会怎样？（也就是说，请计算在新情况下的市场价格、小麦的产量以及新的均衡的生产者数目。）

d. 用图形表示你的结果。

10.6 某完全竞争行业有大量的潜在进入者。每个厂商都有相同的成本结构，这样，在产出为 20 个单位时（$q_i = 20$）长期平均成本为最小。最小的平均成本为每单位 10 美元。总市场需求为

$$Q = 1\,500 - 50P$$

a. 行业的长期供给表如何？

b. 长期均衡价格（P^*）是多少？行业总产出（Q^*）是多少？每个厂商的产出（q^*）是多少？厂商的数目是多少？每个厂商的利润多大？

c. 与每个厂商长期均衡产出相关的短期总成本曲线为

$$C(q) = 0.5q^2 - 10q + 200$$

请计算短期平均成本曲线与边际成本函数。在什么产出水平上，短期平均成本达到最低？

d. 请计算每个厂商的短期供给曲线与行业的短期供给曲线。

e. 现在，假定市场需求函数向外移动到 $Q = 2\,000 - 50P$。请用这条新的需求曲线，在极短期厂商不能改变其产出时回答 b 中的问题。

f. 在短期，请用行业的短期供给曲线，重新计算以回答问题 b。

g. 对行业来说，新的长期均衡是什么？

10.7 假定对高跷的需求为

$$Q = 1\,500 - 50P$$

并且，在竞争性行业中每一个生产高跷的厂商在长期的运作成本为

$$C(q) = 0.5q^2 - 10q$$

生产高跷的企业家才能是稀缺的。企业家的供给曲线为

$$Q_S = 0.25w$$

这里，w 为所付的年工资。

同样假定每一个生产高跷的厂商需要一个（并且只需要一个）企业家（因此，所雇用的企业家数量就等于厂商数目）。这样，每个厂商的长期总成本就为

$$C(q,w) = 0.5q^2 - 10q + w$$

a. 生产高跷的长期均衡数量是多少？每个厂商生产多少个高跷？高跷的长期均衡价格是多少？会有多少厂商？会雇用多少企业家，其工资是多少？

b. 假定高跷的需求向外移动至

$$Q = 2\,428 - 50P$$

请回答在 a 中提出的问题。

c. 由于在本问题中，生产高跷的企业家是长期供给曲线斜率为正的原因。所以，他们将得到在行业产出扩张时所产生的全部租金。请计算在 a 与 b 之间租金的增加情况。并请证明根据高跷供给曲线测度的长期生产者剩余的变化与前述的租金增加是相等的。

10.8 假定典型的蘑菇生产者的长期总成本函数为

$$C(q,w) = wq^2 - 10q + 100$$

这里，q 是典型厂商的产出，w 是采蘑菇者的小时工资率。同样假定对蘑菇的需求为

$$Q = -1\,000P + 40\,000$$

这里，Q 是总需求量，P 是蘑菇的市场价格。

a. 如果采蘑菇者的工资率为 1 美元，对于典型的采蘑菇者，其长期均衡产出是多大？

b. 假定蘑菇行业表现出成本不变，并且所有厂商都是一样的，那么，蘑菇在长期的均衡价格会如何？会有多少蘑菇厂商？

c. 假定政府对每一个受雇采蘑菇者都征收 3 美元税收（把总的工资成本 w 提升到 4 美元）。假定典型的厂商继续保持成本函数不变

$$C(q,w) = wq^2 - 10q + 100$$

那么，伴随着新的、较高的工资率，对问题 a 与 b 的答案会有什么变化？

d. 如果市场的需求变为

$$Q = -1\,000P + 60\,000$$

对于问题 a，b 与 c 的答案会发生怎样的变化？

推荐阅读文献

Knight, F. H. Risk, *Uncertainty and Profit.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1921. Chap. 5 and 6.

该书对于在长期中经济事件对行业行为的激励作用进行了经典描述。

Marshall, A. *Principles of Economics.* 8th ed. New York: Crowell-collier and Macmillan Co., 1920. Book 5, Chaps. 1, 2, and 3.

该书是关于建立供求机制的经典作品。

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Chap. 10. New York. Oxford University Press, 1995.

该书提供了一个简练但理论上很精确的分析，并对竞争市场上可能出现达不到均衡的情况作了很好的讨论。

Reynolds, L. G. "Cut-Throat Competition". *American Economic Review* 30 (December 1940): 736—747.

该文对在一个行业中可能有"太多"竞争的概念进行了批评。

Robinson, J. "What Is Perfect Competition?" *Quarterly Journal of Economics* 49 (1934): 104—120.

该文是关于完全竞争性假定的批评性讨论。

Stigler, G. J. "Perfect Competition, Historically Contemplated." *Journal of Political Economy* 65 (1957): 1—17.

该文对竞争性模型的历史发展进行了有趣的讨论。

Varian, H. R. *Microeconomic Analysis*, 3rd ed., Chap. 13. New York: W. W. Norton, 1995.

该书涉及了本章中讨论的很多话题，简练而富有启发性。书中注意强调了准入的重要性，但对长期供给曲线本质的表述略为含糊。

扩 展

总需求及其估计方法

从第 4 章到第 6 章我们研究的以效用最大化为基础的模型中蕴含了如下几个个人需求函数的性质：

- 需求函数必须是连续的；
- 需求函数对于所有价格和收入是零次齐次的；
- 收入补偿性的替代效应是负的；
- 交叉价格替代效应是对称的。

在本部分，我们希望把需求函数推广到市场总需求中，并且希望这样的需求函数仍然保

持以上性质，以及确定其成立所必需的限制条件（如果有的话）。此外，我们要提及由估算市场需求函数引出的其他一些问题，以及一些估算出的结果。

E10.1 连续性

个人需求函数的连续性显然蕴含了市场总需求函数的连续性，但当市场需求函数连续时，个人需求函数可能不连续。比如像汽车这样的商品，只能以离散的单位进行交易，而且每单位价值很高。这样，个人需求函数必然是间断的，然而市场需求函数仍然可以（差不多是）连续的。

E10.2 齐次性和总收入

因为每个个人的需求函数关于所有价格和个人收入是零次齐次的，所以市场总需求关于所有价格和每一个个人收入也一定是零次齐次的。但是，市场需求函数关于所有价格和所有人总收入不一定是零次齐次的。

下面分析“总需求函数只与价格和总收入有关”必须满足的条件。事实上，如果每个人的边际消费倾向相同，即每个需求函数都可以表示为

$$x_i = a_i(P) + b(P)y_i, \quad i = 1, n \qquad \text{(i)}$$

其中，P 是价格向量；$a_i(P)$ 表示每个个人对每种商品价格的反应（是个向量函数）；$b(P)$ 是边际消费倾向，要求对所有人均相同（尽管可以随价格发生变化）；y_i 是每个人的收入。对于这样的情况，市场需求函数就只和价格与总收入有关。

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{(ii)}$$

该式表明，整个市场的需求反映了一个“典型的”消费者的行为。格曼（Gorman，1959）表明，这是可以代表这样一个典型消费者的需求函数的最一般形式。

E10.3 交叉等式约束条件

假设一个典型的消费者购买 k 种商品，对每种商品的支出函数是

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i + b_j y, \quad j = 1, k \qquad \text{(iii)}$$

如果消费者在此 k 种商品上花光所有收入，则

$$\sum_{j=1}^{k} p_j x_j = y \qquad \text{(iv)}$$

对每个人的全部需求函数加总，得到

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} = 0 \qquad \text{(v)}$$

且

$$\sum_{j=1}^{k} b_j = 1 \qquad \text{(vi)}$$

由此可以看出，由于条件的限制，一般来说研究者很难分别得到 k 种商品各自的支出函数。但是，有些问题的研究只能从各个支出函数之间的关系入手。

E10.4 计量经济学实例

在实际的计量经济学研究工作中，不同的研究对这些理论模型复杂性的考虑相差甚远。最简单的情形，类似（iii）那样的线性方程可以直接用最小二乘法（ordinary least squares，OLS）估计，不必考虑结果是否满足种种假设。这样虽然当 p_i 或 y 改变时线性函数的弹性不是常数，但任何一点的弹性值都可以通过表达式直接计算得到。下面给出一个函数（iii）的一个弹性恒定不变的形式

$$\ln(p_j, x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \ln(p_i) + b_j \ln y, \quad j = 1, k \qquad \text{(vii)}$$

如此，价格和收入弹性分别为

$$\begin{aligned} e_{x_j,p_j} &= 1 + a_{ij} \\ e_{x_j,p_i} &= a_{ij} \qquad (i \neq j) \qquad \text{(viii)} \\ e_{y_j,y} &= b_j \end{aligned}$$

注意，这里完全没有考虑使用总收入分析需满足的条件，也没有考虑交叉等式约束条件，如 v 和 vi。需求函数的齐次性是一个约束条件，但作模型估计时也常常忽略它。

对总需求等式的更精细的分析希望通过引入收入分配的影响和重新设计整个需求函数系统,以弥补这些不足。Theil(1971,1975)提供了这方面内容的介绍。

计量经济学的结果

表 10.3 中记录了从各种渠道估算出的一些

表 10.3　有代表性的需求价格与收入弹性

	价格弹性	收入弹性
食品	-0.21	+0.28
医疗服务	-0.22	+0.22
住宅		
租房	-0.18	+1.00
买房	-1.20	+1.20
电器	-1.14	+0.61
汽车	-1.20	+3.00
啤酒	-0.26	+0.38
葡萄酒	-0.88	+0.97
大麻	-1.50	0.00
香烟	-0.35	+0.50
堕胎	-0.81	+0.79
横渡大西洋旅行	-1.30	+1.40
进口	-0.58	+2.73
货币	-0.40	+1.00

资料来源:食品:H. Wold and L. Juren, *Demand Analysis*(New York: John wiley & Sons,Inc., 1953): 203。医疗服务:income elasticity from R. Andersen and L. Bewham, "Factors Affecting the Relationship between Family Income and Medical Care Consumption";价格弹性:G. Rosenthal, "Price Elasticity of Demand for Short-term General HospitalServices"; both in *Empipirical Studies in Hearth Economics*, Herbert kiarman, ed. (Baltimore: Johns Hopkins Press, 1970). 住房收入弹性: F. de Leeuw, "The Demand for Housing", *Review for Economics and Statistics* (February 1971);价格弹性:H. S. Howthabben and L. D. Taylor, *Consumer Demand in the united States*(Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1970): 166—167. 电器:R. F. Halvorson, "Residential Demand for Electricity", unpublished Ph. D. dissertation, Harvard University December 1972. 汽车:Gregory C. Chow, *Demand for Automobiles in the United states*(Amsterdan: North Holland Publishing Company, 1957). 啤酒与葡萄酒:J. A. Honson, Z. H. Oksanen, M. R. Veall, D. Fritz, "Short-Run and Elasticities for Canadian Consumption of Alcoholic beverages", *Review of Economics and Statistics*(February 1992):64—74. 大麻:T. C. Misket and F. Vakil, "Some Estimates of Price Expenditure Elasticities among UCLA Students", *Review of Economics and Statitics*(november 1972):474—475. 烟草:F. Chalemaker, "Rational Addictive and Cigarette Smoking", *Journal of Political Economy* (August 1991):722—742. 堕胎:M. H. Medoff, "An Economic Analysis of the Demand for Aboryions", *Economic Inquiry* (April 1988):253—259. 横越大西洋的空中旅行:J. M Cigliano, "Price and Income Elasticities for Airline travel", *Business Economics*(september 1980):17—21. 进口:M. D. Chinn, "Beware of Econometricians Bearing Estimates", *Journal of Policy Analysis and Management*(Fall 1991):546—567. 货币:"Long-Run Income and Interest elasicities of Money Demand in the United States", *Review of Economics and Statistics*(November 1991):665—674. Price elasticity refers to interest rate elasicity.

有代表性的商品的收入和价格弹性。从这些数据的来源也可以看出,研究者多大程度上考虑了之前说的那些经济关系给出的约束。总之,这些估算与直观还是很吻合的。比如说,相对于医疗的价格而言,人们确实更在乎跨大西洋的航班的票价。但是,私人住房的收入弹性与价格弹性都很高这件事可能让人奇怪,因为找地方住一般被认为是生活必需的。汽车的两个弹性也很高,这应该是因为研究者把数量和质量因素合并考虑了,但是这却可以解释汽车行业何以对经济周期如此地敏感。

参考文献

Gorman, W. M. "Separable Utility and Aggregation". *Econometrica* (November 1959): 469—481.

Shafer, W., and H. Sonnenschein. "Market Demand and Excess Demand Functions". In K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II. Amsterdam: North-Holland, 1982, pp. 671—693.

Stoker, T. M. "Empirical Approaches to the Problem of Aggregation over Individuals". *Journal of Economic Literature* (December 1993): 1827—1874.

Theil, H. *Principles of Econometrics*. New York: John Wiley & Sons, 1971, pp. 326—346.

____. *Theory and Measurement of Consumer Demand*, vol. 1. Amsterdam: North-Holland, 1975, chaps. 5 and 6.

第 11 章　应用竞争分析

我们在前一章所建立的完全竞争市场的模型为许多应用型微观经济分析提供了基础。运用这些供求原则能够很好地研究现实中的市场,这点已为长期的实证研究所证实。在这一章,我们将对这种应用作一简要的描述。在开始讨论之前,有必要提醒两点。第一,我们在此只分析单一市场,即我们只使用局部均衡方法。而在第 12 章中,我们将研究一系列的一般均衡模型,这类模型考察的是多市场同时发生的相互作用。在这样的模型中,供求分析的某些简单结论可能不成立。同时,另外一点也请读者注意,要记住竞争模型得以建立的严格假定。这些假定中最重要的一个假定是:无论是供给者还是需求者都是价格的接受者。当经济主体对市场价格具有某种影响时,就需要其他的模型来分析。在本书的第 5 篇将会研究这样的一些模型。

11.1　经济效率与福利分析

正如我们所预期的那样,长期竞争均衡配置资源是"有效率"的。尽管我们在第 12 章的一般均衡环境中关于这个概念会说很多,但是,在此我们还是要提供一个为什么该结论可能成立的局部均衡的解释。第 5 章我们曾提起过,需求曲线以下、市场价格线以上的区域代表着消费者剩余——即自愿选择去购买某种商品,而不是被迫去这样做的过程中,消费者所得到的效用。同样,正如我们在第 10 章中所看到的,生产者剩余由市场价格线以下、长期供给曲线以上的面积来测度,这部分面积代表了生产性投入在没有商品交易时所获得的额外收益。于是,把两者加起来,需求曲线与供给曲线之间的面积就代表了消费者剩余与生产者剩余的总和,因此,也反映了由市场参与者通过进行市场交易所获得的总附加值。在竞争性市场的均衡点上,该总面积达到了最大,这一点看上去是显而易见的。

11.1.1　几何证明

图 11.1 显示了一个简化的证明。在需求曲线(D)与长期供给曲线(S)给定之后,对于生产出来的第一个单位商品的消费者剩余与生产者剩余之和就由线段 AB 来确定。当生产出来的产量增加时,总的剩余持续增加,一直增加到竞争性均衡水平 Q^*。当价格处于竞争性水平 P^* 时,将达到这一

产量水平。在图 11.1 中，总的消费者剩余由浅阴影区域表示，总的生产者剩余由深阴影区域表示。显然，对于小于 Q^* 的产量水平（比如 Q_1），总剩余将减少。这种误配置的一个信号就是：在 Q_1 水平上，需求者对新增一个单位产出的估价是 P_1，而边际成本却由 P_2 决定。由于 $P_1 > P_2$，所以，多增加一个单位的产量，总福利显然会增加。以 P_1 与 P_2 之间的任何价格多交换一个单位，这种交易都是符合共同利益的——双方当事人都会获益。

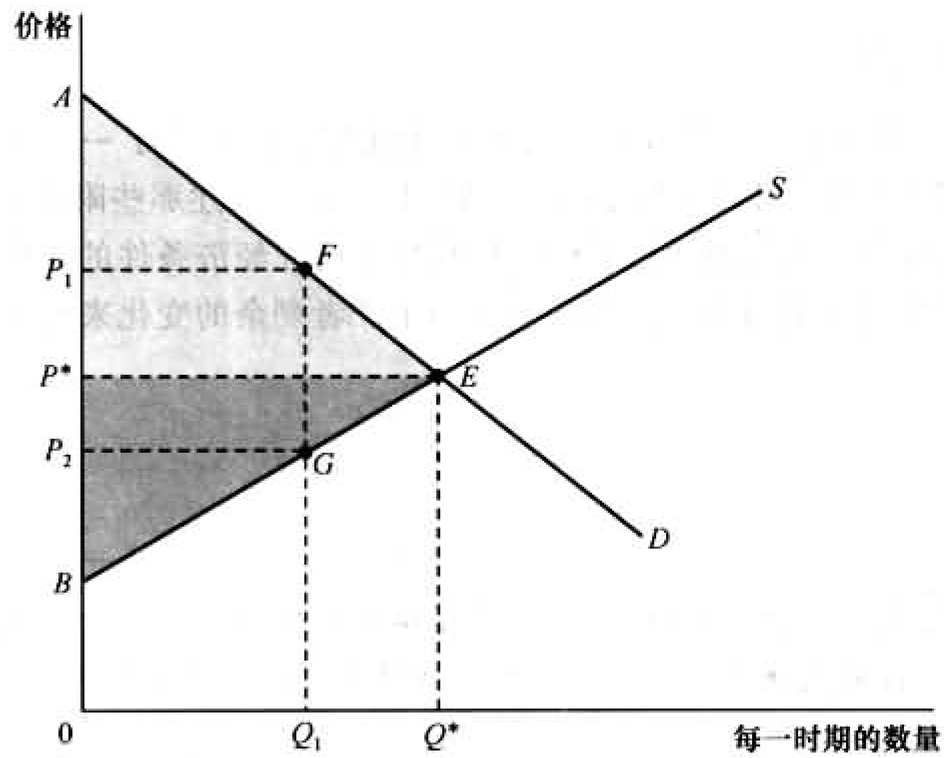


图 11.1　竞争性均衡与生产者剩余和消费者剩余

在竞争性均衡点（Q^*）上，消费者剩余（浅阴影区）与生产者剩余（深阴影区）的总和达到最大。对于小于 Q^* 的产出水平，比如 Q_1，存在着由面积 FEG 决定的消费者剩余与生产者剩余的无谓损失。

在产出水平为 Q_1 时所产生的总福利损失由 FEG 这块面积确定。在产出水平 Q_1 上的剩余分配由在市场中起支配作用的确切价格（非均衡价格）来决定。在价格 P_1 上，消费者剩余会被显著地减少到 AFP_1，而由于生产者剩余此时是 P_1FGB，所以生产者剩余可能实际上有所增加。而在诸如 P_2 这种较低的价格上，情况就会不同，生产者会比他们最初的状况恶化。这样，在产量小于 Q^* 的生产中，福利损失的分配就取决于进行交易的价格。不过，总损失的规模由 FEG 决定，而无论结清的交易价格是什么。①

11.1.2　数学证明

在数学上，我们希望最大化下式

$$
\begin{aligned}
\text{消费者剩余} + \text{生产者剩余} &= [U(Q) - PQ] + \left[PQ - \int_0^Q P(Q)\,\mathrm{d}Q\right] \\
&= U(Q) - \int_0^Q P(Q)\,\mathrm{d}Q \qquad (11.1)
\end{aligned}
$$

这里，$U(Q)$ 是有代表性的消费者的效用函数，$P(Q)$ 是长期供给关系。在长期均衡中，沿长期供给

① 超过 Q^* 的产量增加也明显会减少福利。参见本章练习题 11.1。

曲线，有 $P(Q) = AC = MC$。方程 11.1 关于 Q 求最大化有

$$U'(Q) = P(Q) = AC = MC \tag{11.2}$$

这样，在有代表性的消费者的 Q 的边际值与市场价格相等的点上，会实现最大化。不过，由于需求曲线代表了消费者的边际估价，而供给曲线反映了边际（并且是长期均衡中的平均）成本，所以，这就是竞争性的供求均衡。

11.1.3 应用福利分析

竞争性均衡使消费者剩余与生产者剩余之和最大化的结论反映了一系列更为一般化的经济效率“定理”，我们将在第 12 章中研究这些定理。此后，我们再来描述那些附着于这些定理上的主要说明。这里，我们更感兴趣的是表明竞争性模型怎样被用于研究经济条件的改变对市场参与者福利的影响。通常，这种福利变化是通过考察消费者剩余与生产者剩余的变化来测度的。

例 11.1

福利损失的计算

有了消费者剩余与生产者剩余的概念，我们就可以确切计算管制行为造成的福利损失。在需求曲线与供给曲线均为线性的情况下，由于损失的区域通常是三角形的，所以，计算上特别简单。例如，如果需求为

$$Q_D = 10 - P \tag{11.3}$$

而供给为

$$Q_S = P - 2 \tag{11.4}$$

市场在 $P^* = 6, Q^* = 4$ 的点上实现了均衡。$\bar{Q} = 3$ 的产出限制会在需求者愿意支付的价格（$P_D = 10 - \bar{Q} = 7$）与供给者愿意得到的价格（$P_S = 2 + \bar{Q} = 5$）之间造成一个缺口。因此，从限制交易而来的福利损失就由底边为 2（$= P_D - P_S = 7 - 5$）、高为 1（Q^* 和 $\bar{Q}$ 之间的差额）的三角形确定。这样，如果 P 用每一单位的美元数测度，Q 用单位数测度，福利损失就是 1 美元。在更为通常的情况下，损失的大小由 $P \cdot Q$ 的单位数来测度。

对不变弹性曲线的计算。通过应用基于经济计量学的研究而得出的不变弹性的需求曲线与供给曲线，常常可以得到更贴近现实的结果。在例 10.4 中，我们考察了一个关于美国汽车市场的模型。通过假定 P 以 1 000 美元为单位进行测度，Q 以百万辆汽车为单位进行测度，我们可以使该例简化，需求为

$$Q_D = 200P^{-1.2} \tag{11.5}$$

供给为

$$Q_S = 1.3P \tag{11.6}$$

市场中的均衡点为 $P^* = 9.87, Q^* = 12.8$。现在，假定为了控制污染物的排放，政府制定政策把汽车销售量限制在 11（百万辆）。来自于这样一个政策的直接福利损失通过运用先前的三角形方法可以得到大致的估计。

在 $\bar{Q}=11$ 时，$P_D=(11/200)^{-0.83}=11.1$，$P_S=11/1.3=8.46$。因此，福利损失三角形就为 $0.5(P_D-P_S)(Q^*-\bar{Q})=0.5(11.1-8.46)=(12.8-11)=2.38$。在此，$P$ 乘以 Q 的单位是百万美元。这样，福利损失的估计值①是 24 亿美元，这个值可用来与从控制排放中所得到的好处相比较。

损失的分配。 在汽车的例子中，福利损失在消费者与生产者之间平均分配。消费者损失估计为 $0.5(P_D-P^*)(Q^*-\bar{Q})=0.5(11.1-9.87)(12.8-11)=1.11$，而生产者的损失为 $0.5(9.87-8.46)(12.8-11)=1.27$。由于需求的价格弹性比供给的价格弹性（在绝对值上）略大一些，这样消费者的损失就比一半略少，而生产者的损失比一半略大。对于有更大价格弹性的需求曲线，消费者所承受的损失份额更小。

请回答： 来自数量限制的总福利损失的大小怎样由供给与需求的弹性决定？是什么决定了损失的分配？

11.2 价格控制与短缺

有时候，政府可能会寻求把价格控制在均衡价格以下。尽管采用这样的政策可能是基于好的动机，但是，控制却会抑制长期供给，并且对消费者与生产者都会造成福利损失。图 11.2 对这种可能

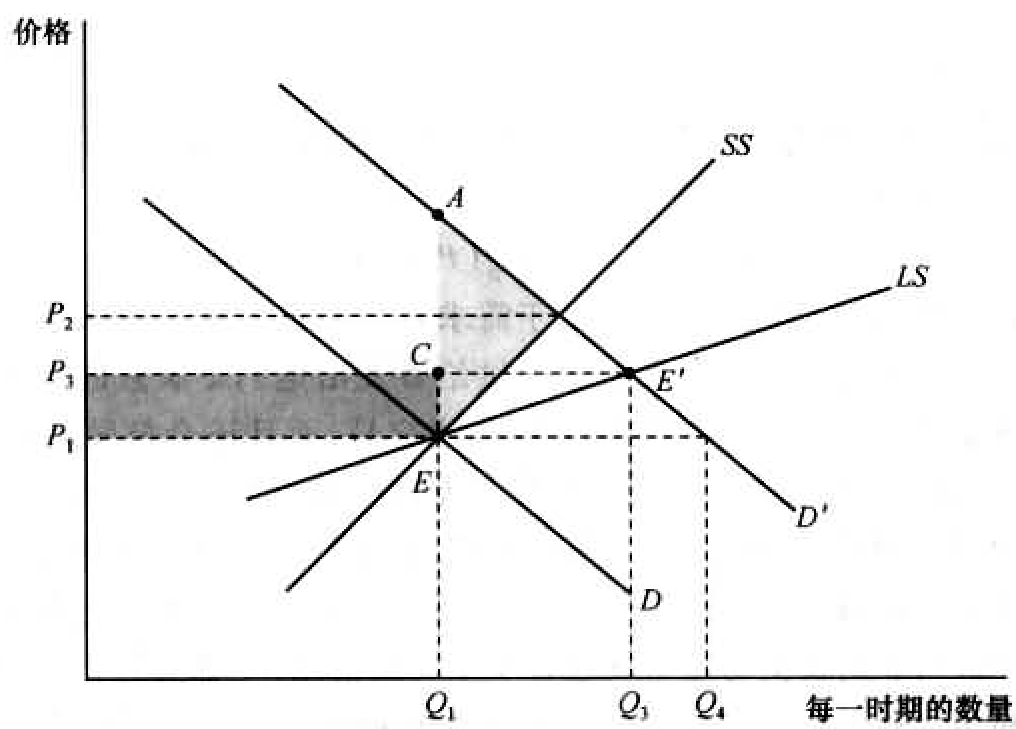


图 11.2 价格控制与短缺

在短期，当需求从 D 移到 D' 将使价格升到 P_2。在整个长期，新厂商的进入产生了最后的均衡（P_3，Q_3）。把价格控制在 P_1，有一 Q_4-Q_1 的短缺。相对于没有价格控制，产生了一个从生产者向消费者的转移（区域 P_3CEP_1），产生了两个区域 $AE'C$ 与 $CE'E$ 的交易无谓损失。

① 关于损失的更为准确的估计可以通过把 $Q=11$ 到 $Q=12.8$ 这段范围上的 P_D-P_S 加总起来得到。在指数需求曲线与供给曲线的情况下，加总通常相当简单。但在现在的例子中，这种方法可以得到福利损失的估计值为 2.28，因此表明，即使对于相对较大的价格变化，三角形的估计还是可以的。所以，在以后的分析中，我们将使用这样的估计。

性作了简单的分析。市场最初在(P_1,Q_1)(点E)处于长期均衡。需求从D到D'的增加使价格在短期上升到P_2,由此也鼓励了新厂商的进入。假定这个市场的特征是成本递增的(就像由有正斜率的长期供给曲线LS所反映的情况那样),那么,作为这些新厂商进入的结果,价格会有所下降并最终到达P_3这个水平。如果这一价格变化并非是期望之中的,那么,原则上政府就会通过强加一个有法律约束力的价格上限来加以限制。这会引起厂商继续在其先前的产出水平Q_1上提供产出,由于在P_1上,需求者现在想要购买的数量为Q_4。那么,这就会存在一个大小为Q_4-Q_1的短缺。

11.2.1 福利估价

上述价格控制政策的福利结果可以通过把有控制政策情况下消费者剩余与生产者剩余的指标与没有实施控制时的同类指标进行比较来加以估价。第一,Q_1的买主获得由面积P_3CEP_1确定的消费者剩余,这是由于,他们可以用比未受控制市场上可能存在的价格还要低的价格购买商品。当前的消费者从较低的价格上所得到的,就是生产者所失去的。尽管这种转移并不表示整个福利的损失,但它显然影响了市场参与者的相对福利。

第二,面积$AE'C$代表了在没有控制时可以得到的其他消费者剩余的值。同样,面积$CE'E$也反映了在未受控制的情形中可以得到的其他生产者剩余。把它们放在一起,这两块面积(即面积$AE'E$)之和就代表了政府控制价格的政策所阻碍的、具有共同利益的交易的总值。因此,这也是该政策的纯福利成本的一个测度。

11.2.2 非均衡行为

在图11.2中所描述的福利分析也提出了某些可能会被认为是价格控制政策结果的行为类型。假定所观察的市场结果可以由下式得到

$$Q(P_1) = \min[Q_D(P_1), Q_S(P_1)] \tag{11.7}$$

那么,供给者会对这种结果表示满意。然而,由于需求者会被迫接受过度需求的状况,所以,需求者不会满意。他们会有一种激励去通过增加报价向供给者发出他们不满意的信号。这种报价可能不仅仅会诱使现有的供给者以高于允许的价格进行非法交易,而且还会鼓励新的进入者也做这种交易。正是由于这种行为的存在,在大多数实行价格控制的情况下都导致了黑市的流行。对交易的产生进行建模是困难的,原因有二。第一,由于每一次交易的价格一定是个别撮合,而不是由"市场"确定的,所以,一定包含着非价格接受者的行为。第二,由于任何一对市场参与者通常并不知道其他的交易者正在做什么,所以,非均衡交易通常就包含了不完全信息,尽管交易行动会通过改变可得到的选择而影响他们的福利。在运用博弈论方法来对这种非均衡行为进行建模方面已经取得了一些进步(参见第15章)。但除了可以明确预料到交易的价格水平会在限制价格之上外,还没有得到非常一般性的结论。[1] 进行黑市交易的类型将由具体情形中特定的制度细节决定。

---

① 参见 J. Benassy, "Nonclearing Markets: Microeconomic Concepts and Macroeconomic Applications", *Journal of Economic Literature* (June 1993), 732—761。

11.3 税收负担分析

竞争市场的局部均衡模型也被广泛地应用于研究税收影响上。正如我们将要指出的，尽管这些应用必然受到其不能应用于多市场的税收效应分析的限制，但是，它们确实对研究许多问题提供了重要的信息。

11.3.1 数学模型

运用在第15章中建立的关于供求的数学模型，可以很容易地研究税收效应。不过，现在我们需要在由需求者所支付的价格(P_D)和由供给者收到的价格(P_S)之间作一点区分：每一单位的税收都在上述两个量之间打进了一个"楔子"

$$P_D - P_S = t \tag{11.8}$$

或者，在价格轻微变化的条件下，我们希望考察

$$\mathrm{d}P_D - \mathrm{d}P_S = \mathrm{d}t \tag{11.9}$$

要使市场均衡成立，要求有

$$\mathrm{d}Q_D = \mathrm{d}Q_S$$

或

$$D_P \mathrm{d}P_D = S_P \mathrm{d}P_S \tag{11.10}$$

这里，D_P，S_P 是从需求函数与供给函数中各自推出的价格。运用方程11.9与11.10，我们可以求出税收对 P_D 的影响

$$D_P \mathrm{d}P_D = S_P \mathrm{d}P_S = S_P(\mathrm{d}P_D - \mathrm{d}t) \tag{11.11}$$

因此，有

$$\frac{\mathrm{d}P_D}{\mathrm{d}t} = \frac{S_P}{S_P - D_P} = \frac{e_S}{e_S - e_D} \tag{11.12}$$

这里，e_S 与 e_D 分别代表供给与需求的价格弹性，并且，后一个方程是通过分子与分母各乘上 P/Q 推出的。关于供给价格的相应推导也可得出类似的方程

$$\frac{\mathrm{d}P_S}{\mathrm{d}t} = \frac{e_D}{e_S - e_D} \tag{11.13}$$

由于 $e_D \leqslant 0$，$e_S \geqslant 0$，于是，上述计算就带来了明显的结果

$$\frac{\mathrm{d}P_D}{\mathrm{d}t} \geqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}P_S}{\mathrm{d}t} \leqslant 0 \tag{11.14}$$

如果 $e_D = 0$（需求是完全缺乏弹性的），就有 $\mathrm{d}P_D/\mathrm{d}t = 1$，每一单位的税收完全由需求者支付。而如果 $e_D = -\infty$，则 $\mathrm{d}P_S/\mathrm{d}t = -1$，税收则全部由生产者支付。更为一般化地，用方程11.13除以方程11.12，得到

$$-\frac{\mathrm{d}P_S/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}P_D/\mathrm{d}t}=-\frac{e_D}{e_S} \tag{11.15}$$

这表明(在绝对值上)弹性反应较低的当事人将承受由税收引起的绝大部分价格上的变化。

11.3.2 福利分析

图 11.3 对税收负担问题作了一个简化的福利分析。征收单位税,就是在供求曲线之间打进了一个纵向的楔子,交易量也随之下降到 Q^{**}。需求者遭受消费者剩余上的损失,大小等于面积 P_DFEP^*,其中 P_DFHP^* 这一部分作为总税收收益的一部分转移到了政府。总税收收益的剩余部分(P^*HGP_S)由生产者支付,他们遭受了生产者剩余上的损失,总量等于面积 P^*EGP_S。请注意,消费者剩余与生产者剩余总和的减少超过了由面积 FEG 确定的总税收收益。由于某些有共同利益的交易被税收所抑制,所以,这块面积代表了由此产生的“总”的损失。通常,在图 11.3 中说明的所有这些面积的大小都会受到所涉及的价格弹性的影响。为了决定生产者税收份额的最终负担,需要对投入品市场进行一个明确的分析——对于那些供给相对缺乏弹性的投入品,税收负担会反映在租金的减少上。对于更一般的情形,需要用到能够同时处理多个市场的一般均衡模型,下一章我们再介绍它。

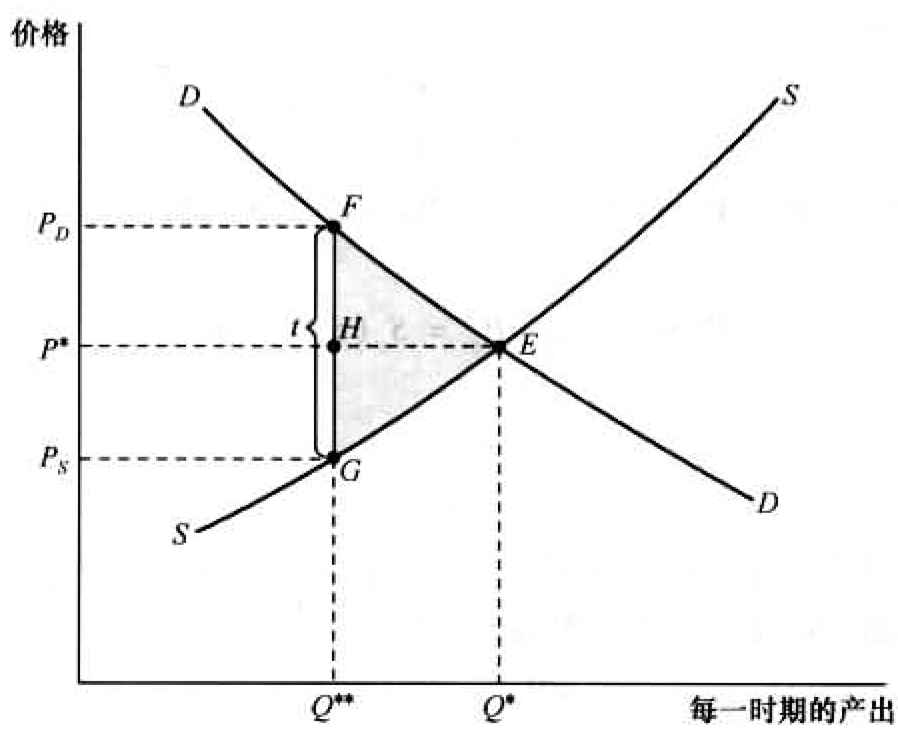


图 11.3　税收负担分析

每个单位都征收一个特定数量的税收会在消费者支付的价格(P_D)与供给者所收到的价格(P_S)之间打入一个“楔子”。消费者与生产者支付税收的程度由供求价格弹性决定。

11.3.3 无调损失与弹性

由于所有非一次总付的税收都会改变经济当事人的行为,所以,它都会带来前述的净值损失。这些损失的大小以一种相当复杂的方式由市场上的供求弹性决定。对应于一个小量税收 dt 的无谓损失,其线性估计由下式确定

$$DW = -0.5(dt)(dQ) \tag{11.16}$$

不过，根据弹性的定义，我们知道

$$dQ = e_D dP_D \cdot Q_0/P_0 \tag{11.17}$$

这里，Q_0 和 P_0 分别是税前数量与价格的值。把方程 11.17 与 11.12 合并，有

$$dQ = e_D[e_S/(e_S - e_D)]dtQ_0/P_0 \tag{11.18}$$

并将之代入方程 11.16 就得到关于无谓损失的最终表达式

$$DW = -0.5\left(\frac{dt}{P_0}\right)^2[e_D e_S/(e_S - e_D)]P_0 Q_0 \tag{11.19}$$

显然，在 e_D 或 e_S 为零的情况下，由于税收并不改变商品交易的数量，所以无谓损失为零。更为一般地，在 e_D 或 e_S 不大的情况下，无谓损失也较小。原则上，方程 11.19 可以被用来估计与任何复杂的税收制度相对应的无谓损失。这种信息就对如何设计一个税收制度，以便在得到所需要的税收收益时使总的"过度负担"达到最小这样的问题提供了依据。

例 11.2

税收导致的无谓损失

在例 11.1 中，我们研究了汽车的销售从均衡水平的 1280（万辆）被削减到 1100（万辆）时，消费者剩余与生产者剩余所发生的损失。一辆汽车征税 2640 美元，由于在供求价格之间打入了先前计算过的楔子，就发生了上面所说的减少。在例 11.1 中，$e_D = -1.2$，$e_S = 1.0$，最初在汽车上的花费大约为 1260 亿美元，这样，由方程 11.19 算出的由于汽车税所带来的无谓损失就是

$$DW = 0.5\left(\frac{2.64}{9.87}\right)^2(1.2/2.2)(1260) = 24.6 \tag{11.20}$$

这个 24.6 亿的损失大致等于在例 11.1 中计算的由于控制排放所带来的损失。它可以与总的税收收益相对照，本例中是 290 亿美元（等于每辆汽车 2640 美元乘以在税后均衡时的 1100 万辆）。在此，无谓损失大约等于总税收收益的 8%。

边际负担。汽车税收的逐渐增加在无谓损失的意义上会使成本相对更高。假定政府决定干脆把每辆车的汽车税统一向上提升到 3000 美元。在这种情况下，汽车销售会大致下降 1070（万辆）。税收收益为 321 亿美元，会比先前计算的多 31 亿美元。根据方程 11.20，现在的无谓损失为 31.7 亿美元——比低税收时遭受的无谓损失高 7.1 亿美元。于是，在边际上，额外的无谓损失大约是税收收益的 23%（=0.72/3.1）。这样，计算的边际过度负担与平均过度负担就会相当不同。

请回答：你能凭直觉解释为什么税收的边际负担超过了平均负担吗？在什么情况下，税收的边际过度负担会超过额外的税收收益？

11.3.4 交易成本

虽然我们是在税收的影响理论方面发展了这一讨论，但是，包含了在买主价格与卖主价格之间

存在一个楔子的模型在经济学中却有许多应用。或许这些应用中最重要的一个是研究与市场交易相关的成本。在有些情况下,这些成本是明显的。例如,大多数房地产交易都是通过第三方经纪人进行的,经纪人会因其在买卖双方之间进行撮合而收取费用。在股票与债券、轮船与飞机的交易中,以及实际上通过拍卖销售的每一件商品,都会发生类似的、明显的交易成本。在所有这些情况中,买主与卖主都愿意向促进了交易的代理人或经纪人支付明确的成本。但在其他的例子中,交易成本可能在很大程度上是隐性的。例如,当一个人要买一辆二手车时,他们就要花费许多时间和努力去阅读报纸上的分类广告,去查看那些车辆,这些行动都会形成交易的隐性成本。

只要交易成本是以单位商品为基础征收的(正如我们在房地产、证券与拍卖的例子中所指出的),我们前面关于税收的例子就刚好适用。从买主与卖主的观点看,t 是代表对每单位商品征收的税收,还是每单位的交易费用并无区别。这是因为,关于这些费用对市场影响的分析是相同的。也就是说,费用会由买主与卖主双方分担,双方的分担额由各自特定的弹性大小来决定。如果不存在这种费用,交易量会较低。[①] 然而,如果每个交易的交易成本是一次总付的话,那么,就会出现一个稍有不同的分析。在个人寻求去减少交易次数的情况下,存在收费并不会影响供求均衡本身。例如,驾车去超级市场的成本主要是用于购买杂物时需一次性支付的交易费用。这种费用的存在可能并不会显著影响食品价格或是食品被消费的数量(除非它会诱导人们自己去生产),但该成本却会让人们减少购物的次数,每一次购买较多的数量,在家中保有比没有这种成本时更多的食品储备。

11.3.5 对交易特征的影响

更为一般地,税收或交易成本可能会比其他因素更能影响交易的特征。在正式的模型中,我们假定这些成本只与销售商品的实物数量有关。因此,使供给者与需求者双方成本最小的愿望会使他们减少交易量。当交易涉及某些方面(譬如质量、风险或时间)的时候,税收或交易成本可能会影响这些方面的一部分或是全部。影响的程度取决于由交易成本得以估价的准确基础。例如,按数量征税可能会使厂商提高产品质量,或者,以信息为基础的交易成本可能会鼓励厂商去生产那些低风险但标准化的商品。同样,按交易次数支付的成本(去商店的交通费)会让人们去进行次数较少但数量更大的交易(并保有较大的储备)。显然,进行这些不同替换的可能性由交易的特定环境决定。在以后的章节中,我们还将考察几个由成本引致的交易特征变化的例子。[②]

11.4 贸易限制

在国际商业中,对于商品流动的限制与我们刚刚研究过的税收的情况有类似的效应。对自由贸易的阻碍可能会减少具有互利性的交易,并在有关的不同当事人之间引起许多转移。为了研究这些

---

① 上述分析并未考虑经纪人可能得到的好处。在经纪人的服务对交易当事人有价值的意义上,需求与供给曲线会向外移动以反映这种价值。这样,尽管这种服务的费用会继续在买主价格和卖主价格之间打入一个楔子,但交易量实际上就随着能促进交易的服务的可获得性而扩张。

② 关于这一主题的一般性处理,参见 Y. Barzel, "An Alternative Approach to the Analysis of Taxation", *Journal of Political Economy* (December 1976), 1177—1197。

效应，可以再次反复使用供求的竞争模型。

11.4.1 国际贸易所得

图 11.4 中说明了对于国内某种特定商品，比如说，鞋的供求曲线。在没有国际贸易时，国内的均衡价格为 P^*，均衡数量为 Q^*。虽然这种均衡会使国内的鞋业生产者与国内消费者之间所有的具有互利性的交易不复存在，但如果进行国际贸易就还有其他的机会。如果世界上鞋的价格为 P_W，低于当前国内的价格 P^*，那么，贸易的开放就会使价格下降到世界市场的水平。[①] 价格的下降会引致需求量增加到 Q_1，同时国内的供给量下降到 Q_2。鞋的进口量为 Q_1-Q_2。简言之，国内鞋业生产者在世界市场价格下不愿提供的数量由外国生产者填补了。

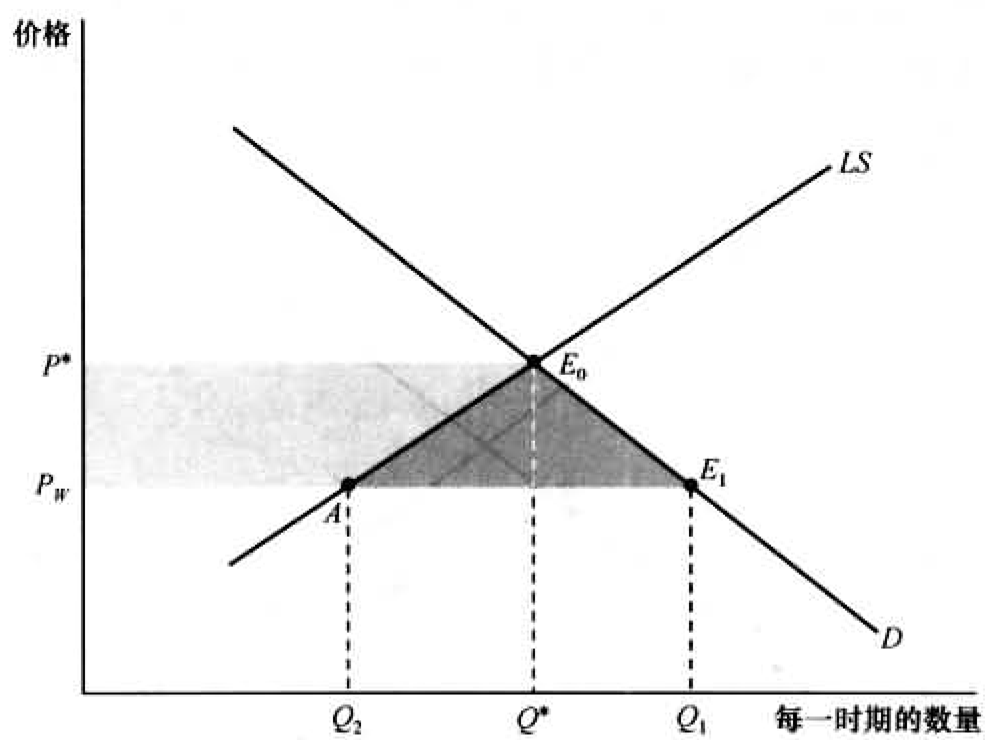


图 11.4　开放国际贸易会增加总福利

开放国际贸易可以使价格从 P^* 降低到 P_W。在 P_W 上，国内生产者供应 Q_2，而需求者购买 Q_1，进口的数量为 Q_1-Q_2。较低的价格会导致从国内生产者到消费者的一个剩余转移（浅阴影区），使消费者剩余有一净增加（深阴影区）。

市场均衡从 E_0 到 E_1 的移动引起了消费者剩余的大量增加，其大小由面积 $P^*E_0E_1P_W$ 给定。这个收益的一部分反映为来自国内鞋业生产者的一个剩余转移（面积 $P^*E_0AP_W$），而另一部分代表了明确的福利增加（面积 E_0E_1A）。此时，消费者收益的来源是显而易见的——买主以比先前在国内市场上可以得到的价格还要低的价格买到鞋。同我们关于税收的分析一样，生产者剩余的损失由那些使长期供给曲线具有正斜率的投入所承担。例如，如果制鞋工人的工资随行业产出的扩张而增加的话，那么，国内鞋业就会面临成本递增的现实，而作为贸易的结果，产量从 Q^* 下降到 Q_2 就会使这一过程倒过来，使制鞋工人的工资下降。

---

① 在整个分析中，我们都假定该国在世界市场上是一个价格接受者，并且能够购买所有在不影响价格的情况下它愿意进口的数量。关于对有正斜率的进口供给曲线的分析，请参见本章练习题 11.10。

11.4.2 关税保护与贸易的政治学

制鞋工人不可能对鞋的进口而导致的工资损失忍气吞声。相反,他们会向政府施压以寻求保护并抵制大量的进口鞋。由于生产者剩余上的损失只是由相对不多的人所承受,而消费者从贸易中的所得却扩散到许多买鞋的人手中,所以,制鞋工人会有相对于消费者来说更大的激励要组织起来反对鞋的进口,而后者则愿意保持贸易开放。这个结果可能就是保护主义会采取的手段。

在历史上,已经被采用的最为主要的保护形式是关税,即对进口商品开征的税收。在图 11.5 中显示了这样一个税收的效应。现在,就将它与自由贸易均衡 E_1 作一比较。按对鞋的进口数量征收关税,如果数量为 t,国内买主面对的有效价格就被提高为 $P_W+t=P_R$。这个价格的上升引起了需求量从 Q_1 下降到 Q_3,同时,国内的生产从 Q_2 扩张到 Q_4。鞋的进口总量也从 Q_1-Q_2 下降到 Q_3-Q_4。由于每双进口鞋现在都要上关税,那么,总关税收益就由面积 BE_2DC 决定,大小为 $t(Q_3-Q_4)$。

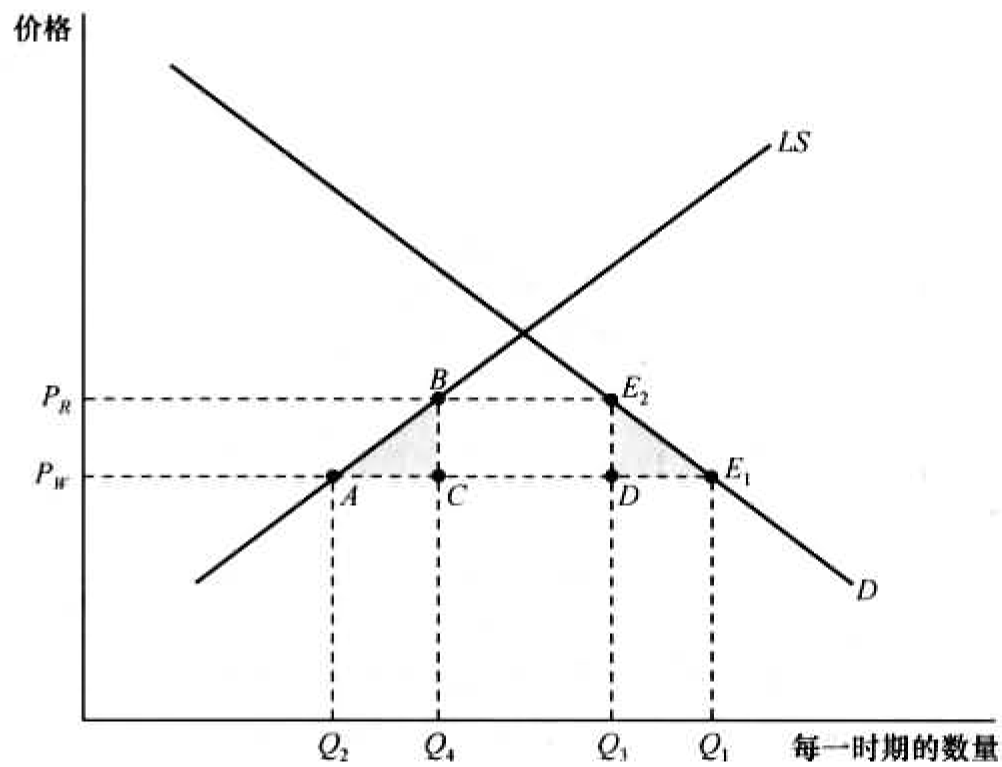


图 11.5　关税的效应

征收数量为 t 的关税会使价格上升到 $P_R=P_W+t$。这会得到一个关税收益(面积 BE_2DC)、从消费者到生产者的一个剩余转移(面积 P_RBAP_W)以及测度无谓损失的两个三角形(阴影区域)。配额也会产生类似的无谓损失,但不会有收益产生。

对进口鞋征收关税产生了许多福利效应。总消费者剩余减少了面积 $P_RE_2E_1P_W$。正如我们所看到的,其中的一部分被转化成了关税收益,而另一部分转为国内生产者剩余的增加(面积 P_RBAP_W)。两个三角形 BCA 与 E_2E_1D 代表了没有被转嫁给任何人的消费者剩余的损失;这些就是来自于关税的无谓损失,它们也类似于由任何税收所施加的过度负担。如果可以对国内部门进口商品的供求弹性作出准确的经验估计的话,所有上面提到的面积的大小都可以得到测度,我们将说明这一点。

11.4.3 无谓损失的定量估计

我们可以很容易计算出图 11.5 中福利损失三角形的大小。由于 $P_R=(1+t)P_W$,所以,由价格

上升而引致的需求量上按比例的变化由下式确定

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_1} = \frac{P_R - P_W}{P_W} \cdot e_D = te_D \tag{11.21}$$

而三角形 E_2E_1D 的面积为

$$DW_1 = 0.5(P_R - P_W)(Q_1 - Q_3) = -0.5t^2 e_D P_W Q_1 \tag{11.22}$$

同样,由面积 BCA 表示的消费者剩余上的损失为

$$DW_2 = 0.5(P_R - P_W)(Q_4 - Q_2) = 0.5t^2 e_S P_W Q_2 \tag{11.23}$$

请注意,DW_1 与 DW_2 的值都是关税率(t)的凸函数,两者都取决于总收益的初始值。当进口最初占有国内市场很大份额,并且 e_D 与 e_S(绝对值)大小差不多时,这就告诉我们,DW_1 一般会是两块无谓损失中较大的一个。有时,相对于转移给生产者的剩余总量(面积 P_RBAP_W)它们可能不算小。由此,相对于所产生的产出收益值,会导致关于某些关税"成本"的相当大的估计。

11.4.4 其他形式的贸易保护

通过调整,我们在图 11.5 中已建立的关税模型可以说明很多其他形式的限制。把进口限制到 $Q_3 - Q_4$ 的配额可能会具有与在图示中表示的情况非常类似的效应:市场价格会上升到 P_R;会大量产生从消费者到国内生产者的剩余转移(面积 P_RBAP_W);也会存在由三角形 BCA 与 E_2E_1D 表示的无谓损失。不过,在配额情况下,政府得不到什么收益,所以,由面积 BE_2DC 表示的消费者剩余一定转化到了其他地方。它可能会被进口许可证的持有者获得,也可能被外国生产者获得,这取决于配额权利如何分配。检查或检验要求等非数量性限制也会增加成本与拖延时间,这可以看做是对进口的"隐性"关税。对图 11.5 稍加修改就可以说明这种对于国际贸易来说很流行,但代价高昂的限制的效应。

例 11.3

贸易与关税

可以用我们关于汽车市场的简化模型来说明贸易政策的不同方面。同我们先前表示的一样,需求函数为

$$Q_D = 200P^{-1.2} \tag{11.24}$$

供给函数为

$$Q_S = 1.3P \tag{11.25}$$

国内市场有一长期均衡为

$$P^* = 9.87 \qquad Q^* = 12.8 \tag{11.26}$$

如果汽车可以以9(千美元)的价格在世界市场上买到,那么,需求就会扩张到 $Q_D = 14.3$,同时,国内供给将收缩到 $Q_S = 11.7$。于是,进口数量为 260 万辆汽车。正如我们在图 11.4 中所看到的,由于可以得到进口车,消费者会得到很大的好处(消费者剩余会扩张到大约 118 亿美元),尽管这些好处的相当一部分(107 亿)反映为从国内生产者到消费者的一个剩余转移。

关税效应。如果来自国内生产者的压力让政府采取征收关税的政策，比如说每辆征收 500 美元，这就会使进口汽车的价格上升到 9 500 美元，需求量会收缩（到 13.4），国内供给会扩张（到 12.4），进口量收缩到 1（百万辆）汽车。这些变化的福利效应可以被直接计算出来，或者可以由方程 11.22 与 11.23 的表达式来大致估计。直接计算的 DW_1 为①

$$DW_1 = 0.5(0.5)(14.3 - 13.4) = 0.225 \tag{11.27}$$

对于 DW_2，计算为

$$DW_2 = 0.5(0.5)(12.4 - 11.7) = 0.175 \tag{11.28}$$

这样，由关税（4 亿美元）所带来的总的无谓损失就大约等于总的关税收益（5 亿美元）。

配额的效应。100 万辆汽车的进口配额同征收每辆 500 美元关税会有同样的效应。它们都会使均衡价格上升 500 美元，并从国内消费者向国内生产者有一个不小的剩余转移。4 亿美元的总的无谓损失也与以前相同。不过，现在没有了关税收入。消费者剩余上的 5 亿美元损失转移到拥有进口汽车权利的某些人手中。由于进口一辆汽车的权利值 500 美元，看上去很可能会使人们为了获得这些权利而乐此不疲。

请回答：在本例中作为汽车关税或配额的结果，从消费者手中到生产者手中总的剩余转移是多少？谁最终得到了这些转移的剩余？

小　结

在本章，我们说明了竞争模型可以被用来研究更广泛的经济行为与经济政策。从这些应用中得出的一般性的结论包括：

- 消费者剩余与生产者剩余的概念对于分析经济变迁对市场参与者福利的效应很有用。消费者剩余的变化代表了消费者从消费某一特定商品中所得到的总效用的变化。长期生产者剩余的变化代表了生产投入所得到的收益上的变化。
- 价格控制可能导致了厂商和用户的福利转移，也可能限制了本该有利于厂商和用户的交易。
- 税收负担分析涉及了经济主体最终对一种税收所承受的负担的决定。通常，这种负担会主要落到那些表现出对于价格变化回应缺乏弹性的主体身上。这种负担除了包括收税者所实际得到的税收收益外，还包括由“过度”负担构成的无谓损失。
- 有时交易成本可以同税收一样来建模。税收与交易成本都会影响交易特征，而这些特征由引致成本的基础决定。
- 诸如关税或配额等贸易限制既会在消费者与生产者之间产生剩余转移，也会导致经济福利的无谓损失。当许多形式的贸易限制与按商品数量征收关税的情况相当时，可以建立模型来说明这些限制的效应。

① 由于此处的关税大约为 $t = 0.055$，方程 11.22 得到一个关于 DW_1 的大概值为 0.234，同时，方程 11.23 表示 $DW_2 = 0.159$。估计无谓损失大约为 4 亿美元。

练 习 题

11.1 假定对菜花的需求为

$$Q = 1\,000 - 5P$$

这里，Q 是用 100 蒲式耳来测度的每年的需求量，P 是用美元测度的每 100 蒲式耳的价格。菜花的长期供给曲线为

$$Q = 4P - 80$$

a. 请说明此处的均衡数量为 $Q = 400$。在这个产出量上，均衡价格是什么？在菜花上的总支出是多少？在此均衡点上消费者剩余有多少？生产者剩余有多少？

b. 如果 $Q = 300$，而不是 $Q = 400$，消费者剩余与生产者剩余总共会损失多少？

c. 请说明在 b 中所描述的消费者剩余与生产者剩余总和的损失是怎样由菜花的销售价格决定的。如果 $P = 140$，损失会怎样分配？而 $P = 95$ 呢？

d. 如果 $Q = 450$，而不是 $Q = 400$，那么，消费者剩余与生产者剩余的损失总和又是多少呢？请说明这种总损失的大小同样也是菜花销售价格的决定因素。

11.2 手制鼻烟盒行业由 100 家同样的厂商组成，每一个厂商的短期成本曲线为

$$STC = 0.5q^2 + 10q + 5$$

并且短期边际成本为

$$SMC = q + 10$$

这里，q 是鼻烟盒的日产量。

a. 每个鼻烟盒生产者的短期供给曲线是什么？市场作为一个整体的短期供给曲线是什么？

b. 假定对于鼻烟盒总产出的需求是

$$Q = 1\,100 - 50P$$

在此市场上，均衡点在哪里？每个厂商的总的短期利润是什么？

c. 请画出市场均衡曲线图，并计算出本题中短期总的生产者剩余。

d. 请说明，你在 c 中计算出的总生产者剩余等于总的行业利润加上行业在短期的不变成本。

11.3 完全竞争性的录像带复制业由许多厂商构成，每个厂商每天会以每盘 10 美元的平均成本复制 5 盘。每个厂商也一定要向电影厂商付版税，并且每部电影的版税率（r）为行业总产出（Q）的增函数，有

$$r = 0.002Q$$

需求为

$$Q = 1\,050 - 50P$$

a. 假定行业处于长期均衡，那么，复制录像带的均衡价格与均衡数量各是多少？会有多少录像带厂商？每部电影的版税率会是多少？

b. 假定关于录像带复制的需求变化如下

$$Q = 1\,600 - 50P$$

那么，复制录像带的长期均衡价格与均衡数量会是多少？会有多少录像带厂商？每部电影的版税率是多少？

c. 请画出在录像带市场上的这种长期均衡曲线图，计算在 a 和 b 中所描述的情况中生产者剩余的增加。

d. 请说明生产者剩余的增加恰好等于随着 Q 从 b 中的水平渐渐增加到 c 中的水平所要付的版税率的增加额。

11.4 请重新考虑一下练习题 11.1 中描述的菜花市场。

a. 假定菜花的需求向外移动到

$$Q = 1\,270 - 5P$$

该市场上新的均衡价格与均衡数量是多少？

b. 在此市场上新的消费者剩余与生产者剩余的水平是多少？

c. 假定政府不允许菜花的价格高于练习题 11.1 中的均衡水平。请描述在 b 中的消费者剩余与生产者剩余的值会怎样得到重新配置，甚至完全损失。

11.5 再次回到练习题 11.1 中描述的菜花市场。假定政府对每 100 蒲式耳菜花要征收 45 美元的税收。

a. 在菜花市场上，这种税收会对市场均衡产生什么影响？

b. 这种税收负担会怎样在菜花的卖者与买者之间分担？

c. 这种税收的过度负担是多少？

d. 假定菜花的需求现在移动到了

$$Q = 2\,200 - 15P$$

对于这个新的需求曲线，请回答 a 与 b 中的问题。

e. 假定现在的菜花市场仍具有练习题 11.1 中所描述的最初的需求曲线，但是供给曲线为

$$Q = 10P - 800$$

请在新的情况下回答本题中的 a 与 b 中的问题。

f. 通过比较我们所研究的菜花市场上税收负担的这三种情况，你能得出什么结论？

11.6 假定政府对在练习题 11.2 中所描述的鼻烟盒行业中的鼻烟盒征收 3 美元的税收。

a. 这种税收会怎样改变市场均衡？

b. 这种税收负担会怎样在鼻烟盒买主与卖主之间分配？

c. 请计算由于鼻烟盒上税，生产者剩余的总损失。并说明这个损失等于鼻烟盒行业总的短期利润的变化。为什么不变成本不会进入到关于短期生产者剩余变化的计算中？

11.7 假定政府对练习题 11.3 中所描述的录像带复制业要按每部影片征收 5.50 美元的税收。

a. 假定对复制录像带的需求仍同于练习题 11.3a 中的情况，这种税收会对市场均衡产生什么影响？

b. 这种税收负担会怎样在消费者与生产者之间分配？消费者剩余与生产者剩余上的损失会多大？

c. 请说明，作为这种税收的结果，生产者剩余的损失完全由电影制作厂商承担。请根据直觉来对此加以解释。

11.8 便携式收音机的国内需求为

$$Q = 5\,000 - 100P$$

这里，价格（P）用美元来测度，数量（Q）由每年生产的数以千计的收音机来测度。收音机的国内供给曲线为

$$Q = 150P$$

a. 在便携式收音机的国内市场上，均衡点在何处？

b. 假定可以以每架收音机 10 美元的世界市场价格进口。并且如果贸易不会受到限制，那么，新的市场均衡点位于何处？会进口多少便携式收音机？

c. 如果国内的便携式收音机生产者成功地寻求到征收 5 美元关税，那么，这将会怎样改变市场均衡？关税收益为多少？多少消费者剩余会转移到国内生产者手中？关税所带来的无谓损失会是多少？

d. 如果政府与外国供应商达成了一项协议，每年会把出口“自愿”限制在 125 万台便携式收音机，那么，你在 c 中得

出的结论将会有什么变化？请解释这与关税的情况有什么不同。

11.9 在例 11.3 中，我们说明了从对进口汽车所征的每辆 500 美元的关税中所带来的无谓损失大致等于所得到的关税收益的量。那么，把关税增加到每辆 600 美元而导致的边际过度负担与所得到的边际关税收益相比会如何？根据直觉解释你的结果。

11.10 在关于关税的研究中，我们假定所研究的国家面对着完全弹性的进口供给曲线。现在，假定该国对进口商品的供给曲线有正斜率。

a. 请从几何上说明进口的水平怎样决定。

b. 运用你在 a 中所画出的图形去证明该市场上的关税效应。

c. 请仔细区分在 b 中由于关税而导致的生产者剩余与消费者剩余的不同变化的来源。

d. 请说明在本题中由于关税而产生的无谓损失将怎样取决于国内生产的商品与进口商品的需求弹性与供给弹性。

推荐阅读文献

Arnott, R. "Time for Revision on Rent Control?" *Journal of Economic Perspectives* (Winter 1995): 99—120

该文提出并解析了"软性"租金控制政策的效应。

Bosworth, B., and G. Burtless. "Effective Tax Reform in Labor Supply, Investments, and Saving." *Journal of Economic Perspectives* (Winter 1992): 3—75。

该文说明了在许多市场上税收效应如何得以模型化。

deMelo, J., and D. G. Tarr. "The Welfare Costs of U.S. Quotas in Textiles, Steel, and Autos". *Review of Economics and Statistics* (August 1990): 489—497。

该文是对一般均衡环境中配额问题的一个很好的研究。该文发现，所研究的配额与大约 20% 的关税率有相同的数量效应。

Salanie, B. *The Economics of Taxation.* Cambridge, MA: MIT Press, 2003.

该文是对一系列和税收相关的问题的一个简单的研究，包含几个研究政策影响的简单模型，以及一些关于税收的一般均衡模型。

第 12 章 一般均衡和福利

我们在第 10 章和 11 章提出的完全竞争市场下的局部均衡模型，用它显然无法分析一个市场发生的变动对其他商品市场引发的全部影响，因而也不可能拿来计算整个经济的福利情况。所以，我们需要一个能够拿来同时研究多个市场的经济模型。本章我们将从一个极其简单的角度来建立这样的一个模型，并拿来分析一些福利问题。在开始前我们必须指出的是：尽管研读完本章后读者确实能够在经济学的理解上迈进一步，但相对于一般均衡分析这个微观经济学中最艰深的一个课题，本章内容只是粗涉皮毛。推荐阅读文献中介绍了一些对该理论更深一步的发展，扩展部分介绍了一般均衡模型在实际中的应用。

12.1 完全竞争的价格体系

在这一章，我们要建立的模型首先是对在第 10 章我们研究过的供求模型作一详尽阐释。在这里，我们假定：所有的市场都处于在那一章所描述的类型，并且，一系列这样的市场构成了一个**完全竞争的价格体系(perfectly competitive price system)**。另外，还假定在这个简单的经济中有大量同质的商品。包括在这大量商品中的，不仅有消费品，还有各种投入品。每一种商品都有一个**均衡价格(equilibrium price)**，它由供给与需求的行为来决定。[①] 在这组价格中，如果供给者愿意供给的数量恰好是需求者所需求的数量，市场在这个意义上就得到出清。我们还假定不存在交易成本或运输成本，并且所有的个人与厂商对于现行市场价格都完全了解。

12.1.1 一价法则

由于假定交易成本为零，并且信息是完全的，所以，每一种商品都遵守一价法则，即无论谁买或无论哪一家厂商出售，同质商品的交易价格都是一样的。如果一种商品以两个不同的价格交易时，需要者就会涌到价格较低的地方购买，厂商也会试图在售价更为昂贵的地方进行销售。这些行动会

① 这种市场相互作用的一个方面应该从一开始就弄清楚。完全竞争市场只决定相对(而非绝对)价格。在本章中，我们首先谈相对价格。苹果与橘子的价格是各自为 0.10 美元和 0.20 美元，还是 10 美元和 20 美元，其实并无差别。在每种情况下的重要之处都是两个苹果能在市场上换一个橘子。在本章的最后一节，我们会简要地研究货币的角色以及绝对价格的决定。

使商品的价格趋于相等。于是,在完全竞争市场上,每一种商品一定只有一个价格。这也就是为什么我们可以毫不含糊地谈论商品的价格而没有任何歧义的原因。

12.1.2 关于完全竞争的假设

完全竞争模型以特定的方式假设消费者及厂商对价格作出反应:

1. 假定任何一种商品都有大量的买主。每个人都把所有的价格看做是既定的,为了效用最大化,在他(她)的预算约束下调整他(她)自己的行为。人们也是生产性劳务的提供者(如提供劳动),在提供劳务的决策中他们也把价格看做是既定的。[①]

2. 假定每一种商品都有大量的厂商在生产,每一个厂商都只在该商品的产出中占一个很小的份额。在进行投入与产出选择时,假定厂商是为利润最大化而经营。在作上述利润最大化决策时,厂商把所有的价格看做是既定的。

由于上述假定贯穿全书,所以读者不该陌生了。本章的目的在于表明,当所有市场都以这种方式运作时,整个经济体系是如何运行的。

12.2 关于一般均衡的简单图形模型

我们将描述一个非常简单的关于一般均衡的图形模型,其中只涉及两种商品,我们称之为 x 与 y。由于这个模型包含了更为复杂的整个经济的一般均衡表达的许多特征,所以,它将被证明是非常有用的。在以后各章需要多市场分析的情况下,我们将广泛地使用这一模型。

12.2.1 一般均衡需求

一个经济中的需求类型最终是由个人偏好决定的。在简单模型中,我们假定所有的个人都有同样的偏好,由关于 x,y 的无差异曲线图[②]表示。从我们的目标看,这种方法的好处是:无差异曲线图(与第 3 章到第 6 章中用过的那些相同)表示了个人怎样对包含两种商品的消费组合进行排序。这些排序很明确地就是我们在一般均衡体系中所谓的"需求"。当然,在知道需求者所面对的预算约束之前,我们实际上不能说明会选择哪一个商品组合。由于当人们向生产过程提供劳动、资本与其他资源时,会相应产生收入;所以,我们必须要把证明推迟到已经在模型中研究了生产与供给的种种力量之后。

12.2.2 一般均衡供给

在这种两个商品的模型中建立一般均衡供给的概念比描述市场的需求方面要更复杂一些,因

---

① 由于一个价格代表工资率,所以现实中的相对预算约束就是一种时间约束。这是我们在第 16 章研究个人的劳动—闲暇选择时的处理方式。

② 在使用单一的无差异曲线图去表示整个群体中成员的偏好时,存在着一些技术性问题。在这样的情况下,边际替代率(即群体无差异曲线的斜率)将由可获得的商品怎样在成员之间分配决定;被要求去补偿一个单位 x 的减少而增加的 y 的总量将由 x 是从哪些人那里被拿走来决定,尽管我们在此不会细致地讨论这一问题,但在国际贸易的文献中,它会被考虑得很多。

为，我们到目前为止并未同时证明两种商品的生产与供给。为了这个目标，我们的研究要运用已熟悉的生产可能性曲线（参见第 1 章）。通过细致考察该曲线得以画出的方式，我们也可以运用这种画法去研究有关的投入与产出市场。

12.2.3 埃奇沃斯矩形图

画出两种产出（x 与 y）的生产可能性曲线要从一个假定开始，该假定为：在两种商品的生产中进行配置的资本投入与劳动投入有一个固定的总量。正如我们在第 8 章关于交换的讨论中所指出的，这些投入的所有可能的配置可以用**埃奇沃思矩形图（Edgeworth Box）**来说明，矩形的纵横坐标分别是可获得的资本数量与劳动数量。

在图 12.1 中，矩形的长度代表总的劳动小时数，高度代表总的资本数。矩形的左下角表示用来测度用于生产商品 x 的资本与劳动投入的“原点”。而右上角则表示用于生产 y 的资源投入的原点。在此种定义下，矩形中的任何一点都满足全部资源在商品 x 与 y 之间已得到完全的运用这个条件。例如，点 A 就表示了用在生产 x 中的劳动小时数与特定的资本数这样一种配置。而“留在上面”的，就是用于生产商品 y 的资源。所以，图 11.2 中的点 A 也表示了用在商品 y 的生产中的准确的劳动数与资本数。矩形中任何其他点也有类似的解释。这样，埃奇沃思矩形图就显示了现有的资本与劳动可能被用在 x 与 y 的生产中的每一种可能的组合。

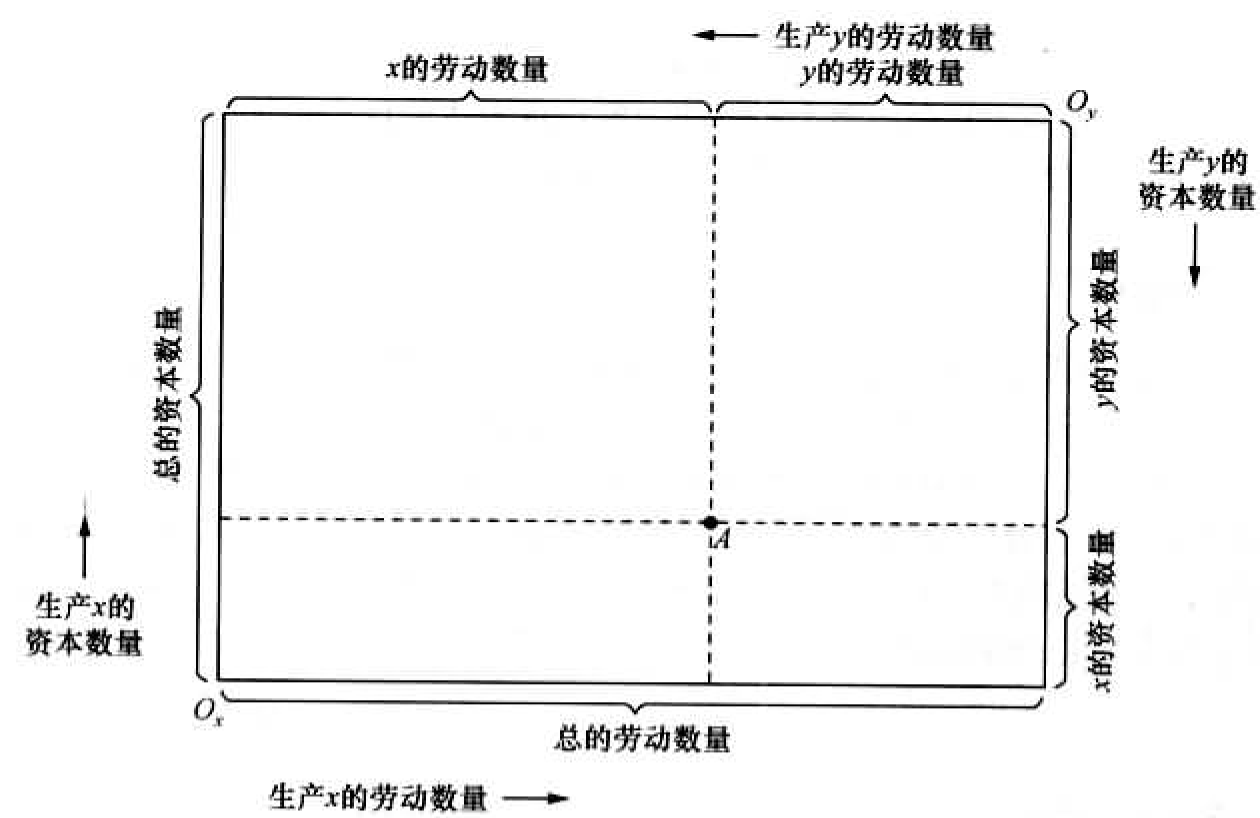


图 12.1　生产的埃奇沃思矩形图的画法

该图的坐标由可获得的劳动总量与资本总量给定。用于生产 x 的这些资源的数量从原点 O_x 来测度；而用于生产 y 的数量从原点 O_y 来测度。矩形中的任何点都代表着把可获得的资源完全配置于两种商品生产中的情况。

12.2.4 有效率的配置

与在第 8 章一样，在图 12.1 中所显示的许多配置方式可能是无效率的，这是由于如果把资本与劳动作些移动可能会生产出更多的 x 与更多的 y。在我们的模型中，我们假定竞争性市场不会呈现出这种无效率的投入选择（其理由我们在下一章会更为详细地研究）。因此，由于有效的资源配置说明了该模型中实际的生产结果，所以，我们会在图 12.2 中找到有效率的配置。为了做到这一点，我们引入对于商品 x（用 O_x 作原点）与商品 y（用 O_y 作原点）的等产量曲线图，如图 12.2 所示。在这个图中，显而易见，任意选择的 A 点所表示的配置是无效率的。

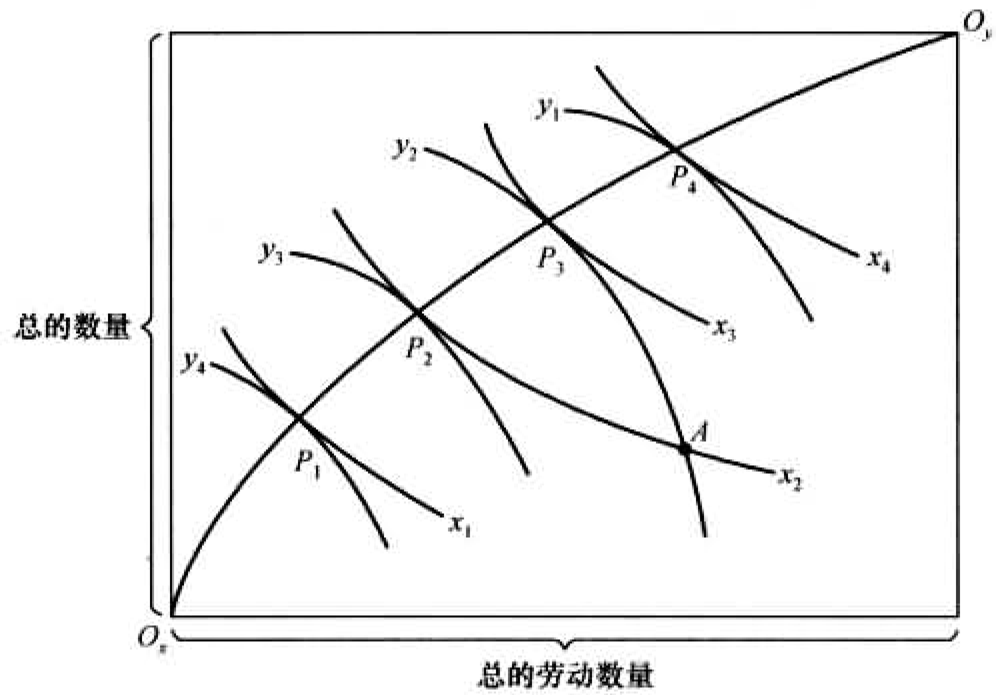


图 12.2　生产效率的埃奇沃斯矩形图

本图在图 12.1 的基础上增加了生产 x 与 y 的等产量线。因此，它显示了把固定数量的 k 与 l 在两种产出的生产中进行技术上有效率的配置方式。连接 O_x 与 O_y 的线是这些有效率的点的轨迹。沿着这条线，生产商品 x 的（l 对 k 的）RTS 与生产 y 的 RTS 是相等的。

在图 12.2 中，有效率的配置是诸如 P_1，P_2，P_3 与 P_4 的那些点，在这些点上，等产量线彼此相切。在矩形图的任何其他点上，两种商品的等产量线是相交的，像 A 点那样很容易证明其无效率。不过，在这些切点之间，则不存在这样显而易见的改进的可能性。例如，从 P_2 到 P_3 的移动，可以使更多的 x 得到生产，但是其代价却是 y 的产出减少了，所以，P_3 并不一定比 P_2"更有效率"——这两点都是有效率的。商品 x 与 y 的等产量线的相切意味着其斜率相等，即在 x 与 y 的生产中资本对劳动的 RTS 是相等的。在下一章，我们将表明竞争性的投入市场会怎样让厂商作出这种有效率的投入选择。

连接 O_x 与 O_y 的曲线包括了所有的这些切点，因此也显示了所有的关于资本与劳动的有效配置。曲线之外的点是无效率的，这在于，改变在两种商品之间的投入可以获得产出上明确的增加。不过，由于对于在 O_xO_y 上的点要生产更多的 x 就只有减少 y 的生产，反之亦然，所以它们是所有有效率的配置。

12.2.5 生产可能性边界

在图 12.2 中的效率轨迹表示了对于任何事先给定的产出 x,可以生产出的 y 的最大产量。我们可以用这个信息来画出**生产可能性边界(production possibility frontier)**,该边界表示用一定总量的资本投入与劳动投入可以生产出的各种 x 与 y 的产出组合。在图 12.3 中,O_xO_y 轨迹是从图 12.2 中得到的,也被转成了以 x 与 y 的产量为轴的图中。例如,在点 O_x 上,在 x 的生产中没有资源投入,这样,y 的产量就是现有资源可生产的尽可能大的产量。类似地,在点 O_y 上,x 的产量也是现有资源可生产的尽可能大的产量。生产可能性边界上的其他点(比如 P_1,P_2,P_3 与 P_4)是以相同的方法从效率轨迹上推出的。因此,我们可以得出下述定义:

定义

生产可能性边界。生产可能性边界表示了如果投入都得到有效的使用,用一定数量的投入可以生产出的两种产出的各种组合。

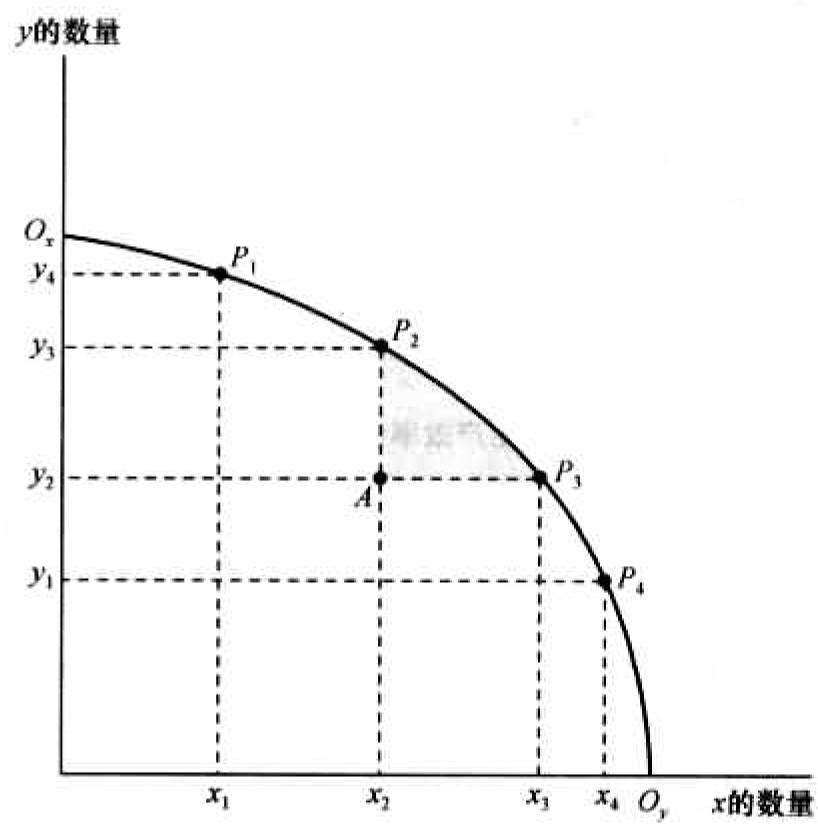


图 12.3　生产可能性边界

生产可能性边界显示了在一定的资源下由一个厂商有效生产 x 与 y 的各种组合。这条曲线可以从图 12.2 中,在保持效率条件不变的情况下通过改变在 x 与 y 的生产中的投入而推导得出。生产可能性曲线的负斜率被称为产品转换率(RPT)。

12.2.6 产品转换率

生产可能性边界的斜率说明了在总资源保持不变的情况下,x 的产量怎样替换 y 的产量。例如,对于在生产可能性边界上靠近 O_x 的点,斜率是一个(绝对值)小的负数,比如 $-\frac{1}{4}$,这意味着减少 1

单位 y 的产出，可以增加 4 单位 x 的产量；另一方面，在靠近 O_y 的点上，斜率是很大的负数，比如说是 -5，这就意味着为了保证多生产出 1 单位的 x，一定要减少 5 单位 y 的产出。因此，生产可能性边界的斜率就明确地表示了在生产中存在的用 y 去替换 x 的可能性。这个负的斜率被称为产品转换率。

定义

产品转换率。在两种产出之间的**产品转换率**（**rate of product transformation，*RPT***）是关于这些产品的生产可能性曲线的负斜率。数学上有

$$(x\text{ 对 }y\text{ 的})RPT=-\text{生产可能性边界的斜率}=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\text{沿 }O_xO_y)\qquad(12.1)$$

RPT 反映了理论上在继续保持有效利用可能的生产性投入的同时，y 的生产怎样可以被 x 的生产替换。

生产可能性边界的形状

在图 12.3 中说明的生产可能性边界显示了一个递增的 *RPT*。对靠近 O_x 的产出水平，为了多获得 1 单位的 x，只需要减少一点点 y（$-\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 较小）。然而在靠近 O_y 的地方，只有大量减少 y 的生产，才可以获得额外的 x（$-\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 较大）。在这一节，我们将说明为什么大部分情况下生产可能性边界确实是凹的。

这个分析的第一步是要认识 *RPT* 等于 x 的边际成本 MC_x 与 y 的边际成本 MC_y 的比率。直观上看，这个结果是显而易见的。例如，假定 x 与 y 只由劳动来生产。如果为了多生产 1 单位的 x 要花费 2 个小时的劳动的话，我们可以说，MC_x 等于 2。同样，如果为了多生产 1 单位的 y 要花 1 小时劳动的话，MC_y 就等于 1。在这种情况下，*RPT* 显然等于 2：一定可以预料得到要增加 1 单位 x 的生产，必须放弃生产 2 个 y 才能提供足够的劳动。因此，*RPT* 事实上就等于两种商品的边际成本之间的比率。

更正式地，假定任何产出组合的成本（比如要素供应者感受到的“非效用”）都可以被表示为 $C(x,y)$。在生产可能性边界上，由于投入的供给上是固定的，所以，$C(x,y)$ 是不变的。因此，我们可以把成本函数的全微分写作

$$\mathrm{d}C=\frac{\partial C}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial C}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y=0\qquad(12.2)$$

对方程 12.2 进行整理，可以得到

$$RPT=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\text{沿 }O_xO_y)=\frac{\partial C/\partial x}{\partial C/\partial y}=\frac{MC_x}{MC_y}\qquad(12.3)$$

该式就是我们所要说明的：*RPT* 是两种商品相对边际成本的一个测度。

为了证明为什么可以期望沿生产可能性曲线顺时针移动 *RPT* 将上升，我们需要从为什么在 x 的产量扩张而 y 的产量收缩时，MC_x 对 MC_y 的比率应上升开始说起。我们首先讨论只适用于特殊情况

的两种相对简单的论点；然后我们再转向更为复杂的一般性论点。

12.2.7 规模报酬递减

生产可能性边界凹状所具有的最为一般的含义是，假定两种商品在收益递减的条件下生产。这样，增加商品 x 的产量将提高它的平均成本，而减少 y 的产量又会降低其边际成本。因此，方程 12.3 表明，沿生产可能性边界从 O_x 向 O_y 移动时，RPT 会增加。当然，与这种解释相关的一个问题是，它只适用于两种商品都显示了规模报酬递减的情况，而由于理论上的原因，在本书的其他章节提及规模收益不变与规模报酬递增的假定下，这一解释将会发生变化。

12.2.8 专业化的投入

如果某些投入相对于 y 的生产，“更适合”用于 x 的生产（反之亦然），也可以很好地解释生产可能性边界的凹性。在此情况下，x 产量的增加就会逐渐要求不那么适于生产该商品的投入进入 x 的生产中来，因此，x 的边际成本会上升。另一方面，随着 y 的产出水平变小，会导致只使用那些最适用于生产 y 的投入，y 的边际成本当然会下降。譬如，这种论点可能更适用于使用不同类型的土地生产不同作物的农夫。在试图增加任何一种作物的生产时，农夫会被迫去增加使用那些不适合生产该作物的土地。虽然这类专业化投入的假定对于解释现实世界中的各种现象很重要，但无论如何它并不符合我们关于投入品同质性的一般假定。所以，它不能作为凹性的一个基本解释。

12.2.9 不同的要素密集型

即便投入是同质的，生产函数也表现出规模收益不变，但是，只要商品 x 与 y 的生产使用了不同比例的投入，生产可能性边界仍会是凹性的。① 例如，在图 12.2 中的生产矩形图中，相对于商品 y，商品 x 是**资本密集（capital intensive）**的。也就是说，在沿着契约曲线 O_xO_y 的每一点上，在 x 的生产中 k 对 l 的比率超过了在 y 的生产中 k 对 l 的比率：弯曲的线 O_xO_y 总是居于埃奇沃思矩形的主对角线之上方。另一方面，如果商品 y 是相对资本密集的，那么，契约曲线 O_xO_y 就会在低于对角线的位置上弯曲向下。尽管不准备在此证明要素密集的不同会导致凹性生产可能性边界，但直观上可能很容易说明这样的原因。请考虑在图 12.3 中边界 O_xO_y 上的两点——比方说 P_1（对应于 x_1 和 y_4）以及 P_3（对应于 x_3 和 y_2）。生产出“居于 P_1 和 P_3 之间”的产出组合的方式之一是生产出组合

$$\left(\frac{x_1+x_3}{2},\quad \frac{y_4+y_2}{2}\right)$$

由于规模报酬不变的假定，该组合是可行的，并且完全利用了两种投入品。该组合位于连接 P_1 与 P_3 两点的直线弦的中点。尽管这一点是可行的，通过研究图 12.2 中的点 P_1 与 P_3 就可以看出，在这一点上是无效率的。由于契约曲线的弯曲性，所以，在 P_1 与 P_3 中点上的生产就会偏离契约曲

① 在同质要素与规模收益不变之外，当最优配置下每种商品也使用相同比例的 k 与 l 时，那么，生产可能性边界就会是一条直线。

线：在譬如 P_2 这样一个点上进行生产可以提供更多的两种商品。因此，图 12.3 中的生产可能性边界就一定会"涨到"直线 P_1P_3 之外。由于在 O_xO_y 上的任何两点都能得到这样一个证明，我们就说明了边界的凹性。也就是说，在商品 x 的产出增加时，RPT 会增加。当产出在沿着契约曲线 O_xO_y 向东北方向重新配置时（在图 12.3 中），在 x 与 y 的生产中的资本—劳动比率就会下降。由于商品 x 是资本密集的，这种变化会提高 MC_x。另一方面，由于商品 y 是劳动密集的，MC_y 会下降。因此，x 的相对边际成本（由 RPT 来表示）就会上升。

12.2.10 机会成本

在这一章中，关于生产可能性边界的概念我们已经谈了很多，其原因是在研究那些由于要同时分析两种商品的生产而带来的各种问题时，它是仅有的最重要的工具。该曲线证明了存在着许多可能的两种商品有效组合，而要多生产些某种商品就必须要削减另外一些其他商品的产量。这恰恰就是经济学家所说的机会成本的含义。在生产可能性边界上的任何一点，生产更多 x 的成本可以最容易地由必须要减少的 y 的产量来测度。因此，多生产一单位 x 的成本可以由在生产可能性边界上当前所处点的（x 对 y 的）RPT 给出最现成的测度。这就是我们对供给概念的一般归纳。

例 12.1

生产可能性边界的凹性

本例中我们研究两个生产函数的典型性质，它们将导致生产可能性边界具有凹性。

规模报酬递减。 假设商品 x，y 都仅需要劳动这一种投入品，且生产函数为

$$x = f(l_x) = l_x^{0.5}$$
$$y = f(l_y) = l_y^{0.5} \tag{12.4}$$

生产函数满足边际收益递减。如果总劳动供给为

$$l_x + l_y = 100 \tag{12.5}$$

这样，生产可能性边界就是

$$x^2 + y^2 = 100, \quad 其中\ x, y \geq 0 \tag{12.6}$$

这样，生产可能性边界是四分之一圆，满足凹性。对其求全微分可计算出 RPT

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0, \quad 或者 \quad RPT = \frac{-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-(-2x)}{2y} = \frac{x}{y} \tag{12.7}$$

RPT 随 x 的产量增加而增加。下面举个例子说明它的凹性：(10,0) 和 (0,10) 两点都在边界上，而它们连线的中点 (5,5) 在边界线之下。如果分配给 x，y 相同的劳动力，两种商品的产量都是 $\sqrt{50}$，都比直线中点的水平要高。

要素密集。 为了表明不同的要素密集类型也会造成生产可能性边界的凹性，我们假设两种商品的生产函数是规模报酬不变，但具有不同系数的科布-道格拉斯函数

$$x = f(k, l) = k_x^{0.5} l_x^{0.5}$$
$$y = g(k, l) = k_y^{0.25} l_y^{0.75} \tag{12.8}$$

假设可动用的资本和劳动被限制为

$$k_x + k_y = 100, \quad l_x + l_y = 100 \tag{12.9}$$

易知

$$RTS_x = \frac{k_x}{l_x} = \kappa_x, \quad RTS_y = \frac{3k_y}{l_y} = 3\kappa_y \tag{12.10}$$

其中 $\kappa_i = k_i/l_i$。位于生产可能性边界上的点满足 $RTS_x = RTS_y$，或 $\kappa_x = 3\kappa_y$。即只要在生产可能性边界上，无论资源总体如何配置，x 都会是资本密集型的商品（因为在某种意义上，资本投入在 x 上比投入在 y 上更具有生产力）。两种商品投入的资本—劳动比率还要受到资源总量的约束

$$\frac{k_x + k_y}{l_x + l_y} = \frac{k_x}{l_x + l_y} + \frac{k_y}{l_x + l_y} = \alpha\kappa_x + (1-\alpha)\kappa_y = \frac{100}{100} = 1 \tag{12.11}$$

其中 $\alpha = l_x/(l_x + l_y)$ 表示总的劳动力投入在生产 x 上的比例。利用条件 $\kappa_x = 3\kappa_y$，我们可以用总劳动投入在两种商品上的比例来表示它们各自的资本—劳动投入比率。

$$\kappa_y = \frac{1}{1+2\alpha}, \quad \kappa_x = \frac{3}{1+2\alpha} \tag{12.12}$$

进一步地，我们就可以以劳动在两种生产中的分配比例为参数，刻画生产可能性边界。

$$\begin{aligned} x &= \kappa_x^{0.5} l_x = \kappa_x^{0.5}\alpha(100) = 100\alpha\left(\frac{3}{1+2\alpha}\right)^{0.5} \\ y &= \kappa_y^{0.25} l_y = \kappa_y^{0.25}(1-\alpha)(100) = 100(1-\alpha)\left(\frac{3}{1+2\alpha}\right)^{0.25} \end{aligned} \tag{12.13}$$

当然我们可以通过代数消元得到生产可能性边界的显函数形式，但是要看出它的凹性，做到这里已经足够。注意当 $\alpha = 0$ 时（即完全不生产 x），产量是 $x = 0, y = 100$；$\alpha = 1$ 时，产量是 $x = 100, y = 0$。如果生产可能性边界是直线，那么应包括其连线中点(50,50)，但是比如说当 $\alpha = 0.39$ 时，

$$\begin{aligned} x &= 100\alpha\left(\frac{3}{1+2\alpha}\right)^{0.5} = 39\left(\frac{3}{1.78}\right)^{0.5} = 50.6 \\ y &= 100(1-\alpha)\left(\frac{3}{1+2\alpha}\right)^{0.25} = 61\left(\frac{1}{1.78}\right)^{0.25} = 52.8 \end{aligned} \tag{12.14}$$

可以看出，实际的生产可能性边界线应该在这条直线之上。要强调的是，这里两种商品的生产函数都是规模报酬不变，而且两种投入品本身都是完全同质的，所以生产可能性边界线的凹性完全是由不同的要素密集造成的。

请回答：在上述两种情况里，若是可调用的劳动力总量增加，生产可能性边界线会如何移动？

12.2.11 均衡价格的决定

在我们简单的有两种商品的经济中，给定这些需求与供给的概念，我们现在就可以说明均衡价格怎样决定了。图 12.4 显示了关于该经济的生产可能性边界 *PP*，无差异曲线集表示了个人对这些商品的偏好。首先，考虑价格比率 p_x/p_y。在这个价格比率上，厂商会选择生产 (x_1, y_1) 的产出组合。利润最大化的厂商会在 *PP* 线上选择更为有利可图的点。在点 (x_1, y_1) 上，两种商品价格的比率等于

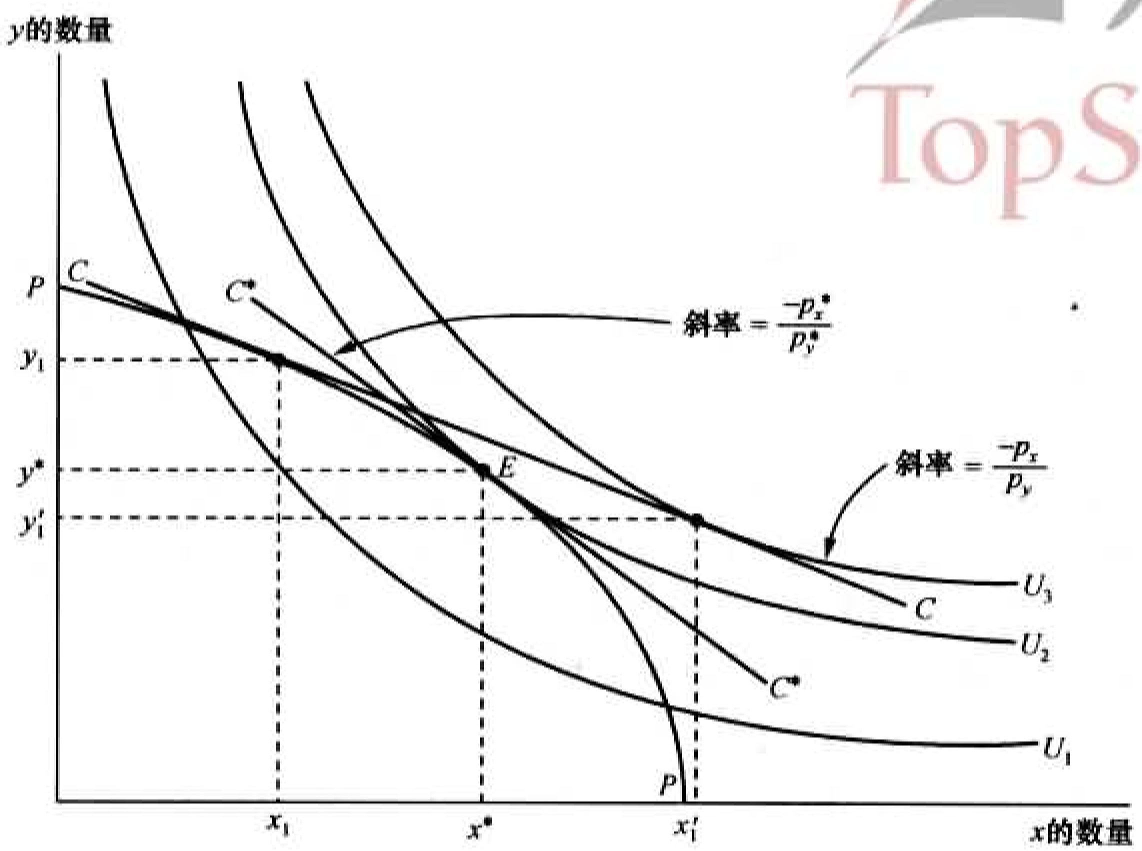


图 12.4　均衡价格的决定

在给定的价格比率 p_x/p_y 下，厂商会生产(x_1，y_1)，社会的预算约束由直线 C 给定。在这个预算约束下，个人需要(x_1'，y_1')；也就是说，存在着对于商品 x 的过度需求 $x_1'-x_1$ 和对于商品 y 的过度供给 y_1-y_1'。市场的运作会把这些价格移到其均衡水平 p_x^*，p_y^*。在这些价格上，社会的预算约束由直线 C^* 给定，供给与需求将处于均衡。厂商与消费者将选择商品组合(x^*，y^*)。

商品边际成本的比率(*RPT*)，所以，在此点的利润实现了最大化。另一方面，在给定的预算约束下(直线 C)[①]，个人的需求是 x_1'，y_1'。结果，在此时的价格下，对于商品 x 存在着过度需求(个人的需要超过了生产出来的产量)，而对商品 y 却存在着过度供给。这样，市场的作用会使 p_x 上升，p_y 下降。价格比率 p_x/p_y 就会上升，从而使价格线更陡。厂商将会沿生产可能性边界顺时针移动以对这些价格变化作出回应。也就是说，它们会增加商品 x 的生产，而减少商品 y 的生产。类似地，个人也会在他们的消费选择中用 y 替代 x 以回应价格的变化。于是，厂商与个人的行动随着市场价格的变化，消除 x 的过度需求与 y 的过度供给。

均衡在点(x^*，y^*)上得以建立，均衡的价格比率为 p_x^*/p_y^*。在这个价格比率下[②]，对于商品 x 与商品 y 的供给与需求都达到了均衡。给定 p_x 与 p_y，厂商就会生产出 x^* 与 y^*，以使其利润最大化。同样，在由给定的预算约束 C^* 下，个人的需求为 x^* 与 y^*。这样，价格制度的运作就会使 x 与 y 的市场同时出清。因此，该图就提供了两个市场一起运作的供求过程的“一般均衡”观点。由于这个原因，在我们以后的分析中还会经常运用本图。

① 认识到预算约束线为什么有此种位置是重要的。由于给定了 p_x 与 p_y，总的生产价值为 $p_x \cdot x_1 + p_y \cdot y_1$。这就是在图 12.4 中所勾画的简单经济的“GDP”的值。因此，它也是社会成员自然增长的总收入。这样，个人的预算约束就经过点(x_1，y_1)，并且斜率为 $-p_x/p_y$。这就是在图中标有 C 的预算约束。

② 请再次注意，竞争性市场只决定均衡相对价格。绝对价格水平的决定需要把货币引入该物物交换模型。

12.3 比较静态分析

如同局部均衡分析一样，只要偏好或生产技术不发生变化，图 12.4 中说明的均衡价格比率 p_x^*/p_y^* 就会倾向于保持不变。这种竞争性决定的价格比率反映了这样两种基本的经济力量，即如果对于商品 x 的偏好发生移动，譬如更偏好商品 x，p_x/p_y 会上升，这样沿生产可能性曲线就会发生顺时针的移动，从而建立一个新的均衡。更多的 x 与较少的 y 会被生产出来，以满足变化了的偏好。同样，如图 12.5 所示，生产商品 x 中的技术进步也会使生产可能性曲线向外移动。这就会使 x 的相对价格下降，并增加消费 x 的数量（假定 x 是一种正常商品）。在图 12.5 中，作为由技术进步所产生的收入效应的结果，对 y 的消费量也会增加。不过，如果替代效应占有支配地位，这个增加效应就会很微小，以至于可能被掩盖。例 12.2 对此有简单的分析。

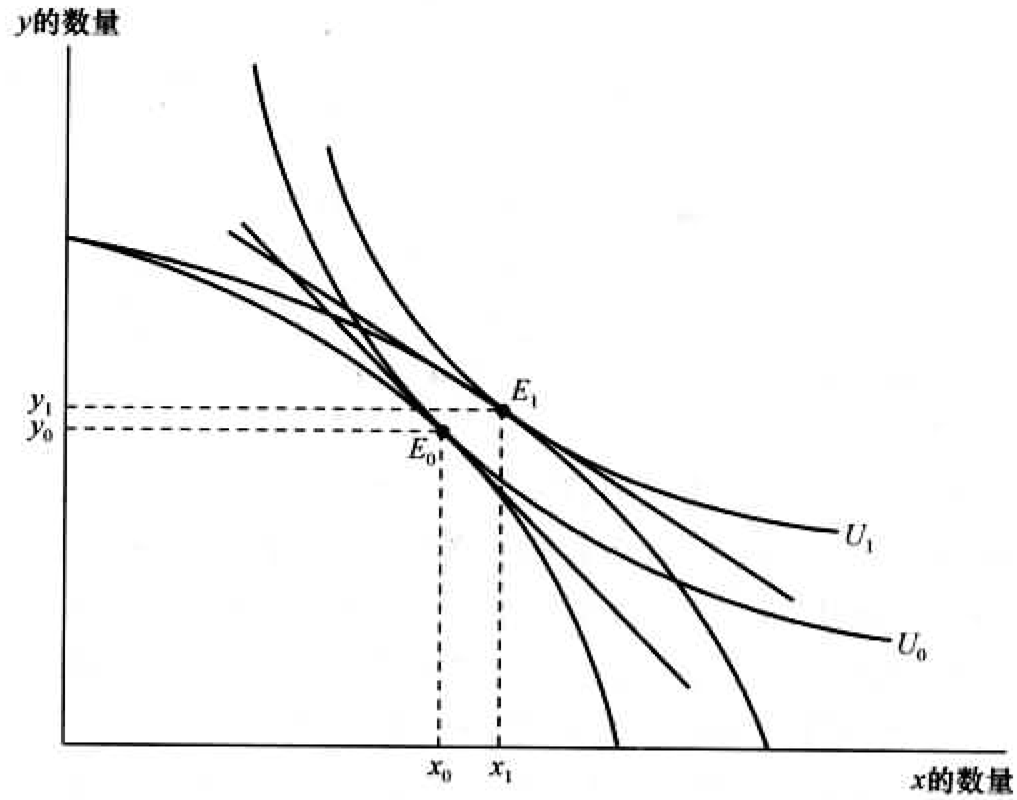


图 12.5　在生产中技术进步的效应

使生产 x 的边际成本下降的技术进步可以移动生产可能性边界。这一般会导致收入效应与替代效应，这两种效应会使 x 的产量增加（假定 x 是正常品）。由于收入效应与替代效应作用的方向相反，所以，对 x 的产量的影响是不确定的。

例 12.2

一般均衡中的比较静态分析

为了研究一般均衡模型如何运行，我们来看一个基于例 12.1 的生产可能性边界的简单例子。在例 12.1 中，我们假设两个生产函数都是规模报酬递减的，$x = l_x^{0.5}$，$y = l_y^{0.5}$，可调用的劳动力总量是 $l_x + l_y = 100$。这样得出的生产可能性边界是 $x^2 + y^2 = 100$，$RPT = x/y$。现在，我们再假设典型的个人

效用函数是 $U(x,y)=x^{0.5}y^{0.5}$，由此导出的需求函数是

$$x = x(p_x,p_y,I) = 0.5I/p_x$$
$$y = y(p_x,p_y,I) = 0.5I/p_y \tag{12.15}$$

初始均衡状态。厂商追求利润最大化的条件要求 $p_x/p_y=MC_x/MC_y=RPT=x/y$，消费者效用最大化的条件要求 $p_x/p_y=y/x$。所以均衡时应有 $x/y=y/x$，即 $x=y$。将其代入生产可能性边界中得到

$$x^* = y^* = \sqrt{50} = 7.07,\quad p_x/p_y = 1 \tag{12.16}$$

这就是我们设定的初始均衡条件。

预算约束。在上面的问题中，消费者的预算约束并不能明显地看出来，所以拿到这里单独讨论。为了在模型中引入绝对价格，我们用工资率 w 来表示价格。由于总劳动供给是100，所以总劳动收入是 $100w$。但是由于生产函数规模报酬递减，每个企业都能赚取利润。对于所有生产 x 的企业，总成本函数是 $C(w,x)=wl_x=wx^2$，而 $p_x=MC_x=2wx=2\sqrt{50}w$。因此该企业的利润就是 $\pi_x=(p_x-AC_x)x=(p_x-wx)x=wx^2=50w$。对等地，生产 y 的企业利润也是 $50w$。因为一般均衡模型要满足国民收入恒等式，我们假设消费者也是两个企业的股东，因此利润也是可支配的收入。这样，总的消费者收入就是

$$\text{总收入} = \text{劳动收入} + \text{利润} = 100w + 2(50w) = 200w \tag{12.17}$$

这些收入正好够消费者每种商品支付 $100w$，以 $2\sqrt{50}w$ 的价格购买 $\sqrt{50}w$ 单位商品，两种商品都正好出清。所以这个模型是自洽的。

供给的变动。要打破初始均衡状态有两种可能：(1) 改变"供给"，即经济中的技术力量发生变化；(2) 改变"需求"，即消费者的偏好发生变化。我们首先考虑供给变化的情况：假设生产 x 的技术进步了，生产函数变成 $x=2l_x^{0.5}$。现在生产可能性边界就是 $\frac{x^2}{4}+y^2=100$，$RPT=x/4y$。像刚才一样，求解此时的均衡状态是

$$(\text{供给})\ p_x/p_y = x/4y \quad \text{和} \quad (\text{需求})\ p_x/p_y = y/x \tag{12.18}$$

即 $x^2=4y^2$，

$$x^* = 2\sqrt{50}\ y^* = \sqrt{50},\quad p_x/p_y = 1/2 \tag{12.19}$$

生产 x 的技术的进步使得其相对价格下降，消费量上升。像很多科布-道格拉斯效用函数那样，这里出现了关于 y 的价格下降的收入效应和替代效应完全抵消的情况，但技术进步使得消费者的福利变好是一定的。初始时消费者效用函数是 $U(x,y)=x^{0.5}y^{0.5}=\sqrt{50}=7.07$，现在增加到了 $U(x,y)=x^{0.5}y^{0.5}=(2\sqrt{50})^{0.5}(\sqrt{50})^{0.5}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}=10$。技术进步对消费者福利的改善是实质性的。

需求的变动。如果消费者的偏好变得更倾向于 y 了，比如效用函数变成 $U(x,y)=x^{0.1}y^{0.9}$，导出的需求函数是 $x=0.1I/p_x$，$y=0.9I/p_y$，需求均衡条件（即效用最大化）要求 $p_x/p_y=y/9x$。回到初始状态的那个生产可能性边界，求解总体均衡，有

$$(\text{供给})\ p_x/p_y = x/y \quad \text{和} \quad (\text{需求})\ p_x/p_y = y/9x \tag{12.20}$$

所以 $9x^2=y^2$，均衡状态是

$$x^* = \sqrt{10}\ y^* = 3\sqrt{10},\quad p_x/p_y = 1/3 \tag{12.21}$$

可见，对于 x 需求的下降明显降低了其价格。但是请注意，这里我们无法比较两种状态下的福

利哪个更好了，因为效用函数改变了。

请回答：在两种情况下的预算约束分别是什么？收入中工资（劳动收入）和利润分别是多少？从直观上解释它们的差别。

12.4 一般均衡建模及要素价格

简单的一般均衡模型支持了马歇尔关于在价格决定过程中供求力量重要性的观察。通过在所有商品市场之间提供一种明显的联系，一般均衡模型可以被用来研究关于市场关系的更为复杂的问题，这超过了仅考察一定时间内、一个市场中的情况的范围。一般均衡模型也能够研究在商品市场与要素市场之间的联系，我们可以用重要的历史资料来说明这一点。

12.4.1 谷物法辩论

拿破仑战争之后，英国政府强制地对谷物出口征收高关税。在 1829 至 1845 年间，关于"谷物法"的效应的辩论成为经济学家们的主要分析工作。争论的一个焦点是免除关税会对要素价格有何影响，正如我们会看到的，这一问题在今天仍然是受人关注的。

在图 12.6 中的生产可能性曲线表示了能够用英国的投入品来进行生产的谷物(x)与制成品

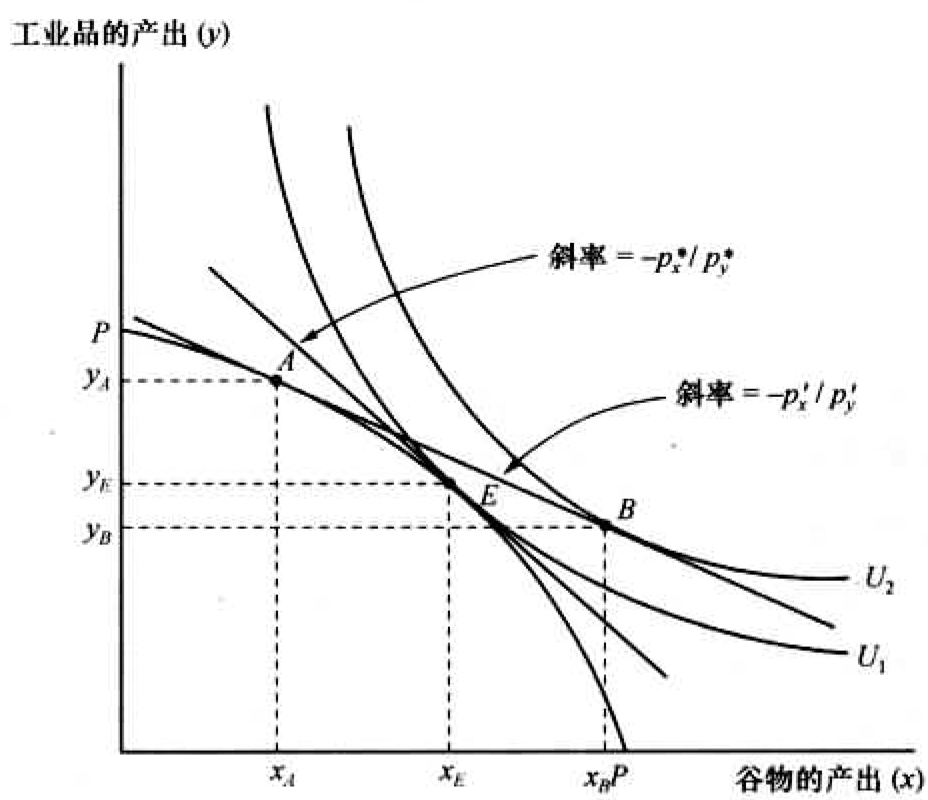


图 12.6 谷物法辩论的分析

对谷物的关税壁垒的削减会使生产有一个从点 E 到点 A 的重新配置。消费的重新配置则是从 E 到 B。如果谷物的生产是资本相对密集的，那么，作为这种重新配置的结果，资本的相对价格就会下降。

(y)的组合。假设(有点与实际情况相悖)谷物法完全阻止了贸易,则市场均衡就会处于点 E,国内的价格比为 p_x^*/p_y^*。取消关税会使该价格比下降为 p'_x/p'_y。在这个新的比率下,英国会生产组合 A 而消费组合 B。谷物的进口量为 $x_B - x_A$,而费用由制成品出口来支付,大小等于 $y_A - y_B$。对于典型的英国消费者来说,开放贸易可以增加总效用。因此,运用生产可能性图形说明了放松关税对于两种商品生产的意义。

12.4.2 贸易与投入品价格

现在让我们回过头来看生产可能性边界背后的埃奇沃思矩形图(图 12.2),据此也能够分析出关税降低对要素价格的影响。在图 12.6 中从点 E 到点 A 的移动类似于在图 12.2 中从 P_3 到 P_1,x 的产量下降,y 的产量上升。

该图也反映了由此导致的资本与劳动的重新配置。如果我们假定谷物的生产是相对资本密集的,那么,从 P_3 到 P_1 的移动就会在两个行业中引起 k 对 l 的比率上升。① 反过来,这又会引起资本的相对价格下降(或劳动的相对价格上升)。因此,我们得出结论:撤销谷物法会对资本的所有者(即地主)造成损害,但对劳动者有利。所以,依附于土地的得利者会反对该法的撤销是很自然的。

12.4.3 关于贸易政策的政治支持

贸易政策会影响不同投入品相对收入的可能性将继续对有关这种政策的辩论产生主要的影响。例如,在美国,进口趋向于非技术性劳动密集型,而出口则倾向于技术性劳动密集型。所以,通过类似于我们对谷物法的讨论,可以预料进一步向自由贸易政策方向发展将会导致技术工人的相对工资上升,而非技术工人的相对工资下降。由此,毫不奇怪,代表技术工人的工会(如机械师或飞行员工会)倾向于赞成自由贸易,而非技术工人(如在纺织、鞋及相关行业中的工人)倾向于反对自由贸易。②

12.5 一般均衡价格的存在

在前一节中,我们或多或少已经假定了竞争性市场可以达到一种均衡,在均衡点上,供求的力量使所有的市场都同时达到平衡。不过,在我们已经作出的假定下,其实还不能保证这样的一组解一定会存在。从 19 世纪瓦尔拉斯(Leon Walras)的研究开始,经济学家不断努力,运用越来越复杂的工具来研究是否存在着这样一组价格,使得所有的市场都达到均衡。如果存在这样一组价格的话,又如何得到它们呢?在这一节,我们将探讨有关这个问题的几个方面。

12.5.1 简单的数学模型

对瓦尔拉斯问题现代解的基本方面在没有生产活动发生的情况下可以得到证明。假定在该经

---

① 在谷物法的辩论中,注意力集中在土地要素与劳动要素上。为了方便起见,这里我们将把“土地”作为资本的同义语。

② 放开自由贸易会导致本国相对丰富的投入品的价格上升,这个发现被称为萨缪尔森(Stolper-Samuelson)定理,萨缪尔森在 20 世纪 50 年代给出了该定理的严格证明。

济中有 n 种商品,供给绝对固定,并以某种方式在社会成员中分配。设 $S_i(i=1,\cdots,n)$ 是第 i 种可获得的商品的总供给,第 i 种商品的价格由 $p_i(i=1,\cdots,n)$ 表示。对于第 i 种商品的总需求由所有的价格决定,并且,该函数代表了对第 i 种商品的所有个人需求函数的加总。该总需求函数被表示为

$$D_i(p_1,\cdots,p_n) \quad i=1,\cdots,n$$

由于我们对整个价格集 $(p_1,\cdots,p_n)$ 感兴趣,所以,可以把所有价格表示成向量 P。这样,需求函数就可以被写为

$$D_i(P)$$

这样,瓦尔拉斯问题就可以被正式表述为:对于所有的 i 值,是否存在着使

$$D_i(P^*) = S_i \tag{12.22}$$

成立的"均衡价格向量"(P^*)? 即,是否存在着一组价格,使所有市场上的供给与需求都同时相等。

12.5.2 过度需求函数

过度需求函数是一种研究这个问题的有效方法,它的定义是①

$$ED_i(P) = D_i(P) - S_i, \quad i=1,n \tag{12.23}$$

运用这一表达方式,均衡条件可以被重新写作

$$ED_i(P^*) = D_i(P^*) - S_i = 0, \quad i=1,n \tag{12.24}$$

该条件表明,在均衡价格上,过度需求在所有的市场上都会等于零。②

瓦尔拉斯本人也提到关于方程组 12.24 的某些有趣的特征。首先,可以假定需求函数(也包括过度需求函数)是零次齐次的。如果所有的价格都增加一倍(包括劳动工资),则每一种商品的需求量都会保持不变。这样,我们只需在瓦尔拉斯式的模型中建立均衡的相对价格。由瓦尔拉斯作出的第二个假定是需求函数(也包括过度需求函数)是连续的:如果价格只改变一点,需求量也只改变一点。齐次性与连续性假定都是我们在第 2 篇介绍的消费者行为理论的直接结果。

12.5.3 瓦尔拉斯法则

瓦尔拉斯作出的最后的观察是 n 个过度需求函数并不彼此独立。方程组之间通过下式相互联系起来

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot ED_i(P) = 0 \tag{12.25}$$

方程 12.25 通常被称为**瓦尔拉斯法则(Walras' law)**。方程表明在任何价格集上,过度需求的"总值"为零。对于所有的商品,既不存在过度需求,也不存在过度供给。虽然要引入一些麻烦的符号,但是,对瓦尔拉斯法则进行证明并不困难。证明要依赖于这样一个事实,即经济生活中的每个人都

① S_i 也可以表示成 P 的函数,这样我们就能把供给也引入模型,但在本章我们不这么做。

② 此均衡条件以后会被作某些修改,以便使其适用于均衡价格为零的"免费品"。

受到预算的约束。在只有两种商品的简单情况下的证明在脚注里给出①，请读者自行将其推广至多商品的一般情况。

应该强调的是，瓦尔拉斯法则不只是对均衡价格，而是对任何价格都成立。由于在均衡价格下，每一个过度需求函数都等于零，所以，可以看到这个法则普遍适用，也适用于均衡价格集。瓦尔拉斯法则表明，在 n 个市场中的均衡条件并不相互独立。对 n 个未知数（那些 P），我们并没有 n 个独立的方程。相反，方程12.24只代表 $(n-1)$ 个独立方程，所以，我们只能希望由此解出 $(n-1)$ 个价格。但是，这就是由于需求函数的齐次性质而期望得到的东西。我们能够期望决定该模型均衡的相对价格，但仅此而已，该模型中没有什么东西可以推导出绝对价格。

12.5.4 瓦尔拉斯关于均衡价格存在的证明

认识到过度需求函数体系的这些特征后，瓦尔拉斯转而去研究一组均衡（相对）价格的存在性问题。他试图去说明：方程12.24的 n 个均衡条件在这种情况下是充分的，足以保证这样一组价格实际上存在，因此，交换模型也有一个一致的理论框架。可以表明这种均衡价格可能存在的第一个象征为一组简单的方程与未知数。市场均衡条件提供了 $(n-1)$ 个独立方程，并有 $(n-1)$ 个未知的相对价格。这样，解线性联立方程的初等代数理论表明，可能存在着均衡解。

然而，正如瓦尔拉斯所认识到的，不幸的是，求解均衡价格的过程却并不像代数方程与未知数的个数那么轻而易举。首先，方程并不一定是线性的。所以，线性联立方程组可以求解的众所周知的条件就不适用于这种情况。其次，从问题的经济学意义上看，显然所有的均衡价格一定是非负的。在这个问题中，负的价格没有任何意义。为了解决这两个难题，瓦尔拉斯作了一个非常冗长的证明。在进行了一系列连续估计之后，均衡价格得以解出。在详细表述瓦尔拉斯的证明之前，考察一下他是怎样处理这个问题的，是具有启发性的。

从某些初始的、任意的价格向量出发。在保证其他 $(n-1)$ 个价格不变的情况下，找到市场上第1种商品的均衡价格。把这个"暂时的"均衡价格称为 p_1'。现在，假定 p_1' 与其他的 $n-2$ 个价格不变，再找到第2种商品在市场中的均衡价格，称其为 p_2'。请注意，当从初始位置 p_2' 变化到 p_2 时，由于第1种商品与第2种商品可能是替代品或互补品，所以，对第1种商品最初所计算的价格一定不再是均衡价格了。这是方程组本身是联立的这样一个事实的必然反映。运用暂时的价格 p_1' 与 p_2'，还

---

① 设社会中一共有两个人（Smith 和 Jones），他们自己生产并消费两种商品（A 和 B）。设 $D_A^S, D_B^S, S_A^S, S_B^S$ 分别为 Smith 对 A，B 的需求和供给函数，并用类似的符号表示 Jones 的需求和供给。Smith 的预算约束可以写作

$$p_A D_A^S + p_B D_B^S = p_A S_A^S + p_B S_B^S$$

或

$$p_A(D_A^S - S_A^S) + p_B(D_B^S - S_B^S) = 0$$

或

$$p_A ED_A^S + p_B ED_B^S = 0$$

其中 ED_A^S 和 ED_B^S 分别表示 Smith 对 A，B 的过度需求。

类似的预算约束关系对 Jones 也成立： $p_A ED_A^J + p_B ED_B^J = 0$

现在，让 ED_A 和 ED_B 表示对 A，B 的总过度需求，则下面这个式子肯定成立

$$p_A(ED_A^S + ED_A^J) + p_B(ED_B^S + ED_B^J) = p_A ED_A + p_B ED_B = 0$$

这就是这个经济中的瓦尔拉斯定理（式12.25）。

可求出暂时的 p_3'。直到计算出全部暂时的相对价格的集合，证明才算结束。

在瓦尔拉斯证明过程的第二轮中，当计算第 1 种商品的新均衡价格时，$p_2', \cdots, p_n'$ 保持不变。把这个新的暂时的价格称为 p_1''。同上面列举的过程相同，可以计算出全新的暂时相对价格集（$p_1'', \cdots, p_n''$）。证明过程以这种方式持续，直到可以求得一系列均衡价格集的合理估计为止。

瓦尔拉斯证明的重要性在于他能够证明寻找均衡价格这一问题的联立性质。不过，这是一个极其烦琐的证明，在今天一般已不再使用了。更新的证明已经使用了一些相对简单的高等数学工具，从而可以以一种既正式又漂亮的方式证明均衡价格的存在。为了说明这样一个证明，首先一定要介绍一个高等数学定理。

12.5.5 布洛沃不动点定理

由于本节是纯数学性的，所以最好先介绍一下**布洛沃不动点定理（Brouwer's fixed-point theorem）**：

> 任何一个闭的、有界的凸集对其自身的连续映射 $[F(X)]$ 至少有一个不动点（X^*），使得 $F(X^*) = X^*$。

在逐字分析这一定理之前，或许举一个例子会有助于理解这些术语。假定 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 区间的连续函数，$f(x)$ 也在 $[0,1]$ 区间取值。这样，这个函数就服从了布洛沃定理的条件（区间 $[0,1]$ 是 R^1 上的有界的、闭的凸集）；结果一定是存在一些 x^* 使 $f(x^*) = x^*$。这个事实由图 12.7 证明。从这个图中很容易得出，任何函数，只要它是连续的（只要它没有“断点”），它就一定在什么地方与 45°线相交。由于这一点上，f 使这个点（x^*）映射到它自身，所以，这个交点就是**不动点（fixed point）**。

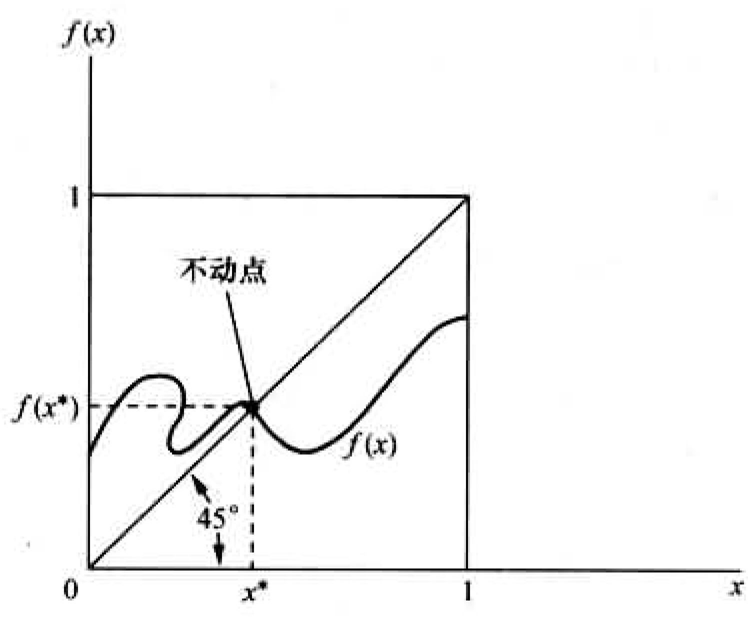


图 12.7　布洛沃不动点定理的几何说明

由于在一个单位正方形中，任何连续函数都要与 45°线在某处相交，所以，这个函数中一定存在一点，在这一点上 $f(x^*) = x^*$。这一点就被称为“不动点”。

为了研究这个定理更为一般的含义，首先有必要定义“映射”、“闭的”、“有界的”与“凸的”这些

术语。由于追求数学严格性的成本会大大超过收益，所以，我们将从直观上，而不是以严格的方式来定义这些概念。

简单地说，**映射（mapping）**就是一个集合中的点与另一个集合（可能是同一个集合）中的点的对应法则。最为经常遇到的映射是 n 维欧氏空间中的一个点集到另一个点集的映射。假定 F 是我们要研究的映射。设 X 是映射的定义域中的一点：映射就使其他一些点 $Y=F(X)$ 与 X 相对应。如果映射是在 n 维空间的一个子集（S）上定义的，并且如果 S 中的每一个点都（通过规则 F）与 S 本身的其他一些点相对应，那么，这个映射就是 S 对其自身的映射。在图 12.7 中，函数 f 是区间对其自身的映射。如果 $Y=F(X)$，而“贴近”X 的点对应的映射也贴近 Y，那么这个映射就是连续的。

布洛沃不动点定理考察定义在特定集合上的映射。这些集合被要求是闭的、有界的与凸的。举个直观的例子，想象一张 n 维空间中的肥皂薄膜，它本身包含自己的边界，因而是**闭的（closed）**；由于没有一维是无限大，它们也是**有界的（bounded）**；并且因为在其上面没有“洞”，它们也是**凸的（convex）**。对该种集合性质的严格描述可以在任何基本的拓扑学教材中找到。① 不过，对于我们的目的，认识到布洛沃定理要被用在某些形状简单的集合上，就够了。为了应用这一定理对均衡价格的存在性提供证明，我们首先要让我们考察的集合满足这些条件。

12.5.6 均衡价格存在性的证明

把布洛沃定理应用到刚刚建立的交换模型的关键，是选择适当的方式使价格“单位化”。由于在交换模型中只涉及相对价格，所以为了方便起见，我们可以设所有价格之和等于 1。从数学上讲，对于任意的价格向量（$p_1,\cdots,p_n$），我们可以将之处理成**单位化（normalized）**价格的形式②

$$p_i' = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{12.26}$$

这个新价格保留了它们最初的相对价格（$p_i'/p_j'=p_i/p_j$），而且总和为 1

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' = 1 \tag{12.27}$$

由于所有过度需求函数对所有价格都是零次齐次的，所以，价格单位化后均衡条件不变。因此，对于后续的证明，将假定全部可行的价格向量构成的集合（称之为集合 S）是 $\left\{(x_1\cdots x_n)\quad \sum_{i=1}^{n} x_i=1, x_i\geqslant 0\right\}$。为了避免符号太多，我们还是用 p_i 来表示。

集合 S 是可以应用布洛沃定理的一个集合。它是闭的、有界的、凸的。③ 为了应用布洛沃定理，就要定义一个 S 到自身的映射。我们希望选择一个合适的映射，让它的不动点恰好是均衡价格。

---

① 关于这一数学方法在一般均衡理论中的发展，参见本章的推荐阅读文献。

② 从数学的角度出发这里应该补充一个条件：至少一个价格是非零的，用经济学语言说就是至少一种商品是稀缺的。没有这个条件保证，单位化过程就没法进行。但是我们说作为经济学这一条没有必要，因为如果没有稀缺性，经济学就没有任何意义了。

③ 在二维的情况下，这种集合可以是连接点（0，1）与点（1，0）的直线。在三维中，该集合可以是以（0，0，1）、（0，1，0）与（1，0，0）为顶点的三角形平面。很容易看到，这些集合是闭的、有界的、凸的。

12.5.7 免费商品

在证明这个细节之前,有必要重新定义一下“均衡价格向量”。我们并非要求均衡时每个市场的过度需求都严格等于零。在均衡的市场上,有可能存在某一商品(在价格不变的前提下)可获得的供给超过了需求,因而有一个负的过度需求。对于这种情况,它的价格必然是零。要考虑到**免费商品(free goods)**的情况,我们就要对方程 12.24 略加修改。

$$\begin{aligned} ED_i(P^*) &= 0, \quad p_i^* > 0 \\ ED_i(P^*) &\leqslant 0, \quad p_i^* = 0 \end{aligned} \tag{12.28}$$

请注意,这样的均衡价格向量仍然满足瓦尔拉斯法则的条件。

12.5.8 可行价格集合(S)对自身的映射

应用均衡的定义,并对价格进行总和为 1 的单位化,现在,我们要构造一个从一个价格集合到另一个价格集合的连续映射。被定义的函数要建立在瓦尔拉斯思想的基础上,以便达到均衡。这一思想就是应该提高处于过度需求的商品的价格,降低处于过度供给的商品的价格。这样,对于任何(单位化)的价格集 P 定义映射 $F(P)$,使 $F(P)$ 的第 i 个部分被表示为 $F^i(P)$,并且对于所有的 i

$$F^i(P) = p_i + ED_i(P) \tag{12.29}$$

于是,映射就执行了适当提高与降低价格所必需的任务。在 p_i 点上,如果第 i 种商品处于过度需求 $[ED_i(P)>0]$,价格 p_i 会提高;而如果过度需求为负,则 p_i 就会降低。由于假定过度需求函数是连续的,这个映射也是连续的。此时式 12.29 的映射仍然有两个问题。第一,无法保证价格是非负的。为此我们作这样的修正,使

$$F^i(P) = \mathrm{Max}[p_i + ED_i(P), 0] \tag{12.30}$$

这里,“取最大值”处理保证了映射定义的新价格一定是正的或是零,而绝不是负的。方程 12.30 的映射也是连续的。

方程 12.30 中的映射的第二个问题是重新计算的价格并不必然被单位化:它们的总和不一定等于 1。不过,把这些新价格单位化,进而使其总和等于 1,还是一件简单的事情。① 假设现在已经将

---

① 为了实现这个单位化,首先有必要说明并非所有的映射后的价格都为零;有必要证明对于某些 i 有 $p_i + ED_i(P) > 0$。这可以由反证法证明。假定对于所有的 i 有 $p_i + ED_i(P) \leqslant 0$。用 p_i 去乘该式,并对所有的 i 值求和,得到

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i ED_i(P) \leqslant 0$$

但是,由瓦尔拉斯法则,有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i ED_i = 0$$

这样,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \leqslant 0$$

也就意味着对于所有的 i 有 $p_i = 0$。然而,我们已经排除了这种情况(参见第 325 页脚注②),因此,我们得以证明,至少有一个映射后的价格一定是正的。

$F^i(P)$ 单位化了，并且为了避免引入其他的符号，我们还用 $F^i(P)$ 来表示单位化后的价格向量，那么有

$$\sum_{i=1}^{n} F^i(P) = 1 \tag{12.31}$$

12.5.9 布洛沃定理的应用

由于这种单位化，F 满足了布洛沃不动点定理的条件。这是集合 S 对其自身的连续映射。因此，存在映射到自身的不动点（P^*）。在这个点上，对于所有的 i，满足

$$p_i^* = \mathrm{Max}[p_i^* + ED_i(P^*), 0] \tag{12.32}$$

这里 P^* 就是一组均衡价格：对于 $p_i^* > 0$，有

$$p_i^* = p_i^* + ED_i(P^*)$$

即

$$ED_i(P^*) = 0 \tag{12.33}$$

并且，对于 $p_i^* = 0$，有

$$p_i^* + ED_i(P^*) \leqslant 0$$

即

$$ED_i(P^*) \leqslant 0 \tag{12.34}$$

由此可以表明，这个过度需求函数组必有一个满足条件的均衡解，这个结论与市场供给函数与需求函数联立必有解的事实是相容的。这个结论是由需求函数的齐次性与连续性的性质结合瓦尔拉斯定理得到的。

12.5.10 推广

尽管这一证明在一般均衡分析领域是相当陈旧的，但它确实表示了该领域中一些更为现代的文献的特征。特别是，在实践上所有的现代证明都使用了瓦尔拉斯法则，并依靠某种类型的不动点定理。更近期的工作趋向于关注一般均衡的存在性证明如何能够被归纳到包含更复杂的供给假定的情况中，以及实际怎样计算均衡价格的问题。在本书随后的章节中，我们会研究某些其他的供给假定，诸如不完全竞争的情况和由“公共品”（我们在下一章会加以定义）引起的问题。本章的扩展部分介绍了在电脑的辅助下，这种一般均衡模型运用的一些情况。

例 12.3

三种商品的一般均衡

Oz 国的经济只由三种贵金属：白银、黄金和白金组成。每一种金属可获得的量是 10（千盎司）。对黄金的需求为

$$D_2 = -2\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_3}{p_1} + 11$$

对白金的需求为 (12.35)

$$D_3=-\frac{p_2}{p_1}-2\frac{p_3}{p_1}+18$$

请注意，对于白金与黄金的需求由两种商品的相对价格决定，并且这些需求函数在所有三个价格上都是零次齐次的。也请注意，我们并未写出对白银的需求函数，不过，正如我们马上要看到的那样，它可以从瓦尔拉斯法则中推出。

黄金市场与白金市场的均衡要求在这两个市场上供求同时相等

$$-2\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_3}{p_1}+11=10$$

$$-\frac{p_2}{p_1}-2\frac{p_3}{p_1}+18=10 \tag{12.36}$$

这个联立方程组可以相当容易地解出

$$\frac{p_2}{p_1}=2,\quad \frac{p_3}{p_1}=3 \tag{12.37}$$

这样，在均衡时，黄金的价格是白银的 2 倍，而白金的价格是白银的 3 倍，白金的价格是黄金的 1.5 倍。

瓦尔拉斯法则与对白银的需求。 由于在这样一个经济中瓦尔拉斯法则一定成立，有

$$p_1ED_1=-p_2ED_2-p_3ED_3 \tag{12.38}$$

解方程组 12.36（通过把不变的供给移到左边）求出过度需求，并代入瓦尔拉斯法则可以得到

$$p_1ED_1=2\frac{p_2^2}{p_1}-\frac{p_2p_3}{p_1}-p_2+\frac{p_2p_3}{p_1}+2\frac{p_3^2}{p_1}-8p_3 \tag{12.39}$$

或

$$ED_1=2\frac{p_2^2}{p_1^2}+2\frac{p_3^2}{p_1^2}-\frac{p_2}{p_1}-8\frac{p_3}{p_1} \tag{12.40}$$

正如所期望的那样，这个函数在相对价格上是零次齐次的，而白银市场在前面计算的相对价格上也处于均衡之中（$ED_1=0$）。（自己算算吧！）

供给上的变化。 如果黄金的供给减少到 7，白金的供给增加到 11，我们预料相对价格会改变。看起来可能是黄金的相对价格会上升。同样，由于黄金价格的上升会减少对于白金的需求，以及白金供给的增加，使得白金的相对价格下降。但是，这将减少对黄金的需求，这样，最后的结果就不甚清楚——显然这是一个联立的解。事实上，解下述方程

$$-2\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_3}{p_1}+11=7 \tag{12.41}$$

和

$$-\frac{p_2}{p_1}-2\frac{p_3}{p_1}+18=11$$

可得

$$\frac{p_2}{p_1}=3,\quad \frac{p_3}{p_1}=2 \qquad (12.42)$$

于是，黄金的价格相对于白银与白金的价格会上升。白金的价格相对于白银的价格下降。所有这些效应只有在这样的一般均衡模型中才能得到。

请回答：如果黄金与白金有了新的供给来源，白银的市场是否还会维持均衡？

12.6 完全竞争的效率

尽管大多数人已经认识到竞争价格系统（无论如何，价格并非每天都在波动）的均衡特性，但是，对于因此而引起的资源配置的总体方式，他们却知之甚少。前几章所介绍的竞争模型的关系是如此复杂，以至于人们会问，从如此的杂乱无章中到底能得到什么令人满意的结果。这种看法导致了一种修补该系统的见解——既然市场力量是杂乱无章的，通过仔细的计划，人类社会一定会做得更好。

12.7 斯密的看不见的手的假说

亚当·斯密的天才使他能够向这种可能是当时18世纪最为流行的观点提出挑战。斯密认为，竞争市场机制代表的是与混乱完全不同的一个体系。实际上，它将提供一只"看不见的手"以使各种资源能够找到它们最合理的去处，在那里，它们将最具价值、最能增加国民财富。在斯密看来，依靠谋求自身利益最大化的个人与厂商将使整个经济得到（甚至是非常良好的）发展与进步。

期密的先见之明使得现代福利经济学得以产生。特别是他富有创意的"看不见的手"促进了"福利经济学第一定律"——即在资源的有效配置与这些资源的竞争价格之间存在着紧密的相互联系——的发展。在这一章，我们将进一步详细研究这种联系。首先，我们将在各种不同的条件下定义配置的有效性。这些根据19世纪经济学家韦尔弗雷德·帕累托的工作所作的定义已在前面的几章里进行了简要的描述，在这里，我们的目的仅仅是将它们归纳到一起以揭示其资源的竞争性配置的基本关系。

12.8 帕累托最优

我们从帕累托对经济效率的定义开始说起。

定义

帕累托最优配置:如果通过重新配置资源,已经不可能在不使其他人处境变坏的情况下改善任何一个人的处境,这种配置就被称为**帕累托最优(Pareto efficient)**的。

帕累托最优的定义指出,如果尚存在毫无疑问的改良的潜在可能,资源的配置就是"无效率"的。注意根据这个定义,有效率与否与个人之间的偏好不同毫不相干。"改良"的定义就是至少某一些人的效用增加。

12.9 生产的有效率

用一句简单的话来说,如果一个经济处于生产可能性边界上,就称这一经济具有生产有效性。正式地表达,需要我们采用帕累托的术语定义它。

定义

生产有效率:如果有一种资源配置不能保证多生产一种商品而其他商品的产出不减少,就称这种资源配置是**生产有效率(efficient in production**,或称"技术有效率")的。

像帕累托最优的概念一样,通过它的逆命题我们可以更好地把握这个概念,即如果通过重新配置资源,可以实现在保证任何其他产品不减产的同时,增加某产品的产出的"改良",则资源配置就是无效率的。当这样的改良不可能再有时,也就达到了生产有效率。沿着生产可能性边界移动时,产出上的权衡取舍反映了在生产可能性边界上的所有点的配置的技术有效性。

技术有效率显然应当是总体帕累托最优的一个前提条件。假设资源配置使得生产是无效率的,也就是说,生产是在生产可能性边界内部进行的,那么在一些商品不减少产出的情况下至少可以使其他的某一种商品增加。这些增加的产出可以使某些幸运的人的处境更好(并且,其他人处境不变坏)。这种生产的无效性也是帕累托无效性。然而正如我们将在下一节中所看到的那样,技术有效率不能保证帕累托最优。生产错误的商品时经济可以是有效率的,例如,把所有的资源都用来生产左脚鞋可以是技术有效率的,但不能保证帕累托最优。

对于生产有效性的讨论及其与生产可能性边界的关系比本章那个简单的模型所反映的要复杂一些。因为生产是在许多厂商间进行的,我们将不仅要考虑单个厂商是如何利用资源进行生产(正如从前所讨论的那样),还要考虑资源在各个厂商间的分配。为了便于问题的研究,我们把问题分解成三个小问题:(1) 在一个厂商内部资源的配置;(2) 厂商之间的生产性资源配置;(3) 厂商间产出的协调。上述这些问题的每一个解都将被一般化为"资源配置规则",要达到生产有效性,所有这些规则都必须得到满足。

12.9.1 单个厂商的投入品的有效选择

在图 12.2 中,我们考察了拥有固定资本与劳动投入的厂商的情况。在那里,我们表明,如果厂商全部使用这些资源,并且在资本与劳动之间的技术替代率(*RTS*)对于厂商的生产的所有产品都是

一样的，那么厂商有效配置了这些投入。在前面，我们已经详尽地利用图形证明了这个论断，在这里我们应用数学方法再次给出证明。假设厂商生产两种产品，x 与 y，给定资本与劳动总投入为 $\bar{k}$ 与 $\bar{l}$，则 x 产品的生产函数为

$$x = f(k_x, l_x) \tag{12.43}$$

其中 k_x 与 l_x 是用来生产 x 的资本与劳动，如果我们假设资源全部被使用，$k_y = \bar{k} - k_x, l_y = \bar{l} - l_x$，则 y 的生产函数为

$$y = g(k_y, l_y) = g(\bar{k} - k_x, \bar{l} - l_x) \tag{12.44}$$

技术有效性要求对任何给定的产量值 y（如 $\bar{y}$）的产出尽量大。构造该约束条件下最大化问题的拉格朗日表达式为

$$\mathscr{L} = f(k_x, l_x) + \lambda[\bar{y} - g(\bar{k} - k_x, \bar{l} - l_x)] \tag{12.45}$$

对 k_x、l_x 与 λ 分别求导得到该条件极值问题的一阶条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_x} &= f_k + \lambda g_k = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l_x} &= f_l + \lambda g_l = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= \bar{y} - g(\bar{k} - k_x, \bar{l} - l_x) = 0 \end{aligned} \tag{12.46}$$

把前两个等式中的 λ 项移到右边，有

$$\frac{f_k}{f_l} = \frac{g_k}{g_l} \tag{12.47}$$

应用 RTS 是投入边际产出率的结论（第 7 章），我们得到①

$$RTS_x(k \text{ 代替 } l) = RTS_y(k \text{ 代替 } l) \tag{12.48}$$

这正是我们在图 12.2 所表示的结果。

12.9.2 厂商间资源的有效配置

资源必须在厂商间进行某种方式的有效配置才能保证总体的生产有效性。直观地看，资源应当被分配给那些能最有效地使用它们的厂商。更准确地说，有效配置的条件是：资源配置应该使得所有商品不管出自哪个厂商，生产特定商品的资源的边际产出都是一样的。

关于该原则的数学证明是十分直接的。假设有两个厂商生产同种商品（x）且它们的生产函数分别为 $f_1(k_1, l_1)$ 与 $f_2(k_2, l_2)$，又假设资本与劳动的总供给为 $\bar{k}$ 与 $\bar{l}$，则该配置问题就是下式的最大化

$$x = f_1(k_1, l_1) + f_2(k_2, l_2) \tag{12.49}$$

约束条件为

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \bar{k} \\ l_1 + l_2 &= \bar{l} \end{aligned} \tag{12.50}$$

① 这个结论只在区域内部极值时成立，即两种投入品投入都不为零的情况下才成立。否则就会出现类似角点解的情形，一阶条件必须相应修正。

将约束条件代入方程 12.49,最大化问题变成

$$x = f_1(k_1, l_1) + f_2(\bar{k} - k_1, \bar{l} - l_1) \tag{12.51}$$

该最大化问题的一阶条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial k_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial k_1} + \frac{\partial f_2}{\partial k_1} = \frac{\partial f_1}{\partial k_1} - \frac{\partial f_2}{\partial k_2} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial l_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial l_1} + \frac{\partial f_2}{\partial l_1} = \frac{\partial f_1}{\partial l_1} - \frac{\partial f_2}{\partial l_2} = 0 \end{aligned} \tag{12.52}$$

或者

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_1} = \frac{\partial f_2}{\partial k_2}$$

与

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_1} = \frac{\partial f_2}{\partial l_2} \tag{12.53}$$

即为所证。

例 12.4

有效配置劳动的所得

为了定量地考察有效配置资源的所得,我们假设两个生产大米的农场有如下形式的生产函数

$$q = k^{1/4} l^{3/4} \tag{12.54}$$

但其中一个大米农场比另一个生产更机械化,如果第一个农场的资本为 $k_1 = 16$,第二个农场的资本为 $k_2 = 625$,我们有

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 l_1^{3/4} \\ q_2 &= 5 l_2^{3/4} \end{aligned} \tag{12.55}$$

总体的劳动供给为 100,如果在两个农场间平均分配,则总体产出为

$$Q = q_1 + q_2 = 2(50)^{3/4} + 5(50)^{3/4} = 131.6 \tag{12.56}$$

有效率的配置下边际产出应相等,于是得

$$\frac{\partial q_1}{\partial l_1} = \left(\frac{3}{2}\right) l_1^{-1/4} = \frac{\partial q_2}{\partial l_2} = \frac{15}{4} l_2^{-1/4} \tag{12.57}$$

因此,有效的劳动配置应满足

$$l_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} l_2 = 0.0256 l_2 \tag{12.58}$$

由于农场 B 被给定了更高程度的资本化,实际上差不多所有的劳动都相应地配置给了它。对于 100 单位劳动来说,97.4 单位应当配置给农场 B,而只有 2.6 单位配置给了农场 A,这时总产出为

$$Q = q_1 + q_2 = 2(2.6)^{3/4} + 5(97.4)^{3/4} = 159.1 \tag{12.59}$$

这表明相对于平均配置而言，大米总产出的增长超过了 20%。

请回答：如果在这个问题中资本也是不固定的，那么在这两个农场间应如何配置劳动与资本？

12.9.3 厂商产出的有效率决策

尽管资源可以在厂商内部与厂商之间都有效配置，但要保证生产有效率还有另一个条件必须遵循，即厂商必须生产有效率的产出组合。大略地说，善于生产汉堡包的厂商应当生产汉堡包，而善于生产汽车的厂商则应生产汽车。

从数学上证明这个结论也是直截了当的。假设两个厂商分别生产 x，y 两种产品，它们的生产可能性边界分别是

$$y_i = f_i(x_i), \quad i = 1,2 \tag{12.60}$$

总产量最大化问题，就是在给定 y 的产量后，最大化 x 的产量。写出拉格朗日表达式

$$\mathscr{L} = x_1 + x_2 + \lambda[y^* - f_1(x_1) - f_2(x_2)] \tag{12.61}$$

它的一阶条件要满足

$$\partial f_1 / \partial x_1 = \partial f_2 / \partial x_2 \tag{12.62}$$

即，每个厂商的产品之间权衡取舍的转换率应该相等。

图 12.8 表示了这个结果。当两个厂商的 RPT 不同时，它们可以在各自的生产可能性边界上，通过调整产量比例以提高总产量。厂商 A 的 $RPT = 2$，即它可以以减少生产 1 辆卡车（49 辆）的代价多生产 2 辆轿车（102 辆）；而厂商 B 把卡车的产量扩大到 51 辆的同时只需把轿车的产量减为 99 辆。这样，总轿车产量由 200 辆增加到了 201 辆而卡车产量没有变。只要两厂商的 RPT 不等，这样的改良就总可以实现。

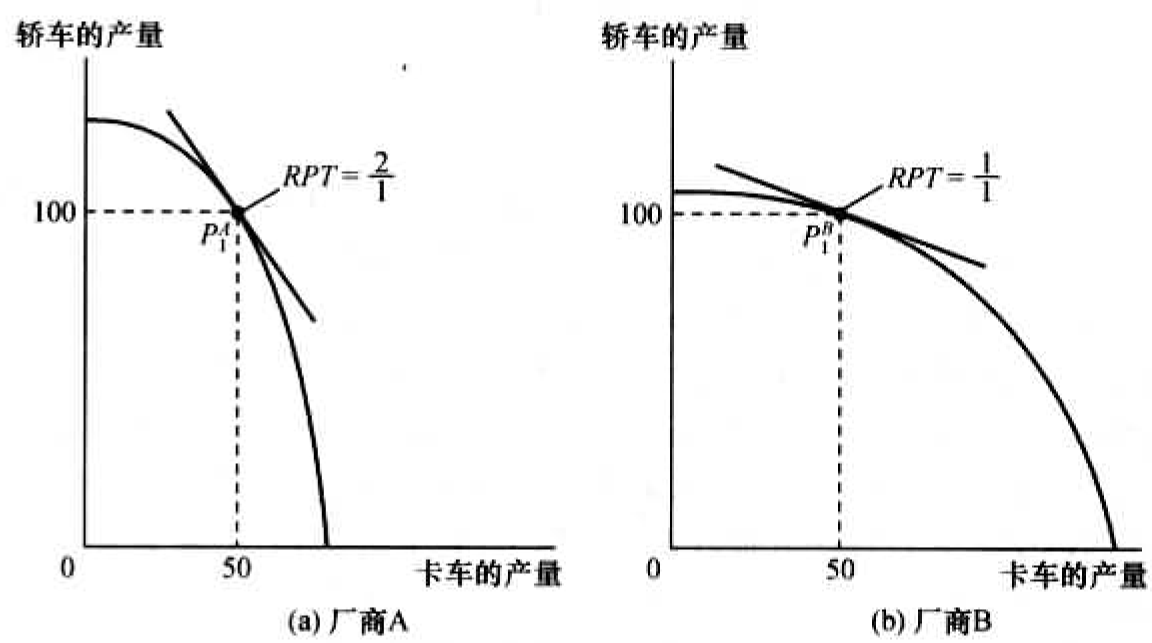


图 12.8 产出有效率决策的图形说明

如果两家厂商产品转换率不同，则使转换率向相等方向的移动能使总产量增加。图形表示 A 厂商生产轿车相对有效率，B 厂商生产卡车相对有效率。如果每家厂商都多生产自己更擅长的产品，则总产量会增加。

12.9.4 比较优势理论

这个结论的一个最重要的应用是研究国际贸易，它被用来作为比较优势理论的基础。该理论首先由李嘉图提出，他论证了一国应该生产那些有相对优势的产品[①]，并与世界各国进行贸易获得所需的商品。如果每个国家都这样进行专业化生产，世界的总产出将会大于每个国家各自为政，只为自己生产产品的情形下的总产出。为了说明这一点，请再看图 12.8。现在我们取两条生产可能性曲线来表示两个资源固定且不同的国家。点 P_1^A 与 P_1^B 可以代表两个国家贸易前的生产选择。因为两国的 *RPT* 不同，如果 A 国生产更多的轿车而 B 国生产更多的卡车将使整个世界的总产出增加。A 国应该生产轿车而与 B 国交换得到其所需的卡车；同样，B 国与 A 国交易得到所需的轿车。由于这种专业分工使世界产量增加，两国的状况都变得更好。这对"自由贸易是最好的选择"的信念提供了逻辑的支持。特别要注意的是，这里利用的仅是每国的两种商品之间的生产转换率，而没有涉及两国之间的边际生产率。一个国家可能生产每一种商品都有"绝对"优势（即生产每一种商品的劳动边际生产率都超过贸易对手），这样的国家仍然可以从专业化与贸易中得到好处。对于资源配置原则 3 而言，重要的是比较优势而不是绝对优势。

12.10 混合生产的有效率

技术有效性并非帕累托有效性的充分条件，我们还要把需求引入讨论中。如果没有人需要，一个只生产悠悠球与风琴的经济可能是技术有效率的，但是这种有效率一点好处都没有。为了保证帕累托有效性，我们必须把个人偏好与生产可能性联系起来。保证生产的是所需商品的必要条件是，任何两种商品的边际替代率必须等于这两种商品的生产转换率。简而言之，两种商品在人们偏好上的心理权衡取舍的比率必须与生产的权衡取舍的比率一样。

12.10.1 图形说明

图 12.9 说明了一个非常简单的情形下生产商品组合有效性的要求。它假设社会只生产两种商品（x 与 y），只有一个人（鲁宾逊 · 克鲁索），或者有许多偏好相同的个人。由给定的生产可能性边界 *PP* 线决定生产 x 与 y 的组合。*PP* 线上的每一点表示一个技术有效的生产组合。而通过假设的个人的无差异曲线，我们在图 18.2 上得到了无差异曲线图，这样我们可以看出，*PP* 线上只有一点能使个人的效用达到最大化。这一点是 *PP* 线上的 *E* 点，在该点曲线 *PP* 与个人最高无差异曲线 U_2 相切。在该点，个人的 *MRS*（x 替代 y）等于技术 *RPT*（x 替代 y）；因此，这是总有效性所要求的条件。注意，从生产有效性的意义上 *E* 点优于其他各点。实际上，对于曲线 *PP* 上除 *E* 点之外的任何一点，例如 *F* 点，都存在着一个虽然是无效率的但是优于 *F* 点的点。在图 12.9 中，"无效率的" *G* 点就优于"有效率的" *F* 点。从个人的角度出发，宁愿生产无效率的商品组合，也不愿意以有效率的途径被迫生产"错"的商品组合。*E* 点（是有效率的生产）组合优于所有这类"次优的"组合。

① 参见 D. Ricardo, *The principles of Political Economy and Taxation* (1817, reprint ed., London: J. M. Dent and Son, 1965), pp. 81—93。

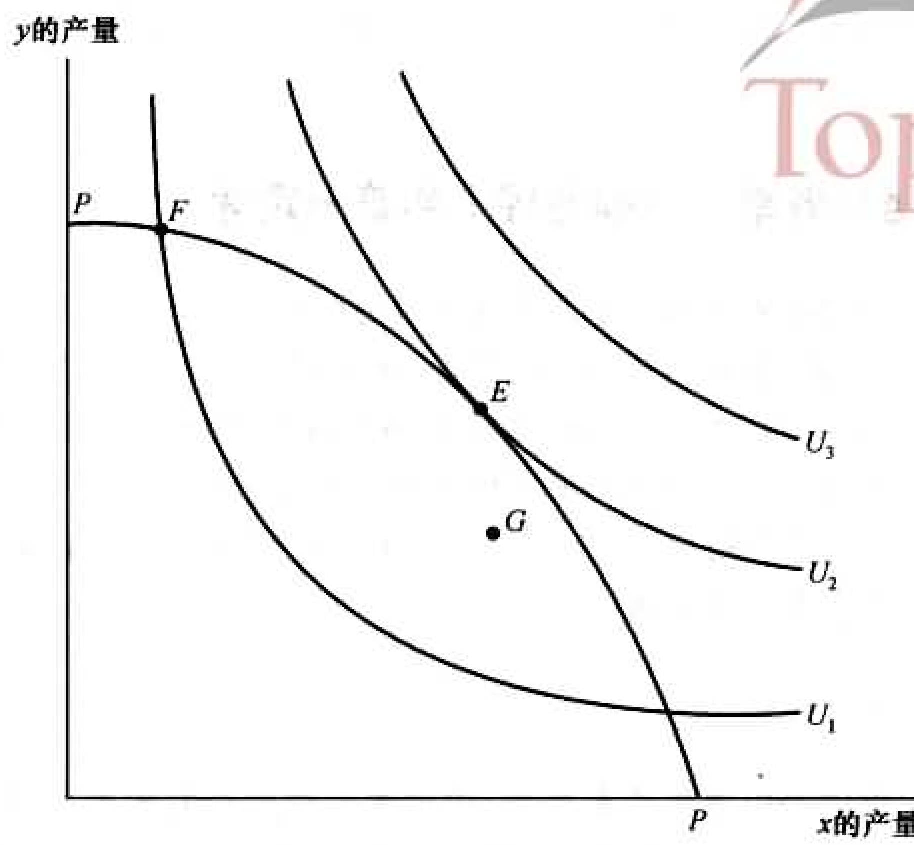


图 12.9　在鲁宾逊·克鲁索经济中生产商品组合的有效性

在一个人的经济中，曲线 *PP* 表示可以生产的 *x* 与 *y* 的组合。在生产的意义上，*PP* 线上的每一点都是有效率的。然而，只有在 *E* 点的产出组合是真正个人效用最大化的点。在 *E* 点，个人的 *MRS* 等于这一点的 *x* 对 *y* 的技术转换率(*RPT*)。

12.10.2　数学证明

为了用数学证明上述结果，我们假设有两种商品（x 与 y）与一个人（鲁宾逊·克鲁索）的社会，其效用函数用 $U(x,y)$ 表示。假设该社会的生产可能性边界可以用隐函数 $T(x,y)=0$ 表示。鲁宾逊的问题是求在这一产出约束下的效用最大化的问题。构造这个问题的拉格朗日表达式，有

$$\mathscr{L} = U(x,y) + \lambda[T(x,y)] \tag{12.63}$$

内点达到最大的一阶条件是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= T(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{12.64}$$

组合前两个方程得到

$$\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = \frac{\partial T/\partial x}{\partial T/\partial y} \tag{12.65}$$

或者

$$MRS(x\text{ 代替 }y) = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\text{沿着 }T) = RPT(x\text{ 代替 }y) \tag{12.66}$$

正如图 12.9 所显示的。我们已经表明，只有当把个人偏好也考虑进来时，资源配置才能实现帕累托

最优。如果完全不考虑偏好，就存在着在不损害其他人的福利的前提下，改善某人效用的可能性。

12.11 竞争性价格与效率——福利经济学第一定理

资源的完全竞争与有效配置间的关系的本质很容易归纳。要达到帕累托资源有效配置要求，即(除了角点解，即某人对某种商品的选择为零的情况)所有经济人对任何两种商品如 x 与 y 的权衡比率都应相等。在完全竞争的经济中，x 与 y 的市场价格比提供了经济人作调整的权衡比率。因为价格在个人的效用最大化决策与厂商的利润最大化决策中被作为固定的参数，x 与 y 的所有权衡比率将等于市场中交易的 x 与 y 的价格比率(P_x/P_y)。因为所有经济人面对相同的价格，所以，当所有的权衡比率都相同时就达到了有效的配置。

12.11.1 生产有效率

为了表明竞争性定价能够引致生产有效率，考虑第一个生产有效率的条件：厂商在它所有生产的产出中，各种投入品有相同的技术替代率(RTS)。而这可以由完全竞争的要素市场的存在来保证。为了使成本最小化，厂商将使投入的任何要素如劳动与资本的 RTS 等于它们的竞争租价比率(w/v)。由于这对于厂商的任一产出水平都成立，所以厂商将让它所有的 RTS 均等于共同的价格比率 w/v。以这种方式，没有任何外部的指引，各个厂商的分散决策就足以使各种要素以最有效率的方式投入使用。

有效率的生产还要求每个厂商生产某一特定产品如 x 时，各厂商使用的各种投入品(如劳动)有相等的边际生产率。在第 9 章，我们已经证明，一个追求利润最大化的厂商将会不断增加任何附加的投入，譬如说劳动，直到投入对收益的边际贡献等于利用投入的边际成本的那个点为止。如果我们令 p_x 表示所卖商品的价格，f^1 与 f^2 代表两家厂商生产 x 的生产函数，则利润最大化要求

$$p_x f_l^1 = w$$

与

$$p_x f_l^2 = w \tag{12.67}$$

由于两个厂商面对相同的 x 的价格与相同的竞争性工资率，这两个方程意味着

$$f_l^1 = f_l^2. \tag{12.68}$$

结果，在生产 x 时每个厂商都将有相同的劳动边际生产率。市场成功地带来了厂商间的投入的有效配置。

最后，配置原则 3 要求，生产转换率(RPT，即在生产中一种产出被另一种产出替代的比率)在两种产品如 x 与 y 之间对所有的厂商是相同的。也就是说，完全竞争的价格体系可以确保(x 对 y)RPT 等于 x 的边际成本(MC_x)对 y 的边际成本(MC_y)之比率。而每个追求利润最大化的厂商将在边际成本等于市场价格处进行生产。因此对每个厂商而言，有 $p_x = MC_x$ 与 $p_y = MC_y$，因而对所有厂商有 $MC_x/MC_y = p_x/p_y$。

这一讨论证明了不用任何中央指导，厂商为追求利润最大化所进行的分散决策可以达到生产的

有效性。竞争性市场价格作为调节信号可以使厂商的各自决策一致化,形成有效率的生产模式。因此,企业家通过追求自身利益可以促进生产部门有效率地运转的说法从理论上说似乎是有道理的。

12.11.2 商品组合的有效率

不难证明,完全竞争市场导致生产与偏好的关系的有效率,即生产的产品能最好地满足需求。由于消费者提出的价格比率等于厂商面对的市场价格的比率,所有个人所分享的 *MRS* 比率等于所有厂商所分享的 *RPT* 比率,这对于任何一对商品都是成立的。结果将生产一个有效的商品组合。而且,我们将看到市场价格模式的两个必要功能。第一,它保证了所有商品的供给与需求相等,如果某种商品生产得太多,则市场作用将会使其价格下降,从而使商品的产量下降,并且资源转移到其他雇主。因此市场供给与需求平衡保证既没有超额需求也没有超额供给。第二,均衡价格为每个人与厂商的市场权衡率提供了一个进行决策的参数。由于对个人与厂商,这些权衡取舍比率是相同的,从而有效性就能得以保证。

12.11.3 图形证明

在本章我们对一般均衡模型的讨论提供了用图形来准确证明这个结果的工具。图 12.10 与图 12.4 相似,但现在我们更感兴趣的是一般均衡解的有效率的性质。给定生产可能性边界 *PP* 线与表示偏好的无差异曲线,很明显,(x^*,y^*)代表有效的产出组合(把该图与图 12.9 进行比较)。在一个中央计划的经济中,如果计划委员会拥有所有生产可能性与个人偏好的信息,就可以确定 x^* 和

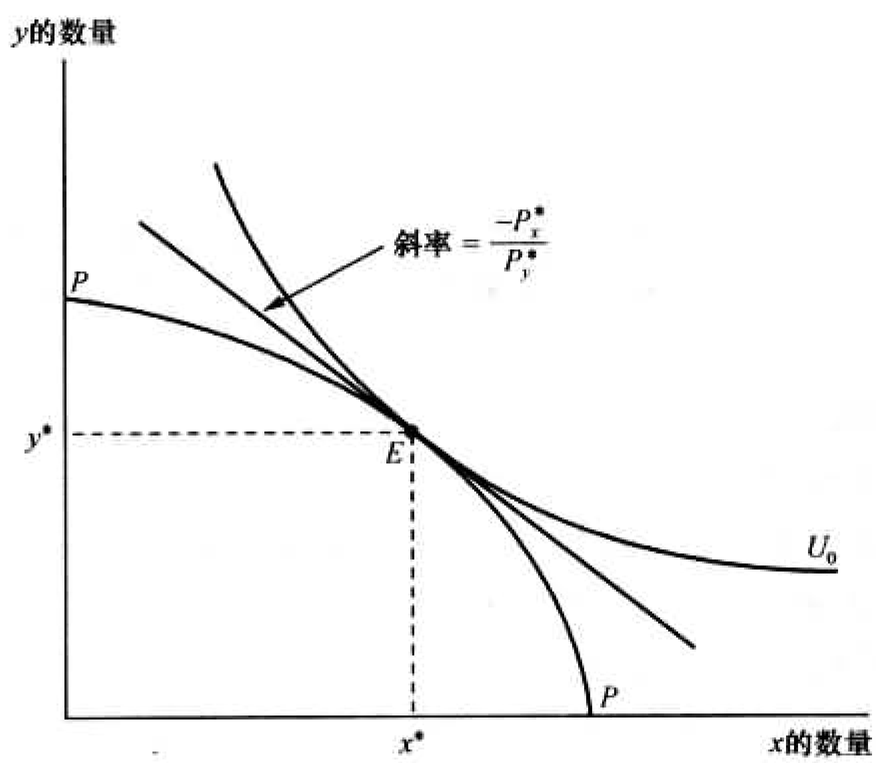


图 12.10 竞争均衡与产出组合的有效性

尽管 *PP* 线上所有产出组合都是技术有效率的,但只有(x^*,y^*)是帕累托最优的。竞争均衡价格比率 p_x^*/p_y^* 导致经济的帕累托最优化。

y^*；而凭借竞争性市场中企业与个人对自身利益的追求也会导致同样的配置。在该模型中只有价格比为 p_x^*/p_y^* 时，供给与需求才会均衡，均衡只能在有效生产组合 E 点发生。斯密的看不见的手保证不仅生产是技术有效的（即生产组合在生产可能性边界上），而且供给与需求的均衡力量导致帕累托最优的产出组合。更复杂的竞争均衡价格模型基本上也可以得出相同的结论。①

12.11.4 自由放任政策

在大多数传统的表述中，竞争性均衡与帕累托有效之间的一致性，为许多经济学家所倡导的自由放任政策提供了"科学的"依据。例如，斯密指出：

> 在自由与安全的环境中，个人对其自身利益的追求是一个强大的力量，它用不着任何帮助，就能把一个社会带向富裕与繁荣，并且还能克服无数的无理阻碍，特别是人类愚蠢的社会法律强加给它的阻碍。②

斯密的这一论述已经被证明在理论上是相当有道理的。再者，正如斯密所指出的，面包供应商向个人消费者提供面包并非是具有"公共精神"，而是面包商（与其他生产者）根据市场信号，追求它们自己利益的结果。个人还根据这些信号确定如何安排自己的收入，政府对这个完美的运转过程的任何干预只可能破坏帕累托最优状态。

这样一个强有力的结论，显然夸大了我们所用的简单模型的一般适用性：从这样一个完全理想化的、忽视现实中的制度细节的模型中，我们得不到有建设性的政策建议。然而，竞争系统的有效性质确实提供了一个考虑问题的基础，一个可以考察竞争性市场失灵的原因的出发点。

例 12.5

有效率和无效率

竞争性价格导致的有效率可以用例 12.2 中那个简单的一般均衡模型来表现：只要给定人们的偏好和可用的技术水平，求解出来的各种分配都是有效率的。即无论偏好如何，在给定的生产可能性边界上都实现了效用最大化。

例 12.2 中初始确定的产量"指标"（$x^* = y^* = \sqrt{50}$）在其后两种情况下都能实现，但都不是最优的。当 x 的生产技术进步时，这一点落到了生产可能性边界内部。（$x^* = y^* = 10$）的指标显然在帕累托意义上优于原点。或者考虑：如果保持 y 的产量不变，技术进步后可以生产 $x^* = 2\sqrt{50}$，对原指标作"优化"就能"白捡"大量的 x，所以原来那点显然不是帕累托最优。（当然，只有 $x^* = y^* = 10$ 才是技术进步后真正有效率的一点。）

当偏好变得倾向于 y 后，初始的指标同样不会是最优的：在新效用函数中，初始指标的效用是

$$U(x,y) = x^{0.1}y^{0.9} = (50)^{0.05}(50)^{0.45} = (50)^{0.5} = 7.07 \qquad (12.69)$$

而最优点的效用是

① 可参见 K. J. Arrow and F. H. Hahn, *General Competitive Analysis* (San Francisco: Holden-Day, 1971), chaps. 4 and 5。

② A. Smith, *The Wealth of Nations* (New York: Random House, Modern Library Edition, 1937), p. 508.

$$U(x,y)=x^{0.1}y^{0.9}=(10)^{0.05}(3)^{0.9}(10)^{0.45}=(3)^{0.9}(10)^{0.5}=8.50 \quad (12.70)$$

可见,帕累托最优的选择同时涉及技术与偏好。

税收引起的无谓损失再分析。现在我们用一般均衡模型分析第 11 章讲的税收引起福利损失问题。考虑这样一个税收模型:假设政府对初始均衡位置的产量不满意,觉得人民消费的 x 太多了。对此,政府对 x 加收 200% 的税,但为了维持人民购买力不变,又将税收收入以一次总付的形式返还给消费者。现在开始处理这个模型:我们设 p_x/p_y 是税前的价格比例——这也是税后厂商得到的销售价。而消费者不同,他们看到的价格比率是 $3p_x/p_y$——就是说,他们要买 1 单位的 x 就得先向厂商付 p_x,再向政府付 $2p_x$。下面我们计算均衡状态

$$(\text{供给})\ p_x/p_y=x/y \quad \text{和} \quad (\text{需求})\ 3p_x/p_y=y/x \quad (12.71)$$

因此,均衡点满足 $x/y=y/3x$ 即 $y^2=3x^2$。代入生产可能性边界就得到了税后均衡状态

$$x^*=5,\quad y^*=5\sqrt{3},\quad p_x/p_y=1/\sqrt{3}=0.58 \quad (12.72)$$

税后效用是

$$U(x,y)=x^{0.5}y^{0.5}=5(3)^{0.25}=6.58 \quad (12.73)$$

效用从 7.07 下降为 6.58,这可以作为度量税收无谓损失大小的一种方法。因为所有的税收收入都返还给了消费者,所以这里消费者除了无谓损失之外没有承受其他的负担,福利的损失完全是税收在 x 的消费者和生产者看到的价格间打入了一个楔子,使得激励扭曲所致。

请回答:写出税前和税后消费者面临的预算约束,并分析它们的组成成分。

12.12 偏离竞争的假设

尽管我们所讨论的偏离完全竞争的程度是无法计量的,但它们仍然可以被分为我们所感兴趣的几种类型:(1) 不完全竞争;(2) 外部性;(3) 公共品;(4) 不完全信息。在这里,我们将分别简要讨论一下这些问题,后面的章节里我们将继续拓展这些讨论。

12.12.1 不完全竞争

"不完全竞争"包含了所有的经济人能对价格决定施加市场影响的情形。如同第 5 篇中我们将看到的那样,在此情况下,这些经济人将会在决策中把这种影响也考虑进去。例如,一个面对向下倾斜的产品需求曲线的厂商会发现,多卖一个单位所得到的边际收益小于该商品的市场价格。因为边际收入的决策刺激追求利润最大化的厂商,边际收益而不是市场价格变成了最重要的决定因素。于是市场价格也就无法继续包含达到帕累托有效的信息内容。市场势力的另一些影响也导致了类似的信息扭曲。

12.12.2 外部性

当厂商与个人之间存在着与市场价格无关的相互影响时,竞争价格体系就将无法有效地配置资

源。其中最普遍的一个例子便是向空气中排放烟雾与垃圾的企业。这种状况就被称为外部性,即厂商的产量水平通过市场之外的途径影响了消费者福利。在第 20 章里我们将详尽讨论外在性的性质,但在这里我们就可以大概说清为什么这种非市场的相互作用的存在会影响价格体系有效配置资源的能力。因为当存在外部性时,市场价格反映的就不再是生产产品的全部成本。个体的边际成本和社会的边际成本将发生背离,额外的社会成本(也可能是收益)反映不到价格中去。因此,价格就不能传递真实的成本信息,而这是达到有效率的资源配置的必要条件。在第 20 章我们将看到,环境经济学研究的很重要一部分,就是可以通过何种途径改善这种背离造成的负面影响。

12.12.3 公共品

类似的价格体系失灵的问题还出现在所谓的"公共品"上。这类商品,比如说国防,通常有两条性质使得它们不适合作为市场上的商品出现。第一,这类物品是非竞争性的,即多一个人享受这种商品的收益的边际成本是零。这条性质意味着它的"合适"价格应该是零——显然生产这样的东西是不可能有利可图的。第二,这类物品是非排他性的,即消费者想要使用它们的时候,没有任何办法可以阻止。这样,在市场中,人人都希望别的家伙交钱,自己搭便车。这些都给市场经济造成了不小的麻烦,对此我们将在第 20 章中进行全面的分析。

12.12.4 不完全信息

在讨论完全竞争性价格的效率问题时,我们假设供给方和需求方都能即时知道交易发生时的价格。如果经济主体没法确定价格,或者市场没法达到均衡,我们当然也没法指望竞争性价格还能保持有效率。不完全的信息可以通过很多渠道影响市场结果,只要我们承认信息是不完全的,就必须建立模型说清楚信息是怎样传递到供给方和需求方的。为了避免扯太远,这里就不展开了。到了第 19 章,我们会回来细致地分析信息经济学这个发展迅速的经济学研究领域。

这里四个偏离竞争的假设告诉我们,在现实政策问题中应用福利经济学第一定律时必须非常谨慎。在后面的章节中,我们将看到政府通过政策影响有时可以提高效率。当然,也有很多情况下政策的影响确实是负面的,这时毫无疑问应该按第一定律,放松这些不利的管制。其实微观经济分析就是构造一个分析体系,用以区分这两类情形。

12.13 分配

尽管福利经济学第一定律指出,(在一定条件下)竞争性价格导致最有效率的资源配置,但没有办法保证这种配置在任何意义下都是"公平"的。正如 A. K. 森(A. K. Sen)所指出的那样,一个完全竞争的经济在帕累托意义上可能是有效率的,"即便这时一些人过着奢侈的生活,而另一些人却处于饥饿的边缘,但只要不削减富人的愉悦就不能改善饥饿者的境况……总之,社会有可能虽然达到了帕累托最优,但仍然令人完全无法忍受。"[①]对社会福利的正式经济分析已经超越了本课程的范围,

---

① A. K. Sen, *Collective Choice and Social Welfare* (San Francisco: Holden-Day, 1970), p. 22.

这里我们简单对分配问题作些介绍。

12.13.1 有交换的经济

为了研究分配问题，我们从最简单的假定开始：假设社会上只有两个人：Smith 和 Jones，并且两种商品（x 和 y）对两个人的供给是完全固定的。现在，我们可以用埃奇沃思矩形图来表现所有可能的商品配给情况。在图 12.11 中，矩形的长和宽分别表示两种商品的总量，Smith 的无差异曲线束以 O_S 为原点，Jones 的以 O_J 为原点。矩形内任意一点都代表一种可能的分配方案，而通过无差异曲线束可以表示各种分配案下两人各自的效用水平。

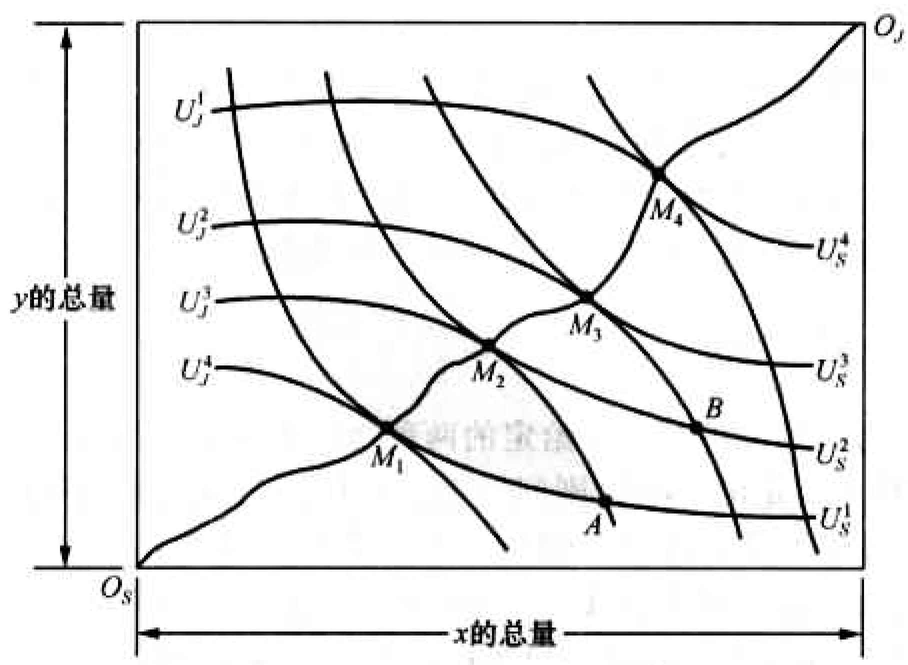


图 12.11　描述交换中帕累托最优的埃奇沃森矩形图

我们把有效率定义为要改善一方的效用，必须以损害另一方的效用为代价。在这样的意义下，曲线 O_SO_J 上的点都是有效率的。而像 A 点那样的配置则是无效率的，因为两人都可以选择移动到阴影区域内的某点那样的交易，使得两人的效用都获得提升。注意曲线 O_SO_J 上的点都满足使两人 MRS 相等，它被称作契约曲线。

12.13.2 互惠互利的交换

在矩形内任何不满足两人 MRS 相等的一点，都存在着帕累托改进的机会。考虑图 12.11 中的一个一般的分配方案 A，它在 Smith 的无差异曲线 U_S^1 与 Jones 的无差异曲线 U_J^3 上。显然，A 点两人的边际替代率（即无差异曲线斜率）不等。所以阴影区域内任意一点都是可以令双方都受益的交易结果——这样做了之后两人的效用水平都提高了。但当两人的边际替代率相等时，就不可能再有这种帕累托改进式的交易存在。图中四个在两条无差异曲线切线上的点 M_1、M_2、M_3、M_4 就是如此，任何偏离这一点的移动至少使其中一人效用受损。比如从 M_2 到 A，Smith 效用受损了，虽然 Jones 效用不变。而从 M_2 到 B 则是 Jones 受损，Smith 效用不变。总之，这样的点没有进一步作帕累托改进的余地，因而是帕累托最优的。

12.13.3 契约曲线

在埃奇沃思矩形图中，我们称达到帕累托最优的点集为契约曲线。在图 12.11 中这些点是一条曲线 O_SO_J，中间包括 M_1、M_2、M_3、M_4 四个在切线上的点（以及其余所有这样在切线上的点）。契约曲线之外的点是无效率的，因而互惠的交易是可能的；但是顾名思义，契约曲线上的点就没有这种交易的余地。即使是沿着契约曲线移动的交易（比如从 M_1 到 M_2）也不是互惠的，因为总有一个赢家（Smith）和一个输家（Jones）。下面把这些概括成定义：

定义

契约曲线。在有交换的经济中，所有的对现有商品配置有效率的点均在**契约曲线（contract curve）**上（可能是多维空间中的）。契约曲线之外的点一定是无效率的，因为向契约曲线上移动的交易可以确定无疑地让双方都变得更好。然而沿着契约曲线，双方的偏好在某种意义上就形成竞争关系，因为要想改善一方的福利只有损害另一方的福利才有可能。

12.13.4 初始禀赋下的交换

之前的讨论中，我们考虑的问题是总量给定的两种物品如何配置给两人是有效率的。如果参与交换的消费者一开始就拥有特定的商品量则问题会稍有区别。因为最初的配置不可能都是有效的配置，所以仍可以肯定每个交易者都能从自愿的交易中获益。另一方面，也没人愿意从事使本人状况恶化的交易。因此，只有一部分契约曲线可看做自愿交易产生的配置。

这些观点可用图 12.12 来解释。埃奇沃思矩形图的 A 点表示 Smith 与 Jones 的初始禀赋。如前

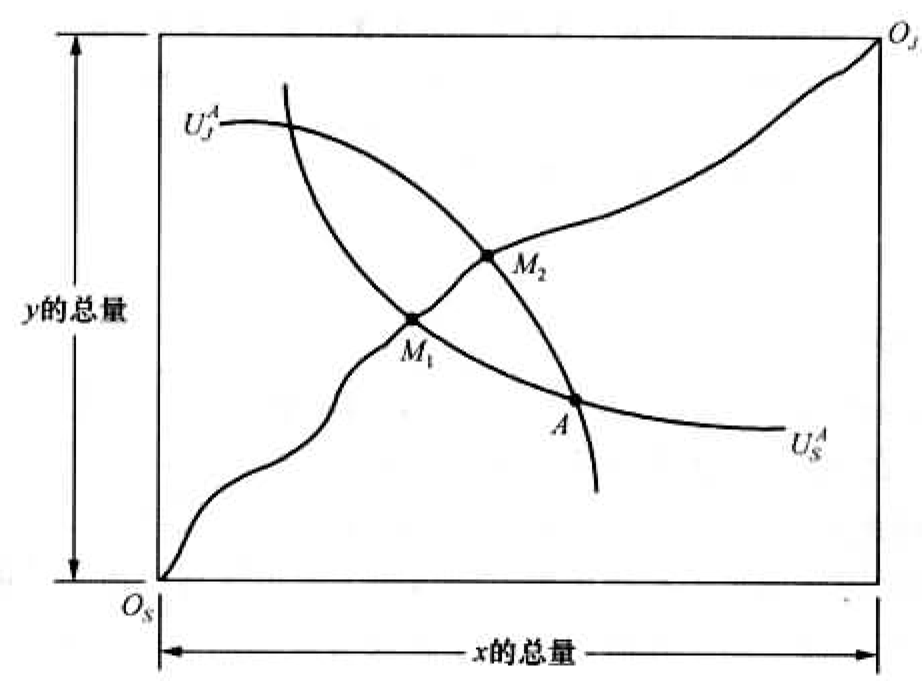


图 12.12　初始禀赋时的交换

如果消费者在初始禀赋时开始交易（以 A 点为代表），两人都不愿接受低于 A 点效用水平的配置。Smith 不接受低于 U_S^A 效用水平的配置，而 Jones 不接受低于 U_J^A 效用水平的配置。因此，并非契约曲线上各点都能产生自由交换。如果每个交易者有权拒绝交易，那么只在 M_1 到 M_2 之间存在有效率的配置，而我们要求最终的配置结果是有效率的。

所述，矩形图的两维度为两种商品（x 与 y）的总量。O_SO_J 线代表有效率配置的契约曲线。设通过 A 点的 Smith 的无差异曲线为 U_S^A，同理，通过 A 点的 Jones 的无差异曲线为 U_J^A。注意在 A 点二人无差异曲线不相切，因而初始禀赋是无效率的。如果交易结果会使他们的效用分别低于 U_S^A 与 U_J^A 的效用水平，二人都不会接受。他们宁愿避免交易也不愿接受那种恶化的交易结果。因此，如果我们分析的着眼点仅在有效率配置上，那么只有在契约曲线上 M_1 与 M_2 的范围内才会产生有成果的交换。考虑到交易者进行交换时的最初禀赋，自由交换的有效率范围就缩小了。如果商品的最初配置有利于 Jones，那么任何最终的分配也将有利于她，因为正是由于利益的考虑才使她拒绝接受降低效用水平的交易。然而，很明显二人都可以从交换中获利。使交易在 M_1 到 M_2 的范围内进行，无疑比处于 A 点时使二人的利益都高。

12.13.5 分配难题和福利经济学第二定律

这是关于分配问题的一个最具概括性的说法：如果初始的禀赋倾向于某一经济主体，那么由竞争性价格导致的帕累托最优的结果仍然倾向于他们，自愿的交易并不能消除这种差距，只有通过某些转移支付的手段才能实现更为公平的结果。

所谓的"福利经济学第二定律"就是由这样的想法推出的。它的表述是：任何合意的、"平等的"分配方式，都可以在适当地调整每个人的初始禀赋后，通过市场上的竞争性价格最有效率地实现。正是这一定律引发了经济学家关于各种各样的效率和平等问题的无穷无尽的争论。简单来说，经济学家常常争论应该充分利用竞争性定价的高效率"把馅饼做大"，再利用一次总付的转移支付这种无损于效率的方式求得平等。可惜的是，第二步"一次总付的转移支付"实施起来没有说的那么容易，现实中所有的税收和转移支付体制都有实实在在的效率损失。因此，福利经济学第一和第二定律算不上是一切经济政策的万灵药。但虽然如此，仍然有许许多多的问题涉及竞争性价格机制下的效率与平等问题，因此对以政策干预市场来达到合意的"平等"仍是永远不会过时的问题。事实上，福利经济学在任何实际问题中的应用，都离不开对它涉及的效率和平等两方面的具体研究。

例 12.6

二人世界中的交换

先确定一些概念，我们设想存在着这样一个交换经济：有整整 1 000 个单位的软饮料（x）与 1 000 个单位的汉堡包（y）。如果 Smith 的效用函数如下

$$U_S(x_S, y_S) = x_S^{2/3} y_S^{1/3} \tag{12.74}$$

Jones 的效用函数为

$$U_J(x_J, y_J) = x_J^{1/3} y_J^{2/3} \tag{12.75}$$

我们首先计算一下软饮料与汉堡包的有效率的配置方法。由效用函数可以看出 Smith 相对更偏好软饮料，而 Jones 相对更偏好汉堡包。因此，我们可以预测到一种比较有效的配置方式是给 Smith 相对更多的软饮料，给 Jones 相对更多的汉堡包。

为找出这种有效率的配置点，假设 Smith 开始时处于特定的效用水平 U_S 上。在给定的 Smith 效

用约束条件下，现在我们的问题是寻找能使 Jones 效用尽可能大的 x_S, y_S, x_J, y_J。建立这个问题的拉格朗日表达式如下

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= U_J(x_J, y_J) + \lambda[U_S(x_S, y_S) - \bar{U}_S] \\ &= x_J^{1/3} y_J^{2/3} + \lambda(x_S^{2/3} y_S^{1/3} - \bar{U}_S)\end{aligned} \tag{12.76}$$

记住现在 Jones 得到了 Smith 所没有得到的效用，反之亦然。因此，

$$x_J = 1\,000 - x_S$$

并且

$$y_J = 1\,000 - y_S \tag{12.77}$$

这里拉格朗日公式仅是两个变量 x_S, y_S 的一个函数

$$\mathscr{L} = (1\,000 - x_S)^{1/3}(1\,000 - y_S)^{2/3} + \lambda(x_S^{2/3} y_S^{1/3} - \bar{U}_S) \tag{12.78}$$

求极大值的一阶条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_S} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1\,000 - y_S}{1\,000 - x_S}\right)^{2/3} + \frac{2\lambda}{3}\left(\frac{y_S}{x_S}\right)^{1/3} = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_S} &= -\frac{2}{3}\left(\frac{1\,000 - x_S}{1\,000 - y_S}\right)^{1/3} + \frac{\lambda}{3}\left(\frac{x_S}{y_S}\right)^{2/3} = 0\end{aligned} \tag{12.79}$$

将 λ 项移到等式右侧，并用上式除以下式得①

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1\,000 - y_S}{1\,000 - x_S}\right) = 2\left(\frac{y_S}{x_S}\right) \tag{12.80}$$

或

$$\frac{x_S}{(1\,000 - x_S)} = \left(\frac{4y_S}{1\,000 - y_S}\right) \tag{12.81}$$

这就是我们要找的有效率需要满足的条件，利用 12.81 式可以求出所有有效率的解。在表 12.1 中列出了 x_S 从 0 到 1 000 时（也就是说 Smith 从一无所有到拥有全部）部分参数的数值。

帕累托最优。现在说明为什么契约曲线之外的点无效率。假设开始软饮料和汉堡包都平均分配。两人都拿到 500 单位的汉堡和饮料，因此两人的效用都是 500。但你拿计算器按两下就会发现，契约曲线上有很多点可以提供给两人的效用都大于 500。在表 12.1 中大约也能看出来，这些点应该在 Smith 拿 600 到 700 单位软饮料处，要精确地计算互惠互利的交易区域边界也不难。比如当 $x_S = 660, y_S = 327, x_J = 340, y_J = 673$，在这样的分配下，Smith 的效用是 522，Jones 的是 536。显然两人都比初始分配方案要好，所以他们一定会愿意发生一个移动到契约曲线上去的交易。

初始禀赋的影响。再看看初始禀赋的差异会在怎样的程度上限制帕累托最优结果的范围。假设 Smith 开始时处在非常有利的地位，获得了 $x_S = 800, y_S = 800$，而 Jones 只有 $x_J = 200, y_J = 200$。当然在这一点上也存在着帕累托改进的余地，但没有一种帕累托最优结果能让 Jones 的福利在很大程度上得到改善。比如，假设限定 Smith 效用不变，有效率的交易结果是 $x_S = 884, y_S = 657, x_J = 116, y_J$

① 注意，等式 12.80 重复了当是有效率的配置时，消费者的边际替代率必须相等这一条件。也就是说，（Smith 的）$MRS = (\partial U_S/\partial x)/(\partial U_S/\partial y) = 2(y/x)$，并且（Jones 的）$MRS = (\partial U_J/\partial x)/(\partial U_J/\partial y) = 1/2(y/x)$。

=343，这使得 Jones 的效用由200增加到239。这就是给定 Smith 的效用不受损害的条件下，Jones 能得到的最好的结果了。尽管通过交易 Jones 也改善了不少，但距离平等的分配还是差得很远。

表 12.1　对 Smith 与 Jones 的 1 000 单位软饮料与 1 000 个汉堡包的帕累托最优配置

x_S	y_S	$U_S = x_S^{2/3} y_S^{1/3}$	$x_J = 1\,000 - x_S$	$y_J = 1\,000 - y_S$	$U_J = x_J^{1/3} y_J^{2/3}$
0	0	0	1 000	1 000	1 000
100	27	65	900	973	948
200	59	133	800	941	891
300	97	206	700	903	830
400	143	284	600	857	761
500	200	368	500	800	684
600	273	461	400	727	596
700	368	565	300	632	493
800	500	684	200	500	368
900	692	825	100	308	212
1 000	1 000	1 000	0	0	0

请回答：在本例的条件下，如果两人的偏好改变，有没有可能使得他们从贸易中获得更大的收益？有没有这样的偏好，使得即使两人初始禀赋差得很远，通过交易也能达到平等？

小　结

斯密曾断言自由竞争的市场是最有效率的机制，本章从不同角度的分析证实了他的猜想。我们建立了同时分析多个市场的一般均衡模型，并用它分析了几个关于社会福利的议题。现将本章重点归纳如下：

- 人们的偏好和社会生产技术的限制是构建一般均衡模型的根基。最简单的一个这样的模型是只有两种商品的情况下，由一束表示偏好的无差异曲线和一条凹的生产可能性边界构成的。

- 多个竞争性市场的供求双方会根据价格的信息作边际上的调整，最终达到均衡状态。瓦尔拉斯定理证明了多个市场下这样的均衡价格一定存在。

- 市场上的竞争性价格将导致资源的配置达到帕累托最优的状态。这就是福利经济学第一定律。

- 影响竞争性市场发挥其有效配置资源能力的因素包括：(1) 市场势力；(2) 外部性；(3) 公共品；(4) 不完全信息。

- 完全竞争的市场不一定会导致平等的资源配置结果，特别是初始禀赋相去甚远时更是如此。理论上，任何想要达到的分配结果都可以通过竞争性的市场和一次总付形式的转移支付实现，但落实这样的转移支付政策会有各种各样的困难。

练 习 题

12.1 假定大炮(x)与黄油(y)的生产可能性边界为

$$x^2 + 2y^2 = 900$$

a. 请画出这个边界。

b. 如果个人在消费时总会保持 $y = 2x$ 的比例,会生产出多少 x 与 y?

c. 在 b 中所描述的点上,*RPT* 为多大?在那一点上,是什么样的价格比率引致了生产?(通过研究 x 与 y 围绕最优点的微小变化应该可以大致算出这个斜率。)

d. 在 a 中的图上画出你的答案。

12.2 这个问题的目的是研究在规模报酬、要素密集与生产可能性边界的形状之间的关系。

假定配置在商品 x 与商品 y 的生产上的资本与劳动的供给是一定的,x 的生产函数为

$$x = k^{\alpha}l^{\beta}$$

y 的生产函数为

$$y = k^{\gamma}l^{\delta}$$

这里,参数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 在整个问题中会取不同的值。

既可以用直觉、计算机,也可以用正式的数学方法去推导在下面的各种情况下 x 与 y 的生产可能性边界:

a. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$

b. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{3}, \delta = \frac{2}{3}$

c. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \delta = \frac{2}{3}$

d. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{2}{3}$

e. $\alpha = \beta = 0.6, \gamma = 0.2, \delta = 1.0$

f. $\alpha = \beta = 0.7, \gamma = 0.6, \delta = 0.8$

规模报酬递增总会使生产可能性边界为凸的吗?请解释。

12.3 Podunk 国用土地与劳动只生产小麦与布。两者的生产函数都是规模收益不变的。小麦是土地相对密集的商品。

a. 请用语言与图示解释相对于布(p)的价格,在这两种行业中的每一种小麦的价格怎样决定土地对劳动的比率。

b. 假定 p 由外部的力量决定(如果 Podunk 国是一个与“很大的”外部自由贸易的“小”国的话,情况可能是这样)。请用埃奇沃思矩形图表示出,如果 Podunk 国的劳动供给增加,布的产出将上升,而小麦的产出将下降。

12.4 假定有两个人(Smith 与 Jones),每个人都有 10 个小时的劳动,可以生产冰激凌(x)或鸡汤(y)。Smith 的效用函数为

$$U_S = x^{0.3}y^{0.7}$$

Jones 的效用函数为

$$U_J = x^{0.5}y^{0.5}$$

个人并不在意他们生产的是 x 还是 y,并且每一种商品的生产函数为

$$x = 2l,$$
$$y = 3l$$

其中,l 是投入到每一种商品生产中的总的劳动。请根据这些信息计算

a. 价格比率 p_x/p_y 会是多少?

b. 在这个价格比率下,Smith 与 Jones 会需要多少 x 与 y?(提示:在此设工资等于 1。)

c. 为了满足 b 中计算出来的需求，应怎样在 x 与 y 之间分配劳动？

12.5 假定在一个经济中只有三种商品（x_1，x_2，x_3），对于 x_2 与 x_3 的过度需求函数为

$$ED_2 = -3p_2/p_1 + 2p_3/p_1 - 1$$

$$ED_3 = 4p_2/p_1 - 2p_3/p_1 - 2$$

a. 请表示这些函数在 p_1、p_2 与 p_3 上是零次齐次的。

b. 运用瓦尔拉斯法则证明，如果 $ED_2 = ED_3 = 0$，ED_1 也一定为零。你能否同样用瓦尔拉斯法则去计算 ED_1？

c. 请解决有关均衡相对价格 p_2/p_1 与 p_3/p_1 的方程组。p_3/p_2 的均衡值是多少？

12.6 假设鲁宾逊·克鲁索生产并消费鱼（F）与椰子（C）。假设在某一个时期，他决定工作 200 小时，至于到底把这些时间用到捕鱼还是收椰子上是无差别的。鲁宾逊的鱼产量为

$$F = \sqrt{l_F}$$

他的椰子产量为

$$C = \sqrt{l_C}$$

其中 l_F 与 l_C 分别为花在捕鱼和收椰子上的时间，结果有

$$l_C + l_F = 200$$

鲁宾逊·克鲁索对于鱼与椰子的效用函数为

$$效用 = \sqrt{F \cdot C}$$

a. 如果鲁宾逊无法与外部世界进行贸易，他将如何配置他的劳动？F 与 C 的最优水平是多少？他的效用是多少？（鱼替代椰子的）RPT 是多少？

b. 假设贸易可以进行，且鲁宾逊能以 $p_F/p_C = 2/1$ 的价格比率进行交易。如果他仍然按照 a 中的产量生产鱼与椰子，在给定上述贸易机会的情况下，他会作出什么样的消费选择？他的新的效用水平将是多少？

c. 如果鲁宾逊调整他的生产以利用世界价格的优势，b 中的答案会有什么变化？

d. 把你的 a、b 与 c 中的结果用图形表示出来。

12.7 考虑在一个经济中仅有一种生产各种商品的技术：

商　　品	食品	布匹
每单位产出中的劳动	1	1
每单位产出中的土地	2	1

a. 假设土地是无限的，但劳动等于 100，写下并画出生产可能性边界。

b. 假设劳动是无限的，但土地等于 150，写下并画出生产可能性边界。

c. 假设劳动等于 100 且土地等于 150。写下并画出生产可能性边界。（提示：生产可能性边界的截距分别是什么？什么时候劳动会全部被用上？什么时候土地会全部被用上？什么时候两者均会被全部用上？）

d. 解释为什么 c 中的生产可能性边界是凹的。

e. 画出 c 情况下食品的相对价格与产量的函数关系的图形。

f. 如果消费者坚持用 4 单位的食品去交换 5 单位的布匹，食品的相对价格是多少？为什么？

g. 解释为什么 $p_F/p_C = 1.1$ 与 $p_F/p_C = 1.9$ 时产出是相同的。

h. 假设资本也是生产食品与布匹所需要的，而每单位食品与每单位布匹所需的资本分别为 0.8 与 0.9。共有 100 单位的资本。这时的生产可能性边界又会是什么样子的？在这种情况下回

答 e 中的问题。

12.8 Ruritania 王国有两个地区 A 与 B，两种商品（x 与 y）在两个地区都有生产。A 地区的生产函数为

$$x_A = \sqrt{l_x}$$

$$y_A = \sqrt{l_y}$$

l_x 与 l_y 分别是投在 x 与 y 生产上的劳动。A 地区共有 100 单位劳动。即

$$l_x + l_y = 100$$

对 B 地区有类似表达，生产函数为

$$x_B = \frac{1}{2}\sqrt{l_x}$$

$$y_B = \frac{1}{2}\sqrt{l_y}$$

B 地区也有 100 单位劳动。即

$$l_x + l_y = 100$$

a. 计算 A 与 B 地区的生产可能性曲线。

b. 如果该国 A 与 B 地区的生产配置是有效的，必须满足什么条件（假设劳动不能从一地移向另一地）？

c. 计算该国的生产可能性曲线（假设两地区的劳动不具有流动性）。如果 x 的产出为 12，该国能生产多少 y？

提示：在这里图形分析可能很有帮助。

12.9 Smith 与 Jones 受困于一荒岛上。每人手中都有几片火腿（H）与奶酪（C）。Smith 对吃特别挑剔，永远只按 2 片奶酪 1 片火腿的固定比例进食。他的效用函数为 $Us = \min(H, C/2)$。

Jones 的饮食习惯则灵活得多，她的效用函数为 $U_J = 4H + 3C$。食物总量为 100 片火腿、200 片奶酪。

a. 用埃奇沃斯矩形图表示出在以上条件下可能发生的各种交易情况。满足任何均衡状况的唯一的交换比率是什么？

b. 假设 Smith 最初有 40H 与 80C，均衡交换点是什么？

c. 假设 Smith 最初有 60H 与 80C，均衡交换点是什么？

d. 假设 Smith（二人中明显的强者）决定不按游戏规则行事，那么最后的均衡点将会怎么样？

12.10 在例 12.6 中，每人的初始禀赋为每种商品各 500 单位。

a. 将 Smith 与 Jones 对 x 商品与 y 商品的需求表示为 p_x、p_y 与他们初始禀赋的函数。

b. 运用 a 中的需求函数及每种商品的总需求必须为 1 000 的条件计算均衡价格比 p_x/p_y。每人对每种商品的均衡消费水平是什么？

c. 当初始禀赋变为以下各种情况时，结论有何变化？并解释变化的原因。

	Smith 的禀赋		Jones 的禀赋	
	x	y	x	y
a	0	1 000	1 000	0
b	600	600	400	400
c	400	400	600	600
d	1 000	1 000	0	0

推荐阅读文献

Arrow, K. J., and F. H. Hahn. *General Competitive Analysis*. Chaps. 1, 2, and 4. Amsterdem: North-Holland, 1978.

该书有对一般均衡分析的复杂的数学处理,其中每一章都有很好的文字介绍。

Debreu, G. "Existence of Competitive Equilibrium". In K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds. *Handbook of Mathematical Economics*. vol. 2. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1982. pp. 697—743.

该书是对基于不动点定理的存在性证明的相当难的概述,其中包括一系列复杂的文献。

Debreu, G. *Theory of Value*. New York: John Wiley & Sons, 1959.

该书是基本的文献,数学知识很难。关于所运用的数学工具,有一章作了很好的介绍。

Ginburgh, V., and M. Keyzer. *The Structure of Applied General Equilibrium Models*. Cambridge, MA: MIT Press, 1997.

该书详细讨论了 CGE 模型的各方面问题,并引用了一些实证研究内容。

Harberger, A. "The Incidence of the Corporate Income Tax". *Journal of Political Economy* (January/February 1962): 215—240.

该文很好地运用两部门的一般均衡模型研究了税收给资本带来的最终负担。

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford: Oxford University Press, 1995.

本书第四部分是讲一般均衡分析的。其中第 17 章(存在性)和 18 章(一般均衡和博弈论)特别有用。第 19 章和第 20 章讲的是以上内容的拓展。

Salanie, B. *Microeconomic Models of Market Failure*. Cambridge, MA: MIT Press, 2000.

非常好的福利经济学理论总论,书中详细分析了外部性问题、公共品问题以及不完全信息问题。

Sen, A. K. *Collective Choice and Social Welfare*, Chaps 1 and 2. San Francisco: Holden-Day, 1970.

社会选择理论的基本文献。前面几章关于帕累托最优的意义和局限性的讨论颇为精辟。

扩　展

可计算的一般均衡模型

计算机技术的发展,使得**可计算的一般均衡模型(computable general equilibrium, CGE)**变得可行,并且做得越来越精细,以包含更多的细节。现在的模型已经可以包含数百个厂商和个人,每个厂商都有各自的生产函数,每个人也有自己特定的效用函数。研究一般均衡问题时,需要先设定这些参数,然后把过去的经验数据代进去计算,求出的数值解拿来和现实数据对比。这样几次"校准"模型后,它就能比较精确地反映现实经济,然后我们就能用它分析某种经济政策的变动会对整体经济产生什么样的影响。这里,我们简单介绍一下它的几类应用。

E12.1 贸易模型

一般均衡模型最重要的一个应用就是用来分析贸易壁垒问题。因为贸易壁垒(或者削弱贸易壁垒)的影响是一个很有争议的问题,而争

论主要集中在它对实际工资的影响，而一般均衡模型分析这样的问题最合适不过。

这样的模型有两个不寻常的特点。第一，模型一般是针对一种特定商品的国产货与进口货之间的矛盾，我们要在消费者的效用函数中反映出两类商品较大的差异性。就是说，“美国纺织品”和“墨西哥纺织品”是两类不太相同的产品，尽管一般的贸易理论中都认为它们是同质的。这是因为研究人员发现，只有当假设这两类商品的互相可替代性很有限时，模型才能比较准确地反映实际。

贸易 CGE 模型的第二个特点是，它的生产部分用的是规模报酬递增的生产函数，因为规模效益正是小型的经济体从贸易中获得的最主要的好处。但是，使用规模报酬递增的假设，就意味着违背了完全竞争和价格接受者的假设。这样就要引入厂商定价的模型，以及古诺不完全竞争模型（详见第 14 章）等等。

北美自由贸易

一些研究范围最广的 CGE 模型被拿来分析北美自由贸易公约（NAFTA, North American Free Trade Agreement）的影响。每个模型都得到了这样的结论：加入公约确实使每个国家的福利都得到改善了。墨西哥得利的主要原因是该公约降低了它和美国在钢铁和纺织品上的贸易壁垒，而加拿大得利主要是因为它的几个关键产业的规模效益。布朗（Brown, 1992）用一系列 CGE 模型对北美自由贸易作了研究，得出的结论是所有国家因自由贸易得到的好处，大约相当于该国 GDP 的 2% 到 3%。虽然具体到美国，这种收益相对小了很多，但加入该公约使得本国的市场竞争加剧，这对整体经济福利起到了明显的改善作用。

E12.2　税收和转移支付

CGE 的第二类主要应用是预测税收政策和转移支付政策的潜在影响。用于此目的的模型在供给一方要做得很细致。比如说，收入税的税率变化（包括增税和减税）在边际上对劳动供给有重要影响，而这种影响非常复杂，也只有一般均衡模型能够比较准确地模拟。再比如说，税收/转移支付政策还会影响到人们储蓄和投资的决策，这些都需要在模型中引入合适的细节才能实现（比如，为了研究退休金的政策，要把人群按年龄分类等等）。

荷兰的 MIMIC 模型

这类模型中最精致的一个应该是荷兰中央计划委员会（Dutch Central Planning Bureau）开发的，用来分析公共政策的 Micro Marco Model（MIMIC）。该模型比较强调社会福利，以及他们希望改善的一些社会问题（最明显的一条是失业，这个其他 CGE 模型中一般没有）。Gelauff 和 Graaflund（1994）总结了这个模型的特点，并用它分析了荷兰在 20 世纪 90 年代提出的税法改革对大批失业者和残疾人的福利的潜在影响。

E12.3　环境问题模型

CGE 模型用来分析环境政策对经济的影响也非常好。在这个模型里，我们主要考虑一种经济活动排放的污染物对其他经济活动的负作用。在给定了我们要达到的改善环境的目标后（比如说减少排放某种污染物多少吨），我们可以靠 CGE 来计算能达到目的的各种不同的方案造成的经济成本各为多少。利用 CGE 模型的一个优越之处在于，通过其计算结果我们能看出环境政策造成的收入再分配是怎样的——这方面的问题在基于单个行业模型的研究中是看不出来的。

评估减少 CO_2 排放的方案

很多种能源使用过程中都会排放 CO_2 气

体，它会造成全球变暖的严重后果，所以针对减少这种温室气体排放而提出的政策有很多。由于这类政策造成的后果各不相同，且往往涉及很多方面，所以 CGE 模型是一种理想的分析工具。这类模型做得最好的是由 OCED 开发的 General Equilibrium Environmental Model (GREEN)，它的基本结构框架是由 Burniaux，Nicoletti 和 Oliviera-Martins 于 1992 年完成的。它模拟了欧洲国家关于减少 CO_2 排放可能作出的不同决策，比如征收二氧化碳税，或者加强对汽车和发电厂排放的管制。结果显示，按照这些政策预期的力度，经济需要付出的成本相对不高，但是大部分政策都会造成不利的收入再分配。这样，就需要政府配合进一步的转移支付政策。

E12.4 地区和城市的模型

我们要介绍的 CGE 的最后一类应用是那些与空间尺度关系密切的经济议题。对于这类问题，建模时要详细考虑各种商品的运输成本，以及劳动力的流动性，因为它分析的核心就是那些涉及交通运输的经济活动。在 CGE 中引入运输成本类似于增加额外的商品差异性，因为它使得本来应该是同质的商品的相对价格发生了变化。一个区域内的市场均衡结果对运输成本的具体分布是很敏感的。

政府采购的变动

地区 CGE 模型已经被广泛用于研究政府购买政策变动对当地经济的影响。比如，Holtman、Robinson 和 Subramanian(1996)利用它研究政府削减国防预算对加州本地经济的影响。他们发现，这种影响的大小取决于技术工人搬迁的成本。Bernat 和 Hanson 在研究美国政府削减对农业价格支持政策的预算时，也得出了类似的结论。尽管它会使整个经济更有效率，但也确实给农村的经济带来了很强的负面冲击。

参考文献

Bernat, G. A., and K. Hanson. "Regional Impacts of Farm Programs: A Top-Down CGE Analysis". *Review of Regional Studies* (Winter 1995):331—350.

Brown, D. K. "The Impact of North American Free Trade Area: Applied General Equilibrium Models". In N. Lustig, B. P. Bosworth, and R. Z. Lawrence, eds., *North American Free Trade: Assessing the Impact*. Washington, DC: The Brookings Institution, 1992, p. 26068.

Burniaux, J. M., G. Nicoletti, and J. Oliviera-Martins. "Green: A Global Model for Quantifying the Costs of Policies to Curb CO_2 Emissions". *OECD Economic Studies* (*Winter* 1992):49—92.

Gelauff, G. M. M., and J. J. Graaflund. *Modeling Welfare State Reform*. Amsterdam: North Holland, 1994.

Hoffman, S., S. Robinson, and S. Subramanian. "The Role of Defense Cuts in the California Recession: Computable General Equilibrium Models and Interstate Fair Mobility". *Journal of Regional Science* (November 1996):571—595.

第5篇

不完全竞争模型

第四部分最重要的一个假设就是供给和需求双方都是价格接受者。所有的经济行为人都被假设不能对价格施加影响,因此价格在他们的决策中被当作固定参数对待。这一行为假设对我们的多数分析,特别是对于竞争性价格系统的有效性分析是关键性的。在这一部分,我们将考察放弃供给者是价格接受者这一假设的结果。

我们从第13章开始对不完全竞争进行考察,此处的分析中一种商品只有一个供给者。这样的供给者被称作垄断者(monopoly)。这一供给者面对的是其产品的整个需求曲线,并且可以选择其上的任意一点进行生产。这就是说,垄断供给者可以选择需求曲线上任何他认为最有利可图的价格—数量组合,其行为仅仅受其产品的需求曲线的特征,而不受竞争对手的行为制约。可见,这是与完全竞争完全相反的极端情形,在完全竞争的情况下,大量供给者的存在迫使任何一家厂商都只能是价格的接受者。

在第14章,我们从垄断这种相对简单的情形转向包含“几个”厂商的市场结构。

正如我们将看到的，进一步增加供给者（即使仅限于双头垄断的两厂商模型）将使分析变得更加复杂。在这种情况下，任何一个厂商都不是面对整个市场需求曲线，而是面对一条其自身产出决定的需求曲线，该需求曲线的性质部分地由其竞争对手的行动所决定，如通用汽车公司所面对的需求曲线部分地由福特公司与丰田公司的产出决定。为建立一个现实的模型，需要对厂商认为对手会如何行动作出一些假设。

第 14 章介绍的厂商之间的竞争与差别产品问题通常也可作为经济博弈论的应用来处理。在第 15 章我们对该领域进行了一个一般性的介绍。我们将表明有多少种策略形式可由博弈论来解释，并且阐明市场均衡的概念以及这些模型的重要相似之处。

第13章 垄断市场模型

如果一种商品仅有一个生产者,那么这种特定商品的市场被称为垄断。这一厂商面对的是整个市场的需求曲线。凭借对于这条需求曲线的了解,垄断者作出生产多少产品的决策。与完全竞争的厂商产出决策(对市场价格不产生影响)不同,垄断者的产出决策实际上将决定商品的价格。在这个意义上,垄断与完全竞争所刻画的市场是两个完全相反的极端情形。

有时将垄断视为具有设定价格的权利会更加方便。实际操作中,一个垄断者可以选择市场需求曲线上它所喜好的点进行生产。它可能选择价格或者产量,但不能同时选择二者。在本章,我们通常假设垄断者选择产量以使得利润最大化,然后将价格设定在由选择的产出所确定的水平上。在某些地方,我们将重新讨论价格的设定这一简单事件。

13.1 进入的壁垒

给出以上约定,我们有如下定义:

定义

垄断。垄断(monopoly)就是整个市场只有一个供给者。该厂商可以选择市场需求曲线上的任何一点进行生产。

垄断存在的原因是其他厂商认为这一市场无利可图或者难以进入这一市场。因此,**进入壁垒(barriers to entry)**是所有垄断权力的根源。如果其他厂商能够进入一个市场,根据定义,这个市场就不再是一个垄断市场。一般说来有两类进入壁垒:技术壁垒与法律壁垒。

13.1.1 进入的技术壁垒

一个基本的技术壁垒是商品的生产在一个大的产出水平范围内呈现边际(与平均)成本递减。生产技术使得规模相对大的厂商是低成本的生产者。在这种情况下[有时称之为**自然垄断(natural monopoly)**],一个厂商可能发现通过削减价格将其他厂商挤出该产业是有利可图的。同样,一旦建立起垄断,进入就很困难,因为新厂商生产规模相对较小,从而生产的平均成本相对较高。特别需要

强调的是，成本递减的范围“很大”仅仅是相对于与其有关的市场而言，并不要求有一个成本递减范围的绝对尺度。例如，当与整个美国市场相比较时，混凝土的生产与运送在一个较大的产出范围内呈现边际成本递减的状况并不存在。然而，在一个特定的小镇，边际成本递减可以使得垄断得以形成。该产业的高运输成本倾向于将一个市场同另一市场隔离开来。

垄断的另一个技术基础是一项低成本生产技术的特殊知识。但对害怕对手进入的垄断者而言，问题在于维持这项技术的独占性。当涉及技术时，除非这项技术受到了专利保护（参见下文），否则维持独占性是极其困难的。独特资源的拥有权，比如矿产开采权或土地所有权、特有的管理才能，也都可能成为维持垄断的基础。

13.1.2 进入的法律壁垒

很多纯粹的垄断是由法律而不是由经济条件所带来的。一个由政府授予垄断地位的重要例子是通过专利对生产技术进行法律保护。受保护的一些有利可图的产品例如处方药、计算机芯片、迪斯尼电影等，它们都得以（至少一段时间内）不面临可能的仿制者的直接竞争。由于这些产品的基本技术被唯一地指定给一个厂商拥有，垄断地位便得以形成。这样一个由政府授予的垄断地位所产生的保护来自于专利系统，它使创新更加有利可图，从而激励了创新。然而，这样的创新行为所带来的收益是否能超过技术垄断所带来的成本是一个广受争议的问题。

由法律创造的垄断的第二个例子是授予一家厂商在一个市场提供某种服务的特许权。这些特许权被授予公用事业（煤气与电力）、通讯业、邮电业、一些电视台与电台，以及其他类似行业。赞成建立这样的特许权垄断的理由通常是有关的产业是自然垄断的产业：这一产业的平均成本在一个大的产出范围内是递减的，从而，可以通过将产业变为一个垄断产业来达到最小的平均成本。公用事业与通讯业常常被认为是很好的例子。无疑，那些网络呈现平均成本递减直到覆盖全部可达范围的地方电力与电话服务就属于此种情况。但是最近的长途电话业的放宽管制以及发电业的类似改革表明，即使是这些自然垄断的产业，也可能不必全部特许权化。此外，特许权的授予可能很大程度上是基于政治上的原因，美国的邮政业以及其他国家的许多国有产业（航空、电台与电视台、银行）似乎就是如此。

13.1.3 进入壁垒的设立

虽然有一些进入壁垒是独立于垄断者自身行为的，但另外一些壁垒则可能直接来自于他们的行为。例如，厂商可能开发出特有的产品与技术并采取特别的手段防止被竞争者仿造。或者，厂商可能买断特有资源以阻止可能的竞争者进入。例如，戴比尔斯（De Beers）卡特尔控制了世界大部分的金刚石矿。最后，未来的垄断者可能请求政府帮助设置进入的壁垒，他可能说服议会立法限制新进入者，以便“维持一个有秩序的市场”，或者实行一些会提高潜在进入者成本的健康与安全方面的立法。因为垄断者既拥有其业务的特殊知识，又受到设立壁垒的明显激励，所以他非常有可能成功地设置这些进入壁垒。

一个垄断者设置进入壁垒的努力可能要付出现实的资源成本。保守秘密、购买特有资源、进行政治上的游说都是有代价的行动。对于垄断的完整分析不仅包含成本最小化与产出选择（与完全竞

争条件下一样）的问题，还包含设置进入壁垒所带来的利润最大化分析。然而，我们在这里不准备对这类问题进行很详细的考察。[1] 一般说来，我们将假设垄断者不能做任何事情来影响进入壁垒，因此，此时厂商的成本与完全竞争时厂商的成本相同。不过，有时我们也会提到为保护垄断市场导致一些可能的开销所引起的麻烦。关于这些"寻租"支出的更全面的讨论将在第 21 章进行。

13.2 利润最大化与产出选择

为了最大化利润，一个垄断者将选择这样一个产出水平，在这个产出水平上边际收益等于边际成本。因为垄断者与一个完全竞争厂商不同，它面对的是一个负斜率的市场需求曲线，边际收益小于价格。为了多销售一单位产品，垄断者必须降低每一单位产品的价格，才可以产生额外的需求以吸纳这一单位产品。因此，一个厂商的利润最大化产出水平是图 13.1 中的 Q^* 点。在该水平上，边际收益等于边际成本，而且利润达到了最大。

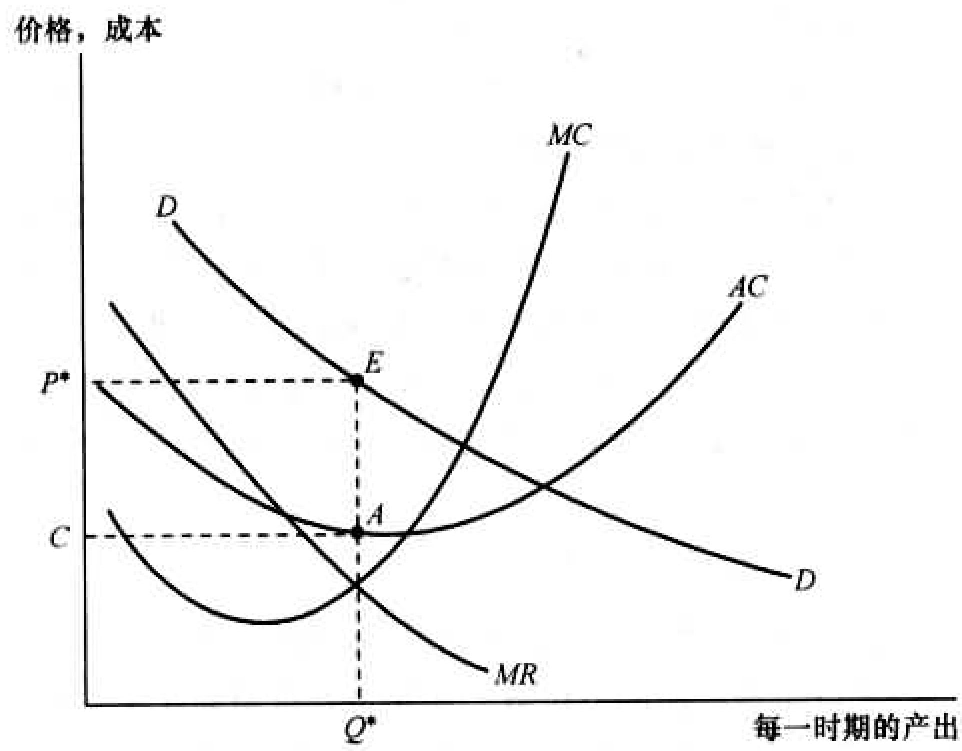


图 13.1　利润最大化与垄断市场的价格决定

一个利润最大化的垄断者的产量为边际收益等于边际成本时的产量。在图中，这个产量由 Q^* 点给出，它将产生一个位于 P^* 点的市场价格。垄断者的利润为 P^*EAC 围成的矩形。

假定垄断者决策的产量是 Q^* 点，市场需求曲线表明，有效的市场价格是 P^* 点。这是需求者作为一个整体愿意为垄断者的产出支付的价格。在市场上，将可以观察到均衡的价格数量组合（P^*，Q^*）。假设 $P^* > AC$，这个产出水平便是有利可图的，除非需求或者成本条件发生变化，垄断者将没有任何激励去改变产出水平。于是我们得到了如下的原则：

① 关于简单的处理，参见 R. A. Posner，"The Social Costs of Monopoly and Regulation"，*Journal of Political Economy* 83（August 1975）：807—827。

垄断者的产出。一个垄断者将选择边际收益等于边际成本时的产量。因为垄断者面对着一个向下倾斜的需求曲线，市场价格将超出该产出水平的边际收益与边际成本。

13.2.1 再论反弹性规则

在第 9 章，我们阐明了利润最大化假设意味着，一个厂商的产出价格和其边际成本之间的缺口与厂商的需求曲线的价格弹性有一反向关系。将方程 9.13 应用于垄断条件下，有

$$\frac{P-MC}{P}=-\frac{1}{e_{Q,P}} \tag{13.1}$$

这里，因为垄断者是有关商品的唯一供给者，所以我们使用整个市场的需求弹性（$e_{Q,P}$）。这一事实导致垄断定价的两个一般性结论。第一，垄断者将仅选择市场需求有弹性（$e_{Q,P}<-1$）的领域进行生产。如果需求无弹性，边际收益将为负，因此，它不可能等于边际成本（假定边际成本总为正）。方程 13.1 也表明 $e_{Q,P}>-1$，意味着一个（不可能）为负的边际成本。

第二个结论是对边际成本的“标值”（由价格的比例来测度）取决于反过来的市场需求弹性。例如，如果 $e_{Q,P}=-2$，方程 13.1 表明 $P=2MC$；如果 $e_{Q,P}=-10$，$P=1.11MC$。我们还注意到，如果沿着整个需求曲线的需求弹性为常数，针对投入成本的可能变化，边际成本的标值将保持不变。因此，市场价格会随边际成本成比例地变动，边际成本的增加将要求垄断者按比例提高其产品价格，而边际成本下降将导致垄断者按比例降低其产品的价格。即便沿着需求曲线的弹性不是常数，图 13.1 似乎也清楚地表明边际成本的增加将提高价格（尽管不一定是相同的比例）。只要垄断者面对的需求曲线是向下倾斜的，MC 的上移就将促使垄断者减少产出并相应得到较高的价格。[①]

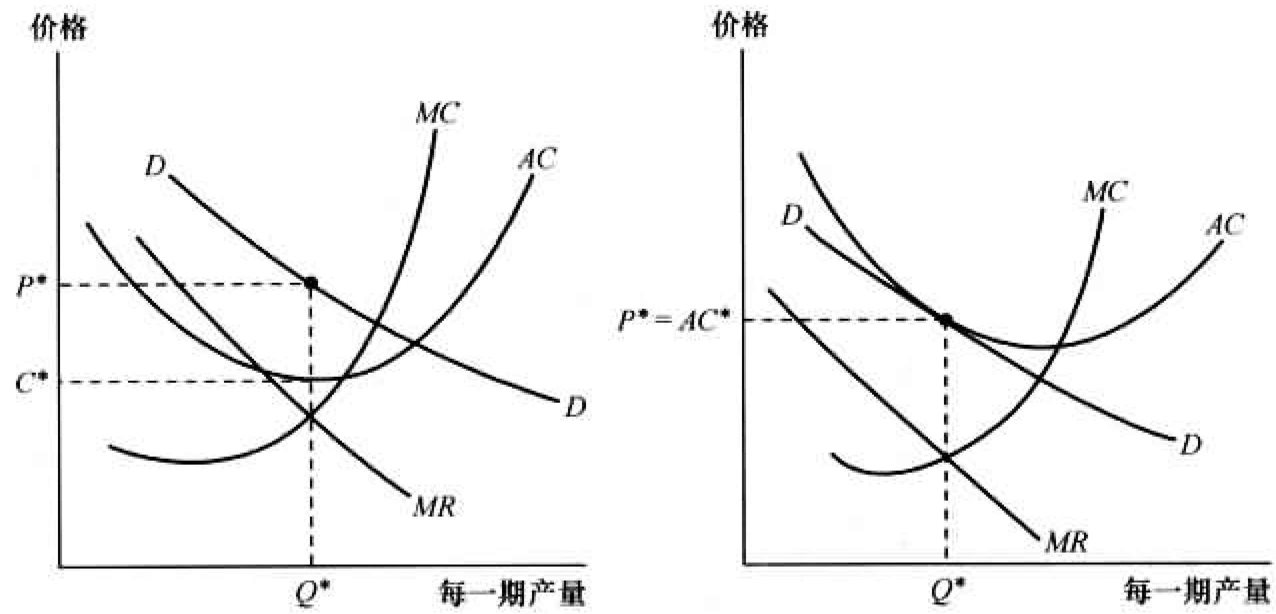
13.2.2 垄断利润

垄断者所获得的总利润可直接从图 13.1 看到，它表示为矩形 P^*EAC 的面积，即每单位产品的利润（价格减去平均成本）乘以出售产品的单位数。如果市场价格高于平均总成本，利润将为正。然而，如果 $P^*<AC$，垄断者的生产将面临长期亏损，因而会停止向市场提供产品。

因为进入垄断市场是不可能的，所以垄断者的正利润即便在长期生产中也仍能存在。由于这一原因，有些教材中将垄断者获得的长期利润称为**垄断租金（monopoly rents）**，这些利润可视为对形成垄断的基础因素（如专利、有利的地理位置、一个有能力的企业家等）的回报，于是，另一可能的厂商也许愿意支付这样一个数目的租金以获得这一垄断权力。获取利润的潜力正是一些厂商愿意付钱给其他厂商以获得使用一项专利的权力的原因，也是体育赛事（以及一些高速公路）的特许权拥有者愿意购买这一特许权的原因。垄断权以低于其真正的市场价值转让（如电台、电视台执照）时，这些权力的接收者的财富便会增加。

① 然而，垄断的需求曲线上移的比较静态不是十分清楚，从而无法得到一个相对肯定的价格预测。关于这一点的分析可参见接下来的讨论及问题 13.4。

虽然一个垄断者可能获得长期的正利润[①]，但利润的数量将取决于垄断者的平均成本与其产品的需求之间的关系，图 13.2 描述了需求、边际收益和边际成本都非常相似的两种情形。正如方程 13.1 所表明的，两种情形的价格—边际成本标值大致相同。但图 13.2(a) 的平均成本明显低于图 13.2(b) 中的平均成本。虽然在两种情况下，最大利润决策相同，但获得的利润水平有很大的差别。在图 13.2(a) 中，垄断者的价格(P^*)超出产量 Q^* 的平均成本(标为 AC^*)很多，可获得很显著的利润。然而，在图 13.2(b) 中，$P^* = AC^*$，垄断者可能获得的最大的经济利润为 0。可见，从垄断中获取大量利润并不是必然的，而就市场垄断影响的程度而言，经济利润的实际水平并不总能提供一个好的指南。



(a) 获得高利润的垄断

(b) 零利润垄断

图 13.2　垄断利润取决于需求曲线与平均成本曲线之间的关系

在本图中，如果两个垄断产生的市场价格与边际成本间的差相等，此时我们说，两个垄断是同样“强”的。然而，由于需求曲线以及平均成本的位置不同，而呈现出(a)中的垄断获得高的利润，(b)中的垄断却没有获得利润。可见，利润规模不能作为一个指标衡量垄断的程度。

13.2.3　不存在垄断供给曲线

在第四篇我们所阐述的完全竞争市场理论中，人们可能会谈及一个产业的供给曲线。我们通过允许需求曲线移动来构造这条曲线，观察到的供给曲线就是一系列均衡的价格—数量组合形成的轨迹。这类构造对垄断市场是不可能的。对于一条固定的需求曲线，一个垄断的供给“曲线”仅仅是一个点，也就是使得 $MR = MC$ 的价格数量组合。如果需求曲线移动，边际收益曲线也将移动，而一个新的利润最大化的产出将被选择出来。然而连接由此产生的一系列市场需求曲线上的均衡点没有什么意义，这个轨迹可能有一个奇怪的形状，它取决于市场需求曲线移动时需求曲线的弹性(以及对应的 MR 曲线)的变化。在这个意义上，垄断厂商没有一条能被很好定义的“供给曲线”。对于垄断厂商来说，每一条需求曲线都是一个不同的实现利润最大化的机会。

---

① 与竞争性情况一样，只要市场价格高于平均可变成本，利润最大化的垄断者在短期亏损时也愿意生产。

例 13.1

线性需求下的垄断

假设市场对奥林匹克比赛用的飞碟(Q,测度的是每年对飞碟的购买量)有一个如下形式的线性需求

$$Q = 2\,000 - 20P \tag{13.2}$$

或者

$$P = 100 - Q/20 \tag{13.3}$$

而飞碟的垄断厂商的成本由下式给出

$$C(Q) = 0.05Q^2 + 10\,000 \tag{13.4}$$

为了利润最大化,厂商选择使得 $MR = MC$ 的产出水平。为求解这个问题,我们要把 MR 和 MC 表示成只含有 Q 的函数。为了实现这个目的,我们计算总收益如下

$$P \cdot Q = 100Q - Q^2/20 \tag{13.5}$$

因此

$$MR = 100 - Q/10 = MC = 0.1Q \tag{13.6}$$

且

$$Q^* = 500 \quad P^* = 75 \tag{13.7}$$

在垄断者所选择的产出水平下

$$C(Q) = 0.05(500)^2 + 10\,000 = 22\,500$$
$$AC = 22\,500/500 = 45 \tag{13.8}$$

利用这些信息,我们可以计算出利润为

$$\pi = (P^* - AC) \cdot Q^* = (75 - 45) \cdot 500 = 15\,000 \tag{13.9}$$

注意,在这个均衡中,在价格(75)与边际成本($MC = 0.1Q = 50$)之间有一很大的价差。只要进入壁垒阻止新的厂商生产奥林匹克用飞碟,这个差额及正的经济利润就将无限期地保持下去。

反弹性规则的一个说明。为了理解反弹性规则的成立,我们需要计算垄断均衡点的需求弹性

$$e_{Q,P} = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} = -20\left(\frac{75}{500}\right) = -3 \tag{13.10}$$

因此,由方程 13.1 得

$$\frac{P - MC}{P} = \frac{1}{3}$$

或者

$$P = \frac{3}{2}MC \tag{13.11}$$

这实际上就是均衡价格(75)与垄断者的边际成本(50)之间的关系。

请回答:固定成本从 10 000 增至 12 500 将对垄断者的产出计划产生什么影响?利润将受到何种影响?假设总成本变成 $C(Q) = 0.075Q^2 + 10\,000$,均衡将发生什么变化?

13.3 垄断与资源配置

在第 12 章,我们简单介绍了垄断的存在可能会扭曲资源的配置。因为垄断厂商确定的生产规模使得 $MC = MR < P$,垄断产品的市场价格不能够再传递关于该产品成本的准确信息。因此,消费者的决策将不会反映真实生产的机会成本,并且资源可能会被无效率地配置。在这一节,我们将利用局部均衡模型对这种无效配置进行更加详细的分析。

13.3.1 比较的基础

为了评估垄断对配置的影响,我们需要一个被精确定义的比较基础。完全竞争的、成本不变的产业可以提供一个特别有用的比较。在这种情况下,正如我们在第 10 章所看到的,该产业的长期供给曲线具有无限弹性,而价格等于边际成本及平均成本。我们可以方便地将垄断看成是这样一个竞争性产业的"战利品",而将组成竞争性产业的各个厂商看成是垄断帝国的工厂。一个典型的例子是,约翰·洛克菲勒(John D. Rockefeller)在 19 世纪后期购买了美国大多数石油炼制厂,并将它们当做标准石油垄断帝国的组成部分进行决策与生产。因此,我们可以通过比较这一垄断的行为与原先的竞争性产业的行为得到关于垄断的福利结果的描述。

13.3.2 一个图形分析

图 13.3 显示了一条由一个成本不变的产业所生产的产品的线性需求曲线。如果这个市场是竞争性的,产出将为 Q^*,即产量使得价格等于长期平均成本与边际成本。在一个简单的单一价格垄断下,因为这一产出水平使得边际收益等于边际成本,产出将是 Q^{**}。将产出从 Q^* 限制为 Q^{**} 正是通过垄断化导致错误配置的结果。由产出限制所放弃的资源的总值在图 13.3 中表现为 AEQ^*Q^{**} 的面积。一般地说,垄断会使一些竞争条件下运营的工厂关闭。这些投入将向别的生产部门转移,因此 AEQ^*Q^{**} 不是社会损失。

产出从 Q^* 减少到 Q^{**},意味着消费者剩余总损失为 $P^{**}BEP^*$。这一损失部分由垄断者作为垄断利润获得,这些利润由 $P^{**}BAP^*$ 测度。它们反映了消费者的收益向厂商的转移。对于任何转移,难题在于试图评估这种转移是否是"公平的"。然而,对于面积 BEA 表示的那部分消费者剩余损失,不存在含混不清的问题,因为这部分损失不会转移给任何人。它是一种无谓损失,为垄断在资源配置上的损害提供了主要的测度①。

为阐明这一无谓损失的性质,请参考例 13.1。在那里我们已计算出均衡价格为 75 美元,边际成本为 50 美元。价格与边际成本的这一差额表明垄断之前的交易是更有效的。无疑会有一个潜在的买者,愿意支付比如 60 美元而不是 75 美元来购买一个奥林匹克用飞碟。60 美元的价格仍高于飞碟生产中所花费的成本。然而垄断的存在将阻止这样一个对飞碟使用者与飞碟制造资源提供者双方

① 如果垄断产业有一个正斜率的长期供给曲线,某些无谓损失也将反映在垄断的产出约束引起的投入减少上。

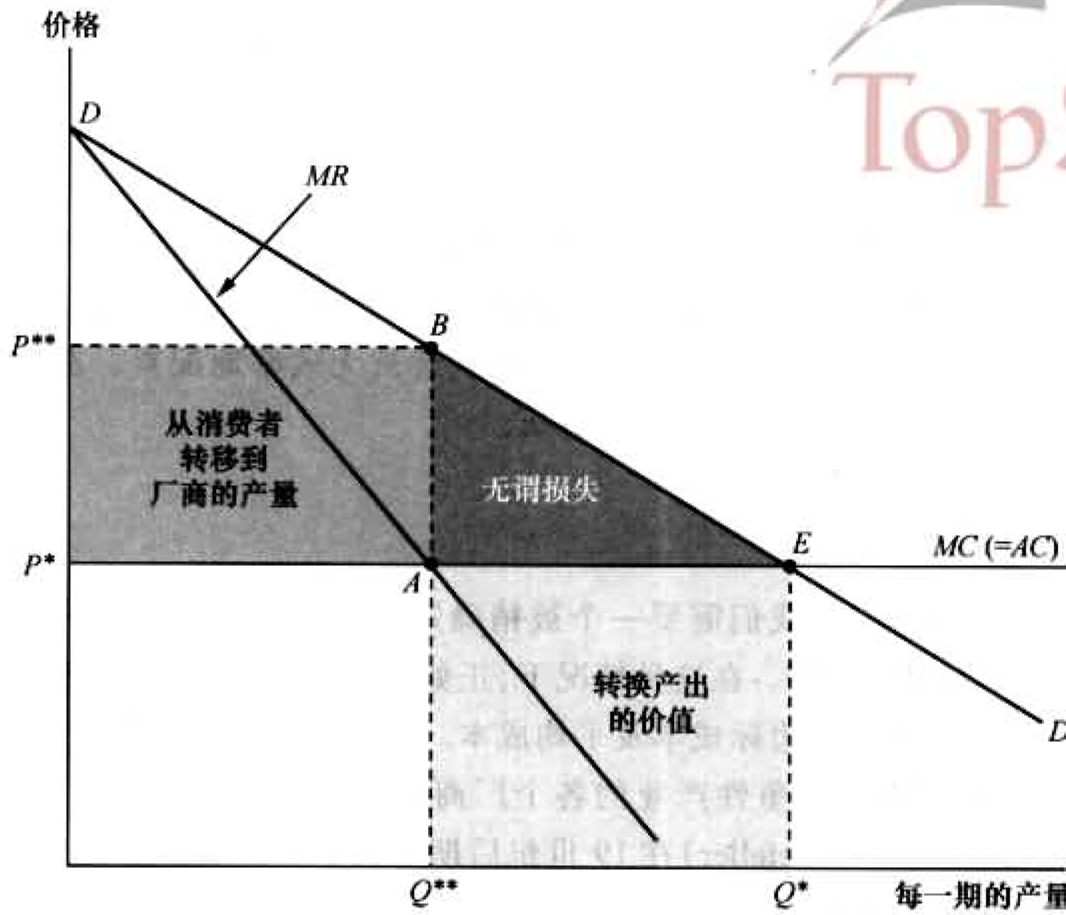


图 13.3　垄断的配置与分配效应

最初的竞争市场的垄断化将导致产出从 Q^* 减少到 Q^{**}。价值为 AEQ^*Q^{**} 的消费者支出与生产性投入被重新配置到其他商品的生产上，共有 $P^{**}BAP^*$ 的消费者剩余转为垄断利润，无谓损失为 BEA。

都有利的交易。由于这一原因，垄断均衡不是帕累托最优——一种可以使各方的福利改进的不同的资源配置方式。经济学家作过很多努力去估计实际垄断情形中这些无谓损失的总代价。当考察整个经济时，多数估计值是相当小的。① 然而对某些狭义的产业，资源配置上的损失则较大。

例 13.2

福利损失与弹性

在边际成本不变与需求曲线的价格弹性不变的情况下，垄断对资源配置的影响可以得到完整的刻画。为此，设一个垄断的边际(及平均)成本为常数 c，而且需求曲线有一不变弹性的形式

$$Q = P^e \tag{13.12}$$

其中 e 为需求的价格弹性($e < -1$)，我们知道该市场中竞争性价格将为

$$P_c = c \tag{13.13}$$

垄断价格为

① 经典的研究参见 A. Harberger, "Monopoly and Resource Allocation", *American Economic Review* (May 1954): 77—87。Harberger 估计这样的损失占国民生产总值的 0.1%。

$$P_m = \frac{c}{1+\frac{1}{e}} \tag{13.14}$$

任何价格 P_0 下的消费者剩余可由下式计算

$$CS = \int_{P_0}^{\infty} Q(P)\,\mathrm{d}P = \int_{P_0}^{\infty} P^e\,\mathrm{d}P = \frac{P^{e+1}}{e+1}\bigg|_{P_0}^{\infty} = -\frac{P_0^{e+1}}{e+1} \tag{13.15}$$

因此，在完全竞争下

$$CS_c = -\frac{c^{e+1}}{e+1} \tag{13.16}$$

而在垄断下

$$CS_m = -\frac{\left(\dfrac{c}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1}}{e+1} \tag{13.17}$$

取这两个剩余的比得

$$\frac{CS_m}{CS_c} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1} \tag{13.18}$$

例如，如果 $e=-2$，这个比率为 $\frac{1}{2}$，即垄断下的消费者剩余是完全竞争下的一半。对于更高弹性的情形这个数值有所下降（因为垄断下的产出限制更显著）。弹性趋向于 -1，比率会增加。

利润。由消费者剩余转移的垄断利润在这里也很容易计算。垄断利润由下式给出

$$\begin{aligned}\pi_m = P_mQ_m - cQ_m &= \left(\frac{c}{1+\frac{1}{e}} - c\right)Q_m \\ &= \left(\frac{-\frac{c}{e}}{1+\frac{1}{e}}\right)\cdot\left(\frac{c}{1+\frac{1}{e}}\right)^e = -\left(\frac{c}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1}\cdot\frac{1}{e}\end{aligned} \tag{13.19}$$

用方程 13.16 除此式，有

$$\frac{\pi_m}{CS_c} = \left(\frac{e+1}{e}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{e}}\right)^{e+1} = \left(\frac{e}{1+e}\right)^e \tag{13.20}$$

对于 $e=-2$，这个比率为 $\frac{1}{4}$。从而，在完全竞争下的消费者剩余有 $\frac{1}{4}$ 转化为垄断利润。因此，此例中垄断产生的无谓损失也为完全竞争下的消费者剩余的 $\frac{1}{4}$。

请回答：假设 $e=-1.5$，垄断使消费者剩余损失了多大的比例？多少转化为了垄断利润？为什么这个结果与 $e=-2$ 的情形不同？

13.4 垄断、产品质量和耐用性

垄断者所利用的市场力量除了其产品的价格以外还可以是其他方面，如果垄断在其生产的产品的类型、质量或多样性方面具有灵活性的话，那么垄断厂商的决策不同于那些竞争性组织在通常情况下的决策就毫不奇怪了。然而，垄断是否能生产出比竞争情况下更高质量或者更低质量的产品，并不确定，这完全取决于消费者需求与厂商的成本的性质。

13.4.1 质量的正规表述

假设消费者愿意为质量(X)所作的支付由反需求函数 $P(Q,X)$ 给出，其中

$$\frac{\partial P}{\partial Q} < 0, \quad \frac{\partial P}{\partial X} > 0$$

如果生产 Q 与 X 的成本为 $C(Q,X)$，垄断将选择 Q 与 X 使得利润最大化

$$\pi = P(Q,X)Q - C(Q,X) \tag{13.21}$$

最大化的一阶条件是

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = P(Q,X) + Q\frac{\partial P}{\partial Q} - C_Q = 0 \tag{13.22}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = Q\frac{\partial P}{\partial X} - C_X = 0 \tag{13.23}$$

上述方程中第一个方程重复了一个经常运用到的规则：产出决策基于边际收益等于边际成本。第二个方程则指出，当 Q 适当地确定时，垄断将选择适当的质量水平使得其产出的质量增加一个单位所获得的边际收益等于产生这样一个增加的边际成本。正如可能已经预料到的，利润最大化的假设要求垄断者沿着所有能产生边际获利性的方向前进。特别值得注意的是，边际需求者的每单位质量值乘以了垄断者的产出水平。

在竞争条件下所选择的产品的质量水平将使得净社会福利最大化

$$SW = \int_0^{Q^*} P(Q,X)\,\mathrm{d}Q - C(Q,X) \tag{13.24}$$

其中 Q^* 是给定 X 时通过边际成本定价的竞争过程所确定的产出水平。将方程 13.24 对 X 求微分，从而得到最大化的一阶条件

$$\frac{\partial SW}{\partial X} = \int_0^{Q^*} P_X(Q,X)\,\mathrm{d}Q - C_X = 0 \tag{13.25}$$

方程 13.23 与方程 13.25 显示的质量选择间的差别在于，前者着眼于 Q 在其利润最大时增加一单位质量的边际估值，而后者着眼于所有产出水平平均质量的边际价值。[①] 因此，即便垄断产业与完全竞争产业都选择同一产出水平，由于它们在作出决策时涉及的边际值不同，所以仍会选择不同的质量

① 产出质量的平均估值(AV)为

$$AV = \int_0^{Q^*} P_X(Q,X)\,\mathrm{d}Q/Q$$

因此，$Q \cdot AV = C_X$ 是在完全竞争下为了最大化净福利所采用的质量规则。

水平。然而,只有知道这一问题的具体细节,才可能预测这些差别的方向。有关的例子参见本章练习题 13.10。

13.4.2 耐用品

大多数关于垄断对产品质量影响的研究关注耐用品。像汽车、房屋和冰箱等商品能够在几期内为它们的所有者提供服务,而不是很快地被完全消费掉。时间这个元素的加入使得耐用品理论具有更多的问题和矛盾。这个问题最开始有趣的地方在于垄断者愿不愿意生产在耐久性上和完全竞争条件下相似的产品。直觉告诉我们垄断者倾向于"少生产"耐用性(正如同他们选择低于完全竞争情况下的产量),但澳大利亚经济学家 Peter Swan① 在 20 世纪 70 年代早期证明了这种直觉是错误的。

Swan 的思想在于将耐用品需求看做几期内对于一系列效用的需求(比如,汽车运输)。他论证了不管是垄断还是自由竞争条件下的市场都会试图用最小的成本来提供这种效用。垄断者当然会通过选择一个产量水平来限制这些效用从而最大化利润。但是,考虑到生产中的规模报酬不变,本质上并没有理由认为市场结构会对耐久性产生影响。这个结果有时被称为"Swan 的独立性假设"。产量决策应该独立于产品质量决策来考虑。

后来对于 Swan 结论的研究集中于这种假设在什么样的情况下将被破坏,其中包括对于一种耐用品的本质的不同假设和放松了所有的消费者都同质这个隐含假设。例如,这个结论主要依赖于此耐用品怎样被消耗。最简单的消耗类型就是像灯泡那样提供一段时间的效用直到它变得没有价值。对于这种物品,方程 13.23 和方程 13.25 是一样的,因此 Swan 的独立性假设成立。当产品很均匀地被消耗,并且如果这种持续的效用能够通过补偿被消耗的东西而维持,那么独立性假设仍然成立——这要求新的货物和旧的货物可以完全替代并且可以无限细分。房屋的涂料也许可以基本满足这个假设。此外,大多数物品不具有这样的特点。想要给一个快坏了的冰箱更换其中的一半是不可能的。一旦这些更加复杂的消耗形式被考虑进来,因为我们不能满足在一段时间内用最小成本维持一系列相似的效用这个条件,所以 Swan 的结论可能出现问题。但是在这些更加复杂的情况下,垄断并不总是提供少于完全竞争市场下的持久性——这完全取决于对于持久性的需求。

13.4.3 时间不一致性和异质需求

对于耐用品的持续效用的关注提供了对于耐用性的重要见解,但也提出了一个重要的问题——垄断者应该在何时生产必需的耐用品来提供持续的效用?例如,假设一个灯泡垄断厂认为其利润最大化产量是生产 100 万只 60 瓦的灯泡,如果这个公司决定在第一期生产 100 万只灯泡,它在第二期(假设此时所有以前的灯泡都没有烧坏)该怎么办呢?因为垄断者在需求曲线上选择了一个 $P>MC$ 的产量点,它在第二期有明显的激励去生产更多的灯泡并且稍微降低一下价格。但是消费者能够预期到这些,所以他们会降低在第一期内的需求,等待着更便宜的货。因此,垄断的利润最大化计划就会落空。Ronald Coase 是第一个注意到垄断者生产产品时存在的这种"时间不一致性"的经济学家。②

---

① 参见 P. L. Swan, "Durability of Consumption Goods", *American Economic Review* (December 1970):884—894。

② 关于耐用商品垄断者的竞争定价的可能性的讨论参见 R. Coase, "Durablity and Monopoly", *Journal of Law and Economics* (April 1972): 143—149。

Coase 认为这种现象将会严重地削弱垄断的力量——其限制在于，完全竞争定价是唯一的在耐用品例子下能够获胜的结果。只有当垄断者作出可信的承诺，保证他们在第二期不会生产更多产品时，他们才能够从耐用品给消费者提供的效用上得到垄断利润。

当今的关于耐用品问题的模型已经考察了在存在不同类型的需求者的情况下，垄断者的选择将受到怎样的影响。① 在这种情况下，关于耐用性的最优选择和可信承诺的问题变得更加复杂。垄断者不仅要为每种类型的购买者设定最优选择的计划，他还要确保专门为第一种需求者设立的计划对第二种需求者没有吸引力。学习这些类型的模型将会让我们离题太远，但是本章的扩展将会说明一些"动机一致限制"是怎样起作用的。显然，我们需要花更多的工夫才能完全理解这种被微软和松下等生产多种类型耐用品的公司所采用的复杂定价模式。

13.5 价格歧视

在某些环境下垄断者放弃自己产品的单一价格政策也许会增加其利润。以不同价格出售同一产品的可能性被称为价格歧视。②

定义

价格歧视。一个垄断厂商如果能以不同的价格销售相同单位的产品，那么他实行了**价格歧视**（**price discrimination**）。

价格歧视策略是否可行关键取决于商品的买主能否套利。如果没有交易与信息成本，"一价法则"意味着同质产品在任何地方都以同一价格销售。结果是歧视策略注定要失败，因为以低价位从垄断处购买商品的需求者对那些必须以高价购买此商品的需求者来说，就成了比垄断者自身更有吸引力的卖主。追求利润的中间人会摧毁任何歧视定价计划。但是，如果再销售有很高的成本（或者能够完全避免），价格歧视就有可能了。

13.5.1 一级或者完全价格歧视

如果每一个买主都能够被垄断者辨认出来，也许可以向买主索取他愿意为商品支付的最高价格。这个完全（或者"一级"）价格歧视策略就可以吸取所有的消费者剩余，使得需求者变成一群对垄断者的产品无论是买还是不买都无所谓的人。这个策略的说明见图 13.4。该图根据买主愿意支付的数目从大到小排列。第一个买主愿意以价格 P_1 购买 Q_1 单位的产出，所以垄断者要价 P_1，获得总收益 P_1Q_1，即图中的矩形阴影部分。第二个买主愿意以价格 P_2 购买 Q_2-Q_1 单位产出，垄断者获得的收益为 $P_2(Q_2-Q_1)$。注意，为了使此策略成功，第二个买主当然不能将其产品以价格 P_2 转卖给第一个买主（该买主支付了价格 P_1，$P_1>P_2$）。

---

① 参见 M. Waldman, "Durable Goods Theory for Real World Markets", *Journal of Economic Perspectives* (Winter 2003): 131—154。

② 垄断还可以以不同的价格—成本差出售不同的产品。然而，这里我们仅仅考虑生产单一同质产品的垄断价格歧视。

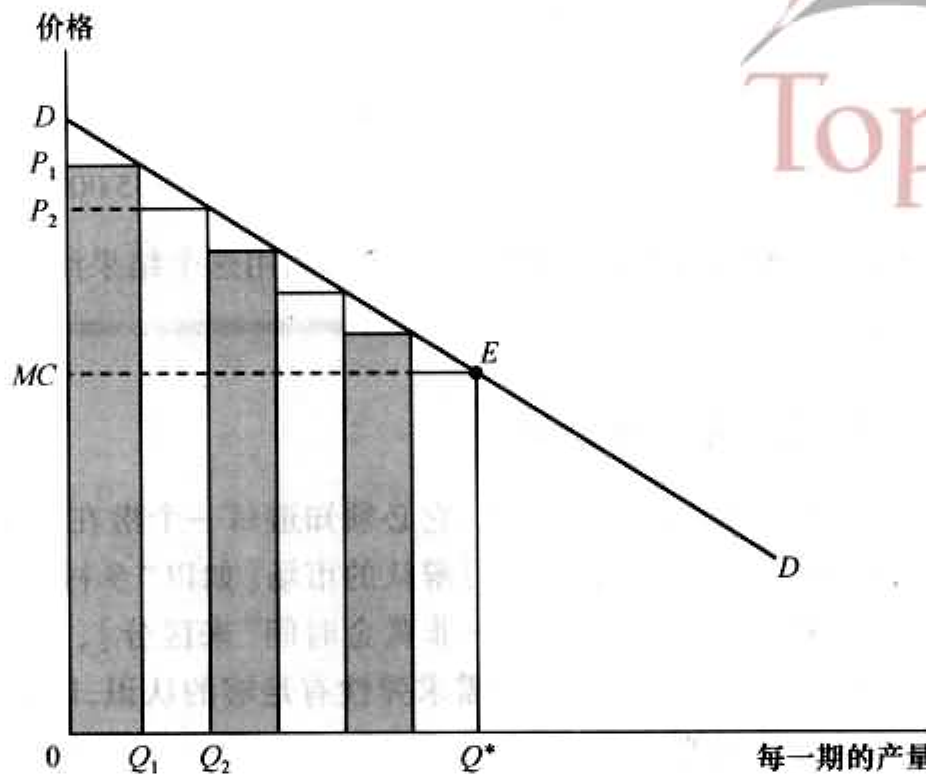


图 13.4　完全价格歧视

在完全价格歧视下，垄断对每一个买主要价不同。以价格 P_1 出售 Q_1 单位，以价格 P_2 出售 $Q_2 - Q_1$ 单位，等等。在此情况下，垄断厂商生产 Q^*，总收益为 DEQ^*0。

垄断者将沿用此法，直到边际买主不再愿意支付商品的边际成本（如 13.3 中标出的 MC）时为止。因此，垄断厂商的生产总量为 Q^*，总收益由面积 DEQ^*0 给出。所有消费者剩余已被垄断者吸取走，且在此情况下没有无谓损失（比较图 13.3 与图 13.4）。所以，在完全价格歧视下的资源配置是有效的，尽管它确实存在着大规模消费者剩余向垄断者利润转换的情况。

例 13.3

一级价格歧视

让我们再来考虑例 13.1 中飞碟垄断者的情况。既然垄断者出售的只是相对少数质量高的飞碟，所以他发现在第一流的产品中可进行完全的价格歧视。在这种情况下，选择产量使得边际买主正好以飞碟的边际成本购买商品

$$P = 100 - Q/20 = MC = 0.1Q \tag{13.26}$$

因此

$$Q^* = 666$$

而且在边际上，价格与比较成本是

$$P = MC = 66.6 \tag{13.27}$$

现在我们可以利用积分来计算总收益、总成本与总利润，总收益为

$$R = \int_0^{Q^*} P(Q)\mathrm{d}Q = 100Q - \frac{Q^2}{40}\bigg|_0^{666} = 55\,511 \tag{13.28}$$

总成本为

$$C(Q) = 0.05Q^2 + 10\,000 = 32\,178 \tag{13.29}$$

总利润为

$$\pi = R - C = 23\,333 \tag{13.30}$$

这一利润水平比例 13.1 中考察的一价政策有了大幅度的增加(多出 15 000)。

请回答:在此情况下,买主愿意出的最高价格是多少?利用这个结果给出利润的几何学解释。

13.5.2 市场分隔带来的三级价格歧视

完全价格歧视为垄断者造成很多的信息负担,它必须知道每一个潜在买主的需求函数。就是降低要求,也要求垄断者可以将买主分为少数几个可辨认的市场[如以“乡村—城市”、“国内—国外”、或者“黄金时间(一般来说指晚上 7 点到 11 点)—非黄金时间”来区分],并且在每一个市场上实行不同的垄断定价政策。① 另外还要求对这些市场需求弹性有足够的认识,以保证可以实施以上政策。垄断者在每一个市场根据反弹性规则定价(参见方程 13.1)。假设在所有市场边际成本相同,就有如下定价政策

$$P_i\left(1 + \frac{1}{e_i}\right) = P_j\left(1 + \frac{1}{e_j}\right) \tag{13.31}$$

或者

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\left(1 + \frac{1}{e_j}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e_i}\right)} \tag{13.32}$$

其中市场 i 与 j 的价格为 P_i 与 P_j,价格弹性为 e_i 与 e_j。由此定价政策立刻就可得出需求弹性小的市场利润最大化时的价格高些。例如,如果 $e_i = -2$ 与 $e_j = -3$,由方程 13.32 可得 $P_i/P_j = 4/3$,即在弹性小的市场上价格将高出 1/3。

图 13.5 说明了两个市场的这个结果,其中垄断者的边际成本(MC)为常数。市场 1 的需求弹性比市场 2 小,因此,市场 1 的价格与边际收益的差距大些。利润最大化要求厂商在市场 1 的产量为 Q_1^*,在市场 2 为 Q_2^*,这导致了弹性小的市场价格较高。只要两个市场之间的套利可被避免,这种价格差异就可维持。显然对于垄断者来说,双价歧视政策比一价政策更为有利,所以厂商总会在市场允许时选择前者。

三级价格歧视的福利结果原则上是不确定的。相对于一价政策来说,该歧视政策需要在弹性较小的市场提高价格,在弹性较大的市场降低价格。因此这种变化对总配置的损失有抵消作用。一个更为全面的分析说明了这个直观上似乎合理的结论,即多元价格政策只有通过歧视使总产出增加时才会优于一价政策。例 13.4 说明,在需求曲线为简单线性时,多元价格政策总会导致更多的配置损失。②

① 市场分隔价格歧视有时被称为“三级”价格歧视。在下一节我们将讨论“二级”价格歧视问题。

② 有关的详细讨论参见 R. Schmalensee, "Output and Welfare Implications of Monopolistic Third-Degree Price Discrimination", *American Economic Review* (March 1981): 242—247。

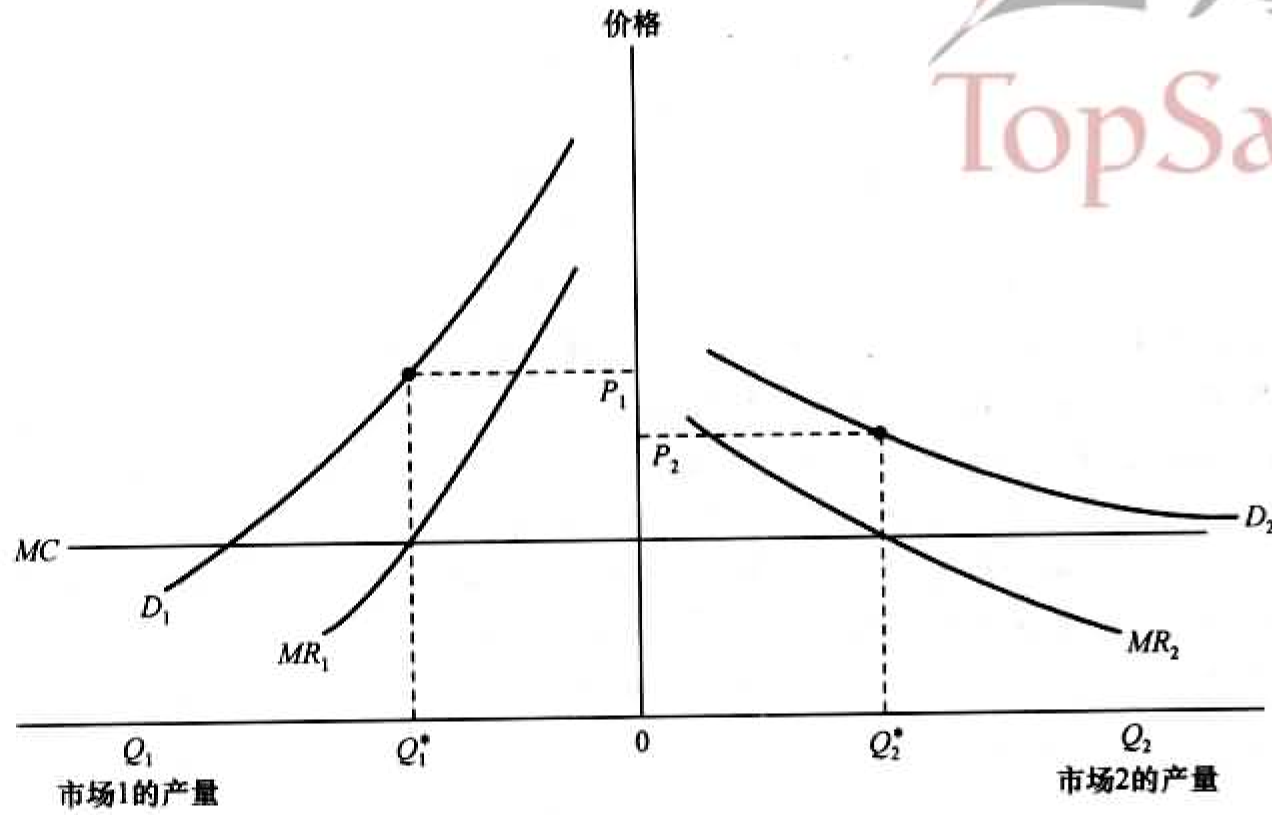


图 13.5　市场分隔增加了三级价格歧视的可能性

如果两个市场是分隔的，垄断者可在两市场以不同的价格销售商品以使利润最大化。在每个市场必须选择 $MC = MR$ 的产出。此图表明在需求弹性小的市场价格歧视者定的价格高。

例 13.4

三级价格歧视

假设两个分隔市场的需求曲线分别为

$$Q_1 = 24 - P_1$$

与

$$Q_2 = 24 - 2P_2 \tag{13.33}$$

垄断者在两个市场上生产的边际成本为 6。在两个市场的利润最大化要求

$$MR_1 = 24 - 2Q_1 = 6 = MR_2 = 12 - Q_2 \tag{13.34}$$

因此最优化的选择为

$$Q_1 = 9$$
$$Q_2 = 6 \tag{13.35}$$

两个市场上的价格为[13]

$$P_1 = 15$$
$$P_2 = 9 \tag{13.36}$$

双价政策的垄断利润为

① 根据这些价格，$e_1 = -15/9$，$e_2 = -2(9/6) = -3$。因此，由于 $P_1/P_2 = 5/3$，这些选择满足方程 13.30。

$$\pi = (P_1 - 6)Q_1 + (P_2 - 6)Q_2 = 81 + 18 = 99 \tag{13.37}$$

此政策的配置得失可由两个市场的无谓损失来计算。既然 $P = MC = 6$ 时市场 1 的需求是 18 且市场 2 的竞争产出是 12，损失分别为

$$DW_1 = 0.5(P_1 - MC)(18 - Q_1) = 0.5(15 - 6)(18 - 9) = 40.5 \tag{13.38}$$

与

$$DW_2 = 0.5(P_2 - MC)(12 - Q_2) = 0.5(9 - 6)(12 - 6) = 9 \tag{13.39}$$

一价政策。只要市场的分割可以维持，三级价格歧视的结论就是可以维持的。但是在第一个市场上的需求者将会非常羡慕第二个市场上的低价并且可能会寻求补偿。一种方法是要求政府进行管制，让所有的物品按统一价格出售。在这种情况下，垄断者的最优选择是继续其在第一个市场上的定价（$P_1 = 15, Q_1 = 9$）。这种决策将会挤出所有在第二个市场上的购买者，因为第二个市场上的需求者所愿意出的最高价格为 $P_2 = 12$。这样的结果显然不是最优的——它将会增加第二个市场的消费者净福利的损失而且不会给第一个市场的参与者带来收益。

另一种不同的方法是消除区分两个市场之间的壁垒，之后垄断者将会同等对待所有的需求者。在这种情况下，市场需求函数为

$$Q = Q_1 + Q_2 = 48 - 3P \tag{13.40}$$

现在公司所面临的边际收益函数为

$$MR = 16 - 2Q/3 \tag{13.41}$$

因此，利润最大化要求 $Q = 15, P = 11$。因为合并这些市场使得需求对于价格更加敏感，垄断者选择比在单一价格管制下更低的价格。同时注意到，这种情况下的利润[$\pi = (P - 6) \cdot (Q) = 75$]比在先前的两种情况下变低了，总的无谓损失也变小了

$$DW = 0.5(P - 6)(30 - Q) = 0.5(11 - 6)(15) = 37.5. \tag{13.42}$$

请回答：注意到合并的市场均衡数量同分割市场数量（$Q = 15$）是一样的。对于线形的需求函数总是这样吗？这表明对于这种类型的需求来说，三级价格歧视的效率如何？

13.6 通过价格计划产生的二级价格歧视

前一节考察的价格歧视例子要求垄断者将需求者分为几类并且为每一类别选择一个利润最大化的价格。另一个可供选择的方法就是垄断者选择一个（可能很复杂的）价格计划，提供激励，使得需求者根据他们自己愿意支付的价格自动归类。这样的计划包括数量折扣、最小购买要求或者“保证金”收费与配售。如果把此价格计划所需的任何可能的费用考虑进来之后，仍然有比单一价格政策高的利润，垄断者就会采用这个政策。既然这个计划将使需求者以不同价格购买相同的产品，这种（二级）价格歧视形式也只能在没有套利机会时才可行。

两部分价目表

我们已经广泛研究过的一种定价表形式是线性两部分价目表，根据这个价目表，需求者必须为

消费某种商品的权利支付一笔固定的费用并且为消费的每单位产品支付统一的价格。最初的模型是由沃尔特·奥依(Walter Oi)首次提出的,这是一个游乐场(也许是迪尼斯),收费包括一个基本的进门费用与为消费每一个娱乐项目所付的边际价格。[①] 以数学形式来表示,这个消费表可以由需求者为购买 q 必须支付的价目表来代表

$$T(q) = a + pq \tag{13.43}$$

其中 a 是固定费用,p 是需付的边际价格。垄断者的目标就是在产品需求给定的情况下选择 a 与 p 的值使利润最大化。因为需求者所需付的平均价格为

$$\bar{p} = \frac{T}{q} = \frac{a}{q} + p \tag{13.44}$$

这种价目表只有在平均价格低的消费者(q 大)不能将商品再次销售给平均价格高(q 小)的需求者时才是可行的。

奥依建立这个线性价目表参数的一个可行的方法就是对于厂商取 $p = MC$,然后确定 a,使得厂商能从给定买主集合中吸取最大的消费者剩余。我们可以想象买主按所愿支付价格的高低顺序排列。选择 $p = MC$,使得组合的消费者剩余最大化,a 可定为最不迫切的买主也愿意接受的价格中剩余的那部分价值,是否购买此商品对他来说是无差异的,但所有其他买主将从购买中获得净收益。

但这个可行的价目表也许不是最有利可图的。让我们考虑一下 p 稍高于 MC 时对利润影响的情况,结果是从最不迫切购买的买主那里获得的利润不会有什么变化。需求量会稍微小于在 $p = MC$ 时的需求量,既然 $p > MC$,原来的一部分消费者剩余(为固定收费 a 的一部分)转为可变利润。对于所有其他需求者,利润随着价格升高而增加。尽管每一个人所付的固定费用稍少了一些,但是购买每一单位产品所获得的利润将大幅度增加。[②] 在某些情况下,可以清楚地计算出最优的两部分价目表。例 13.5 给出了说明。但更一般的情况是,最优价目表具有很大的偶然性。有些可能性将在本章的扩展部分加以考察。

例 13.5

两部分价目表

为了从数学上解释两部分价目表,我们回到例 13.4 中使用的需求方程,但是现在假设他们是两个需求者

$$\begin{aligned} q_1 &= 24 - p_1 \\ q_2 &= 24 - 2p_2 \end{aligned} \tag{13.45}$$

现在 p 代表了两个购买者所面临的边际价格。[③]

---

① 参见 W. Y. Oi, "A Disneyland Dilemma: Two-Part Tariffs for a Mickey Mouse Monopoly", *Quarterly Journal of Economics* (February 1971): 77—90。很有趣的是,迪斯尼集团一度使用两部分价目表,但是,由于管制个人玩具支付计划的成本太高而放弃。像其他的娱乐公园一样,迪斯尼接受了单一管制价格政策(在那里价格歧视还有足够的机会)。

② 这个结论成立,因为 $q_i(mc) > q_1(mc)$,其中对于除了最少愿意的买主(第一个人)的所有人,当 $p = MC$ 时,$q_i(mc)$ 是需求数量。因此,以上价格 MC 递增产生的利润收益超过更小固定费用 $\Delta pq_1(mc)$ 带来的利润损失。

③ 强调需求曲线的效用最大化理论是说需求的数量是由边际价格决定的,然而人场费 a 决定了 $q = 0$ 是否是最好的选择。

一张奥依价目表。实现奥依所说的两部分价目表要求垄断者设定 $p_1=p_2=MC=6$。因此，在这个例子中，$q_1=18$，$q_2=12$。有了这个边际价格，2 号需求者（两个中最不迫切的买主）得到消费者剩余 36 [$=0.5\cdot(12-6)\cdot 12$]。这就是可以避免这个人离开市场的最大的入场费。因此，在这个例子中的两部分价目表是 $T(q)=36+6q$。如果垄断者选择这个定价计划，他的利润是

$$\begin{aligned}\pi &= R - C = T(q_1) + T(q_2) - AC(q_1+q_2)\\ &= 72 + 6\cdot 30 - 6\cdot 30 = 72\end{aligned} \tag{13.46}$$

这比例 13.4 中所讨论的几种定价策略的利润都要少。

最优价目表。当注意到在这样的价目表下总的利润为 $\pi=2a+(p-MC)(q_1+q_2)$，在这种情况下最优的两部分价目表就可以计算了。入场费 a 应该等于第二个人的消费者剩余。代入到这个问题中得出

$$\begin{aligned}\pi &= 0.5\cdot 2q_2(12-p)+(p-6)(q_1+q_2)\\ &= (24-2p)(12-p)+(p-6)(48-3p)\\ &= 18p-p^2\end{aligned} \tag{13.47}$$

因此，当 $p=9$ 和 $a=0.5(24-2p)(12-p)=9$ 时可以得到最大的利润。因此最优价目为 $T(q)=9+9q$。在这个价目下，垄断者的利润是 81 [$=2(9)+(9-6)\cdot(15+6)$]。当垄断者在政治的压力下只能指定一个价格并且不会让第二个消费者“退出市场”时，将会采取这种定价方式。两部分价目表允许出现一定程度的不同价格（$\bar{p}_1=9.6$，$\bar{p}_2=9.75$），但看上去似乎是公平的，因为所有的消费者面临着同样的价格表。

请回答：若垄断者可以对每个需求者收取不同的人场费，垄断者将应用什么定价策略？

13.7 垄断管制

自然垄断的管制是应用经济分析中的一个重要课题。在大多数国家，公用事业、通讯与运输业都处于高度管制之下，并且设计管制过程使这些产业按希望的方向发展是一个重要的实践问题。这里我们将考察垄断管制中与定价策略有关的几个方面。

13.7.1 边际成本定价与自然垄断困境

许多经济学家认为被管制的垄断者索取的价格正确地反映生产的边际成本是很重要的。运用这种方法可能使无谓损失最小化。实行边际成本定价策略产生的主要问题是，这将要求真正的自然垄断在亏损的状况下生产。自然垄断，顾名思义，在一个很宽的产出水平范围内边际成本是递减的。厂商的成本曲线看起来很像图 13.6 中所显示的。在不加管制时，垄断的产出水平为 Q_A，产品价格为 P_A，此时的利润由矩形 P_AABC 给出。管制机构将垄断价格定为 P_R，在此价位需求量为 Q_R，生产这些产品的边际成本也为 P_R，结果边际成本定价得以实现。但不幸的是，因为厂商的边际成本曲线为单调递减的，价格 P_R（ = 边际成本）低于平均成本。在此管制价格下，垄断者的损失为 $GFEP_R$。既然没

有厂商能够承受无限期的亏损，就造成了管制机构的困境：或者放弃边际成本定价目标，或者政府永远资助垄断者。

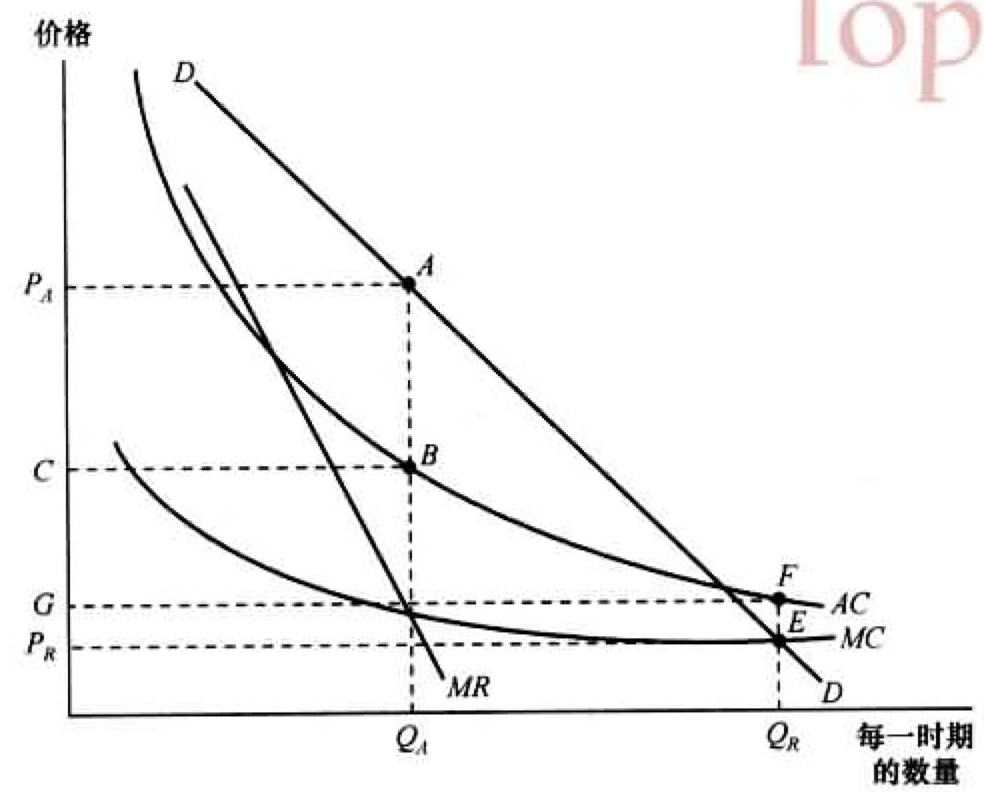


图 13.6　成本递减型垄断的价格管制

因为自然垄断显示了递减的成本趋势，所以边际成本低于平均成本。结果，实施边际成本定价政策将造成损失。例如，价格为 P_R 时，达到了边际成本定价目标，但必须损失 $GFEP_R$。

13.7.2　双重定价体系

走出边际成本定价困境的一个方法就是加入歧视定价体系。在这样的体系中，允许垄断者向某些用户索取高价而保持边缘用户的低价格。这样实际上出价高的需求者弥补了出价低需求者造成的损失。图 13.7 说明了这个定价计划。这里，管制委员会决定一些用户支付高价格 P_1，在此价位上，需求量为 Q_1。对其他用户（假定他们不愿以价格 P_1 购买商品）制定的价格为 P_2，这个较低价位产生的附加需求量为 $Q_2 - Q_1$。结果，以平均成本 A 生产总产出为 Q_2。利用这种定价体系，从高价位需求者那里获得的利润（矩形 P_1DBA）补偿了低价销售造成的损失（$BFEC$）。而且对“边际用户”应用边际成本定价规则：边际内用户的津贴使厂商不至于在亏损的情况下生产。虽然事实上建立能够维持边际成本定价并且包含运行成本的定价计划并非如此简单，但许多管制委员会的确应用价格计划歧视某些用户（如商业机构）而优待其他用户（如消费者）。

13.7.3　收益率的管制

另一种方法是允许垄断者索取某一高于边际成本的价格，这个价格足以使垄断者获得“正当”的投资收益率。关于如何来定义“正当”收益率这个概念以及如何建立其测度方式已经进行了许多研究。从经济的角度来看，此过程中最有意思的问题是这种管制行为对厂商投入选择的影响。例如，如果允许厂商获得的收益率超过所有者在竞争情况下获得的投资收益率，就会激励厂商投入比成本

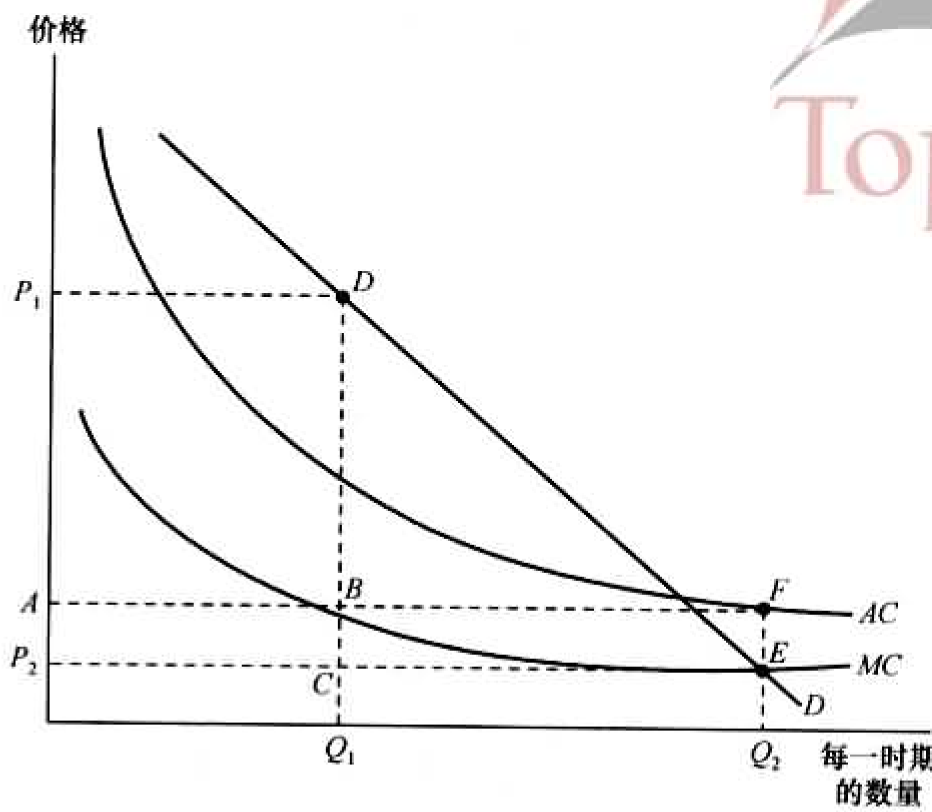


图 13.7 双重定价计划

向一些用户索取高价(P_1)而对其他用户用低价(P_2),对管制委员会来说是可能的,例如:(1) 实施边际成本定价;(2) 创造条件使得由某类用户获得的利润(P_1DBA)能补偿另一类用户造成的损失($BFEC$)。

真正最小化时更多的资本。或者,如果管制者推迟实行对收益率的管制,也会激励厂商使成本最小化。下面我们将简要地考察具有此种可能性的一个正式模型。①

13.7.4 一个正式模型

假设一个受管制的公用事业厂商的生产函数为

$$q = f(k,l) \tag{13.48}$$

这个厂商的实际资本收益率定义为

$$s = \frac{pf(k,l) - wl}{k} \tag{13.49}$$

其中 p 为厂商产出(取决于 q)的价格,w 是劳动投入的工资率。如果由于管制约定 $s = \bar{s}$,则厂商的问题就是最大化其利润

$$\pi = pf(k,l) - wl - vk \tag{13.50}$$

约束条件为管制的限制。建立拉格朗日表达式,有

$$\mathscr{L} = pf(k,l) - wl - vk + \lambda[wl + \bar{s}k - pf(k,l)] \tag{13.51}$$

注意,如果 $\lambda = 0$,则管制是无效率的,垄断者的行为更像是追求利润最大化的厂商。如果 $\lambda = 1$,由方程 13.51 得到

$$\mathscr{L} = (\bar{s} - v)k \tag{13.52}$$

① 这个模型基于 H. Averch and L. L. Johnson, "Behavior of the Firm Under Regulatory Constraint", *American Economic Review* (December 1962): 1052—1069。

假设 $\bar{s} > v$（如果厂商在别处获得的资本收益率不低于当前值，则此式必成立）意味着垄断者将使用无穷多的资本，这显然是一个不合理的结果。因此 $0 < \lambda < 1$。最大值点满足的一阶条件是

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial l} = pf_l - w + \lambda(w - pf_l) = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} = pf_k - v + \lambda(\bar{s} - pf_k) = 0 \tag{13.53}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = wl + \bar{s}k - pf(k,l) = 0$$

一阶条件首先意味着被管制的垄断厂商将投入额外的劳动直至达到 $pf_l = w$ 的点，这一结果对任何利润最大化厂商都成立。但对于资本投入，由于二阶条件意味着

$$(1 - \lambda)pf_k = v - \lambda\bar{s} \tag{13.54}$$

或者

$$pf_k = \frac{v - \lambda\bar{s}}{1 - \lambda} = v - \frac{\lambda(\bar{s} - v)}{1 - \lambda} \tag{13.55}$$

既然有 $\bar{s} > v$ 与 $\lambda < 1$，方程 13.55 意味着

$$pf_k < v \tag{13.56}$$

所以，被管制的垄断厂商需要比不被管制条件下投入更多的资本（从而获得更低的资本边际生产率）。因此，对某些公用事业而言，管制导致了资源的错误配置，即出现了“过度投资”的情况。虽然在此我们不这样做，但是，这个一般分析框架确实还可以用来考察其他的管制问题。

13.8 垄断的动态观点

垄断实践扭曲了资源配置的静态观点为实行反垄断政策提供了重要的理论基础。但并不是所有的经济学家都认为静态分析是决定性的。有些作者已经强调了在发展过程中垄断利润起到的推动作用[①]，其中最著名的是 J. A. 熊彼特。这些作者对创新与特殊类型的厂商获得技术进步的能力给予了充分的强调。垄断厂商获得的利润可为研究与发展提供资金。完全竞争厂商对正常的投资收益就很满足了，而垄断者可以用“剩余”资金支持风险过程的研究。可能更重要的是，获得垄断地位的可能性或者维持此地位的愿望就提供了一种超前于潜在竞争者的动力。产品的创新与节省成本的生产技术是与垄断化的可能性密切相关的。因为如果不处于垄断地位，创新厂商也许不能获得创新的全部好处。

熊彼特强调了这样一个观点，即市场的垄断化可以使厂商制订行动计划时的成本较低。作为产品供应的唯一来源，它所面临的意外情况比竞争市场中的厂商所需面临的要少得多。例如，垄断者不必像竞争性市场中的厂商那样在销售方面投入许多资金（用于广告、商标认定与吸引零售商等）。类似地，垄断者对其产品具体的需求曲线了解得更多，也更易于改变需求条件。当然，垄断的这些好

① 例如，请参见 J. A. Schumpeter, *Capitalism, Socialism and Democracy*, 3rd ed. (New York: Harper & Row, 1950), especially chap. 8。

处能否超过它们在配置与分配方面的弊端,仍是个实证问题。创新与节省成本问题不能由上述讨论的方法来回答。对实际市场的详细调查是很必要的。

小　结

在这一章我们考察了只有一个垄断供应者的市场模型。与第 4 篇考察的竞争情况不同,垄断厂商并不是价格的接受者,垄断者可根据需求曲线选择最有利可图的价格—数量组合。这种市场力量带来以下结果:

- 对垄断者来说最能获利的产出水平是使边际收益等于边际成本的产出水平。在这个产出水平上,价格将超过边际成本。垄断者的利润取决于价格与平均成本之间的关系。
- 相对于完全竞争而言,垄断意味着需求者的消费者剩余的损失。其中一部分转移为垄断利润,而消费供给的一些损失则意味着整体经济福利的损失。这是帕累托无效率的标志。
- 垄断者可能会选择不同水平的产品质量而完全竞争厂商则不会。耐用品的垄断者受旧货市场的约束。
- 垄断者通过价格歧视可能进一步提高利润,即向不同类型的买主索取不同的价格。垄断者实行价格歧视的能力取决于其阻止买主之间套利的能力。
- 政府经常会对自然垄断(平均成本在产出水平范围内递减)加以管制。管制机制的类型能够影响被管制厂商的行为。

练　习　题

13.1 垄断者的平均与边际成本是常数 $AC = MC = 5$。厂商面对的市场需求曲线为 $Q = 53 - P$。

a. 计算垄断者利润最大化的价格—数量组合与垄断者的利润。

b. 在完全竞争(其中价格 = 边际成本)情况下,这个产业的产出水平是多少?

c. 计算在 b 中消费者获得的消费者剩余。证明它超过垄断者利润与 a 中的消费者剩余之和。垄断化的"无谓损失"值是多少?

13.2 垄断者面对的市场需求曲线为

$$Q = 70 - P$$

a. 如果垄断者以不变的平均成本与边际成本 $AC = MC = 6$ 生产,为了使利润最大化,垄断者选择什么产出水平?在这个产出水平上价格是多少?垄断者的利润是多少?

b. 假设垄断者的成本结构变化了,总成本为

$$C(Q) = 0.25Q^2 - 5Q + 300$$

垄断者面对相同的市场需求与边际收益,为了追求利润最大化现在选择什么价格—数量组合?利润是多少?

c. 现在假设第三个成本结构解释了垄断者的垄断地位,总成本是

$$C(Q) = 0.0133Q^3 - 5Q + 250$$

仍旧计算最大化利润的垄断者的价格一数量组合。其利润是多少?(提示:通常设定 $MC = MR$ 并且通常用二次式求解 Q 的二次方程。)

d. 画出市场需求曲线、MR 曲线以及 a、b、c 中的三条边际成本曲线。注意垄断者获利能力受以下条件的约束:(1) 市场需求曲线(与 MR 曲线相关);(2) 上述生产的成本结构。

13.3 单一厂商垄断整个装饰物与容器市场,有不变的平均成本与边际成本

$$AC = MC = 10$$

最初,厂商面临的市场需求曲线为

$$Q = 60 - P$$

a. 计算厂商利润最大化时的价格—数量组合。厂商的利润是多少?

b. 假设市场需求曲线向外移动(变得较陡),有

$$Q = 45 - 0.5P$$

现在厂商利润最大化的价格—数量组合是多少?厂商的利润是多少?

c. 改变 b 中的假设,假设市场需求曲线向外移动(变的较平),有

$$Q = 100 - 2P$$

现在厂商利润最大化的价格—数量组合是多少?厂商的利润是多少?

d. 画出 a、b 与 c 三种不同情况下的图形。利用你得出的结果,解释为什么垄断者没有实际的供给曲线。

13.4 假设呼啦圈的市场是由单个厂商垄断的。

a. 画出这一市场的最初均衡。

b. 假设呼啦圈的需求稍向外移动。证明在一般情况下(与竞争情况下相比),不可能预测需求的这一移动对呼啦圈市场价格的影响。

c. 当需求曲线移动时,价格弹性可能改变。考虑三种可能的方式:递增、递减、不变。当 $MR = MC$ 时还考虑垄断的边际成本在一定范围内可能上升、下降与不变。结果,需求移动与边际成本斜率图形有 9 种不同组合。逐一分析每一种组合,看看在哪种情况下,可能对于需求移动对呼啦圈价格的影响作出明确的预测。

13.5 假设垄断市场有需求函数,其中需求数量不仅取决于市场价格(P)而且取决于厂商所作的广告量(A,以美元为计量单位)。这个函数的具体形式为

$$Q = (20 - P)(1 + 0.1A - 0.01A^2)$$

垄断厂商的成本函数为

$$C = 10Q + 15 + A$$

a. 假设没有广告($A = 0$)。利润最大化的厂商选择的产出是多少?市场价格是多少?垄断利润是多少?

b. 现在假设厂商选择最佳广告支出水平。在此情况下,产出水平为多少?价格是多少?广告水平是多少?此时厂商的利润是多少?

(提示:假设垄断者选择利润最大化的价格而不是数量,则相当容易计算 b 中的问题。)

13.6 对于垄断产品的征税有时会产生与完全竞争市场中不同的结果。本题就讨论一些这方面的例子。这些问题中的绝大多数可以通过使用反弹性法则来求解(方程 9.13 或方程 13.1)。

a. 首先考虑对一种垄断产品的从价税。这个税使得垄断者得到的净价格从 P 变为 $P(1-t)$——t 是税率。证明在线形需求函数和不变边际成本的条件下征收此税将使得价格的上升幅度小于税收。

b. 假设 a 中的曲线是一条不变弹性的曲

线。证明价格将会和税收以同样的幅度增长。解释这两个例子不同的原因。

c. 描述这样一种情况：对某种垄断产品征收从价税以后，价格的上涨大于税收。

d. 一种特定的税是对于每单位产品征收一定数额。如果税率是每单位 τ，总的税收是 τQ。证明在总的税收收入不变的情况下，征收这种税将会比从价税减少更多的产量（更大幅度地提高价格）。

13.7 假设厂商能够以不变的边际（与平均）成本，即每单位 5 美元生产它所希望的任何产出水平。假设垄断者在两地分隔的两个不同市场上出售商品。第一个市场的需求曲线是

$$Q_1 = 55 - P_1$$

第二个市场的需求曲线是

$$Q_2 = 70 - 2P_2$$

a. 如果垄断者能够保持两个市场之间的分隔，每一市场的产出水平应该是多少？每一市场的价格是多少？这种情形下的总利润是多少？

b. 如果两个市场之间运输商品仅仅花费需求者 5 美元，你的答案会作何改变？在这种情况下垄断者的新的利润水平是多少？

c. 如果运输成本是零并且厂商必须遵循一价政策，你的答案会作何改变？

d. 假设厂商可以采用线性两部分价目表，在这种情况下两个市场的边际价格必须相等，但是一次付款的入场费可能不同。此时厂商应该遵循什么定价政策？

13.8 假设完全竞争产业能够以不变的边际成本——每单位 10 美元生产装饰物。因为必须支付每单位 2 美元给说客，以保证装饰物生产者的有利地位，垄断的边际成本上升为每单位 12 美元。假设装饰物的市场需求是

$$Q_D = 1\,000 - 50P$$

a. 分别计算完全竞争以及垄断的产量与价格。

b. 计算装饰物生产垄断化导致消费者剩余的总损失。

c. 画出这一结果的图形并解释它与通常的分析有什么不同。

13.9 假设政府希望能够以津贴的方式改变垄断配置的不利影响。

a. 为什么一次总付性津贴达不到政府的目标？

b. 利用图形证明按每单位产出支付津贴可能达到政府的目标。

c. 假设政府希望通过津贴使得消费者的商品总价值与商品总成本的差额最大化。证明为了达到这个目标，必须有

$$\frac{t}{P} = -\frac{1}{e_{Q,P}}$$

其中 t 是每单位的津贴，P 是竞争价格。直观地解释你的结论。

13.10 假设垄断者生产可能有不同使用寿命（X）的碱性电瓶。还假设消费者的（逆）需求取决于购买的电瓶寿命与数量（Q）。函数为

$$P(Q,X) = g(X \cdot Q)$$

其中 $g' < 0$，即消费者仅仅关心数量乘以寿命的乘积。他们对购买许多短期电瓶或者一些长期电瓶有相同的愿望。还假设电瓶成本为

$$C(Q,X) = C(X)Q$$

其中 $C'(X) > 0$。证明在此情况下，垄断厂商将选择与竞争性行业相同水平的 X，即便产出水平与价格不同。请解释你得出的结果。

（提示：把 XQ 当做一个复合商品。）

推荐阅读文献

Posner, R. A. "The Social Costs of Monopoly and Regulation". *Journal of Political Economy* 83 (1975): 807—827.

该文对垄断可能把资源用于制造进入壁垒，因此成本可能比完全竞争厂商高的问题进行了分析。

Schumpeter, J. A. *Capitalism, Socialism and Democracy*, 3rd ed. New York: Harper & Row, 1950.

该书介绍了经济增长过程中企业作用与经济利润的古典辩论。

Spence, M. "Monopoly, Quality, and Regulation". *Bell Journal of Economics* (April 1975): 417—429.

该书发展了本教材中所采用的产品质量分析的方法，并且提供了对于垄断影响的细节性分析。

Stigler, G. J. "The Theory of Economic Regulation". *Bell Journal of Economics and Management Science* 2 (Spring 1971): 3.

该文最早提出了从寻租的角度看待管制问题，即一个行业内的企业有激励笼络有关部门，让它们抬高行业的进入壁垒，从而赚取更多利润。

Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1989. chaps. 1—3.

该书进行了垄断定价与产品选择理论的完整的理论分析。

Varian, H. R. *Microeconomic Analysis*, 3rd., Chap. 14. New York: W. W. Norton, 1992.

该书提供了一种对于二级价格歧视中的激励兼容性限制的简洁分析。

扩 展

最优价格计划

在第13章，我们考察了垄断者通过二级价格歧视，即通过建立价格计划使买主自动分为不同部分，进入不同的市场以增加利润的几个简单的方法。由于最优价格计划在微观经济学理论的许多领域有广泛的应用，所以，在这里我们要进一步考察这个问题。

问题的结构

为了在简单的情况下考察与价格计划相关的问题，我们假设垄断者的商品只有两个消费者。对每一个消费者我们定义"估值函数"为

$$V_i(q) = P_i(q)\cdot q + S_i \qquad \text{(i)}$$

其中 $P_i(q)$ 是个人 i 的反需求函数，S_i 为消费者剩余。因此，V_i 表示个人 i 交易量为 q 时的总值，其中包括商品的总支出与消费者剩余的值。我们假设对这种商品，个人1比个人2有更强的偏好[①]，意即

$$V_1(q) > V_2(q) \qquad \text{(ii)}$$

对所有的 q 都成立。假设垄断者的边际成本不变（记为 c），并且选择了价格计划 $T(q)$，则最大化利润为

$$\pi = T(q_1) + T(q_2) - c(q_1 + q_2) \qquad \text{(iii)}$$

其中 q_i 为个人 i 的需求量。选择能够成功区分消费者的价格计划时，垄断者面临两个"激励相容性"的约束。为了保证低需求者(2)能够真正购买商品，需要

① 推广到多个需求者是很重要的。具体的讨论请参见 Wilson(1993)，第2—5章。

$$V_2(q_2) - T(q_2) \geq 0 \quad \text{(iv)}$$

即，个人 2 必须由其最优选择 q_2 获得净好处。需求者 1 为高需求个人，也必须由其选择的消费商品（q_1）获得净好处，并且他的选择优于个人 2 所作的选择

$$V_1(q_1) - T(q_1) \geq V_1(q_2) - T(q_2) \quad \text{(v)}$$

如果垄断者没有认识到这个约束条件，他可能会发现个人 1 选择了价格计划中面向个人 2 的部分，因此损害了达到自我选择市场分隔的目标。给出了一般结构，我们就可以继续说明垄断者问题的几个有趣的特征。

E13.1 帕累托优势

允许垄断者放弃简单的一价政策就有了采用“帕累托更优”的价格计划的可能性，在此策略下，所有交易团体都能获得最大好处。例如，假定垄断者的利润最大化价格是 P_M，在此价位下，个人 2 消费量为 q_2^M，由消费者获得的净价值为

$$V_2(q_2^M) - P_M(q_2^M) \quad \text{(vi)}$$

价格计划为

$$T(q) = P_M q, \quad q \leq q_2^M$$

与

$$T(q) = A + \overline{P}q, \quad q > q_2^M \quad \text{(vii)}$$

其中 $A > 0$ 与 $c < \overline{P} < P_M$，可能同时为垄断者创造更多的利润并为个体 1 增加更多的福利。具体说来，考虑 A 与 $\overline{P}$ 的值，使得

$$A + \overline{P}q_1^M = P_M q_1^M$$

或者

$$A = (P_M - \overline{P})q_1^M \quad \text{(viii)}$$

其中 q_1^M 表示个人 1 在一价政策下的消费量。因此 A 与 $\overline{P}$ 的值使得个人 1 在新的价格计划下购买量仍为 q_1^M。但如果 $\overline{P} < P_M$，他将选择 $q_1^* > q_1^M$。因为个人 1 本来应该购买 q_1^M 但是选择购买了 q_1^*，他在新的计划下能获得更多的好处。现在垄断者的利润为

$$\pi = A + \overline{P}q_1 + P_M q_2^M - c(q_1 + q_2^M) \quad \text{(ix)}$$

与

$$\pi - \pi_M = A + \overline{P}q_1 - P_M q_1^M - c(q_1 - q_1^M) \quad \text{(x)}$$

其中 π_M 是垄断者单一价格策略下的利润 $[=(P_M - c)(q_1^M + q_2^M)]$。将方程 viii 中的 A 值代入则有

$$\pi - \pi_M = (\overline{P} - c)(q_1 - q_1^M) > 0 \quad \text{(xi)}$$

因此，新价格计划也给垄断者带来了更多的利润，其中可能有一部分与个人 2 分享。这个价格计划对于一价政策来说是帕累托更优的。多部分计划是帕累托更优的概念不仅已用于价格歧视研究，而且已用于最优税收计划与拍卖机制的设计（Willig, 1978）。

对保留土地定价

R. B. W. 施密斯（1995）使用复杂的帕累托最优定价计划帮助美国政府以最小成本来制定保留土地计划。他所研究的这个特殊计划使得每年有 3 400 万英亩土地不进行生产。他计算得出，为这个计划而精确建立的（非线性）价格一年只花去 10 亿美元。

E13.2 配售

有时垄断者同时销售两种商品，这种情况为歧视定价计划造成了许多可能性。例如，考虑激光打印机与上色软片一起销售或者一次成像相机与专利胶卷一起销售。这里的定价情形与第 20 章讨论的相似，通常消费者只购买一个单位的基本商品（如打印机或照相机），从而支付了“进入”费用。然后购买不定数量的搭配商品（上色剂或胶卷）。因为我们在第 20 章的分析表明垄断者为其配售商品定的价格超过了边际成本，所以相对于在竞争条件下生产该配售商品情形，会产生福利损失。也许就因为这个原因，配售有时是被禁止的。但如果垄断者在不允许配售时拒绝为低需求者服务，那么此项

禁止措施并不一定导致福利提高(Oi, 1971)。

汽车和酒

成功实行配售的一种方式是创造多种对不同阶层的消费者有吸引力的质量差别。汽车公司善于在它们的基本型号基础上设计出不同的型号(例如,本田有 DX、LX、EX 和 SX 多种型号),它们可以被理解为对消费者进行市场细分的配售商品。J. E. Kwoka 在 1992 年对一个美国制造商(克莱斯勒)进行了研究,并且展示了质量差别是怎样带来市场细分的。他还计算得出这个市场的分割使得消费者剩余大规模转向了制造商。

一般来说,如果某种配售物品也在完全竞争条件下生产,那么其价格歧视便无法实行。在这种情况下,配售的物品只能按照边际成本定价,并且对于垄断者来说唯一可能的歧视方式就只有在对于基本品的定价上(即对不同的消费者收取不同的"入场费")。但是,在一些特殊的情况下,选择支付入场费将会在配售物品方面给予垄断者垄断权力,尽管这种权力在完全竞争条件下有所减弱。例如,Locay 和 Rodriguez(1992)考察了餐馆对酒的定价。其中,当群体决策倾向于选择一个餐馆时,将会在对于有葡萄酒偏好的顾客身上进行价格歧视方面赋予餐馆经营者垄断权力。但是,餐馆经营者将会受制于吸引顾客群体的需要,因此,其进行价格歧视的能力要比在纯粹的垄断情况下弱。

参考文献

Kwoka, J. E. "Market Segmentation by Price-Quality Schedules: Some Evidence from Automobiles". *Journal of Business* (October 1992): 615—628.

Locay, L., and A. Rodriguez, "Price Discrimination in Competitive Markets", *Journal of Political Economy* (October 1992): 954—968.

Oi, W. Y. "A Disneyland Dilemma: Two-Part Tariffs on a Mickey Mouse Monopoly", *Quarterly Journal of Economics* (February 1971): 77—90.

Smith, R. B. W. "The Conservation Reserve Program as a Least Cost Land Retirement Mechanism". *American Journal of Agricultural Economics* (February 1995): 93—105.

Willig, R. "Pareto Superior Non-Linear Outlay Schedules". *Bell Journal of Economics* (January 1978): 56—69.

Wilson, W. *Nonlinear Pricing*. Oxford: Oxford University Press, 1993.

第 14 章 不完全竞争市场的传统模型

在这一章，我们将考察介于完全竞争与垄断之间的市场的价格决定理论。由于没有一个单一的模型可用来解释这种不完全竞争的所有可能形式，所以，我们将考察目前使用着的诸多模型中共有的一些基本要素。为了这一目的，我们将集中讨论三个具体问题：(1) 只有很少几个厂商的市场中对于同质商品的定价；(2) 这种市场中的产品差别与广告；(3) 在不完全竞争市场进出的可能性对长期结果的影响。在一定意义上可以说，本章关心的是如何放松完全竞争模型中的那些严格的假设，及改变这些假设能够得到什么结果。对于这一研究，完全竞争模型提供了一个有用的基准，因为背离竞争准则会导致效率的损失。在比较中，我们使用的两个具体的准则是：(1) 不完全竞争中的价格是否等于边际成本；(2) 从长远观点看，生产是否在最小平均成本上进行。我们将看到，不完全竞争市场通常缺乏完全竞争的这两个理想特征中的一个或两个。有关论题的很多内容将在第 15 章中用博弈论的观点与方法再次进行考察。

14.1 同质寡头下的定价

在这一节中，我们将考察生产单一的同质产品的几个厂商构成的市场中价格确定的一般理论。同前面一样，假定在需求方面市场是完全竞争的；也就是说，假设有很多需求者，他们中的每一个都是价格的接受者。我们还假定没有交易成本与信息成本，因而问题中的商品服从一价法则，并且我们可以明确地讨论这种商品的价格。在本章以后的部分中，当考虑产品的差别时，我们将放松这一假设。最后，在本节我们将假设存在固定数目为 n 的相同的厂商（这里 n 可取相对小的数）。以后，我们将考虑一个双头垄断的具体数值的例子（此时 $n=2$），但现在对 n 不作限制，因为大部分分析方法不取决于 n 的取值。整个这一节我们假定 n 是固定的，但在本章的以后部分，我们允许 n 随厂商的进出而变化，这一变化是厂商对盈利情况作出的反应。

14.1.1 模型的基本结构

模型中每一厂商的产出用 $q_i(i=1,\cdots,n)$ 表示。尽管允许不同厂商之间有差异是一个很简单的

问题，但由于厂商的成本是相同的、对称的，所以通常要求这些厂商的产出是相等的。我们正在研究的商品的反需求函数用$f(Q)$表示，用P来表示价格，它是作为一个群体的需求者愿意为任何特定的产出水平支付的价格。即

$$P = f(Q) = f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) \tag{14.1}$$

给定这种商品的市场价格及厂商的总成本，总成本用$C_i(q_i)$来表示，每一厂商的决策问题是使它的利润(π_i)最大化。因此，厂商的目标是使下式最大化

$$\begin{aligned}\pi_i &= Pq_i - C_i(q_i)\\ &= f(Q)q_i - C_i(q_i)\\ &= f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)q_i - C_i(q_i)\end{aligned} \tag{14.2}$$

本节中的大部分讨论始终围绕着厂商追求利润最大化时的产出选择。使用极其简单的数学术语，可以说，结果取决于便于解决最大利润的方程14.2的可微性假设。用经济学术语，可以说，中心的问题是厂商关心其他厂商对它的决策会如何反应。

这里将考察四个可能的模型，并都被概括在下面的定义中。我们将看到这些不同的模型会导致不同的结果，除了极少数特殊的情况外，从推测变化的模型中得出的均衡一般是不确定的。

定义

寡头定价模型。准竞争模型：假定所有的厂商都是价格的接受者(P为固定)。

卡特尔模型：假定厂商在选择行业产出(还有价格)时会完全勾结。

古诺模型：假定厂商i在作产出决策时认定厂商j的产出决策已确定($\partial q_j/\partial q_i = 0$)。

推测变化模型：假定厂商j的产出会相应于厂商i的产出而变化($\partial q_j/\partial q_i \neq 0$)。

14.1.2 准竞争模型

与完全竞争的情况一样，准竞争模型中每一个厂商都是价格的接受者。即每一厂商假定(也许不正确)它的决定不影响市场价格。在这种情况下，利润最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P - \frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i} = 0 \tag{14.3}$$

或者

$$P = MC_i(q_i) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{14.4}$$

这n个供给方程，连同市场出清的需求方程，

$$P = f(Q) = f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) \tag{14.5}$$

保证了市场能获得短期竞争解。这个解由图14.1中点C所表明的不变的边际成本来说明。尽管n可能是个很小的数，但此时价格接受者的假定可以导出竞争的结果。

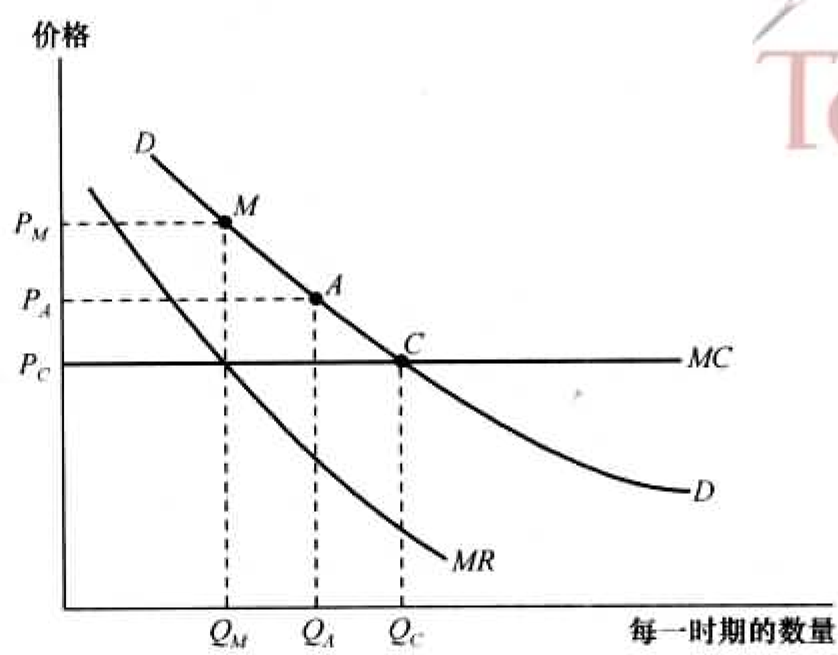


图 14.1　寡头定价问题的另一种解释

寡头市场均衡可能发生在需求曲线的很多点上。在本图中(假定边际成本在整个产出范围内是不变的),准竞争均衡在 C 点发生,卡特尔均衡在 M 点发生,古诺解在 A 点发生。很多其他的解可能出现在 M 与 C 之间,这些取决于厂商的策略性相互关系的特定假设。

14.1.3　卡特尔模型

当然,价格接受者行为的假定在寡头行业中可能很不合适,因为其中的每一个厂商都意识到它的决定对价格有明显的影响。另一假设是一些厂商作为一个小组意识到它们可以影响价格,并且试图协调它们的决策以便获得垄断利润。在这种情况下,卡特尔作为多厂商垄断并选择 $q_1, q_2, \cdots, q_n$,以使行业总利润最大化。

$$\pi = PQ - [C_1(q_1) + C_2(q_2) + \cdots + C_n(q_n)] \tag{14.6}$$

$$= f(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)[q_1 + q_2 + \cdots + q_n] - \sum_{i=1}^{n} C_i(q_i) \tag{14.7}$$

利润最大化的一阶条件是

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = P + (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)\frac{\partial P}{\partial q_i} - MC_i(q_i) = 0 \tag{14.8}$$

$$= MR(Q) - MC_i(q_i) = 0 \tag{14.9}$$

由于总收入取决于所有卡特尔成员的产出水平之和,并且无论谁的产出水平变化,边际收益都是一样的。在利润最大化的点,这种共同的边际收入将等同于每一厂商的边际生产成本。假设这些边际成本相等,并且对所有厂商来说都是不变的,卡特尔的产出选择由图 14.1 中的 M 点表明。因为,这种协调好了的计划要求每一厂商有一特定的产出水平,计划也将指导着由卡特尔获得的垄断利润如何在各厂商间进行分配。给定市场需求曲线与产出成本结构,这些利润的总额将会尽可能大。

14.1.4　卡特尔解的可行性

关于卡特尔解有三个问题。第一个,也是最明显的,是这种垄断决策可能是不合法的。例如,美

国《谢尔曼反托拉斯法》(1890)第一节宣告“贸易限制的合谋”为非法，因此，要成为卡特尔成员的厂商可能面临来自联邦调查局的调查。在其他很多国家也有类似的法律。第二个与卡特尔解有关的问题是，领导卡特尔需要大量的信息，具体地说，他们必须知道市场需求函数与每一厂商的边际成本函数。获得这些信息可能成本很高，并且一些卡特尔成员也可能不乐意提供这些信息。最后也是最重要的，卡特尔解基本上是不稳定的。因为每一卡特尔成员将生产一个满足 $P > MC_i$ 的产出水平，并且每一厂商有扩大生产的动机。如果寡头的领导不能监管这种“欺诈行为”，垄断解就可能崩溃。20世纪80年代中期，石油输出国组织(OPEC)卡特尔在确定其成员产出水平时所遇到的困难证实了这一问题。下一章我们将详细考察卡特尔定价策略的稳定性。

14.1.5 古诺解

法国经济学家奥古斯丁·古诺(Augustin Cournot)是最早发展包含几个厂商的市场模型的研究者之一，他在1838年给出了双头垄断行为的正式分析。[①] 按我们的定义来说，古诺假定每一厂商认识到它自己对产量 q_i 的决定会影响价格，但任何厂商的产出决策不影响其他厂商的产出决策。即每一厂商认识到 $\partial P/\partial q_i \neq 0$ 但是对于所有的 $j \neq i$ 都有 $\partial q_j/\partial q_i = 0$。在这样的假定下，(对于所有 $i = 1, \cdots, n$)我们模型的利润最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P + q_i \frac{\partial P}{\partial q_i} - MC_i(q_i) = 0 \tag{14.10}$$

在方程14.10中我们要注意的是，厂商假定改变 q_i 将影响市场总收益仅仅是通过它们自己的销售对市场价格的直接影响来达到的。因此，方程既不同于卡特尔解的形式(这里考虑了价格变化对行业总收益的影响，参见方程14.8)，也不同于下一节将要讨论的推测变化情况，因为在推测变化模型中考虑了厂商 i 的产出对厂商 j 的产出的间接影响。一般地说，方程14.10中的 n 个方程联立市场出清的需求方程14.5，可以得到一个变量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 与 P 的均衡解。对利润最大化方程14.10的考察表明，只要边际成本递增(利润最大化时它们通常如此)，在古诺解中每一厂商的产出将超过卡特尔产出，因为方程14.10中的“具体厂商”的边际收益大于方程14.8中的市场边际收益。另一方面，厂商的产出将低于竞争产出，因为方程14.10中的项 $q_i \cdot \partial P/\partial q_i$ 是负的。因此市场均衡处于图14.1中的 A 点。在这一点上价格超过边际成本，与垄断的情况相比较，产出相对较高，行业的利润相对较低。

总之，也可能假定随着行业中厂商的数目越来越多，均衡点将越来越接近竞争点 C。随着厂商数目的增多，方程14.10中的项 $q_i \cdot \partial P/\partial q_i$ 趋向于0，因此，该方程看来很类似于有准竞争均衡解的方程14.3。关于古诺模型的这一极限性质的说明[②]，参见本章后面的例14.1。我们应当注意到这里所说的古诺均衡也是产出策略的纳什均衡。更多的有关定价问题的博弈策略法则，参见第15章。

---

① A. Cournot, *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, trans. N. T. Bacon (New York: Macmillan Co., 1897).

② 有关这个问题的正式讨论请参见 J. Friedman, "Oligopoly Theory", in K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 2 (Amsterdam: North-Holland, 1982)。

14.1.6 推测变化模型

到目前为止,我们的寡头价格决定模型还未允许厂商之间的策略存在相互作用。在很少几个厂商的市场中,这是一个特别靠不住的假设。福特显然一定会考虑丰田汽车公司对它的定价与产出决策的反应;所有其他的计算机厂商一定会担心微软公司将干些什么;OEPC 卡特尔的成员也一定会关注世界各国新的石油开发情况。经济学家们面临的问题就是怎样在一种易于分析的模型中捕获这些策略。一种方法是依靠现代博弈论来考察简化了的集合中的策略选择。在下一章我们将讨论这一方法,并且说明如何运用它们来分析双头市场。在这里我们将探讨一些方式,以便把有关的策略融入我们已发展起来的模型中。

考虑到一个厂商所作的决定可能影响其他厂商的行为,是我们把相关策略融入模型中的主要方式。用数学语言来表述,即我们希望考察厂商 i 所作的决策如何影响厂商 j 的决策的假设。具体来说,对每一厂商 i,我们关心的是对所有不同 i 的厂商 j 的导数 $\partial q_j/\partial q_i$ 的值。因为,这些导数值是推测性的,基于这些值的不同假设所构成的模型被定义成"推测变化"模型;即它们关注第 i 个厂商对第 j 个厂商产出变化的"推测"。

到目前为止,在我们的模型中都假定了对于所有的 $j \neq i$,有 $\partial q_j/\partial q_i = 0$。也就是假定了厂商之间没有策略的相互作用。一旦放松这一假定,每一厂商的利润最大化决策就将变得很复杂。方程 14.2 的最大化一阶条件此时变成

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P + q_i\left[\frac{\partial P}{\partial q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial P}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right] - MC_i(q_i) = 0 \qquad (14.11)$$

即,厂商现在不仅关心它自己的产出如何直接影响市场价格,而且还必须考虑由于它对其他厂商的产出决策的影响所造成的市场价格的变动。由于一些合理假设可能是对这种反映所作出的,因此,不存在基于方程 14.11 的达到均衡的一般可接受的理论。对双头垄断的情况已经建立起一些有趣的模型,我们将在本章的以后部分用一个简单的数值例子来进行说明。

14.1.7 价格领导模型

推测变化模型的一个易处理的形式基于下列假设:问题中的市场由单一的价格领导者与一群准竞争者组成。假设领导者是厂商 1,这一市场的数学表达将包含一个如对厂商 2,3,…,n 的价格接受反应,它们由方程 14.4 给出,只有厂商 1 需要一个形式为方程 14.11 的复杂反应函数。图 14.2 提供了这样一个市场的图形分析。图中的需求曲线表示行业产品的总需求曲线,供给曲线 SC 代表竞争群体中所有 $n-1$ 个厂商的供给决策,这是它们短期的边际成本曲线的垂直加总。利用这两条曲线,可以用以下方式推出行业领导者面对的需求曲线($D'D'$)。对于 P_1 或者更高的价格,领导者将不出售任何商品,因为竞争的群体将愿意提供所需要的所有商品;对于低于 P_2 的价格,领导者有它自己的市场,因为竞争的群体不愿意提供任何商品。对于 P_1 与 P_2 之间的价格,曲线 $D'D'$通过市场总需求数量减去群体所提供的数量构造出来,即领导者得到了群体厂商不愿承担部分的需求。

给定需求曲线 $D'D'$,领导厂商可构造它的边际收益曲线(MR'),并在参考它自己的边际成本曲线(MC)的情况下,决定利润最大化时的产出水平 Q_L。此时的市场价格为 P_L。给定这一价格,竞争

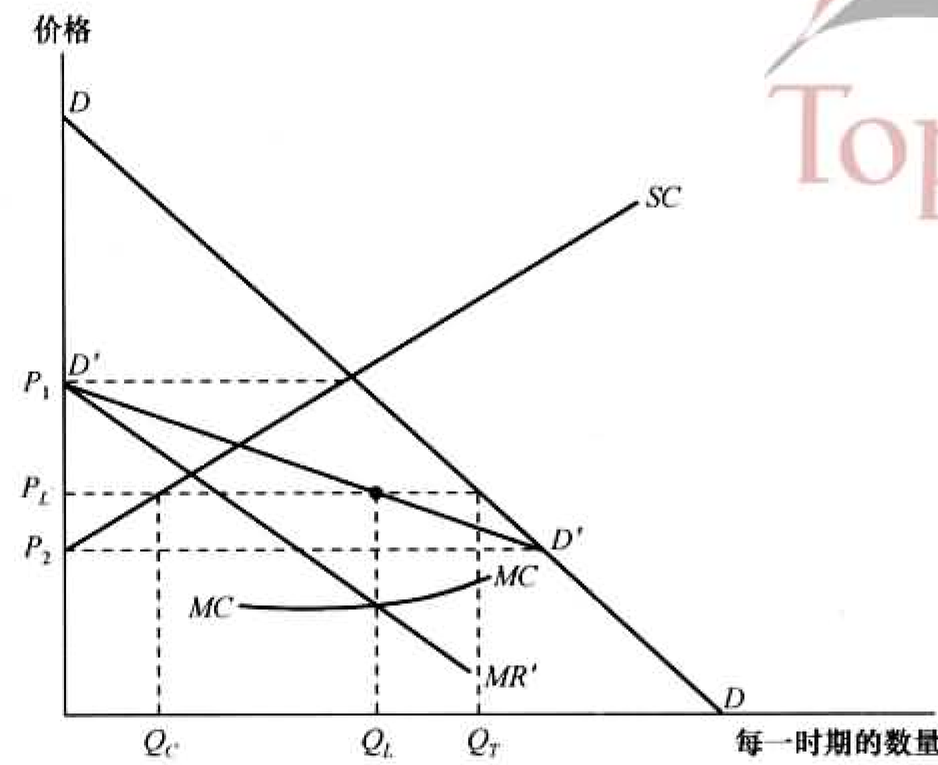


图 14.2　价格领导行为的正式模型

曲线 $D'D'$ 表示价格领导者面对的需求曲线，它由从市场需求 DD 中减去竞争群体厂商所生产的商品（SC）导出。给定 $D'D'$，厂商的利润最大产出水平为 Q_L，市场中价格为 P_L。

的群体生产 Q_C，并且总的行业产出是 $Q_T(=Q_C+Q_L)$。

当然，这个模型并没有回答如下的重要问题，即产业中的价格领导者如何选定，或者当一些群体成员决定挑战领导者的地位与利润时会发生什么情况。但这个模型确实说明了推测变化模型的一个易于处理的例子，该例子可用来解释一些情况下的价格行为。例如，人们认为该模型有时可以对某些市场的价格决定给出一个合适的解释，这些价格包括优惠商业贷款（这里主要货币中心银行是“领导者”）、标准化的钢制品（美国的钢铁公司是“领导者”），也许还有 OPEC 卡特尔（这里沙特阿拉伯凭借政治与地理位置可以充当“领导者”的角色）。当然，对所有这些典型的例子还需要大量的实证研究，以确定价格领导模型的范围与有效性。

例 14.1

古诺的泉水双头垄断模型

作为这些思想的数值例子，我们考虑一个很简单的情形，没有生产成本且仅有两个厂商。按照古诺 19 世纪的两个自然涌泉的例子，我们设想每一涌泉的所有者有大量的（可能有助于健康的）水供应，它们面临的问题是为市场提供多少泉水。泉水的市场由下面的线性需求函数给出

$$Q=q_1+q_2=120-P \tag{14.12}$$

图 14.3 还给出了几何说明。我们现在要考察沿着这一需求曲线上的几种市场均衡。

准竞争解。由于每一厂商边际成本为零，准竞争解导致市场均价为 0，总需求为 120。在这一特定的例子中，两个涌泉的产出分配是不确定的，因为每一个涌泉在它的产出范围内边际成本为零。准竞争产出水平由图 14.3 中的 C 点标明。

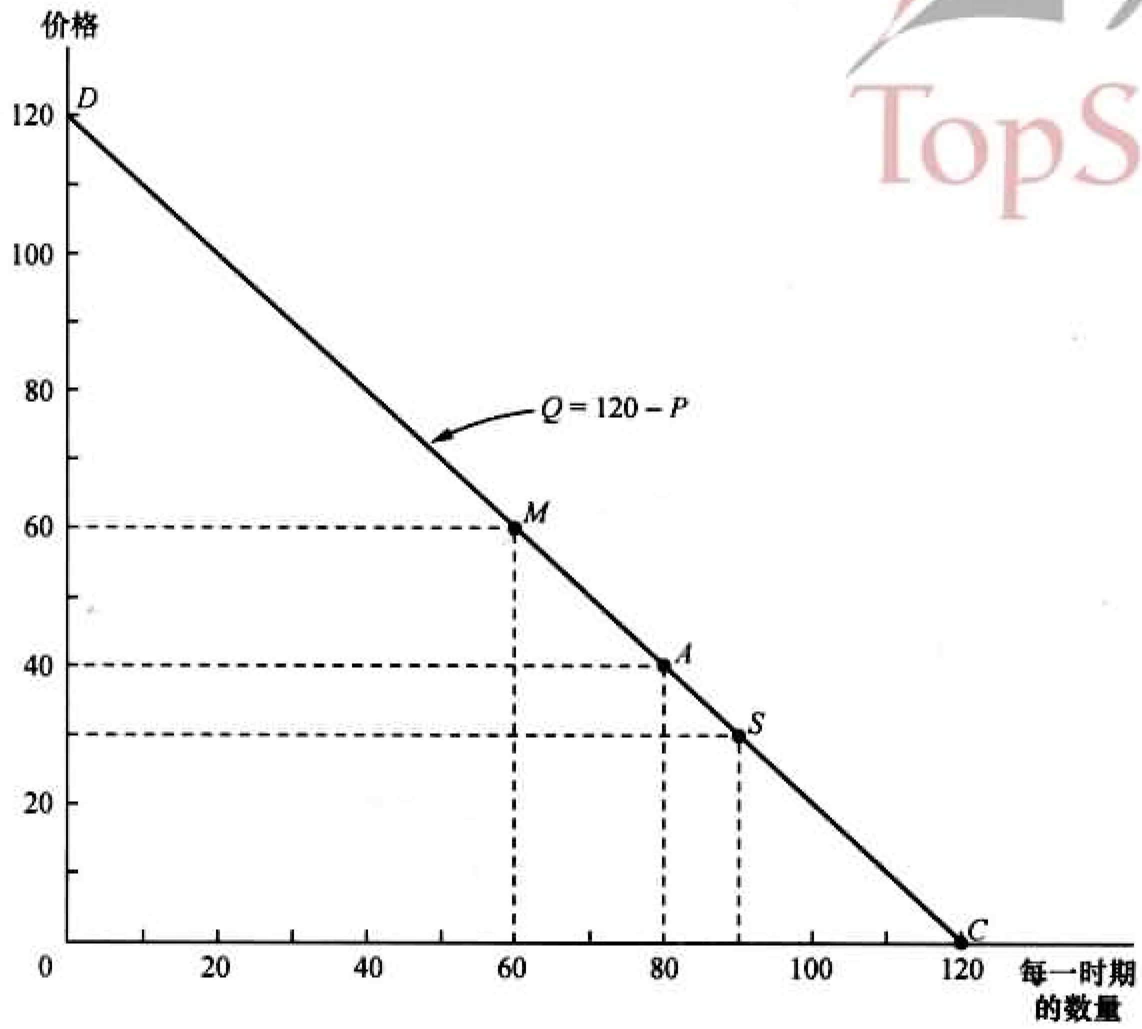


图 14.3　双头垄断问题的解

给定需求曲线 $Q = 120 - P$，点 M、A、S 与 C 分别表示双头垄断问题的卡特尔解、古诺解、斯塔克尔伯格（Stackelberg）解及准竞争解。

卡特尔解。这一例子的卡特尔解可以最大化总行业收益（与利润）

$$\pi = PQ = 120Q - Q^2 \tag{14.13}$$

最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 120 - 2Q = 0$$

或者

$$\begin{aligned} Q &= 60 \\ P &= 60 \\ \pi &= 3\,600 \end{aligned} \tag{14.14}$$

另外，两个涌泉之间的产出水平与利润分配是不确定的。卡特尔解由图 14.3 中的 M 点标明。

古诺解。由方程 14.12 容易看出两个厂商的收入（以及利润）由下式给出

$$\begin{aligned} \pi_1 &= Pq_1 = (120 - q_1 - q_2)q_1 = 120q_1 - q_1^2 - q_1q_2 \\ \pi_2 &= Pq_2 = (120 - q_1 - q_2)q_2 = 120q_2 - q_2^2 - q_1q_2 \end{aligned} \tag{14.15}$$

如果每一涌泉的所有者假定别人不会对其产出决定作出反应，即 $\partial q_1/\partial q_2 = \partial q_2/\partial q_1 = 0$，最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_1} = 120 - 2q_1 - q_2 = 0$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 120 - 2q_2 - q_1 = 0 \tag{14.16}$$

方程 14.16 称为“反应函数”，因为它们表示每一厂商对其他厂商的产出水平如何作出反应。在均衡时，这些方程是相互协调的，即每一厂商必须生产其他厂商认为它应该生产的数量。给定这些假设，方程 14.16 可以同时解出 q_1 与 q_2 的均衡值

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = 40 \\ P &= 120 - (q_1 + q_2) = 40 \\ \pi_1 &= \pi_2 = Pq_1 = Pq_2 = 1\,600 \end{aligned} \tag{14.17}$$

古诺假设比卡特尔情形提供的产出更多，而且产出利润（3 200）低于产出完全协调时的情况。这一古诺解由图 14.3 中的点 A 标明。在这一特定的情况下，很容易证明在分析中引入更多的厂商时，均衡将向竞争点移动。[①] 对于一个更现实的情形，也支持这一结论，有关的讨论参见本章练习题 14.2。

请回答：在古诺模型中，假定一个涌泉的所有者的产出为 40，为什么其他所有者不能得到生产多于 40 的产出水平的所得？这一结论与我们的卡特尔的讨论（在那里我们预期在 $P > MC$ 时会有凿新泉的行为）冲突吗？（进一步的讨论参见第 15 章）

例 14.2

斯塔克尔伯格领导模型

边际成本不变假设使得价格领导模型不适宜于分析古诺泉水问题。在这种情况下，“竞争群体”通过把价格确定在边际成本（这里为 0）水平，占据整个市场，价格领导者没有剩余市场可得。可是存在着某种不同类型的策略领导的可能性，第一个提出这一可能性的是德国经济学家海恩里奇·冯·斯塔克伯格。[②] 冯·斯塔克伯格假定一个厂商（如厂商 1）意识到其他厂商如何进行它们的产出决定，他考察了这一假定的结果。即，他假定厂商 1 知道（由方程 14.16）厂商 2 选择 q_2，有

$$q_2 = \frac{120 - q_1}{2} \tag{14.18}$$

---

① n 个厂商时方程 14.16 变成

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 120 - 2q_i - \sum_{j \neq i} q_j = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

利用对称性，假设所有的 $q = \bar{q}$，有

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 120 - (n+1)\bar{q} = 0$$

因此，$\bar{q} = \frac{120}{(n+1)}$，且总产出 $= n\bar{q} = \left[\frac{n}{(n+1)}\right]120$，当 n 取很大值时，总产出趋于 120（竞争产出）。

② H. von Stackelberg, *The Theory of the Market Economy*, trans. A. T. Peacock (New York: Oxford University Press, 1952).

厂商 1 现可以计算推测变化

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} \tag{14.19}$$

也就是说，厂商 2 对 q_1 每增加 1 个单位就会减少它的产量 1/2 个单位。厂商 1 的利润最大化问题可以在考虑这一反应的基础上得出，有

$$\pi_1 = Pq_1 = 120q_1 - q_1^2 - q_1q_2 \tag{14.20}$$

与

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 120 - 2q_1 - q_1\frac{\partial q_2}{\partial q_1} - q_2 = 0 = 120 - \frac{3}{2}q_1 - q_2 = 0 \tag{14.21}$$

结合厂商 2 的反应函数（方程 14.18），解这一方程得到不同于古诺模型时的均衡值

$$\begin{aligned} q_1 &= 60 \\ q_2 &= 30 \\ P &= 120 - (q_1 + q_2) = 30 \\ \pi_1 &= Pq_1 = 1\,800 \\ \pi_2 &= Pq_2 = 900 \end{aligned} \tag{14.22}$$

应用了解厂商 2 反应的知识，厂商 1 能够增加利润。厂商 2 的利润在这一过程中受到了严重损害。这个解显示在图 14.3 中需求曲线的 S 点。

领导者的选择与破坏性的竞争。斯塔克尔伯格模型中一个模糊的地方是领导者是如何被选出的。如果每一厂商假定其他厂商是追随者，每一厂商将生产 60 单位，并会对最终结果失望（总产出为 120 单位，市场价格在这一例子中将降为 0）。另一方面，如果每一厂商都充当追随者，那将会出现古诺均衡。但是，从斯塔克尔伯格的观点看，古诺均衡不稳定，因为每一厂商可以看出作为领导者的好处，并且试图据此作出产出选择。正如我们将在第 15 章中将要看到的，如果我们要评估所有可能出现的情况，我们必须进一步探索这一策略的相互作用机制。

请回答：为什么这里第一位涌泉的所有者增加产出的决定提高了利润，而在例 14.1 中却没有提到这一点？

14.2 产品差别

到目前为止，我们一直假定寡头厂商生产同质的产品，因此，假定需求者对他们购买哪个厂商的产品并不在意，并假定市场中通行一价法则。这样的假设常常与现实的市场很不相同。厂商常常花很多资源致力于产品的差别化，以便与竞争对手不同，这种差别包括质量与风格的差别，也包括售后服务、保修与产品广告等方面的差别。所有这些活动都要求厂商消耗额外的资源，但只要利润能因此增加，厂商就会选择这种做法。厂商这种试图造成产品差别的做法会导致"一价法则"不再严格成立，因为，现在市场由各个生产不同产品的厂商组成，需求者有可能对某些供给者有特别的偏好。这

种可能性使我们"一个商品的市场"的概念变得模糊起来,因为现在生产的许多产品是既密切相关但又有区别的。例如,一旦意识到各厂商供应的牙膏品牌是不同的,我们还应该把这些产品放在同一市场考虑吗?我们是否应该把氟化物牙膏、胶化牙膏、彩条牙膏、去渍牙膏等区别开来?或者我们应考虑空间差别的问题。因为需求者更接近某些出售者,而与另一些出售者的距离较远,他们可能认为更接近的出售者更好些,因为购买的运输费用较低。这里我们将假定市场由 n 个厂商构成,每个厂商生产的产品略有差别,但这些产品可以被认为是一个产品组。以下是关于这一概念更准确的表述。

定义

产品组。一般地说,如果一群厂商的产品之间的需求替代性(由交叉价格弹性测度)比这些厂商的产品与其他商品之间的替代性更高的话,那么这些厂商的产品就构成了一个**产品组(product group)**。

尽管这一定义有它的含糊之处(例如,对产品组的争论常左右反托拉斯的进程),但对我们的目的而言是足够的了。[1] 现在我们将在这样的产品组市场中作一规范而又简化的定价分析。

14.2.1 厂商的选择

我们再次假定有 n 个厂商参加一个特定的产品组的竞争。但是,现在每个厂商可选择花多少钱以使它的产品不同于竞争对手的产品。我们用 z_i 表示第 i 个厂商达到这一目的所使用的资源,它可能包括花在特定的选择、质量、品牌广告,或转向有利位置的支出。现在厂商的成本可由下式给出

$$\text{总成本} = C_i(q_i, z_i) \tag{14.23}$$

因为在产品组中存在着 n 种略有区别的产品,我们必须允许这些产品可能有不同的市场价格。它们分别为 $p_1, \cdots, p_n$(尽管其中一些可能是相等的)。第 i 个厂商面临的需求表明它所采用的价格如何取决于它的产量(q_i),取决于其他厂商收取的价格(p_j 对于 $j \neq i$),也取决于第 i 个厂商与其他所有厂商为使它们的产品($z_j, j = 1, \cdots, n$)互有差别所作的努力。在它的最一般的形式中

$$p_i = g(q_i, p_j, z_i, z_j) \tag{14.24}$$

这里 p_j 与 z_j 分别包含了所有其他厂商的价格与差别活动。假设 $\partial p_i/\partial q_i \leqslant 0$, $\partial p_i/\partial p_j \geqslant 0$, $\partial p_i/\partial z_i \geqslant 0$ 与 $\partial p_i/\partial z_j \leqslant 0$。即单个厂商面临的需求曲线是向下倾斜的,当它的竞争对手提高价格时,这一需求曲线向上移动。第 i 个厂商的产品差别活动也可以使需求曲线向外移动,而竞争对手的这种活动使需求曲线向内移动。

第 i 个厂商的利润由下式给定

$$\pi_i = p_i q_i - C_i(q_i, z_i) \tag{14.25}$$

在简单的例子:$\partial z_j/\partial q_i$, $\partial z_j/\partial z_i$, $\partial p_j/\partial q_i$ 与 $\partial P_j/\partial z_i$ 都为零时,最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p_i + q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i} - \frac{\partial TC_i}{\partial q_i} = 0 \tag{14.26}$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial z_i} = q_i \frac{\partial p_i}{\partial z_i} - \frac{\partial TC_i}{\partial z_i} = 0 \tag{14.27}$$

---

[1] 更准确的定义参见第 6 章引进的"属性"这一概念。按照这种方法,有共同属性的商品将成为一个产品组。

方程 14.26 再次表明了利润最大化时边际收益等于边际成本。方程 14.27 显示，对于追逐额外差别活动的任何投入，都将会停止在这一活动带来的边际收益等于边际成本的点上。[1]

14.2.2 市场均衡

虽然以上关于厂商选择的描述看似简单，但实际上相当复杂。因为任一厂商所面临的需求都取决于其竞争对手的价格与产品差别活动，需求曲线可能经常移动，在任何特定时间，可能仅能部分地知道它的位置。正如在古诺模型中一样，厂商必须作一些假设，才能作出决策。在推测变化模型中也是这样，一个厂商作出的任何决策都可能影响到它的竞争对手的行动。因此，差别产品的寡头模型提出了比我们考察过的同质产品模型更复杂的策略问题。毫不奇怪，对于这样一种情况导出的市场均衡的性质还没有取得多少确定的结论。在例 14.3 的空间差别市场中，我们将说明一种类型的均衡；而在本章的扩展部分，将讨论张伯伦的垄断竞争模型。练习题 14.6 和第 15 章中的几个对策论模型也对产品差别问题提出了不同的见解。

例 14.3

空间差别

为了建立一个产品差别的简单模型，考虑这样一个位于海滨的冰淇淋厂的案例——20 世纪 20 年代 H. 霍特林(H. Hotelling)首次研究了这一问题。[2] 图 14.4 显示两个冰淇淋厂商位于直线海滨上的 A、B 两点。假设需求者均匀地分布在海滨上，在每一单位长度有一位需求者，每个时期每个需求者只买一个蛋卷冰淇淋。假设蛋卷冰淇淋没有生产成本，但把它们运回海滨摊点导致了每单位距离的成本为 c(因为冰淇淋会溶化)。如果 p_A 表示蛋卷冰淇淋在点 A 的价格，p_B 表示在点 B 的价格，位于点 E 的人在下式成立时不介意从 A 处或 B 处购买

$$p_A + cx = p_B + cy \tag{14.28}$$

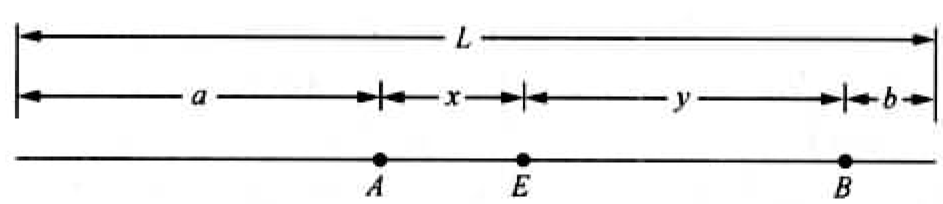


图 14.4 空间差别与定价

冰淇淋厂位于长度为 L 的直线海滨的 A 点与 B 点。在均衡时，E 点左边的消费者将选择 A，E 点右边的消费者将选择 B。两厂商将使用不同的价格，如果地点可重新选定，它们可能移向消费的中点或者端点，这完全取决于它们所作的策略假设。

在图 14.4 中表明

$$a + x + y + b = L \tag{14.29}$$

其中 L 是海滨的长度。因此点 E 对于 x 或 y 是相等的

① 另一陈述，参见本章练习题 14.4。

② H. Hotelling, "Stability in Competition", *Economic Journal* (January 1929): 41—57.

$$x = \frac{p_B - p_A + cy}{c} \tag{14.30}$$

$$= \frac{p_B - p_A}{c} + L - a - b - x \tag{14.31}$$

或者

$$x = \frac{1}{2}\left(L - a - b + \frac{p_B - p_A}{c}\right) \tag{14.32}$$

与

$$y = \frac{1}{2}\left(L - a - b + \frac{p_A - p_B}{c}\right) \tag{14.33}$$

两个厂商的利润是

$$\pi_A = p_A(a + x) = \frac{1}{2}(L + a - b)p_A + \frac{p_A p_B - p_A^2}{2c} \tag{14.34}$$

与

$$\pi_B = p_B(b + y) = \frac{1}{2}(L - a + b)p_B + \frac{p_A p_B - p_B^2}{2c} \tag{14.35}$$

每一厂商会选择使得它的利润最大化的价格，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} &= \frac{1}{2}(L + a - b) + \frac{p_B}{2c} - \frac{p_A}{c} = 0 \\ \frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} &= \frac{1}{2}(L - a + b) + \frac{p_A}{2c} - \frac{p_B}{c} = 0 \end{aligned} \tag{14.36}$$

很容易解出上式，有

$$\begin{aligned} p_A &= c\left(L + \frac{a - b}{3}\right) \\ p_B &= c\left(L - \frac{a - b}{3}\right) \end{aligned} \tag{14.37}$$

一般地说，这些价格取决于这两个不同地点的摊位的确切位置。例如，如果我们假设海滨长 100 码，$a = 40$ 码，$b = 10$ 码，$c = 0.01$ 美元/码，则

$$\begin{aligned} p_A &= 0.01\left(100 + \frac{30}{3}\right) = 1.10(\text{美元}) \\ p_B &= 0.01\left(100 - \frac{30}{3}\right) = 0.90(\text{美元}) \end{aligned} \tag{14.38}$$

这些价格差别仅仅是由于这一问题的位置引起的，因为蛋卷冰淇淋本身是相同的，并且没有成本。由于 A 的位置比 B 有利，它可以收取较高的价格而又不会失去太多的买卖。利用方程 14.32 显示

$$x = \frac{1}{2}(100 - 40 - 10 - 20) = 15 \tag{14.39}$$

因此，A 点售出 55 个蛋卷冰淇淋（尽管价高）而 B 点仅售出 45 只。位于 E 处的一个消费者，对于走 15 码到 A 处支付 1.1 美元与走 35 码到 B 处支付 0.9 美元是无差异的。当消费者位于点 E 右边一点

时，走较短的距离到 A，但是他选择 B，因为 A 的价格太高了，这时这个解是无效的。

位置的选择。 也许这个例子最重要的提示是由允许冰淇淋厂商不用成本就改变其地理位置。即我们允许厂商改变他们提供的产品的性质（理论上讲，位置起了方程 14.27 中 z_i 的作用）。这种可能性分析会导致一系列复杂情况的出现，因此，我们满足于只进行直观的讨论。如果我们仅关注蛋卷冰淇淋的出售数量，看来很明显每一厂商有动机把摊点移动到海滨的中心。任何离开中心位置的摊点选择都取决于它的对手的位置，目的在于获得更大的市场份额。这一效应类似于政治候选人倾向于在有争议的问题上选择中立态度，因为偏离中立立场，会使竞争对手容易获得更多的选票。就产品差别来说，这种动机倾向鼓励了产品的相似化。

但是，在本例中，蛋卷冰淇淋厂商更关心利润，而不是市场份额。靠近对手导致了消费者为地理优势付费的愿望下降，因此，这种移动使利润下降。而最终厂商的最优选址决策将取决于消费者对空间差别产品的具体需求情况，并且在一些情况下，选择的结果可能是差别最大化（即选在海滨的尽头）。① 无论带来持续均衡的选址决策是什么，似乎都不可能使厂商选择运输总成本最小化的社会最优位置。②

请回答： 在上述问题中，如果蛋卷冰淇淋以不变的边际成本生产将有什么结果？假定冰淇淋的生产满足边际成本递增呢？

14.3 进入

一个新厂商进入一个行业的可能性对完全竞争价格决定理论的发展起了很重要的作用。它确保任何长期利润会由于新厂商的进入而消失，厂商将在它们的长期平均成本曲线的低点上进行生产。在寡头的情况下，这些基本的力量将继续起作用。从某种程度上说，进入是可能的，长期利润会受到限制。如果进入完全无成本，长期利润将为零（与竞争时的情况一样）。

14.3.1 零利润均衡

如果寡头厂商对它们接受的价格有一定的控制力（可能是由于产品的轻微差别），每一厂商将面临一条向下倾斜的需求曲线，竞争分析不再成立，但自由地进入仍可能导致利润减少为 0，虽然现在不再能保证在平均成本最低处生产了。这种情况的说明参见图 14.5。最初，厂商面临的需求曲线为

---

① 参见 C. d'Aspremont, J. Gabszewicz, and J. Thisse, "On Hotelling's Stability in Competition", *Econometrica* (September 1979): 1145—1151。

② 到 A 点的步行总成本为

$$\int_0^a z\,dz + \int_0^x z\,dz = \frac{a^2 + x^2}{2}$$

类似地，到 B 点的步行总成本为 $(b^2 + y^2)/2$。当

$$a = x = b = y = L/4$$

时，它们的和最小。

dd,可以获得经济利润。新厂商受这些利润的吸引,它们的进入使 dd 向内移动(因为现在有更多的厂商在一条给定的需求曲线上竞争)。的确,进入会使需求曲线移到 $d'd'$,从而导致利润为 0。但是,使用这一需求曲线所得到的最大化利润时的产出水平(q')不等于平均边际成本最小时的产出水平(q_m)。而且,厂商的产出水平将比它的"有效率的"产出水平低,有一个由 $q_m - q'$ 给定的"过剩能力"。一些经济学家已经假定一些行业如加油站、便民店及快餐店是具有这一特点的行业,在这些行业中,产品差别是普遍的,但是,进入成本相对较低。

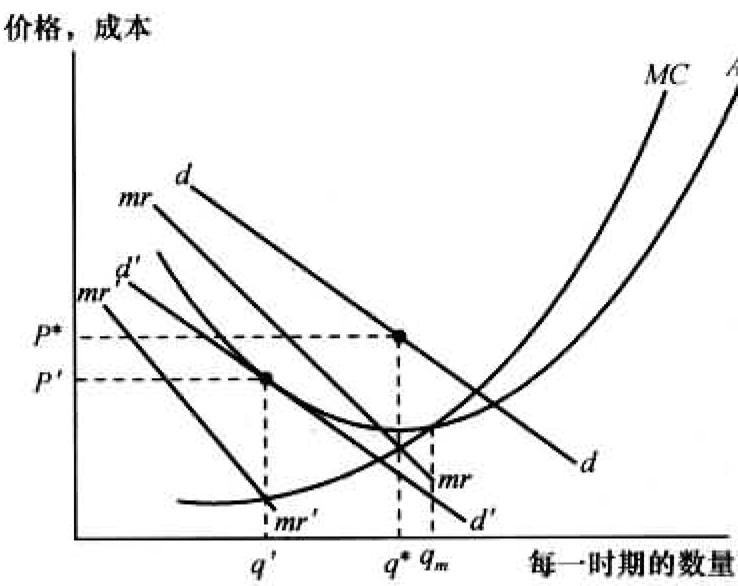


图 14.5　新厂商进入减少寡头利润

开始,厂商面临的需求曲线是 dd,边际收益是 mr,q^* 是利润最大化的产出水平。如果进入无成本,受可能盈利吸引的新厂商可能将需求曲线内移到 $d'd'$,这里的利润是零。在产出水平 q' 处,平均成本不是最小,反映出厂商的超额生产能力为 $q_m - q'$。

例 14.4

垄断竞争

图 14.5 所说的零利润均衡是首先被爱德华·张伯伦提出的,他把这种模型定义为垄断竞争。[①]在这个模型中,每个厂商生产具有细微差别的产品,并且进入是没有成本的。举一个例子,假设在一个市场上有 n 个公司,并且都具有如下形式的总成本公式

$$c_i = 9 + 4q_i \tag{14.40}$$

每个公司面临着一条对其产品有如下形式的需求曲线

$$q_i = -0.01(n-1)p_i + 0.01\sum_{j \neq i} p_j + \frac{303}{n} \tag{14.41}$$

在这里 p_j 是其他公司的产品价格,n 是这个行业内的厂商数量。注意到每个公司所面临的需求曲线是一条关于它自己产品价格向下倾斜的函数,并且这个函数还与该公司竞争者的价格正相关。我们在此定义该行业的一个均衡状态,此时价格相等(对于所有的 i, j, 有 $p_i = p_j$)。也许是由于空间或者其他类型的差异,即使是在均衡状态下,其他的模型也允许有一些价格差别存在。因为在我们的均

① 参见 E. Chamberlin, *The Theory of Monopolistic Competition* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1933)。

衡中 $p_i=p_j$，因此显而易见，$q_i=303/n$，$Q=nq_i=303$，这个结论对于所有的 n 都成立。

均衡市场结构。为了得到均衡数量 n，我们必须首先找到每个公司的利润最大化时选择的 p_i。因为

$$\pi_i = p_i q_i - c_i \tag{14.42}$$

最大化的一阶条件是

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = -0.02(n-1)p_i + 0.01\sum_{j\neq i} p_j + \frac{303}{n} + 0.04(n-1) = 0 \tag{14.43}$$

所以

$$p_i = \frac{0.5\sum_{j\neq i} p_i}{n-1} + \frac{303}{0.02(n-1)n} + 2 \tag{14.44}$$

运用均衡条件 $p_i=p_j$ 得出

$$p_i = \frac{30\,300}{(n-1)n} + 4 \tag{14.45}$$

注意到随着 n 的增大，价格越来越接近于边际成本(4)。因此，这个模型作为一个有限制的完全竞争解。均衡 n 是由零利润条件决定的(因为没有对进入的限制)。

$$p_i q_i - c_i = 0 \tag{14.46}$$

将等式 14.44 所得到的 p_i 还有等式 14.41 算出的 q 值代入上述表达式得到

$$\frac{30\,300\cdot 303}{n^2(n-1)} + \frac{4(303)}{n} = 9 + \frac{4(303)}{n} \tag{14.47}$$

或者说 $n=101$，因此最终的均衡是

$$\begin{aligned} p_i &= p_j = 7 \\ q_i &= 3 \\ \pi_i &= 0 \end{aligned} \tag{14.48}$$

均衡的本质。等式 14.48 所得出的均衡中，每个厂商都有 $p_i=AC_i$，但是 $p_i>MC_i=4$。更进一步地，因为

$$AC_i = 4 + \frac{9}{q_i} \tag{14.49}$$

随着所有产出增加，每个厂商都有着递减的边际成本，所以生产并不处在平均成本最低点。所有公司的零利润均衡将会如图 14.5 所示。这一均衡特征支持了张伯伦的假设，在这里描述的垄断竞争是帕累托无效率的。

如果每一个潜在的进入者都面临着如等式 14.41 的需求函数，那么等式 14.48 所描述的均衡就是可以持续的。没有新的厂商会认为进入这个行业是有利可图的。但是这种观点也许过于狭隘。在这个模型中，通过采用一个相对较大的生产规模，可以使潜在的进入者得到相对较低的成本(例如，当 $q=9$，$AC=5$ 时)。这种较低的平均成本在制定较低价格方面给了潜在的进入者相当大的余

地，因此它们可以让已经存在的厂商的客户转向它们。①

请回答：对于这个市场来说，帕累托最优解是什么？这个有效的解是怎样依赖于需求者效用的特点的？

14.3.2 可竞争的市场与行业结构

图 14.5 中所显示的零利润均衡是长期可持续的结论已受到了一些经济学家的挑战。② 他们认为模型忽视了**潜在的进入者(potential entry)**对市场均衡的影响，模型只关注实际的进入行为。因此，他们，首先是 H. 德姆塞茨(H. Demsetz)，提出重新把“市场中的竞争”与“为市场的竞争”的概念的区分引入到经济学中来，并证明了后一概念为分析自由进出的假定提供了更为合适的角度。③ 在这一更广泛的角度下，竞争这一“看不见的手”对厂商行为甚至有更强的约束，完全竞争均衡更可能出现。

以下，我们将通过定义“完全可竞争市场”的概念，开始对进入作更广泛的考察。

定义

完全可竞争市场。一个市场如果进出是绝对自由的，那么，这个市场就是完全可竞争的。也就是说，完全可竞争市场是这样一个市场，这里不存在外部潜在竞争者可以通过削价进入并仍能获得利润的情况。(因为如果存在这种获利机会，潜在的进入者会利用它)。

一个完全可竞争市场抛掉价格接受行为的完全竞争假设，但是加上一些自由进入的概念，允许潜在的进入者采取打了就跑的方式，捕捉任何可能的盈利机会。正像我们下面所指出的，这样一个假定在很多市场情况下是不一定准确的，但它为简化的定价理论提供了一个不同的出发点。

假定市场中已有两个或多个厂商，那么，图 14.5 所说明的均衡在完全可竞争市场中是难以持久的。在这种情况下，一个潜在的打了就跑的进入者可通过采取稍低于 P' 的价格出售，夺走所有最初已在市场的厂商的销售量 q'；然后再以高于边际成本的价格向其他厂商的消费者出售进一步的产出增量以弥补低价出售的损失。也就是说，由于图 14.5 中的均衡有 $P>MC$，这允许一个想要进入的厂商夺走零利润厂商的市场，并且侵占一些在边际点有利润可得的厂商的市场。只有一种市场均衡是采取打了就跑战术的进入者无法干扰的，那就是利润为零、价格为边际成本的市场均衡。正如我们在第 10 章中所看到的那样，这要求厂商在它们的长期平均成本曲线的最低点进行生产，此时 $P=MC=AC$。即便在厂商相对很少的市场中，也不存在价格接受行为，完全可竞争性仍然提供了一只“看不见的手”指导市场导向竞争型的均衡。

---

① 更加一般地，张伯伦的垄断竞争模型可以被认为是不完备的。因为他没有分析对于每个厂商来说需求曲线向下倾斜的原因。假设由于不同物品的商标、声誉或者地域不同，斜率上升。一个更加完备的模型应该考虑到厂商在这些策略之间的选择。对于这种分析的一个例子，参加练习题 14.6。

② 参见 W. J. Baumol, “Contestable Markets: An Uprising in the Theory of Industry Structure”. *American Economic Review* (March 1982): 1—19. and Baumol, W. J.; J. C. Panzar; and R. D. Willig. *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure.* (San Diego, Calif.: Harcourt Brace Jovanovich, 1982)。

③ H. Demsetz, “Why Regulate Utilities?” *Journal of Law and Economics* (April 1968): 55—65.

14.3.3 市场结构

这种完全可竞争分析可进一步用来分析行业结构的决定。正如在第 10 章中所提到的，如果我们用 q^* 表示平均成本最低时的产出水平，用 Q^* 表示商品价格等于最低平均成本时的商品的市场总需求，则行业中厂商的均衡数目由下式给出

$$n = \frac{Q^*}{q^*} \tag{14.50}$$

与完全竞争情况相反，这一数目可能相对较少。例如，在图 14.6 中，精确到四个厂商满足市场需求 Q^*，而完全可竞争假设保证了竞争行为，尽管这些厂商可能认识到它们之间的策略关系，潜在进入者捕捉任何可能盈利机会的能力大大地限制了它们行为的可能类型，从而提供了一个确定的均衡市场结构。

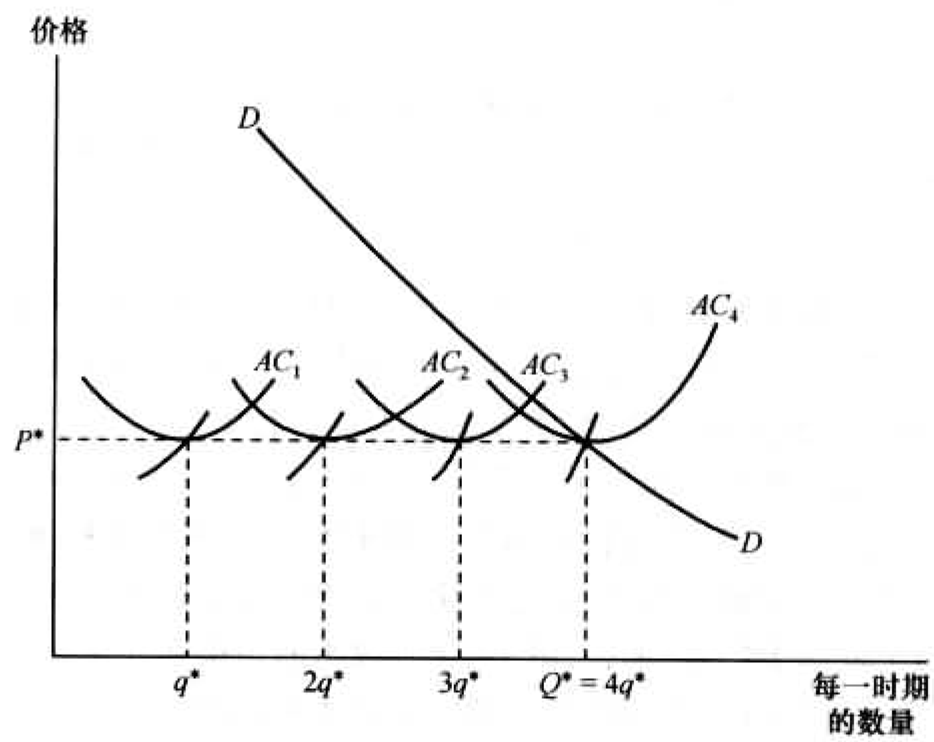


图 14.6　完全可竞争性与行业结构

在一个完全可竞争市场中，均衡要求 $P = MC = AC$。厂商的数目完全由市场需求（Q^*）与最低平均成本下的产出水平（q^*）决定。

14.3.4 进入壁垒

本节到目前为止所作的所有分析都是在进出自由的假定下进行的。当各种壁垒阻止这种可能时，上述分析所得的结论就必须进行修改。在寡头垄断情形下可能的进入壁垒包括前面章节已经讨论过的与垄断相联系的一些情况，也包括那些由寡头垄断市场所带来的一些特别的情况。譬如，产品差别可以导致进入壁垒，这主要由于消费者的品牌意识，或者由于生产者生产了太多的品牌以至于希望进入的厂商已没有再生产其他品牌的余地（速食早餐麦片行业就是如此）。如果现有的厂商能让希望进入的厂商确信，即便进来也是无利可图的，那么，策略定价决策的威胁就可以限制它们的进入。厂商可暂时地采用一个低的、能阻止进入的价格而达到这一目的，一旦潜在的进入者不存在

了,再提高价格(假设它们将这样做)。

最后,在可竞争市场理论中,非常灵活的打了就跑的行为还可能要受现实世界中的其他两种进入壁垒的约束。第一,厂商的一些类型的资本投资可能是不可逆的,一个厂商不可能建造了一个自动化装配工厂后,仅使用一周便弃而不用而不受损失。此时退出行业的成本就会使得对该行业的周期性袭击无利可图。当然,在个别行业,如汽车运输业,资本很容易在短期内租到,退出的成本也很小。第二,可竞争市场模型要求需求数量对价格的差别能作出瞬时的反应。如果需求者仅能缓慢地转向新产品,则潜在的进入者不可能快速占领市场,而且它打击市场中已有厂商的能力会受到约束。对市场行为的所有这些限制的重要性最终是一个实证问题。

例 14.5

可竞争的自然垄断

设生产电力 Q(千瓦小时)的总成本由下式给出

$$C(Q) = 100Q + 8\,000 \tag{14.51}$$

显然,这一函数显示了在产出范围内有一平均成本的递减,所以电力生产是一个自然垄断的行业。对电力的需求取决于它的价格(美元/千瓦小时),这由下式给出

$$Q_D = 1\,000 - 5P \tag{14.52}$$

如果一个电力生产厂商作为垄断者,选择利润最大化时的产量,有

$$MR = 200 - \frac{2Q}{5} = MC = 100 \tag{14.53}$$

或

$$\begin{aligned} Q_m &= 250 \\ P_m &= 150 \end{aligned} \tag{14.54}$$

根据这一垄断选择,利润将为 4 500($=R-C=37\,500-33\,000$)。这些利润为潜在的进入者进入电力行业提供了一个诱人的目标。如果无进入壁垒(譬如,已有的厂商没有特许证),这样,进入者可以按较低的价格向消费者提供电力,并仍能使收益等于成本。因此,方程 14.54 的垄断解可能并不代表一个可行的均衡。

可竞争解。如果电力的生产是完全可竞争的,在潜在进入者的威胁下,唯一可行的价格是平均成本。只有在以平均成本定价时,潜在的进入者才不再有威胁垄断者的激励。我们可以通过下式找出这一均衡

$$Q = 1\,000 - 5P = 1\,000 - 5(AC) = 1\,000 - 5\left(100 + \frac{8\,000}{Q}\right) \tag{14.55}$$

这就导致一个二次表达式

$$Q^2 - 500Q + 40\,000 = 0 \tag{14.56}$$

分解因式

$$(Q - 400)(Q - 100) = 0 \tag{14.57}$$

因此,仅当 $Q=400$ 时,才有可持续的阻止进入解。所以,在可竞争的情况下,市场均衡为

$$Q_c = 400$$
$$P_c = 120 \tag{14.58}$$

在垄断解的情况下,可竞争性大大增加了消费者的福利。的确,可竞争解正是对平均成本定价感兴趣的管制委员会所可能选择的解。

请回答:在没有给电力生产者提供任何补贴的约束条件下,消费者的剩余是否已经达到最大?提供一个能使市场达到帕累托最优的补贴,消费者的剩余会怎样进一步增加?

小　　结

很多市场介于完全竞争与垄断这两个极端情形之间。本章我们通过引入一些最广泛使用的模型开始对这些市场进行考察。我们已看到在这种不完全竞争的市场中,每一厂商在作决策时要考虑它的竞争对手的决策,并把许多推测因素引入到我们的分析中来。在第15章我们将运用对策论的模型继续讨论这种相互关系。这里我们对很少几个厂商构成的市场模型得到了下列一般结论:

- 只有几个厂商组成的市场通过垄断的卡特尔取得潜在的利润。然而,这种卡特尔可能是不稳定的,维持它是要花成本的,因为每一成员都有在价格上欺诈的动机。
- 在只有几个厂商构成的市场中,产出与价格的决定是相互依存的。每一厂商必须考虑它的竞争对手的决策。构造这种具有相互依存性的模型是十分困难的,因为必须考虑到推测变量。
- 古诺模型为寡头市场提供了一个容易把握的分析方法,但它忽略了重要的策略性问题。
- 产品差别可以在标准的利润最大化框架下分析。对于差别产品,一价法则不再成立,厂商在进行价格决策时将有更多的余地。
- 进入条件是各种市场的均衡长期存在的重要决定性因素。对于完全可竞争性,它的均衡可能很类似于完全竞争的均衡,尽管此时市场中仅有相当少的厂商。

练　习　题

14.1 为了简单起见,假设垄断者没有生产成本且它所面临的需求曲线由下式给定

$$Q = 150 - P$$

a. 计算这一垄断者利润最大化时的价格—产量组合,并计算该厂商的垄断利润。

b. 假设第二个厂商进入了市场。令 q_1 为第一个厂商的产出,q_2 为第二个厂商的产出。市场需求由下式给出

$$q_1 + q_2 = 150 - P$$

假设第二个厂商也没有生产成本,运用双头垄断的古诺模型,确定一下利

润最大化时每个厂商的产出水平及市场价格，并且计算每个厂商的利润。

c. 怎样把 a 与 b 中的结果与完全竞争市场中的价格—产量组合相比较？画出需求曲线与边际收益曲线图形，并且指明需求曲线上的三个不同的价格—产量组合。

14.2 垄断者可以在一不变的平均成本与边际成本 $AC = MC = 5$ 下进行生产，厂商面临的市场需求曲线为

$$Q = 53 - P$$

a. 计算这一垄断者利润最大化时的价格—产量组合，并且计算该垄断者的利润。

b. 假设第二个厂商进入了市场，令 q_1 为第一个厂商的产量，q_2 为第二个厂商的产量。现在市场的需求为

$$q_1 + q_2 = 53 - P$$

假设第二个厂商与第一个厂商有相同的成本，把厂商 1 与厂商 2 的利润表示成 q_1 与 q_2 的函数。

c. 假设（采取古诺策略的）两个厂商中的每一个都假定另一厂商的产量是不变的，并且选择出使得自己利润最大化的产出水平。计算每个厂商的“反应函数”，它表明一个厂商的意愿产出是另一厂商产出的函数。

d. 在 c 的假定下，两个厂商都满意的仅有的产出水平 q_1 与 q_2 是多少（q_1 与 q_2 的值分别为多少时满足两者的反应曲线）？

e. q_1 与 q_2 处于 d 中的均衡水平时，市场价格、各个厂商的利润与总利润各是多少？

f. 现在假设在行业中有 n 个一样的厂商。如果每一个厂商对它的所有对手都采取古诺策略，每一厂商的利润最大化产出水平是多少？市场的价格是多少？产业的总利润是多少？（它们都取决于 n）。

g. 证明当 n 趋向于无穷时，产出水平、市场价格与利润都接近于完全竞争时的情况。

14.3 运用本章进行的分析解释下列行业行为：

a. 银行公布一个公开的基本利率，并只是偶尔对其进行调整。

b. 苹果公司与 IBM 计算机公司的产品不兼容。

c. 保险公司继续招揽汽车保险业务，尽管它们声称“我们在我们所做的每一笔保险业务上都赔了钱”。

d. 美国汽车在 20 世纪 60 年代与 70 年代质量很差，但是在 80 年代后期质量改进了。

14.4 假设一个厂商的成本花在产品差别（或者广告）活动（z）与数量（q）上，有

$$C = g(q) + z \quad g'(q) > 0$$

并且它的需求函数可写成

$$q = q(p, z)$$

证明对于厂商利润最大化时 p 与 z 的选择导致花费在 z 上的总收益份额由下式给定

$$\frac{z}{pq} = -\frac{e_{q,z}}{e_{q,p}}$$

（这一条件是由 R. Dorfman 与 P. Steiner 推导出来的，参见“Optimal Advertising and Optimal Quality”，*American Economic Review* [December 1954]:826—836。）

14.5 测度厂商分布的一个方法是使用荷凡达尔（Herfindahl）指数，定义为

$$H = \sum \alpha_i^2$$

这里 α_i 是厂商 i 的收益在总行业收益中

的份额。证明如果行业中的所有厂商有规模报酬不变的生产函数且遵循古诺产出决策(方程14.10),总行业利润对总收益的比等于荷凡达尔指数除以需求的价格弹性。这一结果意味着行业集中与行业盈利之间有什么样的关系?

14.6 S. Salop 提供了一个有意义的产品差异模型。按照他的模型,我们可以把消费者的不同偏好视作连续分布的一个环形(或者说,不同嗜好的消费者分别安置一个圆周上的不同点,偏好相近的消费者相邻)。安置在圆环上的每个消费者需求1单位的产品。如果消费者必须消费一种不与他们的喜好完全相同的产品,他们会由于心里不痛快而产生一个成本。在 Hotelling 模型中,这种成本等于 tx(在这里,x 是消费者最喜欢的产品与最近供给者提供的产品之间的"距离",t 是单位距离的成本)。开始,有 n 家公司,每一家都有相同的成本函数 $C_i = f + cq_i$,且每家公司生产的产品恰是它落脚点处消费者的最爱。为了简单,我们还假设这个圆的周长为1,并且假设这 n 家厂商均匀地以 $1/n$ 的间隔分布在圆周上。

a. 每家公司可以自由地选择它的价格 p,但是受到他最近的邻居的价格 p^* 的限制。解释为什么一个公司的市场(x)的长度由如下公式给出

$$p + tx = p^* + t[(1/n) - x]$$

b. 假设定价方式如 a 所说,这家公司卖出 $q_i = 2x$,因为它在两边都有市场。计算利润最大化情况下这个公司的价格,该价格是由 p^*、c 和 t 表示的函数。

c. 假设对称性要求所有价格相等,表示出这将导致一个均衡,其中 $p = p^* = c + t/n$。用直觉来解释这个结果。

d. 在均衡情况下,证明此时每个公司的利润为 $\pi_i = t/n^2 - f$。

e. 假设可以自由进入,这个模型中均衡水平的 n 是多少?

f. 计算这个模型中最优的差异水平,其定义是可以最小化所有产品生产成本与所有消费者"偏好距离成本"之和的公司数量。表示出这个数值正好是 e 中数值的一半。因此,这个模型又被认为是"过度差异"。(对该模型的进一步研究,参见 S. Salop "Monopolistic Competition with Outside Goods", *Bell Journal of Economics*, Spring 1979, pp. 141—156。)

14.7 假设原油的需求由下式给定

$$Q = -2\,000P + 70\,000$$

这里 Q 是原油产量,单位是千桶/每年,P 是每桶价格。还假设有1 000个相同的小原油生产厂商,每一个厂商的边际成本由下式给出

$$MC = q + 5$$

这里 q 是一般厂商产出量。

a. 假设每一个小石油生产厂商都是价格的接受者,计算市场供给曲线、市场均衡价格及均衡产量。

b. 假设在新泽西有一个潜在的价格领导者发现了无限的原油供应源,并且石油可按每桶15美元的不变平均边际成本生产。假设 a 中描述的竞争群体的供给行为并没有由于这一发现而发生变化,价格领导者为了利润最大化应生产多少原油?此时的市场价格与总产量是多少?

c. 画图来表示你的结论。消费者剩余会因新泽西的石油发现而增加吗?这一消费者剩余与新泽西的石油以竞争方式供给情况下的消费者剩余相比,有什么不同?

14.8 假设一个厂商正在考虑投资于一项研究，该研究导致一个节约成本的创新。假设该厂商可以保留此创新自己使用，那么该厂商是作为一个竞争的价格接受者由较低的边际成本所得到的额外利润更多，还是作为一个垄断者得到的额外利润更多？请用图形来详细说明你的见解。另外，也请你用文字来分析说明竞争与垄断的厂商谁更可能采用节约成本的创新。（关于这一问题的早期分析，参见 W. Fellner, "The Influence of Market Structure on Technological Progress", *Quarterly Journal of Economics* [November 1951]: 560—567。）

14.9 在一个中等城市中电话的需求为

$$Q = 1\,000 - 50P$$

这里 Q 是家庭安装电话的数量（单位千台），P 是使用电话的每月租金（单位美元）。电话系统的成本由下式给出

$$C = 500\ln(0.1Q - 20)$$

对于 $Q > 200$。

a. 本城市的电信业务是否是一个自然垄断的行业？

b. 在这种情况下，什么样的产出水平将产生一个无管制的垄断？消费者要支付的价格是多少？垄断利润是多少？

c. 如果允许活跃的竞争，价格会有什么变化？

推荐阅读文献

Bain, J. S. *Barriers to New Competition*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1956.

该书论述了进入壁垒理论的古典评述与一些实证细节。

Baumol, W. J., J. C. Panzar, and R. D. Willig. *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure*. San Diego, Calif.: Harcourt Brace Jovanovich, 1982.

该书介绍了可竞争市场理论的近期的详细发展。

Mas-Collel, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. New York. Oxford University Press. 1995.

第 12 章有关几个空间差异模型的很好的总结。

Scherer, F. M. *Industrial Market Structure and Economic Performance*. 2nd ed. Chicago: Rand McNally, 1980. Chap. 1.

该书是主要的行业组织的教材，是一本百科全书式的书。但缺乏最近出版的 Tirole 的教材所具有的那样详尽的分析。

Schmalensee, R. *The Economics of Advertising*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1972. Chap. 1.

该书是关于广告理论与一些经验调查（特别是关于烟草广告）的很好的综述。

Shy, Oz. *Industrial Organization: Theory and Applications*. Cambridge, MA: MIT Press, 1995

第 7 章提供了更多的差异化产品的模型，其中包括一些详细的定位模型。

Stiglitz, J., and G. F. Mathewson, eds. *New Developments in the Analysis of Market Structure*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1986.

包括一些有用的文章和讨论回顾。特别推荐 Baumol et al.（竞争性）、Schmalensee（广告）和 Stiglitz（竞争和研发的动力）。

Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge, MA: MIT Press 1988.

大量的非完全竞争模型。尤其是关于产品差异化和非价格竞争的部分非常有用。

第 15 章　博弈定价模型

在针对只有几个卖者的市场构造模型时，许多策略方面的问题能够通过使用博弈论的方法来研究。本章，我们将会看一些这方面的应用。但是，我们首先必须引入一些有关博弈论的最基本的概念，并且了解一下在博弈模型中均衡是怎样被定义的。

15.1　基本概念

博弈论模型意在以简驭繁，就像本书以前章节中的模型那样，博弈论的理论模型是高度抽象的结果，它在形成过程中抽象掉了与问题相关的大部分个人与机构的细节，以便得到一个在数学上易于处理的形式。能深入到问题的“核心”是这类模型的最大威力所在。

在个人必须作出策略选择的任何情况下，最终结果取决于每一个人所作的选择，任何这样的情况都可看成是**博弈**(**game**)。所有博弈都具有以下三个基本要素：(1) 局中人；(2) 策略；(3) 报酬。博弈可以是**合作的**(**cooperative**)，在这种情况下，局中人能够达成协议；博弈也可以是**非合作的**(**noncooperative**)，在这种情况下，不可能达成任何协议。这里，我们主要讨论非合作博弈，这样的博弈包括以下几个要素。

15.1.1　局中人

博弈中每个策略的决策者被称作局中人。这些局中人可以是个人(如在扑克游戏中)、厂商(如在寡头市场中)，或者是整个国家(如在武装冲突中)。所有局中人具有有能力在一组可能的行为集合中作出选择的特征。[①] 通常，在整个博弈过程中局中人的数目是给定的，博弈常常以局中人的数目来描述(如两人博弈、三人博弈，或者 n 人博弈等等)。在这一章中，我们将主要考虑两人博弈的情况，我们把局中人(通常是厂商)记为 A 与 B。在博弈论中通常所作的最重要的假设之一(正如在大部分经济学问题中那样)是局中人是同质的，在身份上没有什么差别。在博弈中没有“好人”与“坏

① 有时博弈中一个局中人是“自然”。对于这个局中人，行为不是“选择”，而是以一定概率发生的可能性。例如，天气可能影响博弈结果，但它不是由自然“选择”的。假设特别天气结果以不同的概率发生。利用第 18 章和第 19 章给出的方法可以分析这种博弈。

人”之分，我们假设局中人并没有什么特殊的能力，也没有什么特别的缺点。我们只是简单地定义每个局中人作出行为策略的选择都是为了产生最有利的结果。

15.1.2 策略

博弈中局中人的每个回合的行动叫做一个**策略**。根据考察的博弈的不同，一个策略可能是非常简单的行动（如在扑克牌中选取一张牌），也可能是非常复杂的行动（如建造一个以激光为基础的反导弹防御系统）。但是每个策略都被认为是有明确定义的、特定的一个回合的行动。① 通常每个局中人可运用策略的个数是有限的；只要用二人博弈的模型，就能说明许多博弈论里的问题。在非合作博弈中，局中人相互之间不能就他们所采用的策略达成有约束力的合约，每一位局中人不能确定其他人会怎样做。

15.1.3 报酬

博弈中局中人的最终收益被称作**报酬**。报酬通常是用局中人获得的效用水平来测度的，虽然这常常会被货币报酬所替代（如厂商的利润）。一般情况下，我们假设局中人能够对博弈的报酬根据偏好程度由高到低进行排序，以寻求可达到的最高序列的报酬。报酬包括了与博弈结果相关的所有方面，既包括显性的货币报酬，也包括隐性的局中人关于结果的心理感受，例如，结果是使他们难堪，还是让他们感到十分满足。相对于提供较少效用的报酬，局中人更喜爱提供较多效用的报酬。

15.1.4 符号

通常情况下没有必要用正式的符号用于标记一个博弈——一个对情况的文字描述就可以了。但是，为简便起见，一些符号能够帮助我们澄清事实。遵从如下的标准习惯，我们将会定义一个两个局中人（A 和 B）之间的博弈 G

$$G[S_A, S_B, U_A(a,b), U_B(a,b)] \tag{15.1}$$

在这里，S_A 和 S_B 分别代表了对于局中人 A 和 B 可以采用的策略集合。并且，U_A 和 U_B 表示当 A 和 B 选择特定的策略（$a \subset S_A, b \subset S_B$）时局中人可以得到的效用。

15.2 博弈论的纳什均衡概念

在考察市场理论时，我们给出了均衡的概念，它是使供求双方对市场结果都满意的状况。一旦给出均衡价格与均衡数量，市场的参与者没有哪个有激励改变自己的行为。因此，这里的问题是在博弈论模型中是否存在着类似的均衡概念。即是否存在着这样的情况，一旦作出合适的策略选择，

---

① 在连续行为的博弈（例如，最常见的这种博弈是下棋）中，一个具体的策略可能涉及几个决策点（下棋的每一步）。假设完全知道应怎样走棋，如此复杂的模式常常可以由在一个很大但有限的纯策略集中的选择来表示，每一个策略研究了全部的行为过程直到博弈结束。参见“外延”与“规范”形式的讨论，及 D. M. Kreps, *Game Theory and Economic Modeling*, Chap. 3 (Oxford University Press, 1990)。

局中人将不再有激励去进一步调整他们的行为？这些均衡对市场结果是否提供了令人信服的解释？

虽然在博弈论中有几种方法给出了各自的均衡概念，但最常用的是最初由古诺在19世纪提出（参见第14章）并在20世纪50年代初由纳什推广的方法。① 在纳什的推理中，如果当局中人B选择b^*时，a^*是局中人A的最好选择；反之局中人A选定a^*时，b^*是局中人B的最佳选择，这时这对策略(a^*,b^*)就定义为均衡时的策略。正式地，如果

$$\begin{aligned} U_A(a^*,b^*) &\geq U_A(a',b^*) \quad \text{对于所有 } a' \subset S_A \text{ 成立} \\ U_B(a^*,b^*) &\geq U_B(a^*,b') \quad \text{对于所有 } b' \subset S_B \text{ 成立} \end{aligned} \tag{15.2}$$

那么这组策略被称为一个纳什均衡。

即便其中一个局中人泄露了他使用的（均衡）策略，其他的局中人从这个信息中并不能获益。对于非均衡策略，情况就不是这样。如果一个局中人获知其他人的策略，他通常能够从中获益，因为他可以在此过程中，采取措施，以减少暴露了策略的局中人的收益。

并非每个博弈都有唯一一对纳什均衡。在有些情况下，一个博弈可能有多个均衡，其中一些比另一些更合理。在一些博弈中，局中人可能对有些纳什均衡并不特别满意；而在另一些情况下，其他均衡概念可能比纳什均衡更合情理。所以在博弈论均衡与传统的市场均衡概念之间存在着相当复杂的关系。接下来，我们为开始博弈论研究做初始的定义工作。

定义

纳什均衡策略。如果给定局中人B的策略是b^*，a^*是局中人A的最优策略；如果给定局中人A的策略是a^*，b^*是局中人B的最优策略。这样一对策略(a^*,b^*)代表了两个局中人博弈的一个均衡解。②

15.3 一个博弈的例子

为了说明关于策略建模的博弈论方法，我们考察一个简单的例子。假设两个学生（A与B），他们要决定自己在宿舍里练习乐器时的声音大小。每个人可能采取或者较高的声音（L，即 loudly）或者较低的声音（S，即 softly），我们希望考察在这种情况下可能的均衡选择。应该强调指出的是，这个博弈并不很现实，用它做例子，只是为了说明问题而已。

15.3.1 外延式博弈

图15.1说明了广告博弈中的具体细节。在这个博弈"树"中，是从左至右采取行动的，每个"结点"代表所标的个人的决策。在这个博弈中是学生A先作决策，他要选择他的音量（L或S）。因为B的决策出现在A的右边，所以博弈树指明学生B在学生A之后作决策。在这个阶段，B采取什么策

① John Nash, "Equilibrium Points in *n*-person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36 (1950): 48—49. 纳什是2001年的电影《美丽心灵》中的主角，本章的练习题15.5提及了这部电影中的一个博弈问题。

② 虽然这个定义仅是针对两人博弈提出的，但是，可以推广到n个人的博弈，只不过记号麻烦一些。

略，取决于他是否事先了解 A 采取了什么策略。首先，我们来看看 B 事先不掌握这一信息的情况，围绕 B 的两个决策结点的卵形虚线表示在这两个结点有相同的（缺乏）信息。在不知道 A 决策的情况下，B 必须选择 L 或者 S。然后，我们将考察 B 掌握这一信息的情况。

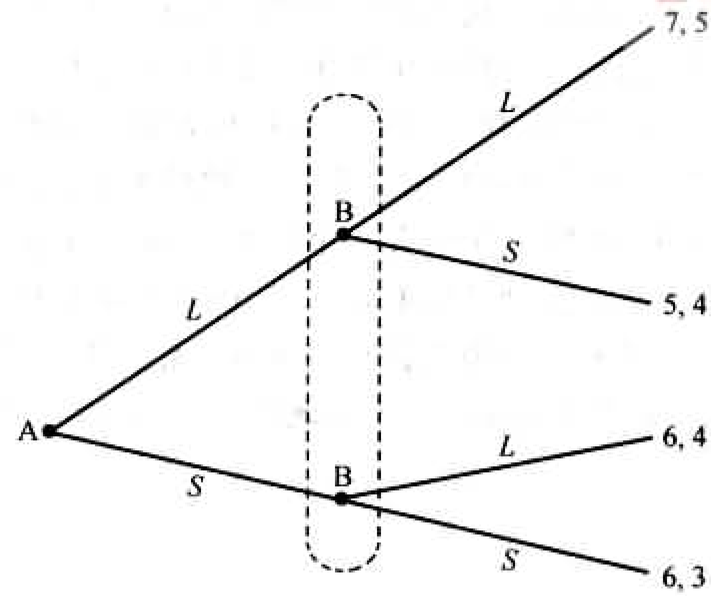


图 15.1　外延式的宿舍博弈

在这个博弈中 A 选择大声（L）或者小声（S），然后，B 作出一个类似的选择。围绕 B 的结点的卵形虚线表示他们有相同的（缺乏）信息，B 不知道 A 所选择的策略。报酬（A 的报酬为两数值的前一个数值）列在右端。

在每个树叉末端的数字表示报酬，这里是以宿舍的学生的效用来衡量。每对报酬的第一个数字是 A 的报酬。例如，在图 15.1 中的报酬表示，如果 A 选择 S 且 B 选 L，则 A 的效用是 6 且 B 的效用是 4。其余情况下报酬的解释依此类推。

15.3.2　规范形式的博弈

虽然图 15.1 中的博弈树对博弈的完整结构提供了很有用的视觉表示，但有时用表格来描述是更为方便（或"规范"）的形式。表 15.1 提供了宿舍博弈的这种表示方式。在表中，学生 A 的策略（S 或者 L）列在左边，B 的策略列在上边。各种策略选择的报酬（第 1 个数值是学生 A 的）都写在表中。虽然通常情况下使用正规形式更加方便，但实际上图 15.1 与表 15.1 传达了同样的博弈信息。

表 15.1　宿舍博弈的规范形式

		B 的策略	
		L	S
A 的策略	L	7,5	5,4
	S	6,4	6,3

15.3.3　占优策略与纳什均衡

表 15.1 清楚地表明对于 B，采用较大的声音是最有利的策略。无论 A 作出什么选择，策略 L 能

比策略 S 给学生 B 带来更大的收益。当然，因为这个博弈的结构为局中双方所知，A 将认识到 B 有这样一个最有利的策略，因此，要选择一个与之相应的最好的策略，A 选择了 L。所以，考虑到策略优势，A:L,B:L 的策略就是所能作的最好选择，最后的报酬对 A 来说是 7，对 B 来说是 5。

A:L,B:L 这种策略选择符合也服从均衡的纳什准则。如果 A 知道 B 要选择 L，他的最佳选择也是 L。类似地，如果 B 知道 A 将选择 L，他的最佳选择也是 L（事实上，因为 L 是 B 的最有利的策略，所以无论 A 选择什么，L 都是 B 的最佳选择）。所以 A:L,B:L 选择满足纳什准则的对称性要求。

为了弄明白为什么表 15.1 中的其他策略组合不满足纳什准则，让我们每次只考虑一个策略方案。如果局中人选择 A:S,B:L 策略，那么这里有一个可供 A 改善其方案的机会——如果 A 知道 B 选择了 L，那么 A 选择 L 有更大的收益。所以，策略 A:S,B:L 不是纳什均衡。B 选择 S 的任何一个策略所形成的方案都不满足纳什准则。因为我们已经指出，无论 A 作出什么选择，B 都可以通过选择 L 来改善自己的利益。因为对于 B 来说，L 严格地优于 S，B 选择 S 是得不出有纳什均衡的结果的。

15.4 纳什均衡的存在性

虽然图 15.1 所说的博弈包括了唯一的纳什均衡，但那不是两方博弈的必然结果。例 15.1 说明的一个简单的博弈（石头、剪刀、布）就没有纳什均衡，另一个博弈（性别之战）就包括了两个纳什均衡。因此，这些例子表明纳什方法不可能总是能够找到一个两方博弈的均衡解。而是说我们应该去研究每个博弈情况的细节来决定是否存在纳什均衡。

例 15.1

简单的纳什均衡

表 15.2 说明反映纳什均衡不同可能性的两个相似的博弈。表中(a)部分表示孩子的猜拳博弈“石头、剪刀、布”。对角线上的结果表明局中人采取相同策略，报酬为零，支出也是零。在其他情况下，通常的规则（石头砸坏剪刀、剪刀剪布、布包石头）规定输家向赢家支付 1 美元。玩这个游戏的每一个人都知道这里不存在均衡状况。任何一对策略都是不稳定的，因为至少有一个局中人有采取其他策略的动机。例如，(A:剪刀,B:剪刀)提供了一个明显的激励，或者 A 或者 B 选择石头。类似地，(A:布,B:石头)显然鼓励 B 选择剪刀。这个游戏所显示的不规则循环行为表明不存在纳什均衡。

表 15.2　两个简单的博弈

(a) 石头、剪刀、布——不存在纳什均衡

		B 的策略		
		石头	剪刀	布
	石头	0,0	1,-1	-1,1
A 的策略	剪刀	-1,1	0,0	1,-1
	布	1,-1	-1,1	0,0

(b) 性别之战——两个纳什均衡

		B 的策略	
		山区	海滨
A 的策略	山区	2,1	0,0
	海滨	0,0	1,2

性别之战。在"性别之战"的博弈中，丈夫(A)与妻子(B)计划一次度假。A 喜欢在山区度假，B 喜欢在海滨度假。但他们都愿意在一起而不愿分开。表 15.2(b) 部分的报酬数据表示了这种情况。在这里，两人在一起的度假就是纳什均衡。(A:山区度假，B:山区度假)与已知的其他情况相比，每一位局中人都得到了更多的益处。(A:海滨度假，B:海滨度假)这一情况也得到了类似的结果。因此，这是具有两个纳什均衡的博弈。

请回答：以上这些博弈中是否有任何占优势的策略？在性别之战中为什么分开度假不是纳什均衡？

但是，在有些两方博弈中，是一定存在着纳什均衡的。直观地说，当博弈中的参与者有许多策略可供选择的时候，就可以保证这个博弈有足够的灵活性使得至少有一个纳什均衡存在。这样的博弈要求满足两个条件：第一，这是一个 A 和 B 选择的策略，是一个连续变量的不同水平的博弈，它包含了无限数量的潜在的博弈；这类博弈是确定会有纳什均衡的。这种均衡中最重要的一种类型是两家公司作为局中人制定一种产品的价格。这种类型的均衡，还有他们存在纳什均衡的解释，将在本章中讨论。

另一种方式是博弈中包含足够"多"的策略来允许局中人使用"混合"策略。在这类博弈中，很少会有我们以前所讨论(也许只有两个)的那种"纯策略"。每个局中人在预先选定的概率下进行纯策略博弈。例如，在宿舍博弈中，学生 A 将会通过抛一枚硬币来决定是用大声还是小声来演奏音乐，也就是说，他对于每种策略的选择可能性是 1/2。如果每个局中人能够以任何他可以选择的概率来采取可用的纯策略，这个博弈就会被转换成一个有无限的(混合的)策略，并且可以保证在这种情况下纳什均衡的存在。例 15.2 提供了一个让混合策略纳入我们已经研究过的"性别之战"的纳什均衡。

不幸的是，有连续策略的两方博弈的纳什均衡的证明很难并且要求有一定的假设前提。因此，我们不在此展示。而且我们对于两方博弈的分析包括了对任何可能存在的纳什均衡的求解。有兴趣的读者也许希望自己来证明解的存在性。[①]

① 可参见 D. Fudenberg and J. Tirole, *Game Theory* (Cambridge, MA: MIT Press, 1992), section 1.3。证明纳什均衡的存在性通常要用到不动点定理，这在第 12 章进行了讨论。

例 15.2

混合策略的性别之战

为了展示混合策略的引入怎样给一个博弈带入纳什均衡，我们回到例 15.1 的性别之战。假设问题中的这对夫妻厌倦了对于假期去哪儿的争吵并且决定由“概率”来决定。特别地，假设 A 决定以 r 的概率去爬山，其去海边度假的概率就是 $(1-r)$。相似地，假设 B 决定以 s 的概率去爬山，去海边度假的概率就是 $(1-s)$。给定了这些概率，博弈的结果就会按照如下的概率出现：山区—山区，rs；山区—海边，$r(1-s)$；海边—山区，$(1-r)s$；海边—海边，$(1-r)(1-s)$。

A 的期望效用为

$$E(U_A) = rs(2) + r(1-s)(0) + (1-r)(s)(0) + (1-r)(1-s)(1)$$
$$= 1 - r - s + 3rs = 1 - s + r(3s - 1) \tag{15.3}$$

很明显地，A 的最优选择概率 r 依赖于 B 的概率 s。如果 $s<1/3$，选择 $r=0$ 效用最大。当 $s>1/3$，A 应该选择 $r=1$。当 $s=1/3$ 时，A 的期望效用是 2/3，而不管 r 取什么值。图 15.2 给出了当 s 取不同值时 A 对于 r 的最优选择。

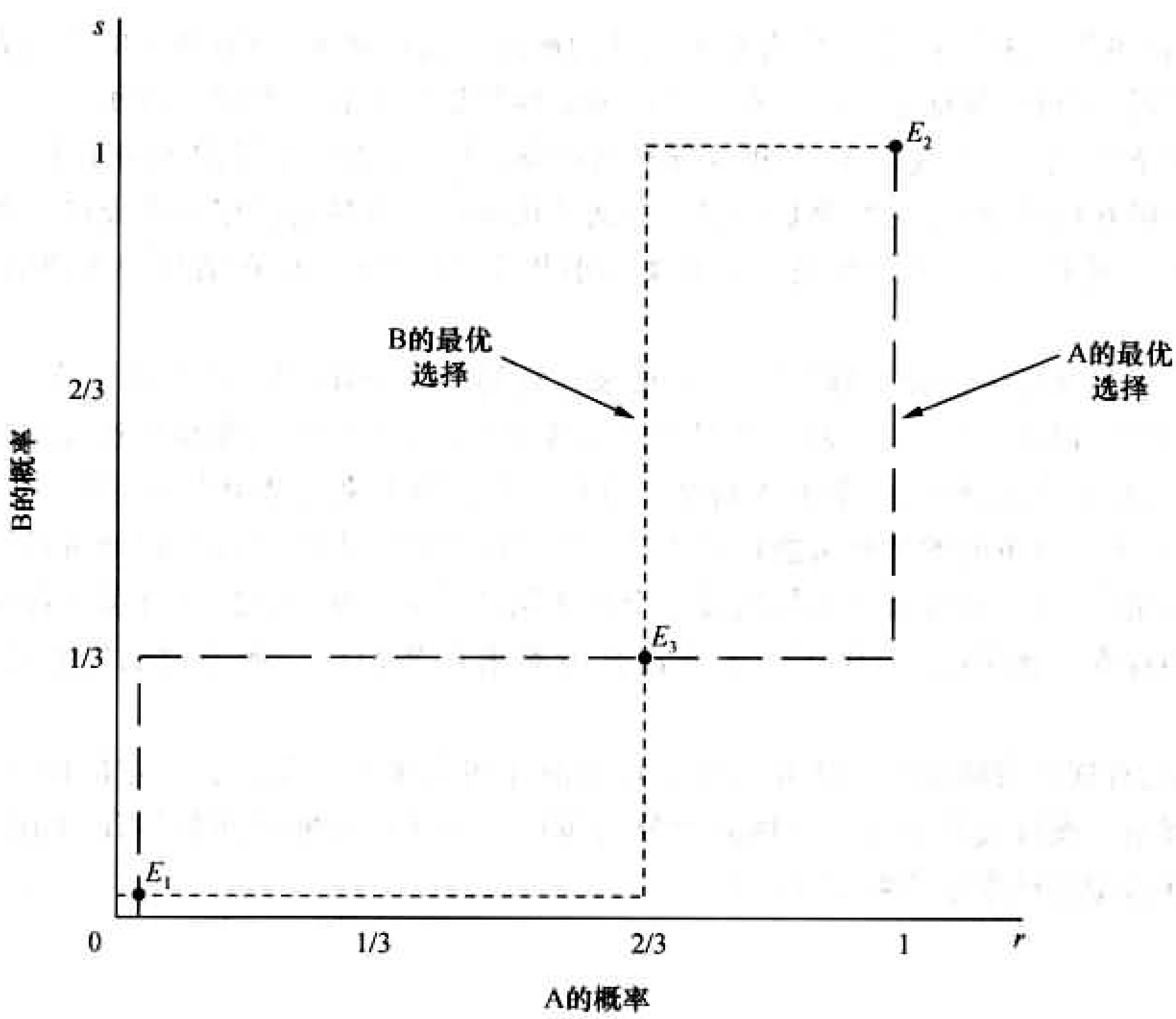


图 15.2　性别之战中混合策略的纳什均衡

在混合策略下，A 去爬山的概率为 r，B 去爬山的概率为 s。这个图给出了在给定另一个局中人的选择的前提下每个局中人的最优选择。这个博弈有三个纳什均衡（用 E_i 标出）：(1) $r=0, s=0$；(2) $r=1, s=1$；(3) $r=2/3, s=1/3$。

对于 B 来说，她的期望效用为

$$
\begin{aligned}
E(U_B) &= rs(1) + r(1-s)(0) + (1-s)(r)(0) + (1-r)(1-s)(2) \\
&= 2 - 2r - 2s + 3rs = 2 - 2r + s(3r-2).
\end{aligned}
\tag{15.4}
$$

现在，当 $r<\frac{2}{3}$，通过选择 $s=0$，B 的期望效用最大化；当 $r>\frac{2}{3}$，通过选择 $s=1$ 效用最大；当 $r=\frac{2}{3}$，B 的期望效用独立于 s 的取值。

在图 15.2 中，纳什均衡通过 A 和 B 的最优反应曲线的交点得到。也就是说，交点符合公式 15.2 所归纳的条件。注意到有三个这种交点。其中的两个我们已经见到过：$r=0, s=0$ 和 $r=1, s=1$，代表了我们在例 15.1 中所讨论的共同的休假。但是 $r=2/3, s=1/3$ 是介绍混合策略之后才有的新的纳什均衡。更加一般地，图 15.2 提供了一个线索来说明为什么一个有连续策略的博弈一定存在着纳什均衡——一般最优反应函数会在某点相交并且交点就是纳什均衡。

请回答：这个问题中所说的混合策略均衡对于局中人来说是不是特别合意的？如果这对夫妻能够合作达成一个共识，他们会不会选择这个混合策略均衡？

15.5 囚徒困境

由于在一定条件下固有的决策的不确定性，纳什均衡变得越发重要。从局中人的角度来看，没有什么可以保证这些均衡对于他们来说是合意的。也许最有名的两方博弈有着不合意纳什均衡的例子就是**囚徒困境(prisoner's dilemma)**博弈，它是 20 世纪 40 年代首先由图克(A. W. Tucker)提出的。这个题目来自下面的博弈。有两人因涉嫌犯罪而被拘捕。地区法官在这宗案件中没有掌握什么证据，但急于获得犯人的供认。她把嫌疑犯分开，并对每个人说："如果你坦白，而你的同伴不坦白的话，我能保证给你减刑，只判决 6 个月的监禁，而你的同伴将被处以 10 年监禁。如果你们两人都坦白，那么，你们每人将被处以 3 年监禁。"每个嫌疑犯也知道，如果他们都不坦白，因缺乏证据，那么他们将会以轻罪只被判 2 年的监禁。在表 15.3 中我们列出标准形式的报酬矩阵。对 A 与 B 两个嫌疑犯来说，"坦白"是对他们最有利的策略。所以这个策略是一个纳什均衡，这个地区法官的手段看来是成功的。然而，两个嫌疑犯一致坚决不坦白将会进一步缩短他们的监禁期，即从 3 年减为 2 年。这种"理性的"解是不稳定的，每个犯人都有激励告发他的同伴。这就是"困境"：受纳什准则的约束，看似最优的结果是不稳定的。例 15.3 是另一个博弈，这次是一个环境问题，其纳什均衡从局中人的角度出发来看是不合意的。

表 15.3　囚徒困境

		B	
		坦白	不坦白
A	坦白	A:3 年 B:3 年	A:6 个月 B:10 年
	不坦白	A:10 年 B:6 个月	A:2 年 B:2 年

例 15.3

公有地悲剧

当稀缺的资源被认为是“公有财产”时，“公有地悲剧”这个概念已经用来指明存在着的过度使用的环境问题。① 通过假设两个牧人（我们熟悉的 A 和 B）在决策他们在村子公有的土地上放牧多少牦牛，这个问题可以发展得到一个博弈论解释。问题在于公有地非常小并且很快地被过度使用了。

为了给这个问题增加一些数学分析，让 γ_A，γ_B 代表被带到公有地上放牧的牦牛数量，并且假设在公有地上放养的每头牦牛的价值（每单位，比如说牛奶的数量）由下式给出

$$V(\gamma_A,\gamma_B) = 200 - (\gamma_A + \gamma_B)^2 \tag{15.5}$$

注意到这个函数有两个结果：首先，多增加一头牦牛会减少 $V(V_i<0)$，并且随着额外的放牧，这个边际效用递增（$V_{ii}<0$）。

为了找到放牧策略的纳什均衡，我们解决牧人 A 的收益最大化问题

$$\underset{\gamma_A}{\text{Max}}\gamma_A V = \underset{\gamma_A}{\text{Max}}[200\gamma_A - \gamma_A(\gamma_A + \gamma_B)^2] \tag{15.6}$$

最大化的一阶条件是

$$200 - 2\gamma_A^2 - 2\gamma_A\gamma_B - \gamma_A^2 - 2\gamma_A\gamma_B - \gamma_B^2 = 200 - 3\gamma_A^2 - 4\gamma_A\gamma_B - \gamma_B^2 = 0 \tag{15.7}$$

相似地，B 的最优策略选择得到

$$200 - 3\gamma_B^2 - 4\gamma_B\gamma_A - \gamma_A^2 = 0 \tag{15.8}$$

对于一个纳什均衡，γ_A 和 γ_B 的价值应该代入等式 15.7 和 15.8 都成立。使用对称条件 $\gamma_A=\gamma_B$，可以解得

$$200 = 8\gamma_A^2 = 8\gamma_B^2 \tag{15.9}$$

或者

$$\gamma_A = \gamma_B = 5 \tag{15.10}$$

因此，每个牧人会带 5 头牦牛来到公有地，并且得到 500[$=5\times(200-10^2)$]的收益作为回报。给定这个选择，两个牧人都不会改变他们的行为。

通过 $\gamma_A=\gamma_B=4$ 可以给每个牧人带来更大的总的收入[$544=4(200-64)$]这个事实说明，纳什均衡并没有最有效地利用公共的土地。② 但是 $\gamma_A=\gamma_B=4$ 并不是一个稳定的解。如果 A 宣称 $\gamma_A=4$，牧人 B 能够解方程 15.8 为

$$3\gamma_B^2 + 16\gamma_B - 184 = 0 \tag{15.11}$$

此式的解为 5.6 头牦牛，近似为 6。A 的牦牛的价值为 400，然而 B 的为 600。正如在囚徒困境中的情况那样，$\gamma_A=\gamma_B=4$ 为每位牧人提供了一个进行欺骗的激励。

请回答：如果这个博弈重复进行（比如，每天），你认为纳什均衡能够持续吗？

---

① 这个术语主要是 G. Hardin 推广的，参见他的“The Tragedy of the Common”，*Science* 162 (1968)：1243—1248。

② 其实真正的最大值在 $\gamma=\sqrt{61}\approx8.1$ 处实现，但估计牧人没本事再拉 0.1 头牛来放牧了。

15.5.1 合作与重复

"囚徒困境"和"公有地悲剧"的寓言告诉我们局中人的合作可能会带来比纳什均衡更合意的结果。但是,我们所看过的博弈中想提出一个合作的模型是十分困难的,这是因为纳什均衡的概念告诉我们任何其他的解都是不稳定的。当然,我们可以看一些存在于某个博弈之外的制度(例如,合同法)来考察合作的结果是怎样被激励的,但是那样的问题会让我们偏离本章的主题。① 取而代之的,我们将要看一下在一些重复进行的博弈中,一些方式使得合作行为变得更加容易。因为重复将会把单期纳什均衡的无效性直接带给局中人,所以重复的博弈会鼓励合作。例如,在囚徒困境中,如果被重复地使用,特别是针对同样的嫌疑犯时,地方律师的策略的可行性就值得怀疑了。当然,哪怕是最不明智的罪犯最终也会了解。相似地,例15.3中的牧人也不会每天都在公有地上过度放牧而不去尝试一些别的方法。为了检验这些可能性,我们应该发展一些方法来描述跨期的博弈。

15.6 两时期博弈

为了说明动态(多期)的纳什均衡,我们将回到在本章开始给出的宿舍博弈的非公式的表述上。为了理解它的时间性,我们首先给出博弈的外延形式。图15.3重复了这个博弈,不过现在我们假定B知道A的选择。用图示来表述,图15.3中删除了B结点周围的卵形虚线,以指明这一附加的信息。结果,这个博弈现在转化成为一个两期的博弈。有了这个变化,B的策略选择就应该考虑到在第二期选择开始的信息。虽然B会在博弈开始时作出选择,我们应该找到一个B可能会采取的所有可能的策略集。

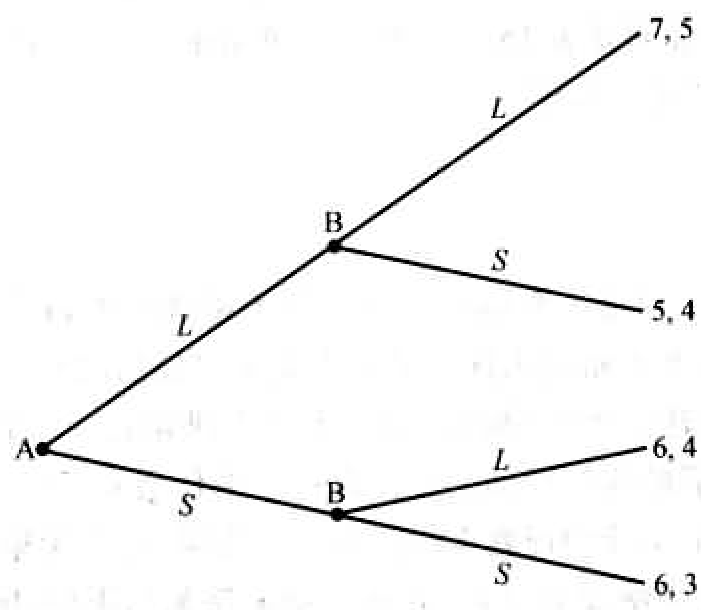


图15.3 序贯形式的宿舍博弈

在这种形式的宿舍博弈中,B知道A对于音量的选择。B在制定策略时必须要考虑到这些信息。

① 关于财产和合同法的讨论参见第20章。

表 15.4 中，我们表示出这种策略的扩展形式。有四种策略将会涵盖所有的可能性。每个策略都表示为一对行动，这代表依赖着已有信息，B 会怎样行动。策略(L,L)代表如果 A 选择 L(他的第一策略)B 会选择 L，并且当 A 选择 S(他的第二策略)B 也会选择 L。类似地，(S,L)代表着如果 A 选择 L 那么 B 选择 S，并且如果 A 选择 S，B 会选择 L。虽然这个表没有比以前的宿舍博弈的规范形式(表 15.1)多传递多少信息，对于偶然策略的考虑的确使我们了解这个两期博弈的均衡概念。

表 15.4　宿舍博弈中的所有可能的策略

		B 的策略			
		L,L	L,S	S,L	S,S
A 的策略	L	7,5	7,5	5,4	5,4
	S	6,4	6,3	6,4	6,3

令人惊奇的是，在这个博弈中有三个纳什均衡：(1) A:L,B:(L,L)；(2) A:L,B:(L,S)；(3) A:S,B:(S,L)。每对博弈都满足于当其他局中人的策略给定时每一局中人的最优化准则。然而策略(2)与(3)是不合理的，因为它们含有难以令人置信的欺骗，如果 B 处于这样的情形下，也不会执行它的。例如，考虑策略组 A:L,B:(L,S)。在这一纳什均衡下，B 承诺如果 A 选取策略 S 则 B 选取 S。从图 15.3 可以看出这种威胁是不可信的。如果 A 选取 S，则 B 如果选择 S 所得的效用为 3，但如果选择 L 所得的效用为 4。所以在(L,S)策略中的威胁根本不可信。即便 B 的策略(L,S)是一个纳什均衡，A 应该知道其中隐含的威胁是不可信的。

通过排除含有不可信的威胁的策略，A 可以得出结论，即 B 绝不会采取策略(L,S)或者(S,L)。利用这个方式，宿舍博弈减少了原来在表 15.1 中表述的报酬矩阵，正如我们以前所讨论的，在选择(L,L)的情况下(总是采取策略 L)是 B 的最有利的策略。A 能够认识到这一点，就采取策略 L。所以纳什均衡 A:L,B:(L,L)被证明是表 15.4 中的三个策略中唯一不包含不可信威胁的策略。这样的均衡我们下面将正式定义为“完美均衡”。

定义

子博弈完美均衡。这是一种每一个局中人所作的策略选择不包含不可信威胁的纳什均衡。也就是说，在这种均衡中没有一个策略要求任一局中人去采取他当时并不感兴趣的行动。

为了明白这个术语，我们注意到“子博弈”是一个更大博弈的一个部分，从一个决策的节点开始，并且包括所有从这个节点往后的所有行动。要使得一个纳什均衡子博弈完美，每个子博弈都必须是纳什均衡。不满足这个准则的纳什均衡就至少包含一个策略，这个策略包含着当到达那个点时局中人不履行自己诺言的风险(由于纳什准则)。因此**子博弈完美均衡(subgame-perfect equilibra)**的关键在于这个均衡不能包含不可信的威胁。

给定了多个局中人博弈下的均衡概念，我们现在可以继续研究在重复博弈的情况下，合作是怎样被鼓励的。

15.7 重复的博弈

许多经济现象可以被模型化为重复的博弈。消费者经常从同一个零售商那里购买商品，公司对于市场份额的争夺，或者说工人试图欺骗他们的监工，这一切都包含着重复的策略相互影响的内容。

正如在宿舍博弈中那样，重复博弈的一个重要的方面就是对于局中人来说，扩展策略集可以被使用。局中人不但可以在博弈的每个阶段选择特殊的策略，他们还可以明确了解先前的博弈的过程怎样被纳入到未来博弈的过程中。这为我们思考可信的威胁和子博弈完美打开了大门。

重复博弈中最重要的一个特征就是博弈中重复的次数。在那些固定的、有限次的重复博弈中，创新策略的发展空间很小。另一方面，那些要重复无穷次的博弈，或者类似的局中人无法确定什么时候将会结束的博弈，会有更广阔的选择。

15.7.1 有限次"囚徒困境"博弈

例如，考虑表 15.5 所示的博弈。这里 A 有两个策略（U,D），B 有（L,R）。明显地，如果这个博弈只进行一次，纳什均衡 A:U,B:L 将会是最终结果。任何的其他策略（有一个局中人有动机改变他的行为）选择都是不稳定的。但是，注意到纳什均衡下的报酬（1,1）帕累托劣于不稳定的选择点 A:D,B:R,它可以带来（2,2）的报酬。

表 15.5 重复的囚徒困境博弈

		B 的策略	
		L	R
A 的策略	U	1,1	3,0
	D	0,3	2,2

假设现在这个博弈要被重复进行有限期 T。A 宣称将会在博弈的最后一期使用 D 的任何的扩展博弈（先前博弈中表现的结果）都是不可信的。当第 T 期到来时，纳什均衡的逻辑将会发挥作用，并且 A 会最终选择 U 策略，否则他第 T 期的报酬就有成为 0 的风险。类似地，在扩展的策略集里，B 承诺他将在最后一期使用 R 策略也是不可信的。

因此，这个博弈的任何的子博弈完美均衡结果只包含着宣称在最后一期使用纳什均衡 A:U,B:L。第 T 期的逻辑也同样可以被应用到第 $T-1$ 期。任何宣称 A 或 B 在第 $T-1$ 期将不会使用纳什均衡也是不可信的。子博弈完美均衡要求策略 A:U,B:L 在第 $T-1$ 期被使用。通过"追溯推理"继续这种证明表明子博弈完美均衡要求在这个有限期的博弈内每一期都采取纳什均衡的策略。博弈时，A:D,B:R 可能带来的好处可望而不可即。

15.7.2 无限重复博弈

但是，如果博弈的局中人相信这场博弈将会无限期持续下去，上面的逻辑便不会起作用。在这种情况下，每个局中人能够宣称一个"扳机策略"承诺实行他的最优合作策略（A:D,B:R），只要其他

的局中人也如此。但是，当一个局中人背离这种形式时，博弈又回到了重复单阶段纳什均衡。

双方的触发策略能否代表一个子博弈完美均衡依赖于这个进行合作的威胁（许诺）是否可信。为了检验这个问题，我们将会从任意一个时期比如说 K，来看一下子博弈的进行情况。假设 A 宣称，他将会继续在第 K 期使用触发策略，那么 B 的最优策略是什么？如果他也选择合作策略，2 的报酬便可以一直持续下去。如果他决定"欺骗"（在第 K 期使用 R），第 K 期的报酬是 3，但在以后的期限里就会下降到 1，因为合作已经被破坏并且纳什均衡会一直作用下去。假设 B 的折扣因子（即对未来的收益折合成当期的，以收益度量的效用的折算比例）为 δ，继续合作的现值[①]为

$$2+\delta 2+\delta^2 2+\cdots=\frac{2}{1-\delta} \tag{15.12}$$

然而欺骗后所得到的报酬为

$$3+\delta 1+\delta^2 1+\cdots=3+\frac{\delta}{1-\delta} \tag{15.13}$$

如果

$$2/(1-\delta)>3+\delta/(1-\delta) \tag{15.14}$$

也就是说只要

$$\delta>1/2 \tag{15.15}$$

那么持续的合作是可信的。

换句话说，如果他不把从合作中得到的未来的收益以太低的比率折现的话，继续合作就是合意的。例 15.4 表示在某些特定的情况下，牧人也会进行合作。

例 15.4

重新考虑公有地悲剧

例 15.3 提到的在村子的公有地上过度放牧也许不会在一个无限次的博弈中出现。为简单起见，每个牧人只有两个策略可用——带 4 头或 5 头牛去放牧。这个博弈的报酬可以从等式 15.5 中算得，并且标注在表 15.6 中。这里，纳什均衡（A:5，B:5）要劣于合作的结果（A:4，B:4），但是，后面的均衡在有限次重复的博弈中不稳定。

但是，无限次重复时，两个局中人都会发现合作采取触发策略将会非常有吸引力，只要

$$544/(1-\delta)>595+500/(1-\delta) \tag{15.16}$$

即

$$\delta>551/595=0.93 \tag{15.17}$$

假设这些牧人是合理预期的（也就是说有一个足够高的 δ），在这个无限次重复的博弈中合作就是一个子博弈完美均衡。

请回答：你怎样解释合作所要求的折扣率（δ）？合作的条件容易满足吗？

① 这里折现率 δ 等价于现值公式中的 $1/(1+r)$。详见第 17 章附录。一般说来，用贴现率计算起来比用利率简便些。

表 15.6　重复牦牛放牧博弈的报酬

		B 的策略	
		4	5
A 的策略	4	544,544	476,595
	5	595,476	500,500

15.7.3　民间定理

以上的这些数值例子表明,在合作能够带来明确利益的情况下,合作可以代表子博弈完美均衡。也就是说,如果重复博弈,如同囚徒困境中所发生的潜在的损失可能不会发生。对于这个一般结果有时被称为"民间定理"。因为早在被证明之前,它们也为大多数经济学家所相信。虽然这类定理有许多种形式,也许最广为引用的是弗里德曼 1971 所发展起来的。[①] 他展示了在无限次博弈中,存在比纳什均衡下双方更加喜欢的报酬,只要局中人"足够耐心",这个博弈是有子博弈完美均衡的。那些耐心的局中人(有较高的 δ)会发现,坚持可以带来未来长期高收益的触发策略是非常有吸引力的。

15.8　静态博弈中的定价

先看最简单的双寡头模型。假设有两个厂商(A 与 B),每一厂商以不变的边际成本 c 生产同质商品。厂商需要决定自己的价格 P_A、P_B。当然 P_A、$P_B > c$。由于商品是无差别的,价格较低的厂商将占领全部市场。如果 $P_A = P_B$,则两家的销售量相等。

15.8.1　伯特兰-纳什均衡

在此情况下,唯一的纳什均衡是 $P_A = P_B = c$。也就是说,即便只有两个厂商,纳什均衡也是一个竞争解。为此,假设厂商 A 选择的价格高于 c,追求利润最大化使得厂商 B 选择稍微低于 P_A 的价格,从而垄断了整个市场。但是,如果 B 厂商的价格高于 c,这时也不是纳什均衡,因为,这将刺激 A 厂商削减价格。只有 $P_A = P_B = c$,市场中的两个厂商才能达到纳什均衡。这一定价策略以发现它的法国经济学家的名字命名,称作"伯特兰均衡"。[②]

15.8.2　生产规模受限:古诺均衡

伯特兰模型导出的简单结果的成立依赖于这一模型的基本假定。如果两个厂商的成本不同(参见练习题 15.7),或者如果两个厂商的产品不是可以完全替代的,则这一竞争结果就不成立。在其

① J. Friedman, "A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames", *Review of Economic Studies* (March 1971): 1—12.

② J. Bertrand, "Théorie Mathematique de la Richess Sociale", *Journal de Savants* (1883): 499—508.

他与伯特兰模型结果不同的双头垄断模型中，价格竞争只作为两阶段博弈中的后一阶段，而第一阶段包括厂商的各种进入这一行业或进行投资的考虑。在例 14.1 中，我们考察了古诺的天然涌泉双头垄断的例子，其中，每个涌泉的所有者选择决定供应多少泉水。在此我们可以假设双头垄断中的每个厂商必须首先决定自己的生产规模的上限，产量在此之下时边际成本是个常数，高于此水平则边际成本无穷大。显然，这样的两阶段博弈与古诺分析在形式上是相同的。古诺均衡中的数量选择代表了一个纳什均衡，因为每个厂商都能正确地了解其他厂商的产量。一旦制定出这一生产能力的决策，唯一可行的价格就是使总需求量等于两个厂商生产能力之和的价格。

我们来看一看为什么伯特兰类型的价格竞争会导致这样一个解，假设生产能力分别给定为 $\bar{q}_A$ 与 $\bar{q}_B$，而且有

$$\bar{P} = D^{-1}(\bar{q}_A + \bar{q}_B) \tag{15.18}$$

其中 D^{-1} 为商品需求函数的反函数。

$$P_A = P_B < \bar{P} \tag{15.19}$$

这时不是纳什均衡。这个价格使得总需求超过 $\bar{q}_A + \bar{q}_B$，因此，任何一个厂商都可以通过提高一点价格，销售数量仍为 $\bar{q}_A$，从而使利润增加。类似地，

$$P_A = P_B > \bar{P} \tag{15.20}$$

这时也不是纳什均衡，因为现在的总销售量小于 $\bar{q}_A + \bar{q}_B$。至少有一个厂商（如厂商 A）的出售量小于其生产能力。稍微降低一些价格，厂商 A 就能将销售量提高到 $\bar{q}_A$，从而使利润增加。当然厂商 B 也会作出反应，稍微降低一些价格，而使销售量减少。因此唯一可以保持的纳什均衡就是古诺的结果。① 即

$$P_A = P_B = \bar{P} \tag{15.21}$$

一般说来，这个价格比垄断价格低但高于边际成本（正如例 14.1 中的情况）。因此这个两阶段博弈的结果与前一章中古诺模型的结果并无明显不同。

伯特兰博弈与古诺博弈的对照是很鲜明的——前者预示在双头垄断情况下有一竞争结果，而后者预示垄断是无效率的。这说明在双头垄断市场上的实际行为会因为竞争方式的不同而产生许多不同的结果。两阶段古诺博弈的重要启示是，即便是伯特兰价格竞争，在博弈的第一阶段制定的决策对市场行为仍有重大影响。这将会在本章后面描述的一些博弈论模型中得到反映。

15.8.3 多次博弈暗中勾结

我们对于囚徒困境分析的结论是，如果此博弈重复进行几次，参与者就会想办法采取子博弈的纳什均衡策略，以求更合意的结果。对于伯特兰博弈也会有相同的疑问——当此博弈重复多次时，两方是不得不忍受伯兰特均衡的结果，还是可以通过勾结获得更多的利润？②

对任何一个有限的重复，似乎显然伯兰特模型导出的结果保持不变。只要厂商 A 在最后时期 (T) 选择 $P_A > c$，厂商 B 就会选择 $P_A > P_B > c$，从而使厂商 B 获得利润。因此在时期 T 厂商 A 宣称

① 为了保持完整性，还应该注意在 $P_A \neq P_B$ 时，没有一种情况是纳什均衡的，因为低价格厂商有提价的激励，而高价格厂商希望降价。

② 这里不考虑光明正大地合作的情况，因为我们研究的是非合作性博弈。

$P_A > c$ 的保证是不可信的。而类似的分析可追溯到 T 之前的每一个时期，所以，唯一的完全均衡是厂商在每一阶段都采用竞争价格。

但是如果认为厂商之间的博弈是无限期的，事情就会全然不同了。在目前的事例中，没有"最后"的时期，因此勾结策略可能存在，这与伯兰特模型导出的结果在逻辑上并不冲突。对厂商来说，存在着这样一种可能性，即厂商采用触发策略，每个厂商（譬如厂商 A）在每个时期都让 $P_A = P_M$（P_M 为垄断价格），厂商 B 也采用类似的价格，但是，如果厂商 B 在前一时期采取欺骗手段的话，则厂商 A 就选择 $P_A = c$。

为了确定两个厂商都采用扳机策略是否能构成完全均衡，我们必须考察这种选择是否在每个时期都构成了一个纳什均衡。假设厂商已经勾结一次而且在此时期 B 考虑进行欺骗。只要他定价 $P_B < P_A = P_M$，他就可吞下几乎全部垄断利润 π_M；而如果他选择继续与 A 合作，B 将获得这样的一个"利润流"

$$(\pi_M + \delta\pi_M + \delta^2\pi_M + \cdots + \delta^n\pi_M + \cdots)/2 \tag{15.22}$$

式中 δ 是未来利润的折现率。这个级数和是 $(\pi_M/2)[1/(1-\delta)]$，所以只要

$$\pi_M < (\pi_M/2)[1/(1-\delta)] \tag{15.23}$$

即

$$\delta > \frac{1}{2} \tag{15.24}$$

选择欺骗就是得不偿失的。就是说，只要厂商在考虑折现率上不过于急功近利，双方的"触发策略"就可以构成子博弈的完美的纳什均衡，因而勾结是稳定的。例 15.5 给出一个数字例子以说明这一点。[①]

例 15.5

暗中勾结

假设牢房窗户上用的钢条只有两个厂商在生产。生产钢条的平均成本与边际成本都是固定的 10 美元，钢条需求量为

$$Q = 5\,000 - 100P \tag{15.25}$$

在伯特兰竞争下，每个厂商均要价 10 美元，总销售量为 4 000。由于这个市场的垄断价格为 30 美元，每个厂商就会有明显的动机考虑采用勾结策略。在垄断价格下，总利润为 40 000 美元（每个厂商的利润为 20 000 美元），所以任一厂商只有在

$$40\,000 > 20\,000[1/(1-\delta)] \tag{15.26}$$

情况下考虑在下一时期降价。如果我们考虑本模型的定价时期为一年，δ 的值为 0.8[②]，每个厂商将来利润份额的现值为 100 000 美元，显然，这里没有什么激励要进行价格欺骗。相反，每个厂商都愿意开销 60 000 的成本用于维系这个协议的稳定执行（比如互相监督对方的价格，或提高自己的商誉等）。

① 很多其他情况下，只要有合适的 δ 就可以通过触发策略维持高于竞争价格水平的价格。

② 因为 $\delta = 1/(1+r)$，其中 r 是利率。$\delta = 0.8$ 即 $r = 0.25$（即每年年利率 25%）。

更多厂商的暗中勾结。触发策略的可行性主要取决于厂商的数目。如果有8个厂商生产钢条，违背勾结协议进行价格欺骗所得仍为40000美元(假定欺骗者垄断整个市场)，继续坚持协议所得的现值只有25000(=40000÷1.6)美元，所以触发策略并不总能在厂商之间形成均衡。即便只有三个或者四个厂商，它们面对的需求也不太敏感，欺骗所得也会超过维持暗中勾结的成本。因此一般说来，这个模型中的厂商越少，暗中勾结也就越容易。

请回答：在这个问题中，利率是如何决定成功地暗中勾结厂商的最大数量的？如果 $\delta=0.8$，最大的厂商数量为多少？$\delta=0.9$ 呢？请直观地解释你所得出的结果。

15.8.4 一般性与局限性

伯特兰模型的竞争结果与(具有无限时期的)暗中勾结模型的垄断结果之间的对比说明，博弈论模型中暗中勾结的可行程度对所作的特定假设非常敏感。我们在暗中勾结简单模型中所作的两个假定尤其重要：(1) 厂商B能很容易地发觉厂商A是否在欺骗；(2) 对于厂商A的欺骗，厂商B进行了严厉的报复，不仅惩罚了厂商A，并且也注定了厂商B永远是零利润。在暗中勾结的更一般的模型中，这些假定可以放松，例如，厂商B可能很难发现厂商A的欺骗行为。还有些模型考察了厂商B以其他方式惩罚厂商A的模型，譬如，厂商B可在厂商A也在出售商品的其他市场削价与之竞争。其他类型的模型有的研究了将差别产品引进暗中勾结模型的结果，有的研究了为什么对厂商产品的需求量不随竞争对手价格的变化而立刻发生变化的其他原因及其结果。可以预见，这些模型推出的结果各有不同。[①] 但不管在哪个模型中，纳什均衡与完全均衡的概念在确定暗中勾结是否具有可行性时都起着十分重要的作用。

15.9 进入、退出与策略

在前面的章节中，我们对于竞争与非竞争市场进入与退出的处理基本没有考虑其中的策略问题。我们的假设一直是：潜在的进入者只把当前市场价格与他自己的(平均或者边际)成本作简单的比较，而不考虑什么策略。同样，我们假定当厂商发觉无利可图时就毫不犹豫地立刻离开市场。但是学习到现在我们应该想到，进入与退出问题是相当复杂的。其中最基本的问题是当厂商希望进入或者离开市场时，它们一定要推测其行动对下一时期的市场价格会产生什么样的影响，而作这样的推测显然要求厂商考虑竞争对手的反应。因此，看似直截了当的比较价格与成本的决策可能还包含了许多策略手法，尤其是当厂商对其竞争对手的信息的掌握不够全面时。

15.9.1 沉没成本与承诺

许多进入过程的博弈论模型强调厂商对特定市场**承诺(commitment)**的重要性。如果生产的性

① 参见 J. Tirole, *The Theory of Industrial Organization* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1988), chap. 6。

质要求厂商为市场的运作投入特定的资本，而且这些资本不易向其他行业转移，那么进行这种投资的厂商就是对它自己参与该市场作出了“承诺”。在这样的投资上的支出被称为沉没成本（**sunk cost**），更正式的定义如下：

定义

沉没成本。沉没成本是为进入市场必须要进行的一次性投资。有了这样的投资就允许厂商在这一市场生产，但在厂商离开这一市场时，这一投资不会有任何残值可以带走。

沉没成本的投资可能会包括特定类型设备的支出（如一台制造新闻纸的机器），或对从事特定工作的职业训练（如培训应用新闻纸机的技能）的费用。沉没成本与我们所谓的“固定成本”有许多相似之处，因为两种成本都是即便没有产品产出也必须付出的。二者的不同之处是，许多固定成本是定期付出的（譬如工厂供暖的支出），但沉没成本是只与进入过程有关的一次性支出。[①] 厂商在作此项投资时，它已对这一市场作出承诺，这也许会对其策略行为产生重要的影响。

15.9.2 沉没成本、先动优势与进入遏制

虽然乍一看沉没成本的发生，对市场作出服务的承诺使厂商处于不利的地位，但是在许多模型中，情况并非如此。而且一个厂商经常可以发表声明作出承诺为某个市场服务，通过这一过程可以起到限制竞争对手在认为有利可图的行业采取某种行动的作用。因此许多博弈论模型强调了这种**先动优势（first-mover advantage）**。

先动优势的其他情形可能还包括可以采取投资于研究与开发差别产品的策略。例如，在国际贸易理论中，常常宣称保护或者补贴国内工业会让它有机会最先进入这个行业，从而获得策略上的优势。类似地，现有的牙膏或早餐麦片公司的“品牌扩张”策略会使后来者难于在此市场中以一种有明显差别的产品立住脚。但这种先动策略并不能保证一定成功。要求必须认真根据博弈情况建模，这样才能鉴别先动是否确实能提供实际的优势。

例 15.6

古诺天然涌泉例子中的先动优势

我们先回顾一下例 14.1 和例 14.2 中古诺的天然涌泉双寡头模型。考虑斯塔克尔伯格模型的分析结果：两个企业各有两种策略可选——做“领导者”（设定产量为 $q_i = 60$）或“追随者”（设定产量为 $q_i = 30$）。表 15.7 给出了此时的报酬矩阵。

---

① 数学上，沉没成本的概念由每一时期的总成本函数合成

$$C_t(q_t) = S + F_t + cq_t$$

其中 S 是沉没成本的每一时期摊提（例如，向基金支付的利息用来融资进行具体的资本投资），F_t 是每一时期的固定成本，c 是边际成本，q_t 是每一时期的产出。如果 $q_t = 0$，$C_t = S + F_t$，但是，如果生产时期足够长，部分或者全部 F_t 还是可能避免的。然而 S 的每一部分都是不可避免的。

表 15.7　斯塔克尔伯格模型的报酬矩阵

		B 的策略	
		领导者 ($q_B=60$)	追随者 ($q_B=30$)
A 的策略	领导者 ($q_A=60$)	A:0 B:0	A: \$1 800 A: \$ 900
	追随者 ($q_A=30$)	A: \$ 900 B: \$1 800	A: \$1 600 A: \$1 600

我们之前曾指出，双领导者的策略组合的后果是灾难性的；而双追随者虽然对两家都非常有利，却是不稳定的，因为每家厂商都有成为领导者的激励。注意这个博弈和囚徒困境还不一样，双领导者的选择不是纳什均衡——给定厂商 B 选择做领导者，A 的最优策略是做追随者。

正是这样的一个特殊性质决定了它有所谓的"先动优势"。如果两家厂商只能同时决策，那么不论谁当领导者、谁当追随者都构成纳什均衡；但如果厂商 B 能够先发制人（设定产量为 $q_B=60$），它就可以在两个纳什均衡中挑一个于己有利的。B 首先选择投资建设高产量的厂房设施的行为将迫使 A 做追随者。

请回答：假设同样的博弈多次重复发生（比如说，同样的两家竞争对手分别进入许多不同的行业），会有什么其他结果发生？

15.9.3　进入阻止

有时先动优势十分强大，足以阻止所有竞争对手的进入。直观上来讲，这似乎很合理，因为先动者可以选择很大的生产规模，从而使其他厂商进入市场无利可图。但是，这样的决策在经济上未必是合理的。例如，在泉水双寡头模型中，一个涌泉所有者能阻止所有其他厂商进入的唯一途径就是以边际成本与平均成本满足所有的市场需求——也就是说，一个厂商不得不以零价格提供 $q=120$，从而得到一个完全成功地阻止进入的策略。显然，这样一个策略导致厂商获得的利润为零，没有达到利润最大化。作为一个替代的方案，对此厂商来说，采用斯塔克尔伯格领导者策略，允许其他厂商作为追随者进入市场，效果则要好一些。

当生产是规模经济的时候，阻击进入而得利的可能性会高一些。如果先动厂商具有足够大的运营规模，也许就能限制潜在进入者的规模。因为，潜在进入者必须承受很高的平均成本，以至使它进入市场后并无优势可言。例 15.7 以古诺天然涌泉为例说明了这种可能性。这个例子是否具有一般有效性要取决于市场是否是可竞争的。如果在别处进行大规模经营的其他厂商可以用高于边际成本的价格实行"打了就跑"，阻止进入的战略就难以获得成功。

例 15.7

古诺天然涌泉例子的进入阻止

如果在前面例子中的天然涌泉所有者在生产过程中拥有规模经济，阻止进入就成了第一个厂商通过选择生产能力来实现的有利可图的策略。将规模经济引入古诺模型的最简单方法就是假设每个涌泉所有者必须支付固定的运作成本。如果固定成本为 784 美元(一个仔细选择的数目！)，显然，纳什均衡领导者—追随者策略会使两家厂商都获利(见表 15.7)。然而，当厂商 A 先行动扮演领导者角色时，厂商 B 的利润非常小(900 - 784 = 116)，这说明只要厂商 A 稍微再富于一点侵略性就可将厂商 B 完全逐出市场。

由于厂商 B 的反应函数(方程 21.18)不受固定成本考虑的影响，厂商 A 知道

$$q_B = \frac{120 - q_A}{2} \tag{15.27}$$

而且市场价格为

$$P = 120 - q_A - q_B \tag{15.28}$$

因此，厂商 A 知道厂商 B 的利润是

$$\pi_B = Pq_B - 784 \tag{15.29}$$

当厂商 B 是追随者(即厂商 B 第二个进入)只取决于 q_A。将方程 15.27 代入方程 15.29 有

$$\pi_B = \left(\frac{120 - q_A}{2}\right)^2 - 784 \tag{15.30}$$

结果是厂商 A 只要选择

$$q_A \geqslant 64 \tag{15.31}$$

就可使厂商 B 的利润为负。$q_A = 64$ 时，厂商 A 就成为天然涌泉的唯一供应者。既然此时市场价格是 56(= 120 - 64)美元，厂商 A 的利润是

$$\pi_A = (56 \cdot 64) - 784 = 2\,800 \tag{15.32}$$

比采取领导者—追随者策略的结果好多了。这里先动的能力加上固定成本的假定，使得阻止进入成为一个可行的策略。

请回答：为什么在此对策中时间模式对阻止进入的结果非常关键？这一结果与我们在例 14.5 中对可竞争垄断的分析结果相比较有什么不同？

15.10 进入与不完全信息

到现在为止，关于进入决策策略的讨论一直集中在沉没成本与产出承诺问题上，而对于价格我们假设在此种承诺作出之后通过拍卖或者伯特兰过程决定。对于阻止进入问题还有一个明显不同的方法，就是垄断者可能可以仅通过定价政策就达到阻止进入的目标。也就是说，是否存在这样的

情况:垄断者企图以降低(限制)价格的政策阻止别的厂商进入市场?

在大多数简单的情况下,这种限制定价策略不会产生最大利润也不会维持长久。如果一个负责的垄断者选择价格 $P_L < P_M$(P_M 为利润最大化时的价格),显然这会损害当前的利润。只有当这个限制价格 P_L 低于所有潜在进入者的平均成本时才会阻止它们在未来的进入。如果垄断者与潜在的进入者有相同的成本(并且如果生产能力的选择起不到前例中的作用),面对潜在的进入者唯一能够持续的限制价格就是 $P_L = AC$,但此时的利润为0,显然达不到垄断的目的。因此,基本的垄断模型没有通过定价实行进入阻止的余地——不论是有障碍阻止竞争者进入,从而允许垄断者把价格维持在 P_M 水平上;还是没有这样的障碍,而通常采用竞争性定价。

15.10.1 价格限制和信息不完全

因此,可信的限制定价行为的模型一定背离了传统的假设。这些模型中最重要的是那些与不完全信息有关的模型。如果一个在位的垄断者对一个特定市场的了解比潜在的进入者多,那它就可以利用信息优势来阻止竞争者进入。例如,我们来看看图15.4中的博弈树。这里,厂商A是在位的垄断者,作为过去决策的结果,它的生产成本可能是“高的”也可能是“低的”。现在厂商A当然没法选择其成本,但由于厂商B不知道这些成本,我们必须考虑两种可能性。很明显,厂商B进入市场后是否能获得利润要取决于厂商A的成本——如果厂商A的成本很高,厂商B的进入是有利可图的($\pi_B = 3$);但如果厂商A的成本很低,厂商B的进入则会亏损($\pi_B = -1$)。厂商B该怎么做呢?一种可能就是厂商B根据自己所获得的信息对厂商A的真实成本结构作一个主观的概率估计。也就是说,厂商B必须对“低成本”与“高成本”的性质状况给出一个概率估计。如果厂商B假定厂商A有高成本的概率为 ρ,有低成本的概率为 $1-\rho$,厂商B进入该行业将产生正的期望利润(参见第9章)的条件为

$$E(\pi_B) = \rho(3) + (1-\rho)(-1) > 0, \tag{15.33}$$

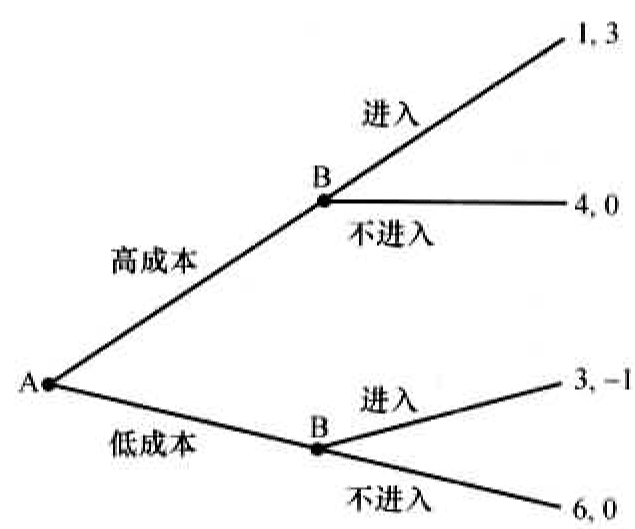


图 15.4　一个进入博弈

厂商A具有或高或低的成本结构,但厂商B观测不到。如果厂商B设定主观概率 ρ 为厂商A有高成本的概率,假设 $\rho > \frac{1}{4}$ 时它将进入。厂商A会设法影响厂商B的概率估计。

在

$$\rho > \frac{1}{4} \tag{15.34}$$

下成立。

此博弈尤其吸引人之处在于厂商 A 是否能影响厂商 B 的概率估计。显然,不管厂商 A 的真实成本是多少,厂商 B 采取不进入策略对厂商 A 来说是很好的,而要做到这一点的唯一办法就是厂商 A 使厂商 B 相信 $\rho < 1/4$。作为一种极端的情况,如果厂商 A 能使厂商 B 确信厂商 A 为一个低成本生产者($\rho = 0$),即便在真实情况并非如此的情况下,厂商 B 显然也会被吓得不敢进入。例如,厂商 A 作为市场的垄断者,采取低价政策,这向厂商 B 表明(参见第 10 章)厂商 A 的成本低,从而阻止了厂商 B 的进入。在厂商 A 的成本确实很高的情况下,即便厂商 A 损失一些利润,它也愿意这样去吓唬 B 一下。这为较低的限制定价作为阻止进入的策略提供了可能的理论基础。

不幸的是,正如我们在第 10 章所说的那样,在不对称信息状况下对用信号表示均衡的可能性进行考察是很复杂的。由于厂商 B 知道厂商 A 可能会发出错误的信号,而且厂商 A 也知道厂商 B 对它的信号会很警惕,这个博弈可能会有多个解。限制定价作为一种达到阻止进入的策略,它的可行性主要取决于我们假设的信息类型。[①]

15.10.2 掠夺性定价

用来研究限制定价的工具也可用来考察"掠夺性"定价的可能性。自从 19 世纪末,标准石油公司(Standard Oil)垄断了石油市场,约翰 · D. 洛克菲勒(John D. Rockefeller)以毁灭性的低(掠夺性)价格将竞争对手逐出市场已成为美国商业神话中的一个。虽然在这个标准石油公司的故事背后的经济逻辑与经验事实的作用通常被打折扣[②],通过掠夺鼓励退出的可能性继续在为理论建模提供着有趣的机会。

许多掠夺性行为模型的结构与限制性定价模型相似,即这些模型强调信息的不对称。一个在位的厂商希望鼓励其对手退出市场,所以它要采取行动来影响竞争对手对于进入市场获利前景的看法。例如,该厂商也许会采取低价政策,试图告诉对手它的低成本信息——即便实际并非如此。或者该厂商采用扩张性广告或产品差别行动,从而使对手相信它是在规模经济下从事经营。一旦对手确信负责的厂商具有这些优势,它就可能会重新估算生产决策的预期盈利,并决定退出这一市场。当然,就像在限制定价模型中那样,掠夺性策略有成功的可能性。这主要取决于市场中不对称信息的性质。

15.11 信息不完全下的博弈

通过前面的学习,我们也看到了在不完全信息下的博弈理论的重要意义。这里我们对其作简单

① 考察一些这样的专题,参见 P. Milgrom and J. Roberts, "Limit Pricing and Entry Under Conditions of Incomplete Information: An Equilibrium Analysis", *Econometrica* (March 1982): 443—460。

② J. S. 麦可吉(J. S. McGee)与其他人指出,掠夺性定价比洛克菲勒以市场价格简单购买竞争对手的策略的利润要少得多。参见 J. S. McGee, "Predatory Pricing: The Standard Oil (NJ) Case", *Journal of Law and Economics* (1958): 137—169; and "Predatory Pricing Revisited", *Journal of Law and Economics* (October 1980): 289—330。最近的文献考察了掠夺性定价是否影响竞争对手的市场价值。

介绍。

15.11.1 局中人的类型和想法

首先，我们要引入几个新的术语。当信息不完全的博弈涉及每个局中人之间的信息不对称时，我们把各个局中人描述为不同**类型(type)**的①，每个局中人都属于某一个类型(在我们的两人模型中两个类型记作 t_A 和 t_B)。不同类型之间的差别可以是多方面的，但我们的例子中只讨论一种差别，就是他们的报酬(利润)函数不同。一般我们假定每个人都了解自己的报酬函数，但不能确切地知晓别人的。所以，为了判断对手的决策以决定自己的策略，每个局中人都要去推测别人的报酬函数是怎样的。

每个局中人的推测方式可以用**想法函数(belief functions)**$f_A(t_B)$表示。所谓的想法指的是，比如说 A，对于 B 属于何种类型的概率估计。在图 15.4 那样的博弈树中，这个"想法"就表示每个局中人对对手处于决策树哪个分支上的概率的判断。在不完全信息下的博弈有时被称为**贝叶斯博弈(Bayesian game)**，因为引入这种主观的概率推测的想法函数的概念首先是由 18 世纪的统计学家托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes)引入的。

有了这样的新工具，我们可以用下式(参见式 15.1)表达这样一个博弈

$$G[S_A,S_B,t_A,t_B,f_A,f_B,U_A(a,b,t_A,t_B),U_B(a,b,t_A,t_B)] \tag{15.35}$$

其中，A 和 B 的报酬不只取决于他们采用的策略($a\subset S_A,b\subset S_B$)，还要取决于他们各自的类型。现在，我们对这个更复杂的博弈结构引入纳什均衡。

15.11.2 贝叶斯-纳什均衡

对于静态的(单期的)博弈，将纳什均衡推广于不完全信息的情形还是相对容易的。由于每个人的报酬都和未知的对手的类型相关，所以我们要引入期望效用的概念，即效用的数学期望值。一个策略组合(a^*,b^*)如果能满足给定 b^* 为 B 的策略，a^* 可以最大化 A 的期望效用；给定 a^* 为 A 的策略，b^* 也可以最大化 B 的期望效用，则称它为贝叶斯-纳什均衡。写成数学表达式，就是把 15.2 式改写为

$$\begin{aligned}E[U_A(a^*,b^*,t_A,t_B)] &= \sum_{t_B} f_A(t_B)U(a^*,b^*,t_A,t_B)\\&\geqslant E[U_A(a^*,b^*,t_A,t_B)]\ \forall a'\subset S_A\\E[U_B(a^*,b^*,t_A,t_B)] &= \sum_{t_A} f_B(t_A)U(a^*,b^*,t_A,t_B)\\&\geqslant E[U_A(a^*,b',t_A,t_B)]\ \forall b'\subset S_B\end{aligned} \tag{15.36}$$

注意此处每个局中人的报酬和双方各自的类型都相关，但 A 的预期只和他对 B 的推测有关(因为他知道自己是什么类型的)。类似地，B 也只了解自己的类型，对 A 的类型也只能靠主观猜测。式 15.36 看起来吓人，但实际上含义非常简单，其中只有局中人的"类型"这一个概念。下面我们通过例 15.8 来更细致地分析它。

---

① 当局中人对对手的历史背景不了解，即不清楚对方之前做了些什么时，也应该算入信息不完全下的博弈。这一类博弈在传统博弈理论的基础上发现了更多的博弈的性质，比如有限次囚徒困境博弈的可能的均衡解等。

例 15.8

贝叶斯-古诺均衡

假设有两家寡头企业争夺一个市场，该市场的需求函数为

$$P = 100 - q_A - q_B \tag{15.37}$$

假设边际成本 $MC_A = MC_B = 10$，容易算出纳什均衡（古诺解）为 $q_A = q_B = 30$，两家的报酬是 $\pi_A = \pi_B = 900$。

信息不完全。现在给这个博弈加上贝叶斯博弈的背景：假设 $MC_A = 10$，但 A 厂商对 MC_B 没法确定，既有可能是"高的"（$MC_B = 16$），也可能是"低的"（$MC_B = 4$）。假设 A 的判断是 B 属于两种"类型"的概率都是 50%，因而对 B 的边际成本的预期仍然是 10。

然后我们从 B 这边开始分析。假设 B 清楚 A 的情况，那就不用考虑预期问题了，只要直接调整 q_B 以最大化利润

$$\pi_B = (P - MC_B)(q_B) = (100 - MC_B - q_A - q_B)(q_B) \tag{15.38}$$

最大化的一阶条件是

$$q_B^* = (100 - MC_B - q_A)/2 \tag{15.39}$$

这个最优产量是和 B 的边际成本挂钩的，而边际成本只有 B 自己了解。如果它的边际成本是"高的"

$$q_{BH}^* = (84 - q_A)/2 \tag{15.40}$$

如果边际成本是"低的"

$$q_{BL}^* = (96 - q_A)/2 \tag{15.41}$$

厂商 A 则必须考虑 B 有两种可能性，于是它的预期利润是

$$\begin{aligned}\pi_A &= 0.5(100 - MC_A - q_A - q_{BH})(q_A) + 0.5(100 - MC_A - q_A - q_{BL})(q_A)\\ &= (90 - q_A - 0.5q_{BH} - 0.5q_{BL})q_A\end{aligned} \tag{15.42}$$

最大化的一阶条件是

$$q_A^* = (90 - 0.5q_{BH} - 0.5q_{BL})/2 \tag{15.43}$$

联立式 15.40、15.41 和 15.43 求解 $q_{BH}^*, q_{BL}^*, q_A^*$，即得到贝叶斯-纳什均衡

$$\begin{aligned}q_A^* &= 30\\ q_{BH}^* &= 27\\ q_{BL}^* &= 33\end{aligned} \tag{15.44}$$

这个解的含义是可能出现的均衡情况。一旦博弈真正进行，只有唯一的均衡状态存在，这取决于 B 的成本究竟是高的还是低的。但是通过贝叶斯-纳什均衡的概念，我们可以看清当厂商 A 面临信息不完全引起的不确定性时是如何决策的。

请回答：在本例中，贝叶斯-纳什均衡中解出的 q_A^* 恰好等于古诺均衡中的 q_A^*，而 A 对 B 边际成本的预期值也恰好等于古诺均衡中的边际成本——10。这两件事有必然的因果关系吗？即在一般情况下，是否可以用对不确定参数的预期值计算贝叶斯-纳什均衡？

15.11.3 均衡的存在性

贝叶斯-纳什均衡的存在性的证明和我们之前讨论的纳什均衡的存在性紧密相关。证明的大致过程是，将每个局中人的每个可能的类型视作一个独立的局中人，在这个增广局中人集合中的纳什均衡是存在的(条件是每个人的可选策略集是连续的，如果每个人的可选策略集是有限离散的，则存在混合策略均衡)。组成这样纳什均衡的策略必定包含贝叶斯-纳什均衡的策略，给定个人的想法函数就能算出。

15.11.4 经济机制的设计和拍卖

贝叶斯-纳什均衡的一个重要应用是研究各种经济机制的运作，其中最重要的应用应该是拍卖了。通过分析各种不同规则下的均衡解的性质，博弈论学者就可以设计出合意的拍卖机制，这样的机制应该保证：商品能够以尽可能高的价钱卖出去，并且能落在对它评价最高的买主手里。具体各种拍卖机制，如多轮竞价机制、保留价机制，或者次高价格机制(每个竞价者写出自己的出价，拍卖品卖给出价最高者，而按次高的出价成交)，它们的性质都是很复杂的。博弈论工具可以用来分析每种机制的实际运行过程，并判断在此种机制下投标者是否有激励报出自己的真实评价。尽管对拍卖理论的分析超出了本教材的范围[①]，我们还是举了一个例子(例 15.9)来说明这种模型的一些特点，并留了一道练习题 15.12，那道题是关于次高价格拍卖的。

例 15.9

油田拍卖

假设两家企业竞标购买一块可能蕴藏有石油的油田。每家企业事先都作过勘探，它们对这块地的评价分别是 V_A 和 V_B。这块地的所有者当然希望卖一个尽可能高的价钱，在这里最多应该能卖 V_A 和 V_B 中较大的那个。简单的暗标拍卖(双方将写好的投标价格密封递交卖方，择一高价者成交，万一报价相等则用掷硬币或类似的办法决定)能实现这个目标吗?

我们通过构建一个贝叶斯博弈模型来回答。首先，我们需要知道两家企业对对方的评价。为了简化问题，我们假设两家的评价都满足 $0 \leqslant V_i \leqslant 1$，且每家企业对对方的评价完全没有想法，所以它们的猜测是“任何价格都有可能，且可能性相等”。用统计学的语言来说，就是 A 认为 V_B 在区间[0,1]上呈均匀分布，而 B 亦这样认为。现在，每个企业要决定自己的投标价(b_A 和 b_B)。A 从拍卖中得到的收益是[②]

$$\begin{array}{ll} V_A - b_A, & \text{当 } b_A > b_B \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } b_B > b_A \text{ 时} \end{array} \tag{15.45}$$

现在我们用数学的语言表示每个企业的投标策略：假设每家企业的投标价与它的评价成一定比例 k_i

① 要了解拍卖学文献，可参见 V. Krishna, *Auction Theory* (San Diego, Academic Press, 2002)。

② 为简化分析，我们假设 $b_A = b_B$ 的概率是零。

$(k_i \leqslant 1)$，即

$$b_i = k_i V_i \quad i = \mathrm{A,B} \tag{15.46}$$

这样，A 的预期收益是

$$\pi_{\mathrm{A}} = (V_{\mathrm{A}} - b_{\mathrm{A}}) \cdot \mathrm{Prob}(b_{\mathrm{A}} > b_{\mathrm{B}}) \tag{15.47}$$

而

$$\mathrm{Prob}(b_{\mathrm{A}} > b_{\mathrm{B}}) = \mathrm{Prob}(b_{\mathrm{A}} > k_{\mathrm{B}} V_{\mathrm{B}}) = \mathrm{Prob}(b_{\mathrm{A}}/k_{\mathrm{B}} > V_{\mathrm{B}}) = b_{\mathrm{A}}/k_{\mathrm{B}} \tag{15.48}$$

最后一个等号成立的原因是，A 对 V_{B} 的猜测是均匀分布的。因此，

$$\pi_{\mathrm{A}} = (V_{\mathrm{A}} - b_{\mathrm{A}}) \cdot b_{\mathrm{A}}/k_{\mathrm{B}} \tag{15.49}$$

它取最大值的条件是

$$b_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A}}/2 \tag{15.50}$$

完全对等的逻辑用于厂商 B，得到

$$b_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{B}}/2 \tag{15.51}$$

所以结果就是评价较高的厂商将买到油田，而成交价仅仅为评价的一半。注意，在我们的分析中并没有涉及两个企业的具体评价。

增加竞标者的效果。竞标者增加会改善卖方的收益。对于 A 企业，如果有 $n-1$ 个竞价者与之竞争，那么它的预期收益是

$$\pi_{\mathrm{A}} = (V_{\mathrm{A}} - b_{\mathrm{A}}) \cdot \mathrm{Prob}(b_{\mathrm{A}} > b_i, i = 1 \cdots n-1) \tag{15.52}$$

且对于任意的 i，都有

$$\pi_{\mathrm{A}} = 0, \quad b_i > b_{\mathrm{A}}, \quad i \text{ 为任意整数} \tag{15.53}$$

如果企业 A 继续猜测其余企业的评价是随机均匀分布在[0,1]上的，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Prob}(b_{\mathrm{A}} > b_i, i = 1 \cdots n) \\ &= \mathrm{Prob}(b_{\mathrm{A}} > k_i V_i \quad i = 1 \cdots n) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (b_{\mathrm{A}}/k_i) = b_{\mathrm{A}}^{n-1}/k^{n-1} \end{aligned} \tag{15.54}$$

根据假设的对称性，对于所有的 i 我们令 $k_i = k$ 即

$$\pi_{\mathrm{A}} = (V_{\mathrm{A}} - b_{\mathrm{A}})(b_{\mathrm{A}}^{n-1}/k^{n-1}) \tag{15.55}$$

最大值的一阶条件

$$b_{\mathrm{A}} = \left(\frac{n-1}{n}\right) V_{\mathrm{A}} \tag{15.56}$$

可见随着竞标者的增加，每个企业说出自己的真实评价的激励越来越大。用拍卖学术语说，就是暗标拍卖机制在充分多的投标者下是“激励相容”的。但是，这个机制永远不会让投标者写出真正的评价，因为 $b_{\mathrm{A}} < V_{\mathrm{A}}$。练习题 15.12 和扩展部分讲到了某些让投标者完全说真话的机制。

请回答：卖者可以设定一个底价，当最高报价低于此价格时不成交。请问，卖家通过这种方法能提高可能出现的最低价格吗？

15.11.5 不完全信息下的动态博弈

多期的和重复的博弈也有可能是信息不完全的。就像我们曾经非正式地讨论过的图 15.4 中那

个进入博弈那样，这类问题的有趣之处在于，局中人可以通过选择不同的策略影响对手的猜测。这样，每个人都必须及时根据上一轮的博弈得到的情报“更新”自己的“想法函数”。而且，每个人都会意识到对方也在更新他们的想法，这也要考虑在决策内。用倒推归纳法，有时可以通过我们介绍的完全信息下的子博弈完美均衡来逆推这种博弈的均衡策略。对这类问题结论的研究也正是当前博弈理论研究的一个重要领域。①

小　结

在本章我们简要地考察了经济博弈论，并且特别利用这个理论解释了双头垄断市场的策略行为。所得出的主要结论包括：

- 所有的博弈都可以由这样的一个结构来描述：它包括博弈的局中人、策略和报酬。当每个人的策略都满足给定其余人的策略，自己的策略达到最优时，就构成纳什均衡。纳什均衡概念的直观性为许多博弈问题的求解提供了很大帮助，但并不是每个博弈都有唯一的纳什均衡。
- 由两个局中人构成的非合作博弈，如果每个人的可用策略集是连续的，则博弈有一个以上的纳什均衡解。对于可用策略是有限离散的集合时，也有混合策略的纳什均衡。
- 在多次重复的博弈中，只包含可信的威胁的纳什均衡称作子博弈完美均衡。
- 在无限期的博弈中，有时帕累托意义下优于纳什均衡的结果可能通过双方采取“触发策略”的合作达到。
- 在简单的一次博弈中，纳什-伯兰特均衡意味着结果是竞争性定价，即价格等于边际成本。而当博弈是分为两阶段的，第一阶段企业各自确定产量，第二阶段由市场确定价格时，就会达到古诺均衡的结果（$p > mc$）。
- 在无限期的博弈中，双方互相勾结有可能达成子博弈完美均衡。但随着参与厂商数目增多，这样的勾结变得越发难以维系，因为削价以独吞全部市场份额的激励变得越来越强了。
- 在有些博弈中包含有先动优势，比如当生产是规模报酬递增时就有这样的情况。这时抢占先动优势的企业可能阻遏全部其他厂商的进入。
- 当局中人不知道对手的报酬函数而只能凭主观推测时，就会发生信息不完全下的博弈，我们称之为贝叶斯博弈。这种博弈下的均衡实际上就是纳什均衡和子博弈完美均衡在信息不完全的情况下的推广。

① 这部分内容可以参见 D. Fudenberg and J. Tirole, *Game Theory* (Cambridge, MA: MIT Press, 1991), Chaps. 8—10。

练 习 题

15.1 基于 Rousseau 的观察，Fudenberg 和 Tirole(1992) 构造了一个“猎鹿博弈”。两个局中人在博弈中可以选择合作去抓一只鹿，或者各自行动去打兔子。这个博弈的报酬矩阵是

		局中人 B	
		抓鹿	打兔
局中人 A	抓鹿	2,2	0,1
	打兔	1,0	1,1

a. 写出这个博弈下的纳什均衡。

b. 假设 B 认为 A 会采用混合策略，以一定概率选择打什么猎物。根据 A 的选择打鹿的各种可能的不同概率，B 的最优策略是什么？

c. 假设将博弈推广至 n 个人的情况(Rousseau 构想的博弈)，而且必须 n 个人都选择出力去打鹿才能成功。假设打猎的结果对于每一个人的报酬不变，而 B 认为其余 $n-1$ 个人将选择混合策略，那么 B 的最优策略和其余人选择的概率关系是怎样的？请解释为什么在大规模的博弈中，合作变得困难了。

15.2 A 和 B 两人在马路边上捡到 100 块钱，正在为如何分钱而争论。一个过路人建议他们做这样一个游戏：每个人说出自己想分多少(d_A, d_B)，要是 $d_A + d_B \leqslant 100$，就各如你们所愿，而剩下的钱归我；要是 $d_A + d_B > 100$，100 块我就都拿了。这个博弈中的策略选择是连续集，那么是否有唯一的纳什均衡呢？

15.3 回想一下例 15.1 中的那个“性别之战”的博弈，其混合策略均衡结果取决于设定的报酬数值。为了一般化这个结论，我们考虑这样的报酬矩阵

		B 的策略	
		爬山	看海
A 的策略	爬山	K,1	0,0
	看海	0,0	1,K

其中 $K \geqslant 1$。请说明混合策略的纳什均衡结果和 K 之间的函数关系。

15.4 在《一篇关于家庭的论文》(*A Treatise on the Family*) (Cambridge: Harvard University Press, 1981) 中，G. Becker 提出了著名的“堕落的孩子”理论。这是一个关于(可能堕落的)孩子 A 和他的家长 B 的博弈。规则是，第一阶段，孩子先选择他的行为 r，这个行为既决定了他自己的收入 $Y_A(r)$，($Y_A' > 0$)，也决定了他家长的收入 $Y_B(r)$，($Y_B' < 0$)。第二阶段，家长决定留下多少遗产 L 给孩子。孩子只关心他自己的效用 $U_A(Y_A + L)$，但家长要最大化 $U_B(Y_B - L) + \lambda U_A$，其中 $\lambda > 0$ 表示了家长对孩子的关爱之情。下面请你证明，孩子一定会根据最大化 $Y_A + Y_B$ 的原则来决策 r，尽管他并没有在意父母效用的想法。(提示：你应该先求出父母遗产的最优数值，再据此推断孩子的最优策略。)

15.5 两个十多岁的男孩在一个巷子里玩“小鸡”游戏。在该游戏中，两个人迎面向对方驶去，首先转向规避的称为小鸡，而没有转向的则获得同伴的尊敬。当然，如果没有人转向，则两个人都会“挂”在最后的

撞车中。小鸡游戏的报酬由下表给出。

		B 的策略	
		小鸡	非鸡
A 的策略	小鸡	2,2	1,3
	非鸡	3,1	0,0

a. 这个博弈有纳什均衡吗?

b. 每一人都"非鸡"的威胁可信吗?

c. 一个局中人坚持宣称采用"非鸡"策略(例如,拆掉方向盘!)对他有好处吗?

d. 如果你看过电影《美丽心灵》,你如何用小鸡博弈模型解释酒吧那一幕?你能说出纳什对它洞察到了什么吗?(在酒吧里的一场舞会里,纳什和其他男生发现对面有一个最漂亮的女孩。其余男生鼓动纳什过去邀请她,纳什突然悟到此时有可能发生的情况是,所有男生都认为她一定会有人邀请而不考虑邀请她,最后的结果可能是最漂亮的女孩反而落得无人搭理的尴尬场面。于是走过去握住女孩的手,说了句"Thank You",就跑回学校做研究去了。——译者注)

15.6 有一张稀有的垒球会员卡以暗标拍卖,A、B 两人参与竞价。A 对它的评价是 600 美元,B 的评价是 500 美元,他们都清楚彼此的评价。两人出价较高的将获得这张卡,而如果两人出价相等,卖方将掷硬币来决定卖给谁。现在两人要决策出价多少。

a. 你认为这个博弈属于哪种类型的?这里是否存在占优策略?

b. 该博弈是否有纳什均衡?它是唯一的吗?

c. 如果双方都不知道对方的评价,结果有何变化?

15.7 假设厂商 A 与厂商 B 的平均与边际成本都是常数,$MC_A = 10$,$MC_B = 8$,对厂商产出的需求函数是

$$Q_D = 500 - 20P$$

a. 如果厂商进行伯特兰竞争,在纳什均衡下的市场价格是多少?

b. 每个厂商的利润分别为多少?

c. 这个均衡是帕累托最优的吗?

15.8 两个厂商(A 与 B)考虑健康雪茄的竞争品牌。厂商报酬如表所示(A 的利润首先给定):

		厂商 B	
		生产	不生产
厂商 A	生产	3,3	5,4
	不生产	4,5	2,2

a. 这个博弈有纳什均衡吗?

b. 这个博弈对于厂商 A 或者厂商 B 有先动优势吗?

c. 厂商 B 通过给 A 足够的贿赂而"说服"他不要进入市场的行为是否有利可图?

15.9 世界上氪的全部供给由 20 个人控制,每一个人拥有这种神秘的矿物 10 000 克。世界对氪的需求是

$$Q = 10\,000 - 1\,000P$$

其中 P 是每克的价格。

a. 如果所有拥有者合谋控制氪的价格,他们设置的价格是多少?他们能够卖出的量是多少?

b. 为什么 a 中计算的价格是不稳定的?

c. 氪是否存在一个稳定的均衡价格?所谓的稳定是指,在所有人接受这个价格的条件下,任何一人的任何改变价格的行为都无利可图。

15.10 假设例 15.5 中的那种牢房专用钢条的需求随经济周期而波动。当经济处于扩张期时,它的需求是

$$Q = 7\,000 - 100P$$

而当处于经济萧条期时，需求降为

$$Q = 3\,000 - 100P$$

假设经济处于扩张期和萧条期的几率相等，且厂商定价时了解当时经济的情况。

a. 要使"触发策略"能够在两种经济条件下都能使两家企业维持合适的垄断价，贴现率 δ 最低可以是多少？

b. 如果贴现率 δ 跌到比 a 中算出来的值还低一点，触发策略有无可能作某些调整，使得有利可图的勾结仍能维持？

15.11 假设在例 15.8 中描述的贝叶斯-古诺均衡模型中，两家厂商的边际成本完全相同(10)，但对市场需求的信息是不对称的。具体说来，假设 A 了解需求函数 ($P = 100 - q_A - q_B$)，但 B 对需求函数的推测有两种可能性

$$P = 120 - q_A - q_B$$

或

$$P = 80 - q_A - q_B$$

且各自的概率都是 50%。假设两家企业必须同时宣布价格，此时的贝叶斯-纳什均衡是什么？

15.12 在例 15.9 中我们证明了最高价暗标拍卖的纳什均衡是每个竞标者出价 $b(v) = [(n-1)/n]v$，卖方的期望收益是 $[(n-1)/n]v^*$，v^* 是 n 个竞标者中最高的评价。

a. 证明：如果所有的评价都是随机均匀地分布在区间 $[0,1]$ 上的，那么 v^* 的数学期望是 $n/(n+1)$，因而卖方的期望收益是 $(n-1)/(n+1)$。(提示：最高评价的数学期望是

$$E(v^*) = \int_0^1 vf(v)\,dv,$$

其中 $f(v)$ 是 v 恰好是所有 n 个评价中最大的一个的概率密度函数。这里 $f(v) = nv^{n-1}$。)

b. 1961 年的一篇著名文章("Counterspeculation, Auction, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, March 1961, pp. 8—37)中，William Vickery 研究了次高价暗标拍卖机制。在这种拍卖中，出价最高者得到拍卖品，而以第二高的价格成交。证明在这种机制下每个人的最优策略都是以自己真实的评价投标，即 $b(v) = v$。

c. 证明在次高价暗标拍卖中，卖方的期望收益和 a 中的结果完全相同。[此即所谓 Vickrey 的"收益等价原理"(revenue equivalence theorem)]

(提示：v 是所有评价中次高的概率是 $g(v) = (n-1)(1-v)nv^{n-2}$。原因是：抽出一个评价($n$ 种抽法)使其高于另外 $n-2$ 个 v 的概率是 $[nv^{n-2}]$，而再从剩下 $n-1$ 个 v 中抽出一个 v 高于此的概率是 $[(n-1)(1-v)]$，将两者相乘即得。[即 $g(v) = A_n^2 v^{n-2}(1-v)$ A_n^m 是排列数。])

推荐阅读文献

Fudenberg, D., and J. Tirole. *Game Theory*. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.

后面几章内容全面地讲解了信息不完全下的动态博弈。

Gibbons, R. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1992.

该书列举了一系列的博弈理论模型,包括讨价还价、银行运作、拍卖和货币政策。第4章"信号博弈"写得尤其好。

Krishna, V. *Auction Theory*. San Diego: Academic Press, 2002.

一本最新的拍卖理论教程,内容全面。其中涉及的数学很难。

Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.

这本经典教材的第II部分从头到尾都在运用博弈理论。最后一章提供的"使用者手册"也很方便读者使用。

扩　展

策略替代与互补

将不完全竞争市场中厂商选择之间关系概念化的一个方法是引入策略替代与互补的思想。这类似于消费者理论与生产者理论的有关定义,如果一厂商的活动(譬如产出、价格,或产品差别方面的支出)水平上升时,其对手在此活动中有一相同水平的下降,博弈论学家就定义厂商的这一活动为**策略替代(strategic substitutes)**活动。另一方面,如果一个厂商活动水平上升,而同时其对手的此活动也有相同程度的上升,就定义这一活动为**策略互补(strategic complements)**活动。

为了确切地说明这些思想,假设厂商A的利润(π^A)取决于他所从事活动的水平(S_A)以及他的对手从事的类似活动的水平。因此厂商的目标就是使利润$\pi^A(S_A,S_B)$最大化。

E15.1　最优化条件与反应函数

厂商A选择自己策略活动的一阶条件为

$$\pi_1^A(S_A,S_B)=0 \tag{i}$$

其中π的下标表示相对于其各自变量的偏导数。为达到最大值我们还要求

$$\pi_{11}^A(S_A,S_B)\leqslant 0 \tag{ii}$$

显然由方程i确定S_A的最优选择,因S_B值的不同而不同。我们可将此关系记为A的反应函数(R_A)

$$S_A=R_A(S_B) \tag{iii}$$

S_A与S_B之间的策略关系由反应函数导出。如果$R_A'>0$,S_A与S_B为策略互补。如果$R_A'<0$,S_A与S_B为策略替代。

E15.2　由利润函数的推断

通常直接利用利润函数考察策略之间的关系更为方便。将方程iii代入一阶条件(i)中,有

$$\pi_1^A=\pi_1^A[R_A(S_B),S_B]=0 \tag{iv}$$

相对于S_B的偏微分为

$$\pi_{11}^A R_A'+\pi_{12}^A=0 \tag{v}$$

因此

$$R_A' = \frac{-\pi_{12}^A}{\pi_{11}^A}$$

所以,由二阶条件(ii)可得,$\pi_{12}^A > 0$,意味着 $R_A' > 0$;$\pi_{12}^A < 0$,意味着 $R_A' < 0$。因此策略关系可直接由利润函数的导数推出。

E15.3 古诺模型

在古诺模型(方程21.10)中利润由两个厂商产量的函数给出

$$\pi^A = \pi^A(q_A, q_B) = q_A P(q_A + q_B) - C(q_A) \tag{vi}$$

此时有

$$\pi_1^A = q_A P' + P - C' = 0 \tag{vii}$$

与

$$\pi_{12}^A = q_A P'' + P' \tag{viii}$$

由于 $P' < 0$,π_{12}^A 的符号取决于需求曲线的凹性(P'')。对于线性需求曲线,$P'' = 0$,因此,π_{12}^A 显然为负。产量在需求函数是线性的古诺模型中为策略替代。除非需求曲线为凸的($P'' > 0$),这结果一般是正确的。更详细的讨论可以参阅 Bulow, Geanakoplous, and Klemperer (1985)。

自愿出口限制

一些经济学家用古诺均衡中策略替代的概念研究贸易限制的模型。在这个模型里,本国的生产者和外国的生产者被视作争夺本国市场的两个企业。在伯兰特均衡下,我们可以用竞争模型来刻画它,就像第11章里做的那样。但是一些贸易的限制会改变这种竞争的性质。比如,一些文献研究了**自愿出口限制(voluntary export restraints, VERs)**策略的真实作用,这些限制包括美国与中国香港、中国台湾在制鞋业上的协议,以及美国与日本在汽车产业上的协议。传统的经济分析将VERs视作与进口限额完全等价的东西,这样的限制将损害进口企业的利益。但 Karikari(1991)等人向此观点提出挑战,他们认为企业可以通过限定住进口数量来建立起古诺均衡,而没有这样的限定这个均衡就无法稳定存在。要是这样的话,自愿出口限制可能就真的是"自愿"的,因为双方都可以借此赚取超出竞争市场的超额利润。

E15.4 价格之间的策略关系

如果我们将双头垄断问题视为定价问题,则 q_A 与 q_B 都可表示为两个厂商要价的函数

$$q_A = D^A(P_A, P_B)$$
$$q_B = D^B(P_A, P_B) \tag{ix}$$

利用这种表示有

$$\begin{aligned}\pi^A &= P_A q_A - C(q_A) \\ &= P_A D^A(P_A, P_B) - C[D^A(P_A, P_B)]\end{aligned} \tag{x}$$

因此

$$\pi_1^A = P_A D_1^A + D^A - CD_1^A \tag{xi}$$

与

$$\pi_{12}^A = P_A D_{12}^A + D_2^A - C' D_{12}^A - C'' D_2^A D_1^A \tag{xii}$$

显然,解释这么复杂的式子不是一件容易的事。在边际成本为常数($C' = 0$)与线性需求($D_{12}^A = 0$)的特殊情况下,π_{12}^A 的符号由 D_2^A 的符号给出,即 P_B 的增加是如何影响 q_A 的。在通常情况下,当这两种商品是互相替代的时候,$D_2^A > 0$,所以 $\pi_{12}^A > 0$。也就是说,价格是策略互补的。在这样的双头垄断中的厂商或者一起提高价格,或者一起降低价格[参见 Tirole (1988)]。

卡特尔和价格战

掌握这些概念对理解卡特尔的行为很有帮助。比如,Porter(1983)对联合执行委员会(Joint Executive Committee)建立了一个模型,那是一个铁路运输的卡特尔机构,在19世纪80年代垄断着从芝加哥运往东部的粮食运输。奇怪的是,资料显示,运输价格呈现出周期性的巨大的涨落。作者不认为这是需求衰退造成的,因

为在五大湖的蒸汽轮船运输业里就找不到这种价格涨落，而这正是铁路运输最主要的替代品。作者的观点是，这是卡特尔机制执行过程中产生的现象。当其中一两个参与者对当前的游戏规则不满时，他们就会发动价格战，作为表达他们要重建规则的信号。只要一方作出这种“欺诈性的”定价，整个卡特尔就不可能对其视而不见。可见，价格战是所有保证卡特尔组织稳定性的策略中最重要的组成部分。

参考文献

Bulow, J., G. Geanakoplous, and P. Klemperer. "Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements". *Journal of Political Economy* (June 1985): 488—511.

Karikari, J. A. "On Why Voluntary Export Restraints Are Voluntary". *Canadian Journal of Economics* (February 1991): 228—233.

Porter, R. H. "A Study of Cartel Stability: The Joint Executive Committee 1880—1886". *Bell Journal of Economics* (Autumn 1983): 301—314.

Tirole, J. *The Theory of Industrial Origanization*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1988, pp. 326—336.

第 6 篇

要素市场定价

我们在第 9 章对于投入要素的需求的学习非常宽泛，因为它可以被用于任何投入品。在第 16 章和 17 章，我们将讨论与劳动、资本市场的要素定价密切相关的几个问题。第 16 章重点关注劳动供给。我们的分析主要集中在对于单个人的劳动力供给决策。工会的劳动力供给也被纳入了讨论，因为劳动供求双方都有可能不是完全竞争的。

第 17 章考察了资本市场，主要目的在于强调资本与资源配置的内在联系。一些注意力也被放在将资本理论整合到厂商理论中。第 17 章的附录展示了一些关于利率的有用的数学结果。

在《政治经济学与赋税原理》中，李嘉图写道：

> 人类的生产在三种经济主体之间进行分配，即土地的所有者、耕作土地所必需的资本存量的所有者与被雇用来耕作的劳动者。政治经济学主要研究的就是制定规范这些分配的法则。*

第 6 篇的目的也正是在于说明李嘉图时代之后，对这些“法则”的研究取得了哪些进展。

* D. Ricardo, *The Principles of Political Economy and Taxation* (1817; reprinted, London: J.M. Dent and Son, 1965), p.1.

第 16 章　劳动市场

在这一章，我们将考察与劳动市场相联系的要素定价的一些问题。由于我们已经（在第 9 章）较为详尽地讨论了劳动（或其他任何要素）的需求，这里我们将着重分析劳动的供给。

16.1　时间的配置

在第 2 篇我们分析了个人如何将某一固定数量的收入在各种可获得的商品之间分配的方式。个人在决定如何花费时间上也必须作出类似的选择。一天（或一年）内的小时数目是绝对固定的，时光自流逝，总得用于这样那样的事情，所以免不了要选择用于何处。给定固定数量的时间后，一个人必须决定多少小时用来工作；多少小时用于消费从汽车、电视到歌剧等各种各样的商品；多少小时用来自我保养；以及多少小时用来睡觉。经济学家通过研究个人如何把时间分配到这些活动中，来理解劳动供给的决策。

16.1.1　简单的两商品模型

为简单起见，我们开始假定一个人的时间只有两种用途——要么进入市场在每小时 w 的实际工资率下工作；要么不工作。我们称不工作的时间为“闲暇”。但这个词并不带有任何懒散的含义。它是指没花在工作上，而可能被用在家务劳动、自我完善，或用于消费（看电视或打保龄球都要花费时间）的时间。[①] 所有这些活动都有助于改善个人的福利状况，我们还假定时间是按效用最大化的方式在这些活动中配置的。

更具体地，我们假定一个人在某一天的效用取决于那一天的消费（c）与所享受的闲暇时间（h）

$$效用 = U(c,h) \tag{16.1}$$

注意在这一效用函数中，我们用到两种“组合”商品：消费与闲暇。读者应该知道效用事实上来自将

① 大概第一个关于时间配置的理论表达出现在以下文献：G. S. Becker in “A Theory of the Allocation of Time”, *Economic Journal* 75 (September 1965)：493—517。

实际收入与时间用于消费各种各样的商品与服务。[①] 在追求效用最大化时，个人面临两个约束，第一个是可用的时间有限。如果我们以 l 代表工作的小时数，则有

$$l + h = 24 \tag{16.2}$$

也就是一天的时间要么用来工作，要么不工作。第二个约束是一个人只能通过工作赚取收入来购买消费品（在本章后面我们将考虑非劳动所得收入的情形）。如果个人在市场上获得的每小时实际工资率为 w，则收入约束为

$$c = wl \tag{16.3}$$

将这两个约束条件合并，我们得到

$$c = w(24 - h) \tag{16.4}$$

或

$$c + wh = 24w \tag{16.5}$$

这一合并后的约束条件有一个重要的含义：任一个人有一"临界收入"为 $24w$。也就是说，一个人在一天内不停地工作将拥有 $24w$ 这么多的对于实际消费品的要求权。个人要么工作（以获得实际收入与消费）；要么不工作，从而享受闲暇，以度过一天的时光。方程 16.5 表明消费闲暇的机会成本是每小时 w 的收入：它等于不工作而放弃的收入。

16.1.2 效用最大化

个人的问题这时便是在临界收入约束的限制下将效用最大化。建立拉格朗日表达式，有

$$\mathscr{L} = U(c,h) + \lambda(24w - c - wh) \tag{16.6}$$

最大值的一阶条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} &= \frac{\partial U}{\partial c} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h} &= \frac{\partial U}{\partial h} - w\lambda = 0 \end{aligned} \tag{16.7}$$

将方程 16.7 中的两式相除得到

$$\frac{\partial U/\partial h}{\partial U/\partial c} = w = (h \text{ 对 } c \text{ 的})MRS \tag{16.8}$$

由此，我们导出如下原理：

最优化原理

效用最大化的劳动供给决策。给定实际工资率 w，为了使效用最大化，个人选择去工作的小时数为在那一点上闲暇对消费的边际替代率等于 w。

当然，方程 16.8 所导出的结果仅仅是最大化的一个必要条件。就像在第 4 章中一样，如果闲暇对消费的 *MRS* 递减，则这一切点是一个真正的最大值。

---

① 这一观察导致了人们对这些活动是家庭生产的思考。有关的文献综述参见 R. Gronau, "Home Production: A Survey", in O. C. Ashenfelter and R. Layard, eds., *Handbook of Labor Economics* (Amsterdam: North-Holland, 1986), vol. 1, pp. 273—304。

16.1.3 w 变动时的收入效应与替代效应

我们可以用与第5章相同的方式来分析实际工资率(w)变动的影响。当 w 上升时,闲暇的"价格"变得更高——个人为享受每小时的闲暇必须放弃更多的工资收入。因此,w 的增加对闲暇的时间有一个负的替代效应。当闲暇变得更昂贵时,理所当然会减少对它的消费。然而,收入效应却是正的——既然闲暇是正常品,w 提高带来更高的收入将增加对于闲暇的需求。于是,收入效应与替代效应起作用的方向相反。所以,在不了解其他情况时,不可能先验地预测 w 的提高将增加还是减少对于闲暇时间的需求。由于闲暇与工作在花费一个人的时间时是两种互相排斥的方式,同样不可能预测这一变动对于工作的小时数的影响。当 w 提高时替代效应倾向于增加工作的时间,而收入效应由于增加了对闲暇时间的需求,则倾向于减少工作的小时数。这两种效应中哪一种占上风是一个重要的实证问题。[①]

16.1.4 图形分析

图 16.1 表明了对 w 变化的两种可能的反应。两个图中最初的工资率都为 w_0,这时 c 与 h 的最优选择由(c_0,h_0)给出。当工资率上升为 w_1 时,最优组合移动到(c_1,h_1)。这一移动可视为两种效应作用的结果。最优点由(c_0,h_0)移动到 S 代表替代效应,而由 S 移动到(c_1,h_1)代表收入效应。在图 16.1 的两个图中,这两种效应结合起来产生了不同的结果。图 16.1(a)中,对 w 变化的替代效应超过了收入效应,个人对闲暇的需求减少($h_1 < h_0$)。也就是说,当 w 上升时,这个人将工作更长的时间。

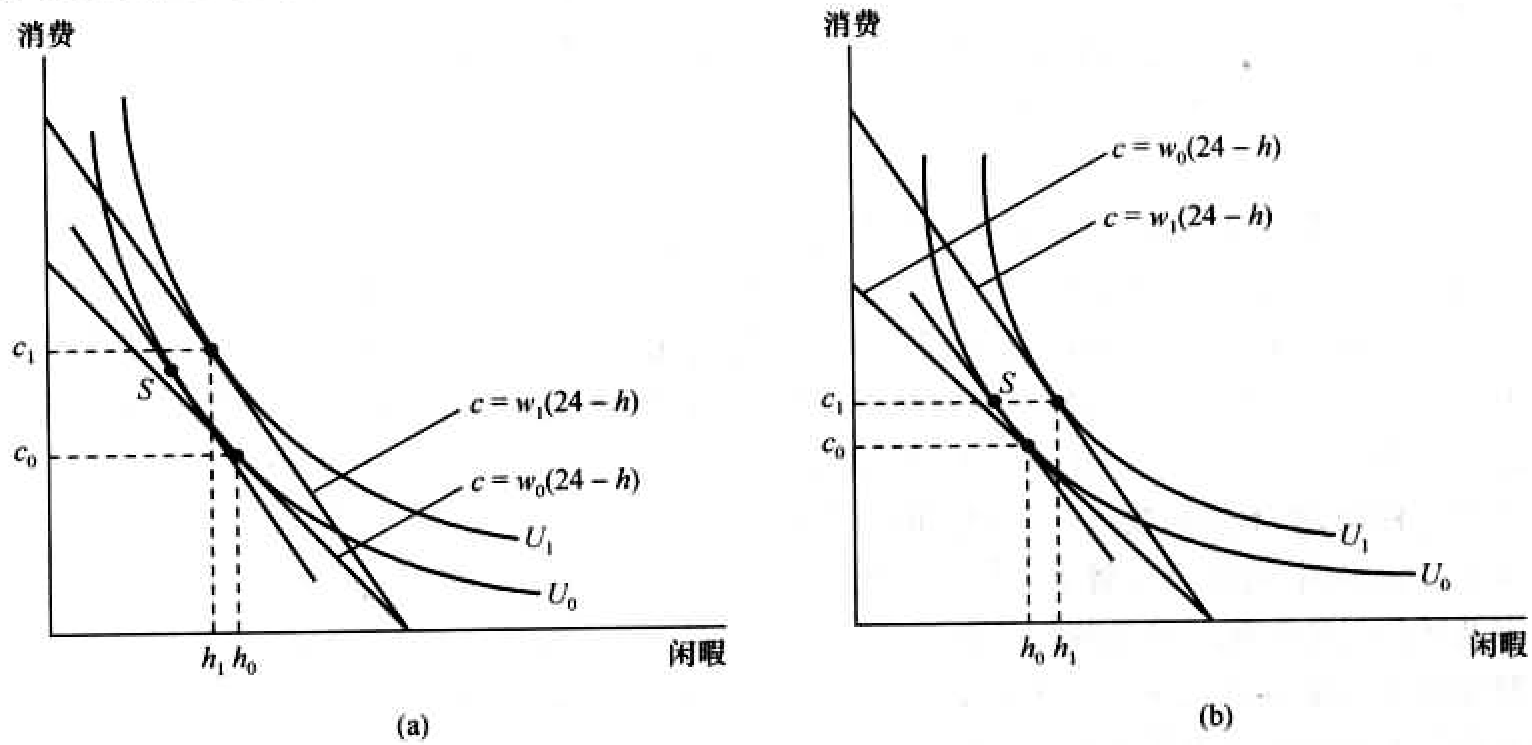


图 16.1 实际工资率 w 变化的收入效应与替代效应

由于个人是劳动的供给者,实际工资率(w)提高的收入效应与替代效应在相反的方向上影响闲暇的需求量(或工作的小时数)。在图(a)中替代效应(移动到点 S)超过了收入效应,工资提高导致闲暇的小时数减少到 h_1,从而工作的小时数增加。在图(b)中收入效应大于替代效应,h 增加到 h_1,这时工作的小时数减少。

① 如果家庭是一个合适的决策单位,某位家庭成员(如丈夫)的工资变化会引起更复杂的收入效应与替代效应问题,在这种情况下,家庭其他成员(如妻子)的行为也会发生变化。

在图 16.1(b)中情形正好相反。w 变化的收入效应抵消替代效应而有余，从而增加了对于闲暇的需求($h_1 > h_0$)。这时工资提高却导致个人缩短了工作时间。在第 5 章考察的例子中这被视为一种不正常的结果——当闲暇的“价格”提高时，个人却对它有更多的需求。对于正常的消费品而言，收入效应与替代效应影响的方向相同。只有对于“劣等品”其符号才不同。但对于闲暇与劳动，收入效应与替代效应总是在相反的方向起作用。由于个人是劳动的供给者，w 提高使其福利状况得到改善。而对于消费品而言，价格提高使个人的境况变坏，因为他们是该商品的消费者。我们可以将以上分析概括如下：

最优化原理

实际工资率变动的收入效应与替代效应。当实际工资率提高时，效用最大化的个人可能增加，也可能缩减工作的小时数。替代效应倾向于增加工作时间，因为这时相对而言，闲暇变得更为昂贵，个人愿意用工作收入来替代闲暇。另一方面，收入效应倾向于减少工作时间，因为这时个人运用其已增加的购买力来购买更多的闲暇。

现在我们转向考察这些反应的数学表达，以便可以更深入地理解劳动供给决策。

16.2 劳动供给的数学分析

为了导出劳动供给决策的数学表达，我们首先对个人的预算约束略作修正，以允许非劳动收入存在。我们可以将方程 16.3 重写为

$$c = wl + n \tag{16.9}$$

这里 n 是实际的非劳动收入，它可能包括红利、利息收入与政府转移支付等项目，或者仅仅是其他人送的礼物。实际上，n 也可用来代表个人支付的一次总付性的税收，这时它的值就是负的。

在新的预算约束下导出的效用最大化实际上与以前导出的一样。也就是说，只要 n 的值不受所作出的劳动—闲暇选择的影响，即只要 n 是“一次性总付”的收入所得或所失[①]，则方程 16.8 描述的最大值的必要条件仍然有效。在分析中引入非劳动收入的唯一影响是图 16.1 中的预算约束线向外或向内平行移动，而不影响收入与闲暇之间的替换率。

这个讨论表明，我们可以将个人的劳动供给函数写为 $l(w,n)$，以表示工作的小时数取决于实际工资率及所获得的实际非劳动收入的数量。假定闲暇是正常品，则 $\partial l/\partial n$ 为负；即 n 的增加将增加对于闲暇的需求并减少 l(由于一天只有 24 小时)。要研究工资对劳动供给的影响($\partial l/\partial w$)，我们不妨先来考虑个人最初的效用最大化问题的对偶问题。

---

① 但在许多情况下，n 本身可能取决于劳动供给决策。例如，一个人的失业补贴或福利值要根据他(她)所挣的收入决定，他(她)要付的收入税也是如此。在这样的情况下，个人预算约束的斜率将不再由实际工资来反映，而是由净收益来反映。有些例子，请参见本章结尾部分的内容。

16.2.1 问题的对偶表达

正如我们在第 5 章中所说明的那样，与个人最初在给定的预算约束下求效用最大化问题相关的对偶问题是为获得既定效用水平所必需的支出最小化。在目前的讨论中，这一问题也就是如何选择消费(c)与闲暇时间($h=24-l$)的值，以使要获取一既定效用水平[譬如，$U=U(c,h)$]所要求的额外支出

$$E = c - wl \tag{16.10}$$

尽可能小。正如在第 5 章中所表明的，解这一最小化问题将得到与解效用最大化问题完全相同的结果。

现在我们可以运用包络定理来求这一对偶问题中的额外支出的最小值。具体地说，实际工资率的一个微小变动将按如下方式引起最小支出的变动

$$\frac{\partial E}{\partial w} = -l \tag{16.11}$$

根据直觉，工资每提高 1 美元将使得 w 的必要值减少 l 美元，因为这便是工资变动所导致的劳动收入增加的幅度。这一结果与生产理论中的谢泼德引理非常相似(参见第 9 章)：这里的结果显示，通过偏导，可以由支出函数计算出劳动供给函数。由于在对偶的支出最小化方法中效用保持不变，这一函数可以被称为“补偿调整后的”(不变效用) 劳动供给函数。我们用 $l^c(w,U)$ 来代表它，以便与我们以前提到的非补偿性劳动供给函数 $l(w,n)$ 相区别。

16.2.2 劳动供给的斯拉茨基方程

现在我们可以运用这些方程推导出一个斯拉茨基型的方程，以反映由实际工资变动引起的替代效应与收入效应。我们首先可以看出，在方程 16.11 的对偶问题中被最小化的支出就相当于在基本的效用最大化问题中的非劳动收入。因此，由定义，在最优点我们有

$$l^c(w,U) = l[w, E(w, U)] = l(w,n) \tag{16.12}$$

方程 16.12 两边对 w 求偏导有

$$\frac{\partial l^c}{\partial w} = \frac{\partial l}{\partial w} + \frac{\partial l}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial w} \tag{16.13}$$

运用方程 16.11 的包络关系，我们有

$$\frac{\partial l^c}{\partial w} = \frac{\partial l}{\partial w} - l\frac{\partial l}{\partial E} = \frac{\partial l}{\partial w} - l\frac{\partial l}{\partial n} \tag{16.14}$$

这样便推导出一个稍微不同的补偿性劳动供给函数的表达式

$$\frac{\partial l^c}{\partial w} = \left.\frac{\partial l}{\partial w}\right|_{U=U_0} \tag{16.15}$$

重新整理得到最终的劳动供给斯拉茨基方程

$$\frac{\partial l}{\partial w} = \left.\frac{\partial l}{\partial w}\right|_{U=U_0} + l\frac{\partial l}{\partial n} \tag{16.16}$$

用文字表述(正如我们以前所说明的)就是，由实际工资变动引致的劳动供给的变化可以分解为两个

部分的总和：一是效用保持不变前提下的替代效应，一是相当于非劳动收入的相应变动的收入效应。由于替代效应是正的（工资提高在效用保持不变的情况下导致工作的时间增加），而 $\partial l/\partial n$ 项是负的，这一公式表明替代效应与收入效应在相反的方向上起作用。数学推导与我们以前在图形分析中所得的结论相吻合，劳动供给曲线是"向后"弯曲的。数学描述同样说明，劳动供给 L 的量越大，则负的收入效应的影响也越大。

例 16.1

劳动供给函数

个人劳动供给函数能够与推导需求函数一样从基本的效用函数得到。这里我们首先会讨论一个扩展的柯布–道格拉斯函数，然后提供一个 CES 效用劳动供给的总结。

a. 柯布–道格拉斯效用

假定每小时消费（c）与闲暇（h）的效用函数的形式如下

$$U(c,h) = c^{\alpha}h^{\beta} \tag{16.17}$$

并且为了简单起见有 $\alpha+\beta=1$。这个人受到两个等式的约束：(1) 收入的约束，即

$$c = wl + n \tag{16.18}$$

这里 n 是非劳动收入；(2) 时间的约束，即

$$l + h = 1 \tag{16.19}$$

在这里，为简单起见，我们假定工作时间最多等于 1（小时）。将这些方程合并，我们可以将效用表达为仅是劳动供给选择的函数

$$\mathscr{L} = U(c,h) + \lambda(w + n - wh - c) = c^{\alpha}h^{\beta} + \lambda(w + n - wh - c) \tag{16.20}$$

效用最大化的一阶条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} &= \alpha c^{-\beta}h^{\beta} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h} &= \beta c^{\alpha}h^{-\alpha} - \lambda w = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= w + n - wh - c = 0 \end{aligned} \tag{16.21}$$

用第一个式子除以第二个式子得到

$$\frac{\alpha h}{\beta c} = \frac{\alpha h}{(1-\alpha)c} = \frac{1}{w} \quad 或者 \quad wh = \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot c \tag{16.22}$$

代入收入约束的等式后得到了我们熟悉的结果

$$\begin{aligned} c &= \alpha(w + n) \\ h &= \beta(w + n)/w \end{aligned} \tag{16.23}$$

总之，这个人花费了她的所有收入（$w+n$）的一个固定比例 α 在消费上，剩余的比例（$\beta=1-\alpha$）花在休闲上（每单位花费 w）。这个人的劳动供给函数如下

$$l(w,n) = 1 - h = (1-\beta) - \frac{\beta n}{w} \tag{16.24}$$

这就是个人的劳动供给函数。如果 $n=0$，这个人在每小时内工作 1/2 小时而不论工资水平为多少，即，如果 $n=0$，w 变化的替代效应与收入效应恰好互相抵消，而使 l 不受影响。

b. 柯布-道格拉斯劳动供给函数的性质

这种劳动供给函数与柯布-道格拉斯效用推导的消费需求函数有许多相似的特性。例如，如果 $n=0, \partial l/\partial w>0$——不管工资率是多少，这个人总会将其时间的 $1-\beta$ 花在工作上。在这种情况下，w 变化的收入效应和替代效应被抵消了。正如柯布-道格拉斯需求函数中的交互价格影响。

另一方面，如果 $n>0, \partial l/\partial w>0$。当有一个正的非劳动收入时，这个人花在闲暇上的时间为 βn。但是闲暇的"成本"是每小时 w，因此提高工资意味着能够得到的闲暇时间变得更加有限。所以，w 的增加会增加劳动供给。

最后，注意到 $\partial l/\partial w>0$。非劳动收入的增加允许这个人购买更多的闲暇，所以劳动供给减少。这个结果的一个应用就是转移性项目（比如福利或者失业补助）将会减少劳动供给。另一个应用就是总量税会增加劳动供给——通常情况下它们也影响净工资率。因此，任何精确的预测都要求仔细地理解该项目对于预算约束的影响。

c. CES 劳动供给

在第 4 章的扩展部分，我们推导了由 CES 效用函数得出的一般形式的需求函数。我们可以将那个推导直接应用在这里来研究 CES 劳动需求。特别地，如果效用函数为

$$U(c,h)=\frac{c^{\delta}}{\delta}+\frac{h^{\delta}}{\delta} \tag{16.25}$$

预算分配等式为

$$\begin{aligned} s_c &= \frac{c}{w+n}=\frac{1}{(1+w^{\kappa})} \\ s_h &= \frac{wh}{w+n}=\frac{1}{(1+w^{-\kappa})} \end{aligned} \tag{16.26}$$

在这里，$k=\delta/(\delta-1)$。得到劳动为

$$h=\frac{w+n}{w+w^{1-\kappa}} \tag{16.27}$$

并且，

$$l(w,n)=1-h=\frac{w^{1-\kappa}-n}{w+w^{1-\kappa}} \tag{16.28}$$

最早也许是通过一些例子研究这些函数的性质。如果 $\delta=0.5, \kappa=-1$，劳动力供给函数为

$$l(m,n)=\frac{w^2-n}{w+w^2}=\frac{1-n/w^2}{1+\dfrac{1}{w}} \tag{16.29}$$

如果 $n=0$，很明显 $\partial l/\partial w>0$——因为这种效用函数下劳动和闲暇有较高的替代性，更高工资的替代效应超过收入效应。另一方面，如果 $\delta=-1, \kappa=0.5$，劳动供给函数为

$$l(w,n)=\frac{w^{0.5}-n}{w+w^{0.5}}=\frac{1-n/w^{0.5}}{1+w^{0.5}} \tag{16.30}$$

现在($n=0$)$\partial l/\partial w<0$,因为有一个水平较低的替代效应,劳动供给方面收入效应超过了替代效应。①

请回答:为什么在 CES 情况下,非劳动收入的影响依赖于效用函数中消费/闲暇的替代性?

16.3 市场的劳动供给曲线

通过水平加总我们可以由个人的劳动供给曲线构造出市场的劳动供给曲线。在每一可能的实际工资率下,我们将每个人的劳动供给量相加,得到总的市场供给量。这一步骤的一个特别有趣的方面是,工资率提高,将导致更多的人进入劳动市场。图 16.2 表明了在简单的两人情况下的这种可能性。当实际工资率低于 w_1 时,谁都不会去工作。从而,在市场的劳动供给曲线[图 16.2(c)]上,当实际工资率低于 w_1 时,没有劳动供给。工资率超过 w_1 时,个人 1 进入劳动市场。然而,只要工资率仍然低于 w_2,个人 2 仍将不工作。只有当工资率高于 w_2 时,两个人才都进入劳动市场。总之,相对于工人数目固定的情况,新的工人进入的可能性使得市场劳动供给曲线对工资率的变动变得更为敏感了。

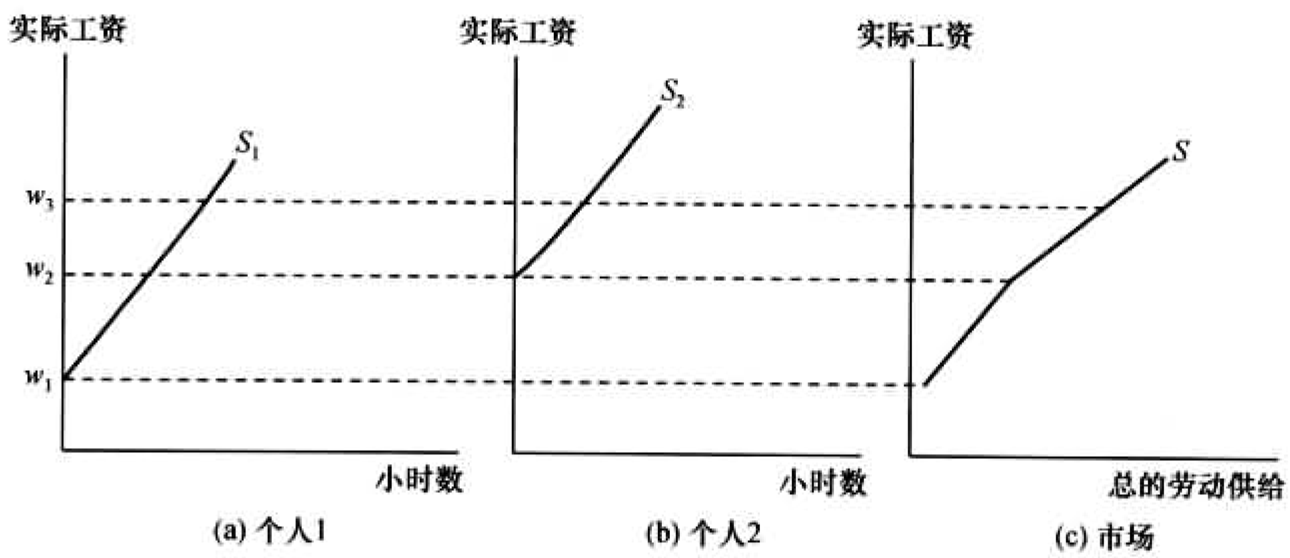


图 16.2　构造市场劳动供给曲线

当实际工资率提高时,有两个原因导致劳动供给的增加。首先,实际工资提高导致市场中的每个人工作更长的时间。其次,更高的工资诱导更多人(比如,个人 2)进入劳动市场。

用来说明更高的实际工资率会导致劳动力更多参与的最重要的例子是二战后美国已婚妇女的劳动供给行为。自大约 1950 年以来,已婚妇女工作的百分比已经从 32% 增长到超过 60%;经济学家们至少部分地将这一现象归因于妇女所能赚到的工资提高了。

① 在柯布-道格拉斯情况下($\delta=0,\kappa=0$),平均分配的结果(当 $n=0$)由 $l(w,n)=(w-n)/2w=0.5-n/2w$ 所表示。

16.4 劳动市场均衡

劳动市场的均衡是建立在单个劳动者供给决策和公司决定雇用多少劳动力的相互影响之上的。这个过程可以用我们所熟悉的供给—需求图来说明(如图16.3所示)。在实际工资率 w^* 下，公司所需要的劳动力数量正好与个人所提供的劳动力数量相等。如果实际工资率高于 w^* 将会导致劳动力供给大于需求的不均衡。在这种工资率下会存在非自愿性的失业，工资率会有下降的压力。类似地，一个低于 w^* 的实际工资率会导致公司希望雇用比实际上可以雇用的更多的工人的非均衡。为了争夺工人，公司将会提高实际工资来重建均衡。

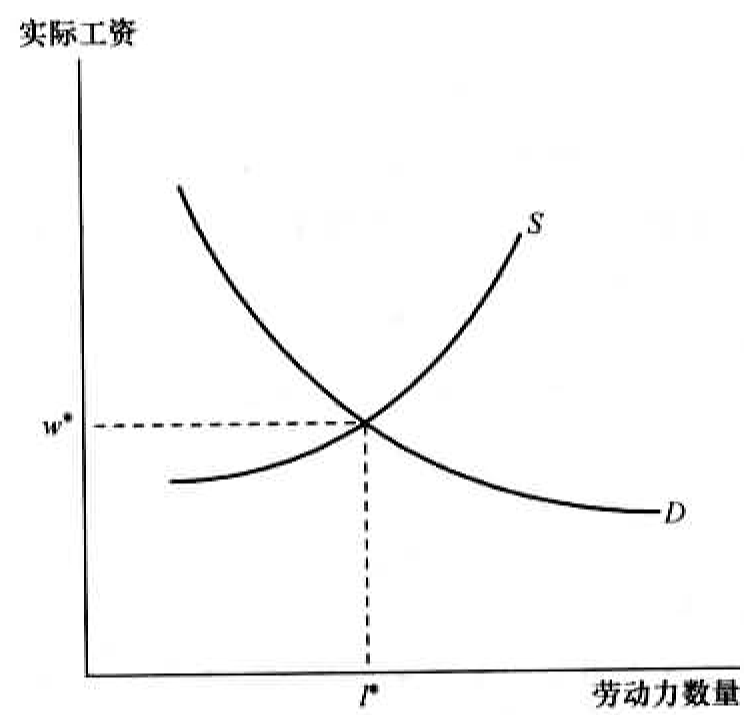


图 16.3　劳动市场的均衡

实际工资率 w^* 创造了一个劳动市场上的均衡，雇用水平为 l^*。

在劳动市场上不均衡的可能原因是宏观经济学的一个主要的问题，特别是与经济周期相联系。市场在调解变化的均衡中失效主要归咎于"粘性"工资、公司和个人对于价格水平的不准确预期、政府失业保险项目的影响、劳动市场的管制和最小工资，以及工人的工作时间决策。对于所有这些可能性的微观模型在宏观经济学的发展方面起了重要的作用，但我们不会深入讨论这些问题，因为它们离本书的主题太远。

劳动市场的均衡模型也可以被用来研究税收和管制政策的一些问题。例如，第11章所讲的税收模型可以被用作研究对雇用劳动力征税。在研究劳动市场中很有意思的是，一项给定的政策可能同时移动需求和供给函数——我们已经在例16.2中讨论过这个问题。

例 16.2

命令的收益

一些近期的法律命令雇主提供特殊的利益,像健康保险、带薪休假,或者给他们的雇员最低辞退金。在劳动力市场上,这些命令对均衡的影响取决于工人怎样评价这些福利。假设在实施命令之前,对劳动的供给和需求如下

$$\begin{aligned} l_S &= a + bw \\ l_D &= c - dw \end{aligned} \tag{16.31}$$

令 $l_S = l_D$ 得到均衡工资为

$$w^* = \frac{c-a}{b+d} \tag{16.32}$$

现在假设政府命令所有的公司提供给它们的工人一项特别的福利,并且这个福利花在每个雇员身上的成本为 t。每个雇员的成本增加到 $w+t$。假设每个人得到的新的福利对于工人来说货币价值为 k——因此从雇主处得来的净回报为 $w+k$。

劳动市场上的均衡要求

$$a + b(w+k) = c - d(w+t) \tag{16.33}$$

通过对于表达式的一些变形,净工资为

$$w^{**} = \frac{c-a}{b+d} - \frac{bk+dt}{b+d} = w^* - \frac{bk+dt}{b+d} \tag{16.34}$$

如果工人们从命令的福利中没有得到价值($k=0$),这项命令就好像对雇用劳动力征收的税——雇员支付税率为 $d/(b+d)$ 的税并且雇用的劳动者数量变少了。只要 $k<t$,数量上相同的结果将会发生。另一方面,如果工人对该福利的评价正好等于他的成本($k=t$),新的工资率将会以它的成本下降($w^{**}=w^*-t$),并且均衡的雇用劳动力数量不变。最后,如果工人们对福利的价值估计高于公司提供的成本($k>t$——这种情况下人们可能会疑惑为什么之前没有提供这种福利),均衡工资率下降幅度会大于福利的成本,均衡雇用人数会增加。

请回答:你怎样将这个分析用图表示出来?它的结论是否要依赖于使用线性的供给和需求函数?

16.4.1 工资差异

与图 16.3 的供给和需求图形相联系的一个应该被提到的问题是不同的工人和工作怎样得到不同的工资水平。这种工资的差异近些年来在许多经济体中都在不断地扩大,并且研究劳动市场上的供给和需求的本质与解释它相距甚远。这里我们只简单地看竞争性劳动市场上比较重要的两种因素,然后我们会转向一个对于不完全竞争劳动市场的广泛讨论。

16.4.2 人力资本

因为公司对于劳动力的需求主要依赖于工人的边际生产能力，工人之间的生产能力的不同会导致不同的工资。也许这种生产能力差异的最重要的原因就是蕴含在工人中的人力资本。这种人力资本通过工人一生的正式的教育、其他取得技术的正规方法（比如工作培训）、工作中得到的锻炼还有日常的生活经验来积累。这个过程与投入实物资本——我们下一章将要讨论的话题——有很大的相似之处。工人们投入金钱和时间来得到技术，并希望在劳动市场上用这些技术取得报酬。在决定进行这些活动之前，工人们会看一下他们期待从这项投资中得到的回报率。只有那些在技术上投入带来的回报率高于其他地方的投资时才会被采用。当然，投资于人力资本不同于投资于实物资本，主要是因为人力资本一旦被得到就难以转让，这使得人力资本投资比流动投资更加有风险，所以最终回报率也会更高。[①] 因为人力资本既有成本还会提高工人的生产率，所以他们给实际工资带来明显的正向影响。

16.4.3 补偿性差别

人们很明显地喜欢一些工作。类似于良好的工作条件、灵活的工作时间，或者上下班交通方便这类要素使得一个人乐于接受薪水少的工作。这种供给的影响在较低的工资率下非常明显。不同的是，包含着让人不喜欢的因素或者有很大风险的工作必须要有更高的工资才会有吸引力（见练习题 16.3）。这种供给导致的工资差异被定义为"补偿性工资差别"，因为它们补偿了对于劳动者有价值的工作因素。因此，这些因素的差异部分地解释了工资差异的原因。

16.4.4 劳动市场的买方垄断

在许多情况下，厂商并非它们所购买的投入要素的价格的接受者。也就是说，厂商所面临的劳动的供给曲线在现行工资率下并不具有完全弹性。假如厂商想吸引更多的雇员，就必须提供高于现行水平的工资。为了研究这种情况，最简便的方法是研究劳动市场上买方独家垄断（单一买主）这种极端的情况，如果在劳动市场上只有一个买主，这个厂商就面对着整个市场供给曲线。为了多增加一单位的雇佣劳动，厂商就必须选取供给曲线上位置较高的点，这意味着不但要付给最后一个工人较高的工资，而且要给已雇用的工人支付额外的工资。因此雇用额外劳动的边际花费（ME_l）超过其工资率。我们可以把这一结果表示为如下的数学等式。劳动的总成本是 wl。因此，由于雇用一个额外的工人所导致成本的变化为

$$ME_l = \frac{\partial wl}{\partial l} = w + l\frac{\partial w}{\partial l} \qquad (16.35)$$

在竞争的情况下，$\partial w/\partial l = 0$，多雇用一个工人的边际费用仅仅是市场的工资率，即 w。然而，如果厂商面对的是具有正斜率的劳动供给曲线，则 $\partial w/\partial l > 0$，边际费用大于工资率。这正如以下定义

① 人力资本的前沿研究见 Gary Becker, *Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education* (New York: National Bureau of Economic Research, 1964)。

所总结的：

定义

边际投入费用。与任何投人有关的边际费用(ME)是指由于多雇用一个单位要素所导致总投入成本的增加部分。如果厂商面对的是具有正斜率的投入要素供给曲线，边际费用会超过投入要素的市场价格。

一个寻求利润最大化的厂商将雇用尽可能多的劳动，直到投入的边际收益恰好等于投入的边际费用，这只是我们以前讨论的边际主义的选择推广到劳动市场买方垄断的情况，与以往一样，只要放弃这一选择，就只能给厂商带来较低的利润。例如，如果 $MRP_l > ME_l$，厂商就应当雇用更多的工人，因为这样会使收入的增加高于成本的增加；相反，如果 $MRP_l < ME_l$，就应裁减雇员，因为这样做可以使成本比收益下降得更快。

16.4.5 图形分析

图 16.4 表明买方独家垄断者对劳动投入的选择。厂商的劳动需求曲线(D)斜率为负，我们已经说明这种情况是必然的。[①] 与劳动供给曲线(S)相关的 ME_l 曲线是以与建立与需求曲线相关的边际收益曲线相同的方式建立起来的。因为 S 的斜率为正，ME_l 位于 S 曲线之上。买方独家垄断者利润最大化的劳动投入为 l_1，因为在此投入水平满足等式 23.3 的利润最大化要求。在 l_1 点市场工资率为 w_1。注意，这时劳动需求量低于在完全竞争的劳动市场所雇用的劳动(l^*)，因为厂商在市场上处于垄断地位，从而限制了投入需求。应该清楚的是，这里的分析与第 13 章的垄断分析只是形式上的相似。实际上，买方独家垄断者的“需求曲线”只是由(l_1，w_1)确定的一个点组成。买方独家垄断者在供给曲线 S 上把这一点作为最合适的点加以选取。除非一些外部的变化(像厂商产品需求的变化或技术上的变化)影响到劳动的边际收益产量，否则厂商不会选择其他的点。[②③]

---

① 图 16.4 只是作为教学时用，并且不可以被严格证明。具体来说，虽然它是用来代表对劳动力的“需求”曲线(或者边际收入产品)，但因为我们不能够用固定的工资率来构建这条曲线，所以没有精确定义垄断的劳动力购买者。相反，公司面临着整条供给曲线 S，并且使用辅助线 ME_l 来选择 S 上的最优点。严格说来，没有所谓的垄断需求曲线。这与垄断的例子比较相似，但是我们不能说是垄断者的“供给曲线”。

② 在垄断条件下的要素需求的细节的比较分析，参见 W. E. Diewert, “Duality Approaches to Microeconomic Theory”, in K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*(Amsterdam: North-Holland, 1982), vol. 2, pp. 584—590。

③ 买方垄断也会像第 13 章所讨论的垄断那样使用所有可能的方式进行价格歧视。

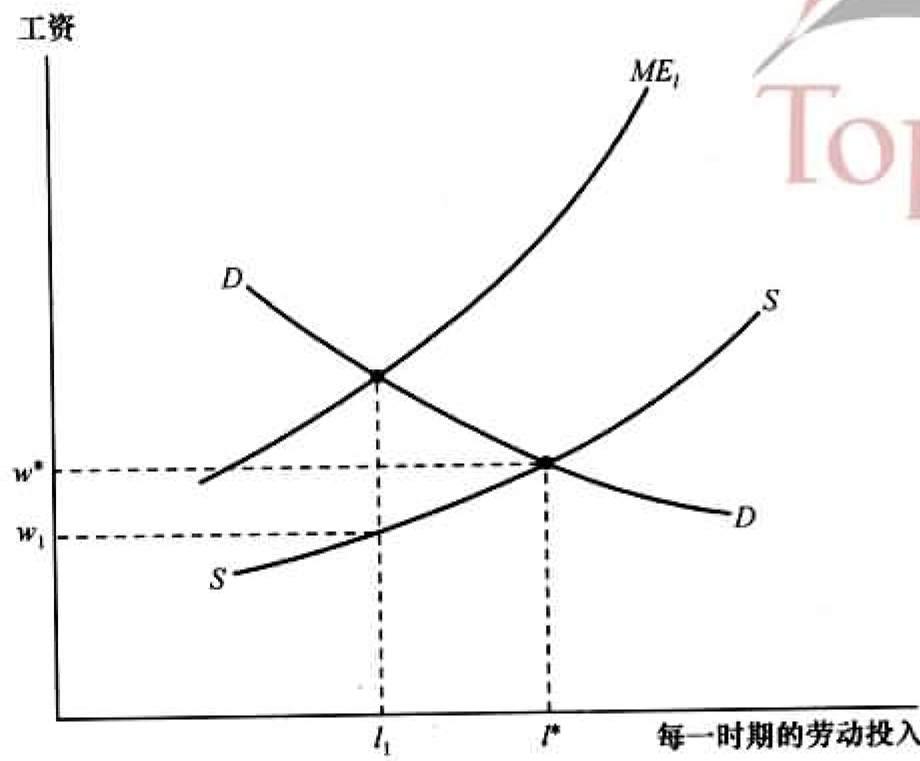


图 16.4　买方独家垄断的劳动市场的定价

如果厂商面临的劳动供给曲线(S)的斜率为正,厂商将根据雇用额外劳动的边际费用(ME_l)作出雇用决策。由于 S 的斜率为正,ME_l 曲线位于 S 曲线之上,可以认为曲线 S 是"劳动平均成本曲线",曲线 ME_l 是 S 的边际曲线。在 l_1 满足均衡条件 $ME_l = MRP_l$,并且这一数量的劳动是以市场工资率 w_1 被雇用的。注意,买方独家垄断者所雇用的劳动要少于在完全竞争的劳动市场情况下所雇用的数量(l^*)。

例 16.3

买方独家垄断者雇工的情况

为了在非常简单的情况下说明这些概念,假设一个矿工每小时挖 2 吨煤,每吨煤卖 10 美元。一个矿工的边际收益产量为每小时 20 美元。如果在当地该煤矿是唯一的矿工雇用者,其劳动的供给曲线为

$$l = 50w \tag{16.36}$$

厂商必须认识到其雇用决策会影响工资。把总工资表达为 l 的函数,有

$$wl = \frac{l^2}{50} \tag{16.37}$$

允许煤矿经营者(可能只是隐含地)计算与雇用矿工有关的边际费用,有

$$ME_l = \frac{\partial wl}{\partial l} = \frac{l}{25} \tag{16.38}$$

如果煤矿工人的边际收益产量等于 20 美元,这意味着煤矿经营者每小时应雇用 500 个工人。在此雇用水平上,工资为每小时 10 美元——只是工人的边际收益产量的一半。如果市场竞争迫使煤矿经营者每小时支付 20 美元工资,不管已雇用的矿工人数是多少,在买方独家垄断的条件下必须

使 $l=1\,000$（而不是 $l=500$），才能建立起市场平衡。

请回答：假设煤的价格上升至每吨 15 美元，这时，买方独家垄断者的雇用决策与工资会受什么影响？矿工能完全获得 *MRP* 增长的好处吗？

16.5 工会

有时工人们发现一起加入工会有好处，因为有些目标通过一个集体能更有效地达成。如果加入工会完全凭自愿，则可以假定每个工会成员通过加入这一集体得到了一正的利益。然而，为了维持工会组织的运行，常常实行强制性入会。如果所有工人可以自由决定是否加入，其理性选择可能是不加入工会，从而逃避掉责任与其他的限制。但是，他们能从工会赢得的更高的工资与更好的工作条件。由于工会受到"搭便车者"的损害，对工人个人而言理性的选择从集体的角度看可能是非理性的。所以，强制性入会可能是维持一个有效的工会联盟的必要方式。

工会的目标

对于工会行为的分析，我们首先要界定一个工会的奋斗目标。我们要做的第一个假定是，某种意义上一个工会的目标是其成员目标的充分代表。这一假定避免了工会领导权的问题，也不考虑这些领导者的个人抱负，它可能与普通成员的目标相冲突。因此，工会领导者被假定为是表达成员愿望的代言人。① 在美国，工会目标一般以争取"面包与黄油"* 为导向。除了在 20 世纪初这一短暂时期以外，大多数工会的计划并不着重于推动激进的社会变革，而只是试图影响劳动市场，在这一方面工会已经获得了一些成功。

在某些方面，也可以将强大的工会当做一个垄断厂商那样来加以分析。工会面临着一条劳动需求曲线，而由于它是供给的唯一来源，所以它可以选择在这条曲线的任一点上运行。工会实际上选取哪一点显然取决于其决定追求的特定目标。图 16.5 显示了三种可能的选择。例如，工会可能选择提供使得工资单（$w \cdot l$）总额最大化的劳动量。如果是这样的话，它将在劳动需求所得的"边际收益"等于 0 那一点上提供劳动量。这一数量就是图 16.5 中的 l_1，由此决定的工资率为 w_1。因而，点 E_1 便是其偏好的工资—劳动量组合。我们注意到工资率为 w_1 时，可能存在超额劳动供给，从而工会在某种程度上必须为那些工人找工作。

① 但是，近期的分析主要围绕"潜在的"会员在工会设定目标时是否有影响力，还有工会的目标怎样影响有着不同资历的工人对工作的意愿。

* 工人福利。——译者注

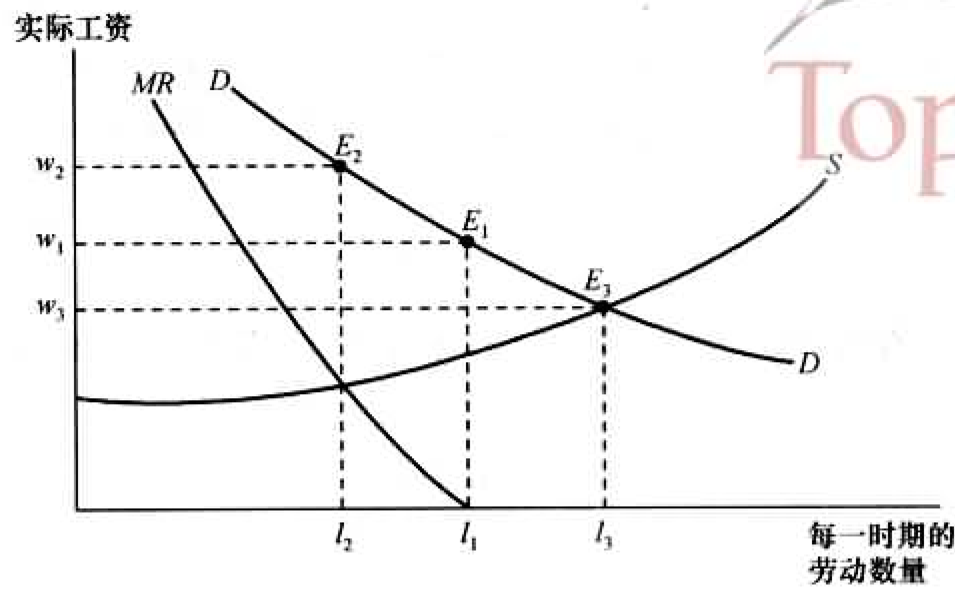


图 16.5　一个垄断性的工会在劳动需求曲线上可能选择的三个点

工会在劳动供给上有垄断性。因此它将在劳动需求曲线上选择它最偏好的那一点。图中标明了三个这样的点。在点 E_1 向劳动的总支付($w \cdot l$)达到最大值;在点 E_2 工人得到的经济租金最大化;而在点 E_3 所提供的劳动服务总量最大化。

另一个工会可能追求的目标是选择这样一个劳动量,以使得被雇用的会员所获得的总经济租金(也就是,工资减去机会成本)最大化。这样要求选择的劳动量为这样一点,在这一点上,增加一个被雇用的工会成员获得的额外总工资(边际收益)等于诱使那一成员进入市场的额外成本。这样,工会选择的劳动量为 l_2,在这一点上边际收益曲线与供给曲线相交。① 这时的工资率为 w_2,意愿的工资—劳动量组合在图上标为 E_2。在工资为 w_2 时,许多想在这一工资率下工作的人都没有被雇用。也许,工会将对那些工作的人所获得的高额经济租金"课税"以向那些没有工作的人转移一些收入。

工会的第三个可能的追求目标就是最大化它的成员的就业率。这将会包含选择点(w_3,l_3),这个点同时也是在自由竞争条件下市场的结果。因为工会会员供给的劳动力的价格将会低于 w_3,多于 l_3 的就业不可能被达到。

例 16.4

建立一个工会的模型

在例 16.3 中我们考察了一个煤矿工人的垄断雇用者面临着这样一条供给曲线

$$l = 50w \tag{16.39}$$

为了研究组织一个工会与这一垄断者斗争的可能性,假定(与例 16.3 相反)这个垄断者有一条如下形式的向下倾斜的边际收益产品曲线

$$MRP = 70 - 0.1l \tag{16.40}$$

很容易证明,如果没有一个有效的工会,该例中的垄断者将选择与例 16.3 中相同的工资—雇用组合——在 10 美元的工资水平上雇用 500 个工人。

① 数学上来讲,工会的目标是通过选择 l 来最大化 wl(S 以下的部分),S 是对劳动的补偿性供给曲线,反映了放弃闲暇的机会成本。

如果工会能够控制对矿主的劳动供给，则有可能出现其他几种选择。譬如说，工会能够迫切要求得到竞争的解决方案。$l=583$，$w=11.66$ 的一个契约能使供求相等。或者，工会也可以像一个面临如方程 16.40 所示的需求曲线的垄断者一样起作用。它能够计算出通过供给额外的工人带来的边际增加值为

$$\frac{\mathrm{d}(l\cdot MRP)}{\mathrm{d}l}=70-0.2l \tag{16.41}$$

这条"边际收益"曲线与劳动供给曲线（它表示工人劳动供给决策的"边际机会成本"）相交得到对于工会来说最大的租金

$$\frac{l}{50}=70-0.2l \tag{16.42}$$

或者

$$3\,500=11l \tag{16.43}$$

由此计算得出的契约为 $l=318$，工资（MRP）$=38.20$ 美元。无论是竞争性的供给契约还是工会垄断的供给契约都与垄断者偏好的契约有显著差异的事实表明，这时的最终结果可能需要通过双边谈判来决定。同样应注意到，哪一方在市场上占主导地位将会对工资水平产生很大的影响。

请回答：本例的三个工资契约中哪一个代表了纳什均衡（如果存在的话）？

例 16.5

工会的议价模型

博弈论能够帮助我们对于工会经济学有更深入的理解。为了简单起见，假设一个工会和一个公司参与到一个两阶段博弈。在第一阶段，工会制定其会员可以接受的工资率。给定了这个工资率，公司就会选择它的雇用水平。这个两阶段博弈可以用"追溯推理"来求解。给定公司制定的工资率 w，公司的第二阶段的问题就是最大化

$$\pi=R(l)-wl \tag{16.44}$$

在这里 R 是公司总的收入函数，它是用一个雇用水平的函数表示的。这里最大化的一阶条件是（假设工资水平固定）我们所熟悉的

$$R'(l)=w \tag{16.45}$$

假设 l^* 是等式 16.45 的解，工会的目标是选择 w 来最大化效用

$$U(w,l)=U[w,l^*(w)] \tag{16.46}$$

最大化的一阶条件是

$$U_1+U_2l'=0 \tag{16.47}$$

或者

$$U_1/U_2=l' \tag{16.48}$$

总之，工会会选择 w 使得 MRS 等于公司的劳动需求函数的斜率。从博弈中得来的组合（w^*，l^*）很明显是一个纳什均衡。

劳动合约的有效性。劳动合约(w^*, l^*)是帕累托无效的。为了证明这一点,注意到等式16.48暗示了沿着公司劳动需求曲线(l)的微小移动会让工会得到同样的收益。但是包络定理指出w的下降必然会带来公司利润的增加。因此必然存在一个合约(w^p, l^p)(此时$w^p < w^*, l^p > l^*$)使得公司和工会都变得更好了。

两阶段博弈劳动合约与我们在第15章学习的重复纳什均衡的非有效性很类似。这表示在重复进行的劳动合同谈判过程中,触发策略也许可以被采用并且形成一个子博弈完美均衡,而且保持一个帕累托改进的结果。一个简单的例子,参见练习题16.10。

请回答:假设公司的总的利润函数依赖于整体经济是扩张还是萧条。什么样的劳动合约是帕累托最优的?

小 结

本章主要分析了劳动市场中定价问题的模型。因为劳动需求被认为是从第9章利润最大化假设导出的,这里的大多数新的内容关注劳动供给。我们重要的发现如下:

- 一个效用最大化的个人将选择工作的小时数为,在那一点上闲暇对消费的边际替代率等于他(她)的实际工资率。
- 实际工资提高引起的收入效应与替代效应从不同的方向影响劳动供给。这一结论可用消费者理论中所提出的类似的斯拉茨基方程来说明。
- 完全竞争的劳动市场将会建立一个均衡实际工资,此时个人所提供的劳动力等于公司所需要的劳动力。
- 需求方的垄断权利将会减少雇用的劳动力数量和实际工资水平。正如在垄断中所提到的那样,会有一个福利的损失。
- 分析工会时可以将其当做劳动的垄断供给者。存在工会时的劳动市场均衡取决于工会在其供给决策中选择追求什么目标。

练 习 题

16.1 假定一年有8 000个小时(实际上有8 760个小时),并且一个人有一潜在的市场工资为每小时5美元。

a. 一个人的最高临界收入是多少?如果他(她)将这一收入的75%用来享受闲暇,则他(她)将工作多少小时?

b. 假设一位富有的伯父去世了,留给这个人每年4 000美元的年收入。如果他(她)继续将其最高临界收入的75%用来享受闲暇,则他(她)将工作多少小时?

c. 如果市场工资由每小时5美元变为每小时10美元,则b的答案有何变化?

d. 用图形来说明由b与c所隐含的这个人的劳动供给曲线。

16.2 正如我们在第 16 章所看到的，劳动供给的理论是由支出最小化得出的。假设一个人对于消费和闲暇的效用函数具有柯布-道格拉斯形式 $U(c,h)=c^{\alpha}h^{1-\alpha}$。然后指出最小化问题转化为

$$\text{Min} \quad c-w(24-h)$$
$$\text{s.t.} \quad U(c,h)=c^{\alpha}h^{1-\alpha}=\overline{U}$$

a. 使用该式导出这个问题的支出函数。

b. 使用包络定理导出对于消费和闲暇的补偿性需求函数。

c. 导出补偿性劳动供给函数。证明 $\partial l^c/\partial w>0$。

d. 比较 c 中的补偿性劳动供给函数和例 16.1 中的（$n=0$）的非补偿性劳动供给函数。使用斯拉茨基方程来表示为什么实际工资的变化的收入效应和替代效应在非补偿性的柯布-道格拉斯劳动供给函数中正好抵消了。

16.3 一个人由每天的收入（y）得到的效用为

$$U(y)=100y-\frac{1}{2}y^2$$

收入的唯一来源是劳动所得。因此，$y=wl$，这里 w 是每小时的工资，l 是每天工作的小时数。这个人知道有一个职位，一天固定工作 8 小时，每小时工资 5 美元。对于另一个职位，每天工作时间是随机的，平均值为 8 小时，标准差为 6 小时，必须提供多高的工资才能使这个人接受这项更“冒险”的工作？

提示：这个问题可以运用统计恒等式

$$E(x^2)=\text{Var}(x)+E(x)^2$$

这里 E 表示期望值。

16.4 一个有两个成年人的家庭试图将如下形式的效用函数最大化

$$U(c,h_1,h_2)$$

这里 c 是家庭消费，h_1 与 h_2 是每个家庭成员享受的闲暇时间。选择的约束条件为

$$c=w_1(24-h_1)+w_2(24-h_2)+n$$

这里 w_1 与 w_2 是每一家庭成员的工资，而 n 是非劳动所得。

a. 不作数学推导，只运用替代效应与收入效应的概念讨论交叉替代效应 $\partial h_1/\partial w_2$ 与 $\partial h_2/\partial w_1$ 可能的符号。

b. 假定有一个家庭成员（比如说，个人 1）可以在家里劳动，从而可按如下函数将闲暇时间转换为消费

$$c_1=f(h_1)$$

此处 $f'>0$，$f''<0$。这一额外的选择方式会如何影响工作在家庭成员之间的最优分配？

16.5 一项针对低收入人群的福利计划给每个家庭提供一笔基本的补助金，为每年 6 000 美元。家庭每得到 1 美元的其他收入，这笔补助金将减少 0.75 美元。

a. 如果家庭没有其他收入，它将得到多少福利补助金？如果家庭的主人每年赚到 2 000 美元呢？赚到 4 000 美元呢？

b. 当赚多少钱时，福利补助金变成零？

c. 假定这一家的主人每小时能赚 4 美元，家庭没有其他收入。如果这一家庭没有参与福利计划，则它的年度预算约束是多少？也就是说，消费（c）如何与闲暇时间（h）相联系？

d. 如果这一家庭参与福利计划，则它的预算约束是多少？（记住，福利补助金只能是正的。）

e. 将你由 c 与 d 所得的结果用图形表示出来。

f. 假定政府改变福利计划的规则，允许家庭留下它们所赚到收入的 50%（不减少补助金）。这一变革将引起 d 与 e 的答案如何变化？

g. 运用从 f 所得的结果，你预测这一家的主人在 f 描述的新规则下是增加还是减少工作的时间？

16.6 假如劳动的需求方程是

$$l = -50w + 450$$

供给方程是

$$l = 100w$$

这里 l 表示雇用劳动力的数量，w 代表每小时的实际工资率。

a. 在这一市场上，w 与 l 各为多少时，才能达到均衡？

b. 假设政府希望通过给雇主提供补助的方法，使均衡时的工资为每小时 4 美元，这份补助应该是多少？就业的均衡水平又是多少？补助的总额多大？

c. 假如政府宣布最低工资率为每小时 4 美元，在这种价格下，需要多少劳动？有多少人失业？

d. 用图形表示计算结果。

16.7 Carl 在一个孤岛上拥有一个大服装厂，对大多数岛上居民来说，Carl 的工厂是唯一的就业途径，因此 Carl 的行为如同买方独家垄断者。制衣工人的供给方程是

$$l = 80w$$

l 是劳动数量，w 是每小时的工资率，假定 Carl 的劳动需求（MRP_L：marginal revenue product 劳动力的边际收益）曲线方程是

$$l = 400 - 40MRP_l$$

a. 为使利润最大化，卡尔会雇用多少工人？付多少工资？

b. 假如政府实行最低工资制。当最低工资定在每小时 4 美元时，卡尔会雇用多少劳动力？又有多少人会失业？

c. 用图形表示你的结果。

d. 在买方独家垄断的情况下实行最低工资制与在完全竞争的情况下实行最低工资制（假设最低工资高于市场决定的工资额），结果有什么不同？

16.8 Ajax 煤炭公司是某地区劳动的唯一雇主。它可以按意愿雇用任意数量的男工与女工，女工的供给曲线是

$$l_f = 100w_f$$

男工的供给曲线是

$$l_m = 9w_m^2$$

这里 w_f，w_m 分别表示付给女工与男工每小时的工资。假设 Ajax 公司在完全竞争的市场上以每吨 5 美元的价格出售煤炭，如果男工与女工每小时都能采 2 吨煤。为求利润最大化，它将雇用多少男工，多少女工？其工资分别是多少？Ajax 每小时的利润中有多少是由其挖煤机赚取的？如果 Ajax 被迫（如市场压力）基于所有工人的边际产出，付给他们同样的工资，结果又会怎样？

16.9 宇宙毛皮公司位于巴芬岛，它在全世界以每根 5 美元的价格出售毛皮琴弓带。这种琴弓带（q）的生产函数为

$$q = 240x - 2x^2$$

这里 x 为每周用到的毛皮数量。毛皮由 D 邮递贸易公司独家提供，该公司通过以每天 10 美元的工资雇用因纽特人捕猎来获取毛皮。D 公司每周毛皮的生产函数为

$$x = \sqrt{l}$$

这里，l 代表每周雇用因纽特人捕猎的天数。

a. 在一种准竞争的情况下，宇宙毛皮公司与 D 邮递贸易公司都是毛皮的价格接受者，这时均衡价格（p）与毛皮的交易量各是多少？

b. 假定 D 公司是一个垄断者，而宇宙毛皮公司仍然是一个价格接受者。在毛

皮市场上将出现一个什么样的均衡？

c. 假定宇宙毛皮公司是一个垄断者，而D公司仍然是一个价格接受者。均衡将是什么样的？

d. 用图形表示这些结果，并讨论在宇宙毛皮公司与D公司进行双边垄断谈判时可能出现的均衡类型。

16.10 下面继续例16.5劳动市场博弈的分析，假设公司总的收入函数如下

$$R = 10l - l^2$$

并且工会的效用就是总工资

$$U(w, l) = wl$$

a. 在例16.5中所描述的两阶段博弈的纳什均衡工资契约是什么？

b. 证明另一种工资契约 $w' = l' = 4$ 对于a中所写的契约是帕累托更优。

c. 在什么条件下b中所说的契约会成为一个子博弈完美均衡？

推荐阅读文献

Ashenfelter, O. C., and D. Card. *Handbook of Labor Economics*, vol. 3. Amsterdam: North-Holland 1999.

该书收集了许多高水平的关于劳动市场问题的论文。在第1卷和第2卷(1986)中，关于劳动供给和需求的研究文章是非常有价值的。

Becker, G. "A Theory of the Allocation of Time". *Economic Journal* (September 1965): 493—517.

微观经济学中最重要的文章之一。Becker关于劳动供给和需求的研究都是革命性的。

Binger, B. R., and E. Hoffman. *Microeconomics with Calculus*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.

第17章有一个对于劳动供给模型的彻底讨论，包括一些家庭劳动供给的应用。

Hamermesh, D. S. *Labor Demand*. Princeton: Princeton University Press, 1993.

作者提供了一个完整的既有理论又有实证的讨论。这本书也有对于劳动需求理论的动态问题的研究。

Silberberg, E., and W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston: Irwin/McGraw-Hill, 2001.

提供了一个对于劳动供给理论的双重讨论。

第 17 章　资本市场

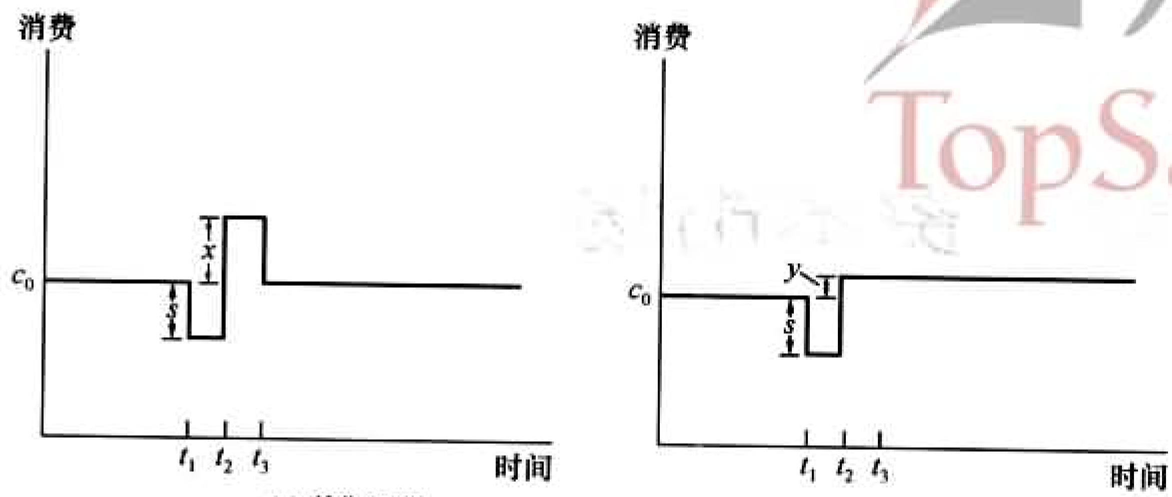
本章我们开始研究资本理论。在许多方面，这个理论与我们前面投入品定价的分析类似——利润最大化的投入选择理论始终没有变化。但是资本理论对决策增加了十分重要的时间维度，我们的目标是研究这个新的维度。我们从对资本积累过程的广泛的描述和回报率的概念入手，然后对跨期的经济行为模型进行更详细的研究。

17.1　资本与回报率

当我们提及一个经济的资本存量时，是指在某一时点上存在的机器、建筑物及其他孳生性的资源总量。这些资产代表一个经济过去的产出中未被消费，并准备用于未来生产的部分。所有社会，从最原始到最复杂的社会，都致力于资本积累。一个原始社会中的猎人从狩猎中抽取时间用于制造弓箭，现代社会中的个人用部分收入购买房子，或是政府征税以用于堤坝和邮局的建设，所有这些实质上的目的都是一样的：把当前产出的一部分拿出来用于未来。为了未来的收益增长而现在作出“牺牲”，这就是资本积累的实质。

回报率

图 17.1 形象地描述了资本积累的过程。在两个图中，最初，社会都消费 c_0 并且保持一段时间。在 t_1 期作出决策，从当前的消费中留出一部分（数量为 s）用于下一个时期。在 t_2 期开始时，这部分保留下来的消费被以某种方式用于未来消费的生产。与这一过程相关的一个重要概念是**回报率（rate of return）**，即被保留的那部分消费所赚取到的收益。例如，在图 17.1(a)中，所保留的部分只在 t_2 期用于生产额外的产出。t_2 期消费增加量为 x，而后的长期消费水平又为 c_0。这样，社会在第一年的储蓄是为了第二年的挥霍。这个活动的回报率（单期）定义如下：



(a) 单期回报　　　　(b) 持久回报

图 17.1　资本积累的两种观点

图(a)中,社会从当前的消费(s)中扣除一部分,以用于下一期的消费(增加了 x 量的额外消费)。单期回报率为 $x/s-1$。(b)中的社会则采取长远的观点,用 s 生产以使消费持久地增加 y 的数量。持久回报率为 y/s。

定义

单期回报率。一项投资的**单期回报率(single period rate of return, r_1)**是在时期 1 所放弃的一部分消费所能提供的在时期 2 的额外消费量。即

$$r_1=\frac{x-s}{s}=\frac{x}{s}-1 \tag{17.1}$$

如果 $x>s$(这一过程增加了而不是减少了更多的消费),我们就说资本积累的单期回报率为正。例如,如果从当前消费中扣除 100 单位而使得一个社会能在下一年消费额外的 110 单位,则单期回报率将为

$$\frac{110}{100}-1=0.10 \quad 或 \quad 10\%$$

在图 17.1(b)中,假定一个社会具有更长的资本积累观。在 t_1 期仍留出 s 数量的消费。但现在所节省出的消费被用于提高未来所有时期的消费量。如果持久消费水平被提高到 c_0+y,则我们定义持久回报率如下:

定义

持久回报率。**持久回报率(perpetual rate of return, r_∞)**是作为最初所放弃的消费量对未来消费的持久增加量的比例,即

$$r_\infty=\frac{y}{s} \tag{17.2}$$

如果资本积累持续地增加 c_0,r_∞ 将为正数。例如,假设一个社会在 t_1 期,留出 100 单位的产出用于资本积累。如果这些资本将使得产出在未来任何一期都能增加 10 单位(从 t_2 期开始),则持久回报率将为 10%。

当经济学家提及资本积累的回报率时，他们通常指的是这两个极端之间的情况。有时我们会不太严格地将回报率作为将目前的消费转换成未来消费的测度指标（这将在以后予以说明）。很自然地，人们会问：一个经济的回报率是如何决定的呢？其答案仍将不同程度地牵涉到现在商品与未来商品的供求。在下一节中，我们提供了一个简单的两时期模型，在那里，将说明供求的相互作用。

17.2 回报率的决定因素

这一节，我们将说明在"未来"商品市场上的供求如何作用以建立一个均衡的回报率。先从分析回报率与未来商品的价格之间的联系开始；然后，我们可以表明个人与企业是如何对这一价格作出反应的；最后，将这些因素综合到一起（如同我们对其他市场所作的分析那样），来说明未来商品均衡价格的决定并考察这一均衡的某些特征。

17.2.1 回报率与未来商品价格

在本章的大部分分析中，我们假定，只有两个时期可供考察——当前时期（以下标 0 表示）与下一时期（以下标 1 表示）。我们用 r 表示这两个时期之间的回报率（单期）。因此，上一节的单期定义为

$$r = \frac{\Delta c_1}{\Delta c_0} - 1 \tag{17.3}$$

这里，我们使用符号 Δ 表示两个时期内的消费量的变化。方程 17.3 可以写为

$$\frac{\Delta c_1}{\Delta c_0} = 1 + r \tag{17.4}$$

或

$$\frac{\Delta c_0}{\Delta c_1} = \frac{1}{(1 + r)} \tag{17.5}$$

在方程 17.5 的左边只表示了如果 c_1 要增加 1 个单位需要放弃的 c_0 的数量，即，该表达式表明了以 c_0 表示的 1 单位 c_1 的相对价格。因而，我们定义未来商品的价格有：①

定义

未来商品的价格。未来商品的相对价格（p_1）是为增加一单位未来消费而必须放弃的当前商品的数量。即

$$p_1 = \frac{\Delta c_0}{\Delta c_1} = \frac{1}{(1 + r)} \tag{17.6}$$

现在，我们将提出一种关于 p_1 的决定的供求分析。这样我们就可以有一个 r 的决定理论，即在简单模型中的回报率决定理论。

① 这个价格与第 15 章中介绍的折扣因子相同。

17.2.2 未来商品的需求

未来商品的需求理论是本书第 2 篇所提出的效用最大化模型的一个应用。此外，个人的效用取决于当前与未来的消费[即，效用 $= U(c_0, c_1)$]，而且他必须决定把当前的财富(W)如何分配给这两种商品。[①] 未用于当前消费的财富可以 r 的回报率用于投资以增加下一期的消费。与上述的情况一样，p_1 反映了未来消费的现时成本，而个人的预算约束如下

$$W = c_0 + p_1 c_1 \tag{17.7}$$

这一约束被显示在图 17.2 中。如果每个人都选择将其所有财富用于 c_0，则当前总消费将是 W，而在时期 2 就没有消费发生。相反，如果 $c_0 = 0$，则 $c_1 = W/p_1 = W(1+r)$。即，如果将所有财富都用于投资(回报率为 r)，则当前的财富在第 2 期将增至 $W(1+r)$。[②]

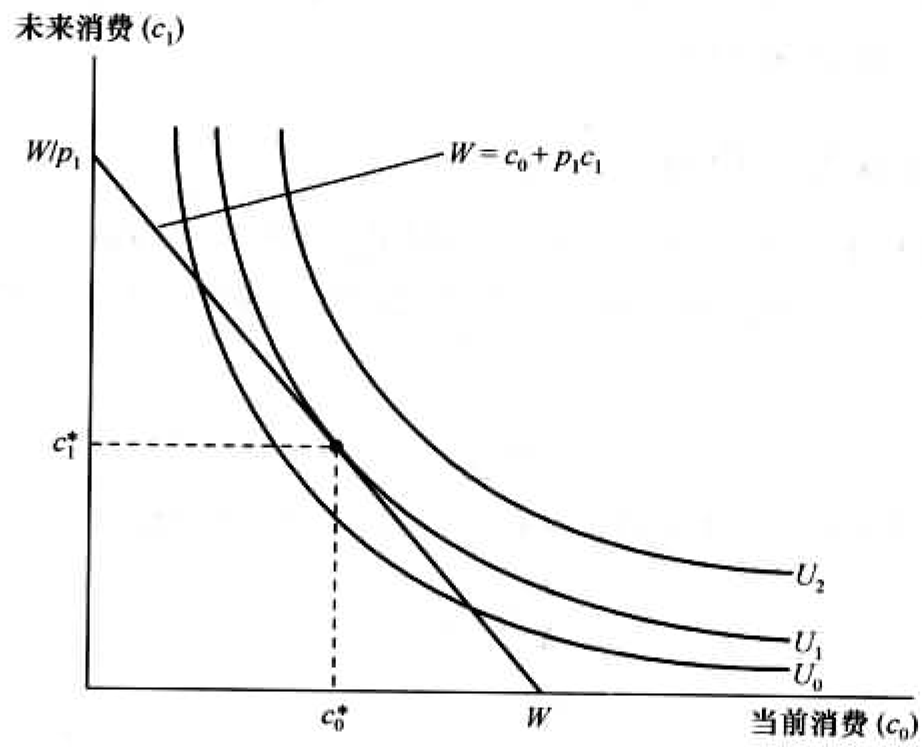


图 17.2　个人短期的效用最大化

当面临着短期预算约束为 $W = c_0 + p_1 c_1$ 时，个人将通过选择在当前消费 c_0^*，而在下一时期消费 c_1^* 来最大化其效用。p_1 的下降(回报率 r 的上升)将使得 c_1 上升，但是对 c_0 产生的结果却是不确定的。因为替代效应与收入效应在相反方向上起作用(假定 c_0 与 c_1 都是正常商品)。

17.2.3 效用最大化

图 17.2 将个人无差异曲线图(对 c_0 与 c_1)用到了预算约束中来，表明了效用的最大化。这里，效用最大化的点在(c_0^*, c_1^*)处。个人选择在当前消费 c_0^*，在下一期消费 $W - c_0^*$。未来消费可从预算约

---

① 关于个人在两个时期里都拥有收入的分析，参见练习题 17.1。

② 这一观察产生了一个与方程 17.7 所提供的预算约束不同的解释，它可写作

$$W = c_0 + \frac{c}{(1+r)}$$

这表明了如下事实，即 c_1 的"现值"进入了个人的当前预算约束。现值的概念将在本章的后半部分予以详细讨论。

束中获得

$$p_1 c_1^* = W - c_0^* \tag{17.8}$$

或

$$c_1^* = \frac{(W - c_0^*)}{p_1} \tag{17.9}$$

$$= (W - c_0^*)(1 + r) \tag{17.10}$$

也就是说，当前未被消费的财富$(W - c_0^*)$以回报率 r 投资于生产，并将在下一期产生 c_1^* 的消费。

例 17.1

短期间的不忍耐

个人在整个时期内的效用最大化的选择，显然是取决于他们对当前消费还是等待未来消费的价值判断。反映人们在选择中所表现出的不忍耐(不等到未来消费)的方法之一是假定在人们的头脑中，未来消费所提供的效用是要大打折扣的。例如，我们可以假定，在两个时期里消费的效用函数 $U(c)$ 是相同的(其中，$U'>0, U''<0$)，但是，在个人头脑中，时期 1 的效用被"时期偏好率"$1/(1+\delta)$(其中 $\delta>0$)打了折扣。如果短期间效用函数同样是可分析的(关于这一概念的详细讨论，参见第 6 章的扩展部分)，我们就有

$$U(c_0, c_1) = U(c_0) + \frac{1}{1+\delta}U(c_1) \tag{17.11}$$

在短期间预算约束下使上述函数最大化，有

$$W = c_0 + \frac{c_1}{1+r} \tag{17.12}$$

得到一个拉格朗日表达式

$$\mathscr{L} = U(c_0, c_1) + \lambda\left[W - c_0 - \frac{c_1}{1+r}\right] \tag{17.13}$$

最大化的一阶条件是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_0} &= U'(c_0) - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_1} &= \frac{1}{1+\delta}U'(c_1) - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= W - c_0 - \frac{c_1}{1+r} = 0
\end{aligned} \tag{17.14}$$

第一个式子与第二个式子相除并整理得①

① 方程 17.15 有时在期间效用最大化中被称为"欧拉方程"。一旦一个特殊的效用函数给定，它就表示出消费是怎样跨期变化的。

$$U'(c_0)=\frac{1+r}{1+\delta}U'(c_1) \tag{17.15}$$

因为消费的效用函数被假定为在两个时期内是相同的，我们可以得出结论，即如果 $r=\delta$，则 $c_0=c_1$；如果 $\delta>r$，则 $c_0>c_1$[因为要求 $U'(c_0)<U'(c_1)$，必须要求 $c_0>c_1$]；如果 $r>\delta$，则 $c_0<c_1$。因此，消费者的消费在0期至1期是增加还是减少就取决于他是否有耐心。即便一个消费者或许对现在的商品具有偏好($\delta>0$)，他仍可能在未来的消费大于当前的消费，如果储蓄所获得的回报率足够高的话。

请回答：如果两人的不忍耐程度相同，但面临的回报率不同，那么，哪一个人的 c_1 超过 c_0 的量多？

17.2.4 r 变动的效应

图17.2所显示的关于均衡的比较静态分析是很直观的。如果 p_1 下降(即 r 上升)，收入效应与替代效应将使 c_1 的需求增加，除非 c_1 是劣等品，而这种情况应是少见的。因此，c_1 的需求曲线将向下倾斜。r 的增加将有效地降低 c_1 的价格，因而其消费将增加。在图17.3中该需求曲线被标为 D。

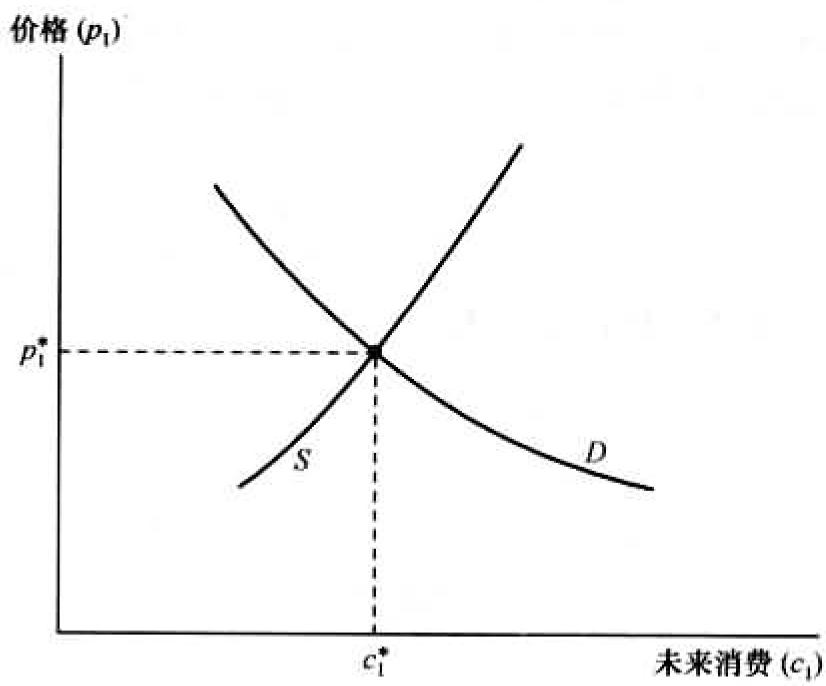


图 17.3　未来商品的均衡价格的决定

点(p_1^*, c_1^*)代表未来商品市场的均衡。未来商品的均衡价格通过方程17.16决定了回报率。

在我们的讨论离开个人的短期间决策之前，应当指出的是，我们的分析并未提供一个关于 $\partial c_0/\partial p_1$ 的符号的确切证明。在图17.2中，收入效应与替代效应在相反的方向起作用。因而肯定的预测难以作出。p_1 的下降会使个人用 c_1 来代替 c_0 的消费组合。但 p_1 的下降提高了财富的实际值，从而收入效应会使 c_0 与 c_1 都增加。与之有区别的是，图17.2提供的模型并不能作出一个肯定的预测，即当期财富积累(储蓄)的回报率将如何变化。高的 r 将产生替代效应，会导致更多的储蓄；而收入效应会导致较少的储蓄。因此，上述效应的最终结果将是一个实证的问题。

17.2.5 未来商品的供给

从某种意义上说，关于未来商品的供给分析是相当简单的。我们可以推论，未来商品相对价格的增加将导致企业生产增加，因为此时生产更多未来商品的收益会增加。图 17.3 以正斜率的供给曲线 S 反映了这一点。可以看出，正如我们以前对完全竞争的分析一样，这一供给曲线反映了当企业试图通过资本积累而将现在商品转化为未来商品时所经历的边际成本递增（或收益递减）的过程。

不幸的是，对资本积累性质的深入探讨变得越来越复杂，这一问题已困扰经济学家达百年之久。① 基本上，所有这些分析都在试图建立一个关于资本积累过程的坚实模型。但对我们的个人行为模型而言，这一问题并不存在，因为我们可以假设"市场"为个体行为者提供了一个回报率——从而个人可以采取不同行为以适应它。在本章后半部分中的厂商投资决策的讨论中，我们仍将遵循这一线索与思路。但是，为了建立一个完善的厂商资本积累模型，我们必须详尽地说明 c_0 是如何转变为 c_1 的，而这么做将使我们陷入十分复杂的资本理论的讨论中。作为一种替代，我们接受图 17.3 中所显示的正斜率的供给曲线及其形状在直观上是合理的这一假设。本章随后部分的绝大多数分析在一定程度上都是为了让读者相信这个假设是对的。

17.2.6 未来商品的均衡价格

图 17.3 所显示的市场均衡点位于点（p_1^*，c_1^*）处。在该点上，个人对未来商品的供求相等。而且一定数量的当期商品将被转化为资本积累，以便在未来生产 c_1^*。②

有许多理由可以预期 p_1 将小于 1，即生产一单位未来商品需要不到一单位的当前商品。正如图 17.1 中所示，或许可以认为，个人将因其等待而获得补偿。日常生活哲学（"一鸟在手胜过双鸟在林"，"只为今天而活"）与更多的现实状况（未来的不确定及人生的有限）表明个人在其消费决策中通常是不愿等待的。因此，图 17.3 所显示的这种资本积累只有当现在放弃的消费在某种程度是值得的时候才会发生。

认为 p_1 小于 1 还有一些供给方面的理由。这些理由涉及了这样一种思想，即资本积累是"生产性"的，放弃当前 1 单位的商品将产生更多的未来商品。关于资本投资是生产性的简单例子有植树以及酿酒等，护林者以及葡萄园的经营者"节欲"而不出卖其产品是因为他们相信，时间将使其产品更有价值。虽然，明显的事实是，现代工业社会中的资本积累比植树要复杂得多（譬如，考虑一个钢铁厂的建设以及电力发电系统的建立），但经济学家坚信，这两者的过程具有相似性。在建钢铁厂与建电站的情况下，运用当前商品进行投资，使得生产过程更长、更复杂了，因而也提高了生产中所用的其他资源的总体生产能力。

17.2.7 均衡回报率

现在我们通过以下公式定义回报率（r）与我们称之为未来商品价格的关系

---

① 关于该争论的讨论，参见 M. Blaug, *Economic Theory in Retrospect*, rev. Ed.（Homewood, Ill.：Richard D. Irwin, 1978），chap. 12。

② 这是最初由 I. Fisher 所阐述的相当简化的一种分析，参见 *The Rate of Interest*（New York：Macmillan, 1907）。

$$p_1^* = \frac{1}{1+r} \tag{17.16}$$

因为我们相信 p_1^* 将小于 1,回报率将为正。例如,如果 $p_1^* = 0.9$,r 将约等于 0.11,我们说资本积累的回报率约为 11%。通过节省 1 单位的当前消费,未来商品消费将增至 1.11 单位。回报率与 p_1 是衡量将当前商品转化为未来商品的等价方式。

17.2.8 回报率、真实利率与名义利率

迄今为止,本章中所分析的回报率概念有时与相关的真实利率概念是作为同义词来使用的。在此背景下,这两个概念都是指有关资本积累的真实回报率。必须将这一概念与金融市场中使用的名义利率的概念区分开。具体地说,如果总体价格水平被预期在两个时期内将上升 $\dot{p}_e$(即 $\dot{p}_e$ 为 0.1 意味着 10% 的通胀率),我们通过方程给出名义利率(R)

$$1 + R = (1 + r)(1 + \dot{p}_e) \tag{17.17}$$

因为一个未来贷款人将不仅要求补偿实际资本投资的机会成本(r)而且还要补偿一般价格水平($\dot{p}_e$)的变动所带来的损失。把方程 17.17 展开,有

$$1 + R = 1 + r + \dot{p}_e + r\dot{p}_e \tag{17.18}$$

假定 $r \cdot \dot{p}_e$ 很小,我们有下列近似值

$$R = r + \dot{p}_e \tag{17.19}$$

如果真实回报率为 4%(0.04),并且预期通胀率为 10%(0.10),则名义利率约为 14%(0.14)。因此,所观察到的名义利率与真实利率之间的差距可能会很大。

17.3 厂商对资本的需求

厂商对机器的租用也遵循第 9 章所推导出的利润最大化的原则。具体地说,在一个完全竞争的市场中,厂商选择使用的机器数量由以下原则决定:使用机器所获得的边际收益产量应准确地等于其市场的租金价格。在这一节中,我们先考察市场租金价格的决定,我们假定所有机器都是租来的。在本节的较后部分,我们将考察由于大多数厂商购买机器并将其持有到它们损坏为止,而不是租用机器来使用的情况。

17.3.1 市场租金价格率的决定

考虑一个厂商租借机器给其他厂商的情况。假定,厂商拥有一台机器(譬如说,一辆汽车或一台挖土机),其当前的市场价格为 p。厂商对于租用其机器的顾客将收取多少费用呢?机器的所有者面临着两类成本:机器的折旧成本和机会成本。所谓机会成本即将其资金耗费在机器上而不是用于投资以获得当前的回报率。如果假定每期折旧成本只是机器的市场价格的固定比例(d),并且真实利率由 r 给出,则机器所有者每一期的总成本为

$$pd + pr = p(r + d) \tag{17.20}$$

如果我们假定机器市场是完全竞争的，通过机器出租不可能获得长期利润。市场竞争将保证机器的每期租金价格恰好等于机器所有者的成本。于是，我们有如下基本结论

$$v = p(r + d) \tag{17.21}$$

竞争性租金价格是机器所有者必须付出的放弃利息与折旧成本的总和。例如，假设真实利率为5%（即0.05），实物折旧率为15%（0.15），再假定机器的当前价格为10000美元，于是，在这一简单模型中，机器所具有的年租金价格为2000[10000（0.05+0.15）]美元。其中500美元代表投资于机器的机会成本，其余1500美元则反映了折旧的实物成本。

17.3.2 机器折旧为零时的情况

如果机器折旧为零（$d=0$）的假设情形出现，则方程17.21将变成

$$\frac{v}{P} = r \tag{17.22}$$

这一方程表明，在一个均衡状态中，没有折旧可长期使用的资本就相当于一张无限期的债券（参见本章附录A），因此，它一定会“产生”市场回报率。作为机器价格之一的固定比例的租金价格一定等于r。如果$v/p>r$，则每个人都会立即去购买机器，因为出租机器将产生比在别处投资更高的回报率。类似地，如果$v/p<r$，则没有人愿意出租机器，因为在别处投资可以获得更高的回报。

17.3.3 机器所有权

迄今为止，我们的分析一直假设厂商租用所有其所要使用的机器。虽然这种租借在现实世界中时有发生（例如，许多厂商租借飞机、卡车、货车与计算机给别的厂商）。但厂商通常自己拥有机器。一个厂商会购买机器并雇用劳动力以进行生产。对机器的所有权使得资本的需求分析变得更为困难与复杂。但是，通过区别**存量（stock）**与**流量（flow）**，我们就能够表明资本需求与劳动需求间的相似性。

一个厂商通过运用**资本服务（capital services）**进行生产。这些服务是一个流量概念。与生产过程密切相关的是机器使用的时间量（如劳动时间那样）而不是机器本身。通常可以假定资本服务的流量与机器的存量是成比例的（如果1小时租用100台机器，则可提供100台机时的服务）；因而，这两类不同概念实际上就可以作为同义词运用。如果一个时期内，厂商确定了固定的机时数量，这通常意味着厂商确定了固定的机器数量。厂商对资本服务的需求同样也就是对资本的需求。①

完全竞争中的利润最大化厂商将选择使额外一个单位投入的边际收益产量等于其成本时的投入水平，这一结论对机时的需求同样成立。资本服务的成本由方程17.21中的租金率（v）给出。这一成本由厂商自己承担，不管它是在公开市场上租用的机器还是自己购买的机器。在前述的例子中，它是一个显性成本；而在后一个例子中，它却是一种隐性成本。因为厂商可以将机器租给别人，假如它选择这么做的话。在所有的情况下，机器使用的机会成本由市场租金率v所决定。所有权对于成本的决定是无关的。因此，我们可以运用以前的投入需求分析了。

---

① 在一段时期内，公司对于怎样密集使用一个资本的决策是可以进行分析的，这经常是对于商业周期的研究的一部分。

资本需求。一个面临着完全竞争的资本租用市场的利润最大化厂商，将在边际收益产量(MRP_k)等于市场租金价格 v 的点上运用额外的资本投入。在完全竞争下，租金率将既反映折旧成本又反映机会成本。因此，我们有

$$MRP_k = v = p(r + d) \tag{17.23}$$

17.3.4 投资理论

如果一个厂商遵循方程 17.23 的利润最大化原则，发现它需要超出现存机器存量所能提供的更多的资本服务，它将有两种选择：第一，厂商可以租用额外的机器，这与其雇用额外劳动的决策是相同的；第二，厂商可以购买新机器以满足需要。第二种选择通常是被普遍运用的，我们用**投资(investment)**这一术语来特指对设备的购买。

投资需求在宏观经济理论中是总需求的一个重要组成部分，通常假定投资需求是对工厂与设备(也就是机器)的需求，它与利率或我们所说的回报率是负相关的。运用我们在本章中所进行的分析，我们可以证明这一论断。利率(r)的下降，在其他条件不变的情况下，将使资本的租金价格下降(方程 17.21)。由于所放弃的利息代表机器所有者的隐性成本，所以 r 的下降实际上降低了资本投入的价格(亦即租金率)。v 的这种下降使得资本成为一种相对便宜的投入，这将使厂商增加其资本的使用量。

17.4 投资决策的折现值方法

当一个厂商购买一台机器时，它实际上购买了一个未来时期的净收益流。为决定是否要购买机器，厂商必须计算该收益流的现值。[①] 只有如此，厂商才能准确地估计所放弃的利息收入的影响。

考察一个厂商是否要购买一台特定机器的决策过程。假定机器会持续工作 n 年，并且每年都给其所有者提供一个货币收益流(即边际收益产量)。令 R 代表在第 i 年的收入，如果 r 为现在的利息率，而且该利率水平将在其后的 n 年中保持不变，则机器所有者从机器上所得到的净收益流的折现值为

$$PDV = \frac{R_1}{1 + r} + \frac{R_2}{(1 + r)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1 + r)^n} \tag{17.24}$$

这一折现值代表了由机器所提供的支付流的总价值，当这些支付发生在不同年份时，如果这一支付流的折现值 PDV 超过了机器的价格，则该厂商或其他类似厂商就应当购买机器，即便将厂商原本能从资金中获得利息收益(假如不购买)这一因素也考虑进去，依然能够保证机器的回报超过其当前价格。另一方面，如果 $p > PDV$，则厂商最好选择能保证回报率为 r 的其他投资渠道。因为，如果考虑到放弃的利息，则机器所带来的回报还不能支付其价格。因此，在一个竞争市场上的唯一均衡点为

① 参见本章附录中对于折现值的进一步讨论。

机器价格等于该机器所提供的净收益的折现值。只有在此条件下，才不会存在对机器的过度需求和过度供给。因此，市场均衡要求

$$p = PDV = \frac{R_1}{1+r} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+r)^n} \tag{17.25}$$

现在，我们将运用这一条件证明在两种情况下，投资的折现值标准如何导致本章前述的均衡条件。

17.4.1 简单情况

首先假定机器是无限期存在的，且边际收益产量（即 R_i）每年是相同的。相同的回报也等于机器的租金价格（v）。因为那是其他厂商在任何时期为了使用机器而愿意支付的价格。有了这些简化的假设后，我们就可以把从对机器的所有权中得到的折现值写为

$$\begin{aligned} PDV &= \frac{v}{(1+r)} + \frac{v}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{v}{(1+r)^n} + \cdots \\ &= v \cdot \left(\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} + \cdots\right) \\ &= v \cdot \left(\frac{1}{1-1/(1+r)} - 1\right) \\ &= v \cdot \left(\frac{1+r}{r} - 1\right) \\ &= v \cdot \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{17.26}$$

因为在均衡状态下 $p = PDV$，因此有

$$p = v \cdot \frac{1}{r} \tag{17.27}$$

或

$$\frac{v}{p} = r \tag{17.28}$$

这正如方程 17.22 所示。对于这一情况而言，由折现值标准所得出的结论与本章前述的结论相同。

17.4.2 一般情形

方程 17.21 可以从更为一般的情况中推出，在这里，机器的租金率随时间而变化并且存在折旧。这一分析可以简单地运用连续时间来进行。假设一项新机器的租金价格给定为 $v(s)$。假定机器的折旧率 d[①] 采取指数形式。因此，机器的租金率（以及边际收益产量）随着时间而下降。在 s 年时，于

① 在这种折旧中，机器被假定为在每单位时间以固定速度“蒸发”掉，这种模型在很多方面与物理学上的放射性衰减假说很相似。物质折旧还有其他可能的方式，这只是易于作数学处理的方式。

区分物质折旧的概念（影响机器生产能力的折旧）与会计折旧的概念是很重要的。只有在所选择的会计折旧方法影响到源于机器的利润的税率时，后一个概念才是重要的。然而，从经济观点来看，机器的成本是一种沉没成本；任何关于“冲销”这一成本的选择都具有一定的武断性。

t 年之前购买的旧机器的净租金价格为

$$v(s)e^{-d(s-t)} \tag{17.29}$$

因为 $s-t$ 是机器折旧的时间。例如，假定一台机器购买于 2000 年，其在 2005 年的净租金将等于一台新机器在 2005 年[$v(2005)$]的贴现值(贴现因子为 e^{-5d})减去机器在过去 5 年里的折旧值。

如果厂商考虑在 t 年时购买的是新的机器，则应当将所有这些净租金值折现。在 s 年的净租金现值折现到 t 年(如果利率为 r)，有

$$e^{-r(s-t)}v(s)e^{-d(s-t)} = e^{(r+d)t}v(s)e^{-(r+d)s} \tag{17.30}$$

由于从购买机器到得到净租金，$(s-t)$ 年又过去了。因此，在 t 年购买的一台机器的折现值就是这些现值的和(积分)。这个积分应当包括从 t 年(机器购买时)直到未来所有年，有

$$PDV(t) = \int_t^{\infty} e^{(r+d)t}v(s)e^{-(r+d)s}\mathrm{d}s \tag{17.31}$$

因为在均衡状态时，机器的价格在 t 年[$p(t)$]将等于这一现值，我们有下列基本方程

$$p(t) = \int_t^{\infty} e^{(r+d)t}v(s)e^{-(r+d)s}\mathrm{d}s \tag{17.32}$$

这一令人望而生畏的方程实际上只是方程 17.25 的一个更复杂的形式而已，它可以用来推导出方程 17.21。首先将方程改写为

$$p(t) = e^{(r+d)t}\int_t^{\infty} v(s)e^{-(r+d)s}\mathrm{d}s \tag{17.33}$$

对 t 求导

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} &= (r+d)e^{(r+d)t}\int_t^{\infty} v(s)e^{-(r+d)s}\mathrm{d}s - e^{(r+d)t}v(t)e^{-(r+d)t} \\ &= (r+d)p(t) - v(t)\end{aligned} \tag{17.34}$$

因此

$$v(t) = (r+d)p(t) - \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} \tag{17.35}$$

这一结果与方程 17.21 中所显示结果相比，除了增加了一项 $-\mathrm{d}p(t)/\mathrm{d}t$ 以外，其余都相同。这一表达式的经济含义是：它代表了机器所有者所获得的资本利得。例如，如果预期机器价格要上升，则机器所有者或许会接受低于 $(r+d)p$ 的价格作为租金价格。① 另一方面，如果预期机器价格要下降[$\mathrm{d}p(t)/\mathrm{d}t<0$]，所有者则会要求比方程 17.21 所确定的更多的租金。如果预期机器价格在整个时期都保持不变，则 $\mathrm{d}p(t)/\mathrm{d}t=0$，上述两个方程就是相同的。这一分析的结论表明在不同时间里的机器价格、由该机器所提供的未来利润流与机器的当前租金价格之间存在着一定的关系。

① 例如，升值较快的郊区的房子的租金通常会低于房东的实际成本，因为房东还会从房子的价格升值中获利。

例 17.2

伐木

作为 PDV 标准的一个例子，考虑一个林业工人决定何时砍伐一棵正在生长的树的例子。假定树在时期 t 的价值为 $f(t)$［其中 $f'(t)>0, f''(t)<0$］，初始投资为 l 美元，用来支付给植树的工人。再假定（连续的）市场利率为 r，植树之初，树木所有者的利润折现值为

$$PDV(t)=e^{-rt}f(t)-l \tag{17.36}$$

这只是收益（现值）与成本之差。对伐木者来说，他的决策就是选择时期 t 以最大化该值。通常，这个值可通过微分求得

$$\frac{\mathrm{d}PDV(t)}{\mathrm{d}t}=e^{-rt}f'(t)-re^{-rt}f(t)=0 \tag{17.37}$$

或两边同除以 e^{-rt}，有

$$f'(t)-rf(t)=0 \tag{17.38}$$

因此

$$r=\frac{f'(t)}{f(t)} \tag{17.39}$$

这一最优条件有两个特征值得注意。第一，最初的劳动投入成本与微分无关。该成本是一种与利润最大化决策不相干的"沉没成本"。第二，方程 17.39 可以被解释为当利率等于树木的生长率时，就到了伐树的季节。这个结果靠直觉也可获得。如果树木的生长比当前的利率水平增长得还要快，则其所有者就应当将其资金投资于植树，因为树木可以提供最佳的回报率。另一方面，如果树木生长得没有现行利率增长得快，则树木应当被砍伐掉，出售树木所获得的资金应当投资于回报率为 r 的其他地方。

方程 17.39 只是最大化的一个必要条件，通过对方程 17.38 再次求导就可以很容易地看出，在 t 期所选择的价值水平上也要求

$$f''(t)-rf'(t)<0 \tag{17.40}$$

这样一阶条件才代表一个真正的最大化。由于我们假定 $f'(t)>0$（树木永远生长）以及 $f''(t)<0$（生长率随着时间而放慢），所以上述条件自然成立。

一个数值解。假设树木按照方程

$$f(t)=e^{0.4\sqrt{t}} \tag{17.41}$$

生长，则该方程总是呈现出一个正的增长率［$f'(t)>0$］。而且，由于

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{0.2}{\sqrt{t}} \tag{17.42}$$

而且因为树木的生长率随时间递减，如果真实利率，比如说是 0.04，则我们可以求解最优收获树龄为

$$r=0.04=\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{0.2}{\sqrt{t}} \tag{17.43}$$

或

$$\sqrt{t} = \frac{0.2}{0.04} = 5$$

因此

$$t^* = 25 \tag{17.44}$$

树龄不到25年时，树木每年以超过4%的速度生长，因此，最优的决策就是允许树木继续生长。但是，如果 $t>25$，则树木每年生长率低于4%，因此林场主可以找到更好的投资方式——或许是种植新的树木。

利率的变化。如果真实利率增至5%，方程17.43将变成

$$r = 0.05 = \frac{0.2}{\sqrt{t}} \tag{17.45}$$

最优收获树龄将为

$$t^* = \left(\frac{0.2}{0.05}\right)^2 = 16 \tag{17.46}$$

较高的真实利率将通过促使林场主选择更早的收获树龄而抑制了对植树的投资。①

请回答：假定所有价格（包括树木价格）每年都增长10%，这一变化将如何改变该问题中的最优收获树龄？

17.5 跨期的最优资源配置

资本理论与资源的跨时期配置密切相关，我们证明了厂商与个人如何留出一部分当前消费作为资本积累，以在未来时期生产更多的产出。许多经济问题都属于这一类型：经济主体必须作出决策增加或减少某些存量水平，而这些决策将既影响当前福利又影响未来福利。在本节，我们将考察这种决策将如何以最优的方式（也就是以效用最大化的形式）作出。

17.5.1 最优控制的数学模型

对于跨时期的资源配置问题而言，有两个变量至关重要：能被分配的存量（k）与被运用以增加或减少 k 的控制变量（c）。对于我们目前的讨论来说，视 k 为资本存量，视 c 为储蓄率或总的净投资是有益的，但在经济学上存在许多其他解释。因为这些变量将明显地在不同时期取不同的值，它们可以被记为时间的函数[$k(t)$ 与 $c(t)$]。不过，对于多数的分析而言，并不明确地规定其函数的变化取决于时间将是方便的。

k 与 c 的选择将使有关的经济主体在跨时期的过程中获得收益。任何时期的收益将被标为 $U(k,c,t)$。经济代理人的目标是最大化下式

① 想了解更多与此相关的经济学问题，参见练习题17.4和17.5。

$$\int_0^T U(k,c,t)\,\mathrm{d}t \tag{17.47}$$

这里，T 代表从决策作出之后经历的时期。

这一问题中有两类约束。第一类是表明 k 随时间而变化的约束

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = f(k,c,t) \tag{17.48}$$

此处的式子表明 k 的变化将取决于 k 自身、决策变量(c)，以及(可能)观察到的特定时点。为避免烦琐的标记，我们将采用简单的表示变量随时期而变化的形式，即对 x 而言，其时间导数为 $\dot{x}$，于是，式 17.48 中给出的约束条件将被重写为

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \dot{k} = f(k,c,t) \tag{17.49}$$

这一最大化问题的第二类约束涉及确定 k 的最初及最终条件。在问题的开始，k 将作为一个历史数据而存在，并且是不能改变的；在计划期的末尾，k 也可能被赋予一些其他的要求(例如，要求 k 为零)。我们将把这些终点的约束写为

$$\begin{aligned} k(0) &= k_0 \\ k(T) &= k_T \end{aligned} \tag{17.50}$$

这里，常量 k_0 与 k_T 的值将取决于所要分析的问题的性质。

17.5.2 最大化原理：一种直觉的方法

我们所要讨论的动态最优化问题要求我们必须找到变量 k 与 c 的一条最优时间路径。这是一个比在本书中所讨论的其他最大化问题要复杂得多的问题。因为其他问题只要求解出唯一的一个均衡点，而不是要求解均衡点的时间路径。我们的求解策略是，先将动态问题转化成一个单期问题，然后再证明简化归并到任意时点的单期问题的解也是原来动态问题的解。

为将动态问题转化成一个单期问题，我们将从这里开始：认识到当前的任何一个关于存量 k 如何变化的决定将会影响当前及未来的福利。运用 c 以影响 k 的当前变化的最优选择应当使 k 变化的当前成本与 k 变化的未来收益相等，反之亦然。为在此过程中能获得一些帮助，我们引入拉格朗日乘数 $\lambda(t)$，它可以被解释为由 k 的一个单位的变化而引起的未来收益的边际变化。因而，$\lambda(t)$ 是存量 k 在时间 t 的边际价值的测度指标。这一变量(如同在最大化问题中)可使当前决策的成本与收益相等的解存在。

通过这种将动态问题转换成一个单期问题的方法，它还要求对动态环境下的解予以重新构造，这一构造包括证明 $\lambda(t)$ 如何随时间变化以便：(1) 使 k 的变化在最优路径上发生，(2) 保证满足 k 的终点条件(方程 17.50)。这一终点解将提供一个关于 k 与 c 的时间路径，在这个 k 与 c 值下，将使方程 17.47 所给出的积分最大化。作为一个额外的特征，最优解同样将为乘子 λ 提供一条时间路径以表明 k 的边际值(即其价格)如何随时间而变化。

17.5.3 数学展开

为将上一小节的内容作一标准的阐述，我们引入乘子 $\lambda(t)$ 作为存量 k 在任何时点边际值的测度

指标。于是,存量总值由 $\lambda(t)k$ 给出,该值的变化率(即资本存量中的增值与亏损)由下式给出

$$\frac{d\lambda(t)k}{dt}=\lambda\frac{dk}{dt}+k\frac{d\lambda}{dt}=\lambda\dot{k}+k\dot{\lambda} \tag{17.51}$$

因此,任何时期的效用总净值(包括 $\dot{k}$ 的当前变化的所有效应——它允许这一单期问题可以反映多期问题)由下式给出

$$H=U(k,c,t)+\lambda\dot{k}+k\dot{\lambda} \tag{17.52}$$

这里,"H"表明与标准的动态最优化理论中常用的"汉密尔顿方程"相似。[1] 方程 H 与拉格朗日表达式具有一定的相似之处,后者是我们在本书中求解其他最大化问题时所反复使用的。

由于 λ 与 k 不取决于 c 的当前值,选择 c 以使 H 最大化的一阶条件是

$$\frac{\partial H}{\partial c}=\frac{\partial U(k,c,t)}{dc}+\lambda\frac{\partial\dot{k}}{\partial c}=0 \tag{17.53}$$

重写这个一阶条件有

$$\frac{\partial U}{\partial c}=-\lambda\frac{\partial\dot{k}}{\partial c} \tag{17.54}$$

简言之,所选择的最优的 c 将是使得通过 c 的增加所增加的 U 的边际量将恰与由这种增加所引起的存量 k 下降的效应相等(这种下降由 λ 的变化测度)。

通过选择 c 已最大化了我们所扩大了的单期效用水平,现在有必要专门考虑 k 的边际值(即 λ)将如何随时间而变化。我们可以通过考察能最大化 H 的 k 值来解决这个问题。当然,实际上 k 在任何时点上都不是一个选择变量——其值由过去的历史决定,但通过假设 k 处于最优水平,我们可以推导出 λ 将为何值。H 对 k 求导,有

$$\frac{\partial H}{\partial k}=\frac{\partial U}{\partial k}+\lambda\frac{\partial\dot{k}}{\partial k}+\dot{\lambda}=0 \tag{17.55}$$

这是最大化的一阶条件,整理后,有

$$-\dot{\lambda}=\frac{\partial U}{\partial k}+\lambda\frac{\partial\dot{k}}{\partial k} \tag{17.56}$$

这一表达式可以被解释为:k 的边际价值的下降必然等于增加 U 或 $\dot{k}$ 所带来的 k 的净生产力。k 值的变化与 k 对现在与未来收益之和的作用呈现相反的方向。

将两个最优条件合并,我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c}&=\frac{\partial U}{\partial c}+\lambda\frac{\partial\dot{k}}{\partial c}=0\\\frac{\partial H}{\partial k}&=\frac{\partial U}{\partial k}+\lambda\frac{\partial\dot{k}}{\partial k}+\dot{\lambda}=0\end{aligned} \tag{17.57}$$

这表明了 c 与 λ 应当如何随时间而调整,以使 k 处于其最优的路径上。[2] 一旦方程系统开始运

---

① 通常的汉密尔顿方程省略了方程 17.52 的最后一项。更多讨论见本章最后的推荐阅读文献。

② 这只是最大化的一阶条件,此处,我们不讨论二阶条件。

动，则相关变量的整个时间路径就可以决定。为提供一个全面的解，有必要保证 k 的路径是可行的，并遵循方程 17.50 所给出的终点条件。这通常可以通过将 c 与 λ 的值调整到适宜的水平来实现。这些调整在一些应用性的动态最优化问题中是非常重要的，但是，在此处我们不准备详细讨论它。

例 17.3

可耗竭资源的使用

对 20 世纪 70 年代能源价格上升的关注促使经济学家重新考察关于自然资源存量的最优利用的理论。其中特别引人关注的问题是，仅仅考察市场的当前供求的决策是否能满足未来消费者的需要。由于这一问题涉及一些固定存量的资源（如石油、煤炭与铁矿）消耗的最优时间模式问题，我们可以运用已推导出来的控制论工具来分析它。[1]

假定资源的（反）需求函数由下式给出

$$p = p(c) \tag{17.58}$$

这里，p 为市场价格，c 为某一时期总消费量。对任何产出水平 c，消费的总效用由下式给出

$$U(c) = \int_0^c p(x)\,\mathrm{d}x \tag{17.59}$$

如果时间偏好率为 r，资源的最优使用模式将最大化下式

$$\int_0^T e^{-rt} U(c)\,\mathrm{d}t \tag{17.60}$$

这一问题中也有两个约束条件。第一，既然资源存量是固定的，那么该存量一定随着消费而逐期减少

$$\dot{k} = -c \tag{17.61}$$

除了这一 k 的变化规则外，资源存量还必须遵循终点条件，即

$$k(0) = k_0$$

及

$$k(T) = k_T \tag{17.62}$$

通常，初始存量 k_0 将代表现在已知的资源存量，而最终存量 k_T 将等于零（假定地球上剩下的资源将不再有利用价值）。

建立汉密尔顿方程

$$\begin{aligned} H &= e^{-rt}(U) + \lambda\dot{k} + \dot{\lambda}k \\ &= e^{-rt}(U) - \lambda c + \dot{\lambda}k \end{aligned} \tag{17.63}$$

最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-rt}\frac{\partial U}{\partial c} - \lambda = 0 \tag{17.64}$$

[1] 此处推导的模型可以被迅速地推广到可再生性资源如树木或鱼类等的情况中。

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda} = 0 \tag{17.65}$$

第二个方程表明了这一问题的一个重要结论，即资源的影子价格(λ)应在不同时期均保持不变。因为我们是在配置一种固定的存量，所以在任何路径中，某一期的资源的影子价格上升可以通过减少影子价格高的时期里的资源消费，增加影子价格低的时期里的资源消费来使资源利用得以改善(即可提供更多的效用)。①

最优价格路径。为解释第一个条件，可以利用方程17.59，有

$$\frac{\partial U}{\partial c} = p(c) \tag{17.66}$$

这一条件与第2篇中的效用最大化模型的大多数情形相似。将其代入方程17.64，得

$$e^{-rt}p(c) = \lambda \tag{17.67}$$

从以前的讨论中我们知道λ必为常量，该方程要求所选择的c的路径必须使每一期的市场价格以r的速度上升，这很类似于在竞争市场中出现的结果。对任何资源在均衡状态时进行的替代性投资，其价格必将以等于利率的速率增加，任何价格上升速率的下降将促使投资者将其资金投入到其他资本形式中，而任何的价格上升过快则将吸引所有可利用的资金投资于该资源。这一结果表明：至少在简单情况下，竞争性市场将会有效地跨时期配置自然资源。

数值解释。在自然资源情况下，终点约束条件通常运用与终期存量相关的考察方法来加以处理。如果资源存量全都耗尽，则要求终期价格$p(T)$能够使需求在该价格水平为零。在大多数应用分析中，这种价格水平可以通过以下方式获得，即对该资源制定一足够高的价格，以使其替代品完全占据了市场。例如，如果我们已知，到2038年如果石油价格超过50美元一桶，则太阳能将全部替代石油能源，那么，50美元将为终期价格。综合运用这一价格以及方程17.67，就可计算出价格的全部时间路径[包括初始价格$p(0)$]，如果真实利率为3%，那么，2005年的均衡价格将为$50 \cdot e^{-0.03 \cdot (33)} = 18.58$。

资源定价问题的最后一个应当予以关注的方面是，在整个过程中，我们都假定开发利用成本为零，但这并不意味着资源的使用本身是无成本的。资源的当前消费意味着未来消费的减少，而且这一成本实际上并不少于实际的生产成本。有些作者将这一性质(与资源存量的固定性相关)的成本归结为“使用者的成本”或“稀缺成本”。这些成本可由资源存量的影子价格即λ来加以测度。

请回答：假设开采石油是需要成本的。这会使得本例中的计算发生怎样的变化？

① 最先认识到这一要点的是H. Hotelling，参见其开拓性的论文“The Economics of Exhaustible Resources”，*Journal of Political Economy* 39(April 1931)：137—175。

小 结

本章考察了资本理论的几个方面并强调了该理论与厂商的资本投入的需求理论进行综合的重要性。主要的结论是:

- 资本的积累代表了为了未来的消费而牺牲今天的消费。回报率表示在什么情况下这个交易可以达成。
- 推导回报率的方法与推导均衡价格的方法颇为相似。均衡回报率为正,既反映出个人对当前商品的偏好胜过对未来商品的偏好,也反映出资本积累的正的实物生产力。
- 回报率(真实利率)是与资本所有权相联系的总成本的一个重要组成部分。它是资本的市场租金率 v 的重要决定因素。
- 资本投资的未来回报必须以现行真实利率予以折现,这种现值概念的使用提供了研究厂商投资决策的另一种方法。
- 资本积累(以及其他的动态问题)能够通过最优控制理论来研究。这种模型经常会产生竞争性的结果。

练 习 题

17.1 一个人拥有固定财富(W),并把它分配在两时期的消费中,该人的效用函数由下式给出

$$U(c_1,c_2)$$

预算约束为

$$W = c_1 + \frac{c_2}{1+r}$$

这里,r 是单期利率。

a. 证明:如果个人在此预算约束下要最大化其效用,则他应当选择 MRS(c_1 对 c_2)$=1+r$ 时的 c_1 与 c_2 的组合。

b. 证明:$\partial c_2/\partial r \geqslant 0$,但是 $\partial c_1/\partial r$ 的符号不确定。如果 $\partial c_1/\partial r$ 为负,你能说出 c_2 的需求价格弹性是怎样的(有弹性的还是缺乏弹性的)吗?

c. 如果个人在每一期都获得收入(y_1 与 y_2),并使预算约束为

$$y_1 - c_1 + \frac{y_2 - c_2}{1+r} = 0$$

则你对 b 问题的结论将作怎样的修正?

17.2 假定一个人希望工作 40 年后退休,并再活 20 年。再假设个人收入每年以 3% 的速度增加,利率也是 3%(总体价格水平不变),则他应当在每个工作年份里将收入的多大(固定)比例用于储蓄,才能保证在退休后获得退休前收入的 60%?

17.3 苏格兰威士忌随时间增加而增值。第 0 年的 1 美元威士忌在第 t 年价值 $V(t)=e^{2\sqrt{t}-0.15t}$ 美元。如果利率为 5%,苏格兰威士忌的拥有者应在多少年后卖出酒,以使销售的 PDV 最大化?

17.4 如果在例 17.2 中,假设在时期 0 时用 1 单位劳动就可以植树。一棵树的木材价值在 t 期为 $f(t)$,如果市场工资率为 w,即期利率为 r,则该生产过程的 PDV 是多少?应当如何选择 t 以使 PDV 最大化?

a. 如果最优的 t 值为 t^*，试证明没有纯利润的完全竞争的条件将要求

$$w = e^{-rt}f(t^*)$$

你能解释这一表达式的含义吗？

b. t^* 期以前出售的树木将不会被立即伐掉。对于新的林场主来说，让树木继续生长到 t^* 是有价值的。证明树龄为 u 年的树木的价格是 we^{ru}，它将超过对应于每一个 u 值的树木的价值[$f(u)$]（除了 $u=t^*$ 时，这时二者将相等）。

c. 假定土地所有者拥有一片"平衡"的树林，即他拥有树龄从 0 到 t^* 的树木各一棵。这片树林的价值是多大？[提示：它是所有树木价值之和。]

d. 如果树林价值为 V，证明：V 的即期利息（即 $r \cdot V$）等于所有者在每期所获得的"利润"，其中"利润"是指出售一棵完全成熟的树所得收益[$f(t^*)$]减去种植一颗新树的成本（w）。这一结果表明，借款以购买一片树林时绝对不会有纯利润存在，因为在每一期支付的利息恰好等于砍伐一棵成熟的树所得的收益。

17.5 练习题 17.4 的计算中假设经营一片林场就是决定什么时候去砍树。但是经营一片林场也包括重新种植，这是可以用模型表示的。为了实现这个目的，假设一个林场主正在考虑用成本 w 种植一棵树；在 t^* 时期收获这棵树，种植另外一棵，如此下去。这项活动的利润折现是

$$V = -w + e^{-rt}[f(t) - w] + e^{-r2t}[f(t) - w]\cdots e^{-rnt}[f(t) - w] + \cdots$$

a. 证明这项有计划的种植活动的总的价值由下式给出

$$V = \frac{f(t) - w}{e^{rt} - 1} - w$$

b. 找到最大化 V 的值 t。证明这个值是方程

$$f'(t^*) = rf(t^*) + rV(t^*)$$

的解。

c. 解释 b 的结果——它们怎么样反映了对于"投人"时间的最佳使用？为什么在 b 中 t^* 的值与例 17.2 中的不同。

d. 假设树的生长（用美元衡量）服从逻辑函数

$$f(t) = 50/(1 + e^{10 - 0.1t})$$

从树木中得到木材的最大价值是多少？

e. 如果树的生长使用 d 中所给的等式，如果 $r = 0.05$，$w = 0$，则最佳种植周期是多长时间？这个周期是否可以实现最大可持续收益？

f. 如果 r 跌到 0.04，最优周期变为多少？

17.6 美国的公司利润税为 35%，该问题是关于税收与厂商投资决策的相互作用的：

a. 假定（事实并非如此）用于征税的利润是我们所称的纯经济利润。这种利润被征税将对投资决策产生什么影响？

b. 实际上，用于征税的利润被定义为

$$\pi' = pq - wl - \text{折旧}$$

这里，折旧由政府与行业的指导方针所决定，以求得在机器可使用的时间里分配其成本。如果折旧等于实际物质损耗且厂商处于长期竞争均衡，则对 π' 征税会怎样影响厂商的资本投入决策？

c. 在 b 的条件下，加速折旧政策的采用（即在机器使用年限的早期，计提超过机器实际物质损耗的折旧，而在后期计提较少的折旧）将会对资本的使用产生什么影响？

d. 在 c 的条件下，对公司利润课征的税收的下降将会对资本的使用产生什

么影响？

17.7 一个人寿保险推销员说："在你这个年纪购买一张 100 000 美元终身寿险保单比一张定期保单要好得多。持有终身寿险保单，你只在前 4 年里每年支付 2 000 美元，但在你生命的以后的日子里就无须支付了。一张定期保单需要你每年支付 400 美元，而且要一直持续下去。如果你再活上 35 年，你只需对终身保单支付 8 000 美元，但对定期保单则要支付 14 000 美元。所以，终身保单无疑是笔更好的交易。"

假定推销员的寿命预期是正确的，你将如何评价他的论断？更确切地说，假定利率为 10%，请计算两张保单的保费成本的贴现值。

17.8 假定一个人拥有 W 美元以分配于本期消费(c_0)与下期消费(c_1)，利率为 r。

a. 用图形显示这个人的最初均衡并且表明当期储蓄的总值($W-c_0$)；

b. 假定这个人在作出他的储蓄决策（购买单期债券）之后，利率降至 r'。这会改变他的预算约束吗？请标明新的效用最大化位置。讨论这个人的境况改进如何能被解释为是他的最初债券购买的"资本利得"的结果。

c. 假定税收当局决定根据资本利得的量而征收收入税。如果所有这种所得在"发生增值"时以 c_0 测度，请表明如何测算这些所得。将此值称为 G_1。

d. 假定用"实现了的"东西测度资本利得，即资本利得被定义为只包括那部分转换成现金以购买额外 c_0 的债券。请说明对这些实现了的所得应如何加以测度。将此值称为 G_2。

e. 发展一种测度由于 r 下降导致效用真实增加的方法，用 c_0 来测度。将这一真实的资本利得称为 G_3。证明 $G_3 < G_2 < G_1$。如果现行政策只对实现了的资本利得征税，那么，你会得出什么结论？

[注：这一问题选自 J. Whalley, "Capital Gains Taxation and Interest Rate Changes", *National Tax Journal* (March 1979):87—91。]

17.9 例 17.3 假设石油在一个竞争的市场上生产。假设其他的条件不变，如果石油被一家公司垄断，最优的资源使用将会发生怎样的变化？

17.10 最优控制理论能够被用来概括例 17.1 所包含的短期消费选择的模型。考虑下面的简单的生命周期模型：个人每期收到工资 w 和投入资本的回报。令 $k=$ 资本，$r=$ 市场利率（个人可以借或贷）。在每一期，个人选择消费(c)来最大化

$$\int_0^T U(c)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

在这里 p 是个人对于时间的偏好。给定这些假设，这个问题的短期预算约束是

$$\dot{k} = w + rk - c$$

约束条件为最初和最终 k 的形式 $k(0)=k(T)=0$。

a. 这个问题最大化的必要条件是什么？

b. 在什么条件下最优消费会跨期上升？什么时候消费会跨期下降？

c. 假设 $U(c)=\ln(c)$，最优的消费模式是什么？

d. 更加一般地，假设

$$U(c)=\frac{c^{\delta}}{\delta}\delta<1$$

最优的消费时间方案是什么？这与 c 中的特殊例子有何差别？

e. 这个问题中最优的消费时间方案怎样决定了这个人在生命中不同时点的财富？

推荐阅读文献

Blaug, M. *Economic Theory in Retrospect*, rev. ed., Chap. 12. Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1978.

该书对奥地利学派的资本理论作了一个很好的评论，把资本积累过程概念化了。

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory*, 2nd ed. New York, Oxford University Press 1990.

该书用很简单的形式描述最优控制理论方法。

Dorfman, R. "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory". *American Economic Review* 59 (December 1969): 817—831.

适用本章的这种方法来检验最优的资本积累。很棒的直观介绍。

Hotelling, H. "The Economics of Exhaustible Resources". *Journal of Political Economy* 39 (April 1931): 137—175.

在自然资源配置方面比较基础的文章，既分析了竞争的情况，又分析了垄断的情况。

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press, 1995.

第 20 章提供了关于定义跨期均衡的论题。对于"世代交迭模型"的讨论尤其有用。

Ramsey, F. P. "A Mathematical Theory of Saving". *Economic Journal* 38 (December 1928): 542—559.

最早使用微积分来解决经济问题的书籍之一。

Solow R. M. *Capital Theory and the Rate of Return*. Amsterdam: North-Holland, 1964.

该书谈到了资本的性质，十分好读。

Sydsaeter, K., A. Strom, and P. Berck. *Economists' Mathematical Manual*, 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

第 27 章提供了金融和经济增长理论中许多很有价值的公式。

附录　复利的数学计算

本附录的目的是把涉及复利的一些简单的数学成果综合到一起。这些成果在许多经济问题中都有所应用，包括从宏观经济政策到种植圣诞树的最优方式。

我们假定每一时期，譬如说一年，都存在当前通行的市场利率 i。假定利率对未来所有的时期是确定不变的。[①] 如果 1 美元以 i 进行投资，利率是复合计算的（即过去的利息在未来也要获得利息）。在时期 1 的期末，1 美元将变成

$$1\text{ 美元} \times (1+i)$$

在时期 2 的期末，1 美元将变成

① 固定 i 的假设显然是不现实的，因为考虑到利率的短期变化会使得记号变得更加复杂而并不能使之增加等量的概念性知识，这种分析在此处不作讨论。在许多情况下，利率变化的一般情形只是下述观念的一个简单应用，即多期利率可被视为几个单期利率的复合而已。如果我们用 r_{ij} 表示 i 与 j 期之间通行的利率（其中 $i<j$），则有

$$1+r_{ij}=(1+r_{i,i+1})(1+r_{i+1,i+2})\cdots(1+r_{j-1,j})$$

$$1\text{ 美元}\times(1+i)\times(1+i)=1\text{ 美元}\times(1+i)^2$$

在时期 n 的期末,1 美元将变成

$$1\text{ 美元}\times(1+i)^n$$

类似地,N 美元将增至

$$N\text{ 美元}\times(1+i)^n$$

17A.1 折现值

从现在开始的 1 个时期后支付的 1 美元的现值是

$$\frac{1\text{ 美元}}{(1+i)}$$

这是一个人为在时期 1 的期末得到 1 美元而现在愿意支付的数量。类似地,从现在开始到第 n 期期末支付的 1 美元的现值是

$$\frac{1\text{ 美元}}{(1+i)^n}$$

第 n 期期末支付的 N 美元的现值是

$$\frac{N\text{ 美元}}{(1+i)^n}$$

支付流 $N_0,N_1,N_2,\cdots,N_n$ 的**折现值(present discounted value)**(下标表示在何期进行支付)为

$$PDV=N_0+\frac{N_1}{(1+i)}+\frac{N_2}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{N_n}{(1+i)^n} \tag{17A.1}$$

PDV 代表了个人为获得未来收入流 $N_0,N_1,N_2,\cdots,N_n$ 而愿意支付的数量,它也代表了如果现在进行投资以增加其收益的投资数量。

17A.1.1 年金与永久年金

年金(annuity)是从下一期开始,承诺在 n 期里的每一期都支付 N 美元,这一合约的 PDV 是

$$PDV=\frac{N}{(1+i)}+\frac{N}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{N}{(1+i)^n} \tag{17A.2}$$

令 $\delta=1/(1+i)$,有

$$\begin{aligned}PDV&=N(\delta+\delta^2+\cdots+\delta^n)\\&=N\delta(1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n-1})\\&=N\delta\left(\frac{1-\delta^n}{1-\delta}\right)\end{aligned} \tag{17A.3}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\delta^n=0$$

因此,对一个无限期的年金而言,有

$$\text{无限期年金的 }PDV=\lim_{n\to\infty}PDV=N\delta\left(\frac{1}{1-\delta}\right) \tag{17A.4}$$

这里，根据 δ 的定义，有

$$= N\left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1}{1-1/(1+i)}\right)$$

$$= N\left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1+i}{i}\right) = \frac{N}{i} \tag{17A.5}$$

该例中的无限期年金有时被称为**永久年金(perpetuity)**或是**统一公债(consol)**。公式表明，如果想永远都每期获得 N 美元，则必须投资 N 美元$/i$，因为这一数量的货币将在每期获得 N 美元的利息($i \cdot N$ 美元$/i = N$ 美元)。

17A.1.2 债券的特例

一张 n 期**债券(bond)**是从下一时期开始共 n 期，每期支付 N 美元的利息，同时在第 n 期期末归还债券本金(面值)的承诺。如果债券的本金是 P 美元(美国债券市场通常为 1 000 美元)，则债券的折现值为

$$PDV = \frac{N}{(1+i)} + \frac{N}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{N}{(1+i)^n} + \frac{P}{(1+i)^n} \tag{17A.6}$$

仍令 $\delta = 1/(1+i)$，于是有

$$PDV = N\delta + N\delta^2 + \cdots + (N+P)\delta^n \tag{17A.7}$$

方程 17A.7 可以换一个角度来思考。假定我们知道现行的债券出售价格，譬如说为 B。因此，我们就可以寻找使债券的 PDV 等于 B 的 i 值。为寻找 i 值，我们有

$$B = PDV = N\delta + N\delta^2 + \cdots + (N+P)\delta^n \tag{17A.8}$$

因为 B、N 与 P 是已知的，于是我们就可以求出该方程的解，即 i。① 满足该方程的 i 被称为债券的**收益(yield)**，它也是测度债券回报的最佳指标。债券的收益既包括债券的利息，又包括期初价格与期末价格之差。

注意，随着 i 增长，PDV 下降。这是一种构造债券价格(PDV)与利率(收益)间负相关关系的精确方法。

17A.2 连续时间

到此为止，这一附录处理了离散时间——分析不同时期的情况。通常，处理连续时间更方便，在此情况下，投资的利息是瞬时复利且随着时间而平滑增长的。这便利了极大化分析，因为这更利于方程的求导。许多金融中介机构(如储蓄银行)近些年已经采用了连续利率的计算方法。

假定 i 是每年的(名义)利率水平，这一名义利率每六个月要进行一次复利的计算。因此，在第一年末，1 美元投资将增至

$$1 \text{ 美元} \times \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 \tag{17A.9}$$

注意，这比以单利 i 进行投资要好，因为它将对利息支付利息，即

---

① 因为该方程实际上是一个 n 项多项式，它有几个解(根)。只有一个解与债券表中的或计算出的数值对应，别的解或是想象的，或是没有根据的。在现在的例子中，只有一个真正的解。

$$\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 > (1+i) \tag{17A.10}$$

考虑这一过程的极限——对每期的名义 i 值，考虑如果 i 实际上被复合计息 n 次所能实现的值，令 $n\to\infty$：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n \tag{17A.11}$$

这一极限存在并且为 e^i，其中 e 是自然对数的底（e 的值约为 2.72），注意 $e^i>(1+i)$——所以持有连续复利比持有单利要好得多。

我们可以寻找出与连续复利 r 相等价的单利 i。对 r 求解方程

$$e^r=(1+i) \tag{17A.12}$$

于是有

$$r=\ln(1+i) \tag{17A.13}$$

运用这一方程式就可以很简便地将离散时间的利率转化成连续利率。如果 i 是以每年的水平来测算，则 r 是每年的连续水平。表 17A.1 表明了与所选择的连续复利率（r）相对应的有效的年利率水平（i）。[①] 与 17A.1 类似的表格通常出现在储蓄银行的窗口上，以宣传其账户的真正收益。

表 17A.1　对应于连续复利的有效的年利率

连续复利率（%）	有效的年率（%）
3.0	3.05
4.0	4.08
5.0	5.13
5.5	5.65
6.0	6.18
6.5	6.72
7.0	7.25
8.0	8.33
9.0	9.42
10.0	10.52

17A.2.1　连续增长

以连续利率 r 进行投资的 1 美元在 T 年后将变成

$$V=1\text{ 美元}\cdot e^{rT} \tag{17A.14}$$

这是一个极为方便的公式。例如，可以很容易地表明 V 的瞬时变化率，通过 r 可以得到

$$\text{变化率}=\frac{\mathrm{d}V/\mathrm{d}t}{V}=\frac{re^{rt}}{e^{rt}}=r \tag{17A.15}$$

① 计算表 17A.1 中的数字时，应使用利率的小数形式而不是百分比形式（譬如，5% 的利率在方程 17A.12 中以 0.05 的形式加以应用）。

对于计算贴现现值，连续利率也是很方便的。假定我们希望计算 1 美元从现在起到 T 年以后的 PDV，可由下式给出①

$$\frac{1\text{ 美元}}{e^{rT}} = 1\text{ 美元} \times e^{-rT} \tag{17A.16}$$

这一计算的对数形式与本附录中所使用的离散时间分析是相同的：未来的美元要比现在的廉价。

连续贴现的一个有趣应用是从现在(0 期)到时期 T 中每期支付 1 美元的折现值的计算。因为存在着无限的支付期限，所以在计算这一结果时就必须运用积分

$$PDV = \int_0^T e^{-rt}\,dt \tag{17A.17}$$

上式表明，我们把 0 期到 T 期的所有贴现的美元加总了起来。

这一定积分的值为

$$PDV = \left.\frac{-e^{-rt}}{r}\right|_0^T = \frac{-e^{-rT}}{r} + \frac{1}{r} \tag{17A.18}$$

如果我们令 T 趋于无穷大，则该值为

$$PDV = \frac{1}{r} \tag{17A.19}$$

这与离散情形中的无限期的年金情况相同。

连续贴现的计算对测算跨期支付收入流的 PDV 值格外有用。假定 $f(t)$ 代表在 t 期内支付的美元，于是时期 T 支付额的 PDV 为

$$e^{-rt}f(t) \tag{17A.20}$$

从现在(0 年)到 T 年的所有收入流的 PDV 是

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt \tag{17A.21}$$

通常，经济代理人将寻求使某个方程(如上述给出的方程 17A.21)最大化。运用连续时间使该选择的分析直截了当，因为可以运用求导数的方法解决最大化问题。

17A.2.2 久期

使用连续时间的概念也能够澄清一系列否则可能会比较困难的财务概念。例如，假设我们希望知道在给定收入流 $f(t)$ 的情况之下，一个人得到一定的收入平均需要花多长时间。该收入流的现值由下式给出

$$V = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt \tag{17A.22}$$

将这个值对折扣因子 e^{-r} 求微分得到

$$\frac{\partial V}{\partial e^{-r}} = \int_0^T tf(t)e^{-r(t-1)}\,dt \tag{17A.23}$$

这个变化的弹性由下式给出

① 在物理学中这个方程发生在放射性衰减的例子里，如果 1 个单位的物质连续以速率 δ 衰减，则 T 期以后，将剩下 $e^{-\delta T}$。无论 T 值多大，这一数值永远不会为零。这一方法同样可以用于资本理论中的折旧。

$$e=\frac{\partial V}{\partial e^{-r}}\cdot\frac{e^{-r}}{V}=\frac{\int_0^T tf(t)e^{-rt}\mathrm{d}t}{V} \tag{17A.24}$$

因此,这一支付流的现值相对于每年折扣因子的弹性(类似于债券价格对于利率变动的弹性)是用时间权重的现值比例计算出来的。因此,从概念上讲,这个弹性代表了一个人为了得到上述支付所必须等待的平均时间。在金融领域,这个概念被定义为支付流的**久期(duration)**。这是一个衡量支付流现值相对于利率变动的易变性的重要尺度。[①]

① 例如,8 年的久期意味着一个人应该等待 8 年来得到一项支付。也意味着这个支付流现值对于折扣因子的弹性为 8。因为折扣因子的利率弹性为 $-r$,支付流的利率弹性为 $-8r$。例如,如果 $r=0.05$,支付流现值的利率弹性是 -0.4。

第7篇

不确定性、信息和外部性

在这部分我们来研究导致市场有效分配资源失败的经济因素。在第18章中我们将讨论不确定性下的经济理论。这部分主要集中解释了为什么人们通常是风险厌恶的，并因此支付一些费用来规避风险。特别是，人们会去买保险，当保险产品合理定价时，它可以完全规避人们面临的风险。

在第19章中，我们用不确定性条件下的行为理论来说明不完全信息对劳动市场的损害。这里主要研究保险市场，我们将证明，当保险的买卖双方间存在信息不对称时会产生道德风险（投保人的防范措施少于最优数量）和逆向选择（低风险的人将买不到有效数量的保险）。这一章还讨论了代理问题，当具备较多信息的经济当事人代替具备较少信息的经济当事人做决策时就会产生代理问题。

在第20章中，我们研究外部性导致的资源分配失效问题。它是指一个人或一个厂商的行为影响了其他人，而价格并没有体现出足够的信息以保证资源的有效配置。该章将考察两个外部性问题的实例。一种是传统的外部性（如空气或水的污染），我们将说明如何对这些影响建立模型，如何评价可能的改善措施的效果。另一

种是由公共物品,即无排他性无竞争性的物品所导致的外部性。类似地,我们将讨论这种物品引发的问题的性质,并评价可能的解决方案。

最后,在第21章,我们将考察一些政治程序的模型,政治程序也可以用类似于本书其他地方处理私人市场的方法来建立模型。但政治均衡理论的发展程度比起市场均衡理论来说要差得多,所以这里的分析只是建议性的。

第 18 章　不确定性和风险厌恶

本章我们将考察一些人们在面临不确定性时作决策要考虑的基本因素。我们将扩展以前的效用概念,并将其应用在有随机性的情形。我们用这个扩大的效用概念来考察"风险厌恶"的概念,即人们为什么通常不喜欢不确定性,并且愿意支付一些费用来减少他们面临的不确定性。

18.1　概率与期望值

对不确定性情况下个人行为的研究和数学中的概率与统计学方面的研究有着共同的历史渊源,即它们都试图去理解(并试图获得)"好运气"。例如,有关简单的掷硬币赌博的研究无论是在数学上,还是在说明博弈所体现的某种人类行为特征上都取得了长足的进展。在这种游戏中产生的两个统计学概念:"概率"与"期望值",这两个概念在本章中将经常出现。

大致说来,一个重复①事件发生的**概率(probability)**就是这一事件出现的相对频率。例如,掷一枚均匀硬币时得到正面朝上的概率是 1/2,这意味着我们可以期望:当掷一枚均匀硬币的次数很多时,出现正面朝上的次数大约是所有投掷次数的一半。同样地,掷一次骰子出现 2 的概率是 1/6,即大约每掷六次,就会出现一次 2。

假定抽彩提供 n 个奖项 $x_1,x_2,\cdots,x_n$(其中某些会是 0,甚至是负数),而得奖的概率依次是 π_1,$\pi_2,\cdots,\pi_n$。如果假定每个参与者只能得一项奖,则一定有

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i = 1 \tag{18.1}$$

方程 18.1 简洁地说明了我们罗列出的抽彩的所有可能结果,并且其中的一种情况最终会发生。为了对这种抽彩中的平均结果提供一个度量指标,我们定义期望值如下:

① 对于重复事件,概率是一个客观定义的概念。在不重复的事件上个人可以指定主观概率。在大多数情形下,我们不区分这两种概率。在本章的扩展部分我们将进一步介绍一些统计上的其他概念。

定义

期望值

对于设置 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 这 n 个奖，且得奖的概率依次为 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 的抽彩，其期望值为①

$$\text{期望值} = E(X) = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \cdots + \pi_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \tag{18.2}$$

抽彩的期望值是奖金的加权之和。其中，权数是各自的概率。简单地说，这是参与者平均会赢得的奖金的大小。例如，假定 Jones 与 Smith 同意掷一次硬币。如果正面朝上，Jones 付给 Smith 1 美元；如果背面朝上，Smith 付给 Jones 1 美元。从 Smith 的角度看，这个赌博有两笔奖金：正面朝上，$x_1 = +1$ 美元；背面朝上，$x_2 = -1$ 美元，这里的负号表示 Smith 要掏钱。从 Jones 的角度看，除了表示结果的支付方向相反以外，整个赌博几乎是相同的。于是，赌博的期望值为

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0 \tag{18.3}$$

这个赌博的期望值是 0。如果该赌博被重复了很多次，那么，无论哪个参与者都不可能遥遥领先。

现在假定赌博的奖金有一点改变，（还是从 Smith 的角度看）$x_1 = 10$ 美元，$x_2 = -1$ 美元。如果正面朝上，Smith 赢 10 美元，反之，他则只输掉 1 美元。此时，赌博的期望值变为

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(10) + \frac{1}{2}(-1) = 5 - 0.5 = 4.5(\text{美元}) \tag{18.4}$$

如果这个赌博重复很多次，Smith 肯定会成为一个大赢家。事实上，Smith 大概愿意付一些钱给 Jones 以获得进行这种赌博的权利。期望值为 0 或参与费用等于期望值（这里的期望值是 4.5 美元）的赌博都被称为**公平赌博（fair games）**。普遍可以观察到的情况是，在许多情况下人们会拒绝进行公平赌博。这一点是理解不确定性理论发展的核心，也是下一节要讨论的内容。

18.2 公平赌博与期望效用假说

人们一般不愿意进行公平赌博。② 虽然如果钱数很少，有时我也同意掷一枚硬币；但如果是一掷千金，我会毫不犹豫地拒绝。同样，人们也通常愿意花些小钱去玩儿一些诸如州政府举办的，实际上并不公平的抽彩，但却不愿花大价钱去进行那些有风险但公平的赌博。

① 如果研究的情况中，结果是连续的（例如，当非常精确地度量股票价格变化时），那么，我们就要对上述定义略作修改。如果随机事件（x）的某一结果落在某一小区间（dx）的概率为 $f(x)dx$，则方程 18.1 就要被修正为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$。在这种情况下，$x$ 的期望值由公式 $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 决定。

在许多情况下（例如，当 x 符合正态分布），对于上述期望值的处理就会比在方程 18.2 所表示的离散情况下要容易得多。参见为进一步说明所做的扩展。

② 我们假定在此所讨论的赌博除了得奖之外不会产生什么效用，因此，关于多人“不公平”赌注的赌博的观察并不能推翻这种说法。相反，可以合理地假设这些人从与赌博相关的事件中得到了一些效用。这样，就可以从概念上区分赌博问题的消费方面与纯冒险的方面。

18.2.1 圣彼得堡悖论

一个有说服力的例子是“圣彼得堡悖论”，18 世纪数学家丹尼尔·贝努利(Daniel Bernoulli)首先对它进行了严格的研究。[①] 在圣彼得堡悖论中，提出了这样一个赌博：掷硬币直到出现正面为止。如果在第 n 次才第一次出现正面，则参与者可以得到 2^n 美元。这个赌博的结果在数目上是不确定的(硬币可以从开始一直被掷到世界末日也不出现正面，虽然这种结果发生的概率很小)，不过，开始时的一些结果很容易被写出来。如果第 i 次掷硬币首次出现正面，x_i 代表奖金数，则

$$x_1 = 2,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = 8,\quad \cdots,\quad x_n = 2^n \tag{18.5}$$

在第 i 次投掷时首次得到正面的概率是 $\left(\frac{1}{2}\right)^i$；因为这也是得到 $(i-1)$ 次反面，然后 1 次正面的概率。因此，方程 18.5 所确定的奖金的概率便为

$$\pi_1 = \frac{1}{2},\quad \pi_2 = \frac{1}{4},\quad \pi_3 = \frac{1}{8},\quad \cdots,\quad \pi_n = \frac{1}{2^n} \tag{18.6}$$

圣彼得堡悖论中的赌博的期望值是无限大的

$$\text{期望值} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \infty \tag{18.7}$$

然而，人们认真想一下，就会认为没有什么人会花很多的钱(更不会多到无穷)去进行这种赌博。如果我参加这个赌博只收 10 亿美元，尽管 10 亿美元肯定仍少于该赌博的期望值，但我确信没人愿意与我玩儿。于是，这就是一个悖论：在某种意义上，贝努利的赌博不值其(无穷的)期望值。

18.2.2 期望效用

贝努利对这个悖论的解答是认为个人并不直接关心赌博的美元值，而是关注这些美元提供的效用。如果随着收入的增加，收入的边际效用下降，那么，圣彼得堡的赌博就会收敛于某一有限的**期望效用(expected utility)**值，这个值是参与者为得到赌博权而愿意支付的数量。由于期望效用值代表赌博对个人的价值的大小，所以，贝努利把这个期望效用值定义为赌博的“心理价值”。也由于效用的增加不像奖金增加得那样迅速，所以，赌博的心理价值可能会低于其货币期望值。

例 18.1

贝努利对悖论的解答

如贝努利所设，假定在圣彼得堡悖论中每个奖项的效用由下式确定

$$U(x_i) = \ln(x_i) \tag{18.8}$$

这个自然对数效用函数服从边际效用递减规律(即 $U' > 0$，但 $U'' < 0$)，并且该赌博的期望效用值会收敛于一个有限的数值

① 贝努利的原文已被重印为：D. Bernoulli, “Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk,” *Econometrica* 22 (January 1954): 23—36。

$$\text{期望效用} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(x)_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln (2^i) \tag{18.9}$$

对该表达式进行处理可以得到赌博的期望效用值为1.39。① 这样，具有此类效用函数的个人就会愿意投入最多可以产生1.39单位效用（大约4美元的财富能提供这么大的效用）的资源去购买赌博的权利。假定由圣彼得堡悖论承诺的非常大量的奖金是边际效用递减的，这样，就使贝努利有可能得出对悖论的解答。

请回答：贝努利的解答真正解决了这个悖论吗？你如何来重新定义赌博中的奖金，使得即使使用对数形式的效用函数，赌博仍会产生无限的期望效用？

18.3 冯·诺伊曼-摩根斯坦定理

约翰·冯·诺伊曼（John von Neumann）与奥斯卡·摩根斯坦（Oscar Morgenstern）在其著作《博弈论与经济行为》中，建立了研究在不确定性情况下个人经济行为的数学模型。② 为了理解个人之间的相互作用，有必要首先考察"赌博"中参与者的动机。由于在不确定性情况下个人依照期望效用进行选择的假说在直觉上是"合理的"，因此这两位作者试图表明这一假说可以从更为基本的"理性"行为公理中推出。这些公理代表了这两位作者对个人选择理论基础的归纳，以使其适应不确定性的情况。虽然这些公理大多数乍看上去都很有道理，但在论及它们是否站得住脚时，却被提出成堆的质疑。不过，在此我们不探讨这些问题。③

18.3.1 冯·诺伊曼-摩根斯坦效用指数

首先，假定通过参与一个赌博，一个人会赢得 n 种可能的奖金。这些奖金由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示，并且越靠后的奖金额越高。这样，x_1 就是这个人最不愿意得到的奖金数，而 x_n 则是最吸引人的奖金数。现在为这两种极端的奖金数指定任意的效用值。例如，为了方便起见，指定

$$\begin{aligned} U(x_1) &= 0 \\ U(x_n) &= 1 \end{aligned} \tag{18.10}$$

不过，指定其他任何一对效用数值也是可以的。④ 运用这两个效用值，冯·诺伊曼-摩根斯坦定理表明，存在一种合理的方式为其他所有可能得到的奖金确定一个特定的效用值。假定我们选择一个奖

① 证明：期望效用 $= \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i \cdot \ln 2 = \ln 2 \sum_{i=1}^{\infty} i/2^i$。这个无穷级数等于2.0。这样，期望效用 $= 2\ln 2 = 1.39$。

② J. von Neumann 与 O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1944). 在附录中讨论了不确定性情况下的合理性公理。

③ 关于对冯·诺伊曼-摩根斯坦公理的争论中提出的一些问题的讨论，参见 Mark J. Machina, "Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved", *Journal of Economic Perspectives* (Summer 1987): 121—154。

④ 冯·诺伊曼-摩根斯坦效用指数的坐标原点和取值范围可以任意规定，即，对于一个冯·诺伊曼-摩根斯坦效用指数作线性变换，我们认为它还是同一个东西。注意这比效用函数的限制要更严格，后者可以对任意的单调映射变换保持不变。

金，比如说 x_i。请考虑下面的试验：请一个人确定概率 π_i，使他(她)认为确定地得到 x_i 和以 π_i 的概率得到 x_n，以 $1-\pi_i$ 的概率得到 x_1 的赌博是无差异的。存在这样一个概率似乎是合理的(尽管在冯·诺伊曼-摩根斯坦的研究中，这是一个有问题的假定)：假定赌博中赚到的所提供的最高奖金的概率足够高，那么，此人应该就会认为这个赌博与一个确定性的较少的奖金是无差异的。似乎同样合理的是，当该人对奖金 x_i 的渴望越大，他确定的 π_i 就越高；x_i 越好，就需要提供更大的赢得 x_n 的机会让这个人乐意放弃确定的 x_i 而参与赌博。这样，概率 π_i 就代表了对奖金 x_i 的吸引力大小的一种度量。事实上，冯·诺伊曼-摩根斯坦的方法就是把 x_i 的效用定义为与其同样吸引人的赌博的期望效用，即

$$U(x_i) = \pi_i \cdot U(x_n) + (1-\pi_i) \cdot U(x_i) \tag{18.11}$$

由于我们在方程 18.10 中标度的选择，有

$$U(x_i) = \pi_i \cdot 1 + (1-\pi_i) \cdot 0 = \pi_i \tag{18.12}$$

选定最高与最低奖金的效用值后，我们可以得到任何其他奖金的效用。根据上面的选择，一个奖金的效用就是当个人认为其与一个赌博等价时，该赌博中赢得最高奖金的概率。效用数值的选择是任意的。任何两个数都可以被用来构建这个效用标度。我们最初的选择(方程 18.10)是较方便的一个。

18.3.2 期望效用最大化

与方程 18.10 中代表的原点与标度的选择一致，我们假定概率 π_i 代表了每一奖金 x_i 的效用。请特别注意，$\pi_1=0, \pi_n=1$，其他的效用值在这两个极端的值中间。用这个效用值，我们可以证明“理性的”个人会基于他们的期望“效用”(也就是说，基于这些冯·诺伊曼-摩根斯坦效用指数的期望值)作决策。

例如，请考虑两个赌博。一个赌博以概率 q 提供 x_2，以概率 $(1-q)$ 提供 x_3。另一个赌博以概率 t 提供 x_5，以概率 $(1-t)$ 提供 x_6。我们希望证明，当且仅当第 1 个赌博的期望效用超过第 2 个赌博的时候，个人才会选择第 1 个赌博。现在，对于这两个赌博，有

$$\begin{aligned} \text{期望效用}(1) &= q \cdot U(x_2) + (1-q) \cdot U(x_3) \\ \text{期望效用}(2) &= t \cdot U(x_5) + (1-t) \cdot U(x_6) \end{aligned} \tag{18.13}$$

代入效用指数(即，π_2 是 x_2 的“效用”，等等)，得出

$$\begin{aligned} \text{期望效用}(1) &= q \cdot \pi_2 + (1-q) \cdot \pi_3 \\ \text{期望效用}(2) &= t \cdot \pi_5 + (1-t) \cdot \pi_6 \end{aligned} \tag{18.14}$$

我们希望证明，当且仅当

$$q \cdot \pi_2 + (1-q) \cdot \pi_3 > t \cdot \pi_5 + (1-t) \cdot \pi_6 \tag{18.15}$$

个人才会选择第 1 个赌博，而不是第 2 个赌博。

为了说明这一点，请回忆一下效用指数的定义。个人认为在固定的 x_2 与保证以概率 $(1-\pi_2)$ 提供 x_1、以 π_2 的概率提供 x_n 的赌博之间是无差异的。于是我们可以将方程 18.14 中所有效用替代为只涉及 x_1 与 x_n 的赌博(请注意：即便个人认为它们是无差异的，但这种替代的可进行性本身还是冯·诺伊曼-摩根斯坦公理中一个主要的值得探究的假定)。经过一些繁杂的代数计算之后，我们可以得出，第 1 个赌博与以 $q\pi_2+(1-q)\pi_3$ 的概率提供 x_n 的赌博等价，第 2 个赌博与以 $t\pi_5+(1-$

$t)\pi_6$ 的概率提供 x_n 的赌博等价。个人将会选择以较高的概率赢得最高奖金的那一个赌博。这样，当且仅当

$$q\pi_2 + (1-q)\pi_3 > t\pi_5 + (1-t)\pi_6 \tag{18.16}$$

他(她)才会选择第 1 个赌博。这正是我们在方程 18.15 中所要表达的内容。这样，我们就说明了个人会选择能提供最高水平期望(冯·诺伊曼-摩根斯坦)效用的赌博。现在，可以充分利用这一结论。该结论可以概括如下：

最优化原理

期望效用最大化。在不确定性情况下，如果个人服从冯·诺伊曼-摩根斯坦行为公理，那么他们就会按照使冯·诺伊曼-摩根斯坦效用指数的期望值最大化的原则来行动。

18.4 风险厌恶

两张彩票在货币上的期望值可以相同，但风险却可能不同。例如，赌注为 1 美元的掷硬币赌博与赌注为 1 000 美元的掷硬币赌博都是公平赌博，期望值也相同(都是 0)。但是，在某种意义上后者比前者更“有风险”，也更少有人愿意参与输赢都是 1 000 美元的这种赌博。本节的目的，就是要讨论“有风险”这个词的含义，并解释广义的风险厌恶现象。

风险(risk)这个词指的是某些不确定行为结果的变动性。① 如果变动性很小，则该行为约等于是一件确定的事件。不必使用更准确的变动性的概念，我们就可以说明为什么人们在对期望值相同的两个赌博进行选择的时候，通常会选择那个收益变动性较小的一个。从直觉上，隐藏在这后面的原因是：我们通常假定在奖金变大时，从额外的奖金(即财富)中所得到的边际效用会变小。为赌 1 000 美元而掷硬币，如果赢了，得到的效用相对要小；而如果输了，损失的效用却较大。但只为 1 美元进行打赌就“无关紧要”，赢了所得到的效用与输了所损失的效用大体相互平衡。②

18.4.1 风险厌恶与公平赌博

图 18.1 说明了这一论点。在这里，W^* 代表一个人当前的财富，$U(W)$ 是反映个人对不同财富水平感受如何的冯·诺伊曼-摩根斯坦指数。$U(W)$ 是关于 W 的凹函数，反映了边际效用递减的假定。即假设随着财富总量的增加，多得到一个单位的美元所带来的喜悦的增加越来越少。现在，再假定个人面对两个公平的赌博：一半对一半的概率赢或是输 h 美元；或者一半对一半的概率赢或是输 $2h$ 美元。当前财富的效用是 $U(W^*)$。如果这个人参与第 1 个赌博的期望效用为 $U^h(W^*)$，有

$$U^h(W^*) = \frac{1}{2}U(W^* + h) + \frac{1}{2}U(W^* - h) \tag{18.17}$$

---

① 通常，“方差”这个统计概念常被用来代表风险。参见例 18.3 和本章的扩展部分。

② 关于风险厌恶的另外一个，也是更为一般的定义是，对于任何有风险的财富 W，有 $E[U(W)] < U[E(W)]$。边际效用递减保证了这个条件。

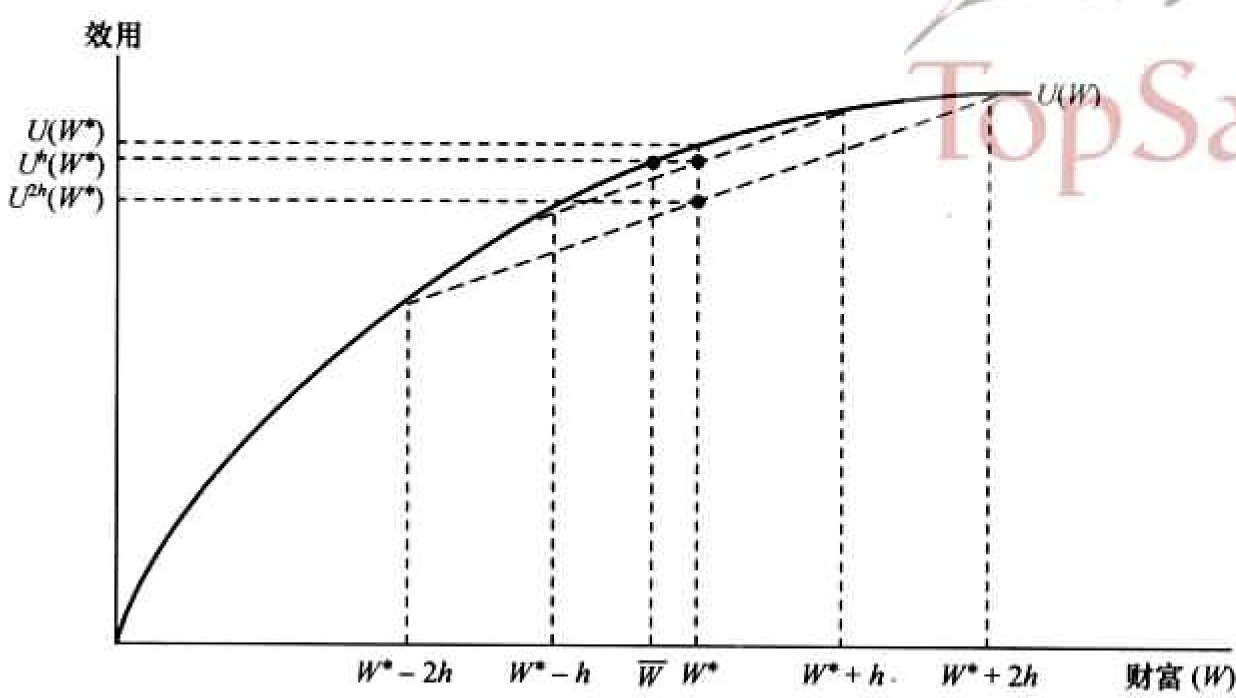


图 18.1　来自两个变动性不同的公平赌博中的财富效用

如果一个人的财富效用函数是凹的(即表现出财富的边际效用递减),他(她)就会拒绝进行公平赌博。例如,在一个一半对一半的概率赢或是输 h 美元的赌博中,参与这个赌博得到的期望效用[$U^h(W^*)$]就会比拒绝这个赌博得到的效用小。其理由为:对这种人来说,赢 h 美元比输 h 美元的意义要小。

如果他(她)参与第 2 个赌博的期望效用为 $U^{2h}(W^*)$,有

$$U^{2h}(W^*) = \frac{1}{2}U(W^* + 2h) + \frac{1}{2}U(W^* - 2h) \tag{18.18}$$

在这个公式中,在几何上显而易见有[①]

$$U(W^*) > U^h(W^*) > U^{2h}(W^*) \tag{18.19}$$

因此,个人会偏好当前的财富胜于偏好公平赌博得到的财富,类似地,个人偏好小额赌博得到的财富胜于偏好大额赌博得到的财富。其理由就在于,赢得赌注所带来的喜悦要小于他(她)输掉赌注所受到的伤害。虽然,在期望值的意义上奖金是相等的。但是,在效用的意义上,赢钱所致边际效用低于输钱所致边际损失。

18.4.2　风险厌恶与保险

事实上,个人可能愿意为避免参与赌博而有所花费。设一定的财富 $\overline{W}$ 所提供的效用与参与第 1 个赌博时的效用是相同的,那么个人就会愿意支付最高为 $W^* - \overline{W}$ 的数量来避免参与赌博,这无疑就解释了人们为什么要购买保险。他们愿意放弃一个数额不大且固定的量(保险费)去避免他们要面对的有风险的结果的出现。例如,当一个人为了防止车祸而支付保险金时,他(她)就得到了一旦车祸发生可以得到修车赔偿的保证。这种保险的广泛利用似乎意味着对风险的厌恶是相当普遍的。这样,我们就引出了下述定义:

---

① 为了看到为什么赌注 h 和赌注 $2h$ 的期望效用如前所述的那样,请注意这些期望效用就是简单地从想要的结果和不想要的结果中得到的效用的平均值。由于 W^* 位于 $W^* + h$ 与 $W^* - h$ 中间,所以,U^h 也就位于 $U(W^* + h)$ 与 $U(W^* - h)$ 的中间。

定义

风险厌恶。拒绝公平赌博的人被认为是风险厌恶型的。如果一个人的财富的边际效用是递减的，那么，他(她)就是风险厌恶型的。他们会愿意为避免接受公平赌博而有所花费。

例 18.2

愿意购买保险

为了说明风险厌恶与保险之间的关系，请考虑一个当前拥有 10 万美元财富的人的情况，这个人明年有 25% 的可能性会丢失价值 2 万美元的汽车。同样假定此人的冯·诺伊曼–摩根斯坦效用指数是对数关系的，即 $U(W)=\ln(W)$。

如果这个人明年没有参加保险，他的期望效用将是

$$\begin{aligned}\text{期望效用} &= 0.75U(100\,000)+0.25U(80\,000)\\ &= 0.75\ln 100\,000+0.25\ln 80\,000\\ &= 11.45714\end{aligned} \tag{18.20}$$

在这种情况下，公平的保险费是 5 000 美元(2 万美元的 25%，假定保险公司只索取其成本，管理费用为 0)。这样，如果此人为汽车上全险，则无论汽车是否被盗，其财富都将是 95 000 美元。于是，在这个例子中

$$\text{期望效用} = U(95\,000) = \ln(95\,000) = 11.46163 \tag{18.21}$$

当他或她购买公平保险时，这个人的状况显然得到改善。事实上，通过设定

$$\text{期望效用} = U(100\,000-x) = \ln(100\,000-x) = 11.45714 \tag{18.22}$$

我们可以确定为了得到这种保险，必须要支付的最高金额(x)。

解关于 x 的方程，得到

$$100\,000 - x = e^{11.45714} \tag{18.23}$$

因此，最高的保险费为

$$x = 5\,426 \tag{18.24}$$

(除了 5 000 美元的保险费可以覆盖损失的期望值以外)这个人会愿意支付给保险公司最高达 426 美元的管理费。甚至在支付了这笔费用的情况下，这个人所处的状况也与其没有参加保险时一样好。

请回答：假定效用与财富是线性关系，这个人会愿意支付比实际上的公平保险费高的费用吗？当效用是财富的凸函数时，情况又会怎样呢？

18.5 对风险厌恶的度量

在研究有风险情况下的经济选择中，对一个人厌恶风险的程度进行定量度量有时是很方便的。

最常用的度量风险厌恶的指标是由 J. W. 普拉特(J. W. Pratt)在20世纪60年代初期建立起来的。[1] 这种度量风险厌恶的指标记为 $r(W)$,其定义为

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{18.25}$$

由于风险厌恶者的突出特征是他们对财富的边际效用递减,即[$U''(W)<0$],所以,在这种情况下普拉特的指标就是正的。很容易说明,该指标对于效用函数的线性转换是不变的;因此,它不受使用什么样的冯·诺伊曼-摩根斯坦序数的影响。

18.5.1 风险厌恶与保险费

普拉特风险厌恶指标最有用的特征在于它与个人为避免参加公平赌博而支付的保险费数额成比例。假定从这种公平赌博中所赢得的东西可以用随机变量 h(这个变量既可为正又可为负)表示。那么,由于赌博是公平的,就有 $E(h)=0$(其中 E 为期望值)。现在,假设参加公平赌博 h 和确定地支付 p 以避免参与赌博对个人来说没有差别,即有

$$E[U(W+h)] = U(W-p) \tag{18.26}$$

这里,W 是此人现有的财富。我们现在用泰勒级数把方程 18.26 的两边展开。[2] 由于 p 是一个定值,所以,对方程右边作简单的线性估计值得到

$$U(W-p) = U(W) - pU'(W) + \text{高阶项} \tag{18.27}$$

而对于方程的左边,我们需要二阶近似以研究赌博 h 中的变动性

$$E[U(W+h)] = E\left[U(W) + hU'(W) + \frac{h^2}{2}U''(W) + \text{高阶项}\right] \tag{18.28}$$

$$= U(W) + E(h)U'(W) + \frac{E(h^2)}{2}U''(W) + \text{高阶项} \tag{18.29}$$

现在,由于 $E(h)=0$,忽略掉高阶项,并用常数 k 代表 $E(h^2)/2$,比较式 18.27 与式 18.29,可以得到

$$U(W) - pU'(W) \cong U(W) + kU''(W) \tag{18.30}$$

或

$$p \cong -\frac{kU''(W)}{U'(W)} = kr(W) \tag{18.31}$$

上式说明,风险厌恶者为避免公平赌博而愿意支付的金额与普拉特风险厌恶指标大致是成比例的。[3] 由于在现实生活中支付保险费是可以被观测到的,所以,它们常常被用来估计个人的风险厌恶系数,或是被用在不同的人群之间进行比较。因此,运用市场信息去了解人们对风险的态度是可能的。

18.5.2 风险厌恶与财富

一个人风险厌恶的程度随着财富水平的提高会增加还是减少,这是一个重要的问题。从直觉

---

① J. W. Pratt, "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica* (January/April 1964): 122—136.

② 泰勒级数提供了一种对任何可微函数围绕某一点求估计值的方法。如果 $f(x)$ 各阶均可导,它一定可以被表示为 $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2/2f''(x) +$ 高阶项。代数中所学的点斜率公式就是泰勒级数的一个简单的例子。

③ 在这种情况下,比例因子与 h 的方差成比例。例 18.3 是符合这种方程的一个例子。

上，由于假定边际收益递减，这样潜在的损失对于财富多的人来说就不那么严重，所以，随着财富的增加，那种花钱去避免公平赌博的意愿也就会减少。不过，这种直觉上的回答并不一定正确，这是因为，边际效用递减也使在赌博中赢得的好处越来越缺乏吸引力。这样，净的结果就是不确定的，它取决于效用函数的准确形状。事实上，如果效用是财富的二次式

$$U(W) = a + bW + cW^2 \tag{18.32}$$

这里，$b>0, c<0$，普拉特的风险厌恶指标就是

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{-2c}{b+2cW} \tag{18.33}$$

与直觉相反，当财富增加时，它也增加。

在另一方面，如果效用是财富的对数函数

$$U(W) = \ln(W) \quad (W>0) \tag{18.34}$$

可以得到

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1}{W} \tag{18.35}$$

当财富增加时，普拉特指标却是下降的。

如果效用是财富的指数函数

$$U(W) = -e^{-AW} = -\exp(-AW) \tag{18.36}$$

其中 A 是正的常数，则风险厌恶对于所有的财富水平是一定的常数。这是由于

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{A^2e^{-AW}}{Ae^{-AW}} = A \tag{18.37}$$

正如下例要表明的，指数效用函数的这个特征可以用来对花钱去避免赌博的意愿提供某些数字上的估计。

例 18.3

不变的风险厌恶

假定有一个人，其最初的财富为 W_0，效用函数就像方程 18.36 那样，他正以一半对一半的概率面对着或者赢 1 000 美元，或者输 1 000 美元，为了避免风险他（她）愿意花多少钱（f）？为了求出这个值，我们设 W_0-f 的效用等于赌博的期望效用

$$-\exp[-A(W_0-f)] = -0.5\exp[-A(W_0+1\,000)] - 0.5\exp[-A(W_0-1\,000)] \tag{18.38}$$

由于在方程 18.38 中，所有的项中都包含 $-\exp(-AW_0)$，它可以被消掉，这样，就可以得出结论（对于指数函数）：为避免不确定性而花钱的意愿是与原财富独立的。现在，剩余各项

$$\exp(Af) = 0.5\exp(-1\,000A) + 0.5\exp(1\,000A) \tag{18.39}$$

可用来针对不同的 A 值求出 f 来。如果 $A=0.0001$，$f=49.9$——具有这种风险厌恶程度的人愿意花 50 美元去避免 1 000 美元的公平赌博。而如果 $A=0.0003$，这种具有更高风险厌恶程度的人就会为避免赌博而支付 $f=147.8$ 美元。直觉告诉我们，这些值是合理的，所以，在这些范围中的风险厌恶值

有时就被用于经验检验。

正态分布的风险。在不变的风险厌恶的效用函数的基础上，我们可以再假设这人面临的随机的财富风险是符合正态分布的（在本章扩展部分可以看到这个概念的统计背景），这样可以得到一个简单的结论。特别地，设一个人的风险财富方程符合均值为 μ_W、方差为 σ_W^2 的正态分布，那么其概率密度函数就为 $f(W) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$，其中 $z = [(W - \mu_W)/\sigma_W]$。若这个人财富的效用函数形如 $U(W) = e^{-AW}$，那么由该风险财富得到的期望效用为

$$E[U(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(W)f(W)\mathrm{d}W = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int -e^{-AW}e^{-[(W-\mu_W)/\sigma]^2/2}\mathrm{d}W. \tag{18.40}$$

上面的积分虽然需要一些耐心，但没有难到不能完成。积分后，再经过一系列变换，我们得到最终的结果为

$$E[U(W)] \cong \mu_W - \frac{A}{2} \cdot \sigma_W^2 \tag{18.41}$$

这样，期望效用就是财富概率密度函数中两个参数的线性函数，个人的风险厌恶参数（A）决定了收益波动对期望效用的负面影响程度。例如，假设一个人做了一项投资，其期望收益为 100 000 美元，但其收益的标准差（σ_W）为 10 000 美元。正态分布下，他将期待财富在 5% 的时间内跌至 83 500 美元以下（或升至 116 500 美元以上）。根据上面的参数，期望效用为 $E[U(W)] = 100\,000 - \frac{A}{2}(10\,000)^2$。若 $A = 0.0001 = 10^{-4}$，期望效用即为 $100\,000 - 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot (10^4)^2 = 95\,000$。这样该人从此风险资产得到的效用等同于从一个固定的 95 000 美元的财富得到的效用。一个更厌恶风险的人可能有 $A = 0.0003$，这种情形下，他的这种风险财富等价于 85 000 美元的无风险资产。

请回答：假设一个人有两种投资财富的方式：方案 1：$\mu_W = 107\,000$，$\sigma_W = 10\,000$；方案 2：$\mu_W = 102\,000$，$\sigma_W = 2\,000$。请问这个人对风险的态度将如何影响其作出的选择？①

18.5.3 相对的风险厌恶

花钱去避免一给定赌博的意愿与个人的财富水平独立，这似乎是不可能的。一个更有说服力的假定是，这种花钱的意愿是与财富成反比的，这样表达式

$$rr(W) = Wr(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{18.42}$$

就应该是大致不变的。按照普拉特提出的术语②，由方程 18.40 定义的函数 $rr(W)$ 被称为**相对的风险厌恶（relative risk aversion）**。幂效用函数

$$U(W) = \frac{W^R}{R} \quad (\text{当 } R < 1, \neq 0) \tag{18.43}$$

与

① 这个数值的例子虽然只是说明性的，但（很粗略地）近似描述了股票和债券分别在历史上的实际收益。资产组合分配问题的更详细内容，请参见本章的扩展和例 18.8（及相关参考文献）。

② 参见 Pratt，"Risk Aversion"。

$$U(W) = \ln W \quad (\text{当 } R = 0)$$

表现出绝对的风险厌恶递减

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(R-1)W^{R-2}}{W^{R-1}} = -\frac{(R-1)}{W} \tag{18.44}$$

但是，相对的风险厌恶对这两类效用函数是不变的

$$rr(W) = Wr(W) = -(R-1) = 1-R \tag{18.45}$$

经验数据①得到的 R 值通常在 -3 到 -1 之间。所以人们风险厌恶的程度似乎比由对数效用函数所估计的更大些，但在许多应用中，对数效用函数提供了对人们的风险厌恶程度足够合理的近似。而且，方程 18.43 中的这种相对风险厌恶不变的效用函数与我们在第 3 章中描述的一般 CES 效用函数具有相同的形式，这提供了关于风险厌恶性质的某些几何上的直觉，这一点，我们将会在本章的以后部分进行分析。这个函数还被用于研究风险溢价的问题，我们将在练习题 18.8 中看到其简单的应用。

例 18.4

不变的相对风险厌恶

一个行为特征可以用相对风险厌恶不变的效用函数来描述的人，会关注与其财富成比例的收益或损失。由此，我们可以去探寻：这个人愿意放弃其最初财富(F)的多大一个比例(比如说是否愿意放弃最初财富的 10%)，以避免公平赌博。首先，我们假定 $R=0$，即假定该人服从对数效用函数。令一定的财富带来的效用等于该人参加赌注是总财富 10% 的赌博的期望效用，即

$$\ln[(1-f)W_0] = 0.5\ln(1.1W_0) + 0.5\ln(0.9W_0) \tag{18.46}$$

由于每一项都包含 $\ln W_0$，这个最初的财富就可以从表达式中被消去

$$\ln(1-f) = 0.5[\ln(1.1) + \ln(0.9)] = \ln(0.99)^{0.5}$$

所以有

$$(1-f) = (0.99)^{0.5} = 0.995$$

和

$$f = 0.005 \tag{18.47}$$

因此，这个人会花费最高到财富的 0.5% 去避免赌注为总财富 10% 的赌博。对于 $R=-2$ 的情况，也可以进行类似的计算，有

$$f = 0.015 \tag{18.48}$$

这样，这个风险厌恶程度更高的人就会愿意放弃其最初财富的 1.5% 去避免赌注为总财富 10% 的赌博。

请回答：在不变相对风险厌恶的效用函数下，这个人为了避免一个给定的绝对赌博(比如说，1 000 美元的赌博)而愿意的支出怎样由其最初的财富决定？

① 一些学者将方程 18.43 中的效用函数写为 $U(W) = W^{1-\alpha}/(1-\alpha)$，试图度量 $\alpha = 1-R$，这里 α 是正的。

18.6 不确定性情况下进行选择的状态偏好法

尽管到目前为止,我们已对一系列问题提出了见解。但我们所用的方法似乎与我们在其他章节中所用的不同。基本的在预算约束下的效用最大化模型似乎不见了。因此,为了更进一步研究不确定性情况下的行为,我们必须要探寻某种新的方法以使我们将关于此种行为的讨论重新纳人标准的选择理论框架中。

18.6.1 世态与或然商品

为了实现上述目标,我们就从假定任何偶然事件的结果可以被归类于若干种世态(states of the world)开始。我们无法准确预测明天会发生什么,但是我们可以假定:把所有可能发生的事件归类成一些被很好定义的状态是可能的。例如,我们可以非常粗略地估计明天的世界将只会处于两种可能的状态之一:"好日子"或者是"坏日子"。人们可以将世界分成更为细致的状态(甚至包括数百万种可能的状态),但是,大多数理论的本质都是只需要引人两种状态就可以建立起来的。

与世态这个概念同时建立起来的一个概念式的观念是**或然商品(contingent commodities)**。这是一些只有在一种特定世态出现时才能得到的商品。"好日子的1美元"就是或然商品的例子,这个商品保证个人在好日子的情况下有1美元,但是如果明天变成坏日子,就什么都没有。稍稍发挥一下人的直觉,就可以察觉到这种商品是可以购买的——我可以从别人那里购买到如果明天是好日子就得到1美元的保证。由于明天可能是坏日子,所以,这个商品的卖价可能就会小于1美元。如果有人也愿意卖给我或然商品——"坏日子的1美元",那么,我就可以通过购买两种或然商品"好日子的1美元"与"坏日子的1美元",以保证自己明天有1美元。

18.6.2 效用分析

研究在或然商品中进行效用最大化选择所用的方法与我们分析先前的选择时所用的方法在很大程度上是相同的。主要的区别在于:在事实出现以后,个人只能获得一种或然商品(由是好日子或坏日子决定)。不过,在现存的不确定性被揭示之前,个人有两种或然商品进行选择,此人可能两种或然商品各买一些。我们将它们表示为 W_g(好日子的财富)与 W_b(坏日子的财富)。假定效用与哪一种世态出现无关①,个人认为好日子出现的概率为 π,那么,与这两种或然商品相联系的期望效用就是

$$V(W_g, W_b) = \pi U(W_g) + (1-\pi)U(W_b) \tag{18.49}$$

这也是个人在给定其最初财富 W 的情况下,寻求最大化的值。

---

① 当财富的效用取决于世态时,这个假设是不成立的。例如,某一固定财富的效用根据一个人是健康还是生病是不同的。我们将不考虑这种复杂性。但在更多的分析中,我们假设效用对于财富是凹的,即 $U'(W)>0, U''(W)<0$。

18.6.3 或然商品的价格

假定个人在购买 1 美元“好日子里的财富”的价格是 p_g，购买 1 美元“坏日子里的财富”的价格是 p_b，其预算约束为

$$W = p_g W_g + p_b W_b \tag{18.50}$$

价格比率 p_g/p_b 表示这个人怎样把好日子的美元值换成坏日子的美元值。例如，如果 $p_g = 0.80$，$p_b = 0.20$，那么，购买 1 美元“好日子里的财富”可以给这个人买来当日子如果变坏时价值 4 美元的或然商品。当然，这样的交易是否改善了效用，取决于世态的特征。但是，把涉及不确定性的问题看做有多种或然商品被交易的情况，是世态偏好模型所提供的关键想法。

18.6.4 或然商品的公平市场

如果关于或然财富权利的市场被很好地建立起来，并且关于好日子发生的可能性(π)存在普遍一致的判断，那么，对于这些权利的价格实际上就可能是公平的——也就是说，它们就等于潜在的概率

$$\begin{aligned} p_g &= \pi \\ p_b &= (1 - \pi) \end{aligned} \tag{18.51}$$

这样，价格比率 p_g/p_b 就简单地反映了出现好日子的可能性

$$\frac{p_g}{p_b} = \frac{\pi}{1 - \pi} \tag{18.52}$$

在我们前面的例子中，如果 $p_g = \pi = 0.8$，$p_b = (1 - \pi) = 0.2$，那么就有 $\pi/(1 - \pi) = 4$。在这种情况下，出现好日子的可能性就会被定义为“4:1”。或然权利的公平市场(如保险市场)就反映了这种可能性。在赛马中提出的“赔率”是类似的东西。当这些赔率真实地反映了不同马匹获胜的概率时，它们就是“公平的”。

18.6.5 风险厌恶

现在，我们要说明在世态偏好模型中怎样来表示风险厌恶。具体来说就是，我们要证明，如果或然权利市场是公平的，效用最大化的个人将怎样选择以达到 $W_g = W_b$ 的情况——即他将作出安排，使无论出现什么状态，最终所获得的财富都是相同的。

在以前的各章中，服从预算约束的效用最大化时，个人会使 W_g 对 W_b 的 MRS 等于这些“商品”的价格比，即

$$MRS = \frac{\partial V/\partial W_g}{\partial V/\partial W_b} = \frac{\pi U'(W_g)}{(1 - \pi)U'(W_b)} = \frac{p_g}{p_b} \tag{18.53}$$

从或然权利市场是公平的这一假定来看，一阶条件可以简化为

$$\frac{U'(W_g)}{U'(W_b)} = 1$$

或[①]

$$W_g = W_b \tag{18.54}$$

这样，面对着对财富的或然权利的公平市场，此人是风险厌恶型的，即选择无论出现什么情况都保证有相同的财富水平。

18.6.6 图形分析

图 18.2 表现了风险厌恶。个人的预算约束（I）被显示为与无差异曲线 U_1 相切，切点为 $W_g = W_b$，这是确定性线上的一点，在这一点上财富（W^*）与什么世态出现无关。在 W^* 点上，无差异曲线的斜率[$(\pi/(1-\pi)$]恰恰等于价格比率 p_g/p_b。

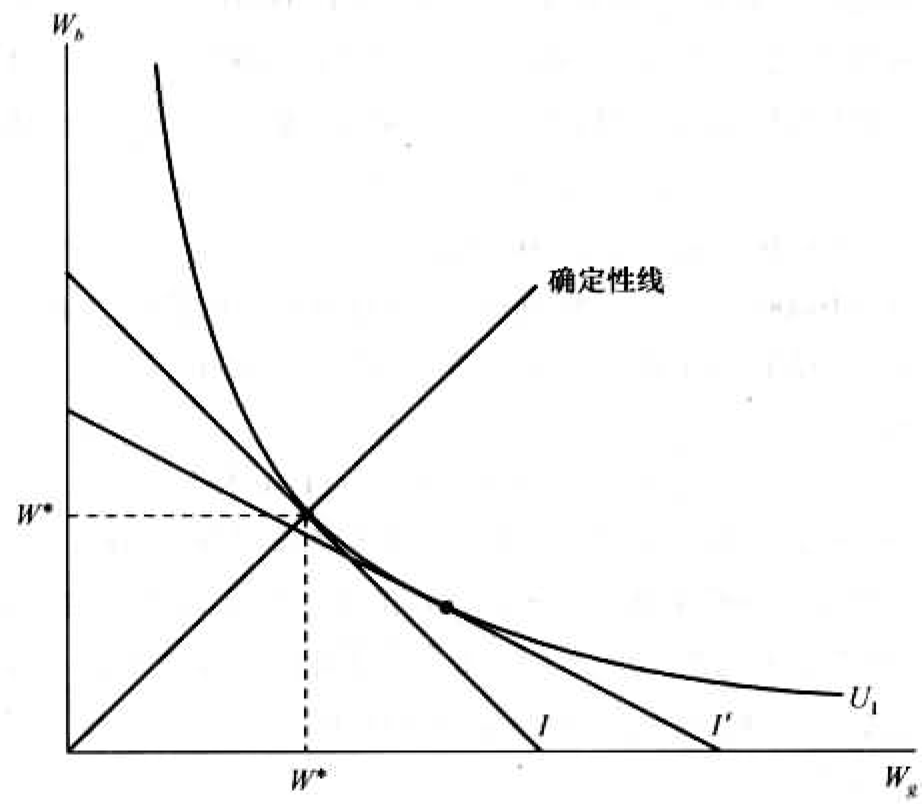


图 18.2　在世态偏好模型中的风险厌恶

直线 I 代表个人对或然财富权利的预算约束：$W = p_g W_g + p_b W_b$。如果或然权利市场实际上是公平的，[$p_g/p_b = \pi/(1-\pi)$]，则效用最大化就会在确定性线上 $W_g = W_b = W^*$ 的地方实现。如果价格实际上是不公平的，预算约束可能是 I'，而效用最大化则会在 $W_g > W_b$ 的点上实现。

如果或然财富权利的市场是不公平的，效用最大化就可能不出现在确定性线上。例如，假定 $\pi/(1-\pi)=4$，而 $p_g/p_b = 2$，即保证在坏日子得到一定财富的成本较高。在这种情况下，预算约束会移动到图 18.2 中的 I'，并且效用最大化就出现在确定性线下面。[②] 在这个例子中，由于对 W_b 的保证成本太高，这个人就会通过选择 $W_g > W_b$ 进行一点赌博。例 18.5 显示了这种方法在评价其他选择组合时的用途。

---

① 请注意，这一步要求效用是状态独立的，且 $U'(W) > 0$。

② 如方程 18.54 所示，由于在确定性线上的 MRS 总是 $\pi/(1-\pi)$，所以，斜率较小的点一定会出现在确定性线的下方。

例 18.5

世态偏好模型中的保险

我们把例 18.2 中汽车保险的例子重新安排成涉及两种或然商品："没有小偷时的财富"(W_g)与"有小偷时的财富"(W_b)的问题，我们可以用此说明世态偏好方法。同以前一样，如果我们假定对数形式的效用函数，且偷盗发生的概率为 0.25(也就是 $1-\pi$)，我们有

$$期望效用 = 0.75U(W_g) + 0.25U(W_b) = 0.75\ln W_g + 0.25\ln W_b \tag{18.55}$$

如果个人不采取行动，效用由最初的财富禀赋决定，$W_g^* = 100\,000$，$W_b^* = 80\,000$，因此有

$$期望效用 = 0.75\ln 100\,000 + 0.25\ln 80\,000 = 11.45714 \tag{18.56}$$

为了研究离开这些最初禀赋的交易，我们根据或然商品的价格 p_g 与 p_b 写出预算约束

$$p_g W_g^* + p_b W_b^* = p_g W_g + p_b W_b \tag{18.57}$$

假定这些价格与这两种世态的概率相等($p_g = 0.75$，$p_b = 0.25$)，上述约束就被写成

$$0.75(100\,000) + 0.25(80\,000) = 95\,000 = 0.75W_g + 0.25W_b \tag{18.58}$$

而且，在这个预算约束下，方程 18.56 的最大化有 $W_g = W_b = 95\,000$。这样，个人就会移动至确定性线上，并达到如下的期望效用

$$期望效用 = \ln 95\,000 = 11.46163 \tag{18.59}$$

这比不采取行动有明显的改善。为了获得这种改善，个人需要能够把好日子(没有小偷)的 5 000 美元转换成坏日子(有小偷)的 15 000 美元，一个公平的保险契约可以做到这一点，它花费 5 000 美元，但在有小偷的时候会返还 2 万美元给这个人(但没有小偷的时候，就什么也不返还)。请注意，这里保险保证的对财富的改变——$dW_b/dW_g = 15\,000/-5\,000 = -3$——恰恰等于赔率的负值，即 $-\pi/(1-\pi) = -0.75/0.25 = -3$。

具有折扣的保险。在这种情况下，尽管并非所有的契约都会导致位于确定性线上的选择，但仍可能会改善效用。例如，花 5 200 美元，在发生偷盗时得到 2 万美元的保险就会使这个人达到确定性线上的点，使得 $W_g = W_b = 94\,800$ 且

$$期望效用 = \ln 94\,800 = 11.45953 \tag{18.60}$$

这也超过了从最初的禀赋中可得到的效用。花费 4 900 美元，并要求个人承担偷窃损失的第一个 1 000 美元的保险使得

$$\begin{aligned} W_g &= 100\,000 - 4\,900 = 95\,100 \\ W_b &= 80\,000 - 4\,900 + 19\,000 = 94\,100 \end{aligned} \tag{18.61}$$

$$期望效用 = 0.75\ln 95\,100 + 0.25\ln 94\,100 = 11.46004 \tag{18.62}$$

虽然这种保险没有使个人达到确定性线，但也改善了期望效用。所以保险不一定需要保证购买保险后完全没有风险。

请回答：如果个人要承担损失中的第一个 1 000 美元，那么他最多愿意花多少钱去买这个保险？

18.6.7 风险厌恶与风险溢价

世态偏好模型在分析风险厌恶与个人接受风险的意愿之间的关系时也特别有用。请考虑两个人,每一位开始时都有一确定的财富 W^*。每个人都寻求下述形式的期望效用函数的最大化

$$V(W_g, W_b) = \pi \frac{W_g^R}{R} + (1-\pi)\frac{W_b^R}{R} \tag{18.63}$$

在此,效用函数表现出不变的相对风险厌恶(参见例 18.4)。同样,也请注意,这个函数类似于我们在第 3 章以及其他章节中所研究的 CES 效用函数。因此,这里的参数 R 既决定了风险厌恶度,也决定了由这个函数所表示的无差异曲线的曲率。一个对风险非常厌恶的个人会有很大的负 R 值,并且有诸如图 18.3 中曲线 U_1 那样的有很大弯曲度的无差异曲线。而一个对风险有较高容忍度的个人有较高的 R 值,并有较平的无差异曲线(如 U_2)。①

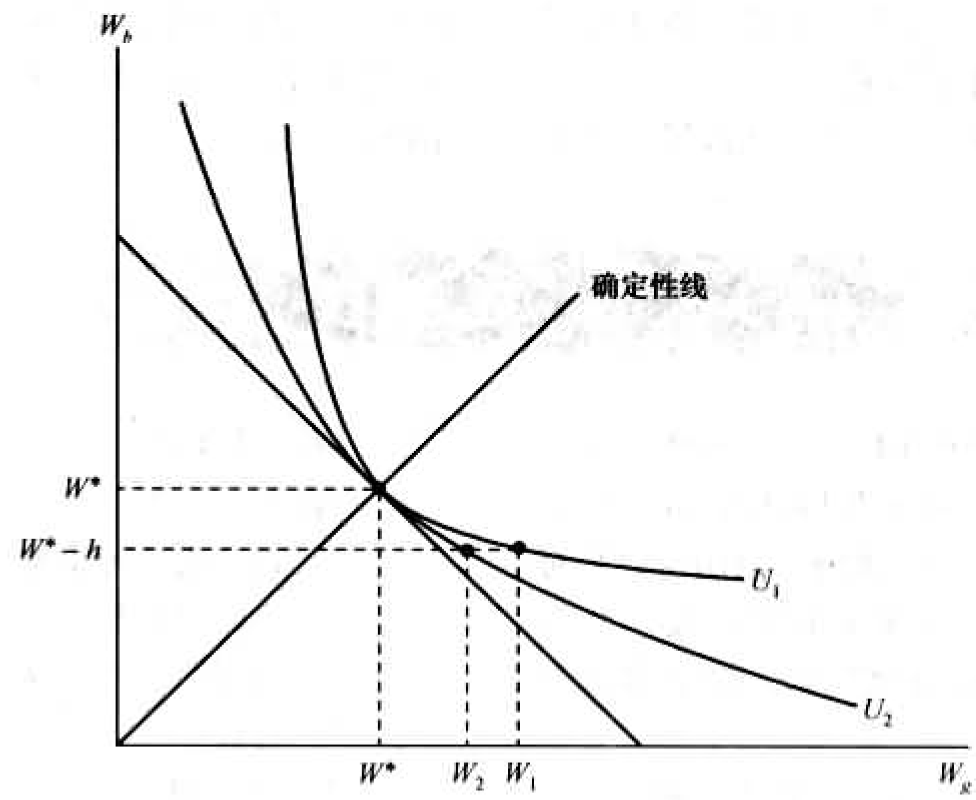


图 18.3 风险厌恶与保险金

无差异曲线 U_1 代表一个对风险非常厌恶的个人的偏好,具有由 U_2 表示的这样的偏好的个人则愿意接受更大的风险。当面对在坏日子会失去 h 这样的风险时,第 2 个人会要求在好日子补偿 $W_2 - W^*$,而第 1 个人会要求更大的量 $W_1 - W^*$。

现在假定这些人面临着在坏日子会失去 h 美元财富的预期。如果好日子的财富可以从 W^* 增加到 W_2,那么,对于第 2 个人来说,这样一种风险就是可接受的。不过,对第 1 个非常厌恶风险的人来说,财富必须要增加到 W_1 才能使风险变成可接受的。这样,W_1 与 W_2 之间的差异就显示了风险厌恶程度对接受风险的意愿的影响。本章的一些习题利用了这种图形工具以说明偏好(如由方程 18.63 中效用函数所反映的)与风险条件下的行为之间的联系。

① 由于无论 R 值如何,沿确定性线的 MRS 都由 $\pi/(1-\pi)$ 确定,所以可以保证 U_1 与 U_2 在 W^* 点斜率相同。

小 结

本章我们提供了一些可以研究不确定情况下个人决策的入门性知识。现将基本结论概括如下：

- 在不确定性情况下，个人关心与不同结果相关的期望效用。如果其行为遵从冯·诺伊曼-摩根斯坦公理，他们将以使期望效用最大化的方式进行决策。
- 如果我们假定个人表现出对于财富的边际效用递减，他们就是风险厌恶者。即使赌博是公平的，他们也不愿意打赌。
- 如果保险费实际上是公平的，风险厌恶者就会愿意购买保险使得保证其自身完全不受不确定事件的影响。他们事实上也愿意去支付不公平的保险费以避免承担风险。
- 通过在或然商品中运用世态偏好法，不确定情况下的决策分析可以在选择理论框架中得以实现。在这样一个模型中，如果个人的偏好是状态独立的，并且，价格实际上是公平的，那么，个人就会选择与"确定性线"相一致的配置，而这可以在无论哪一种世态出现时，都保证相同的财富水平。

练 习 题

18.1 George 花了整整 10 万美元的赌注压在公牛队身上，打赌公牛队获得 NBA 的总冠军。如果 George 的财富效用函数是对数形式的，并且他现在的财富是 100 万美元，那么他认为公牛队一定会赢的最小概率是多大？

18.2 请说明如果一个人的财富效用函数是凸的（而不是凹的，就如同在图 18.1 中表示的那样），那么，他（她）就会选择公平赌博而不是确定的收入，甚至还可能愿意去接受某种不公平的赌博。你认为这种接受风险的行为是普遍的吗？什么因素会趋向于限制这种行为？

18.3 一个人买了一打鸡蛋，并一定要把它们带回家。尽管回家的旅行是无成本的，但在任何一条路上所带的鸡蛋被打破的概率都是 50%。这个人会考虑两个策略。

第一个策略：走一趟带所有 12 个鸡蛋。

第二个策略：走两趟，每次带 6 个鸡蛋。

a. 请列出每种策略的可能结果与每种结果的可能性。请说明在每种策略下，回家之后平均都有 6 个鸡蛋没有被打碎。

b. 画一图表示在每一种策略下可获得的效用，人们会倾向于哪一个策略？

c. 采用再多跑几趟的方案，效用是否可以被进一步改善？如果多走一遍是有成本的，那么，这种可能性会受到怎样的影响？

18.4 假定一个现有 2 万美元财富的人有一半的可能性会得神经衰弱，并因此损失 1 万美元。

a. 请计算在这种情况下实际公平保险的成本，并使用（如在图 18.1 中表示的）财富效用图来表示这个人会愿意选择

公平保险以防止损失，而不是接受没有保证的赌博。

b. 假定可以获得两种类型的保险政策：

(1) 赔偿全部损失的公平政策。

(2) 只赔偿所发生损失的一半的公平政策。

请计算第二种类型政策的成本。并说明这个人通常会认为它比第一种类型的政策差。

18.5 Fogg 小姐计划花 1 万美元去进行环球旅行。从这个旅行中她所得到的效用是她实际支付的费用的函数，可以写成

$$U(Y) = \ln Y$$

a. 如果 Fogg 小姐在旅途中会丢失 1 000 美元的可能性是 25% 的话，整个旅行的期望效用会是多大？

b. 假设 Fogg 小姐可以以 250 美元的"精算意义下公平"的保险费率来买保险，来预防这 1 000 美元的损失（比方说，买旅行支票）。请证明她买了这个保险后的期望效用比不买保险时的期望效用高。

c. Fogg 小姐愿意为其 1 000 美元的可能损失而支付的保险费最多是多少？

18.6 所有人都知道当在一个非法的地点停车时，收到罚款通知单的可能性是 p，并且罚款金额为 f。假定所有的个人都是风险厌恶型的［也就是说，$U''(W)<0$，其中 W 是个人的财富］。

那么，在防止非法停车方面，被抓到的可能性成比例增加和罚金成比例增加中，哪个会更有效呢？［提示：运用泰勒级数展开式 $U(W-f)=U(W)-fU'(W)+\frac{f^2}{2}U''(W)$。］

18.7 一个农夫认为在下一个播种的季节里，雨水不正常的可能性是一半对一半。他的期望效用函数的形式为

$$期望效用 = \frac{1}{2}\ln Y_{NR} + \frac{1}{2}\ln Y_R$$

这里，Y_{NR} 与 Y_R 分别代表农夫在"正常降雨"与"多雨"情况下的收人。

a. 假定农夫一定要在两种有如下表所示收入前景的谷物中进行选择（只能选择一种）的话，他会种哪种谷物呢？

（单位：美元）

谷物	Y_{NR}	Y_R
小麦	28 000	10 000
谷子	19 000	15 000

b. 假定农夫在他的土地上可以每种作物都播种一半的话，他会选择这样做吗？请解释你的结论。

c. 怎样组合小麦与谷子才可以给这个农夫带来最大的期望效用？

d. 如果对于只种小麦的农夫，有一种要花费 4 000 美元的保险，在种植季节多雨的情况下会赔付 8 000 美元，那么，这种有关小麦种植的保险会怎样改变农夫的种植情况？

18.8 对于相对风险厌恶不变的效用函数的情况（方程 18.63），我们说明了风险厌恶程度由 $(1-R)$ 来度量。在第 3 章，我们说明了这种函数的替代弹性为 $1/(1-R)$。这样，两个指标互为倒数。运用这个结果，讨论下述问题：

a. 为什么风险厌恶与一个人在各种世态之间财富替代的意愿是相关的？通过这两个概念可以把握什么现象？

b. 你怎样在风险厌恶与替代的框架中解释 $R=1$ 与 $R=-\infty$ 这两种极端的情况？

c. "坏"日子的或然权利价格（P_b）的上升，会对 W_g 与 W_b 的需求中引致替代效应与收入效应。如果个人花费在这

两种商品上的预算是固定的，那么，这会怎样影响在它们之间所进行的选择？为什么 W_g 的上升或下降取决于这个人所表现出的风险厌恶程度？

d. 假设经验数据说明一个人需要平均 0.5% 的收益，才愿意投资一个 50% 的概率赚 5%、50% 的概率赔 5% 的项目。也就是说，该人从等概率得到 $1.055W_0$ 或 $0.955W_0$ 的投资中得到的效用等于固定收益 W_0 的效用。

i. 上面的情况发生时，R 是多少？

ii. 该人需要多少的平均收益才肯接受一项 50% 的概率赚 10%、50% 的概率赔 10% 的投资？

注意：这需要求解非线性方程，所以只需近似解。风险/收益得失权衡的比较说明了所谓的权益溢价难题，即风险投资的实际收益似乎比从其他数据得到的与其风险厌恶程度相当的收益要大。［参见 N. R. Kocherlakota, "The Equity Premium: It's Still a Puzzle", *Journal of Economic Literature* (March 1996):42—71。］

18.9 在固定收益率为 r 的资产上投资 W^* 美元，可以在两种世态时都获得 $W^*(1+r)$；而在风险资产上的投资在好日子收益为 $W^*(1+r_g)$，在坏日子为 $W^*(1+r_b)$（其中 $r_g>r>r_b$）。通过上述假定，风险资产上的投资就可以在世态偏好的框架中被加以研究。

a. 请画出两种投资的结果。

b. 请说明包含无风险资产与风险资产的"资产组合"怎样可以在你的图中得到显示。你怎样说明投资在风险资产中的财富比例？

c. 请说明个人对于风险的态度会怎样决定他们所持有的无风险资产与风险资产的组合。一个人会在什么情况下不持有风险资产？

d. 如果一个人的效用函数采用了使相对风险厌恶不变的形式（方程 18.62），请解释这个人在其财富增加时，为什么不会改变其所掌握的风险资产的比例。①

18.10 假定在练习题 18.9 中的资产收益要上交税收。

a. 请说明在练习题 18.9 的情况中，为什么对财富按比例征税不会影响配置在风险资产上的财富比例。

b. 假定只有从安全资产中获得的收益才按比例交税。这会怎样影响风险资产在财富中的比例？哪些投资者受这样一个税收的影响最大？

c. 如果所有的资产收益都要按比例交收入税，你对 b 的回答会怎样变化？（注意：这个问题是请你去计算导致税后效用最大化的财富的税前配置。）

① 这个问题与下一个问题均来自 J. E. Stiglitz "The Effects of Income, Wealth, and Capital Gains Taxation in Risk Taking", *Quarterly Journal of Economics* (May 1969), pp. 263—283。

推荐阅读文献

Arrow, K. J. "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing". *Review of Economic Studies* 31 (1963): 91—96.

该文引入了世态偏好的概念,并把证券解释为对于或然商品的要求权。

______. "Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care". *American Economic Review* 53 (1963): 941—973.

该文是对于保险福利含义的一个出色的讨论,它有一个清晰、简明的数学附录。应该与 Pauly 讨论道德风险的文章(参见第 10 章)一同来阅读。

Bernoulli, D. "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk". *Econometrica* 22 (1954): 23—36.

该文是对圣彼得堡悖论的经典分析。

Friedman, M., and L. J. Savage. "The Utility Analysis of Choice". *Journal of Political Economy* 56 (1948): 279—304.

该文分析了人们为什么既赌博,又买保险,非常具有可读性。

Huang, Chi-fu, and R. H. Litzenberger. *Foundations for Financial Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1988.

该文提供了很好的有关度量随机占优的讨论,以及它们与风险厌恶的关系。

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green. *Microeconmics Theory*, Chap. 6. New York: Oxford University Press, 1995.

该文提供了有关期望效用理论基础的总结。还详细考察了状态独立假设,说明了一些风险厌恶的概念可以延伸到状态独立的情形。

Pratt, J. W. "Risk Aversion in the Small and in the Large". *Econometria* 32 (1964): 122—136.

该文描述了度量风险厌恶的理论的发展过程。用了较多的技术处理,但仍具较高的可读性。

Rothschild, M., and J. E. Stiglitz. "Increasing Risk: I. A Definition". *Journal of Economic Theory* 2 (1970): 225—43.

该文给出了一项赌博比另一项赌博更具有风险的经济学定义。在 *Journal of Economic Theory* 上发表的续文提供了一些经济学说明。

Silberberg, E. and W. suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed. Boston. Irwin/Mcgraw Hill, 2001.

该书第 13 章提供了一个不错的统计概念和期望效用最大化之间联系的介绍。还展示了例 18.3 中提到的积分的详细过程。

扩　展

资产组合理论和风险定价

在第 18 章我们看到,个人愿意为避免不确定性而有所付出,并且所支付的金额由他们对于风险的态度决定。这表明许多个体的相互作用建立起了一个"风险"市场,其中不确定性被归结为一个"价格"。于是,问题就成为:要设计一个方法去定量地分析风险,这种方法也可以用来分析风险定价。关于这个过程建立的最好的模型可以在对资本资产定价的研究中看到。在那里,经济学家广泛地研究了资产所提供的收益和与收益相关的风险之间的关系。在此,我们将从这个内容广泛的主题里简要总结出一些基本观点。首先,我们需要一些统计上的知

识准备。

统计背景

如果一个变量 x 以确定的概率取不同的值,它就被叫做**随机变量(random variable)**。x 的"概率密度函数"[由 $f(x)$ 表示]表示在一个狭窄区间 dx 内取值的概率。只要符合

$$f(x) \geqslant 0$$

与

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \tag{i}$$

任何函数都可以作为概率密度函数,统计学家也使用了许多这种函数去解释经验上的观察。或许其中最有用的函数是正态(高斯)函数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \tag{ii}$$

其分布函数是令人熟悉的钟形,并关于零对称。在建立风险定价理论的过程中,以及在许多其他的统计学领域,这个特殊的函数都扮演了主要的角色。

对于许多随机变量 x,均值(或期望值)被定义为

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \tag{iii}$$

方差被定义为

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E[(x-\mu_x)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x)\,dx \end{aligned}\tag{iv}$$

方差的平方根(记为 σ_x)叫做 x 的标准差。

对于方程 ii 中的正态分布,可以很简单地得到 $\mu_z = 0$,$\sigma_z^2 = \sigma_z = 1$。这个函数可以很容易地被推广,注意到,当

$$z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \tag{v}$$

具有方程 ii 中的分布函数的形式时,随机变量 x 就可以被认为是均值为 μ_x、标准差为 σ_x 的正态分布。这样,x 的分布完全由 μ_x 与 σ_x 这两个参数决定。

如果 x_i 与 x_j 是两个随机变量,两者的协方差被定义为

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= E(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\mu_x)(x_j-\mu_x)f(x_i,x_j)\,dx_i\,dx_j \end{aligned}\tag{vi}$$

如果 x_i 与 x_j 趋向于同时上升或下降,σ_{ij} 就是正的。如果两个变量的变化方向趋于相反,则 σ_{ij} 就是负的。

如果 z 表示两个随机变量 x_i 与 x_j 的加权平均值

$$z = \alpha x_i + (1-\alpha)x_j \tag{vii}$$

这里,$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,那么,根据定义就可以得到

$$\mu_z = \alpha\mu_i + (1-\alpha)\mu_j \tag{viii}$$

与

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_j^2 \\ &\quad + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{ij} \end{aligned}\tag{ix}$$

对于这些概念的进一步发展,请参见 Freund (1992) 或 Hoel (1984),以及其他关于数理统计的入门性教材。在此,我们假定不同的金融资产(x_i)的收益符合正态分布,以利用上述概念。x_i(μ_i)的均值表示对第 i 种资产的期望收益,而正如我们将看到的,x_i(σ_i)的标准差是讨论与这种资产相联系的风险的一个起点。厌恶风险的投资者所寻求避免的,正是这种收益的变动性。

E18.1 资产组合的分散化

方程 ix 给出了资产组合分散化的原理。即便两种资产有相同的收益分布($\mu_i = \mu_j$,$\sigma_i = \sigma_j$),把它们混入一个资产组合之中也能得到一个更让人喜欢的风险报酬组合。例如,在资产收益独立($\sigma_{ij} = 0$)的情况下,同样权重的组合会有

$$\mu_z = 0.5\mu_1 + 0.5\mu_2 = \mu_1 = \mu_2 \tag{x}$$

$$\sigma_z^2 = 0.25\sigma_1^2 + 0.25\sigma_2^2 = 0.5\sigma_1^2 = 0.5\sigma_2^2 \tag{xi}$$

$$\sigma_z = 0.707\sigma_1 = 0.707\sigma_2 \quad \text{(xii)}$$

即当个人持有两种资产的组合时,会在较低风险下得到与只持有一种资产相同的收益。如果两种资产具有负的协方差($\sigma_{ij}<0$),则持有两者就可以提供更大的降低风险的好处。

E18.2　有效资产组合

多种资产的资产组合配置问题,就是要选择每种资产的权重,从而对应于每一种潜在的期望收益,使资产收益的标准差最小。对这个最优化问题的一种解答,是诸如在图 18.1 中由 *EE* 所代表的效率边界。在这个边界之下的资产组合劣于边界上的各个组合。这是由于:在任何风险度上,它们提供了较低的期望收益。而在边界以上的资产收益则是无法得到的。夏普(1970)讨论了与建构边界相关的数学问题。

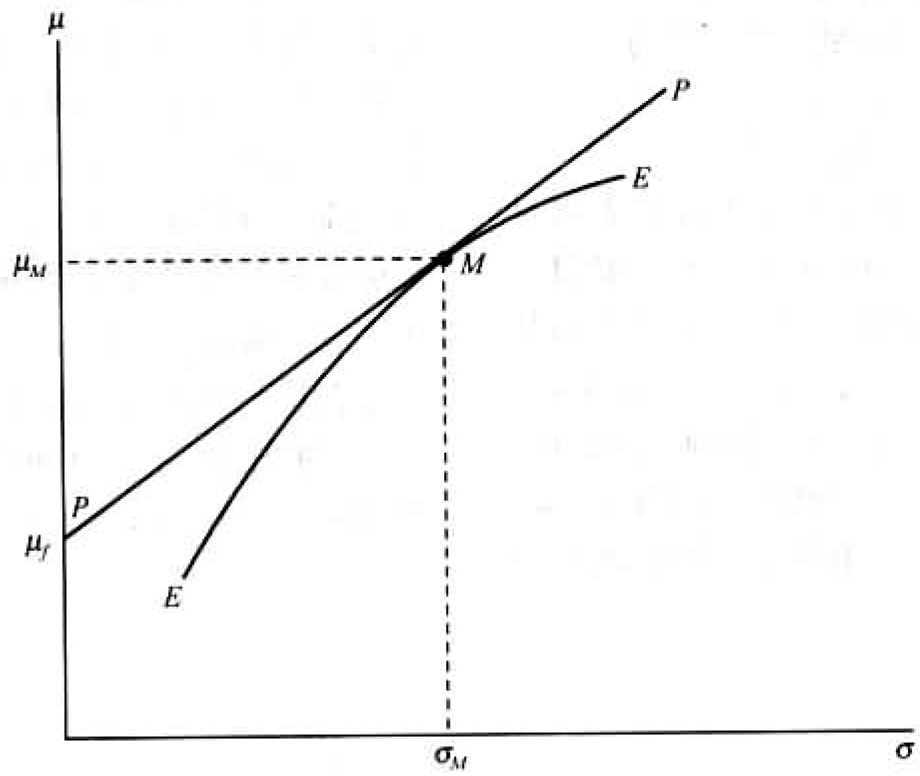


图 E18.1　有效资产组合

EE 边界代表了相对于每一个期望收益 μ,使资产组合的标准差 σ 最小的风险资产的最佳组合。具有收益 μ_f 的无风险资产给投资者提供了沿 *PP* 线保持混合资产组合的机会,该线是无风险资产与市场资产组合 *M* 的混合。

共同基金

资产组合效率的概念被广泛应用在对共同基金的研究中。概括地说,共同基金是中小投资者分散投资组合的好方法。因为这样的基金组合集中了很多投资者的资金,于是他们可以在交易的管理费用上达到规模经济性。这使得基金的持有者可以分享在更大范围的投资中得到的财富,而这在他们单独投资时是不可能实现的。但是,共同基金的管理者有他们自己的利益激励,所以共同基金持有的资产组合不一定完全代表其客户对风险的态度。例如,Scharfstein 和 Stein(1990)提出了一种模型,说明了为什么共同基金的管理者在作投资选择时有一种随大流(follow the herd)的激励。Jensen(1968)的古典研究发现,共同基金的管理者很少能获得足够的额外收益来抵消他们对投资者的收费。这使得近些年来很多共同基金购买者倾向于购买指数基金,指数基金只是简单的市场平均的复制(如标准普尔 500 指数)。这些基金的费用较低,从而使投资者以最小的成本达到分散投资。

E18.3　资产组合的分离

如果存在着期望收益为 μ_f 且 $\sigma_f=0$ 的无风

险资产，那么，最优资产组合将包含这种资产与其他有风险的资产的组合。由于位于图 18.4 中 *PP* 线上的点都表示对于每一个 σ 值，不同资产组合配置可以得到的最大收益，所以，所有最优的资产组合都将在这条线上。这些配置将包括一组特定的风险资产——该组合由 *M* 点来表示。在均衡时，这就是“市场资产组合”，包含与其市场价值成比例的所有资本资产。这个市场资产组合有期望收益 μ_M 与该收益的标准差 σ_M。代表 *PP* 线上的所有资产组合的线性方程为

$$\mu_P = \mu_f + \frac{\mu_M - \mu_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_P \qquad \text{(xiii)}$$

这表示了市场线 *PP* 允许个人投资者通过按比例接受更高的风险（σ_P/σ_M）“购买”超过无风险收益（$\mu_M - \mu_f$）的收益。对于 *PP* 线上市场点 *M* 左边的选择，有 $\sigma_P/\sigma_M < 1$ 与 $\mu_f < \mu_P < \mu_M$。对于 *M* 点右边的高风险点——可以通过借贷去创造一个杠杆资产组合来得到——会有 $\sigma_P/\sigma_M > 1$，并将保证得到超过由市场资产组合所提供的期望收益（$\mu_P > \mu_M$）。托宾（1958）是首批承认无风险资产在区分市场资产组合和设定投资者获得收益高于无风险收益的条件中起重要作用的经济学家之一。

E18.4 个人选择

图 E18.2 说明了不同投资者面对 *PP* 线时的资产组合选择。对风险容忍度低（*I*）的个人会选择无风险资产权重比较高的资产组合。愿意接受适度风险（*II*）的投资者会选择与市场资产组合相近的资产组合。高风险（*III*）投资者会选择杠杆资产组合。请注意，所有的投资者面对着相同的风险“价格”（$\mu_M - \mu_f$），而其期望收益则由其愿意引致多大的相对风险（σ_P/σ_M）决定。请注意，由于 $\sigma_P^2 = \alpha^2\sigma_M^2 + (1-\alpha)^2 \cdot 0$，所以，与投资者资产组合相关的风险只取决于其在市场资产组合中投资的比例（α）。因此有 $\sigma_P/\sigma_M = \alpha$，所以，投资者的资产组合选择就是其对风险的选择。

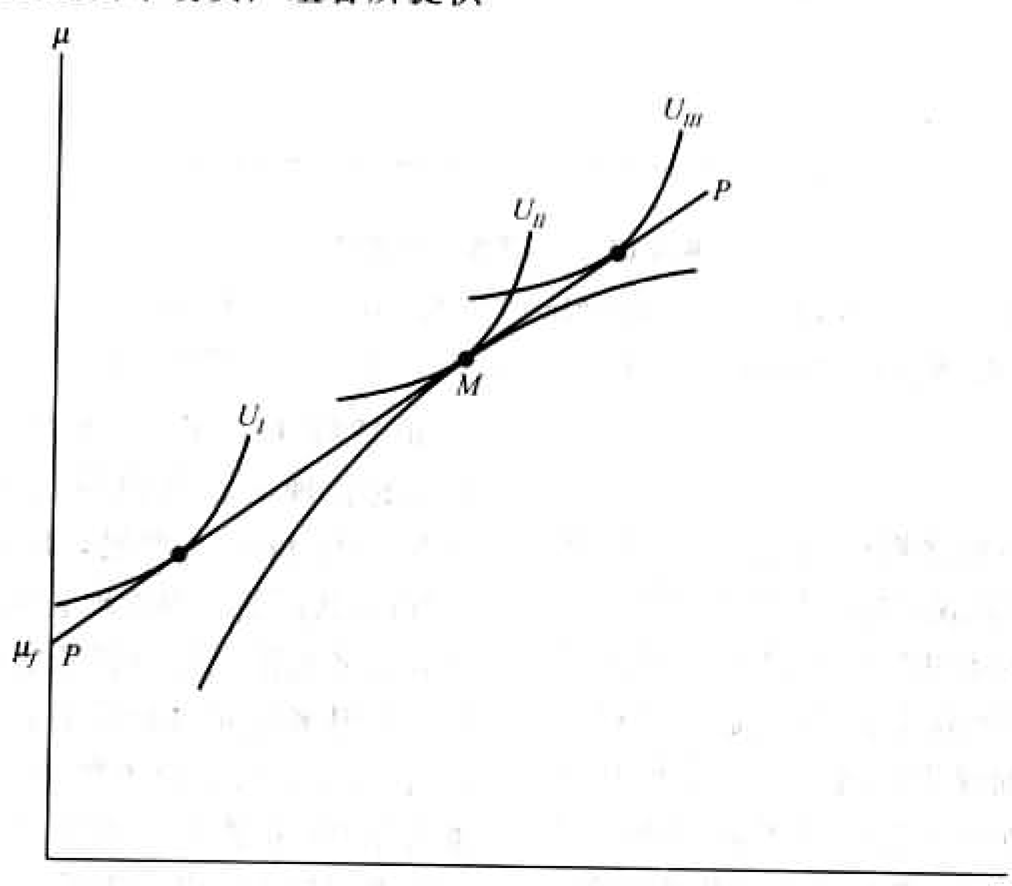


图 E18.2　投资者行为与风险厌恶

给定市场选择线 *PP*，投资者能够选择他们愿意接受的风险程度。风险厌恶程度高的投资者（U_I）愿意主要持有无风险资产，而更愿意承受风险的投资者（U_{III}）则会选择有杠杆作用的资产组合。

E18.5 资本资产定价

虽然 E18.4 中的分析说明了无风险资产与市场资产组合相混合的资产组合怎样得到定价,但是,它并未描述对于单一资产的风险与收益的转换。由于假定无交易费用,投资者总是可以通过选择去分散市场资产组合从而把与整个市场无关的风险规避掉。所以,这种"非系统"风险就不会保证带来任何的超额收益。不过,在某种意义上,由于其中一种资产承担了整个市场的风险,这种资产可以赚得超额收益。而没有得到这种超额收益的资产将不会被包括在市场资产组合中,这样,它就完全不会被持有。这就是资本资产定价模型(CAPM)的基本观点。

为了正式地研究这些结果,请考虑一个随机收益为 x 的小额资产(α)与一个随机收益为 M 的市场资产组合所构成的资产组合。这个资产组合的收益(z)将由下式决定

$$z = \alpha x + (1-\alpha)M \tag{xiv}$$

这样,期望收益为

$$\mu_z = \alpha\mu_x + (1-\alpha)\mu_M \tag{xv}$$

方差为

$$\sigma_z^2 = \alpha^2\sigma_x^2 + (1-\alpha)^2\sigma_M^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{x,M} \tag{xvi}$$

但是,我们先前的分析表明

$$\mu_z = \mu_f + (\mu_M - \mu_f)\cdot\frac{\sigma_Z}{\sigma_M} \tag{xvii}$$

对方程 xv 与方程 xvii 关于 α 求微分,有

$$\frac{\partial\mu_z}{\partial\alpha} = \mu_x - \mu_M = \frac{(\mu_M - \mu_f)}{\sigma_M}\frac{\partial\sigma_z}{\partial\alpha} \tag{xviii}$$

通过方程 xvi 计算 $\frac{\partial\sigma_z}{\partial\alpha}$,并取当 α 接近零时的极限,可以得到

$$\mu_x - \mu_M = \frac{(\mu_M - \mu_f)}{\sigma_M}\left(\frac{\sigma_{x,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right) \tag{xix}$$

进行整理,有

$$\mu_x = \mu_f + (\mu_M - \mu_f)\cdot\frac{\sigma_{x,M}}{\sigma_M^2} \tag{xx}$$

再次指出,风险的"价格"为 $\mu_M - \mu_f$,但是,现在风险量由 $\sigma_{x,M}/\sigma_M^2$ 来度量——这个收益 x 与市场之间的协方差与市场收益的方差之间的比率,就是这一资产的 β 系数。许多资料都阐述了对金融资产 β 系数的估计。

有关 CAPM 的研究

这个版本的资本资产定价模型清楚地说明了各种资产期望收益率的决定因素。因为它的简单性,人们用很多经验数据对这一模型进行了多次检验。概括地说,人们发现该模型中对系统风险的度量(即 β)和期望收益率是相关的,而用更简单的方法度量的风险(例如,利用过去收益的标准差)却和期望收益率不相关。最早得到这个结论的经验研究大概是 Fama 和 MacBeth(1973)作出的。但 CAPM 模型本身只能解释不同资产收益率差异中的一小部分。相对于 CAPM 模型,一些学者发现有很多其他的经济因素显著地影响了期望收益。事实上,对 CAPM 模型的主要挑战来源于它最初的创建者之一[参见 Fama 和 French(1992)]。

参考文献

Fama, E. F., and K. R. French. "The Cross Section of Expected Stock Returns". *Journal of Finance* 47(1992):427—466.

Fama, E. F., and J. MacBeth. "Risk, Return, and Equilibrium". *Journal of Political Economy* 8 (1973):607—636.

Freund, J. E. *Mathematical Statistics*. 5th ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1992.

Hoel, Paul G. *Introduction to Mathematical Statistics*. 5th ed. New York: John Wiley and Sons, 1984.

Jensen, M. "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945—1964". *Journal of Finance* (May 1968):386—416.

Lintner, J. "The Valuation of Risk Assets and the

Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economics and Statistics* (February 1965):13—37.

Scharfstein, D. S., and J. Stein. "Herd Behavior and Investment". *American Economics Review* (June 1990):465—489.

Sharpe, W. F. *Portfolio Theory and Capital Markets*. New York: McGraw-Hill, 1970.

Tobin, J. "Liquidity Preference vs. Behavior Towards Risk". *Review of Economic Studies* (February 1958): 65—86.

第 19 章 信息经济学

信息是一种有价值的经济资源。知道到哪里去买价廉质优商品的人会比不知情者有着更大的预算范围;而可以得到准确天气预报的农夫能够避免损失;同样,基于牢固的科学知识,政府的环境规划也可以更有效率。虽然关于信息价值的上述观察很早就得到了承认,但是,对于获得信息以及在资源配置中应用正式的经济学模型却是相当晚近的事情。[①] 信息经济学的研究虽然起步较晚,但是,它却是当前的一个主要的研究领域。在这一章,我们将简要地概述从这一研究中产生的几个主要问题。

19.1 信息的性质

打算从事信息经济学研究的经济学家所遇到的一个难题是"信息"本身并不容易被定义。与迄今为止我们所研究的经济品不同,从不同的行动中可以获得的信息的"数量"是不好确定的,而且,获得的信息在其用户之间也不是同质的。经济上有用的信息其形式是各不相同的,以至于无法用我们在说明汉堡包和软饮料时所用的价格与数量特征来描述。相反,打算研究信息的经济学家却一定会注意说明,在某种特定决策问题中的信息环境[有时也被称为信息集(information set)]是怎样的,以及通过个人行动上述环境又会发生怎样的变化。可以预见,这种方法引致了各种彼此之间缺乏共性的特殊情况的经济模型。

在信息研究中所涉及的第二个复杂的问题是信息本身的某些技术性质。许多信息是耐用的,并在使用之后仍具有价值。与热狗不同,热狗只能被吃一次;而关于一次特别降价的消息就不只会被发现它的人使用,而且也能被与此人共同分享信息的其他朋友使用。所以,即便这些朋友并不花费什么就得到了信息,但是,他们仍然可以通过这种信息而受益。诚然,在这种情况的一个特例中,信息有着纯**公共品(public good)**的特征(参见第 21 章)。也就是说,因为其他人可以以零交易费用来使用信息,所以,这种信息是**非竞争性的(nonrival)**;也因为没有哪个人能够阻止其他人使用信息,所以,它也是**非排他性的(nonexclusive)**。这些性质的经典例证就是新的科学发现。当有人发明了车

① 关于信息的正式建模要从 G. J. Stigler 的开创性文章"The Economics of Information"算起,该文载于 *Journal of Political Economy* (June 1961):213—225。

轮时，其他人可以使用车轮而并不减损这一发明的价值，并且，每个看到车轮的人都可以自由地仿制它。

信息的上述技术性质意味着，在为提供信息和获取信息而配置资源方面，市场机制通常运作得并不完善。所以在分析这类行为时，标准供求模型的作用可能相对有限。但至少我们要求模型能够准确地反映假定的关于信息环境的性质。在本书以后的部分，我们将描述这样的一些模型。不过，在这里，我们相对较少地关注供求平衡，而是首先把注意力集中在从个人选择理论中产生的信息问题上。

19.2 信息的价值

建立有关获取信息的模型时，我们会使用许多前一章中研究不确定性时所介绍的概念。在许多方面，信息的缺乏对决策者来说确实意味着一个不确定性的问题。缺乏完全信息，决策者就不能准确地知道特定的行动会导致什么结果。较好的信息可以减少不确定性，从而产生使效用水平增加的更好的决策。

19.2.1 信息与主观概率

不确定性和信息获取之间的关系可以通过我们在前一章提出的状态偏好方法来说明。在前一章，我们假定个人可以形成世态，即“好时期”与“坏时期”概率的主观意见。在我们这里的模型中，由于允许个人对他关于这些概率的估计进行修改，并利用其修改，所以，信息是有价值的。例如，预先被告知明天一定是好时期会让得知消息的人把他的概率修改为 $\pi_g=1,\pi_b=0$，并会随之改变其购买决策。而当所获得的信息并不确定时，个人就只会略微地修改概率。不过，即便是小修小改也是相当有价值的。当你向一些朋友问询关于一些牌子的卡式录音机的购买经验时，你可能并不想让他们的意见支配你的选择。你的看法也会受到录音机的价格和其他类型的信息（比如说，从咨询性的消费者报告所获取的信息）的影响。但是，你最后必须把所有这些因素处理成一个决策，该决策反映了你对不同“世态”（在这种情况下，就是从购买不同品牌中获得的质量）概率的估价。就信息改变了先验概率，以及可以让个人进行更好的决策这一点来说，它就是具有经济价值的资源。

19.2.2 正式的模型

为了说明信息搜寻怎样被纳入关于个人选择的模型，我们假定信息可以通过收到的“消息”数量（m）来度量，我们还假定个人决策者会根据这些消息调整他的主观概率。因此，π_g 与 π_b 是 m 的函数。现在，个人的目标就是要使下式最大化

$$\text{期望效用} = \pi_g U(W_g) + \pi_b U(W_b) \tag{19.1}$$

服从于

$$I = p_g W_g + p_b W_b + p_m m \tag{19.2}$$

这里，p_m 是每单位信息的成本（即手工的时间成本、打电话搜集价格信息的成本等）。写出此问题的拉格朗日函数，为

$$\mathscr{L} = \pi_g U(W_g) + \pi_b U(W_b) + \lambda(I - p_g W_g - p_b W_b - p_m m) \tag{19.3}$$

可以得出有约束最大化问题的如下一阶条件

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial W_g} = \pi_g U'(W_g) - \lambda p_g = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial W_b} = \pi_b U'(W_b) - \lambda p_b = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial m} = {} & \pi_g U'(W_g)\frac{\mathrm{d}W_g}{\mathrm{d}m} + \pi_b U'(W_b)\frac{\mathrm{d}W_b}{\mathrm{d}m} + U(W_g)\frac{\mathrm{d}\pi_g}{\mathrm{d}m} \\ & + U(W_b)\frac{\mathrm{d}\pi_b}{\mathrm{d}m} - \lambda p_g\frac{\mathrm{d}W_g}{\mathrm{d}m} - \lambda p_b\frac{\mathrm{d}W_b}{\mathrm{d}m} - \lambda p_m = 0\end{aligned} \tag{19.4}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = I - p_g W_g - p_b W_b - p_m m = 0$$

上述方程中的前两个重新表达了早先推导出的最优结果。在实现最优时，期望边际效用的（主观）比率应该等于价格比率 p_g/p_b。第三个较复杂的方程表示了效用最大化时信息购买量的选择。在这个模型中，所有信息的价值来源于改变了的好日子和坏日子的主观概率。如果获得信息后，并没有改变这些概率，最开始的两个一阶条件将使财富分配不发生变化，亦即信息没有价值。当新的信息改变了概率时，个人会估计该改变将带来效用改变的多少，从而决定在信息中投资多少。这期间的得失权衡显示在第三个方程中。然而，最优信息获取的原理在离散概率中比这种连续的模型能得到更清晰的显示。下面的例子是一个简单的说明。

例 19.1

价格信息的价值

为了说明新信息如何影响效用最大化的问题，我们回到在第 4 章中使用的一个模型。如果一个消费者消费两种商品，效用由 $U(x,y)=x^{0.5}y^{0.5}$ 决定，这样间接效用函数为

$$V(p_x,p_y,I) = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}} \tag{19.5}$$

作为一个数值上的例子，我们考虑 $p_x=1, p_y=4, I=8$ 的情形，并计算得 $V=I/2\cdot1\cdot2=2$。我们假设商品 y 代表一筒崭新的网球，而消费者知道可以以 3 美元或 5 美元从两家商店购买，但不知道哪家商店的价格是 3 美元，因为两家商店价格为 3 美元的可能性是相同的，期望价格为 4 美元。但是，因为间接效用函数是价格的凸函数，该人得到的期望价值大于从购物中得到的 $V=2$，因为当他遇到低价商品时，他可以购买更多。购物前，期望效用为

$$\begin{aligned}E[V(p_x,p_y,I)] &= 0.5\cdot V(1,3,8) + 0.5\cdot V(1,5,8) \\ &= 1.155 + 0.894 = 2.049\end{aligned} \tag{19.6}$$

而如果消费者知道哪家店会比较便宜，效用就会更大。如果这个人可以肯定地以 $p_y=3$ 购买，间接

效用就会等于 $V=2.309$,我们可以用这个结论来计算信息的价值。即,当我们靠运气在两家店间选择时,我们要知道,有多大的收入 I^* 可以得到与 $p_y=3$ 时相同的效用。我们需要解下面的方程

$$V(p_x,p_y,I^*)=\frac{I^*}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}}=\frac{I^*}{2\times1\times3^{0.5}}=2.049 \tag{19.7}$$

计算得 $I^*=7.098$。这样,这个人将愿意为这条信息最多支付 0.902($=8-7.098$)。注意,价格信息从两方面帮助了这个人:(1) 它把消费者从低价商店购买的概率从 0.5 增加到 1;(2) 它允许这个人利用低价购买更多。

请回答:此处,为什么消费者有价格不确定性时的期望效用($V=2.049$)超过了当价格取固定的期望值时的效用($V=2.00$)? 这违反厌恶风险的假定吗?

19.2.3 信息的不对称性

研究信息获取的一个明显含义在于,个人所获取的信息水平由每单位信息的价格决定。与大多数商品的市场价格不同(这些商品被假设对每个人都一样),有许多理由可以使人相信这些信息的费用在个人之间是存在着较大差异的。某些人可能在获得信息方面具有特别的技能(例如,他们可能是训练有素的机械师),而其他人则可能不具备这种技能;某些人可能具有能带来有价值信息的其他类型的经验,但另一些人却缺乏这种经验。例如,由于某商品的卖主准确地知道该商品是怎样生产出来的,以及在什么地方可能会出现问题,所以,卖主通常要比买主更清楚商品的局限性;类似地,大量重复购买某种商品的买主也会比第一次购买这种商品的人拥有更多的信息;最后,一些人还会投资于某种信息服务(例如,通过计算机连接到中介机构,或是通过订阅消费者报告),这些信息服务就会使他们获得额外信息的边际成本低于那些没有进行此类投资的人的边际成本。

所有这些因素都表明,在市场交易的参与者之间,信息水平可能是不同的。当然,在许多例子中,信息费用可能不高,彼此的上述差异也不大。例如,绝大多数人都可以仅凭看一眼就能够相当准确地对新鲜蔬菜的质量作出评价。然而,当信息费用较高、并且因人而异时,可以预见占有不同数量信息的人们会有不同的竞争优势。

19.3 信息与保险

保险市场的特征是存在着大量的信息不对称。其中的绝大多数产生于保险的买主与卖主关于所投保的不确定事件的信息上的差异。由于保险的买主直接面对这些不确定性,所以,他们通常在了解这些事件会发生的真实概率方面处于有利位置,并且通常也可以采取能够影响事件发生概率的行动。比方说,住在城市某一区的一个汽车所有者,会知道他是否把汽车停在了很可能被盗的地方,他可以在可能花一些代价的前提下选择把车停在安全处。而另一方面,从事汽车保险的公司会发现要搞清每位投保者怎样选择停车地,其代价是不可预计的。所以,他们只能以假定的平均行为作为

确定保险费率的基础。因为这种情况并非保险市场所独有,而是大量涉及信息不对称的交易的特征;所以,我们要对其加以详细考察。我们将要讨论的道德风险和逆向选择大概是现代信息理论中最重要的发现了。

19.4 道德风险

个人可以采取许多能影响风险事件发生概率的行动。例如,担心遭受火灾损失的房主就可以安装喷水系统,或者把灭火器放在方便易取的位置上。类似地,人们可以为汽车购买防盗装置,试图通过采取保持身体健康的方法来减少生病的概率等。在这些行为中,追求效用最大化的个人会将风险降低到从额外的预防措施中所得到的边际收益等于这些预防措施的边际成本那一点上。

不过,买了保险,上述计算就会发生变化。如果一个人为可能的损失保了全险,那么,他对采用昂贵的预防措施的激励就会不足,由此可能会增加发生损失的概率。例如,在有汽车保险的情况下,买了失窃险的人也许就会在不太安全的地方停车,或者不安装防盗装置。这种对应于保险防护范围(insurance coverage)的行为反应,我们称之为**道德风险(moral hazard)**。

定义

道德风险。它是指保险防护范围对个人所采取的可以改变损失发生概率的行动的影响。

用“道德”这个词去说明这种反应,也许并不适当。它所描述的行为只是个人简单地对他们所面对的激励进行反应,并没有什么特别不道德的。在某些情况下,这种反应甚至可能是合意的。[①] 但是,由于承保人可能发现度量和估价这种反应的费用很高,因此,道德风险对于资源配置就有了很重要的影响。为了研究这些影响,我们需要一个简单的效用最大化的模型。

19.4.1 数学模型

假定一个风险厌恶者面对的会使其最初财富(W_0)发生损失(l)的概率为 π。但是,如果此人花费在预防措施上的金额为(a)时,概率会减小。如果我们假定状态是独立的,并且,我们用 $U(W)$ 代表状态 1(没有损失)和状态 2(有损失)时的个人效用。那么,在没有加入保险时,两种状态下的财富就由下式给定

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 - a \\ W_2 &= W_0 - a - l \end{aligned} \tag{19.8}$$

此人会对 a 进行选择,以使期望的效用最大化,有

$$\text{期望效用} = E = (1-\pi)U(W_1) + \pi U(W_2) \tag{19.9}$$

① 例如,由于保险可以减少接受医疗服务的实际支出,所以,买了医疗保险的人就受到鼓励而去进行早期治疗。

由于 π 是 a 的函数，因此，实现最大化的一阶条件是

$$\frac{\partial E}{\partial a}=-U(W_1)\frac{\partial \pi}{\partial a}-(1-\pi)U'(W_1)+U(W_2)\frac{\partial \pi}{\partial a}-\pi U'(W_2)=0 \tag{19.10}$$

或

$$\pi U'(W_2)+(1-\pi)U'(W_1)=[U(W_2)-U(W_1)]\frac{\partial \pi}{\partial a} \tag{19.11}$$

这个结果可以用常识来加以解释，即个人的预防措施会进行到这样的程度，直至再多花 1 美元进行这类行动所产生的效用上的成本（由于财富的减少）（方程 19.11 的左项）等于（因这 1 美元预防行为）降低损失的概率所带来的效用上的收益（$\partial\pi/\partial a$ 为负）为止。

19.4.2 保险下的行为和完全监督

随着保险内容的不同，情况会更加复杂。设此人可能会购买如果发生损失能得到 x 数量赔偿的保险，而买这个数量的保险需要支付的保险费为 p（很明显 p 由 x 决定）。现在，在两种可能的状态出现时的财富为

$$\begin{aligned}W_1&=W_0-a-p\\W_2&=W_0-a-p-l+x\end{aligned} \tag{19.12}$$

并且，此人会对 a 与 x 进行选择，以使期望效用最大化。如果承保人可以监督预防措施，并由此知道损失发生的概率，那么，它就可以收取公平的保险费

$$p=\pi x \tag{19.13}$$

在这样一个保险的情况下，就有

$$\begin{aligned}W_1&=W_0-a-\pi x\\W_2&=W_0-a-l+(1-\pi)x\end{aligned} \tag{19.14}$$

假定状态是独立的，此人就可以通过选择 x 使 $W_1=W_2$ 来实现期望效用最大化，如同在我们前面的模型中，这需要全额保险（即 $x=l$）。全额保险下，对 a 进行选择以实现效用最大化的一阶条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a}=&-(1-\pi)U'(W_1)\left(1+l\frac{\partial \pi}{\partial a}\right)-U(W_1)\frac{\partial \pi}{\partial a}\\&-\pi U'(W_2)\left(1+l\frac{\partial \pi}{\partial a}\right)+U(W_2)\frac{\partial \pi}{\partial a}=0\end{aligned} \tag{19.15}$$

利用我们已知的 $W_1=W_2$，则有

$$1=-l\frac{\partial \pi}{\partial a} \tag{19.16}$$

上述条件类似于我们在前面不投保的情况下推导出的条件，虽然现在可以得到全额保险但它仍可以被简单地加以陈述：在进行效用最大化的选择时，一个额外单位的预防措施的边际成本（此处刚好是 1）应该等于由额外花费所提供的期望损失的边际减少额。因此，在全额保险与公平保费的情况下，预防性购买仍是在最优的水平上作出的。

19.4.3 信息问题和不完全监督

到目前为止，我们的分析一直基于承保人知道个人会发生损失的概率，并能收取公平保险费这一不十分合理的假设之上。而当个人能够进行预防性行动时，该假设就更加令人怀疑了。这似乎是要求承保人要不断地监督人们的行动，以决定发生损失的真实概率是多少。另外，这也要求承保人要向每个购买保险的人收取有差别的保险费，以反映出他们各自不同的预防性行动。在绝大多数情况下，获取这种信息具有无法承受的高成本。所以，提供保险的公司必须要采用并不完全了解信息时的制定保险费的方法。

在最简单的情况下，提供保险的公司要根据某一组人发生损失的平均概率来设定保险费率，对个别防护性行动并不提供例外。① 不过，在这样的保险政策下，人人都会有一种减少自己预防性行动的激励，这是因为实施预防性行动需要支付费用，并且，在全额保险的情况下，这甚至不会产生效用。全额保险的情况可以直接表示这一结果。如果在方程 19.12 中，有 $x=l$，则无论是缴纳保险费还是采取预防性行动，都有 $W_1=W_2$。不过，由于现在的保险费率并不由 a 决定，所以，显而易见的是，当 $a=0$ 时，效用实现了最大化。甚至当保险费部分地取决于 a 时，仍可以表明：最后的效用最大化的特征是过少的预防性支出和过多的保险。于是，在本质上，道德风险对于资源配置的扭曲效应产生于个人与承保人在监管预防性行动上的信息不对称。②

例 19.2

道德风险与检查

在第 18 章的几个例子中，我们研究了个人关于为防止汽车失窃而购买价值 20 000 美元保险的决策。在此，我们讨论他是否安装一个价值 1 950 美元防盗装置的决策，该防盗装置使汽车被盗的概率从 0.25 降到 0.15。从期望价值上看，由于 2 000(0.10 × 20 000) 美元的期望收益超过了装置的成本，所以，进行安装显然是有意义的。从安装防盗装置中得到的期望效用为

$$\begin{aligned}\text{期望效用} &= 0.85\ln(100\,000-1\,950)\\&\quad+0.15\ln(100\,000-20\,000-1\,950)=11.4590\end{aligned}\tag{19.17}$$

它也超过了不安装防盗装置的期望效用（11.4571，参见方程 18.56），这样，没有投保的车主将会采取这种预防措施。

保险与道德风险。不过，在可以得到保险时，情况就并非如此了。具体地说，假定个人可以购买价值 5 200 美元的全额保险——这个保险金代表期望损失是 5 000 美元，以及 200 美元与管理费用相关的收费。还假定保险公司并不付出努力去监督防盗装置的安装。在这种情况下，买这种保险的期望效用（11.4595——参见方程 18.60）大于安装防盗装置的期望效用，于是，个人将愿意选择去购买

---

① 另一种可能性是承保人可能把个人划入不同的风险范围（比如，分成“吸烟者”和“不吸烟者”、“城里人”和“乡下人”等等）。在下一节中，我们将研究在以这种风险条款为特征的市场中产生的一些问题。

② 如果承保人可以部分地监督预防性支出（比如通过观察个人购买保险的情况），分析会变得更为复杂。如果这种监督不完全，资源配置仍然可能会无效。有关这一方面的讨论，请参见 S. Shavell, “On Moral Hazard and Insurance”, *Quarterly Journal of Economics* (November 1979): 541—562。

保险。

检查防盗装置。如果承保人可以检查防盗装置的安装，那么，上述计算将又会有所变化。假设确定一个汽车所有者是否已经安装了防盗装置要花费 10 美元。在这种情况下，对于一个安装了防盗装置的人来说，保险费就是 3 210 美元——3 000 美元是期望损失($0.15 \times 20\,000$)，200 美元是管理费用，10 美元是检查费用。如果一个人购买了这样的一份保险(并安装了一个防盗装置)，那么，由于一旦失窃发生，保险公司将赔偿其全部损失，所以，他的财富将毫无疑问地是 94 840($=190\,000-3\,210-1\,950$)美元。则期望效用由下式得到

$$\text{期望效用} = \ln(94\,840) = 11.4600 \tag{19.18}$$

它既超过了不买保险而只安装防盗装置可得到的效用，也超过了购买不用进行检查的保险所能得到的效用。因此，保险的可获性是否阻碍了所有的预防性支出，从根本上取决于检查费用的多少。

请回答：假定无论个人是否实际安装了防盗装置，每份保险都必须要支付 100 美元的防盗装置的检查费。那么，现在他会作出什么样的决策呢？

19.5 逆向选择

当不同的人经历不利结果的概率不相同时，信息不对称对市场交易产生影响的第二种方式就会出现。如果(与道德风险的例子相同)个人比承保人更加准确地知道发生损失的概率，由于承保人无法在准确度量期望损失的基础上确定保险费率，所以，保险市场就不能正常地运行。最后的均衡也可能对许多市场参与者来说并不合意。

19.5.1 图形说明

图 19.1 显示了两个人的情况：每个人都从最初的财富 W_0 开始，并面对发生损失 l 的可能。E 点代表两个人的最初位置——在状态 1(没有损失)时，他们会得到 W_0；而在状态 2(有损失)时，他们会得到 W_0-l。假定他们面对着不同的发生损失的概率——高风险的人发生损失的概率为 π_H；低风险的人发生损失的概率为 π_L(低于 π_H)。在公平保险与状态独立的情况下(正如我们在第 18 章中看到的那样)，两个人都将愿意向确定性线移动。EF 与 EG 线的斜率分别为 $-(1-\pi_L)/\pi_L$ 与 $-(1-\pi_H)/\pi_H$，分别表示两个人通过购买公平保险用 W_1 交换 W_2 的市场机会。[①] 这样，低风险的人就在点 F 上实现了效用最大化，而高风险的人会选择点 G。

不过，如果承保人对参与保险的人究竟是处于低风险状况，还是高风险状况的信息的了解是不完全的，那么，图 19.1 中的答案就是不稳定的。难处在于：由于在两种状态中，F 点所提供的财富多于 G 点所提供的，因此，高风险的人也愿意追求 F 点。他们会受到激励去买那些原本打算是为低风

① 这些斜率由方程 19.14 推出，该方程表示了每增加 1 美元保险(x)可以使 W_1 减少 π，使 W_2 增加($1-\pi$)。例如，如果 $\pi=0.1$，1 美元的保险花费了 0.1 美元，使 W_1 减少了 0.1 美元，使 W_2 提高了 0.9 美元(因为它补偿了 1 美元的损失，但仍要付出 0.1 美元的费用)。图 19.1 中的斜率也称为优比比率(odds ratios)。

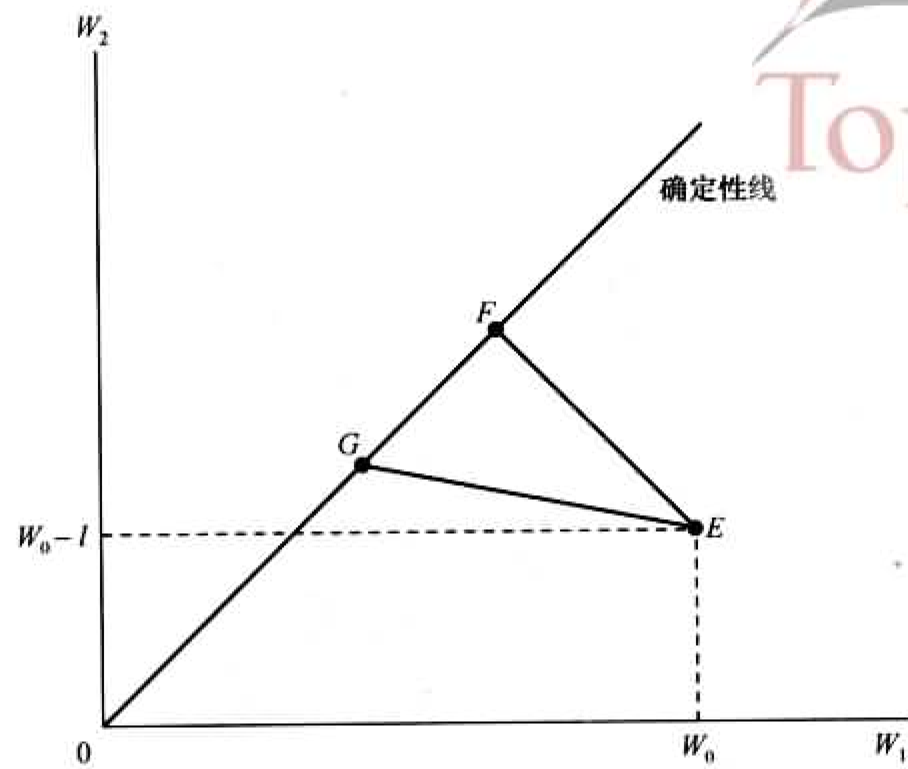


图 19.1　存在风险差异的均衡

在完全信息的情况下，低风险的人会沿着市场保险线 EF 移动，并选择 F 点。高风险的人会沿着 EG 移动，选择 G 点。在不完全信息的情况下，两种类型的个人都将选择 F 点，而这是不可行的。

险的人提供的保险；而由于没有关于风险分布的信息，承保人也没有减少向他们提供保险的依据。当客户是一组混合在一起的人时，承保人会面临着比 π_L 高的损失的平均概率，并且，平均而言，它所卖出的每一单位保险都会赔钱。对于一组混合在一起的客户，点 F 不是可行的均衡。

19.5.2　混合均衡

解决这一问题的一种可能的方法是由保险公司推出一种保险，这种保险的保费是以损失的平均概率，即 $\bar{\pi}=(\pi_H+\pi_L)/2$ 为基础计算的。图 19.2 中的 EH 线显示了进行这种分担的可能性。这种情况下，两种类型的人都不一定会选择 H 点表示的完全保险（这是由于，EH 线不再准确地反映每个人知道的自己面对的真实概率了），他们也许就买了像 M 点这样只提供部分保险的保险单。但是，由于在 M 点上对于低风险的人还存在着进一步交易的机会，所以，M 点不可能是最后的均衡。这个过程可以被表示如下：在 M 点上，低风险者的无差异曲线（U_L）要比高风险者的无差异曲线（U_H）更陡峭。① 这样，就存在着对高风险者没有吸引力，但对低风险者有吸引力并使承保人有利可图（由于它们位于 EF 线以下）的保险安排（比如 N 点）。

① 由于期望效用为 $(1-\pi)U(W_1)+\pi U(W_2)$，则 MRS 就由下式确定

$$\frac{-\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}W_1}=\frac{(1-\pi)U'(W_1)}{(\pi)U'(W_2)}$$

假定两个人有相同的效用函数，特别是，他们在 M 点上有相同的财富，仅仅由于两个人损失的概率不同，其 MRS 就是不同的。由于

$$(1-\pi_L)/\pi_L>(1-\pi_H)/\pi_H$$

所以，低风险者的无差异曲线就更陡峭。该证明是在 M. Rothschild 和 J. Stiglitz 的文章"Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information"作出了分析之后才有的。该文载于 *Quarterly Journal of Economics*（1976 年 11 月号），第 629—650 页。

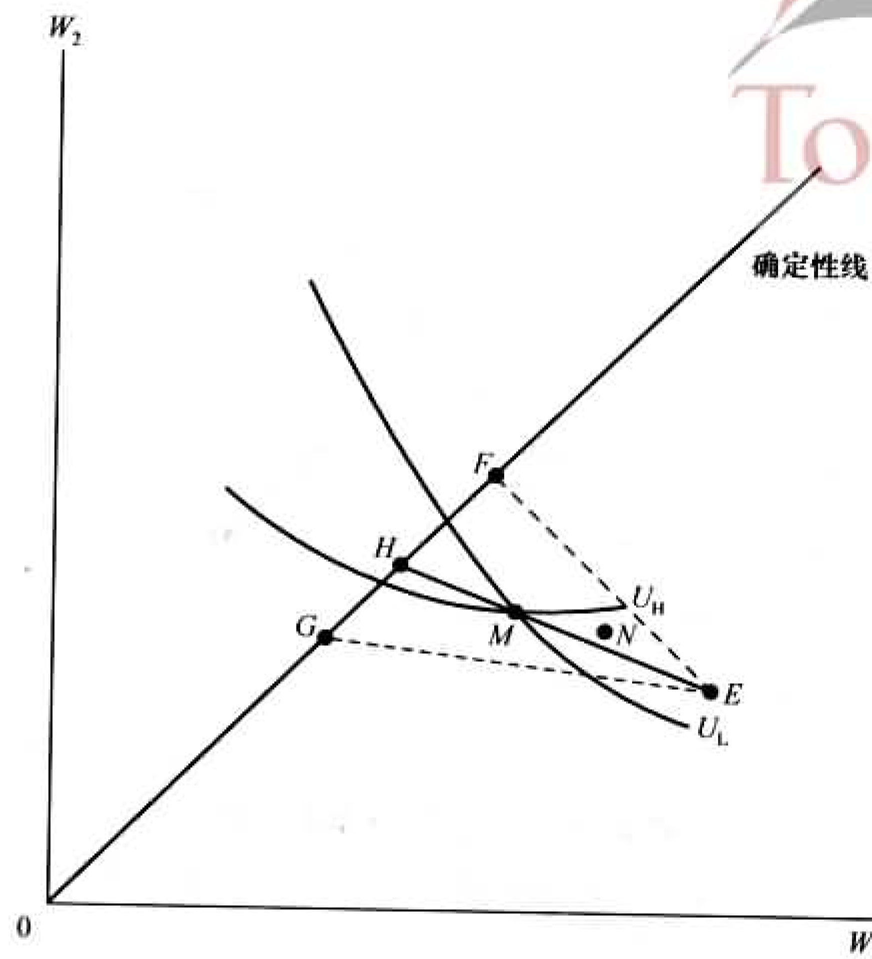


图 19.2　混合均衡的不可能性

混合保险策略提供了由 *EH* 表示的机会。由于存在着有益于承保人与低风险投保人，仅对高风险投保人无益的保险选择(*N* 点)，所以，在 *EH* 线上像 *M* 点这样的点就不可能是均衡点。

假设不存在对出售公平定价保险的阻碍，*N* 点这样的保险政策就会对低风险的人产生吸引力。这样分担后损失的概率会上升到 $\bar{\pi}$ 以上，所以，*M* 点就不再是均衡点了。在这种情况下，混合均衡 *M* 是不可行的。

19.5.3　分离均衡

如果具有不对称信息的市场必须要有一个可行的均衡的话，那么，它一定是以某种方式分离的。也就是说，高风险的人一定具有购买某一种类型保险的激励，而低风险的人会有买另一种类型保险的激励。图 19.3 说明了一种这样的情况：在这里，承保人有保险策略 *G*，而高风险的人的反应是选择完全的保险。如果我们用 U_H 表示高风险的人通过 *G* 的无差异曲线，那么，对于低风险的人来说，任何位于无差异曲线 U_H 之上的保险政策都是不可行的。这是因为，承保人不可能阻止高风险的人利用这种机会。在这种情况下，低风险的人所能得到的最好的政策就是像 *J* 这样的点。这种政策稍微低于 U_H，但在经济上是可行的(由于它位于 *EF* 线之上)，并对低风险的人来说提供了比他面对一个无保障的世界时要高一些的效用。由此，*G* 和 *J* 这两种保险政策就代表了分离均衡。

显而易见的是，这种均衡要劣于图 19.1 说明的完全信息均衡。如果承保人可以确定购买保险的每个人的真实风险，则低风险者的状况会有所改善，而高风险者的状况也不会变坏。尽管信息不对称将阻碍人们得到"最优"的均衡，但是，许多其他的措施(例如政府管制，或由承保人自己进行的在高风险与低风险的人之间的交叉补贴)却仍可以使两种人得到均衡条件下的改善，有关的说明参

见图 19.3。

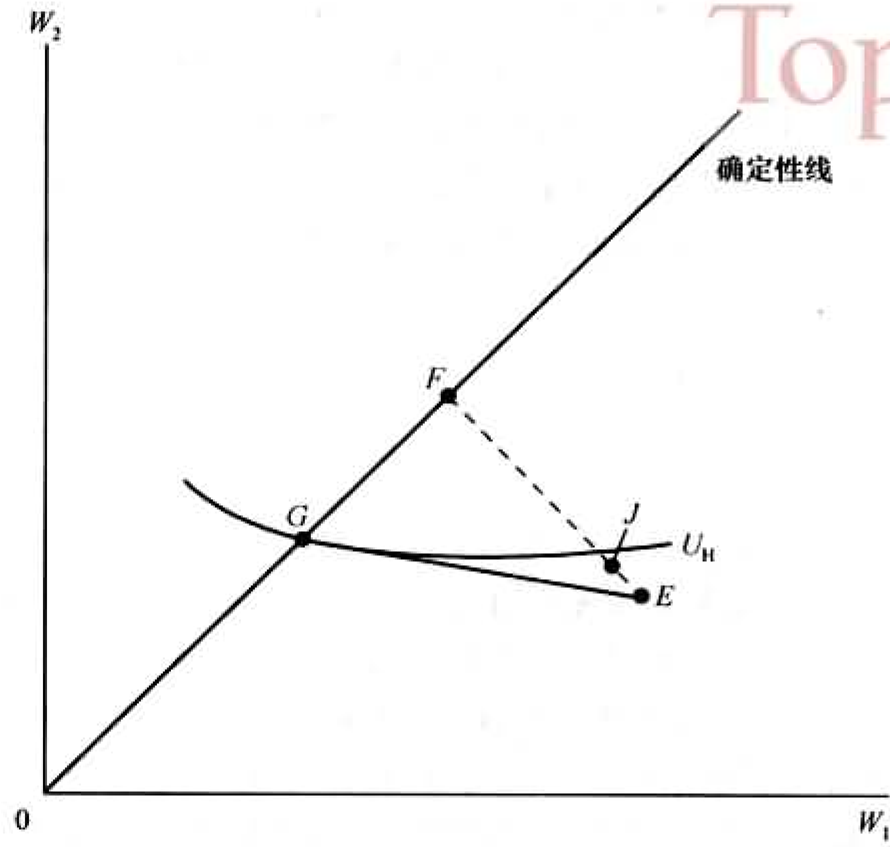


图 19.3　分离均衡

在不完全信息的情况下，G 和 J 代表了可能的分离均衡。此时，高风险的人会选择完全的保险（G 点），而低风险的人则会得到那些对他们有吸引力，但对高风险的人没有吸引力的部分保险（J 点）。

19.5.4　市场信号

这种改善的一种方式是由低风险者把他们的真实状况告知承保人所可能做的努力。我们已经看到，个人在同承保人分享他所了解的情况时，他一定会从中受益。那么，首要的困难就是他们送给承保人的信号是否是可信的，这是因为，如果高风险的人能够使承保人相信他们也是低风险的，则高风险者也会从中获得好处。

正是信号不准确的这种可能性使有关这一方面的研究饶有趣味。如果承保人可以简单地向每个客户询问他的风险类型，并得到准确答复的话，那么，上一节所描述的信息不对称问题就无关紧要了。因此，经济学家更有兴趣去研究承保人究竟有多大可能性通过观察其客户的市场行为去准确推断他们的风险概率。适当的环境会对每个人产生显示其真实状况的激励，于是，承保人可以利用这些**市场信号（market signals）**。图 19.3 表示的情况已经对此提供了一个清楚的说明。在这个均衡中，高风险的人购买保单 G，从而得到全额保险；而低风险的人则购买保单 J，只得到了部分保险。因此，分离的均衡就与个人的风险类型相对应。承保人可以利用这些信息为低风险的人提供更好的保险政策。

更为一般地，假如由承保人所观察到的经济行为能够准确反映风险类型，那么，市场信号就可以从许多来源中被加以提炼。这种情况出现的一个必要条件是：发送信号行动的费用一定要与发生损失的概率相关。如果无论风险等级如何，费用都是相同的，那么，个人在“发送”信号方面的激励也会

相同，这样就失去了信号的信息价值。例如，很常见地，保险公司对于高性能赛车会收取比类似价格轿车更高的汽车保险费。一种可能的解释是，个人购买汽车时会表明他们的驾车习惯——也许赛车的拥有者在驾驶时会感觉他们是在赛道上。然而，只有当高风险的人厌恶驾驶普通轿车（只喜欢驾驶赛车）时，从汽车购买信息中获得的分离均衡才是可以维持的。否则，他们就会改变汽车购买决策，以获得较低的保险成本。在正式的条款中，只有高风险的人采用低风险者的市场行为要付出高昂的代价（或许是在心理上）时，对于轿车的选择才是一种好信号。这些可能性将在下例中给予说明。

例 19.3

保险中的逆向选择

我们在例 19.2 中关于安装汽车防盗装置的分析，仍然可以应用在逆向选择问题上。如果承保人知道哪一个车主安装了防盗装置，他们就能相应地确定保险价格。于是，没有安装防盗装置的车主面临着 0.25 的发生损失的概率，因而愿意支付 5 000 美元的保险费进行投保（此处为了简单起见，我们假定没有签订保险合约的管理费用）。在这个例子中，车主投全额保险，得到的期望效用为

$$\text{期望效用} = \ln(100\,000 - 5\,000) = \ln(95\,000) = 11.4616 \tag{19.19}$$

由于我们想把讨论集中在对损失的概率进行区分方面，而不是集中在防盗装置的费用方面，所以，假定其他的车主在过去的某个时候已经安装了这种防盗装置。由此，安装防盗装置的费用就是一种沉没成本，它不会影响当前的决策。具有防盗装置的车主可能发生损失的概率为 0.15，其面对的实际公平保险费为 3 000 美元。在全面保险的情况下，期望效用为

$$\text{期望效用} = \ln(97\,000) = 11.4825 \tag{19.20}$$

如果承保人不能辨别某个车主是否已经安装了防盗装置，那么，两种车主就都会购买低风险的保险单。假定所有车中有 50% 的汽车安装了这种装置，那么，承保人的损失率为 0.20，平均每张保险费为 3 000 美元的保险单就要损失 1 000 美元。显然，4 000 美元的混合保险费率对于高风险的车主会有吸引力，但低风险的车主却会因为如果不投保状况会更好的原因拒绝购买这种保险。

$$\begin{aligned} \ln(96\,000) &< 0.85\ln(100\,000) + 0.15\ln(80\,000) \\ 11.4721 &< 11.4795 \end{aligned} \tag{19.21}$$

由于低风险的人会拒绝参与，所以，混合均衡是不可行的。

分离均衡。高风险的人选择全额保险（保险费为 5 000 美元），低风险的人不买任何保险的情况在此是一种可能的分离均衡。但是，这时还存在着能为承保人带来收益，并能吸引低风险车主的部分保险的机会。为了寻求最佳结果，我们必须要找到一种对高风险车主不具有吸引力，但对低风险者又合意的保险政策。由于这样一种保险的保险费是 $0.15x$（x 是如果发生损失，能得到赔偿的金额），所以，我们要解下面的不等式

$$0.75\ln(100\,000 - 0.15x) + 0.25\ln(80\,000 + 0.85x) < \ln(95\,000) \tag{19.22}$$

其近似解为

$$x < 3\,000 \tag{19.23}$$

这样，如果要做到对高风险车主不具有吸引力，低风险的保险政策就只能对低风险车主损失中的

3 000 美元进行补偿。购买这种保险(要花 450 美元)的低风险车主的期望效用为

$$0.85\ln(99\,550) + 0.15\ln(82\,550) = 11.4803 \tag{19.24}$$

尽管这个数字超过了拒绝购买保险的低风险车主的期望效用(方程 19.21),但是,它仍没有达到同一个人在完全信息均衡时所达到的水平。因此,低风险者会为了使他们在分离均衡时的状况有所改善而投资于这种信号。现在要求你对此类信号进行考察。

请回答:如果只有低风险车主可以购买一张表示他们安装了防盗装置的证明的话,那么,他们会为此付多少钱?伪造的证明费用要多高,才能防止高风险者使用它们?

19.6 委托与代理关系

不对称信息影响资源分配的一种重要途径来源于一个人雇用一个比自己拥有信息更多的人为自己作决策时的情形。例如,病人雇用医生来决定治疗方案,投资者雇用金融咨询师来理财,摩托车手让机械师判断车子的毛病,股东雇用管理者来管理公司。在这些情形中,一个信息较少的人(委托人)雇用了信息较多的人(代理人)来为自己的福利作决策。对此,我们有下面的定义。

定义

委托—代理关系。委托人雇用代理人为自己作决策。

信息不对称会使委托—代理关系出现问题。在本节,我们将讨论,寻求利润最大化的公司的所有者和管理者之间的潜在冲突。委托—代理关系出现在其他很多方面,迄今已有很多的文章讨论这个问题。在本章末尾,我们会提到对这些问题的研究的一些基本指导。

19.6.1 所有者—管理者间的冲突:图形方法

亚当·斯密深谙在所有者与管理者间的基本矛盾。在《国富论》中,他写到了“公司的管理者,管理的是别人的钱而不是自己的钱,我们不能期待他们会像所有者那样尽心”[①]。以著名的英国皇家非洲公司(Royal African Company)、哈德森港口公司和东印度公司为例,斯密指出了一些由非所有者管理公司而带来的问题。他的观察提供了现代企业研究的一个重要起点。

管理者代理问题可用图 19.4 来说明,它表示了管理者关于公司利润(所有者的主要关注点)和其他一些的好处(比如喜欢的办公室、乘公司喷气式飞机或直升机去旅行)的偏好的无差异曲线图。[②] 假设利润和其他好处给管理者带来效用,这些无差异曲线图和第 2 篇中的无差异曲线图的形状类似。

① Adam Smith, *The Wealth of Nations*(New York: Random House, Modern Library Edition, 1937), p.700.

② 图 19.4 基于 Michael C. Jensen 和 William H. Meckling, “Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure”, *Journal of Financial Economics*(October 1976):305—360 中的一幅图。

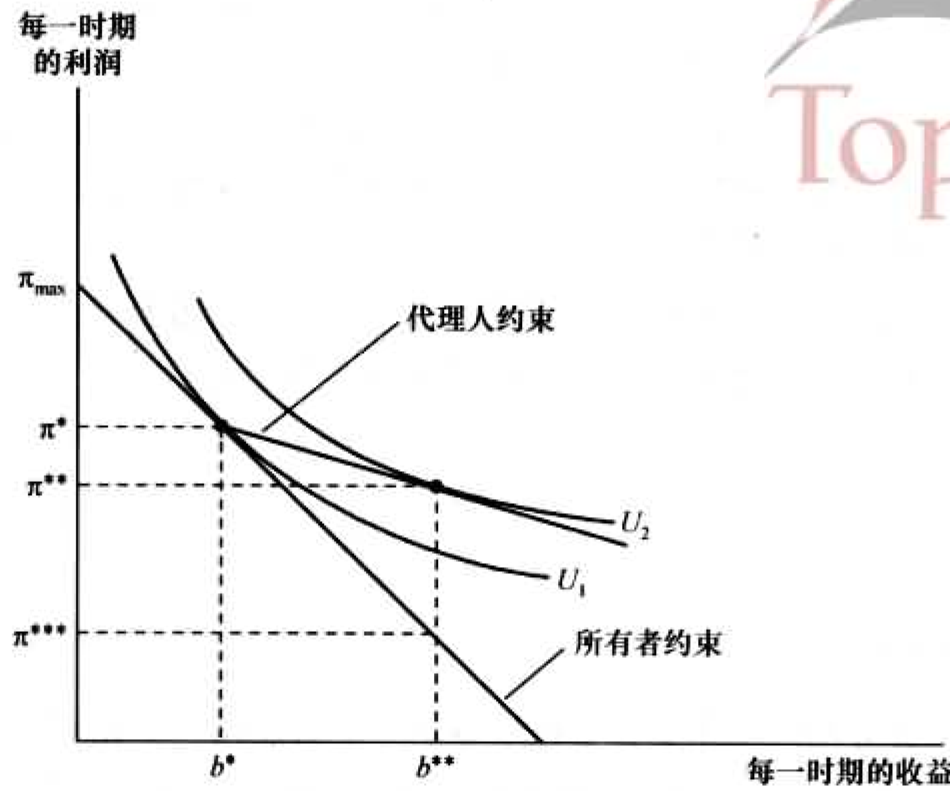


图 19.4　管理者作为公司所有者的代理的激励

如果一个管理者是公司唯一的所有者，(b^*, π^*)将因在此处效用最大而被选择。如果管理者只拥有公司的三分之一，预算约束就会较平，(b^{**}, π^{**})将会被选择。

为了建立管理者面临着的最大化效用的预算约束，首先假设管理者也是公司的所有者，如果管理者从工作中得不到其他的好处，利润就是 π_{max}。管理者得到的每单位美元将使公司利润减少 1 美元。预算约束斜率为 -1，当管理者得到 π_{max}时，利润为零。

利用这个预算约束，所有者—管理者效用最大化时选择利润 π^*，管理者福利为 b^*。利润 π^* 虽然小于 π_{max}，但仍表示了在这种情况下的最大利润，因为其他的所有者—管理者也会希望得到 b^* 的福利。亦即，b^* 代表了做生意的机会成本，给定这些费用，公司的管理者实际上最大化了利润。

19.6.2　代理人的激励

我们假设管理者不是公司唯一的所有者。相反，假设管理者拥有三分之一的公司的资本，剩下的三分之二属于外部投资者，而他们并不实际运作公司。在这种情况下，管理者不再面临增加 1 美元管理者福利就减少 1 美元利润的约束。现在 1 美元的管理者福利只花费了管理者的利润中的 0.33 美元，因为其他 0.67 美元是由公司其他股权拥有者减少的利润支付的。虽然新的预算约束仍包括点(b^*, π^*)（因为管理者仍可以作出只有一个管理者时的决策）。对福利大于 b^* 的部分，预算约束的斜率只有 -1/3，管理者每增加 1 美元福利，其利润只减少 0.33 美元。在这样的预算约束下，管理者将选择(b^{**}, π^{**})来最大化他的效用。作为公司的部分拥有者，管理者会选择比唯一所有者时较低的利润和较高的管理者福利。

19.6.3　对所有者的影响

点(b^{**}, π^{**})是公司所达不到的。虽然对管理者来说，1 美元福利的费用似乎只是 0.33 美元，

但事实上,每1美元福利都花费了利润。但管理者选择 b^{**} 的福利时,利润的损失(从 π^{*} 到 π^{***})对公司来说比对他个人要大。公司的所有者因为不得不依靠与管理者之间的这种代理关系而受损。似乎管理者拥有公司比例越小,这种关系引发的扭曲就越大。下一个例子将说明这种问题,并描述所有者该怎么去处理。

例 19.4

使用公司的喷气式飞机

联合饼干公司拥有一些商业用途的喷气式飞机。在因滥用公司喷气式飞机解雇前任 CEO 后,联合饼干公司的董事会希望制定一个管理合同,从而提供减少成本的激励。所有这份工作的竞争者有对工资(s, 以 10 万美元为单位来计量)和对喷气飞机使用(j, 只能是 0 或 1)的相同的效用函数。效用函数形式为

$$U(s,j) = 0.1\sqrt{s} + j \tag{19.25}$$

申请者从其他公司得到的效用水平为 2。因为过多的喷气式飞机使用成本很高,董事意识到若 $j=0$,联合饼干的利润(扣除总裁的工资后)将为 800(单位:千美元);而若 $j=1$,利润则只有 162。所以,董事能够最多付给 CEO 638,只要他们保证不将公司的喷气式飞机私用。略大于 400 的工资将足够使一个潜在的竞争者接受不用喷气式飞机的职位($U>2$)。与最开始 100 的固定工资和不加限制的喷气式飞机使用相比,这将是一个有利可图的合同。虽然这个合同提供的效用也大于 2 ,但在第一个合同下,净利润为 400(支付 CEO 后);在第二个合同下,净利润只有 62。

合同监督。遗憾的是,联合饼干的董事觉得很难监督喷气式飞机的非商业使用。如果他们签订工资为 400(且 $j=0$)的合同,新的 CEO 仍有激励使用喷气式飞机,效用从 2 增加到 3,这样的结果对所有者来说是灾难性的——因为他们的利润会降到 -238。

利润分享合同。所有者可能因此愿意支付一些费用来监管喷气式飞机的使用,以保证高工资合同的协议被履行。他们也可选择签订一个利润共享的合同。例如,一份 50% 利润的工资将足以吸引到一名 CEO($U=2$),而且他将不会使用喷气式飞机,因为当他使用喷气式飞机时,他的效用将会减少($U=1.9$)。

请回答:如果利润不是喷气式飞机使用的完美信号,这里对合同的分析会发生怎样的变化呢?

19.7 所有者—管理者关系:数学分析

我们可以用数学方法来更详细地研究这个委托—代理问题。假设一个公司的毛利[$\pi=\pi(a)$]取决于雇用的管理者可能采取的一些具体的行动(a)。公司的所有者希望设计一种合同,支付管理者一定的基于公司利润的工资(s)(即 $s=s[\pi(a)]$)。因此,对于这些所有者,净利润等于

$$净利润 = \pi' = \pi(a) - s[\pi(a)]. \tag{19.26}$$

当$\partial\pi/\partial a=0$时，毛利润和净利润都达到最大。于是所有者的问题是设计一种工资结构，为管理者提供一种激励，使其选择能达到上面结果的a值（如a^*）。

在设计这样的工资方案时，所有者面临着两个问题。第一，他必须知道代理管理者的效用函数，这样才能明白他如何受激励影响。例如，所有者可能假设管理者的效用函数取决于净收入，如

$$I^M=s[\pi(a)]-c(a)-c_0 \tag{19.27}$$

其中$c(a)$代表管理者采取行动a时发生的成本$[c'(a)>0,c''(a)>0]$，c_0代表管理者面临的机会成本（比如他从能得到的次优的工作职位中得到的福利）。

在设计工资方案中的第二个约束是管理者必须愿意接受这份工作。简单地说，这要求$I^M\geqslant 0$，因为这份工作必须提供高于其他工作的净收入。一些学者称其为"参与约束"。

19.7.1 完全信息的情形

当具有完全信息时，设计最优的工资方案就相对容易了。一个选择是当管理者选择行为a^*，就支付$c(a^*)+c_0$，否则就什么都不支付。这种工资方案将正好使管理者愿意接受这份工作。或许一个更有益的方案是$s(a)=\pi(a)-f$，其中f被设定为使得只当利润最大时，才满足参与约束，亦即，$f=\pi(a^*)-c(a^*)-c_0$。这种方案下，管理者的收入在$\partial s(a)/\partial a=\partial\pi/\partial a=0$时最大。即，他会选择$a=a^*$，得到的收入正好等于成本

$$I^M=s(a^*)-c(a^*)-c_0=\pi(a^*)-f-c(a^*)-c_0=0 \tag{19.28}$$

用金融语言表述就是，这种工资方案使代理人（而不是委托人）成为公司利润的剩余要求权者。因此，代理人就会最大化公司利润，因为这直接关系到他的利益。

19.7.2 不对称信息：隐藏的行为

完全信息情况的解决方案仅仅是让管理者选择行为$a=a^*$。因为管理行为和公司利润间的关系是完全知道的，且所有者准确地知道管理者面临什么样的成本，设计工资方案是轻而易举的。委托—代理模型通过两种方式引入了不对称信息。第一，它假设一个管理者的行为是不能被直接观察到的，也不能从公司的利润中完全推断出来。只有管理者自己精确地知道他选择的行为。这称为隐藏行为的情况。第二种建模的方法假设委托—代理的目标函数不能被直接观察到。这称为隐藏信息的情况。下面我们简单看几个例子。

管理者行为隐藏的主要原因在于利润受所有者不能观察到的随机变量影响。在这种情况下，所有者不能通过简单考察利润推断出管理者的行为。一种建模方式是假设这里有利润的随机因素，即利润是管理者行为和一个随机变量（u）的函数。即

$$\pi(a)=\bar{\pi}(a)+u \tag{19.29}$$

其中$\bar{\pi}$代表利润的期望值（取决于管理者的行为）。u代表一个均值为0、方差为σ^2的正态分布的随机变量。因为所有者只能观察到π，而不是$\bar{\pi}$，他们在工资方案中只能用这些实际利润。但这就引发了一个参与约束上的问题。一个风险厌恶的管理者将关心实际利润是否会变坏，因为当期望效用减少时他会不愿接受这份工作。管理者的问题就是设计一种不确定情形下的最好的工资方案。有很多考察在这种情况下应如何设计激励相容的工资方案的模型。例19.5考察了其中一个简单的例子。

例 19.5

激励计划与风险厌恶

假设公司的所有者希望采取一种涉及利润分享的激励方案，以给予风险厌恶的管理者适当的激励。这种方案是

$$s(a) = b + d\pi(a) \tag{19.30}$$

其中 b 和 d 是工资方案的待决定的参数。首先我们考察管理者激励，管理者的收入由 $I^M = s(a) - c(a) - c_0$ 给出，但这种收入会由于利润的不确定性而受到影响。我们假设管理者有不变的绝对风险厌恶的效用函数，我们可以用例 18.3 中的结论来得到他的等价的确定性收入为

$$I^{CE} = b + d\overline{\pi}(a) - \frac{d^2 A\sigma^2}{2} - c(a) - c_0 \tag{19.31}$$

如果代理管理者选择 a，以最大化上面的收入，最大化的一阶条件是

$$\frac{\partial I^{CE}}{\partial a} = d\overline{\pi}'(a) - c'(a) = 0 \tag{19.32}$$

所以，不管所有者怎样选择 d，管理者都会选择努力程度以使

$$d = \frac{c'(a)}{\overline{\pi}'(a)} = m(a) \tag{19.33}$$

其中 $m(a)$ 代表额外努力的边际成本收益比率。因为 $c''(a) > 0$，$\pi''(a) < 0$，所以 $m'(a) > 0$，即边际成本收益比率将随 a 增加而增加。

为了保证管理者接受这份工作，须有 $I^{CE} \geqslant 0$。假设约束取等号，那么 b 等于

$$b = -d\overline{\pi}(a) + \frac{d^2 A\sigma^2}{2} + c(a) + c_0 \tag{19.34}$$

委托所有者的问题是如何保证为管理者设计的激励能使其采取利润最大化的行为。这种委托—代理问题中通常可以根据委托人会持有分散股票组合的假设而认为他们是风险中性的。我们在这里将采取这种假设。在其他的委托—代理模型中，委托人的风险中性的假设可能是不合理的。

使用方程 19.33 和 19.34，我们可以将所有者利润的期望值写为

$$E(\pi') = (1 - d)\overline{\pi}(a) - b = \overline{\pi}(a) - \frac{m(a)^2 A\sigma^2}{2} - c(a) - c_0 \tag{19.35}$$

最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial E(\pi')}{\partial a} = \overline{\pi}'(a) - m(a)m'(a)A\sigma^2 - c'(a) = 0 \tag{19.36}$$

或

$$d = \frac{c'(a)}{\overline{\pi}'(a)} = m(a) = \frac{1}{1 + \dfrac{m'(a)A\sigma^2}{\overline{\pi}'(a)}} \tag{19.37}$$

我们可以从中得到三个有趣的结论：

- 利用我们假设的符号规则，最优的利润分享比例介于0和1之间。[1]
- 代理管理者越厌恶风险，最优的利润分享比例就越小。
- 利润的随机因子的方差越大，最优的利润分享比例就越小。

上面的三个结论也都是符合直觉的。

请回答：你如何解释式19.37中出现的$m'(a)$项？

19.7.3 隐藏的信息

当委托人不知道代理人的激励结构时，就不大可能作上例中那种精确的分析了。然而，激励方案的设计必须基于对代理人动机的假设，且必须能适应得到新信息后的改进。这使得建立一个一般的模型很困难。一种方法是假设代理人是不同类型的。例如，代理人类型可以用例19.5中风险厌恶参数值(A)的不同来显示。在这种情况下，所有者开始基于假设的A平均值来设定利润分享比例，然后观察代理管理者的决定。当得到新的信息时，便调整利润分享比例。这里我们不讨论这个复杂的问题。

小　结

我们在对那些具有不完全信息的市场进行建模时出现了一些问题，本章对这些问题进行了综述。这里，我们主要从一个决策者的观点来研究这些问题。在研究不完全信息对厂商行为与总体市场绩效的影响时出现的一些问题在后面的章节中还会被涉及。从本章得出的一些结论如下：

- 由于信息可以使人们增加其决策的期望效用，所以，信息是有价值的。因此，人们愿意有所花费，以得到额外的信息。
- 信息有一些特殊的性质（比如不同的人获取相同信息的成本可能不同，以及有些信息具有公共品的某些特征），这些性质表明，与不完全信息与不对称信息相关的无效率可能相当普遍。
- 不对称信息的存在会影响许多市场结果，其中的一部分可以运用保险理论来说明。这是由于，承保人关于潜在风险的信息比购买保险的人掌握得要少。
- 如果承保人不能准确地监督投保人的行为，就会出现道德风险的问题——即参加保险会影响个人进行预防性支出的意愿。在监督费用较高的任何合约条件下，都会出现道德风险的行为效应。
- 信息不对称也会导致保险市场上的逆向选择。最后的均衡（如果存在的话）可能是帕累托无效率的。在某些情况下，市场信号能减少这种无效率。
- 不对称信息可能导致一些委托人雇用代理人为他们作决策。为代理人提供正确的激励是个困难的问题。

[1] 注意如果$\sigma^2=0$，最优的利润分享比例是1——如我们前面所示，所有者将剩余利润要求权转交给了管理者。

练 习 题

19.1 一个农夫的西红柿苗正在枯萎，他必须要决定是否浇水。如果他浇了水，或天下了雨，他的菜可以赚 1 000 美元利润；而如果西红柿得不到灌溉，就只值 500 美元。农夫开动一次灌溉系统要花 100 美元。农夫要从销售西红柿中使其期望利润最大化。

a. 如果农夫相信有 50% 的概率会下雨，他应不应该浇水？

b. 如果农夫要花钱向一个可以绝对准确地预报会不会下雨的天气预报家购买预报结果的话，最多他会付多少钱？

c. 如果 b 中的天气预报家只有 75% 的准确度，你的答案会怎样改变？

19.2 在练习题 18.5 中，Foger 小姐愿意为了防止在她的环球旅行中有 25% 的概率把 1 000 美元现金丢失而去买保险。假如买了这种保险的人在管理现金方面都趋向于变得更粗心，那么，他们丢失 1 000 美元的概率就会上升到 30%。在这种情况下，实际的公平保险费率是多少？Foger 小姐现在会买保险吗？（请注意：本问题与下一个问题都涉及道德风险。）

19.3 练习题 18.4 研究了费用分担的健康保险政策［练习题 18.4 b(2)］，并且表明风险厌恶者会愿意购买全额保险。然而，假定买了费用分担保险的人会更多地关注自己的健康，这样，他们在生病时所遭受的损失就由 10 000 美元下降到 7 000 美元。现在，费用分担保险的公平价格实际上会是多少？是否可能有一些人会相对全额保险更偏爱费用分担保险？什么会决定个人是否会有这种偏好？（对于本题，只用图形来说明就可以了。）

19.4 蓝眼睛的人会比棕眼睛的人更容易丢失他们的贵重手表。具体地说，蓝眼睛的人在一年之内丢失他们 1 000 美元的手表的概率为 80%，而棕眼睛的人丢失手表的概率却只有 20%。蓝眼睛的人和棕眼睛的人在人口中数量相同。

a. 如果保险公司假定蓝眼睛的人和棕眼睛的人具有同样的可能去购买手表丢失保险，实际上公平的保险费率会是多少？

b. 如果蓝眼睛与棕眼睛的人有对数财富效用函数，并且每个人当前的财富都是 10 000 美元，那么，这些人会不会以 a 中的保险费率购买手表保险？

c. 给定 b 的结果，保险公司对保险费率的计算是否正确？它应该等于什么？每一类型的人的效用会怎样？

d. 假定保险公司对蓝眼睛的人和棕眼睛的人要收不同的保险费率。这些人的最大化效用与 b 和 c 中所计算的效用相比会怎样？（该问题是保险业中的逆向选择的例子。）

19.5 假定有两类工人：高能力的工人和低能力的工人。工人的工资由他的能力决定——高能力的工人赚 50 000 美元，低能力的工人赚 30 000 美元。厂商不能度量工人的能力，但是它却可以了解到工人是否有高中文凭。工人的效用由他们的工资与为获得文凭所支付的费用的差异所决定。

a. 如果高能力工人与低能力工人在获取

高中文凭上的花费是一样的，那么，在这种情况下，是否可以存在一种高能力工人拿高工资、低能力工人拿低工资的分离的均衡？

b. 高能力工人为了获得高中文凭所愿意支付的最大数量是多少？如果有一种文凭可以让雇主去识别高能力工人的话，那么为什么对于低能力的工人来说，这种文凭一定要使其花费更多？

19.6 假定 Molly Jock 想买一台高清晰度的电视来观看 1996 年希腊与罗马的摔跤大赛。她现在的收入是 20 000 美元，她知道在哪里可以花费 2 000 美元买到电视机。她也听人说在“疯狂埃迪”（近期将破产）同样的电视机只卖 1 700 美元，但这个消息可能只是谣传。假定 Molly 的效用函数由下式给定

$$效用 = \ln(Y)$$

其中，Y 是她买了电视机之后的收入。

a. 如果她从她所知道的店买电视机，其效用如何？

b. 如果疯狂埃迪真的有低价的电视，Molly 的效用会如何？

c. 如果 Molly 认为疯狂埃迪出售较低价格电视机的可能是 50 对 50，但是，驱车到那家打折的店去看个真假要花费 100 美元（该店很远，又没有电话可以打），对她来说，花钱亲自去一趟值吗？

19.7 假定一个人知道某一种彩色电视机的价格服从在 300 美元与 400 美元之间的均匀分布。此人打算通过打电话来获得价格信息。

a. 如果此人打了 n 次电话询问价格的话，请计算出所要支付的期望最小价格。

b. 请证明所要支付的期望价格随 n 增加而下降，但下降率递减。

c. 假定根据时间与努力，打一次电话要花 2 美元。为了通过搜索得到最大化，这个人应该打多少次电话？①

19.8 假定练习题 19.7 中的人采取“保留价格的战略”——也就是说，她会从第一个小于其保留价格上限的那个店中购买。在练习题 19.7 的条件中，为了使从搜索中获益最大，她应该如何设定其保留价格？

19.9 考虑一个病人与医生间的委托—代理关系。假设病人的效用函数由 $U^c(m,x)$ 给定，其中 m 代表医疗护理（量由医生决定），x 代表其他消费品。病人的预算约束为 $I_c = p_m m + x$，其中 p_m 是医疗护理的相对价格。医生的效用函数为 $U^d(I_d, U^p)$，医生的效用取决于他的收入和病人的效用。医生的预算约束为 $I_d = p_m m$。请证明在这种情况下，医生通常会选择 m 的水平，该水平大于完全知道信息的病人将选择的水平。（提示：假设这个问题将涉及序数效用，并且医生是完全无私的，即 $\partial U^d / \partial U^c = 1$。）

19.10 在某些情况中，人们可能会关心他们所面对的不确定性得以消除的时间。例如，假定一个人知道他今天的消费是 10 个单位，而明天的消费既可以是 10 个单位，也可以是 2.5 个单位，它取决于一枚硬币是正面，还是反面。同时假定个人的效用函数具有简单的柯布-道格拉斯函数的形式

$$U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1 c_2}$$

a. 如果一个人只关心期望效用值，那么，硬币在 1 天前掷，还是 2 天前掷

---

① 练习题 19.7 和 19.8 都以在第 19 章的扩展部分所涉及的内容为基础。

是否会有影响？请解释。

b. 更为一般地，假定个人的期望效用受掷硬币的时间影响。具体地，假定期望效用 $= E_1[(E_2\{U(c_1,c_2)\})^{\alpha}]$，这里，$E_1$ 代表第 1 天开始时的期望，E_2 代表第 2 天开始时的期望，并且 α 代表表示时间偏好的参数。请说明，如果 α 等于 1，此人对硬币什么时候掷是否是无差异的？

c. 请说明如果 α 等于 2，此人是否愿意早一点消除不确定性——也就是说，在第 1 天就掷硬币。

d. 请说明如果 α 等于 0.5，此人是否愿意迟一点消除不确定性——也就是说，在第 2 天开始抛硬币。

e. 根据直觉解释你的结果，并且说明它与信息理论的关系。（请注意：这个问题是对“寻求消除”和“厌恶消除”行为的一个说明。参见 D. M. Kreps and E. L. Porteus, “Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory”, *Econometrica* [January 1978]:185—200。）

推荐阅读文献

Diamond, P., and M. Rothschild. *Uncertainty in Economics*: Readings and Exercises, revised ed. San Diego, CA: Academic Press, 1989.

该书搜集了许多本章中提到过的文章，还包含相关文献的简要概括与大量的练习题。

Ehrlich, I., and G. S. Becker. “Market Insurance, Self-Insurance and Self-Protection”. *Journal of Political Economy* (July/August 1972): 623—658.

该文集中讨论了市场保险和自我保险（一种替代）或自我保护（一种补充）的关系。运用了同第 18 章相类似的状态偏好方法。

Laffont, J. and D. Martimort. *The Theory of Incentives*: The Principal-Agent Model. Princeton: Princeton University Press, 2002.

该文介绍了一个完整的、技术性很强的委托—代理关系模型。作者对这个问题提供了一个很好的历史介绍，同时引入了风险厌恶和逆向选择的问题。

Pauly, M. “The Economics of Moral Hazard: Comment”. *American Economic Review* (June 1968):531—537.

该文对阿罗关于医疗保险的文章（请参见第 18 章）进行了评论，该文运用了一些几何方法说明了人们对医疗保险的反应（由于医疗保险减少了人们在医疗上的实际支出）如何使全额保险无法达到帕累托最优。

Phlips, L. *The Economics of Imperfect Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

该书包括了本章中的一些主题，关于拍卖与信号均衡有特别精彩的讨论。

Rothschild, M., and J. Stiglitz. “Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information”. *Quarterly Journal of Economics* (November 1976): 629—650.

该文对自我选择问题进行了非常好的图形处理，文章对分离均衡的各种可能性进行了巧妙的说明。

Stigler, G. “The Economics of Information”. *Journal of Political Economy* (June 1961):213—225.

该文是关于搜寻在获取价格信息方面作用的经典研究。

Varian, H. R. *Microeconomics Analysis*, 3rd ed. New York. W. W. Norton. 1992.

该书第 25 章提供了一个相当丰富的委托—代理模型的处理，包括一个如何对隐藏信息建模的说明。

扩　展

搜寻的经济学

例 19.1 说明了关于未知价格的信息对个人是如何有价值的。这种信息可以被采集的一种方式是进行系统的搜索。尽管看起来可能有点过分，但在购买高价商品时，给一些折扣商店打电话显然是应该的。但在购买牙膏时，如果检查国内的每一家店，并采取细致的研究计划，似乎有些过分。在本扩展中，我们来考察有关这种常识性观察的一些模型。

统计背景

同前面一样，我们需要一点统计知识去建立关于搜寻行为的模型。如果 x 是一个随机函数，$f(x)$ 是其概率密度函数（参见第 18 章有关随机变量函数的扩展），于是，"累积分布函数" $F(z)$ 就由下式确定

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(i)}$$

也就是说，$F(z)$ 给定了对于任何 z 值，x 小于或等于 z 的概率。累积分布函数给出了描述随机函数分布的另一种方式。请注意，由于 $F' = f$，所以，累积分布函数和概率密度函数彼此密切相关。

对于我们有关搜寻问题的研究，我们假定一个人要以尽可能低的价格去购买一种商品，但是，他只知道由不同的商店提供的价格（p，它只能是非负的）的分布。即这个人知道 $f(p)$ 与 $F(p)$，但不知道哪个商店卖哪一种价格。

扩展 19.1　搜寻的边际收益递减

假定这个人决定（通过打电话或实地访问）选出 n 家商店，比较它们的价格，购买最便宜的一个。而某一个商店提供特定价格（比方说，p_0），并且这个价格比其他 $n-1$ 家店所提供的价格都低的概率等于

$$[1 - F(p_0)]^{n-1} f(p_0) \qquad \text{(ii)}$$

于是可以得出在搜寻者探查了 n 个店之后愿意支付的期望最低价格为

$$p_{\min}^{n} = \int_0^{\infty} [1 - F(p)]^{n-1} f(p) p\mathrm{d}p \qquad \text{(iii)}$$

由于 $(1-F)$ 小于 1，这个最低的价格就会随着调查的商店的数目增加而下降。但同时，随着 n 的增加，多调查 1 家店增加的期望收益 $(p_{\min}^{n-1} - p_{\min}^{n})$ 也会递减。

扩展 19.2　搜寻成本

如果搜集价格信息是有成本的，那么，就并非会去搜集所有的信息。相反，一个追求效用最大化的搜寻者会选择一个 n，从而使来自第 n 次搜寻的价格减少刚好等于搜寻成本。由于搜寻是收益递减的，所以，搜寻次数的增加就会减少使效用最大化的 n 值。即面对较高搜寻成本的个人将会支付较高的期望价格。这个结果首先由 Stigler 在 1960 年提出。

价格分散

由于存在着较高的搜寻成本，即便同样的商品在不同的店里出售，市场也不需要遵守一价法则。如果没有这种成本，消费者将会寻找最低的价格，这就是均衡时的唯一价格。但由于搜寻成本的存在，即便对于同质的商品，搜寻成本也会把市场分割开。Gaynor 和 Polachek (1994) 发现关于医疗价格的不完全信息导致病人平均多花费了 30% 的费用。多出的费用中最高的部分来自于较少使用的服务上，如医

院的追踪访问。而普通门诊、儿科门诊这些经常使用的服务上由不完全信息附加的费用就较少。

有几种可以减少消费者信息成本和价格分散的方法。很多州要求公布汽油、处方药等商品的价格，从而提供更简便的比较价格的途径。媒体上的价格广告是将低价告知消费者的另一种方式。美国联邦贸易委员会推动很多职业（如律师、房地产中介）取消在价格广告上的限制。委员会认为这些价格广告的限制的主要影响是增加了价格分散，并给一些供给商提供了超出竞争状态下的收益。最后，消费者还可以通过购买价格信息自己降低价格分散。因此，近年来，一些汽车购买和公寓租赁的中介服务逐渐得到了发展。

扩展 19.3　保留价格策略

在先验的基础上去选择价格搜寻的策略，可能不会最优。比方说一个人在搜寻到第 5 家店时遇到了令人吃惊的低价，那么，他就不会再去造访剩下的 $n-5$ 家店了。在许多情况下个人的最优搜寻策略是选择一个保留价格（p_R），并且接受第 1 个被发现等于或小于 p_R 的价格。保留价格的选择应该满足：一旦已经达到 p_R，从下一步的搜寻中所得的期望收益就等于搜寻成本 c。为获得最优的 p_R，要解方程

$$c = \int_0^{p_R} (p_R - p) f(p) \mathrm{d}p \qquad \text{(iv)}$$

现在，c 的增加会引致这个人选择更高的保留价格，并且他会访问较少的商店。在这个策略中，同固定访问数量的策略中的情形相同，搜寻成本的增加会使个人搜寻的次数减少。

保留工资

关于搜寻理论的这些研究已经在失业工人寻找工作的问题中有了广泛的应用。在这些问题的应用中，最优策略包含对最低的可接受工资的选择，这个工资在接受工作之前是必须要满足的。关于工作搜寻的实证研究数量众多（参见 Kiefer and Neumann, 1989）。这些研究中最重要的发现是保留工资随失业期增加而减少。慷慨的事业福利增加了保留工资。在大多数情况下，保留工资不能直接度量，但可以从工人的行为中推断出来。一些经济学家（例如，Cox 和 Oaxaca, 1992）已经试图在直接控制的实验中度量保留工资（价格）。虽然这些实验的设计引发了一些概念性的问题，但从中得到的结论似乎普遍地支持从观察到的劳动市场中的搜寻行为中得到的结论。

扩展 19.4　价格分布

最优搜寻策略也由价格分布的特征所决定。在其他因素相同的情况下，μ_p 越大，搜寻次数就越多。因此，人们可能在昂贵的商品上比在廉价商品上进行更多的搜寻。同样，价格越分散，进行较多的搜寻就越优。显然，如果 $\sigma_p=0$（它意味着完全竞争条件下的一价法则），任何搜寻都是多余的。所有这些结果都取决于个人在开始搜寻之前对价格分布有关知识的了解。但 Rothschild 在 1974 年也证明了：在个人对于价格没有先验的信息且必须根据在搜寻中采集到的信息推导出价格的分布的情况下，类似的结果也可以被定量化地推导出来。

---

① 分部积分，有

$$c = \int_0^{p_R} (p_R - p) f(p) \mathrm{d}p = p_R F(p_R) - \int_0^{p_R} p f(p) \mathrm{d}p = \int_0^{p_R} F(p) \mathrm{d}p$$

这就使 p_R 和 c 之间的正相关关系显而易见。

参考文献

Cox, J. C., and R. L. Oaxaca. "Direct Tests of the Reservation Wage Property", *Economic Journal*(November 1992):1423—1432.

Gaynor, M., and S. W. Polachek. "Measuring Information in the Market: An Application to Physician Services". *Southern Economic Journal* (April 1994):815—831.

Kiefer, N. M., and G. R. Neumann. *Search Models and Applied Labor Economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Rothschild, M. "Searching for the Lowest Price When the Distribution of Prices Is Un-known". *Journal of Political Economy* (July-August 1974):689—711.

Stigler, G. J. "The Economics of Information". *Journal of Political Economy* (June 1961): 213—225.

第 20 章　外部性与公共品

在第 12 章中，我们指出了会影响完全竞争市场配置效率的许多问题。在这一章中，我们将更为具体地考察其中的两个问题：外部性与公共品。我们的研究有两个目的：第一，想清晰地表明为什么外部性与公共品的存在会扭曲资源的配置，从而有可能阐明竞争性价格中蕴涵的信息的某些额外特征，以及可能减少该种信息有用性的某些情况。我们进一步研究外部性与公共品的第二个原因，是要提出可以减轻由其引出的配置问题的种种方式。至少在某些情况下，我们会看到，竞争性市场的有效性可能会比最初所预期的更加稳定。

20.1 外部性的定义

当经济当事人对未参与市场交易的第三方当事人产生影响时，就出现了外部性问题。从经济学的观点看，化学品的生产者向其邻居排放有毒气体、喷气式飞机吵醒公众或是骑摩托车的人在公路上乱丢杂物，是同样的一种经济行为——它们对那些并不与之相干的、市场交易之外的其他人施加了直接的影响。这类行为与直接通过市场发生的效应是不同的。例如，当我选择购买一块面包时，我毫无疑问（或许没有察觉）地提升了面包的价格，而这会影响其他的购买者。然而，由于这一切都反映在市场价格之中，这种效应并不是真正的外部性，并且它并不影响市场有效配置资源的能力。[①] 另外，由于我们增加购买量而引致的面包价格的上升是社会偏好的一种精确反映，而且，价格上升有助于保证生产出恰当的生产组合。所以，这同有毒化学品排放、飞机噪音或乱丢杂物不同。在后几种情况下，由于第三方所遭受的损害未被考虑在内，所以，（化学品、飞机航班或一次性用品的）市场价格并不能精确地反映商品的社会成本。于是，通过价格传递的信息基本上是不精确的，会导致资源的误配置。

由此，作为总结，我们能得出如下定义。

① 有时，通过市场体系而发生的一个经济主体对另一个经济主体的影响被称为"货币"的外部性，以区别从我们正在讨论的"技术"外部性中产生的这种影响。此处所用的"外部性"这个词仅指后一种类型。这是因为，只有这种外部性才会影响竞争性市场资源配置的效率。

外部性。当经济当事人的行为以不反映在市场交易之中的某种方式影响另一个当事人行为时，就会产生**外部性**(**externality**)。

在仔细分析为什么不考虑外部性就会导致资源的误配置之前，我们将研究一些能澄清问题本质的例子。

20.1.1 厂商之间的外部性

为了用最简洁的形式来说明外部性问题，假设有两个厂商——一个生产商品 x，另一个生产商品 y，其中，每一个厂商都只使用单一的投入：劳动。如果商品 y 的生产不仅取决于由生产 y 的厂商确定的劳动数量，而且还依赖于 x 的产出水平的话，则认为产品 x 对产品 y 有外部性。那么，商品 y 的生产函数就可以写作

$$y = f(k,l;x) \tag{20.1}$$

其中方程中分号右边的 x 表示生产 y 的厂商所无法控制的 x 产量的影响。[①] 例如，假定有两个厂商都位于河边，厂商 y 处在厂商 x 的下游。假设厂商 x 在其生产过程中污染了河水，那么，厂商 y 的产出就可能不仅由其自身所使用的投入来决定，而且还要取决于流经其工厂的污染物的数量。反过来，污染物的水平由厂商 x 的产出决定。在方程 20.1 表示的生产函数中，厂商 x 的产出会有一个负的边际实物生产率(marginal physical productivity) $\partial y/\partial x<0$。于是，x 的产出增加将导致 y 的产出下降。在下一节中，我们会更为充分地分析这个例子，它代表着外部性中最简单的形式。

20.1.2 有利的外部性

两个厂商之间的外部性关系可以是有利的。大多数这种正向外部性的例子性质上都相当乡土化。可能最著名的是由 J. 米德提出的案例，包括两个厂商：一个生产蜂蜜(养蜂)、另一个种植苹果。[②] 由于蜜蜂在苹果树上采蜜，所以苹果产量的增加就会导致养蜂业生产力的改善。蜜蜂有蜜可采的有益效果对于养蜂人就是正的外部性。在方程 20.1 的表述中，$\partial y/\partial x$ 现在就是正的。在通常的完全竞争的情况下，一个厂商的生产行为对其他厂商的生产行为没有什么直接影响：$\partial y/\partial x=0$。

20.1.3 效用上的外部性

如果经济当事人的行为会直接影响个人效用的时候，也会产生外部性。有关环境外部性的大多数例子都属于这一类型。从经济的角度看，这类效应是由厂商引起(如以有毒化学品或飞机噪音的形式)，还是由个人引起(如乱丢废物或是开大收音机音量所发出的噪音)，几乎没有什么差别。在所有这些情况中，这种行为的数量会直接进入个人的效用函数，就如同在方程 20.1 中 x 的产出会进入 y 厂商的生产函数一样。在厂商的例子中，外部性有时也会是有利的(事实上你可能会喜欢你邻居收音机里所播放的歌曲)。于是，没有外部性的情形也可以被简单地看作是中间状况，即其他当事

① 我们会发现在本章进行分析时重新审慎地定义“没有控制”的假定是必要的。

② J. Meade, "External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation", *Economic Journal* 62(March 1952):54—67.

人的行为对个人效用没有直接的影响。

当一个人的效用直接取决于其他人的效用时,与社会选择分析相关的一种特殊类型的效用外部性就出现了。例如,如果 Smith 关心 Jones 的福利,我们就可以把他的效用函数(U_S)写作

$$效用 = U_S(x_1,\cdots,x_n;U_J) \tag{20.2}$$

其中,$x_1,\cdots,x_n$ 是 Smith 消费的商品,而 U_J 是 Jones 的效用。如果 Smith 是利他主义者,并希望 Jones 越来越好(如果 Jones 是其近亲,大概就会这样),$\partial U_S/\partial U_J$ 就是正的。另一方面,如果 Smith 嫉妒 Jones,情况就会不同,$\partial U_S/\partial U_J$ 就会为负。也就是说,Jones 效用的改善使 Smith 的状况变坏。如果 Smith 与 Jones 的福利无关($\partial U_S/\partial U_J=0$),则他就是处于利他主义与嫉妒的中间状况,这也是我们贯穿全书所做的一般假设(简要的讨论,请参见第 3 章的拓展部分)。

20.1.4 公共品的外部性

属于"公共"或"集体"性质的商品将是本章后半部分所要集中分析的对象。这种商品的明显特征是它的非排他性。也就是说,一旦商品(或者由政府,或者由某个私人企业)生产出来,它们就会为整个团体,或者说是为每一个人提供好处。在技术上不可能限定这些好处只提供给为之付费的特定人员,这样,所有人就都可以受益。正如我们在第 19 章所提到的那样,国防是一个典型的例子。一旦一个国防体制得以建立,社会上的所有人都会得到保护,无论他们是否愿意以及是否为之付费。由于市场信号的不精确,对于这样一种商品选择恰当的产出水平就是一个充满技巧性的过程。

20.2 外部性与配置无效率

由于市场价格对提供给第三方的额外成本或收益的反映不精确,外部性使得资源配置无效。因为一个市场中无效率的资源配置会对所有由市场决定产出的效率产生影响,为了说明这些无效率需要一个一般均衡模型。这里我们选择一个简单的、在某种程度上甚至奇特的一般均衡模型,因为这样我们可以最简洁地说明这些问题。具体地,我们假设在这个简单的经济中只有一个人,他的效用取决于 x 和 y 的消费量。这两种商品的消费水平记作 x_c 和 y_c,这样

$$效用 = U(x_c,y_c) \tag{20.3}$$

设这个人开始拥有初始的 x 和 y 的商品存量(记为 x^*,y^*),可以将其直接消费,或作为中间产品投入生产。为了简化,我们假设 x 商品只使用 y 商品就可以进行生产,生产函数为

$$x_o = f(y_i) \tag{20.4}$$

其中下标"o"表示产出,下标"i"表示投入。为了说明外部性,我们假设 y 的产出不仅取决于 x 的投入,还取决于 x 商品的生产数量。这将说明一种情况,例如,y 厂在 x 厂的下游,且必须应付当生产 x 时产生的污染。y 的生产函数为

$$y_o = g(x_i,x_o) \tag{20.5}$$

其中 $g_1>0$(x 商品的投入多,y 商品的产出就多),但是 $g_2<0$(由于外部性,x 商品的产出多,y 商品的产出就少)。

每种商品的产量受最初的禀赋和后来的生产量的约束

$$x_c + x_i = x_o + x^* \tag{20.6}$$

$$y_c + y_i = y_o + y^* \tag{20.7}$$

20.2.1 找到有效配置

这个经济的问题就是，在方程 20.4—20.7 表示的约束下最大化效用。为了解这个问题，我们必须引入 4 个拉格朗日乘数。这个最大化问题的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = U(x_c, y_c) &+ \lambda_1[f(y_i) - x_o] + \lambda_2[g(x_i, x_o) - y_o] \\ &+ \lambda_3(x_c + x_i - x_o - x^*) + \lambda_4(y_c + y_i - y_o - y^*)\end{aligned} \tag{20.8}$$

最大化的一阶条件为

$$\begin{aligned}
\partial\mathscr{L}/\partial x_c &= U_1 + \lambda_3 = 0 && [\text{i}] \\
\partial\mathscr{L}/\partial y_c &= U_2 + \lambda_4 = 0 && [\text{ii}] \\
\partial\mathscr{L}/\partial x_i &= \lambda_2 g_1 + \lambda_3 = 0 && [\text{iii}] \\
\partial\mathscr{L}/\partial y_i &= \lambda_1 f_y + \lambda_4 = 0 && [\text{iv}] \\
\partial\mathscr{L}/\partial x_o &= -\lambda_1 + \lambda_2 g_2 - \lambda_3 = 0 && [\text{v}] \\
\partial\mathscr{L}/\partial y_o &= -\lambda_2 - \lambda_4 = 0 && [\text{vi}]
\end{aligned} \tag{20.9}$$

可以从这些方程中很简单地消去 λ，将方程 i 和 ii 相除，可以得到以下结果

$$MRS = U_1/U_2 = \lambda_3/\lambda_4 \tag{20.10}$$

从方程 iii 和 iv 中得到

$$MRS = \lambda_3/\lambda_4 = \lambda_2 g_1/\lambda_2 = g_1 \tag{20.11}$$

y 生产的最优化条件要求消费者的边际替代率等于 y 的生产函数对投入品 x 的边际生产率。这个结论重复了从 12 章中得到的结论，有效率产出选择要求在消费中的 dy/dx 等于生产中的 dy/dx。

为在 x 商品的生产中达到有效率，我们必须考虑其生产对 y 商品生产产生的外部性。考虑方程 iv—vi，得到

$$\begin{aligned}MRS = \lambda_3/\lambda_4 &= (-\lambda_1 + \lambda_2 g_2)/\lambda_4 = -\lambda_1/\lambda_4 + \lambda_2 g_2/\lambda_4 \\ &= 1/f_y - g_2\end{aligned} \tag{20.12}$$

直觉上，这个方程要求消费者的边际替代率等于 x 生产中的 dy/dx。其中第一项 $1/f_y$ 代表 x 生产中对 y 投入的边际生产率的倒数——这是 dy/dx 中关系 x 生产的第一部分。第二项 g_2 表示 x 的生产对 y 的生产产生的负效应——这是 dy/dx 中关系 x 生产的第二部分。第二部分来源于 x 的外部性。若 g_2 为 0，方程 20.11 和 20.12 就表示了生产有效率的相同条件，该条件同时适用于 x 和 y 的生产。在外部性存在时，确定 x 的有效率的产量水平变得更加复杂。

20.2.2 竞争配置的无效率

在简单模型中对竞争定价的依赖导致无效率的资源分配。在均衡价格 P_x 和 P_y，效用最大化的消费者会选择

$$MRS = P_x/P_y \tag{20.13}$$

商品 y 的厂商为使其利润最大化而选择 x 的投入满足

$$P_x = P_y g_1 \tag{20.14}$$

效率条件 20.11 将被满足。但 x 的生产者将选择 y 的投入以满足

$$P_y = P_x f_y \quad 或 \quad P_x/P_y = 1/f_y \tag{20.15}$$

即，x 的生产者不会考虑外部性，这样有效配置条件 20.12 就不会被满足。这使得 x 的生产超过了效率水平。这点可以这样说明：在方程 20.15 表示的市场分配下，生产 $x(f_y)$ 时 y 的边际产出要小于方程 20.12 表示的最优分配下生产 $x(f_y)$ 时 y 的边际产出。在市场配置中，过多的 y 被用来生产 x(因此 x 的生产过多)。例 20.1 将提供局部均衡状态下无效率的一个定量案例。

例 20.1

生产的外部性

作为一个说明由于没考虑生产外部性而造成损失的局部均衡模型，我们假设两个新闻纸生产厂商都位于河边。上游厂商(x)的生产函数为

$$x = 2\,000\, l_x^{1/2} \tag{20.16}$$

这里，l_x 是每天雇用的工人数量，而 x 是以英尺计算的新闻纸的产出。下游厂商(y)具有同样的生产函数，但其产出受厂商 x 倾倒于河中的化学品的影响

$$\begin{aligned} y &= 2\,000\, l_y^{1/2}(x - x_0)^{\alpha} \quad (当\ x > x_0\ 时) \\ y &= 2\,000\, l_y^{1/2} \qquad\qquad\quad (当\ x \leq x_0\ 时) \end{aligned} \tag{20.17}$$

这里，x_0 表示河流对于污染物的自然承受能力。如果 $\alpha = 0$，x 的生产过程对厂商 y 就没有影响；而如果 $\alpha < 0$，则 x 超过 x_0 的增加量就会导致 y 产出的下降。

假定新闻纸每英尺卖 1 美元，工人每天挣 50 美元。因此，在工资等于劳动的边际产值时，厂商 x 就会实现利润的最大化

$$50 = p \cdot \frac{\partial x}{\partial l_x} = 1\,000\, l_x^{-1/2} \tag{20.18}$$

于是可求出 $l_x = 400$。如果 $\alpha = 0$(即没有外部性)，厂商 y 也将雇用 400 名工人。每家厂商生产 40 000 英尺的新闻纸。

外部性的效应。当厂商 x 有负的外部性时($\alpha < 0$)，其自身的利润最大化的雇用决策并不受影响——它将雇用 $l_x = 400$，并且生产 $x = 40\,000$。然而，对于厂商 y，劳动的边际产出却会因为这种外部性而较低。例如，如果 $\alpha = -0.1$ 并且 $x_0 = 38\,000$，则利润实现最大化的条件为

$$\begin{aligned} 50 = p \cdot \frac{\partial y}{\partial l_y} &= 1\,000\, l_y^{-1/2}(x - 38\,000)^{-0.1} = 1\,000\, l_y^{-1/2}(2\,000)^{-0.1} \\ &= 468 l_y^{-1/2} \end{aligned} \tag{20.19}$$

解这个关于 l_y 的方程，得出由于生产率降低了，厂商 y 现在只需要雇用 87 个工人。而厂商 y 此时的产出为

$$y = 2\,000(87)^{1/2}(2\,000)^{-0.1} = 8\,723 \tag{20.20}$$

由于存在外部性($\alpha = -0.1$)，新闻纸的产出就比没有外部性($\alpha = 0$)时低。

无效率。通过假定厂商 x 和 y 合并,从而管理者能够对全部劳动力进行配置,我们可以证明在前述情况下分散做出的利润最大化决策是无效率的。如果一个工人从厂商 x 转到了厂商 y,则 x 的产出变为

$$x = 2\,000(399)^{1/2} = 39\,950 \tag{20.21}$$

并且厂商 y 的产出变为

$$y = 2\,000(88)^{1/2}(1\,950)^{-0.1} = 8\,796 \tag{20.22}$$

这样,在不改变劳动投入的情况下,总的新闻纸产出增加了 23 英尺。由于厂商 x 并不考虑其雇用决策对于厂商 y 的影响,所以,先前的配置是无效的。

边际生产率。通过计算劳动投入对厂商 x 的社会边际生产率,前述内容也可以用另一种方式得到证明。如果厂商 x 要多雇一个工人,其产出就会上升为

$$x = 2\,000(401)^{1/2} = 40\,050 \tag{20.23}$$

根据利润最大化要求,第 401 个工人的(个人)边际产值要等于工资。而且 x 产出的增加现在也对厂商 y 有影响——使其产出下降大约 21 个单位。因此,厂商 x 的劳动社会边际产值实际上等于 29 美元(50 美元 - 21 美元)。这也就是为什么合并后企业的管理者会发现重新安排工人会有利可图。

请回答:假定 $\alpha = +0.1$,那么,厂商之间的关系是什么样的?这种外部性会怎样影响劳动力的配置?

20.3 处理外部性问题的方法

以激励为基础的外部性解决方案来源于一个基本的事实:在市场决定的均衡下,存在外部性的生产行为所导致的产量过多。第一个对该扭曲提供完整分析的经济学家应该是庇古(A. C. Pigou),他在 20 世纪 20 年代提出:外部性最直接的解决方法是对产生外部性的经济体征税。① 所有以激励为基础②的外部性解决方案都来源于这个基本的直觉。

20.3.1 图形分析

图 20.1 给出了外部性的传统说明以及庇古的税收解决方案。产品 x 的供给曲线也就是私人边际成本曲线(MC),DD 表示 x 的市场需求曲线,市场均衡发生在 x_1。x 生产中导致的外部成本使得私人的边际成本(MC)和社会的边际成本(MC')不同——两条曲线间的垂直距离表示 x 的生产对第三方(在我们的例子中,只有 y 厂商)产生的边际成本。注意这些外部性的每单位成本不一定是与 x 产量无关的常数。例如,在图中,外部性的成本随 x 产出的增加而增加(即 MC 与 MC'之间的距离越

---

① A. C. Pigou, *The Economics of Welfare* (London: MacMillan, 1920). 庇古也认识到了产生正外部性的补贴商品的重要性。

② 我们在这里不讨论纯规则的解,但这种解的研究形成了环境经济学中重要的一部分。参见 W. J. Baumol and W. E. Oates, *The Theory of Environmental Policy*, 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press 1988) 和本章的扩展。

来越远了)。在市场决定的产出水平 x_1 下,综合的社会边际成本大于市场价格 p_1,这说明 x 的生产太多了。从中可以清楚地得到,最优的产出水平是 x_2,在此处的市场价格完全反映了所有的成本。

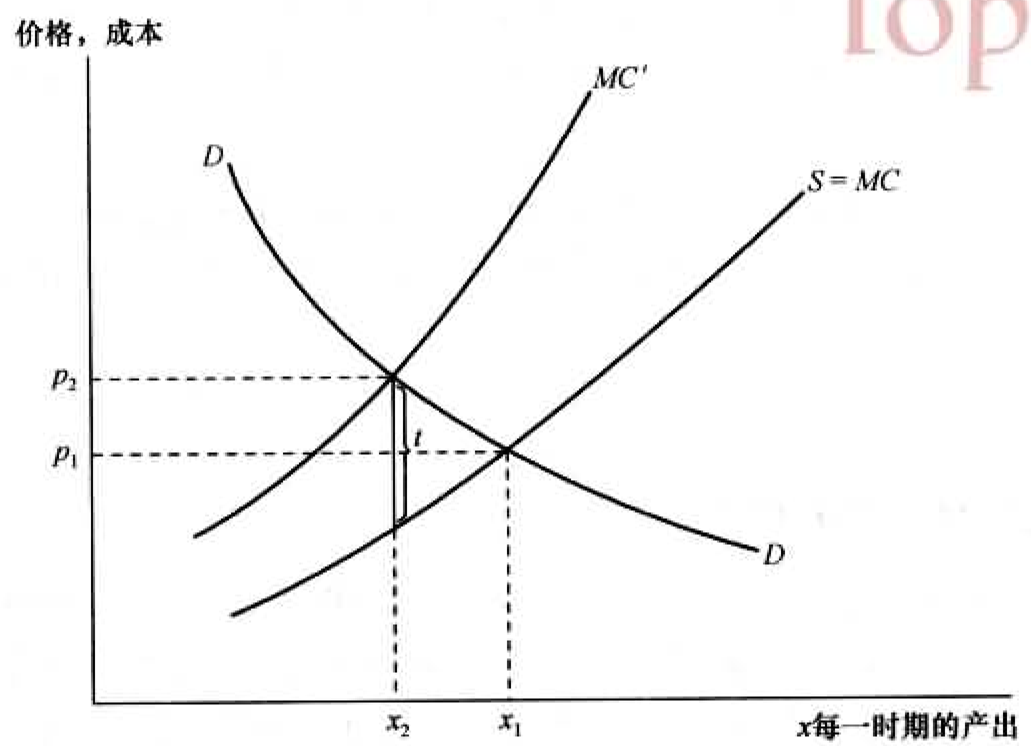


图 20.1　外部性成本的图示说明

对 x 的需求由曲线 DD 确定,x 的供给曲线也就是 x 的边际成本曲线(MC)。如果 x 的生产对第三方产生了外部性,社会边际成本 MC' 将大于 MC。市场均衡发生在 x_1,在这个产出水平,社会边际成本大于消费者对 x 的支付。反映了外部性成本的数量为 t 的税收将使 x 的产出达到有效——即产出 x_2。

像其他的税一样,庇古税会在供给和需求曲线间打入一个垂直的楔子。如图 20.1 所示,这个最优的税为 t。这种税使得生产降至社会最优水平 x_2。税收正好等于 x 的生产导致的外部性的损害。这些税收可以补偿给 y 厂商,但这对于该分析就不重要了。注意这里税赋必须设置为最优产量(x_2)时的外部性导致的损害的水平,而不是原先市场均衡(x_1)时的损害水平。这点将在下例中得到说明,并在下节的一般均衡模型中得到更全面地解释。

例 20.2

新闻用纸的庇古税

由于上游的新闻纸生产商(厂商 x)没有考虑由于其生产而给厂商 y 造成的影响,所以,在例 20.1 中出现了无效率的情况。于是,恰当地选择对厂商 x 征税能够引导它减少劳动力的投入,直到使外部性的影响消失。由于在产出 $x = 38\,000$ 时,河流可以吸收污染物,我们会考虑对厂商征税(t)以使其将产出减至这个水平。由于在 $l_x = 361$ 时,产出为 38 000,我们就能够从劳动力需求条件中计算出 t 来

$$(1-t)MP_L = (1-t)1\,000(361)^{-0.5} = 50 \tag{20.24}$$

或者

$$t = 0.05 \tag{20.25}$$

这样一个5%的税收会使厂商 x 将其新闻纸的价格有效地减少到0.95美元，并因此提供一种激励，以使厂商减少雇用39个工人。现在，由于河流能够处理掉 x 生产中所产生的所有污染物，所以，在厂商 y 的生产函数中就没有了外部性。它会雇用400个工人，每天生产40 000英尺的新闻纸。请注意，总的新闻纸的产出现在是78 000，这比未征税情况下的产出更高。这样，征税的方法明显地改善了资源配置的效率。

请回答：考虑到上面显著的产出收益改进（相对于例20.1中无效率的产出），这里提出的税率（0.05）似乎有点小。你能解释为什么吗？如果不征税，而是将两个企业合并，它们会选择 $x=38\,000$ 吗？

20.3.2 一般均衡模型下的税赋

一般均衡模型中的最优庇古税设定为 $t=-p_y g_2$。即每单位 x 上的庇古税将反映 x 在减少 y 产出上的边际损害，并用 y 的市场价格衡量。注意这个税必须基于最优解时的外部性的成本——因为 g_2 是 x 产出水平的函数，根据其他产出水平定税是不合理的。在最优庇古税下，厂商 x 面临的净价格为 p_x-t，将选择 y 的投入以满足

$$p_y=(p_x-t)f_y \tag{20.26}$$

资源分配的结果将使得

$$MRS=p_x/p_y=(1/f_y)+t/p_y=(1/f_y)-g_2 \tag{20.27}$$

这就是最优化时要求的条件（比较20.12的效率条件）。庇古税的解决方法可以一般化为多种方法，这些将为外部性的政策提供启示。例如，在很多 x 生产者的经济中，税赋将传递有关任一个这种厂商对 y 生产的边际影响。所以庇古税的方案减轻了监管部门对每一个具体厂商情况的考虑。但需要有足够的信息以合理制定税赋——他们必须知道厂商 y 的生产函数。

20.3.3 污染权利

有种减轻对庇古税涉及信息要求的创新方法是建立一个污染权利的市场。例如，假设厂商 x 必须从厂商 y 购买他们共享的河的污染权。在这个例子中，x 购买这些权利的决策与选择产出水平的决策同等重要，因为没有它们时它就不能生产。每单位 x 的净收益等于 p_x-r，其中 r 是厂商必须为所生产的每单位产品进行的支付。厂商 y 可以选择卖多少份权利给 x，因为每份权利将被支付 r，它会选择 x 的产出以最大化它的利润

$$\pi_y=p_y g(x_i,x_0)+rx_0 \tag{20.28}$$

这个最大化问题的一阶条件为

$$\partial\pi_y/\partial x_0=p_y g_2+r=0 \quad 或 \quad r=-p_y g_2 \tag{20.29}$$

方程20.29说明污染权定价的均衡解等价于庇古税均衡的解。从厂商 x 的角度来说，把 t 的税赋交给政府与把同样数量的污染权费 r 交给厂商 y 没有差别。只要 $r=t$（这由方程20.29保证），就可以达到同样的有效均衡。

20.3.4 科斯定理

科斯(Ronald Coase)在1960年一篇著名的文章中,说明了污染权利均衡有效率的重要条件是这些权利必须被明确定义,并且交易成本为零,而与最初权利的归属界定无关,因为交易最终会达到同样有效率的结果。① 在我们的例子中,最初将权利指定给厂商 y,让其把权利以每单位 r 的价格卖给厂商 x。如果这个权利是指定给 x 的,x 厂商会自己使用一些权利而不是将所有权利都卖给厂商 y。考虑到厂商 y 对权利的购买,我们可以计算得到有效率的结果。为了说明科斯的结论,假设厂商 x 最初被授予了 x^T 的污染权利。它可以选择使用一些来支持自己的生产(x_0),并把一些卖给厂商 y(量为 x^T-x_0)。x 的净利润为

$$\pi_x = p_x x_0 + r(x^T - x_0) = (p_x - r)x_0 + rx^T = (p_x - r)f(y_i) + rx^T \tag{20.30}$$

对于 y

$$\pi_y = p_y g(x_i, x_0) - r(x^T - x_0) \tag{20.31}$$

很清楚地,这种情况下利润最大化导致的结果和把权利最初指定给厂商 y 时一样。因为权利 x^T 的总数是一定的,最大化的一阶条件在这两种情况下是相同的。最初权利指定的无关性通常被称为**科斯定理(Coase theorem)**。

虽然科斯定理的结论似乎有违直觉(污染的水平与谁最初拥有污染权无关),事实上,这其实等价于这样的断言:没有交易的阻碍,所有互利的交易都会发生。当交易成本很高,或信息不对称时,最初权利的指定就有关系了,因为科斯定理暗示发生的交易中有些可能并没有发生。所以科斯定理的局限性提供了进一步分析的有趣的机会。这种分析在法律和经济领域都得以深入②,在上述领域中科斯定理被应用在债务法、合同法和产品安全法等方面(参见习题20.4和20.5)。

20.4 公共品的特征

现在,我们把注意力转到有关竞争性市场与资源配置之间关系的其他一些问题上——这些问题因公共品的存在而出现。我们首先为公共品下一个简明的定义,然后考察为什么公共品存在配置问题,接下来,再简要讨论处理这些问题的可能方式。

关于公共品最为一般的定义强调了这些商品的两个特征:**非排他性(nonexclusivity)**和**非竞争性(nonrivalness)**。下面,我们详细描述这些特征。

20.4.1 非排他性

区分公共品的第一个特征是个人能否被排除在通过消费该商品中得益的范围之外。对于大多数私人产品,这种排他性事实上是可能的:如果我没有付费,我很容易就被排除在消费一个汉堡包的

① R. Coase, "The Problem of Social Cost", *Journal of Law and Economics* 3(October 1964):1—44.

② 这方面经典的课本是 R. A. Posner, *Economic Analysis of Law*, 4th ed.(Boston: Little Brown, 1992)。一个更数学化的方法可以参见 T. J. Miceli, *Economics of the Law*(New York: Oxford University Press, 1997)。

范围之外。然而，在某些情况下，这样的排他性却是不可能或是成本高昂的。国防就是一个典型的例子。一旦国防体系得以建立，则国民都会从中获益，而无论他们是否为此付了费用。在更为局部的层次上，如蚊虫控制计划和为预防疾病的接种计划问题中，情况也是一样。在这些情况下，一旦计划得以实施，没人会被排除在受益范围之外，而无论他是否为此付了费用。因此，根据下述定义我们可以把商品区分为两类：

定义

排他性商品。一旦一种商品被生产出来，如果可以相对容易地把个人从商品的受益人群中排除出去，那么，这种商品就是排他性的。如果做不到这一点；或虽可做到，但成本高昂，那么，这种商品就是非排他性的。

20.4.2 非竞争性

区分公共品的第二个特征是非竞争性。非竞争的商品就是增加对其消费的数量时，其边际社会成本的增加值为零的商品。当然，对于大多数商品，增加消费数量会带来某些边际生产成本。例如，某人多消费一只热狗，就需要在生产上多投入一些资源。但对于某些商品，情况却不是这样。比如，在非高峰时间内多一辆汽车通过一架公路桥。由于桥已经建在那里了，所以，多一辆车通过并不需要再使用其他资源，也不会减少他人的消费量。同样地，多一个观众观看某一电视频道的节目，即便这种行动会引致额外的消费，但是，并不会增加费用。由此，我们得到如下定义：

定义

非竞争性商品。如果一种商品的消费增加所带来的社会边际生产成本为零，那么，它就是非竞争性商品。

20.4.3 公共品的分类

非排他性和非竞争性的概念是以某种方式相关的。具备非排他性的许多商品也是非竞争的。国防和蚊虫控制是这类商品的两个例子。对于它们，不可能是排他的；增加消费的边际成本也为零。还有许多这样的例子。不过，这两个概念却并不完全一样：有些商品具有其中一种性质，但却不具有另一种。例如，把一些捕鱼船排除在海洋捕鱼的范围之外是不可能的（至少是成本高昂的），但多来一条船显然会以减少其他所有有关渔船捕捞量的形式增加社会成本。同样，在非高峰时间使用公路桥是非竞争的，但设立收费站却可能排斥潜在的用户。表 20.1 通过是否排他和是否竞争对商品进行了分类。在每一个范畴中对有关商品举了例。除了表中左上角的那些例子（具有排他性和竞争性的私人产品）之外的许多商品通常由政府来生产。尤其是非排他性的商品，因为它们通常很难靠强制征税以外的方式来支付。而只要未付费者能被排除于有关商品的消费之外，非竞争性商品就通常

可以由私人来生产(毕竟有消费者必须付费才能使用的私有桥梁、游泳池和公路)①。因此,我们将使用下面狭义的定义:

表 20.1　公共品与私人商品分类的例子

		排他性	
		是	不是
竞争性	是	热狗、汽车、住房	渔业区、公共放牧地、清洁的空气
	不是	桥、游泳池、(已发射的)卫星电视传送器	国防、蚊害控制、司法

定义

公共品。公共品就是一旦被生产出来,没有人能被排除在通过消费获益的范围之外的商品。公共品通常也是非竞争性的,但并非总是如此。

20.5 公共品和资源配置

为了说明公共品产生的分配问题,我们使用一个简单的一般均衡模型。在这个模型中,只有两个消费者——一个人的经济没有公共物品的问题,因为他自己就会把所有商品的益处考虑进消费者决策。我们记两个消费者为 A、B。这个经济中有两种商品 x 和 y。商品 y 是普通的私人商品,两个人最初分别拥有 y 商品 y^{A*}, y^{B*}。每个人可以选择直接消费自己的禀赋商品,或将其中一部分投入公共物品 x 的生产。设各投入 y_s^A, y_s^B,则公共物品根据生产函数得到

$$x = f(y_s^A + y_s^B) \tag{20.32}$$

这两个人的效用等于

$$U^A[x, (y^{A*} - y_s^A)] \tag{20.33}$$

和

$$U^B[x, (y^{B*} - y_s^B)] \tag{20.34}$$

注意,这里公共物品的产出水平相同地进入了每个人的效用函数。这就是这种无排他无竞争商品的性质的数学表示。无排他性反映在每个人对 x 的消费与他的贡献无关。无竞争性体现在对每个人来说,x 是一样的,享受的量也就是生产出来的量。A 对 x 的消费得到好处并不减少 B 可消费的量。在分散决策的系统(包括完全竞争市场)中,x 的这两个特点成为其有效率生产的障碍。

有效分配资源的必要条件包括选择提供公共物品的水平(y_s^A, y_s^B)以最大化效用,例如,给定 B 的

① 允许赋予排他机制的非竞争性商品有时称为"俱乐部商品",这是由于在私人俱乐部中可以组织对这种商品的供给。在私人俱乐部中,要交"会员费",会员可以无限制使用这种商品。俱乐部的最佳规模由在俱乐部商品生产过程中存在的规模经济决定。关于这一分析,参见 R. Cornes and T. Sandler, *The Theory of Externalities, Public Goods, and Club Goods* (Cambridge: Cambridge University Press, 1986)。

效用时 A 的效用。这问题的拉格朗日函数为(为与前面章节保持一致,需将拉氏方程中 L 换成 $\mathscr{L}$)

$$\mathscr{L} = U^{A}(x, y^{A*} - y_{s}^{A}) + \lambda[U^{B}(x, y^{B*} - y_{s}^{B}) - K] \tag{20.35}$$

其中 K 是 B 的常量效用水平。最大化的一阶条件为

$$\partial\mathscr{L}/\partial y_{s}^{A} = U_{1}^{A}f' - U_{2}^{A} + \lambda U_{1}^{B}f' = 0 \tag{20.36}$$

和

$$\partial\mathscr{L}/\partial y_{s}^{B} = U_{1}^{A}f' - \lambda U_{2}^{B} + \lambda U_{1}^{B}f' = 0 \tag{20.37}$$

这两个方程的比较可以立刻得到

$$\lambda U_{2}^{B} = U_{2}^{A} \tag{20.38}$$

可以预期的是,最优化要求 A、B 对于 y 的消费的边际效用只差一个系数 λ。这个方程和方程 20.36 及 20.37 联立可以得到生产公共商品 x 的最优化条件。例如,用方程 20.36 可以得到

$$U_{1}^{A}/U_{2}^{A} + \lambda U_{1}^{B}/\lambda U_{2}^{B} = 1/f' \tag{20.39}$$

或更简单的

$$MRS^{A} + MRS^{B} = 1/f' \tag{20.40}$$

萨缪尔森(P. A. Samuelson)最早给出了这条件背后的经济解释①,也就是 12 章中效率条件对公共品情形的扩展。对于这样的商品,MRS 必须反映所有消费者为多得到一单位 x 而放弃的 y 的数量,因为所有人都能享受多出的 x 的好处。所以是每个人 MRS 的和等于生产中的 dy/dx(这里是 $1/f'$)。

20.5.1 完全竞争市场的失灵

竞争市场中 x、y 的生产将达不到有效率的配置目标。在完全竞争的价格 p_x、p_y,每个人将使自己的 MRS 等于价格比 p_x/p_y。一个 x 的生产者将使 $1/f'$ 等于 p_x/p_y,以使利润最大化。这使得方程 20.40 中的最优化条件无法成立。价格比 p_x/p_y 太小了,它提供的生产 x 的激励太少了。在私人市场中,消费者不会考虑自己对公共品的消费会给别人带来好处,所以他为 x 生产提供的资源也太少了。

这种情况下的配置失效可以被归结为私人市场加总私人需求的方式。在任意数量,市场需求曲线说明了一种商品的边际价值。如果多生产一单位该产品,它可以被某个消费者以市场价格消费掉。对于公共商品,每单位的价值是每个消费者对其评价的总和,因为每个消费者都从中受益了。在这种情况下,消费者需求曲线将被垂直地加总(如图 20.2),而不是被水平地加总(如在私人市场中的情形)。所以公共品的市场需求曲线上的价格反映对给定产出水平上每多一单位的产出对所有消费者的价值和。而通常的市场需求曲线不能合理地反映这个全面的边际价值。

① 参见 Samuelson, P. A. "The Pure Theory of Public Expenditure". *Review of Economics and Statistics* (November 1954):387—389。

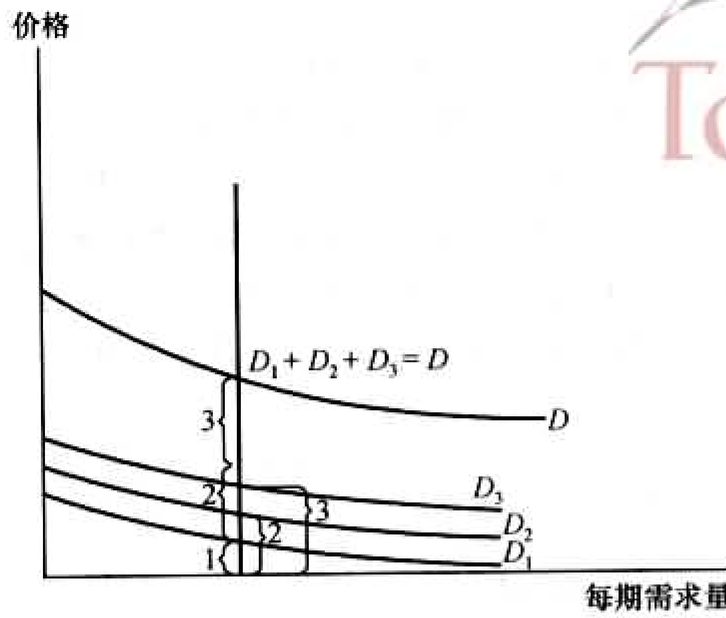


图 20.2　公共品需求的推导

由于公共品是非排他的,所以,人们为多买一个单位的公共品而愿意支付的货币(他们的边际评价)就等于每一个人愿意支付的数量的总和。因此,对于公共品来说,市场需求曲线由纵向加总得到;而在私人产品的情况下,这一曲线则通过横向加总得到。

20.5.2　纳什均衡的无效率

在完全竞争市场一个生产公共品的可替代的方法是依靠消费者的自愿捐赠。不幸的是,这会导致无效率的结果。考虑消费者 A,他正在考虑捐献他的禀赋 y 中的 s_A,A 的效用最大化问题就是

$$\text{选择 } s_A \text{ 以最大化 } U^A[f(s_A+s_B),y^{A*}-s_A] \tag{20.41}$$

最大化的一阶条件为

$$U_1^A f' - U_2^A = 0 \quad \text{或} \quad U_1^A/U_2^A = MRS^A = 1/f' \tag{20.42}$$

相似的逻辑可以应用在消费者 B 上,这样有效率条件 20.40 将无法成立。问题在于每个人只考虑他投资公共品时自己的收益,而不考虑给别人带来的收益。在有很多消费者的情况下,直接的收益可能很小(比如一个人的缴税对美国国防的贡献)。在这种情况下,每个人将选择 $s_A=0$,成为纯粹的搭便车者,希望从别人的花费中得到收益。如果每个人都选择这种战略,就不会有资源被捐助到公共品中了。例 20.3 将说明一个人们熟悉的搭便车者的例子。

例 20.3

购买公共品:室友困境

为了说明公共品问题的本质,假定有两个具有相同偏好的波希米亚人共居一室,他们的效用来自于在他们陋室的墙上悬挂的油画数量(x)和他们所吃的小吃(y)的数量。特定形式的效用函数由下式给出

$$U_i(x,y_i) = x^{1/3}y_i^{2/3} \quad (\text{其中 } i=1,2) \tag{20.43}$$

请注意,每个人的效用由所消费的油画的总数量和每个人单独消费的小吃数量决定。因此,在本问

题中，欣赏油画构成了一个公共品。

如果我们假定每个人要花300美元，并且 $p_x=100$ 美元，$p_y=0.20$ 美元，于是，我们就可以研究各种收入安排的结果。根据前述的柯布–道格拉斯函数的例子，我们得知，如果每个人单独生活，他将花费1/3的收入在油画上（$x=1$）以及2/3的收入在小吃上（$y=1\,000$）。

公共品的供应与策略。然而，当两个人一起生活时，每个人一定会考虑另一个人会做什么。例如，每个人都会假定另一个人会买油画。那么在这种情况下 x 就会为0，且两个人的效用水平均为0。在其他的情况下，例如第1个人可能假定第2个人不会买油画。如果情况属实，他就会选择购买，所得到的效用为

$$U_1(x,y_1)=1^{1/3}(1\,000)^{2/3}=100 \tag{20.44}$$

而第2个人的效用为

$$U_2(x,y_2)=1^{1/3}(1\,500)^{2/3}=131 \tag{20.45}$$

显然，第2个人因搭便车而得益。第1个人买了油画因而给第2个人提供了外部性。当然，如果第2个人有社会意识，他会买油画从而也给第1个人提供外部性。

配置失效。从方程20.44与20.45中得到的解（与其他许多可能性一样）是无效率的，这一点可以通过计算每一个人的边际替代率得以证明

$$MRS_i=\frac{\partial U_i/\partial x}{\partial U_i/\partial y_i}=\frac{y_i}{2x} \tag{20.46}$$

因此，在这一配置之中

$$\begin{aligned} MRS_1&=\frac{1\,000}{2}=500\\ MRS_2&=\frac{1\,500}{2}=750 \end{aligned} \tag{20.47}$$

即两个人总共愿意牺牲1 250单位小吃去多买一张油画——而事实上它只值500个单位的小吃。在本例中依靠分散决策是无效率的——油画的购买太少。

一种有效的配置。为了计算出有效率的购买水平，我们必须要让两个人的边际替代率之和等于商品的价格之比，这是因为这一总和现实地反映了生活在一起的室友会做出的转换

$$MRS_1+MRS_2=\frac{y_1}{2x}+\frac{y_2}{2x}=\frac{y_1+y_2}{2x}=\frac{p_x}{p_y}=\frac{100}{0.20} \tag{20.48}$$

由此

$$y_1+y_2=1\,000x \tag{20.49}$$

我们将上式代入联合的预算约束，有

$$0.20(y_1+y_2)+100x=600 \tag{20.50}$$

得到

$$\begin{aligned} x&=2\\ y_1+y_2&=2\,000 \end{aligned} \tag{20.51}$$

油画费用的分配。假定两个人平分油画的费用，并用其余的钱去买小吃，则每个人最终会得到效用为

$$U_i=2^{1/3}1\,000^{2/3}=126 \tag{20.52}$$

虽然第 1 个人不能强迫第 2 个人这样来联合分担费用，但以 75 对 25 的百分比来分担也会使他们的效用为

$$U_1 = 2^{1/3}750^{2/3} = 104$$
$$U_2 = 2^{1/3}1\,250^{2/3} = 146 \tag{20.53}$$

这与第 1 个人独自承担费用相比是帕累托更优的。仍有许多其他的理财方法也会达到与先前讨论的配置相比帕累托更优的状态。如果要做出选择，究竟最后选择哪一种理财比例则取决于每一位室友在这个战略性的理财对策中如何表现了。

请回答：证明在本例中，如果分开生活的两个人决定在一起生活，并把他们各自的画放在一起，那么会得到有效率的解。你预计这个结果在一般的情况下成立吗？

20.6 公共品的林达尔定价

公共品问题的一个重要的理论上的解决方法是由瑞典经济学家林达尔(E. Lindahl)在 20 世纪 20 年代提出的。① 林达尔的基本直觉是：只要确信别人也在交税，消费者就可能通过自愿交税来购买公共品。特别地，林达尔假设政府会规定每个消费者将支付的公共品的成本的比例，而消费者会回应给政府他希望得到的公共品的水平。在简单的一般均衡模型中，消费者 A 将被分配支付的比例为 α^A。在给定支付的比例后，政府会询问他希望得到的公共品的水平。为回答这个问题(该人是诚实的)，他会选择公共品水平 x，以最大化自己的效用，则

$$\text{效用} = U^A[x, y^{A*} - \alpha^A f^{-1}(x)] \tag{20.54}$$

选择 x 以效用最大化的一阶条件为

$$U_1^A - \alpha^A U_2^B(1/f') = 0 \quad \text{或} \quad MRS^A = \alpha^A/f' \tag{20.55}$$

消费者 B 有类似的决策，他将选择公共品水平以满足

$$MRS^B = \alpha^B/f' \tag{20.56}$$

均衡将发生在 $\alpha^A + \alpha^B = 1$ 的地方。两个消费者希望的公共品的花费正好能产生足够的税收来购买这些公共品。因为在这种情形下

$$MRS^A + MRS^B = (\alpha^A + \alpha^B)/f' = 1/f' \tag{20.57}$$

这个均衡是有效率的(参见方程 20.40)。所以，至少在概念上，林达尔方法解决了公共品问题。给每个消费者提供均衡时的税赋份额作为价格将使其选择最有效的公共品生产。

① 林达尔文章的节选可以参见 R. A. Musgrave and A. T. Peacock, eds., *Classics in the Theory of Public Finance* (London: Macmillan, 1958)。

例 20.4

林达尔对室友困境的解决方法

林达尔定价提供了例 20.3 中室友买画问题的理论上的解决方法。如果政府(或社会传统)建议每个人付一半买画的费用,每个人就都面临着 50 美元的画的价格。因为室友的效用函数意味着每个人总收入 300 美元的 1/3 将用来买画,每个人愿意付出 100 美元在画上,如果每个人都是诚实的,他们都会说希望有两张画。这样解为 $x=2, y_1=y_2=1\,000$。这就是例 20.3 中的有效率的解。这个解法的问题在于,两个室友都没有激励去真实报告自己在给定林达尔价格后对公共品的需求。而他们每人都知道他们作为例 20.3 中的搭便车者会更好。如同在 15 章中的囚徒困境中一样,林达尔的解虽是最优的,但却不稳定。

请回答:本例子中,一半对一半的分摊来源于社会传统,事实上这样一种分摊的最优性是这个问题的一个特性。这种问题为什么会导致这样一个林达尔结果呢?在什么情况下,林达尔价格会导致不是一半对一半分摊的结果呢?

20.6.1 林达尔解决方法的缺点

不幸的是,林达尔的解决方法只是理论上的。我们在对公共品生产的纳什均衡的检验和室友问题的例子中已经看到,在公共品问题中做搭便车者的激励很强。这个事实使得很难得到计算林达尔均衡分摊比例的必要的信息,因为消费者知道他们的税赋比例将基于他们报告的公共品的需求,他们有明确的激励来低报他们的偏好——人们期望别人会支付。这样,简单地询问人们对公共品的需求不能期待得到真实的答案。而且似乎也很难设计让人们说实话的机制,原因我们将在下章说明。因此,大体上,林达尔的解决方法仍是个可望而不可即的目标。

20.6.2 地方公共物品

一些经济学家相信公共品的需求描述在地方层面是可以实现的。[①] 因为有很多可供人们选择居住的社区,人们可以通过选择居住的社区来显示自己对公共品的偏好(即他们愿意支付的林达尔税赋比例)。当一种特别的税赋不是效用最大化时,人们在原则上可以用脚投票,搬到提供最优化的社区去住。在完全信息、零流动成本、社区数量足够的情况下,林达尔解决方法在地方层面上可以实现。类似的讨论应用在其他类型的组织中(例如私人俱乐部),这些组织给他们的成员提供公共品——给定足够多种类的提供级别,就可以达到有效的均衡。当然,这里的假设似乎太苛刻了。对假设的一点点放松就会导致无效率的情况,因为确定对公共品需求的方式在本质上就是脆弱的。

---

① 参见 C. M. Tiebout, "A Pure Theory of Local Expenditures", *Journal of Political Economy* (October 1956):416—424。

小结

本章中，我们研究了某种商品消费或生产过程中产生的外部效应（或溢出效应）而引起的困难。在某些情况下，在市场中设计机制以处理这些外部性是可能的，不过，这些办法也受到种种重要的限制。我们已经研究的一些特定问题是：

- 由于私人边际成本和社会边际成本的不同，外部性会引起资源的误配置。对于这种成本上的差异，传统的解决办法包括：让受影响的当事人合并，或采用适当的（庇古式的）税收或补贴。
- 如果交易费用不大，受外部性影响的各当事人之间的私下讨价还价就会使社会成本与私人成本达成一致。资源在这种情况下能够有效配置的证明有时被称为科斯定理。
- 基于非排他性（即没有人能被排除在对这种产品的消费之外），公共品对消费者提供益处。公共品通常也会因它们为另一个使用者服务的边际成本为零而是非竞争性的。
- 由于没有任何一个单一的买主能占有公共品所提供的全部好处，所以，私人市场对于公共品的资源配置趋于不足。
- 林达尔最优税收分担的安排能带来公共品生产有效率的资源配置。不过，关于这些税收分担的计算需要得到大量人们有激励去隐瞒的信息。

练习题

20.1 一个完全竞争行业中的一家厂商首创了一种制作小机械品的新技术。新技术使厂商的平均成本曲线下移，这意味着这家厂商自己（尽管仍是一个价格接受者）能在长期获得真正的经济利润。

a. 如果每件小机械品的市场价格是 20 美元，厂商的边际成本曲线为 $MC = 0.4q$，其中 q 是厂商每日的小机械品产量，厂商将生产多少小机械品？

b. 假定政府的研究发现厂商的新技术污染空气，并且估计厂商生产小机械品的社会边际成本是 $SMC = 0.5q$。如果市场价格仍为 20 美元，该厂商的社会最优生产水平是多少？为了实现这种最优生产水平，政府应征收多大比率的税收？

c. 用图形表示你的结果。

20.2 在帕勾帕勾岛上，有两个湖和 20 个钓手。每个钓手可以在任意一个湖上垂钓。在 x 湖上，被钓到的鱼的总数量由下式给出

$$F^x = 10l_x - \frac{1}{2}l_x^2$$

这里，l_x 是在湖上垂钓的人数。y 湖的钓鱼数量为

$$F^y = 5l_y$$

a. 在这种情况下，钓到鱼的总数会是多少？

b. 帕勾帕勾岛的管理者，曾经读过一本经济学的书，认为通过限制在 x 湖上垂钓的人数来提高钓鱼的数量是可

能的。为了最大化总的钓鱼量，被准许在 x 湖上垂钓的人数应是多少？在这种情况下钓到的鱼量是多少？

c. 与强制完全不同，管理者决定发放在 x 湖上垂钓的执照。如果发放执照会带来最优的人力配置，那么，(为了垂钓而)获取执照的费用应该是多大？

d. 这个例子是否证明了“竞争性”的资源配置可能并非最优？

20.3 假设乌托邦的石油工业是完全竞争的，所有的企业都在一个(不可耗竭)油田上采油。假定每个竞争者都认为他能以稳定的每桶 10 美元的世界市场价格出售其生产的全部石油，而每年维持一口油井的经费是 1 000 美元。

油田每年的总产出(Q)是油田中工作的油井数(n)的函数。有

$$Q = 500n - n^2$$

并且，每口油井的产油数(q)由下式得出

$$q = \frac{Q}{n} = 500 - n$$

a. 描述在这种完全竞争情况下的均衡产出和均衡油井数。在该行业中私人边际成本和社会边际成本是否存在差异？

b. 假定现在政府对油田实行国有化。它应运作多少口油井？总产出将是多少？每口井的产出将是多少？

c. 作为国有化之外的一种选择，乌托邦政府正在考虑运用对每口井征收年执照费的办法来抑制过度开采。如果要促使这个行业开采最佳数量的油井，这种执照费应为多少？

20.4 关于产品安全有很多法律争论：两种极端的情况是“商品售出、概不退换”(让买主小心)和“包退包换”(让卖主小心)。在前面的情况下，生产者对其产品的安全没有责任：买主承担全部损失。在后一情况下，上述责任安排刚好相反：厂商依照法律对因产品不安全而引致的损失负完全责任。请运用简单的供求分析方法，讨论这种责任安排将会对资源配置产生什么影响。如果厂商严格依照法律负责任，会生产出更安全的产品吗？可能出现的信息不对称会对你的结果产生什么影响？

20.5 对租佃者来说，有三种类型的向地主支付租金的契约：(1) 以货币(或固定数量的农产品)；(2) 以收成的固定比率；(3) 以“劳动租”，即同意以在地主的另一块土地上工作的形式来付租金。这些各自不同的契约规范会对佃农的生产决策产生什么影响？在实施每种契约时会发生何种交易费用？在不同的地方或在不同的历史阶段中，哪些经济因素会影响契约的类型？

20.6 假定一垄断者引致了损害性的外部效应。请使用消费者剩余的概念去分析对该污染者征收最优税收对于改善福利是否是必需的。

20.7 假定社会上只有两个人。对某甲，蚊虫控制的需求曲线为

$$q_a = 100 - p$$

对某乙为

$$q_b = 200 - p$$

a. 假定蚊虫控制是纯公共品：即一旦生产出来，每个人都会从中受益。如果它能以每单位 120 美元的不变边际成本得以生产，其最优水平是多少？

b. 如果蚊虫控制由私人市场来实施，又会提供多少？你的答案是否取决于每个人都假定其他人会进行蚊虫控制？

c. 如果政府会提供最优的蚊虫控制规模，这将花费多少？如果个人会按其

从蚊虫控制中所得的好处的比例去分担费用的话，税收将怎样在两个人之间分配？

20.8 假定经济生活中有三种商品，n 个人。两种商品是纯公共物品（非排他的），第三种商品是普通的私人商品。

a. 为了使资源在任意一种公共品与私人商品之间实现有效率的配置，什么条件一定要成立？

b. 为了在两种公共品之间有效配置资源，什么条件一定要成立？

20.9 假设一个经济生产一种公共商品 y、一种私人商品 x，其生产可能性边界为

$$x^2 + 100y^2 = 5\,000$$

这个经济中有 100 个相同的人，每个人的效用函数为

$$\text{效用} = \sqrt{x_i y}$$

其中 x_i 是消费者享受的私人商品的数量（$=x/100$），注意公共品是非排他的，每个人享受的数量都等于生产水平。

a. 如果商品 x、y 的市场是完全竞争的，这些商品各会生产多少？每个人的效用是多少？

b. 商品 x、y 的最优生产水平是多少？此时每人的效用水平是多少？如何对 x 商品的消费征税能得到这种结果？（提示：这个问题的结果不是整数，只需得到近似的结果。）

20.10 第 20 章中对公共品的分析使用了只有两个消费者的模型。这个结果可以推广到 n 个人。

a. n 个人的经济中，公共品有效率生产的条件是什么？解释在这些条件中反映出来的公共品的特点？

b. 提供公共物品给 n 个人的纳什均衡是什么？解释这个均衡为什么是无效率的，并解释为什么公共品的供给不足比两个人的经济中更严重。

c. 林达尔的解决方法如何推广到 n 个人的情况？在这个更复杂的模型中一定存在林达尔均衡解吗？

推荐阅读文献

Alchian, A., and H. Demsetz. "Production, Information Costs, and Economic Organization". *American Economic Review* 62 (December 1972): 777—795.

该文运用外部性的观点发展了经济组织理论。

Barzel, Y. *Economic Analysis of Property Rights*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

该书提供了一些通过产权的事例说明的经济问题，并使用图形方法对其进行了分析。

Cheung, S. N. S. "The Fable of the Bees: An Economic Investigation". *Journal of Law and Economics* 16 (April 1973): 11—33.

该文通过运用华盛顿州的私人市场对著名的蜜蜂－果园所有者的外部性问题做了实证研究。

Coase, R. H. "The Market for Goods and the Market for Ideas". *American Economic Review* 64 (May 1974): 384—391.

该文对"理想市场"的外部性与管制的概念作了分析。

______. "The Problem of Social Cost". *Journal of Law and Economics* 3 (October 1960): 1—44.

该文是关于外部性的一篇经典的文章，文中有许多有意思的历史—法律方面的案例。

Cornes, R., and T. Sandler. *The Theory of Externalities, Public Goods, and Club Goods*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

该书对本章提出的许多问题作了很好的理论上的分析，文中还讨论了规模收益、外部性与俱乐部商品之

间的联系。

Cropper, M. L., and W. E. Oates. "Environmental Economics: A Survey". *Journal of Economic Literature* (June 1992):675—740.

该文对享乐价格理论的应用作了完整的综述。

Demsetz, H. "Toward a Theory of Property Rights". *American Economic Review, Papers and Proceedings* 57 (May 1967):347—359.

该文对于如何定义产权的理论作了一定的发展。

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press, 1995.

该书第11章的基础在很多地方与这章相同，但方法更加抽象。

Posner, R. A. *Economic Analysis of Law*. 5th ed. Boston: Little Brown, 1998.

该书在许多方面是法律与经济学领域的"圣经"，其中的观点从经济学上看并不总是正确的，但常常是有趣味的、有挑战性的。

Samuelson, P. A. "The Pure Theory of Public Expenditures". *Review of Economics and Statistics* 36 (November 1954):387—389.

该文是关于公共品有效率生产的条件的经典表述。

扩　展

减少污染

虽然我们对外部性的讨论集中在庇古税可以使商品市场更加有效，但类似的结果也可以应用在减少污染的技术研究中。在这个扩展中，我们简要地考察这个思路。假设有两个厂商A和B，他们的产出水平(q_A,q_B)是固定的。一个不能违反的科学原则是物质商品的生产(相对于服务)必须遵守物质守恒定律。q_A、q_B的生产会产生一些副产品e_A和e_B。这些副产品(或它们中的有害成分)的物理量可以用投入z_A、z_B的方法(各p单位)来减少。最后排放量满足

$$f^A(q_A,z_A)=e_A \quad 和 \quad f^B(q_A,z_B)=e_B \quad \text{(i)}$$

其中，对每个厂商的污染减少方程$f_1>0, f_2<0$。

E20.1　最优污染减少

如果一个管理者决定e^*是最大可允许的排放量，为使其以最小的成本达到，须解拉格朗日方程

$$\mathscr{L}=pz_A+pz_B+\lambda(f^A+f^B-e^*) \quad \text{(ii)}$$

最大化的一阶条件为

$$p+\lambda f_2^A=0 \quad 和 \quad p+\lambda f_2^B=0 \quad \text{(iii)}$$

这样我们有

$$\lambda=-p/f_2^A=-p/f_2^B \quad \text{(iv)}$$

这个等式明显地说明当污染减少的边际成本(通常在环境学论著中记为MAC)对每个厂商相等时，污染减少达到成本最小化。因此一个要求每个厂商排放量相等的标准不大可能达到有效率——污染减少的边际成本相等的规定相对于排放量相等的规定会节约很多成本。

E20.2　排放税

方程iv中的最优解可以通过实行大小为λ的排放税(t)来实现(假设这个税被设置到等于一单位排放物的边际损害)。在这个税下，每个厂商试图最小化$pz_i+tf^i(q_i,z_i)$，这可以产生最优解

$$t=-p/f_2^A=-p/f_2^B \quad \text{(v)}$$

请注意，如在第20章中的分析，税赋的解决方法的好处在于管理当局不需要知道厂商减少污染成本的准确方程，而厂商自己会利用私人信息来决定污染减少的战略。如果这些方程

在企业间差别很大，他们选择的排放减少量也会有很大不同。

英国的排放税

Hanley，Shogren 和 White（1997）讨论了已在英国实行的几种排放税。他们说明污染减少的边际成本在企业间有很大不同（大约有 30 倍之差）。采取排放税的方法相对于要求相等的排放量的方法，成本节约很大。例如，作者对 Tees 河口的研究，每年节约的成本约为 1 000 万美元（1976 年美元）。作者还讨论了当排放物没有统一的污染成分或污染物可以随时间积累到不同的危险级别时，制定有效率的排放税而引发的复杂问题。

E20.3 可交易许可证

如我们在第 20 章中讨论的，许多庇古税可以达到的结果也可以通过可交易许可证系统来达到。在这种情况下，管理局将制定许可证的水平（s^*）等于 e^*，并将这些许可证以某种方式分配给厂商（$s_A+s_B=s^*$）。每个厂商将购买或出售一定量的许可证，但必须保证它的排放等于拥有的许可证所对应的污染量。如果许可证的市场价格等于 p_s，每个厂商的问题就是最小化

$$pz_i+p_s(e_i-s_i) \tag{vi}$$

当 $p_s=t=\lambda$ 时，这与方程 iv 和 v 得到的结果相同。所以可交易许可证系统将和税收方法得到相同的成本节约。

SO_2 许可证交易

美国 1990 年的清洁空气法案建立了第一个大规模的可交易排放许可证的计划。这计划集中在二氧化硫排放的控制上，目标是减少烧煤的电厂引发的酸雨。施马伦西（Schmalensee et al. 1998）研究了这计划的早期经验成果。他们总结出：建立大型有效的许可证市场是可能的。在研究期间超过 500 万（吨）的许可证易手，价格大约为每个 150 美元。施马伦西还说明了厂商们利用许可证实现了多种不同的战略。这显示了蕴涵在许可证机制中的灵活性和大量的成本节约。一个有趣的情况是许可证的价格只有预期的一半。他们将其主要解释为，由于厂商最初错误地预期许可证价格会为 300—400 美元，于是他们对排放清洁技术进行了过度的投资，在这样大量的固定成本投资下，清除一吨 SO_2 成本仅为 65 美元，所以存在较大的许可证价格下行的压力。

E20.4 创新

虽然在我们描述的模型中，税赋和可交易许可证似乎是数学等价的，但当污染减少技术上的创新动力被考虑进来时，这种等价就不存在了。当然，两种方案都提供了采用新技术的激励——如果一个工艺可以得到减少排放的较低的边际成本，在两种系统下，它都会被采用。但是，Milliman 和 Prince（1989）通过对两种情况下创新动力的分析说明税收更好。他们的理由是税收方法会鼓励新技术的更快推广，因为此时采用新技术增加的利润比许可证情况下更多。这样更快的推广将鼓励监管部门采取更严格的控制标准，因为这些标准更容易满足成本收益约束。

参考文献

Hanley, N., J. F. Shogren, and B. White, *Environmental Economics in Theory and Practice* (New York, Oxford University Press, 1997).

Millman, S. R., and R. Prince, "Firm Incentive to Promote Technological Change in Pollution Control," *Journal of Environmental Economics and Management* (November 1989): 247—265.

Schmalensee, R., P. L. Joskow, A. D. Ellerman, J. P. Montero, and E. M. Bailey, "An Interim Evaluation of the Sulfur Dioxide Trading Program", *The Journal of Economic Perspectives* (Summer 1998): 53—68.

第 21 章　政治经济学

很多关于资源配置的决策是通过政治过程做出的。人们通过投票来决定对学校的投资，选举代表来为公共品(例如国防)和转移支付(例如福利和失业补偿)的预算做决策。政府管理部门为很多商品设定标准，例如股票交易市场的法规和空气污染的允许级别。传统上，经济学家避免了对这种过程的具体分析，认为这些问题不属于标准的经济学分析范畴。近年来，这一观点受到了很多挑战，很多经济学家们开始试图用讨论市场的建模方法来考察政治决策问题。在本章中，我们简要地考察一下这方面迅猛发展的研究成果。为搭建讨论这些内容的舞台，我们首先简单地讨论一下标准的福利经济学，用著名的阿罗不可能性定理作为这部分的结束。最后我们用更为积极的方式来说明多种不同的政治过程是如何运行的。

21.1　社会福利标准

为了在几种可行的资源配置中进行选择，我们需要设计福利标准。在本章中，我们就以设计福利标准中出现的一些问题作为研究政治过程的起点。社会福利标准是微观经济学最为规范的分支，因为它包含了对人们的效用水平进行艰难选择的问题。在对 A 与 B 这两种配置进行选择时，问题就在于：有人喜欢 A，有人喜欢 B，而在某些情况下，一定要对人们的态度进行比较，以便判断哪一种配置更受人们欢迎。如人们所预期的，进行这样的选择并不存在普遍可接受的标准。

21.1.1　交换经济模型中的社会福利标准

在第 12 章中我们建立的关于交换经济效率的模型还可以用来说明建立社会福利标准过程中的一些问题。请考虑一下图 21.1 中的埃奇沃思矩形图，由于从契约曲线外向契约曲线上运动时，两个人的状况都会更好，所以，曲线上的点比曲线外的点更优。亦即，只有契约曲线上的点才有资格成为社会最优化点的候选者。沿着契约曲线运动时，(Smith 与 Jones)两个人的效用都会改变，他们的效用之间存在着直接的竞争。Smith 的效用的增加就是 Jones 的效用的减少。给定这种有效配置的集合后，我们现在来讨论在其中进行选择的标准。

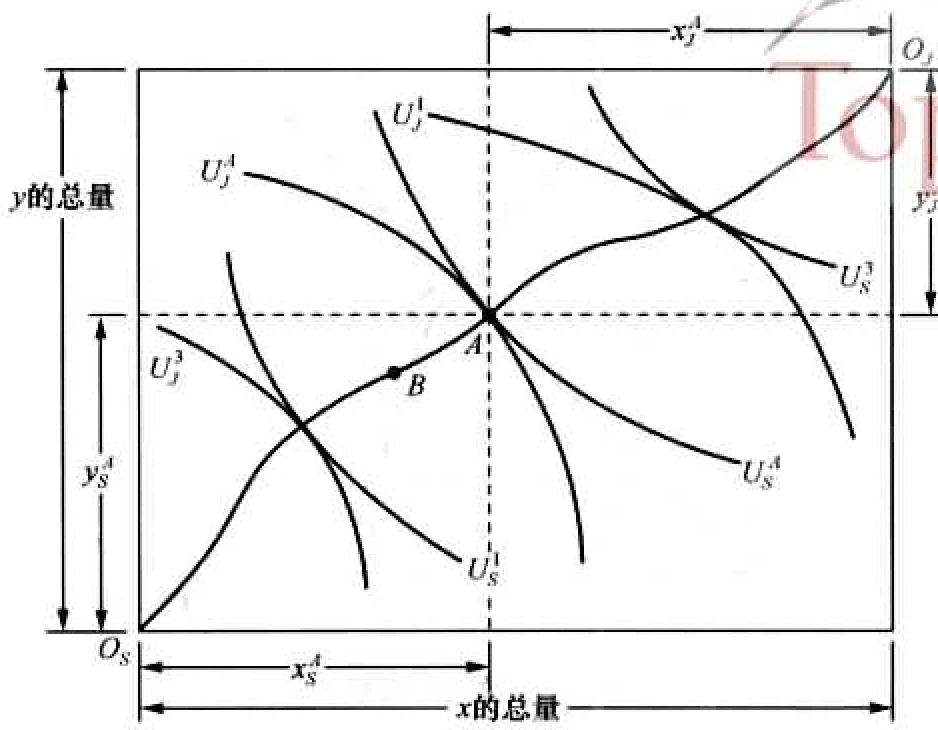


图 21.1　埃奇沃思的交换矩形图

曲线 O_SO_J 是在 Smith 与 Jones 之间对 x 和 y 进行有效配置的轨迹。由于向契约曲线上的移动会使双方的效用都有所改善，所以，该经济中的有效配置就由曲线上的那些点组成。

我们假定不同人的效用可比，那么，我们就可以沿着契约曲线用可能的效用组合构建[①]一个如图 21.2 所示的效用可能性边界。曲线 O_SO_J 记录了 Smith 与 Jones 的效用水平，这些效用水平是从消费固定数量的可获得的商品中得到的。任何在曲线 O_SO_J 内部的效用组合（诸如点 C）都是无效率的。这样，就可以把福利经济学的问题重新表述为在效用可能性边界上选点标准的问题。

21.1.2　均等标准

我们很容易说明在 O_SO_J 上选择一点的一些简单标准。一个可能的原则就是要求完全均等，即 Smith 与 Jones 应该享受同样的福利水平。于是，社会福利标准就决定在效用可能性边界上选择点 A。由于点 A 对应着契约曲线上的唯一一个点，所以，社会上最优的商品配置就由这个选择所确定。在图 21.1 中，这个配置让 Smith 得到 x_S^A 和 y_S^A，而 Jones 则得到 x_J^A 和 y_J^A。请注意，商品 x 与 y 并不一定被均等分配。这一标准要求的是效用的均等，而不是商品量的均等。

21.1.3　功利主义标准

类似的标准（尽管不一定相同）可能会选择在效用可能性边界上的一点使得 Smith 与 Jones 的效用总和最大。这就要求，在服从由效用可能性边界所带来的限制的前提下，选择能使（U_J+U_S）最大化的点（B）。如前所述，点 B 意味着 x 与 y 在 Smith 与 Jones 之间的一个确定的配置，这一配置能够从图 21.1 推导出。在政治分析中这个标准经常会被使用，在本章的后面我们也将使用它。

---

① 这种建构方法与我们在第 12 章中推导生产可能性边界时使用的方法是类似的。

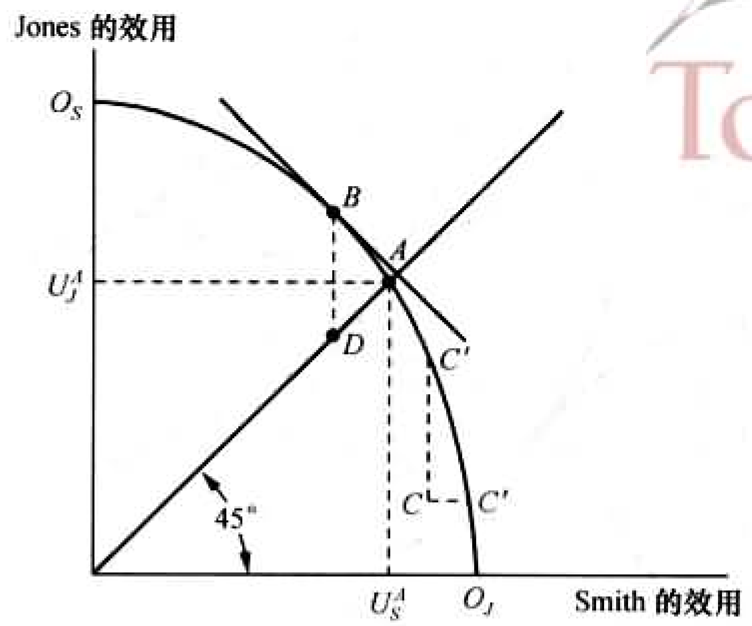


图 21.2　效用可能性边界

假定效用的可测性，则效用可能性边界就可以从图 21.1 中推导出来。曲线 O_SO_J 表明了社会可以达到的那些效用组合。在曲线 O_SO_J 上的各点之中进行选择的两个标准可以是：选择使 Smith 与 Jones 之间效用"均等"的点（如点 A）；或者选择使他们的效用总和最大的点（如点 B）。而依据罗尔斯标准，有效率的配置点 B 被认为是不如在 D 与 A 之间的均等配置点。

21.1.4　罗尔斯标准

我们要研究的最后一个标准是由哲学家约翰·罗尔斯①首先提出的。罗尔斯的着眼点是把社会想象成处于一个没人知道他自己的最终位置（以及最终效用）会在哪里的"初始位置"上。罗尔斯试图探寻处于这样一个状况的人会采用何种福利标准。通过这种方式，福利标准的选择问题于是就转化为不确定性条件下的行为问题。这是因为，没有一个人可以准确知道标准的选择将会对个人的处境产生什么影响。从其最初的前提出发，罗尔斯推断个人在选择标准时是非常厌恶风险的。具体地说，他断言，只有当处境最差的人在效用不均等的配置下比在效用均等的配置时效用有所改善的情况下，社会成员才可能选择不再追求完全均等。根据图 21.2，只有在可获得的均等配置（分布在 45 度线上）点都低于点 D 时，人们才会选择诸如 B 这样的非均等配置点。按照罗尔斯标准，点 D 与 A 之间的均等配置点都优于 B，这是因为，处境恶化的人（Smith）在那里的处境要比在配置点 B 的情况下要好。因此，罗尔斯标准提出，许多有效的配置并不一定是社会要求的，即便在效率上损失很大时，社会也许还是愿意选择均等。这一结论并不被经济学家普遍接受，许多经济学家认为人们所希望的标准并不必然是风险厌恶的。相反，在初始位置上的个人可能愿意去赌一下并成为在最终的非均等配置下的赢家，而如果出现处境恶化的可能性不大时，冒险的动机也许会处于支配地位。罗尔斯运用"初始位置"的方法把个人怎样进行社会决策加以理论化的处理，是一种已广泛应用于其他研究之中的巧思。

---

① J. Rawls, *A Theory of Justice* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1971).

21.2 社会福利函数

通过研究社会福利函数的概念，我们能够得到研究社会福利的更为一般的方法（我们上面已讨论过的三个标准作为该方法的特例）。① 该函数可能只依靠于 Smith 与 Jones 的效用水平

$$社会福利 = W(U_S, U_J) \tag{21.1}$$

于是，社会选择的问题就成了将 x 与 y 在 Smith 与 Jones 之间进行配置，以使 W 最大化的问题。这个过程可以画成图 21.3。标有 w_1, w_2, w_3 的曲线代表社会无差异曲线，在这些曲线上可以选择的效用组合对于社会来讲是无差异的。② 由于点 E 是在确定效用可能性边界的情况下所能达到的 w 的最高水平点，所以，它是社会福利的最优点。如前所述，为了确定社会最优的商品配置，从点 E 移到埃奇沃思矩形图是必要的。

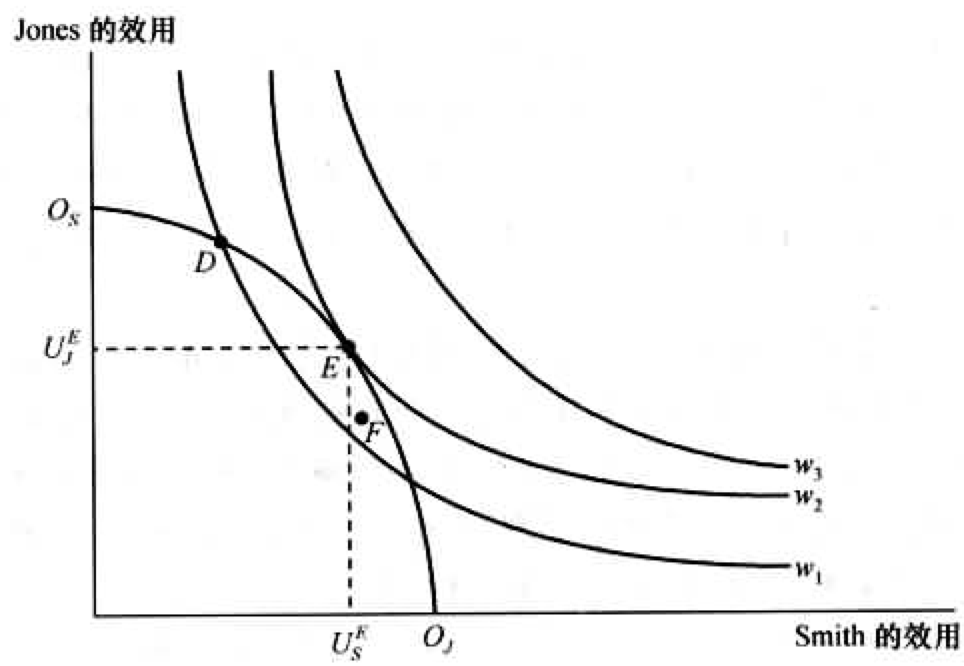


图 21.3 运用社会福利函数来寻找社会资源最优配置

如果我们能够假设社会福利函数存在，并有无差异曲线 w_1, w_2, w_3，于是，就可能把社会选择的问题加以概念化。显然，对于福利最优化，有效率（即在曲线 O_SO_J 上）是必要条件，但这并不充分，通过 D 点与 F 点的比较，可以看到这一点。

21.2.1 效率和平等之间的矛盾

图 21.3 说明了一种使社会福利最大化的效用分配选择的概念化方法。这一图示也说明了在平等与效率目标之间需要做出区别的重要性。在 O_SO_J 线上的所有点按照帕累托标准来说都是有效率的。但是，这些有效率的点中的一部分并不像另外一部分那样代表着社会所希望的配置。正

① 这一概念首先由 A. Bergson 在"A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics"一文中最先提出，该文载于 *Quarterly Journal of Economics* 52 (February 1938)：310—334。

② 在"均等"标准的条件下，社会福利函数将是 L 型的无差异曲线；同时，在"效用和最大化"这一标准的条件下，无差异曲线将是斜率为 -1 的平行的直线。

如在罗尔斯标准下，事实上也有许多无效率的点（譬如点 F）比有效率的点（诸如点 D）更受社会的欢迎。有时，如果真正最优的配置（点 E）无法达到，接受某种无效率的资源配置也可能是符合社会利益的。

例 21.1

平等分配

一位父亲带了 8 份比萨饼回家。他应该怎样在两个饿极了的孩子之间进行分配呢？假设第 1 个孩子的比萨饼效用函数为

$$U_1 = 2\sqrt{x_1} \tag{21.2}$$

而第 2 个孩子（两个孩子中较大的一个）的比萨饼效用函数为

$$U_2 = \sqrt{x_2} \tag{21.3}$$

最不容易受到反对的分配方案是平等地分配比萨饼，即每个孩子 4 份。在这种情况下，$U_1 = 4, U_2 = 2$。然而，仁慈的父亲认识到，第 2 个孩子更需要比萨饼，所以应该选择使两人效用相等的分配方案。于是，在新的情况下，$x_1 = 1.6, x_2 = 6.4, U_1 = U_2 = 2.53$。还有第三个简单的选择方案，即功利主义的父亲会去寻找使孩子的效用总量最大化的分配方法，此时，$x_1 = 6.4, x_2 = 1.6, U_1 = 5.06, U_2 = 1.26, U_1 + U_2 = 6.32$。

一位随机性的父亲。如果父亲熟悉概率论，就会把整个问题交给孩子们自己决定。由于孩子们的利益是直接冲突的，在完全信息下他们不可能达成一致的决定。然而，如果父亲提出前面已提到的三种可能的分配方案，并且宣布在每一种方案中他将以掷硬币的方式来决定每人得到哪份，这样两个孩子通过预期效用最大化的方法就可能达到一致。在掷硬币的方式中，每个孩子可能得到 1.6 份或得到 6.4 份的分配方案中，第 1 个孩子的预期效用是

$$E(U_1) = 0.5(2.53) + 0.5(5.06) = 3.80 \tag{21.4}$$

同样，第 2 个孩子的预期效用为

$$E(U_2) = 0.5(2.53) + 0.5(1.26) = 1.90$$

因此，在此种情况下，由于第一种方案，即均等分配方案会使每个孩子都得到比掷硬币时更高的效用，因此，他们会愿意选择均等分配。

一位罗尔斯主义的父亲。如果父亲把他的孩子放到无知之幕后，即直到比萨饼分下来之前他们都不知道自己会得到多少，这时，选择也会不同。如果每个孩子关注较差的情况，则由于均等效用的分配能保证效用不会降到 2.53 以下，因此，每个孩子都将选择均等效用的分配。但是，这可能假定了太多的风险厌恶。如果每个孩子相信他有一半对一半的机会得到标有“1”或“2”的方案时，预期效用为

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } x_1 = x_2 = 4 && E(U) = 0.5(4) + 0.5(2) = 3 \\
&\text{(ii) } x_1 = 1.6, x_2 = 6.4 && E(U) = 0.5(2.53) + 0.5(2.53) = 2.53 \\
&\text{(iii) } x_1 = 6.4, x_2 = 1.6 && E(U) = 0.5(5.06) + 0.5(1.26) = 3.16
\end{aligned} \tag{21.5}$$

如果孩子们仅基于预期效用进行投票，则现在每人都会选择功利主义的结论（即第 iii 种方案）。

请回答：在罗尔斯式的情况下，孩子们所表现的风险厌恶度会改变他们的选择吗？或者，计算中已经考虑了这个问题吗？

21.3 阿罗不可能性定理

如上所述，在说明社会选择问题的特定方面，社会福利函数提供了有用的工具。然而，我们一定要认识到，这个工具仅是一个理论上的工具，对于政府实际制定政策并不能提供直接的指导。至此，我们已经提出了如何构造这样一个函数以及这个函数可能具有什么性质的问题。现在，我们将考察由 K. J. 阿罗和其他人提出的关于这个问题的经济研究。①

21.3.1 基本问题

阿罗把通常的社会福利问题看作是在几个可行的"社会状态"中进行选择的问题。假设社会中的每个人都能够按照他们的愿望对这些状态排序。因此，阿罗提出来的问题就是：对于这些状态，在社会范围内是否存在着能完全反映所有个人偏好的顺序？我们用符号表示，假设有三种社会状态（A、B 与 C）、社会中有两个人（Smith 与 Jones）。假定 Smith 认为 A 比 B 好（我们用 AP_SB 表示，其中，P_S 表示"Smith 偏好于前者甚于后者"），B 比 C 好。这些偏好可以写成 AP_SB 和 BP_SC。如果个人是"理性的"，那么应该有 AP_SC：即个人的偏好是可传递的。同样假定在三种状态中，Jones 的偏好为 CP_JA，AP_JB 和 CP_JB。阿罗不可能性定理正是说明关于这三种状态的合理的社会排序（称为排序 P）不可能存在。

21.3.2 阿罗定理

阿罗不可能性定理的关键是要决定"合理的社会排序"意味着什么。阿罗假设任何社会排序（P）应该服从的如下 6 个表面上无可非议的公理（在这里，APB 被定义为"比起 B，A 更为社会所偏好"）：

1. 所有的社会状态一定可以排序：对于任意两个状态 A 和 B 来说，可以是 APB，BPA，也可以是 A 与 B 为社会所偏好的水平相同（即 AIB）。
2. 排序一定是可传递的：如果 APB，且 BPC（或 BIC），则 APC。
3. 排序一定与个人偏好正向相关：如果 Smith 与 Jones 一致认为 A 比 B 好，则 APB。
4. 如果出现了新的可行的社会状态，这一事实也不应该影响起初的社会状态排序。即如果在 A

① 参见 K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed. (New Haven, CT: Yale University Press, 1963)。

和 B 之间，有 APB。则即便出现某种新的社会状态 D 成为可行，原来的偏好序仍然成立。①

5. 社会偏好关系不应该是由习俗强加的。不应该出现与社会中个人的偏好无关的 APB 的情况。

6. 关系应该是非专制的。社会的偏好不应该由一个人的偏好决定。

21.3.3 阿罗的证明

阿罗证明了上述 6 个条件(从表面上看每个条件似乎都是合理的)彼此之间是无法调和的：即不存在服从条件 1 至条件 6 的一般的社会关系。运用 Smith 与 Jones 关于 A、B 与 C 之间偏好的例子，可以看到在社会选择将中会出现的这种不一致。由于 BP_SC，并且 CP_JB，所以，社会在 B 和 C 之间一定是无差异的(即 BIC)。否则，社会的偏好只与一个人一致(与另一个人相反)，这就违背了公理 6 所要求的非专制性。

由于 Smith 与 Jones 都偏好 A 甚于 B，根据条件 3 和 5 就有 APB。因此，运用传递性公理 2，又有 APC。但是，这再一次违背了非专制性假设，这是因为 AP_SC 但 CP_JA。这样，在这个简单的事例中，在试图构造社会偏好关系时出现了不一致。可以承认，这个例子是人为地编出来的，但是它确实清楚地说明了试图把类型彼此不同的个人偏好加总成某种合理的社会类型时的问题。阿罗定理的重要性就是表明了被选择的任何社会决策都一定会违背公理 1 到公理 6 中的至少一个假设。

21.3.4 阿罗定理的意义

社会选择理论中的许多研究，已经集中在阿罗的基本结论及在对于这些基本假定进行一定修改后该定理是否仍然成立上。一般来说，对这些假设稍作变化，不可能性结果仍难变化。无论是具有较少基本公理的体制还是具有某些阿罗公理被放宽的体制，都继续表现出种种不调和。这表明，对社会选择方法同时显得理性、确定而又公平的期望可能太高了。于是，作点妥协不可避免。当然，在哪里进行这种妥协是一个非常难的规范问题。

尽管阿罗的结论有否定的性质，但是，应该记住事实上所有的社会都在作选择。美国国会要设法通过预算(经常是在最后一分钟通过)；学院的教师要确定课程表；阿拉斯加的因纽特人要决定如何改善他们公社在下一年的捕鱼方法。因此，经济学家们逐渐不去研究怎样以社会最优的方式作出选择的这种规范问题，而是采取一种实证的方法，探讨决策在实际中是如何作出的。下面我们也将采取这种方法。

---

① 第 4 个条件有时被称为无关选择的独立性公理。这一公理(以及在冯·诺伊曼-摩根斯坦定理中相类似的假设)比其他的公理产生了更多的争论。为了考察由这一公理支配的种种关系，请考虑一下在选举中投票人的情况。假定投票人能按他们的愿望对候选人进行排序。选举总是会把这些候选人的名单掺人社会范围的大名单中。根据公理 4，如果候选人 x 被认为是优于候选人 y，那么，即便是其他候选人进入或退出，原排序都应成立，这是社会大名单所应该具备的性质。由于在实际选举中存在"捣乱者"，所以，那种每个人只对他最喜欢的候选人投票的最为一般的选举程序并不服从这一公理。例如，1968 年的总统选举由于乔治·华莱士的存在而使赫伯特·汉弗莱输掉了选举(理查德·尼克松被显示为"社会最喜欢的人")。如果属于"无关选择"的华莱士不参加选举，汉弗莱也许就胜了。因此，总统选举制度就不服从阿罗的第 4 个公理。许多学者都研究了削弱这一公理的种种后果。

21.4 直接投票与资源配置

在许多情况下,投票被作为一种社会决策的程序。在一些例子中,个人对于政策问题直接投票。例如在一些新英格兰城镇会议、许多全国范围的公民投票(比如加利弗尼亚州在1977年代号“13”的计划),以及瑞士许多国家政策的制定中,情况都是如此。许多较小的组织与俱乐部在公共决策程序中也采用直接投票,比如农民合作社、学校教师联合会等。不过,在其他的事例中,人们也发现使用代议制政府的形式可能更方便,在这种形式下,个人直接投票只是为了选举政治代言人,然后,这些政治代言人承担对于政策问题进行决策的责任。我们研究社会选择理论,将从对直接投票进行分析开始。直接投票是一个重要的题目,这不仅是由于直接投票适用于许多情况,而且也因为当选的政治代言人常常也要进行直接投票(例如,在美国国会),我们将要说明的理论在这些地方都是适用的。在本章的后面,我们将继续讨论那些在对代议制政府的研究中产生的问题。

21.4.1 多数原则

因为如此多的选举是在多数原则的基础上进行的,所以,我们通常要把这种程序看作是进行社会选择的一个自然的也许是最优的方法。然而,仅仅作一个粗略的考察就能够表明,一个政策要得到50%的选票就能通过这样一个规则,并没有什么特别神圣的地方。例如,对于美国的宪法,只有2/3的州投票同意,宪法的草案才能正式成为法律。在美国的国会,必须要有60%的投票才能限制对有争议问题的辩论。而在一些制度下(例如,贵格会教徒的祈祷会),公共决策可能要求一致同意。在前一章,我们关于林达尔均衡概念的讨论表明,在对公共品进行投票时,税收份额的某种分配可能会得到一致的支持。不过,达到这种一致同意也许是非常耗费时间的,并且可能还受制于有关投票人的策略性手段。在关于投票的整个讨论中,我们都将假定决策是按多数原则做出的。读者也许会愿意自己去思量一下在什么情况下决策所需的比例要高于50%。

21.4.2 投票悖论

在18世纪80年代,法国社会理论家孔多塞(M. de Condorcet)注意到多数原则投票制度的一个重要特点是:这种制度可能达不到均衡;相反,它们会在各种选择之间循环。孔多塞悖论在表21.1的简单事例中能得到说明。假设有三个投票人(Smith、Jones与Fudd)在三个政策方案中进行选择。为了我们后面分析的需要,我们假定政策方案代表了对于某一特殊公共品的三个支付水平(A为低,B为中,C为高)。不过,即便是选择中的方案没有这种形式的排序与之相关联,孔多塞悖论仍会出现。Smith、Jones与Fudd关于三个政策方案的偏好用不等号表示。也就是说,这些符号表示Smith认为A好于B、Jones认为B好于A,等等。在表21.1中描述的偏好产生了孔多塞悖论。

考虑在A方案与B方案之间进行的选择。由于A方案有Smith与Fudd赞成,仅Jones反对,所以,A会被选中。在A方案与C方案之间选择,将会选中C,同样是2票对1票。但在对C与B的投票中,却会选中B,我们也回到了问题的最初开始之处。于是,社会选择就在这三个方案中无止境地

循环下去。在后面的投票中，最初做出的任何选择都会被一个其他的方案击败，永远也不会达到均衡。在这种情况下，最终选择的方案将依赖于似乎并不相关的问题，例如投票何时中止，或条款如何按议事日程安排，而不是用理性的方法从投票人的偏好中得到。

表 21.1　产生投票悖论的偏好

选择：A——低支付
B——中支付
C——高支付

偏好	Smith	Jones	Fudd
	A	B	C
	B	C	A
	C	A	B

21.4.3　单峰偏好和中间投票人定理

孔多塞投票悖论之所以会产生，是因为投票人的偏好在一定程度上具有不可调和性。也许有人因此会问：对于偏好类型的限制是否会使均衡投票的结果更容易出现呢？关于这种可能性的一个基本结论由 D. 布莱克于 1948 年发现。[①] 布莱克表明，均衡投票结果总是出现在所投票的问题是一维的（譬如要在公共品上花多少钱的问题），以及投票人的偏好是“单峰的”的情况下。为了理解单峰概念意味着什么，我们要再一次考虑孔多塞悖论。在图 21.4 中，通过给方案 A、B 与 C 赋予能使其具有与表 21.1 记录的偏好相一致的效用数值，我们就可以说明会引致悖论出现的偏好。对于 Smith 与 Jones 来说，当公共品支出水平上升时，他们的偏好是单峰的，仅有一个局部的效用最大化选择（对于 Smith 是 A，对于 Jones 是 B）。但在另一方面，Fudd 的偏好却有两个局部最大化（A 和 C）。正是这些偏好导致了循环投票。如果 Fudd 的偏好如图 21.4 中的虚线所示（现在在图中 C 是唯一的局部效用最大化点），就不再有悖论了。在本例中，既然通过 2 比 1 的投票，方案 B 会击败方案 A 与 C，所以，会选择 B。此时，B 是“中间”投票人（Jones）所偏好的选择，即中间投票人 Jones 的偏好位于 Smith 的偏好与 Fudd 修正后的偏好“之间”。

布莱克的结果是相当一般性的，适用于任何数量的投票人。如果选择都是单一维度的[②]，并且偏好是单峰的，那么，多数原则将会选择出中间投票人最为偏好的方案。因此，该投票人的偏好将可以决定做出什么样的社会选择。这个结果是很多政治模型的起点。在这种模型中，中间投票人的偏好决定了政治决策——可能是因为中间投票人决定了哪种政策在直接选举中得到了多数票，也可能是因为在竞争选举中，竞选人将必须采取偏向中间投票人的政策。

① 参见 D. Black, "On the Rationale of Group Decision Making." *Journal of Political Economy* (February 1948): 23—34。
② 结果可以一般化为多维政策的模型，只要人们对这些政策的偏好可以用一维表示。

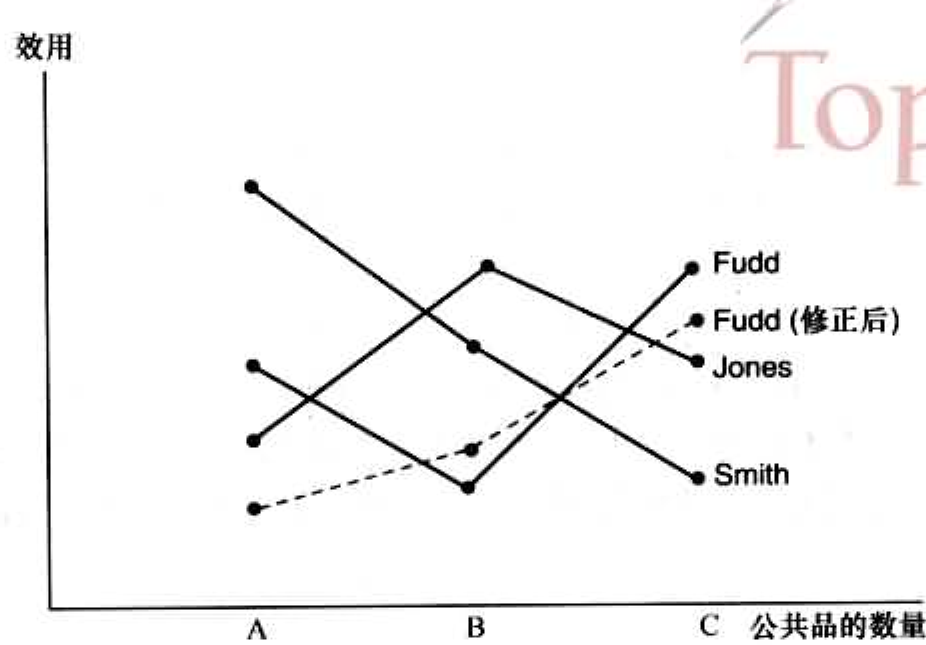


图 21.4　单峰偏好与中间投票人定理

此图说明了表 21.1 中的偏好。Smith 与 Jones 的偏好都是单峰的，但 Fudd 的偏好却有两个局部峰值，这就产生了投票悖论。如果 Fudd 的偏好是单峰的（如虚线所示），则中间投票人（Jones）所偏好的方案 B 将被选择。

21.5　简单政治模型

为了说明中间投票人定理如何应用到政治过程中，假设一个社区有 n 个投票人，每人收入为 y_i。每个人的效用取决于消费的私人物品（c_i）和公共品（g），假设效用函数的可加性

$$\text{第 } i \text{ 个人的效用} = U_i = c_i + f(g) \tag{21.6}$$

其中 $f_g > 0, f_{gg} < 0$。

每个投票人必须支付收入税给政府。税与收入成比例，税率为 t。这样每个人的预算约束为

$$c_i = (1 - t)y_i \tag{21.7}$$

政府同样有预算约束

$$g = \sum_1^n ty_i = tny^A \tag{21.8}$$

其中 y^A 是所有人的平均收入。

给定这些约束，第 i 个人的效用可以写为他对 g 的选择的函数

$$U_i(g) = (y^A - g/n)y_i/y^A + f(g) \tag{21.9}$$

第 i 个人的效用最大化使他对公共品的花费满足

$$\mathrm{d}U_i/\mathrm{d}g = -y_i/ny^A + f_g(g) = 0 \quad \text{或} \quad g = f_g^{-1}(y_i/ny^A) \tag{21.10}$$

这说明对 g 的期望的花费与收入成反比，因为（在这个模型中）g 带来的好处与收入无关，但税赋随收入增加而增加，因为高收入者与低收入者相比只能从公共支出中得到较小的净收益（甚至是损失）。

21.5.1 中间投票人均衡

假设 g 通过多数投票规则决定，它的水平将最终是中间投票人所期望的。在这个例子中，人们的偏好与收入成反比，所以 g 将被选在有中等收入(y^m)的投票人所希望的水平。任何其他水平的 g 不能达到50%的票数。所以，g 的均衡为

$$g^* = f_g^{-1}(y^m/ny^A) = f_g^{-1}[(1/n)(y^m/y^A)] \tag{21.11}$$

一般地，收入的分布在实际上是右斜的。在这样的收入分布下，$y^m < y^A$，随着收入分布斜度越大，两种分布间的差距就越大。在方程21.11中，这意味着在直接①民主下，当其他条件一样时，收入分布越不平等，税率会越高，公共品上的花费会越大。相似地，当法律给贫穷的人们更多投票权时，公共品上的花费也会增加。

21.5.2 中间人投票结果的最优性

虽然中间投票定理给出了一些有趣的有关投票结果的实证预期，但这些结果的规范意义却很难说清。很显然，在这个例子中的结果和第20章中描述的林达尔的自发的均衡不同——在那种均衡下，高收入的投票人不会自愿接受被强加的税赋。② 这个结果也不一定服从于这章开始时提出的几个福利标准。例如，在社会福利的功利标准下，g 的选择将最大化效用之和

$$SW = \sum_1^n U_i = \sum[(y^A - g/n)y_i/y^A + f(g)] = ny^A - g + nf(g) \tag{21.12}$$

g 的最优选择可以通过微分得到

$$dSW/dg = -1 + nf_g = 0$$

或

$$g^* = f_g^{-1}(1/n) = f_g^{-1}[(1/n)(y^A/y^A)] \tag{21.13}$$

这说明对于 g 的一个功利性的选择将等于具有平均收入的投票人的选择。因为 $y^m < y^A$，这里得到的 g 将比中间投票人的选择小。在例21.2中，我们将对这点进一步分析，说明这点如何应用在政府转移支付的政策上。

例 21.2

对转移支付的投票决策

假设人们在考虑一项政策，这种政策通过对每个人按收入的比例征税，最后一次总付的转移支付给每个人相等数量。如果我们记每个人得到的转移支付为 b，每个人的效用为

$$U_i = c_i + b \tag{21.14}$$

政府的预算约束为

① 在代议民主制下，代表是否会服从中间投票人的意志是值得怀疑的。

② 虽然当 g 带来的好处也与收入成比例时(我们前面假设 g 带来的好处与收入无关)，他们也可能接受这种结果。

$$nb = tny^A \quad 或 \quad b = ty^A \tag{21.15}$$

对于收入大于平均值的投票人，$b=0$ 时效用最大，因为这样一个投票人将从转移支付中得到比缴纳的税金还少的钱。不论税率是多少，每一个少于平均收入的人将因转移支付而受益。这种人（包括决定性的中间投票人）将选择 $t=1, b=y^A$。即他们会投票希望通过税收系统得到完全平等的收入。这样的税收计划是不现实的——主要因为 100% 的税率将产生极大的负的工作激励，使平均工资降低。

为了考虑这种激励效应，假设[①]每个人的收入由两部分组成，一部分（$y_i(t)$）受税率影响，另一部分（n_i）与税率无关。并假设 n_i 平均值为 0，但其分布右斜，故 $n_m<0$。第 i 个人的效用为

$$U_i = (1-t)[y_i(t) + n_i] + b \tag{21.16}$$

假设每个人首先通过控制影响 $y_i(t)$ 的变量（例如劳动供给）来最大化效用，这得到他关于 t 和 b 的政治决策的最优化的一阶条件[②]为（利用方程 21.15 表示的政府预算约束）

$$\mathrm{d}U_i/\mathrm{d}t = -n_i + t\mathrm{d}y^A/\mathrm{d}t = 0 \tag{21.17}$$

对于第 i 个人的最优税率为

$$t_i = n_i/(\mathrm{d}y^A/\mathrm{d}t) \tag{21.18}$$

假设"多数规则"下的政治竞争将选择中间投票人青睐的政策，则均衡税率为

$$t^* = n_m/(\mathrm{d}y^A/\mathrm{d}t) \tag{21.19}$$

因为 n_m 和 $\mathrm{d}y^A/\mathrm{d}t$ 都是负的，这种税率将是正的。n_m 离平均值越远（即收入的分配越不平等），税率就越大。类似地，税的扭曲效应越大，税的最优值越小。这个模型对于现实世界中的再分配问题提出了一些很强的可检验的假设。

请回答：累进税对模型中的 t^* 会起到增加还是减少的作用？

21.6 代议制政府

在代议制政府中，个人投票选举候选人，而不是选择政策。选中的候选人再在立法体系中对他们偏好的政策进行投票。政治家的政策偏好受多种因素影响而形成，这些因素包括：他们对选民意愿的认识、对公共品的看法、特殊利益集团的游说，以及最为根本的保证他们自己重新当选的愿望。在这一节，我们简单考察在代议制政府下政策是如何选择的，以及这些政策如何影响资源的配置。

21.6.1 概率式投票

在我们关于代议制政府的模型中，我们假定对于某一政治职位只有两个候选人。在选举前，每个候选人都会宣布他的"施政纲领"，即一个如果选中即将执行的政策清单。候选人的施政纲领可以

---

① 参见 T. Romer, "Individual Welfare, Majority Voting, and the Properties of a Linear Income Tax", *Journal of Public Economics* (December 1978): 163—168。本例中提供了一个该文中模型的简化形式。

② 由方程 21.16 求微分和个人效用最大化的假设 $\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t=0$，得到方程 21.17。

用 θ_1 和 θ_2 来表示。为了使问题进一步简化，我们假定候选人一旦当选就会真正在实际中实施他讲过的施政纲领，当然，现实中的候选人经常会收回选举时的承诺，不过，研究可信性的问题就会让我们离题太远了。

社会上 n 个投票人中的每一个都在观察候选人的施政纲领，并决定怎样去投票。如果 π_i 表示第 i 个投票人投第 1 个候选人的票的概率，则我们可以假定

$$\pi_i = f_i[U_i(\theta_1) - U_i(\theta_2)] \tag{21.20}$$

这里 $f' > 0$，并且 $U_i(\theta_j)$ 表示投票人期望从第 j 个候选人所宣布的施政纲领中得到的效用。由于在选举中只有两个候选人①，第 i 个投票人会对第 2 个候选人投票的概率就是 $1 - \pi_i$。

21.6.2 候选人博弈中的纳什均衡

第 1 个候选人会选择 θ_1 以使其当选的概率最大

$$\text{预期得票率} = EV_1 = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \sum_{i=1}^{n} f_i[U_i(\theta_1) - U_i(\theta_2)] \tag{21.21}$$

同样，第 2 个候选人也会选择 θ_2 以使其期望投票最大

$$\text{预期得票率} = EV_2 = \sum_{i=1}^{n} (1 - \pi_i) = n - EV_1 \tag{21.22}$$

从博弈论的角度看，我们的投票模型是一个具有连续策略（施政纲领 θ_1 和 θ_2）的零和博弈。零和博弈的基本理论告诉我们：这样的博弈会有一系列纳什均衡策略；在这些均衡处应有

$$EV_1(\theta_1, \theta_2^*) \leqslant EV_1(\theta_1^*, \theta_2^*) \leqslant EV_1(\theta_1^*, \theta_2) \tag{21.23}$$

也就是说，第 1 个候选人针对 θ_2^* 通过选择 θ_1^* 做到最好，而第 2 个候选人针对 θ_1^* 通过选择 θ_2^* 做到最好。因此，从选举策略方面考虑，候选人会提出均衡的施政纲领，并且，通过考察这些施政纲领怎样受到环境变化的影响可以研究选举的性质。

例 21.3

施政纲领的净价值

虽然一般来说很难对候选人施政纲领的多种维度进行综合量化，但是，我们可以用“净价值”对施政纲领作一个简要说明。在这种情况下，各个候选人对投票人都保证了一个唯一的货币收益（即政府服务减去所付税金的值）。例如，第 1 个候选人对每一个投票人都许诺了 θ_{1i} 大小的净货币收益。候选人受政府预算限制的约束

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{1i} = 0 \tag{21.24}$$

竞选人的目标是要选择能使 EV_1 最大化的 θ_1 的集合去对抗 θ_2^*。对这个问题建立拉格朗日函数，得到

$$\mathscr{L} = EV_1 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i[U(\theta_{1i}) - U(\theta_2^*)] + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_{1i}\right) \tag{21.25}$$

① 事实上，此时我们也假定所有的投票人都参与投票。显然，关于投票人“弃权”的研究在分析实际选举中也是相当重要的。

与保证给第 i 个投票人的净收益相关的最优化一阶条件为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_{1i}} = f_i' U_i' + \lambda = 0 \tag{21.26}$$

如果函数 f_i' 对于所有的投票人都相同，方程 21.12 就意味着第 1 个候选人应该选择 θ_{1i} 使 U_i' 对所有投票人相等。有趣的是，这种政策使“功利主义”的社会福利函数最大化。

$$SW = \sum_{i=1}^{n} U_i(\theta_{1i}). \tag{21.27}$$

于是，在这个简单的模型中，在对议员进行的投票中产生的策略性结果与由某种特定社会福利函数表示的最优资源配置之间存在着一种联系。候选人在公开场合的竞争在某种程度上可能是对私人市场上斯密的看不见的手的补充。①

请回答：第 2 个候选人也会选择功利主义的最优施政纲领吗？如果每个投票人的 f_i 是彼此不同的，那么这种结果会发生什么变化？

21.6.3 金钱与政治学

由于金钱在选举中日益扮演着重要的角色，所以，经济学家推广了前述模型，以考虑竞选捐助以及其他形式的政治支付。通过上述支付影响资源配置的政治渠道有两种。第一，花钱在媒体上做广告或是花钱拉票的努力可能会影响投票人的决策（即这种支付会影响我们在前一节提出的函数 f_i）；第二，竞选捐助可能会引致竞选人去改变施政纲领以便迎合特殊利益集团的捐助人。于是，最终由竞选人选定的施政纲领可能并不是先前所指的纯粹的纳什均衡的选择。结果，实际中的施政纲领可能代表了竞选人在获得竞选基金方面的需要与他们获得大多数选票的需要之间的复杂的替代。对这种替代进行建模，以及推断各种“改革”方案怎样会影响观测到的结果，在一般均衡分析中是一个困难的问题。

21.7 寻租行为

被选举的政治家履行代理人的职责为社会中的委托人选择政策。在这里，完美的代理人会选择那些具备完全信息的中间投票人的选择。人们可能会问，这个关于政治家的行为的假设是否太强了呢？似乎没有理由认为政治家是无私的代理人。另一个假设为政治家可能参与寻租行为来增加自己的福利。这样的行为可能是简单地窃取一些税收，也可能是更高明些地将政治租金伪装成法律程序中的必要成本。在我们前面讨论的政治模型中，这种腐败的可能性将在人们得到的公共品的价值和付出的税收间产生一个税赋楔子。即政治租金 r 将使政府的预算约束（方程 21.8）改写为

$$g = tny^A - r \tag{21.28}$$

① 关于概率式投票模型的其他规范性质的讨论可以参见 P. Coughlan and S. Nitzan, “Electoral Outcomes with Probabilistic Voting and Nash Social Welfare Maxima”, *Journal of Public Economics* (February 1981): 113—121。

人们将这种寻租行为考虑进公共政策的决策中，这将减少 g 和 t 的最优值。

21.7.1 政治租金和选举竞争

政治租金能否在公开的选举竞争中存在是值得怀疑的。如果选举人 A 宣布的政策 $(g,t)^A$ 符合方程 21.28 中的预算约束，参选人 B 总可以选择政策 $(g,t)^B$，通过要求较少的租金使其对中间投票人吸引力更大。就好像我们在第 15 章博弈论中的伯兰特价格竞争中，竞争者被限制到以边际成本定价，政治竞选者间的竞争也会使政治租金为 0。只有当存在进入壁垒（例如，现任者的选举优势）或有关竞选者的信息不完全时，大于零的租金才可能存在。从这个角度看，竞选制度改革和反垄断政策有很多共同点。

21.7.2 政治租金的来源

政治租金不一定从政府部门中产生。私人居民可能通过从支持他们的政治家中寻求帮助为自己寻租。例如，假设一个原本竞争市场中的厂商可以（通过给政治家一定的支付）让政治家给他提供独家经营的特权。结果会导致这个行业的垄断化，政治家自己也可以得到垄断利润中的部分转移。政治支付本身并不是社会的成本——这只是把从消费者转移到垄断者的部分收益又转移到了政治家手中。但垄断导致的无谓损失（相对于没有政治偏好时的竞争市场的情形）和为保证特许经营权付出的资源，组成了寻租的社会真实成本。

下面我们给出一般的定义。

定义

寻租行为。经济当事人使用政治程序来创造在普通市场交易中不能发生的经济租金时采取的行为称为寻租行为。这样的租金由政治家和私人分享。这些行为的福利损失来源于必须接受次好结果的人们的效用损失，而与租金本身的大小或租金分享的方式无关。

上面的定义说明寻租行为是普遍存在的，这些行为的成本可能会很高。例 21.4 说明可以用标准的经济学概念来分析这些行为。

例 21.4

租金消散

如果许多当事人在同一个寻租行动中竞争的话，则所有可得到的租金可能会消散到寻租者的成本之中。例如，假定一个垄断者每一期会得到利润 π_m，而为了从一个腐败的政府官员手中获得垄断特许权，每一期要行贿 $B(B<\pi_m)$。只要预期收益超过行贿成本，风险中性的企业家就会进行行贿。如果每一位寻租者都有相同的机会获得特许权，行贿者的数目就会达到这样一点，使

$$B=\pi_m/n \tag{21.29}$$

这样，通过行贿者们为特许权支付贿赂，总的可获得的租金就消散了。然而，如果寻租者是风险厌恶型的，或者政府官员不去追求使可能的受贿额最大化，那么，一些租金就会留在获得特许权的人手中。

请回答:在本例中,如果 n 低于满足方程 21.29 所需要的数目时,租金是否会被完全消散?

小 结

在本章中,我们概述了公共选择经济理论中的某些概念。我们说明了公共选择机制内在地比市场机制更难于评估。即使在相对简单的情况下,帕累托无效率的结果都可能会发生。而对于复杂的情况(譬如美国国会中的投票),建立明确的行为模型可能非常难,并且评估也要采用一些不那么正式的方式。在考察这些情况的时候,我们说明:

- 由于要使用许多潜在的福利标准,所以,选择平等的资源配置就是一个模糊的过程。在某种情况下,达到某种(被恰当定义的)平等可能要在效率上有所损失。
- 阿罗不可能定理表明,在相当一般的假设下,不存在完全令人满意的社会选择机制。因此,社会选择理论的问题就是对相对不完善的机制进行绩效评价。
- 直接投票与多数原则并不总是能够达到均衡。不过,如果偏好是单峰的,对于单一维度的公共问题进行投票的多数原则将会选出由中间投票人赞成的政策。虽然这些政策并不必然是有效率的。
- 代议制政府中的投票可以运用博弈论工具进行分析。在某些情况下,候选者的策略选择会达到具有合意规范结果的纳什均衡。
- 政治家可能会参与寻租行为,但这会被竞选限制。

练 习 题

21.1 在一个岛上,有 200 磅粮食要在两个孤立无援的水手之间分配。第一个水手的效用函数为

$$\text{效用} = \sqrt{f_1}$$

其中 f_1 是第一个水手消费的数量。第二个水手消费的效用函数为

$$\text{效用} = \frac{1}{2}\sqrt{f_2}$$

a. 如果粮食在两个人之间平均分配,他们各自的效用是多少?

b. 如果使他们的效用相等,粮食应如何分配?

c. 要使两个人的效用之和最大,应如何分配粮食?

d. 假设第二个水手能够生存的效用水平是 5,如果想要在第二个水手得到最低效用水平的前提下使效用之和最大化,应如何分配粮食?

e. 假定两个水手都赞成的社会福利函数为

$$W = U_1^{1/2}U_2^{1/2}$$

那么,在两个水手之间应怎样分配粮食才能使社会福利最大化?

21.2 在 20 世纪 30 年代,有几个作者提出"行贿标准"以判断社会状况的满意度。这一福利标准表明:如果在社会从状态 A

到状态 B 的变动中，从这一变动得益的人能够补偿在这一变动中效率受损的人以使后者接受这一变动，那么，这个变动就是一个改善。实际上并不一定要去补偿，有能力进行补偿就足够了。如果实际上进行了补偿，这一标准就减弱成了帕累托的定义（一部分人的境况在不损害他人的前提下有所改善）。因此，只有在获益者不向受损者进行补偿的情况下，这一标准才是有新意的。那么，在这样的情况下，行贿标准是否是"无价值"的？或者是否是偏向了那些在开始时就是富人的人的利益？你能给出一些例子吗？

21.3 假定一个经济以两种商品（x 与 y）的线性生产可能性函数来描述，其形式为 $x+2y=180$。该经济中有两个人，他们有着相同形式的效用函数 $U(x,y)=\sqrt{xy}$。

a. 假定 y 的产量估计为 10，该经济的效用可能性边界会在哪里？

b. 假定 y 的产量估计为 30，其效用可能性边界又会在哪里？

c. 应该怎样选择 y 的产量，以保证实现"最优的"效用可能性边界？

d. 在什么条件下（与本问题中的条件不同），你对问题 c 的答案会依赖于所研究的效用可能性边界上的点？

21.4 假定一个社会由 7 个人组成，其成员要对他们最喜欢的社会安排投票，而最后选中的是得票多的社会安排。设计一个例子，其中的个人要对 A、B 与 C 三种状态排序：如果三种状态都可以选择时，会选 A；但是如果"无关的"选择 C 不能被选时，就会选 B。（这等于表明该社会的组成并不符合阿罗所列举的公理 4。）你的例子有多少合理性？关于阿罗定理的性质这个例子能说明什么？

21.5 假定经济中只有两个人。在 5 种可能的社会状态中他们两个人的效用被表示为下表：

状态	效用 1	效用 2
A	50	50
B	70	40
C	45	54
D	53	50.5
E	30	84

在经济开始运作之初，每个人并不知道他们将被分派的号码（1 或 2）。因此，他们不能确定在各种社会状态下他们所获得的实际效用。为了对付这种不确定性，如果一个人在他的投票行为中采取了如下策略，哪种社会状态将会被选中？

a. 选择能保证最不富裕的人有最高效用的社会状态。

b. 假定得到 1 号或 2 号的可能性是 50 对 50，并选择预期效用最高的社会状态。

c. 假定在任何状态下都只有 40% 的机会获得高效用，60% 的机会获得低效用。选择在此概率情况下具有最高期望效用的社会状态。

d. 假定有 50 对 50 的机会被分派到 1 号或 2 号，并且每个人都不喜欢不平等。每个人都将选择能满足

$$\text{预期效用} - |U_1 - U_2|$$

尽可能大的状态（式中符号 $|\cdots|$ 表示绝对值）。

e. 从这一问题中你能得到关于在无知之幕下（不知道自己在社会中的特定身份）作出社会选择的什么结论？

21.6 假定社会上有三个人要试图对三种社会状态（A、B 和 C）排序。对于下述的每一种社会选择方法，请至少举一个例子说明阿罗定理的（至少一个）条件是怎样被违背的。

a. 没有选票交易下的多数原则。

b. 存在选票交易下的多数原则。

c. 用记点的办法投票，在这种情况下，每一个投票者对每一种方案可以给出1、2与3点，然后，总点数最高的方案被选中。

21.7 假设消费者明年被解雇的概率为 u。如果他们被解雇，他们会得到的失业保障为 b，如果他们仍被雇佣，则工资为 $w(1-t)$，其中 t 是为用来支付失业保障的税率。失业保障受政府的预算约束 $ub=tw(1-u)$ 的限制。

a. 假设每个人的效用函数为

$$U=(y_i)^{\delta}/\delta$$

其中 $1-\delta$ 度量了不变的相对风险厌恶。那他的效用最大化的 b 和 t 的选择为多少呢?

b. 效用最大化时对 b、t 的选择如何对失业率 u 的变化作出反应?

c. 效用最大化时对 b、t 的选择如何对风险厌恶的参数 δ 的变化作出反应?

21.8 毛绒熊的需求由下式给定

$$Q=200-100p$$

并且这种工艺品可以以不变的边际成本0.50美元进行生产。

a. 甜牙公司为了从政府手里获得毛绒熊生产的垄断特许权，愿意花多少钱进行行贿?

b. 行贿代表了来自于寻租的福利成本吗?

c. 这种寻租行为的福利成本是什么?

21.9 在有资格的投票人的投票决策中，搭便车问题是怎样产生的? 投票人是否参与投票的决策会怎样影响中间投票人的结果? 它又会怎样影响概率式投票模型?

21.10 假定投票人会基于从两个竞选人那里得到的效用的比率来决策——即方程21.6变为

$$\pi_i=f_i[(U_i(\theta_1)/U_i(\theta_2))]$$

请说明在本例中，涉及净价值施政纲领的博弈结果将使纳什社会福利函数

$$SW=\prod_{i=1}^{n}U_i$$

最大化。

推荐阅读文献

Arrow, K. J. *Social Choice and Individual Values*. 2nd ed. New Haven, CT: Yale University Press, 1963.

该书是关于不可能性定理的经典表述，并对于其一般意义作了拓展性讨论。

Black, D. "On the Rationale of Group Decision Making". *Journal of Political Economy* (February 1948): 23—34. Reprinted in K. J. Arrow and T. Scitovsky, eds., *Readings in Welfare Economics*. Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1969.

该书是关于"中间投票人"定理的早期发展。

Buchanan, J. M., and G. Tullock. *The Calculus of Consent*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1962.

该书对不同投票程序的性质进行了经典分析。

Drazen, A. *Political Economy in Macroeconomics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2000.

该书考虑了宏观经济政策制定时的一些不同模型。

Inman, R. P. "Markets, Governments and the 'New' Political Economy" In A. J. Auerbach and M. Feldstein, eds., *Handbook of Public Economics*, vol. 2. Amsterdam: North-Holland, 1987. pp. 647—777.

该书对涉及本章有关主题的近期文献进行了扩展性评论。应用博弈论有趣地说明了一些概念，并对税收限制条款的理论问题进行了很好的讨论。

Mueller, D. *Public Choice II*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

该书拓展了本章中对概率式投票的分析,对政治捐助以及其他一些问题作了详细讨论。

Olson, M. *The Logic of Collective Action*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1965.

该书分析了个人激励对于他们从事集体行动意愿的影响,书中有许多引人入胜的例子。

Persson, T., and G. Tabellini. *Political Economics: Explaining Economic Policy*. Cambridge, MA: MIT Press, 2000.

该书总结了近期提出的政治选择问题的模型。包括投票模型和一些制度框架的问题。

Rawls, J. *A Theory of Justice*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1971.

该书是一本基本的哲学教科书。书中广泛应用了经济学概念,特别是帕累托效率与契约曲线等概念。

Sen, A. K. *Collective Choice and Social Welfare*. San Francisco: Holden-Day, 1970.

文中对集体选择问题作了完整、正式的分析。在更多数理分析中还配有许多文字说明。

扩　展

投票方案

我们已经看到第21章中对公共品的"多数规则"投票和解决第20章中的需求显示问题没有什么关系。大多数投票方案没有传递有关投票人偏好的足够信息,这使得林达尔均衡中的有效结果无法达到。在本章的扩展中,我们考察一些更复杂的更接近林达尔有效结果的投票方案。但这些方案主要是理论上的,这些方案的施行需要投入很多资源。

E21.1　维克多拍卖

很多投票方案的想法来源于维克多(W. Vickrey)的关于第二价格密封投标拍卖[①]的著名文章(1961)。维克多的主要想法是:在密封投标拍卖中出价最高的人中标,但他支付的价格是第二高的投标价格,这样的拍卖规则提供了激励,使竞标者诚实地报告他们对拍卖品的最高评价。考虑竞标人 i,他会从拍卖品中得到效用 u_i。在通常的第一价格密封投标拍卖中,这个人可能出价 $b_i<u_i$,因为他希望在获得拍卖品的同时得到一些剩余 u_i-b_i,这样这个人有动机来隐藏自己对拍卖品的真实评价。在第二价格密封投标拍卖中,其他竞标者的最高评价 $b_{(-i)}$[②],对第 i 个人来说是外生的。如果 $u_i<b_{(-i)}$,第 i 个人投标 $b_i=u_i$,他将得不到拍卖品(在这种情况下,这对该人也是效用最大化的)。如果 $u_i>b_{(-i)}$,这个人仍投标 $b_i=u_i$,他会得到拍卖品,并得到 $u_i-b_{(-i)}$ 的净收益。无论在哪种情况下,第 i 个人的激励是诚实地竞标——维克多第二价格密封投标拍卖使人们真实公布了自己的评价。

E21.2　格拉夫机制

1973年,格拉夫提出了一篇著名的论文,推广了维克多的想法来讨论公共品的需求问题。在格拉夫的机制下,每个投票人将被询问他对公共品及所需支付的净评价(即公共品的收益减去税金,这结果可能是负的)。但同时每个人

① 关于此种拍卖更多的数学上的细节,请参见问题15.10。
② 记号 $(-i)$ 代表了除第 i 人外其余的人组成的组。

将被给予一定的转移支付，以保证人们有激励说出真实的净评价。为了说明这种支付，假设只有一种公共品，第 i 个人报告的对它的评价为 v_i。在公共品被提供时，每个人被保证得到直接的转移支付 $t_i = \sum_{-i} v_i$（可能是负的），而不提供时，每个人得到 0。亦即只要公共品项目被施行，每个人得到的转移支付就等于所有其他人宣布的评价之和。

第 i 个人面临的问题是宣布适当的他本人的评价使得当且仅当 $u_i + \sum_{-i} v_i > 0$ 时，项目才被施行。但每个人知道只有 $\sum_i v_i > 0$ 时，政府才会实行这个项目。所以，选择 $u_i = v_i$ 是一个保证效用最大化的选择。因为这个战略对每个人都是占优战略，格拉夫方案可以实现每个人如实地报告自己的评价。

E21.3 克拉克机制

格拉夫机制提供了很多投票机制的基础。一种推广是增加一些与个人评价描述过程无关的税或转移支付到原先的格拉夫转移支付上。克拉克(E. Clarke)在更早的时候(1971)提出的一种机制就是这样。在这种机制下，格拉夫转移支付伴随了一个基于其他人评价的税。这个税被设定为 $\text{Max}\left(\sum_{-i} v_i, 0\right)$。即如果其他人评价的和是正的，这种税就等于这个评价和；如果其他人评价的和是负的，这种税就等于 0。这种综合的两部分的转移或税赋方案有一些有趣的特点。第一，这个过程也是事实显示的——增加的这部分没有改变格拉夫机制的事实显示特性。第二，克拉克机制指定了一个有趣的身份"关键投票人"。当一个人报告了自己的评价后而改变了项目的决策，这个人就被称为关键投票人。对非关键投票人，克拉克机制下的综合转移或税赋为零。例如，假设$(-i)$组的评价和是正的，且很大，第 i 个人无论怎样报告自己的评价（请注意这个报告是诚实可信的），这个公共品项目都会被施行。在这种情况下，格拉夫转移和克拉克税将抵消，净转移或税赋为 0。如果假设$(-i)$组的评价和是负的，且也很大，第 i 个人无论怎样报告自己的评价（请注意这个报告是诚实可信的，）这个公共品项目都不会被施行。在这种情况下，格拉夫转移和克拉克税都将为 0。当第 i 个人是关键投票人，他将支付一个税，这个税很像庇古税，因为它抵消了第 i 个人改变整体决策引起的对$(-i)$组的外部性。例如，假设 $\sum_{-i} v_i$ 是负的，但 $\sum_i v_i$ 是正的。这个项目将被执行，而第 i 个人得到负的格拉夫转移 $\sum_{-i} v_i$ 和克拉克税 0。亦即在这种情况下，该投票人付出的税等于当该项目被实行时，$(-i)$组所有人面临的损失。第 i 个投票人对这种外部性的支付是由于他起到了关键的作用。当$(-i)$组的人们合起来希望此项目执行，而由于第 i 个人的负评价使此项目不被执行时，一种相似的税也会被支付。所以，克拉克机制和庇古税在这方面体现了同样的经济学直觉。

E21.4 一般化

我们已经描述的投票方案（有时我们根据这三个机制的发现者将其命名为 VCG 机制）可以被推广到很多方向上。例如，Mas-Colell，Whinston 和 Green (1995)总结了 VCG 方法被推广到评价潜在政府工程的方式及不同的均衡概念如何被用来达到更好的结果。还有些学者研究了 VCG 机制的渐近性质，总结出当总的投票人数增加时，关键投票人的数量会趋近为零。但我们在这个扩展中一直使用的一个隐含假设

是不大可能被一般化的，即不同的转移和税赋可以简单地加到投票人的（间接）效用上，而不影响在约束中其他部分的分配。[①] 这些关于偏好的假设是否较好地描述了实际的政治决策过程是值得讨论的。

参考文献

Clarke, E., "Multipart Pricing of Public Goods", *Public Choice* (Fall 1971): 19—33.

Groves, T., "Incentives in Teams", *Econometrica* (July 1973): 617—631.

Mas-Collell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green, *Microeconomic Theory* (New York, Oxford University Press, 1995).

Vickery, W., "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance* (January 1961): 1—17.

① 技术上，效用被假定为"拟线性的"，即 $u_i = U_i(c) + g_i + t_i$，其中 c 是消费，g_i 代表项目带来的好处，t_i 代表支付的税或得到的转移支付。

“请回答”部分简明答案

以下是每章例题部分“请回答”的简明答案，希望能对学生理解本书有一些帮助。

第 1 章

例 1.1 如果价格与产量有关，$p(q)\cdot q$ 的微分会更复杂。这将引出边际收益的概念，本书中会多次讲到。

例 1.2 化简式 1.16 得到$\partial p^*/\partial a=1/225$，所以如果 a 增加 450，直接套用该式得到 p^* 应该增加 2。

例 1.3 如果 $x=9.99$，$y=5.040$；如果 $x=10.01$，$y=4.959$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{0.081}{0.02}$$

接近 −4。微分算出的变化率只在自变量变化很小时近似成立。

第 2 章

例 2.1 最大化的一阶条件是

$$\partial\pi/\partial l=50/\sqrt{l}-10=0$$
$$l^*=25,\pi^*=250$$

例 2.2 不是，只有指数函数（或在一定区间内接近指数函数的函数）弹性为常数。

例 2.3 是一组以 $x_1=1$，$x_2=2$ 为圆心的同心圆。当 $y=10$ 时圆退化为一点。

例 2.4 直观来看，对于不同的常数，生产可能性边界是一组离心率相同的同心椭圆。

例 2.5 $\partial y^*/\partial b=0$，是因为在极值点总有 $x_1=b$，这样 x_1-b 这一项就没了。

例 2.6 有 $x_1+x_2=2$，$x_1=0.5$，$x_2=1.5$。现在 $y^*=9.5$。当 $x_1+x_2\geqslant 3$ 时，可以达到无约束条件的极值。

例 2.7 圆形的篱笆可以以最小的周长圈占最大的面积。证明此结论要用到极限的知识。

例 2.8 此处局部极值点也是全局极值点。二阶导数不变意味着函数斜率变化速率恒定。

例 2.9 这个函数图形像一个尖点朝上的锥体，因而只有一个最大值点。

例 2.10 三维空间中线性约束条件可以视作一束平面，它与图 2.4(a)和 2.4(c)都能有唯一的切点。而无约束条件的极值相当于一束水平的平面，只有图 2.4(a)有最大值。

例 2.11 对于不同的 k，齐次性显然无法保证，但两个自变量之间的替代关系是可以保持的，即无论 k 取何值，均有 $-f_1/f_2=x_2/x_1$。

第 3 章

例 3.1 不对。求偏导数时我们固定效用不变，这就隐含了 y 与 x 的关系。由式 3.11 的约束决定了 x 改变时 y 也要跟着变。

例 3.2 第 1 个和第 3 个例子中，x，y 同时加倍，MRS 不变，但第 2 个例子是要变的，因为$(1+x)/(1+y)\neq(1+2x)/(1+2y)$。

例 3.3 对于位似函数，无差异曲线束与经过原点的直线的交点的斜率均相等。

例 3.4 无差异曲线束是在水平方向上平行的，就是说，给定任意水平的 y，对于所有的 x，MRS 均相等。满足它的一种情况是这样的：当收入增加时不再多买 y 商品，全部增加的收入都用来买 x，而且 x 的边际效用不变。这种情况下一章会碰到。

第 4 章

例 4.1 对于每种商品支出固定比例就意味着$\partial x/\partial p_y=0$，$\partial y/\partial p_x=0$。注意式 4.23 中根本没有 p_y，式 4.24 中也没有 p_x。

例 4.2 消费份额不受收入影响，但要受相对价格变动的影响，这正是位似函数的性质。

例 4.3 如果名义收入与所有商品的价格都加倍，预算

约束不受影响，效用自然也不变。这是间接效用函数关于所有价格和名义收入零次齐次的含义。

例 4.4 在科布-道格拉斯函数下，当 $p_y=3$ 时，$E(1,3,2)=2\cdot 1\cdot 3^{0.5}\cdot 2=6.93$，所以为了保持效用不变，消费者的收入应该一次总付性地减少 1.07。在固定支出比例的情况下，原来的商品组合现在需要花费 7，即需要收入补偿 -1。注意在这种情况下选择的商品组合没有变化，但在科布-道格拉斯函数中，新的商品组合是 $x=3.46$，$y=1.15$，因为消费者更充分地利用了 y 的降价。

第 5 章

例 5.1 是这样的。从方程 5.5 或 5.7 可以推算出每种商品的支出比例。显然，无论 p_x、p_y、I 怎么变动，个人总是花完其所有的收入，即各种商品的支出比例之和都是 1。

例 5.2 如果 $x=0.5I/p_x$，$I=100$，当 $p_x=1$ 时，$x=50$。由方程 5.11 计算得 $x=0.5(100/1)=50$。

假设 x 涨价到 $p_x=2.0$，由科布-道格拉斯函数得出 $x=25$；而由 CES 函数推出 $x=100/6=16.67$。所以 CES 需求函数对价格变化更敏感。

例 5.3 是零次齐次的。因为按同比例变化的 p_x 和 p_y 不产生替代效应，因此保持 V 不变的条件下，x 和 y 也不会变。对于所有补偿性需求函数都应具有这种性质。

例 5.4 在科布-道格拉斯函数下，比如说 x 的指数较大，则消费者会花费收入的更大比例在 x 上。这样在斯拉茨基分解式中收入效应会变得更大。

例 5.5 科布-道格拉斯函数提供了一个简单的情形：不论预算约束为何，总有 $e_{x,p_x}=-1$。斯拉茨基等式的弹性形式说明，由于收入效应是 $-s_x e_{x,I}=-s_x(1)=-s_x$，补偿性价格弹性就是 $e^c_{x,p_x}=e_{x,p_x}+s_x=-(1-s_x)$。可见，当支出用于 x 的比例较少时，改变的比例就会比较大。

例 5.6 一般我们假定需求函数都是在某一个价格之上，需求量减为零。但也不一定非如此不可，即使广义积分都是不收敛的，仍然可以用积分的办法计算消费者剩余的变化量。

第 6 章

例 6.1 由于 $\partial x/\partial p_y$ 把收入效应和替代效应都包括了，所以如果两者互相抵消就应有 $\partial x/\partial p_y=0$，并不是没有替代效应。只有当价格变化时，收入效应确为零时，固定比例的说法才成立。

例 6.2 同位偏好中也会出现总替代的非对称现象，因为虽然替代效应一定是相等的，但是收入效应可以大小不等。

例 6.3 因为 p_y、p_z、p_h 的相对关系未发生变化，所以求解最大化问题不受任何影响。

第 7 章

例 7.1 当 $k=11$ 时

$$q = 72\,600l^2 - 1\,331l^3$$

$$MP_l = 145\,200l - 3\,993l^2$$

$$AP_l = 72\,600l - 1\,331l^2$$

此时使得 AP_l 最大化的就不是 $l=30$ 而是 $l=27.3$。

例 7.2 如果 $k=l$，由于 f 中 k 和 l 的地位是对称的。$f_k=f_l$，$f_{kk}=f_{ll}$。这样的话，如果 $f_{kl}>f_{ll}$ 则式 7.21 的分子就是负的，当 $k=l<20$ 时成立。联立方程 7.24 和 7.25 就能算出来。

例 7.3 $q=4$ 的等产量线包含 $(k=4,l=0)$，$(k=1,l=1)$，$(k=0,l=4)$。显然这是个凹函数。如果各种要素必须按固定的比例投入，等产量线应该是 L 型的。

例 7.4 "组合科技进步因子" $\theta=\alpha\phi+(1-\alpha)\varepsilon$，所以 $\alpha=0.3$ 意味着生产力进步中劳动的进步相对更为重要。

第 8 章

例 8.1 如果 $\sigma=2$，$\rho=0.5$，$k/l=16$，$l=8/5$，$k=128/5$，$C=96$。

如果 $\sigma=0.5$，$\rho=-1$，$k/l=2$，$l=60$，$k=120$，$C=1\,080$。

注意，当 σ 变化时，整个生产函数变了，规模报酬也变了，因而直接比较总成本没什么意义。

例 8.2 表达式中单位产量的成本是 $(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{1/1-\sigma}$。在 $w+v$ 不变的前提下：如果 $\sigma=0$，则相对价格的变动对单位成本没有影响；如

果 $\sigma>0$,当 w 与 v 的价格差距变大时可以凭借投入品之间互相的替代来降低成本。

例 8.3 弹性是由成本函数中某种要素的指数确定的,在这个模型中和技术进步没有关系。

例 8.4 此时 $\sigma=\infty$,当 $w=4v$ 时,最小化的成本可以是资本与劳动的任意组合。若 w 微有上涨,则将不再投入劳动而全部投入资本,而最小成本不变,反之亦然。可见一种要素价格的上涨对于整个成本的影响程度,主要取决于要素之间能够在多大程度上互相替代。

例 8.5 因为资本的成本在短期是固定的,不会影响短期边际成本(用数学的语言说,就是常数的导数为零)。但是它会影响短期平均成本。在图 8.9 中,v 的增加将移动 MC、AC 和一系列的 $SATC$,但不会移动 SMC。

第 9 章

例 9.1 如果 $MC=5$,利润最大化时 $q=25$。现在 $P=7.50$,$R=187.50$,$C=125$,$\pi=62.50$。

例 9.2 将其他影响价格的因子写入常数项 a 中即可,若其他条件变动,D 和 MR 会随之变化,但不影响弹性的计算。

例 9.3 如果 w 上升到 15,供给曲线向内移动到 $q=8P/5$。当资本投入增加到 $k=100$,供给曲线向外移动到 $q=25P/6$。v 的变动不影响短期边际成本,也就不改变短期停产与否的决策。

例 9.4 都能改变生产者剩余。v 的变化只改变固定成本而不改变 SMC。w 的变化会改变 SMC 和短期供给。

例 9.5 如果所有厂商的工资都上涨,市场供给曲线将向内移动,产品价格上升。这样,各个企业的产量比价格不变时的产量要高,于是劳动需求上的产量效应就会比例题讨论中的要小一些。但替代效应和产量效应仍然都是负的。

第 10 章

例 10.1 只有每个人的需求函数对收入的系数相同才能将收入加总处理。如果每个人对 p_y 系数不同,由于大家面对的 p_y 是一样的,只要把所有人的系数相加就行了。

例 10.2 如果 $\beta\neq0.5$,P 的指数就不再是 1 了,价格弹性会变的。β 变大时,短期供给会更有弹性。

例 10.3 这要求需求曲线变得平坦一点,即斜率变小一点。比如这样的需求曲线 $Q=16\,000-1\,000P$ 和例题中有同样的均衡点($P^*=12$,$Q^*=4\,000$),但是当供给减少时,均衡点是($P^*=12.63$,$Q^*=3\,368$)。

例 10.4 用推导式 10.36 的方法我们可以推出

$$e_{P,\beta}=\frac{-e_{Q,\beta}}{e_{S,P}-e_{Q,P}}$$

其中 $e_{Q,\beta}=e_{Q,w}=-0.5$,所以 $e_{P,\beta}=\frac{-(-0.5)}{2.2}=0.227$。

乘以 0.2(因为工资上涨 20%),算出价格大约上升 4.5%,和例题中的数相当接近。

例 10.5 短期供给曲线是 $Q_S=0.5P+750$,短期均衡价格是 643 美元,每个企业利润大约是 2 960 美元。

例 10.6 式 10.59 和 10.46 相比:当 $q>15.9$ 时,前者的平均成本和总成本大于后者;边际成本永远是前者大于后者;最优产量前者低于后者,原因是边际成本的增加快于平均成本。

第 11 章

例 11.1 对于限定数量的管制,供给或需求的弹性越大,损失越小。供给和需求哪一方弹性越大,相对承担的损失越小。

例 11.2 税率 t 的上升显然增加了无谓损失,因为它使产量减少了;但总的税收额增加得没那么快。甚至当 $t/(P+t)\geqslant-1/e_{Q,P}$ 时,有 $dtQ/dt<0$。

例 11.3 消费者转移到本国生产者的剩余有 $0.5\times11.7+0.5\times0.5\times0.7=6.03$(10 亿美元)。这将作为由于供给曲线向上倾斜而使生产者获得的李嘉图租金。如果是限额的管制,生产者还有可能得到本来作为关税税收的那部分收入。

第 12 章

例 12.1 在第一种情形下劳动的增加将使生产可能性边界平行地外移,而在第二种情形下 y 轴方向比 x 轴外移更多,因为 y 是劳动密集型的。

例 12.2 所有三种情形下总产值都是 $200w$,工资和利润各占一半。在"供给的变动"中,消费者还是各花 $100w$ 在 x 和 y 上,因为 y 变贵了,所以 x 的购买量是 y 的两倍。在"需求的变动"中,消费者花 $20w$ 在 x 上,花 $180w$ 在 y 上。此时

y 的价格是 x 的三倍，所以 y 的购买量也是 x 的三倍。

例 12.3 瓦尔拉斯定理保证了白银市场一定是均衡的。重新计算式 16.40，有

$$ED_1 = 2(p_2/p_1)^2 + 2(p_3/p_1)^2 - 4p_2/p_1 - 7p_3/p_1$$

在新的相对价格下

$$ED_1 = 2 \times 3^2 + 2 \times 2^2 - 4 \times 3 - 7 \times 2 = 0$$

例 12.4 由于两个农场的生产函数都是规模报酬不变的，所以只要相应地配置劳动力，无论资本怎么配置都是有效率的。

例 12.5 消费者的总收入是 $300w$，在两种商品上平均分配。生产 y 的厂商得到了全部的收入 ($150w$)，但是生产 x 的厂商只得到了 $50w$，还有 $100w$ 被政府拿走了。但是，消费者花费在 x 上的钱确实是 $150w$，所以生产 x 对 GDP 的贡献应该是 $150w$，生产 y 对 GDP 的贡献也是 $150w$。有 $100w$ 作为税收从人民手中取走又作为转移支付返还给了人民，但这不是 GDP 的组成部分。

例 12.6 本例中两人的无差异曲线相对较平坦，这表示两人对商品之间的替代比较能够接受，这种灵活性缩小了互惠互利的交易的空间。要是两人的偏好不那么灵活，贸易前的 MRS 相差甚远，就可能从交易中获益更多。

第 13 章

例 13.1 固定成本不改变产量，因为它不改变边际成本。但它会提高 AC，并降低利润至 12 500。在新的成本函数下，边际成本提高到 $0.15Q$，这样的均衡条件下 $Q^* = 400$，$P^* = 80$，$C = 22\,000$，$\pi = 10\,000$。

例 13.2 $e = -1.5$ 时，垄断下消费者剩余是完全竞争时的 58%（式 13.18），垄断利润是完全竞争时消费者剩余的 19%（式 13.20）。

例 13.3 当 $Q = 0$ 时，$P = 100$。总利润是需求曲线与供给曲线围成的三角形的面积减去固定成本。这块面积是 $0.5 \times 100 \times 666 = 33\,333$，所以 $\pi = 23\,333$。

例 13.4 是这样的，因为对于线性的需求函数这两种情况的边际收入相等。由于在两种价格的政策下产出并不增加，因而也不会有效率改善。

例 13.5 将价格定为边际成本，市场 1 和市场 2 的入场费分别定为 36 和 162，将实现利润最大化。

第 14 章

例 14.1 当 $q_2 = 40$，厂商 1 面对的剩余需求是 $q_1 = 80 - P$。因此，$MR = 80 - 2q_1$。所以 $q_1 > 40$，$MR < 0$。由于产量的决定只和边际收益（而非价格）有关，所以它不可能选择 40 以上的产量。

例 14.2 上一题中我们假设 q_2 不变，而本题中当厂商 1 决定增加产量时，我们假设厂商 2 会对此作出减产的反应。

例 14.3 不变的边际成本的结果和本例相同；而递增的边际成本会使得两家厂商更平均地占据市场。

例 14.4 有效率意味着 $P = MC = AC$，这是达不到的。但如果消费者都认为市场上不同种的商品之间是不可替代的，那么通过再分配也无法达到更有效的结果（否则两个小厂合并成一个大的还能降低成本），就可以认为是达到帕累托最优了。

例 14.5 没有补贴时消费者剩余已经达到最大了。使整个经济有效率的补贴应该使得价格等于边际成本（$P = 100$），这样消费者的福利会进一步增加，但需要 8 000 美元的补贴。

第 15 章

例 15.1 这里没有什么优势策略，分开度假也不是纳什均衡，因为此时每个人都有改变自己选择的激励。

例 15.2 此时双方的效用期望都只有 2/3，低于任何一个纳什均衡。所以这不会是合作性博弈的结局。

例 15.3 参见例 15.4。

例 15.4 $\delta > 0.93$ 意味着一期的利率要低于 7%。“每一期”有可能是一天、一月还是一年，这都是一样的。

例 15.5 折现率越高意味着勾结产生的长期利益的现值越高，因而可以容许更多的厂商勾结。当 $\delta = 0.8$ 时，最多 5 个厂商勾结，而当 $\delta = 0.9$ 时，勾结厂商上限达 10 个。

例 15.6 有可能达成“追随者—追随者”的策略组合，且每个厂商都采取触发策略，一旦对手违规，自己立刻采用领导者策略打击报复。

例 15.7 如果 A 没有先发制人的优势，则双方的地位是完全对称的，那就又回到斯塔克尔伯格的领导者模式了。这个模型的结果之所以和可竞争性垄断不同，是因为我们在考虑利润时考虑到了沉没成本。

例 15.8 这是因为需求函数和边际成本函数都是线性的，所以 q_A^* 也是 q_{BH}^* 和 q_{BL}^* 的线性函数，而它们又是 B 的边际成本的线性函数。如果需求函数或者边际成本函数（这个更重要）不是线性的形式，那么 q_A^* 也就不一定基于 $E(MC_B)$。

例 15.9 可以的，只要 $R < V_A < V_B$，底价的设定会让竞标者重新决定投标策略。

第 16 章

例 16.1 非劳动收入可以允许个人选择"购买"闲暇，但购买多少就要取决于消费/闲暇的替代性。

例 16.2 这个结论和线性没有关系。只要需求曲线是向下倾斜的，供给曲线是向上倾斜的，考虑这种效应时只需按照参数 t 和 k 垂直移动两条曲线就可以了。

例 16.3 现在 $MRP = 30$ 美元/小时。这样劳动力买方垄断者雇用 750 个工人，工资是 15 美元。和以前一样，工资只有 MRP 的一半。

例 16.4 资方希望雇用量在它的需求曲线上，而工会一方希望雇用量在劳动力供给曲线上。只有在均衡点（$l = 583, w = 11.67$）两边的条件才都满足。至于这是否是纳什均衡，要看工会的供给曲线是否能够准确地反映工会的效用。

例 16.5 如果假设公司是风险中性的，而工人是风险厌恶的，那么最优的工资合约应该是工资较低但保证收入稳定的那种。

第 17 章

例 17.1 如果两人的 δ 相同，而第一个人面临更高的回报率，则 $U'(c_0)/U'(c_1)$ 也是第一个人的较大。因此 c_0/c_1 也是第一个人的较低。

例 17.2 这不改变真实利率，更不改变树木生长速率，所以最佳收获树龄不变。

例 17.3 从终期价格反推时将开采的边际成本加上即可。

第 18 章

例 18.1 只要设定奖金为 $\ln x_i = 2^i$，这个赌博的预期效用还是无穷大。

例 18.2 效用要是线性函数，就意味着消费者只关心预期财富数量，当然不会去买高于公平价格的保险。当效用函数是凸函数时（$U' > 0, U'' > 0$），说明这个人是风险偏好的，只有当保险低于公平价格时他才可能去买。

例 18.3 当 $A = 10^{-4}$

$$CE(\#1) = 107\,000 - 0.5 \times 10^{-4} \times (10^4)^2 = 102\,000$$

$$CE(\#2) = 102\,000 - 0.5 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^6 = 101\,800$$

所以，他会选风险更大的那个。

而当 $A = 3 \times 10^{-4}$ 时，他会偏好风险小的那个。

例 18.4 由式 18.44 可见，这个支付意愿是财富的减函数。当 $R = 0$，为了避免 1 000 的一个赌博，在 $W_0 = 10\,000$ 时这个人愿意支付 50，但是当 $W_0 = 100\,000$ 时他就只愿意支付 5。当 $R = 2$ 时，在 $W_0 = 10\,000$ 时愿意支付 149，而在 $W_0 = 100\,000$ 时他只愿支付 15。

例 18.5 精算学意义上的公允价格是 $0.25 \times 19\,000 = 4\,750$。

要求个人的最高支付意愿，只需求解方程

$$11.45714 = 0.75\ln(100\,000 - x) + 0.25\ln(99\,000 - x)$$

解之，得到 $x \approx 5\,120$。即对于这个保险这个人最多愿意支付 370 美元作为管理费用。

第 19 章

例 19.1 虽然价格不确定，但该模型允许消费者当 y 便宜时多买，贵时少买。由于 V 是关于 p_y 的凸函数——这意味着不同 p_y 下 V 的平均值，要大于两个 p_y 的平均值对应的 V。这个问题和风险厌恶毫无关系，风险厌恶是指在期望相同的几个选项中选择风险较低的倾向。

例 19.2 此时不装防盗装置，保险费是 5 300 美元，而装了防盗装置保险费是 3 300 美元。买保险而不装防盗装置的效用是 $\ln(94\,700) = 11.4589$。所以他应该倾向于安装防盗装置但不买保险。

例 19.3 假设只有全额保险可买，要计算对防盗证明的支付意愿，只需求解

$$\ln(97\,000 - x) = 11.4794$$

等号右边是不买保险的效用。

要计算伪造证书的最低成本，只要求解

$$\ln(97\,000 - y) \leqslant 11.4616$$

等号右边是购买高风险全额保险的效用。解得$y \geqslant 2\,003$。

例 19.4 要是那样的话所有者就必须想办法，让不合理地使用喷气机的成本能够被察觉。这需要用到贝叶斯的推断，建立类似所有者-管理者的模型来分析。

例 19.5 $m'(a)$表示 a 发生微小改变时，边际成本—收益比例的改变量。因为所有者通过 d 来控制给予管理者多大的努力激励，所以当 $m'(a)$越高时，最佳的 d 就应该越小，因为这时让管理者花很高的成本去努力是没有效率的。

第 20 章

例 20.1 此时 x 对 y 有正面影响，所以在竞争性市场下用于生产 x 的劳动力配置偏少了。

例 20.2 税率相对低是因为外部性造成的产量减少的相对比例也很低。如果合并企业，它们也会选择总体最优化的产量水平 $x = 38\,000$。

例 20.3 两人分开住时有效率的配置选择是 $x = 1, y = 1\,000$。这时他们搬到一起住会有效率，但这只是在科布-道格拉斯需求函数下 MRS 的一种性质，在一般的情况下不一定成立。

第 21 章

例 21.1 他们俩的效用函数都是边际效用递减的，所以其实他们都是风险厌恶的，这一点不用说也能看出来。即他们的风险厌恶程度已经蕴涵在效用函数之中了。

例 21.2 累进税会增加 t^*，因为它能让中值投票者从高收入者手中获得更多收益而不必承担更高的税收负担。

例 21.3 竞选人 2 也会选择功利主义的最优施政纲领。如果每个投票人的 f_i 是彼此不同的，那么竞选人的策略一般来说不可能使每个人都最大化，但纳什均衡仍然会存在。

例 21.4 也许租金会保留一部分到利润里去；也许官员会提升贿赂的价码，使得 $B = \pi_m / \bar{n}$。

奇数题号的习题答案

这里只有大部分奇数题号题目的简略答案。全部问题的答案在《习题解答》中，教师可以向出版社索取。

第 2 章

2.1 a. $8x, 6y$。

b. $8, 12$。

c. $8x\mathrm{d}x + 6y\mathrm{d}y$。

d. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -4x/3y$。

e. $x=1$，$U=(4)(1)+(3)(4)=16$。

f. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -2/3$。

g. $U=16$ 等高线是椭圆。

2.3 两种方法一样得出 $x=y=0.5$。

2.5 a. 最大化的一阶条件为：$-gt+40=0$，所以，$t^*=40/g$。

b. 替代产出 $f(t^*)=-0.5g(40/g)^2+40(40/g)=800/g$。所以 $\partial f(t^*)/\partial g=-800/g^2$。

c. 这是由于 $\partial f/\partial g=-0.5(t^*)^2$。

d. $\partial f/\partial g=-0.5(40/g)=-0.625$，所以 g 每增加 0.1，最大高度减少 0.0625。

2.7 a. 一阶条件要求 $f_1=f_2=1$。所以，$k=10$，$x_1=5$ 时，$x_2=5$ 的。

b. $k=4$，$x_1=-1$。

c. $x_1=0$，$x_2=5$。

d. $k=20$，$x_1=15$，$x_2=5$。因为 x_1 的导数值不变，所以当 k 超过 10 时增加的 k 全加在 x_1 上。

2.9 b. $x_1=kx_2^{-\beta/\alpha}$

$k=c^{1/\alpha}$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}<0, \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}x_2^2}>0$$

c. $\alpha+\beta>1$，

$$f_{11}=\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}$$

$$f_{22}=\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}$$

$$f_{12}=\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}$$

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2=\alpha\beta(1-\alpha-\beta)x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}<0$$

第 3 章

3.1 a. 不是

b. 是

c. 是

d. 不是

e. 是

3.3 边际效用函数的增减性和效用函数的凸性无关。

3.5 a. $U(h,b,m,r)=\mathrm{Min}(b,2b,m,0.5r)$。

b. 一个加好佐料的热狗。

c. 1.6 美元。

d. 2.1 美元，提高了 31%。

e. 价格仅上升到 1.725 美元，提高了 7.8%。

f. 提高价格使得一个“加好佐料的热狗”价格上升到 2.60 美元。等效于按比例削减购买力。

3.7 b. 预算约束线通过 $(\bar{x},\bar{y})$。

c. 在达到 U_0+k 之前没有交易发生。

3.9 x 交换 y 的 $MRS=MU_x/MU_y\cdot MU_x$，与 y 无关；y 交换 x 亦然。

习题 3.1(b)是一个反例。

第 4 章

4.1 a. $t=5, s=2$。

b. $t=5/2, s=4$。成本是 2 美元，所以需要多给 1 美元。

4.3 a. $c=10, b=3$，$U=127$。

b. $c=4, b=1$，$U=79$。

4.5 b. $g=I/(p_g+p_v/2)$；$v=I/(2p_g+p_v)$。

c. 效用 $=m=v=I/(2p_y+p_v)$。

d. $E=m(2p_y+p_v)$。

4.7 a. $V(p_x,p_y,I)=\alpha^\alpha\beta^\beta I/p_x^\alpha p_y^\beta=kI/p_x^\alpha p_y^\beta$。

b. $E(p_x,p_y,U)=k^{-1}p_x^\alpha p_y^\beta U$。

c. 显然，$\partial E/\partial p_x$ 取决于 α。

4.9 a. 令 $MRS=p_x/p_y$

b. 令 $\delta=0$。

c. $p_x x/p_y y=(p_x/p_y)^{\delta/(\delta-1)}$。

第5章

5.1 a. $U=x+\frac{8}{3}y$。

b. 如果 $p_x\leqslant\frac{8}{3}p_y$，$x=I/p_x$。

如果 $p_x>\frac{8}{3}p_y$，$x=0$。

d. 只要不使上述不等式变号，需求就不变。

e. 两条水平线。

5.3 a. 显然 p_x/p_y 不会改变，所以 x 和 y 同比例变化。

b. 设没有劣等品。

5.5 a. $x=\frac{I-p_x}{2p_x}$，$y=\frac{I+p_x}{2p_y}$ 即 p_y 的变动不影响 x，但 p_x 的变化影响 y。

b. $V=\frac{(I+p_x)^2}{4p_xp_y}$，$E=\sqrt{4p_xp_yV}-p_x$。

c. 此时有 $s_h=2/3$，所以 $e_{h,p_h}=-2/3$。

5.7 a. 利用斯拉茨基等式的弹性形式 $e_{h,p_h}=0-s_he_{h,I}=0-0.5=-0.5$。

b. 因为两种商品按一定比例购买，所以补偿性价格弹性是零。

c. 此时 $s_h=2/3$，因此 $e_{h,p_h}=-2/3$。

d. 对于奶酪三明治（sw），$e_{sw,p_{sw}}=-1$，$e_{sw,p_h}=e_{sw,p_{sw}}\cdot e_{p_{sw},p_h}=(-1)\cdot 0.5=-0.5$。

5.9 参照课文中两种商品的方法。

第6章

6.1 a. 把效用函数单调映射成 $\alpha=\beta=0.5$，再按前面例题中的方法算。

b. 也是呈现科布-道格拉斯函数形式。

c. 先设 $\partial m/\partial p_s=\partial s/\partial p_m$ 逆推，消去对称的净替代项即可。

d. 用科布-道格拉斯函数形式表示。

6.3 a. $p_{bt}=2p_b+p_t$。

b. 由于 p_c 和 I 都是常数，所以 $c=I/2p_c$ 也是常数。

c. 是的。因为 p_b 或 p_t 变化仅仅影响 p_{bt}。

6.5 a. $p_2x_2+p_3x_3=p_3(kx_2+x_3)$

b. 相对价格 $=(p_2+t)/(p_3+t)$

当 $t\to 0$ 时，$(p_2+t)/(p_3+t)\to p_2/p_3$

当 $t\to\infty$ 时，$(p_2+t)/(p_3+t)\to 1$

c. 由于 t 变化影响相对价格，因此不严格适用。

d. 会减少对 x_2 的支出，对 x_3 的支出影响不确定。

6.7 证明 $x_i\cdot\frac{\partial x_j}{\partial I}=x_j\cdot\frac{\partial x_i}{\partial I}$，再用净替代的对称性。

6.9 a. $U_{xy}=0$。

b. 利用 $U_i''<0$。

c. 不能保证，它取决于 p_xx。

d. $x^\alpha y^\beta$ 不可分拆，$\alpha\ln x+\beta\ln y$ 可以。

第7章

7.1 a. $k=10$，$l=5$。

b. $k=8$，$l=8$。

c. $k=9$，$l=6.5$，$k=9.5$，$l=5.75$。

d. 等产量线是 a、b 两个解的连线。

7.3 a. $q=10$，$k=100$，$l=100$，$C=10\,000$。

b. $q=10$，$k=3.3$，$l=13.2$，$C=8\,250$。

c. $q=12.13$，$k=4$，$l=16$，$C=10\,000$。

d. Carla 能否说服老板的关键在于，她对需要做的额外工作的不满能在多大程度上增加酒吧运营的成本。如果对于顾客而言她的工作很重要，她就很可能成功。

7.5 为了简化，让 $A=1$

a. $f_k=\alpha k^{\alpha-1}l^\beta>0$ $\quad f_l=\beta k^\alpha l^{\beta-1}>0$

$f_{kk}=\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}l^\beta<0$

$f_{ll}=\beta(\beta-1)k^\alpha l^{\beta-2}<0$

$f_{kl}=f_{lk}=\alpha\beta k^{\alpha-1}l^{\beta-1}>0$

b. $e_{q,k}=f_k\cdot k/q=\alpha$ $\quad e_{q,l}=f_l\cdot l/q=\beta$

c. $f(tk,tl)=t^{\alpha+\beta}f(k,l)\frac{\partial f(tk,tl)}{\partial t}\cdot\frac{t}{f(k,l)}$

$=(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta}$

在 $t=1$ 时，就等于 $\alpha+\beta$

d.，e. 直接利用定义将 a 中的导数值代入即可。

7.7 a. $\beta_0=0$。

b. $MP_k=\beta_2+1/2\beta_1\sqrt{l/k}$

$MP_L=\beta_3+1/2\beta_1\sqrt{k/l}$

c. 一般情况下，σ 是变动的，如果 $\beta_2=\beta_3=0$，$\sigma=1$；

如果 $\beta_1=0$, $\sigma=\infty$。

7.9 对 f_k 这个零次齐次函数运用欧拉定理，对于多种要素的情况，"绝大多数"交叉导数应该是正的。

第 8 章

8.1 绘图员是正确的，因为 SAC 的最小值在斜率为零时达到。在规模报酬不变的情况下，双方都是对的。

8.3 a.,b. $q=150 \quad J=25 \quad MC=4$

$q=300 \quad J=100 \quad MC=8$

$q=450 \quad J=225 \quad MC=12$

8.5 a. $q=2\sqrt{k\cdot l}, k=100, q=20\sqrt{l}, l=q^2/400$

$$SC = vk + wl = 100 + \frac{q^2}{100}$$

$$SAC = \frac{SC}{q} = \frac{100}{q} + \frac{q}{100}$$

b. $SMC=\frac{q}{50}$。

q	SC	SAC	SMC
25	106.25	4.25	50
50	125	2.5	1
100	200	2	2
200	500	2.5	4

c.,d. 只要短期边际成本低于短期平均成本，多生产 1 单位产品短期平均成本就会下降；相反，若短期边际成本高于短期平均成本，多生产 1 单位产品短期平均成本就上升。因此，SMC 曲线与 SAC 曲线一定相交于 SAC 的最低点。

e. $C=v\bar{k}-+wq^2/4\bar{k}$

f. $\bar{k}=\frac{q}{2}w^{1/2}v^{-1/2}$

g. $C=qw^{1/2}v^{1/2}$

h. 画出来一看就是包络关系。

8.7 a. $C=q^{1/\gamma}[(v/\alpha)^{1-\sigma}+(w/b)^{1-\sigma}]^{1-\sigma}$

b. $C=qa^{-a}b^{-b}v^aw^b$

c. $wl/vk=b/a$

d. $l/k=\left[\frac{(v/a)}{(w/b)}\right]^\sigma$，所以 $wl/vk=(v/w)^{\sigma-1}(b/a)^\sigma$

劳动所占的比例是 b/a 的增函数。当 $\sigma>1$ 时，劳动的比例随 v/w 增大而增大；当 $\sigma<1$ 时，劳动的比例随 v/w 增大而减小。

8.9 a. $l=\frac{\partial C}{\partial w}=\frac{2}{3}q\left(\frac{v}{w}\right)^{1/3}$

$k=\frac{1}{3}q\left(\frac{w}{v}\right)^{2/3}$

b. $q=Bl^{2/3}k^{1/3}$，其中 B 为常数。

第 9 章

9.1 a. $q=500$

b. $\pi=200$

c. $q=5P-50$

9.3 a.,b. $q=a+bp \quad p=q/b-a/b$

$R=P_q=(q^2-aq)/b, mr=2q/b-a/b$

$d-mr=-q/b$

c. $mr=P(1+1/e)=P(1+1/b)$

d. $e=\partial q/\partial P\cdot P/q$

9.5 a. $C=wq^2/4$

b. $\pi(P,w)=P^2/w$

c. $q=2P/w$

d. $l(P,w)=P^2/w^2$

9.7 a. 只有规模报酬是递减的，利润最大化的产量才存在。

b. $C(q,v,w)=(w+v)q^2/100$

$\Pi(P,v,w)=25P^2/(w+v)$

c. $q=\partial\Pi/\partial P=50P/(w+v)=20$

$\Pi=6\,000$

d. $q=30$, $\Pi=13\,500$

9.9 b. 只有规模报酬是递减的，边际成本才是递增的。

c. σ 反映了企业对于要素相对价格变动的适应能力。

d. $q=\frac{\partial\Pi}{\partial P}=\frac{1}{1-\gamma}KP^{\gamma/1-\gamma}(v^{1-\sigma}+w^{1-\sigma})^{\gamma/(1-\sigma)(\gamma-1)}$

e. 请参阅详细解答。

第 10 章

10.1 a. $q=10\sqrt{p}-20$

b. $Q=1\,000\sqrt{P}-2\,000$

c. $P=25;Q=3\,000$

10.3 a. $P=6$

b. $q=60\,000-10\,000P$

c. $P=6.01, P=5.99$

d. $e_{Q,P}=-600$

a′$P=6$

b′$Q=359\,800-59\,950P$

c′$P=6.002;P=5.998$

$d'e_{QP} = -0.6; e_{qp} = -3\,597$

10.5 a. $P = 3, Q = 2\,000\,000, n = 2\,000$

b. $P = 6$，每个农场利润 $\pi = 3000$

c. $P = 3, Q = 2\,600\,000, n = 2,600$

10.7 a. $n = 50, Q = 1\,000, q = 20, P = 10, w = 200$

b. $n = 72, Q = 1\,728, q = 24, P = 14, w = 288$

c. 租金增加 5 368 美元，用线性的供给曲线得出的结果和这个基本相同。

第 11 章

11.1 a. $P = 120, PQ = 48\,000, CS = 16\,000, PS = 20\,000$

b. Loss = 2 250

c. $P = 140, CS = 9\,000, PS = 24\,750$

$P = 95, CS = 22\,500, PS = 11\,250$

d. 损失 = 562.50

11.3 a. $P = 11,\ Q = 500, r = 1$

b. $P = 12,\ Q = 1\,000, r = 2$

c. $\Delta PS = 750$

d. Δ 租金 = 750

11.5 a. $P_D = 140, P_S = 95, P_D - P_S = t = 45; Q = 300$

b. 总税金 = 13 500，其中消费者承担 6 000，生产者承担 7 500 生产者承担 56%。

c. 2 250

d. $P_D = 129.47; P_S = 84.47; Q = 258$

总税金 11 610，消费者承担 79%。

e. $P_D = 150; P_S = 105; Q = 250$

总税金 11 250，消费者承担 67%。

11.7 a. $Q = 250;\ r = 0.5; P_S = 10.5; P_D = 16$

b. 总税金 = 1 375，消费者承担 = 1 250，生产者承担 = 125；CS 损失 = 1 875；PS 损失 = 187.5

c. 损失 $= 0.5 \times 250 + 0.5 \times 0.5 \times 250 = 187.5$

这是总福利损失中的一部分，是由供给曲线向上倾斜造成的。

11.9 价格上升至 9.6。实际上关税总量下降至 4.62 亿美元。$DW_1 = 0.315$，$DW_2 = 0.234$。因此，DW 上升了 0.147，比例 16.3 中上升了 37%。

第 12 章

12.1 b. 如果 $y = 2x, x^2 + 2(2x)^2 = 900; 9x^2 = 900; x = 10, y = 20$。

c. 如果 $x = 9$，在生产可能性边界上 $y = \sqrt{\frac{819}{2}} = 20.24$；如果 $x = 11, y = \sqrt{\frac{779}{2}} = 19.74$。因此，$RPT$ 的近似值为 $-\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-(-0.50)}{2} = 0.25$。

12.3 a. 利用生产可能性边界曲线，然后利用埃奇沃思矩形图。

b. 如果 p 不变，土地—资本的替代比在各行业中应会保持相等。这种情况仅在劳动密集型商品生产增加时才会发生。

12.5 a. 所有价格翻番并不影响 ED。

b. $p_1ED_1 = -[-3p_2^2 + 6p_2p_3 - 2p_3^2 - p_1p_2 - 2p_1p_3]/p_1$

c. $p_2/p_1 = 3; p_3/p_1 = 5; p_3/p_2 = \frac{5}{3}$

12.7 令 F = 食品，C = 布匹。

a. 劳动约束条件：$F + C = 100$。

b. 土地约束条件：$2F + C = 150$。

c. 边界同时满足两个约束。

d. 生产可能性边界是凹的，因为它必须同时满足两个约束。由于对于劳动约束 $RPT = 1$，对于土地的约束，$RPT = 2$，因此 c 的生产可能性边界的 RPT 是递增的，所以它是凹的。

e. 约束条件的交点在 $F = 50, C = 50$ 处。当 $F < 50$ $\frac{dC}{dF} = -1$ 此时 $\frac{P_F}{P_C} = 1$ 当 $F > 50, \frac{dC}{dF} = -2$ 此时 $\frac{P_F}{P_C} = 2$。

f. 对于消费者 $\frac{dC}{dF} = -\frac{5}{4}$ 所以 $\frac{P_F}{P_C} = \frac{5}{4}$。

g. 无论 $P_F/P_C = 1.9$ 还是 $P_F/P_C = 1.1$，生产者的选择都是 $F = 50, C = 50$。因为两条预算约束线都与生产可能性边界"相切"在尖点上。

h. $0.8F + 0.9C = 100$。资本约束条件是 $(C = 0, F = 125)$，$(C = 111.1, F = 0)$ 两点之间的连线。PPF 保持不变，因为这条约束线没有任何限制性。

第 13 章

13.1 a. $Q = 24, P = 29,\ \pi = 576$

b. $MC = P = 5, Q = 48$

c. 消费者剩余为 1 152。垄断情况下消费者剩余为 288，利润为 576，无谓损失为 288。

13.3 a. $Q = 25, P = 35, \pi = 625$

b. $Q=20, P=50, \pi=800$

c. $Q=40, P=30, \pi=800$

13.5 a. $P=15, Q=5, C=65, \pi=10$

b. $A=3, P=15, Q=6.05, \pi=12.25$

13.7 a. $Q_1=25, P_1=30, Q_2=30, P_2=20, \pi=1\,075$

b. $P_1=26.66, P_2=21.66, \pi=1\,058.33$

c. $P_1=P_2=23.33, \pi=1\,008.33, Q_1=31.67, Q_2=23.33$

d. $P_i=\alpha_i+mq_i$

应设定 $m=5, \alpha_1=1\,250, \alpha_2=900$。

13.9 a. 政府希望使产量增加到 $P=MC$ 的水平，但是一次总付补贴不改变边际收益，也就不改变垄断厂商 $MR=MC$ 的局面。

b. 这将使 MC 曲线下移，从而增加产量。

c. $MR=P(1+1/e)$

第 14 章

14.1 a. $Q=75, P=75, \pi=5\,625$

b. $q_1+q_2=50, P=50, \pi_1=\pi_2=2\,500$

c. 在完全竞争条件下，$P=0, Q=150$。

14.3 a. 价格领导。

b. 卖方价格歧视。但苹果公司的这个战略似乎在长期是不可行的，为什么呢？

c. 可能是会计算错账了。

d. 国际化的竞争导致的。

14.5 乘以 q_i/PQ 即可。这说明在古诺均衡下，集中程度高的行业更有利可图。

14.7 a. $P=25, Q=20\,000, Q_s=\sum_{1}^{1\,000} q=1\,000P-5\,000.$

b. $P=20, Q=30\,000$，价格领导者：$q=15\,000$。

c.

价格	消费者剩余
25	100 000
20	225 000
15	400 000

14.9 a. 是的，MC 是下降的。

b. $Q=450, P=11, \pi=3\,341$

c. $P=AC=2.4$（近似值）

第 15 章

15.1 a. "都去抓鹿"和"都去打兔子"都是纳什均衡。

b. 当 A 抓鹿的概率 $p>1/2$ 时 B 选择抓鹿。

c. 只有当 $p^{(n-1)}>1/2B$ 才会选择大家合作。

15.3 混合策略的纳什均衡是 $s=1/(K+1), r=K/(K+1)$。

15.5 a. 有两个纳什均衡：A 鸡 B 非鸡和 B 鸡 A 非鸡。

b. 如果对手非常非常肯定地称自己将"非鸡"，你"非鸡"的威胁就是不可信的。

c. 只要对手没作出同样的承诺，这样的承诺结果就是合意的。

d. 这一幕可以有多种解释方法（我也不知道制片人自己懂不懂得那一幕的含义是什么），其中小鸡博弈模型是一种解释方法：追求最漂亮的那个女生就相当于一个小鸡博弈。其中无效率的结果（大家都不邀请她，相当于两个小孩都是小鸡）可以通过引入某种形式的分段博弈（即大家依序表态）避免。

15.7 a. $P=10-\varepsilon, q_A=0, q_B=300$

b. $\pi_A=0, \pi_B=600$

c. 不是，因为 $P>MC_B$。

15.9 a. $P=5, Q=5\,000, q=250$

b. 如果某人出售 $q=251$，他会多得些利润，因此每个人都有毁约的激励。

c. 如果卡特尔包含 20 个人之多，稳定的价格会非常低（$P=0.3$）。要是人少些的话，稳定的价格可以提高一些。

15.11 用例 15.8 的方法计算。结果是 $q_A^*=30, q_{BH}^*=40, q_{BC}^*=20$。

第 16 章

16.1 a. 临界收入 $=40\,000$，$l=2\,000$ 小时。

b. $l=1\,400$ 小时。

c. $l=1\,700$ 小时。

d. 当 w 上升时，劳动供给趋近于 2 000 小时。

16.3 $E[U(y_{工作1})]=100\times40-0.5\times1\,600=3\,200$

$$
\begin{aligned}
E[U(y_{工作2})] &= E[U(wb)] \\
&= E[100wb-0.5(wb)^2] \\
&= 800w-0.5[36w^2+64w^2] \\
&= 800w-50w^2=3\,200
\end{aligned}
$$

解得 $w=8$。

16.5 a. 补助金$(G)=6\,000-0.75(I)$

如果 $I=0, G=6\,000$；

$I = 2\,000, G = 4\,500; I = 4\,000, G = 3\,000$

b. 当 $6\,000 - 0.75I = 0$

$I = 6\,000/0.75 = 8\,000$ 时

$G = 0$

c. 假设一年有 8 000 小时。

全部收入 $= (4)(8\,000) = 32\,000 = c + 4b$

d.

临界收入

$= 32\,000 + G$

$= 32\,000 + 6\,000 - 0.75$

$\times 4 \times (8\,000 - b)$

$= 38\,000 - 24\,000 + 3b$

$= c + 4b$

或者对于 $I < 8\,000$ 来说,$14\,000 = c + b$。即预算约束线为一折线,在闲暇 6 000 小时处是个尖点。

16.7 a.

对于 $ME_l = MRP_l, \frac{l}{40} = 10 - \frac{l}{40}$

所以,$\frac{2l}{40} = 10, l = 200$

从供给曲线中得到:$w = \frac{l}{80} = \frac{200}{80} = 2.50$

b. 对 Carl 来说,劳动的边际支出等于最小化工作——$w_m = 4.00$。让它等于 MRP,得到 $l = 240$。

c. 在完全竞争的劳动市场上,最低工资法意味着更高的工资和更少的就业量;然而在买方垄断的劳动力市场中,最低工资法可能在提高实际工资的同时增加就业量。

16.9 a. 因为 $q = 240x - 2x^2$,总收入是 $5q = 1\,200x - 10x^2$

$$MRP = \frac{\partial TR}{\partial x} = 1\,200 - 20x$$

$x = \sqrt{l}$ 总成本 $= wl = 10x^2$,边际成本 $= \frac{\partial C}{\partial x} = 20x$,在竞争条件下,毛皮的价格 $= MC = 20x$,$MRP = p_x = MC = 20x$,$x = 30$,$p_x = 600$。

b. 从 D 公司的角度来看,对于毛皮的需求是

$MRP = 1\,200 - 20x$,$R = p_x \cdot x = 1\,200x - 20x^2$

边际收益:$\frac{\partial R}{\partial x} = 1\,200 - 40x$

边际成本 $= 20x$ 得到 $x = 20, p_x = 800$

c. 从宇宙毛皮公司的角度来说,毛皮的供给:

$MC = 20x = p_x$,总成本 $= p_x x = 20x^2$

并且,$ME_x = \frac{\partial C}{\partial x} = 40x$. 所以,$ME_x = 40x = MRP_x = 1\,200 - 20x$

解得:$x = 20, p_x = 400$。

第 17 章

17.1 b. $\partial C_1/\partial r$ 的符号不确定是因为收入效应与替代效应作用方向相反。如果 $\partial c_1/\partial r < 0$,$c_2$ 是有弹性的。

c. 这个预算约束是跨越两个时期的,斜率受利率 r 的影响。所以收入效应的作用要视 $y_1 > c_1$ 还是 $y_1 < c_1$ 而定。

17.3 25 年。

17.5 a.,b. 见详细的解答。

c. 这里 t^* 要比例 17.2 中解出的要小。直观上看,是因为让树继续生长需要占据额外的机会成本"树坑",树坑是能带来持续收益的,即"V 的价值",所以只有生长速率更快的小树才有保留的价值。①

d. 当 $t \to \infty$ 时,$f(t)$ 趋近于 50。

e. $t^* = 100$ 年。这里无所谓"最大价值",因为树总是在生长。注意最大化时 $f(t) = 25$,不是 50。

f. $t^* = 104.1$

17.7 PDV(终身寿险)= 6 304 美元

PDV(定期寿险)= 3 879 美元

推销员说得不对!

17.9 这样的话,就是 MR 按利率上升。如果需求是弹性不变的,就有 $MR = kP$。由于终期价格不变,利率也不变,同期的价格应该也和完全竞争市场相同。

---

① 数学上,比较方程

$$f'(t_1) = rf(t_1)$$
$$f'(t_2) = rf(t_2) + rV(t_2)$$

其中 $f(0) = w > 0, f'(t) > 0, f''(t) < 0, V = \frac{f(t) - w}{e^{rt} - 1} - w > 0$,显然 $t_1 < t_2$。——译者注

第 18 章

18.1 $P=0.525$

18.3 a. 一趟：预期存活鸡蛋 $=0.5\times 0+0.5\times 12=6$。两趟：预期存活鸡蛋 $=0.25\times 0+0.5\times 6+0.25\times 12=6$。

b. 倾向于走两趟，因为两趟战略方差较小。

c. 多走几趟确实减少了方差，但减少的速率越来越低，所以最合适的方案应视旅途中的成本而定。

18.5 a. $E(U)=0.75\ln(10\,000)+0.25\ln(9\,000)=9.1840$

b. $E(U)=\ln(9\,750)=9.1850$——保险是更可取的选择。

c. 260 美元。

18.7 a. 种谷子。

b. 是的，会选择混合种植两种作物。这比单纯种谷子的方差要大，但更高的收益期望弥补了这个损失。

c. 44% 小麦，56% 谷子。

d. 那样的话就只种小麦了。

18.9 a. 请参照图 18.5。

b.，c. 注意恒定 *RRA* 函数的曲率。

d. 因为恒定 *RRA* 函数是关于投资 *W* 的位似函数。

第 19 章

19.1 a. 浇。

b. 50 美元。

c. 不值钱。

19.3 公平价格 $=1\,750$ 美元。

现在预期的效用 $=0.5U(18\,250)+0.5U(14\,750)$，可能超过 $U(15\,000)$。

19.5 a. 不是。

b. 20 000 美元；它必须让低能力的工人得到它的成本足够高，以至于他们根本没有激励去得到它，这样的文凭才有区分作用。

19.7 a.，b. $p_{\min}=300+100/(n+1)$

c. $-\mathrm{d}p_{\min}/\mathrm{d}n=2, n^*=7$

19.9 病人效用最大化时满足：$U_1^c/U_2^c=p_m$

医生的最优化满足：

$U_1^d p_m+U_2^d[U_1^c-p_m U_2^c]=0$ 如果 $U_2^d=1$，就要求 $p_m=U_1^c/(U_2^c-U_1^d)$。相对于病人的最大化，医生决定的是一个的 U_1^c，因此，医生倾向于选择多于病人最优化的医疗服务。

第 20 章

20.1 a. $P=20, q=50$

b. $P=20, q=40, MC=16$，税收 $=4$。

20.3 a. $n=400$ 这种差异是存在的，因为多打一个油井导致别的井产量下降，造成负外部性。

b. 200 口井。

c. 每口井收费 2 000。

20.5 这是一道问答题。答题应考虑政党提供的服务、风险、信息成本、各种合约下的激励模式，等等。

20.7 a. 注意 $q_a=q_b=Q$，最优数量 $Q=90$。

b. 如果大家都想搭便车，结果可能是 $Q=0$。

c. 总成本 $=10\,800$。如果按照边际评价的比例来分配税收，*a* 支付 900，*b* 支付 9 900。

20.9 a. 如果每个人都指望搭便车，大家的效用都是 0。

b. $y=5, x=50, x/100=0.5$ 效用 $=\sqrt{2.5}$。

第 21 章

21.1 a. 每人 100，$U_1=10, U_2=5$

b. $f_1=40, f_2=160$

c. $f_1=160, f_2=40$

d. $f_1=f_2=100$

e. $f_1=f_2=100$

21.3 a. $x=160$；$(U_1+U_2)^2=1\,600$

b. $(U_1+U_2)^2=3\,600$

c. 在 $x+2y=180$ 的限制下使 $2xy$ 最大化。$x=90$；$y=45$；$(U_1+U_2)^2=4\,050$。

d. 若是存在不同的效用可能性边界相交的情况，则应该用所有边界的包络线代替边界。

21.5 a. *D*

b. *E*

c. *B*

d. *A*

e. 不确定，这取决于个人的评价标准。

21.7 a. 最大化时解雇与不解雇的收入 y 相同，此时有 $t=u$。

b. $b=(1-t)w, t=u$。

c. 不会作出反应，因为无论 b 为多少他都是风险厌恶的，所以总会选择使两种情况收入相同的 t 和 b。

21.9 只有获益最多的人会去投票，这样结什均衡有可能改变。

常用术语表

逆向选择（adverse selection） 当买者和卖者拥有的关于市场交易的信息不对称时，交易结果通常会偏向于使拥有更多信息的那方受益。

阿罗不可能性定理（Arrow impossibility theorem） 社会选择理论的基础结论：任何社会决策的规则必然会违反至少一条阿罗提出的理性公理。

伯特兰均衡（Bertrand equilibrium） 双头经济中，价格博弈的均衡。

其他条件不变假设（ceteris paribus assumption） 当考察经济模型中一个因素的影响时，认为其他相关因素不变的假设。体现在数学中是偏微分的使用。

科斯定理（Coase theorem） 科斯得到的结论：若交易成本为零，即使存在外部性，通过相关者的交易也可以达到资源的有效配置。

补偿性需求曲线（compensated demand function） 描述保持实际收入（或效用）不变，消费量和商品价格关系的方程。记为 $x^c(p_x,p_y,U)$。

补偿性差异（compensating variation） 当价格改变时，一个人为保持效用不变而需要的补偿。

补偿性工资差异（compensating wage differentials） 由于职业的特点引起工人在劳动供给决策中偏向某一种工作，从而导致的实际工资的差异。

（总）互补品（complements-gross） 两种商品中，如果一种商品价格上升导致另一种商品消费量下降，则称为（完全）互补品。即商品 x,y 称为互补品（完全），当 $\partial x/\partial p_y<0$。参见（完全）替代品。

（净）互补品（complements-net） 保持实际收入（效用）不变，两种商品中，如果一种商品价格上升导致另一种商品消费量下降，则称为净互补品。即当 $\partial x/\partial p_y|_{U=\bar{U}}=\partial y/\partial p_x|_{U=\bar{U}}$ 时，商品 x,y 称为净互补品。这样的补偿性交叉价格效应是对称的，即 $\partial x/\partial p_y|_{U=\bar{U}}=\partial y/\partial p_x|_{U=\bar{U}}$。参见（净）替代品。也称为希克斯替代品和互补品。

混合商品（composite commodity） 价格同时运动以保持相对价格不变的一组商品。这样的一组物品在应用中可以被看成一种商品。

凹函数（concave function） 处处位于切平面下方的函数。

不变成本行业（constant-cost industry） 厂商的成本曲线不受产量扩大及新厂商进入影响的行业。

规模收益不变（constant returns to scale） 参见规模收益。

消费者剩余（consumer surplus） 在马歇尔需求曲线下方、市场价格上方的面积。表现了一个人获得在此价格做市场交易的权利的最大愿意支付。消费者剩余的改变可以用来度量价格变化引起的福利影响。

竞争性市场（contestable market） 进入退出完全自由的市场。由于在这样的市场上可以采取打一枪就跑的战略，即使没有大量的厂商，也会有 $P=MC=AC$。

或有投入需求（contingent input demand） 参见投入需求函数。

等值线（contour line） 函数值保持不变的点集。用于将三维函数画在两维中。例如：消费者无差异曲线图和厂商等产量图。

契约曲线（contract curve） 在一个交换经济中，所有有效资源配置的集合。这样的资源配置满足：若使一个人状况变好，则必然有人状况变坏。

成本函数（cost function） 参见总成本函数。

古诺均衡（cournot equilibrium） 双头经济中，产量博弈的均衡。在多人博弈中有类似的概念。

无谓损失（deadweight loss） 由于互利交易没有发生而引起的损失。没有转移给别的经济参与者的消费

者剩余和生产者剩余的减少。

成本下降行业(decreasing cost industry) 随产量扩大产生费用减少的外部性,从而导致厂商的成本曲线下移的行业。

规模收益递减(decreasing returns to scale) 参见规模收益。

需求曲线(demand curve) 在其他条件不变时,描述购买量和价格之间关系的图形。需求函数 $x = x(p_x, p_y, I)$ 的两维表示。也被称为"马歇尔需求曲线",以与"希克斯补偿性需求曲线"区分。

边际产量递减(diminishing marginal productivity) 参见边际产量。

边际替代率递减(diminishing marginal rate of substitution) 参见边际替代率。

价格歧视(discrimination, price) 买者或卖者利用自己的市场势力,将市场分为几部分,每部分分别定价。

对偶(duality) 约束下最大化和约束下最小化问题间的关系。

经济效率(economic efficiency) 当资源分配使得一个参与者利益增加必然会导致另一个参与者利益损失的情形。参见帕累托有效资源配置。

埃奇沃思矩形图(Edgeworth box diagram) 表示经济效率的图形工具。经常应用于描述交换经济中的合同线,也用在厂商理论中。

弹性(elasticity) 一个变量变化单位比例时,另一个变量变化比例的无单位度量。例如,$y = f(x)$,那么 $e_{y,x} = \partial y/\partial x \cdot x/y$。

进入条件(entry conditions) 决定一个新厂商开始生产的行业特点。在完全竞争下,认为没有进入成本,而在垄断行业中,会有很大的进入壁垒。

包络定理(envelope theorem) 一个数学上的结论:当一个函数的一个参数变化时,该函数最大值的变化可以直接通过对该参数求偏导数得到(其他参数都等于最优值)。

均衡(equilibrium) 所有经济参与者都没有激励改变自己行为的情况。在均衡价格,消费者总需求量等于厂商总供给量。

欧拉定理(Euler's theorem) 一个数学上的定理:如果函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 k 次齐次的,那么 $f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n = kf(x_1, \cdots, x_n)$。

交换经济(exchange economy) 商品供给固定的经济(即没有生产的禀赋经济)。禀赋商品在该经济中进行分配。

扩展路径(expansion path) 在不同的产量水平下厂商选择的各种投入组合的连线,表示当厂商决定扩大生产时,各类要素投入增长的速度。(假设投入要素的价格不变。)

期望效用(expected utility) 效用在各种风险情形下的平均。如果有 n 种结果,$x_1, \cdots, x_n$,每种可能性为 $p_1, \cdots, p_n$ ($\sum p_i = 1$),那么期望效用等于 $E(U) = p_1U(x_1) + p_2U(x_2) + \cdots + p_nU(x_n)$。

费用函数(expenditure function) 从消费者的对偶费用最小化的问题中得到的函数。表示为达到一给定效用的最少花费。

记为:费用 $= E(p_x, p_y, U)$

外部性(externality) 在正常市场行为中没有被考虑的一个经济参与者的行为对另一个经济参与者的影响。

一阶条件(first-order conditions) 一个函数取最大值或最小值时的必要数学条件。通常体现在,一种行为的量会增加到边际收益等于边际成本为止。

固定成本(fixed costs) 在短期中,不随产量改变而改变的成本。短期价格决定理论在很多方面与固定成本无关。参见可变成本。

一般均衡模型(general equilibrium model) 描述了很多市场同时运动的经济模型。

吉芬悖论(Giffen's paradox) 一种商品的价格上升反而导致对该产品的消费量增加的情况。发生的原因是该商品是劣等品,且价格上升引起的收入效应强于替代效应。

齐次函数(homogeneous function) 函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 k 次齐次的,当 $f(mx_1, mx_2, \cdots, mx_n) = m^kf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

位似函数(homothetic function) 可以由齐次函数经单调变换后表达出的函数。这种函数的等值线的斜率只取决于变量间的比例,而不取决于他们的绝对数值。

收入和替代效应(income and substitution effect) 当某种商品价格改变时,消费者面临着两种不同的效应。收入效应的产生是因为一种商品的价格改变会影

响消费者的购买力。即使购买力不变，替代效应仍会使消费者重新分配资源。替代效应反映在沿着无差异曲线的移动，收入效应则包含无差异曲线本身的移动。参见斯拉茨基方程。

成本递增行业(increasing cost industry) 随产量扩大产生费用增加的外部性，从而导致厂商的成本曲线上移的行业。

规模收益递增(increasing returns to scale) 参见规模收益。

无差异曲线图(indifference curve map) 效用函数的康托图，显示不同福利水平上的可选消费商品集。

间接效用函数(indirect utility function) 以所有价格及收入为自变量的效用函数。

个人需求曲线(individual demand curve) 其他条件不变时，商品需求量与商品价格间的关系。一个人对一种商品消费量 $x = x(p_x, p_y, I)$ 的两维表示。

劣等品(inferior good) 当一个人收入上升时，需求量减少的产品。

劣等投入(inferior input) 当厂商产出增加时，使用量减少的投入品。

投入需求函数(input demand function) 表示对于一个利润最大化的企业，投入需求关于投入要素价格和产出需求的关系。例如：劳动力的投入需求函数可以写为 $l = l(P, v, w)$，其中 P 为厂商产出品的市场价格。或有投入需求函数 $[l^c(v, w, q)]$ 由成本最小化推出，而不一定反映利润最大化的条件。

等产量图(isoquant map) 厂商生产函数的康托图。显示了生产一给定产出需要的可选投入要素集。

库恩—塔克条件(Kuhn-Tucker Conditions) 在不等式约束下最优化问题的一阶条件，是等式约束时最优化一阶条件的推广。

限制定价(limit pricing) 为阻止竞争者进入而采取的低价战略。

林达尔均衡(Lindahl Equilibrium) 公共物品问题的假想解。每人付出的税赋相当于竞争市场中的均衡价格。

长期(long run) 参见短期—长期差异。

一次总付原则(Lump-sum Principle) 表明普遍购买力税或转移支付比对个别商品征税或补贴更有效率。

边际成本(marginal cost, MC) 多生产一单位产出需要的额外成本。记为 $MC = \partial C/\partial q$。

边际实物产品(marginal physical product, MP) 当增加一单位一种投入要素，但保持其他投入要素量不变时增加的产出量。通常假定其他投入要素量不变时，一种要素的边际产量随投入量增加而减少。若 $q = f(k, l)$，$MP_l = \partial q/\partial l$。

边际替代率(marginal rate of substitution, MRS) 保持效用不变，消费者愿意以一种商品替代另一种商品的比例。是无差异曲线斜率的绝对值。边际替代率 $= -\mathrm{d}y/\mathrm{d}x|_{U=\overline{U}}$。

边际收益(marginal revenue, MR) 厂商多卖出一单位产出品时得到的额外的收益。边际收益 $= \partial p \cdot q/\partial q = p(1 + 1/e_{q,p})$。

边际生产收益(marginal revenue product, MRP) 增加一单位某种投入而增加的产出的收益。以劳动力为例，$MRP_l = MR \cdot MP_l$。

边际效用(marginal utility, MU) 消费者多消费一单位某种商品而增加的效用。

市场需求(market demand) 市场中所有消费者需求的加总。取决于该商品价格、其他商品价格、每个消费者的偏好、每个消费者的收入。

市场时期(market period) 供给量未对市场价格作出反应的一小段时间。

垄断(monopoly) 只有一个卖者的行业。

垄断(monopsony) 只有一个买者的行业。

道德风险(moral hazard) 保险对人们行为决策的影响，可能会改变发生损失的概率。

纳什均衡策略(Nash equilibrium strategies) 两人博弈中的一组策略 (a^*, b^*)，满足：对 A 来说，a^* 是对于 b^* 的最优反应，对 B 来说，b^* 是对于 a^* 的最优反应。

正常品(normal good) 需求量随收入增加而增加的商品。

规范分析(normative analysis) 考虑经济参与者应当如何行动或市场应当如何运转的经济学分析。

寡头(oligopoly) 只有几个卖者的行业。

机会成本原理(opportunity cost doctrine) 一个简单但深刻的观察：任何行为的真实成本可以用当采取该行为而必须放弃的最好的替代选择的价值来衡量。

产出和替代效应(output and substitution effects) 当一种投入要素的价格变化时，厂商对其的需求量也随之变化。即使产出固定为常数，替代效应也会发生，表

现为沿着等产量曲线的移动。而随产量水平变化引起的变化称为产出效应,表现为等产量曲线的移动。

投票悖论(paradox of voting) 说明了"少数服从多数"的投票规则下,不一定能产生一个决策,而有可能产生几个选择间的循环。

帕累托最优配置(Pareto-efficient allocation) 没有人可以在不使别人状况变坏的情况下使自己状况变好的资源配置。

局部均衡模型(partial equilibrium model) 不考虑对其他市场影响的一个市场的经济模型。

完全竞争(perfect competition) 最常用的经济模型:市场中有大量的买者和卖者,且都是价格接受者。参见价格接受者。

实证分析(positive analysis) 试图解释和预测实际经济事件的经济学分析。

折现值(present discounted value, PDV) 在未来支付的一笔钱在现在的价值。要考虑利息的影响。

价格歧视(price discrimination) 在不同的价格出卖同质的商品。要求卖者有能力防止消费者倒手转卖。价格歧视有三种类型:一级——每一单位的产品的价格都等于消费者中对其最高的评价(即完全价格歧视);二级——采取一定的价格方案,产生使消费者自发分为接受不同价格的几类的激励;三级——在不同的市场制定不同的价格。

价格弹性(price elasticity) 弹性概念最重要的应用,反映了需求量比例改变对价格比例改变的反应程度。若 $q=f(p,\cdots)$, $e_{q,p}=\partial q/\partial p\cdot p/q$。

价格接受者(price taker) 决策不会影响市场价格的经济参与者。

委托-代理关系(principal-agent relationship) 委托人雇佣代理人为其作决策而产生的关系。

囚徒困境(prisoner's dilemma) 对其最早的研究出现于博弈论,而后其成果逐渐有了广泛的应用。困境的症结在于每人都面临着对方行为的不确定性,这会导致每个人采取对大家不利的相同决策。合谋可以使每个人情况变好。

生产者剩余(producer surplus) 在市场价格作交易比不生产时得到的额外收益。用市场价格线下方、供给曲线上方的面积表示。

生产函数(production function) 一个表示厂商的投入与产出之间关系的数学函数。若产出是资本和劳动力的函数,则生产函数可以表示为 $q=f(k,l)$。

生产可能性边界(production possibility frontier) 用固定投入可以得到的所有可能的产出组合。

利润函数(profit function) 一个厂商的最大利润与其产出和投入品价格的关系。记为 $\Pi^*=\Pi^*(P,v,w)$。

利润(profits) 厂商得到的收入与生产成本的差,长期下,完全竞争的厂商的经济利润等于零。而垄断可以带来正的利润。

产权(property rights) 所有权的法律确认。

公共物品(public good) 一旦生产出来就没有排他性的商品。许多公共物品也没有竞争性。增加的使用者可以以零边际成本享受到此种商品的好处。

拟凹函数(quasi-concave function) 函数 $f(X)$,满足所有 $f(X)>k$ 的点集都是凸的。

生产转换率(rate of product transformation, RPT) 在生产过程中,保持所有投入量不变,一种产出和另一种产出间的交换比例。它是生产可能性边界的斜率的绝对值。

收益率(rate of return) 当期品可以转换为未来品的比率。例如,一期10%的收益率意味着当期放弃1单位商品,在未来可以得到1.1单位商品。

技术替代率(rate of technical substitution, RTS) 在生产过程中,保持产出不变,一种投入同另一种投入间的交换比例。是等产量线斜率的绝对值。记为 $RTS=-\left.\frac{dk}{dl}\right|_{q=q_0}$。

租金(rent) 从一种投入品上获得的、超过维持它的必要成本的那一部分收益。

寻租行为(rent-seeking activities) 人们利用政治手段获取在通常市场经济中不能得到的租金的行为。

租金率(rental rate) 雇用一台机器一小时的成本。通常记为 v。

规模报酬(returns to scale) 一种根据产出对所有投入比例增长的反应而对生产函数分类的方法。如果产出的增长比例小于所有投入的增长比例,则生产函数是规模报酬递减的。如果产出的增长比例大于所有投入的增长比例,则生产函数是规模报酬递增的。如果所有投入和产出同比例增长,则生产函数是规模报酬不变的。数学上,如果 $f(mk,ml)=m^kf(k,l)$,$k>1$ 时称规模收益递增,$k=1$ 时称规模报酬不变,$k<1$ 时称规模报酬递减。

风险厌恶(risk aversion) 人们不愿接受公平赌博的现象,当一个人的财富效用函数是凹函数时这种情况就会发生(即 $U'(W)>0, U''(W)<0$)。绝对风险厌恶可以用 $r(W)=\frac{-U''(W)}{U'(W)}$ 衡量,相对风险厌恶可以用 $rr(W)=\frac{-WU''(W)}{U'(W)}$ 来衡量。

二阶条件(second-order conditions) 当一阶条件满足时,保证某点是最大值或最小值的数学条件。当函数满足某种凸凹性时,这些条件就会被满足。

谢泼德引理(Shepherd's Lemma) 包络线定理的应用。说明消费者的补偿性需求函数和厂商(当产出固定时)的投入需求函数可以直接从对费用函数或总成本函数求偏导数得到。

税负的转移(shifting of a tax) 市场对税负的反应,使得实际承担税负的人并不都是交税款的人。

短期长期差异(short run-long run distinction) 生产理论中一种概念性的区分。在一定时期内(短期),有些投入是固定的,而在更长的时期内(长期),生产者可以改变所有的投入。

信号(signaling) 在逆向选择的市场中,人们为了区别他们真实的风险类型而采取的行动。

斯拉茨基方程(slutsky equation) 效用最大化时,价格变化引起的收入效应、替代效应的数学表达:

$$\partial x/\partial p_x=\partial x/\partial p_x|_{U=\bar{U}}-x\frac{\partial x}{\partial I}$$

社会福利函数(social welfare function) 表示社会关于平等的观点的一种假想工具。

子博弈完美均衡(subgame perfect equilibrium) 每个博弈者的策略选择不涉及无信用危机的纳什均衡。

(总)替代品(substitutes-gross) 两种商品,当一种商品的价格上升时,对另一种商品的需求量增加。当 $\partial x/\partial p_y>0$,则 x 和 y 称为替代品。参见互补品、斯拉茨基等式。

(净)替代品(substitutes-net) 两种商品,保持效用不变时,当一种商品的价格上升时,对另一种商品的需求量增加。即,当 $\partial x/\partial p_y|_{U=\bar{U}}>0$, x 和 y 称为净替代品。净替代性是对称的, $\partial x/\partial p_y|_{U=\bar{U}}=\partial y/\partial p_x|_{U=\bar{U}}$。参见互补品、斯拉茨基等式。

替代效应(substitution effects) 参见收入效应和替代效应、产出效应和替代效应、斯拉茨基等式。

沉没成本(sunk costs) 为进入市场必须付出的一次性成本。

供给函数(supply function) 对于一个利润最大化的厂商,供给量(q)关于产出价格(P)和投入品价格(v, w)的函数。记为 $q=q(P,v,w)$。

供给反应(supply response) 需求条件和市场价格改变时引起的产出的增加。短期和长期的反应通常是有差别的。

暗中勾结(tacit collusion) 没有明文规定的合约的寡头间的合作战略。

总成本函数(total cost function) 最小化的总成本与产出、投入品价格间的关系。记为 $C=C(v,w,q)$。

效用函数(utility function) 消费者在可选消费商品集间数学概念化的排序。如果有两种商品 x 和 y,效用可以表示为 $U(x,y)$。

可变成本(variable costs) 随厂商产出量变化而变化的成本。与固定成本相对。参见固定成本。

冯·诺伊曼-摩根斯坦效用(Von Neumann-Morgenstern utility) 在不确定情形下的各种结果的排序,个人根据它们的期望效用在这些结果中做出选择。

工资(wage) 雇用一个工人一小时的成本。记为 w。

瓦尔拉斯价格调整(Walrasian price adjustment) 多个市场通过价格对过剩供给或需求做出调整最终达到同时出清的假设。

零和博弈(zero-sum game) 一个人的收益等于另一个人的损失的博弈。