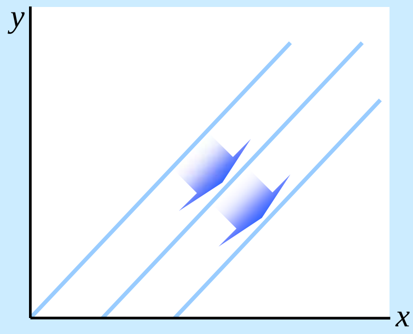
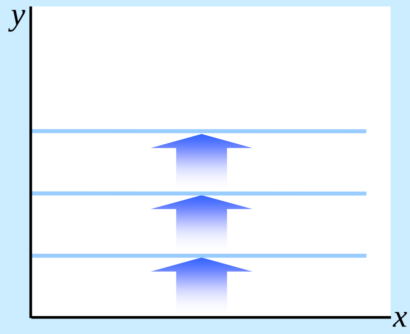
第一讲

1（1）



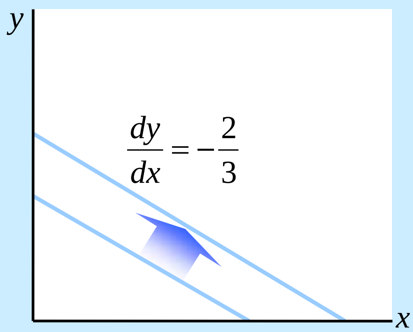
王力喜欢汽水 x，但厌恶冰棍 y；更多的汽水 x 所带来的喜悦被更多的冰棍 y 而冲淡，他的无差异曲线拥有正的斜率；对于一定量的汽水 x 而言，越少的冰棍 y 越好，所以越靠右的曲线所代表的效用水平越高。

（4）



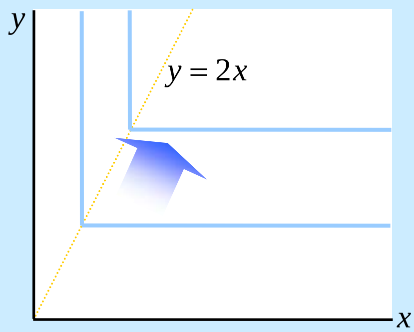
杨琳无所谓汽水 x，但她喜欢冰棍 y；更多的汽水 x 并没有使她欣喜若狂，她只在乎更多的冰棍 y，她的无差异曲线为水平线；对于一定量的汽水 x 而言，越多的冰棍 y 越好，所以越靠上的曲线所代表的效用水平就越高。

（2）



对于李楠而言汽水 x 与冰棍 y 是完全替代的；三杯汽水 x 与两根冰棍 y 所带来的效用水平是一样的，她的无差异曲线拥有负的斜率；对于一定量的汽水 x 而言，越多的冰棍 y 越好，所以越靠上的曲线所代表的效用水平就越高；她效用函数可用 $u(x,y)=2x+3y$ 表示。

（3）



对于萧峰而言一杯汽水 x 与两根冰棍 y 是完全互补的；越靠右上的曲线所代表的效用水平就越高；

他的效用函数可用 $u(x,y)=\min(x,y/2)$ 表示。

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p48-53）

进一步提问：为什么在（3）中，萧锋的效用函数不可以是 $u(x,y)=\min(x,2y)$？

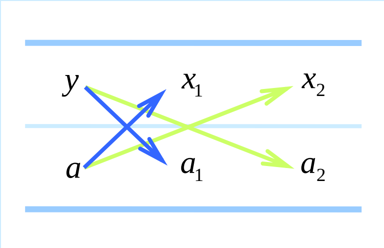
事实上，这个问题涉及到如何可以快速的得出固定比率的效用（生产）函数（而用道上的“黑话”则被称之为里昂惕夫效用（生产）函数）；

让我们首先来看一个例子，而在例子结束时，也就是我们回答此问题结束之际；

假设生产 a 单位的产出要固定用用上 a_1 单位的 x_1 与 a_2 单位的 x_2，那么此技术的生产函数是怎样的形式？

这就如同我们是在拌水泥砂浆，其配合比则是题目所给出的；

y	:	x_1	:	x_2
a	:	a_1	:	a_2



当我们想知道他们之间的等式关系时，我们只须经过简单的数学变换：

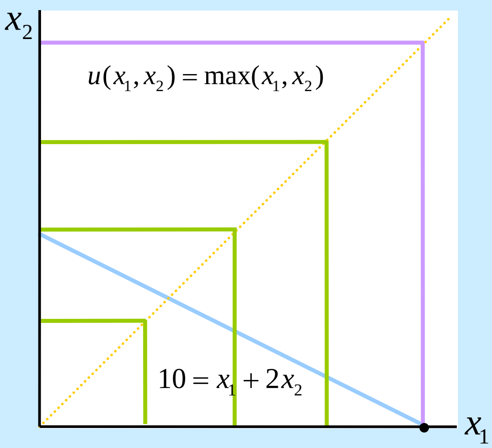
$$y : x_i = a : a_i ;\quad y = \frac{a x_i}{a_i}$$

而当我们上式，则就可马上得出其关系函数：

$$y = Min\left\{\frac{a x_1}{a_1};\frac{a x_2}{a_2}\right\}$$

当 $a=1$ 则 $y = Min\left\{\frac{x_1}{a_1};\frac{x_2}{a_2}\right\}$，而当 a 不指定时，则存在多种表示形式（但它们都无伤大雅），萧锋的效用函数也可写为 $u(x,y)=\min(2x,y)$；

2



$u(x_1,x_2)=\max(x_1,x_2)$ 为此人的效用函数；这就确定了他的最优的选择必定是落在便宜的商品上，即他会用他的所有积蓄来购买相对便宜的商品。

3

$$\max_x = u(x)$$

$$s.t.\ m = p_1x_1 + p_2x_2$$

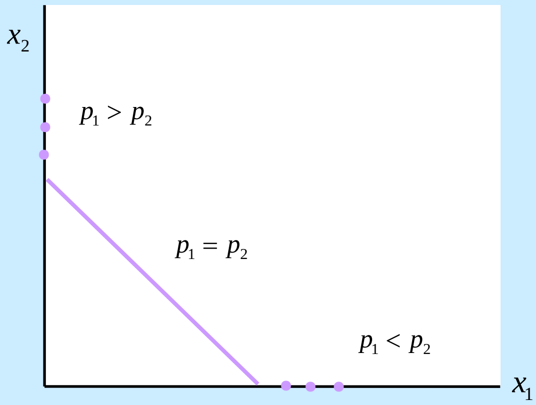
构造拉氏方程：$\psi(x,\lambda) = 10(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 50 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 20(x_1 + x_2) - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 20(x_1 + x_2) - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

由上式可知，通过拉氏方程不能解出方程解。



通过进一步观察，我们可知，当$u(x_1,x_2)=10(x_1+x_2)^2-50$通过单调变化后，此效用函数则为：$u(x_1,x_2)=x_1+x_2$；当$p_1>p_2$时，消费者把全部的收入用来消费$x_2$可达到更高的效用水平。

当边际效用替代率为常数时，即效用函数的斜率为负的常数时，才可满足完全替代的定义，由此，我们能断定，两商品为相互替代的；图中表示了消费束的集合；

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论第六版　中国经济出版社　p81）

x_i的需求函数为：

$$x_i=\begin{cases}\dfrac{m}{p_i} & ,p_i<p_j\\ 0 & ,p_i>p_j\\ 0\sim\dfrac{m}{p_i} & ,p_i=p_j\end{cases}\qquad;\quad (i,j=1,2)$$

4（1）由$u(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2}\ln x_1+\dfrac{1}{2}\ln x_2$可知：$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{1}{2x_i}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=-\dfrac{1}{2x_i^2}<0$可知边际效用递减。

（2）只要当$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\geq 0$时，就满足题目要求，如$x_1^3+x_2^3$等。

5（1）当$\rho=1$时，$u(x)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$，又知$\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$为常数，则效用函数为线性。

（2）$\lim\limits_{\rho\to 0}\ln u(x)=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\rho}\ln(\alpha_1x_1^\rho+\alpha_2x_2^\rho)=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha_1x_1^\rho\ln x_1+\alpha_2x_2^\rho\ln x_2}{\alpha_1x_1^\rho+\alpha_2x_2^\rho}$

$\xrightarrow{\alpha_1+\alpha_2=1}\alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2$

（题目虽然没有给出$\alpha_1+\alpha_2=1$的条件，但只有在此条件下结论才能成立）

所以：　$\lim\limits_{\rho\to 0}u(x)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$

（3）$\lim\limits_{\rho\to-\infty}\ln u(x)=\lim\limits_{\rho\to-\infty}\dfrac{\alpha_1x_1^\rho\ln x_1+\alpha_2x_2^\rho\ln x_2}{\alpha_1x_2^\rho+\alpha_2x_1^\rho}$

当$x_1>x_2$时：$\lim\limits_{\rho\to-\infty}\ln u(x)=\ln x_2$　；　当$x_1<x_2$时：$\lim\limits_{\rho\to-\infty}\ln u(x)=\ln x_1$

所以，当$\rho\to-\infty$时，该效用函数趋近于$u(x)=\min(x_1,x_2)$

7 说句实话，越简单和明显的结论越是难以证明。但以下四个结论在数学上是很明显的。

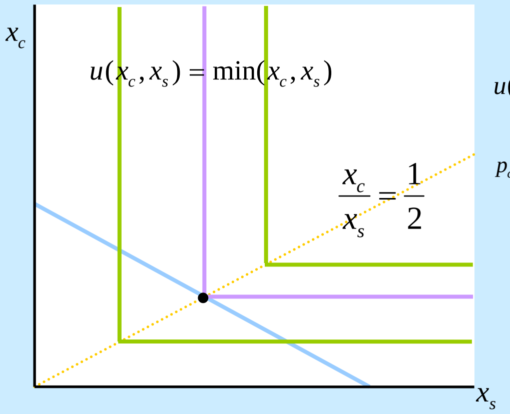
（1）本身包含于本身，即弱偏好与本身的范围一样大；

（2）无差异的范围小于弱偏好的范围，即某集合的范围包含其子集；

（3）强偏好和无差异的集合等同于弱偏好 ；

（4）强偏好和无差异之间没有交集。

6 设每汤匙咖啡（*coffee*）的需求为 x_c，每汤匙糖（*sugar*）的需求为 x_s，每杯咖啡的需求为 x。



根据题设，我们可知茜茜的效用函数为 $u(x_c, x_s) = \min(x_c, \frac{x_s}{2})$；这相当于一杯咖啡的价格为 $p_c + 2p_s$，茜茜可以买到的几杯咖啡呢？

其咖啡 x 的杯数量为 $\frac{m}{p_c + 2p_s}$；

又知 $x = x_c = \frac{1}{2}x_s$ 则 $x_c = \frac{m}{p_c + 2p_s}$；$x_s = \frac{2m}{p_c + 2p_s}$；

分别对两需求函数求偏导得：

$$\frac{\partial x_c}{\partial p_c} = -\frac{m}{(p_c + 2p_s)^2}\text{；}\quad \frac{\partial x_c}{\partial p_s} = -\frac{2m}{(p_c + 2p_s)^2}\text{；}$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_c} = -\frac{m}{(p_c + 2p_s)^2}\text{；}\quad \frac{\partial x_s}{\partial p_s} = -\frac{2m}{(p_c + 2p_s)^2}$$

当价格变化时，$x_c' = \dfrac{m}{p_c' + 2p_s'}$；$x_s' = \dfrac{2m}{p_c' + 2p_s'}$ 由于咖啡和糖为完全互补，所以任何一价格的上升都会导致咖啡和糖的需求量下降。

8（1）完备性是指≤，≥，所以题设中的<、～都不具有完备性；

（2）“无差异关系”无差异于“无差异关系”，因为“$A \sim B$” ～ “$B \sim A$”；即无差异的定义为：$x \sim y$ 当且仅当 $x \geq y$ 且满足 $y \geq x$；所以“$x \geq y$ 且满足 $y \geq x$”～“$y \geq x$ 且满足 $x \geq y$”；即“$x \sim y$”～“$y \sim x$”；进而具体而言，如果把 y 当成 x，则为“$x \sim x$”～“$x \sim x$”；进而 $x \sim x$；

（3）根据以上的思路，“$A > B$”与“$A < B$” 不满足无差异关系，所以不满足反省性；即严格偏好关系的定义为： $x > y$ 当且仅当 $x \geq y$ 但不满足 $y \geq x$；……

另： 以上两题，直接由其定义便可直接得出；以上思路还是显得拖沓；

（4）完备性是指消费者能区分任何两个不同的消费计划，但这并不代表任何两个不同的消费计划都同时具有题中的三种关系，如果存在的话，则否定了完备性。

9 $$\max_{x} \quad u(x)$$

$$u(x_2)=x_1=\frac{m-p_2x_2}{p_1}$$

由上式可知，当 $x_2=0$ 时，消费者达到效用最大化；马歇尔需求函数为：$x_1=m/p_1$；$x_2=0$

10
$$\max_x = u(x)$$

$$s.t.\ m=p_1x_1+p_2x_2$$

构造拉氏方程： $\psi(x,\lambda)=Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}+\lambda(m-p_1x_1-p_2x_2)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=\frac{\alpha u(x)}{x_1}-\lambda p_1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=\frac{(1-\alpha)u(x)}{x_2}-\lambda p_2=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=m-p_1x_1-p_2x_2=0 \qquad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $x_1=\frac{\alpha p_2x_2}{(1-\alpha)p_1}$； $x_2=\frac{(1-\alpha)p_1x_1}{\alpha p_2}$

把上两式分别代入（3）式得马歇尔需求函数：

$$x_1=\frac{\alpha m}{p_1}; \qquad x_2=\frac{(1-\alpha)m}{p_2}$$

11 单调变换：当 $u_1>u_2$ 意味着 $f(u_1)>f(u_2)$ 时，则称 $f(u)$ 为原效用函数的单调变换；而事实上，用数学的“黑话”来说，一个消费者的效用函数是不唯一的：只要任意一个新的效用函数是旧的效用函数的严格单增函数就满足单调变换的条件；

先用这一讲的第三题举个例子：

设 $v=10(x_1+x_2)^2-50$（这是旧的效用函数）；

我们再设新的效用函数为： $u=(x_1+x_2)$；然后，我们建立两者关系：

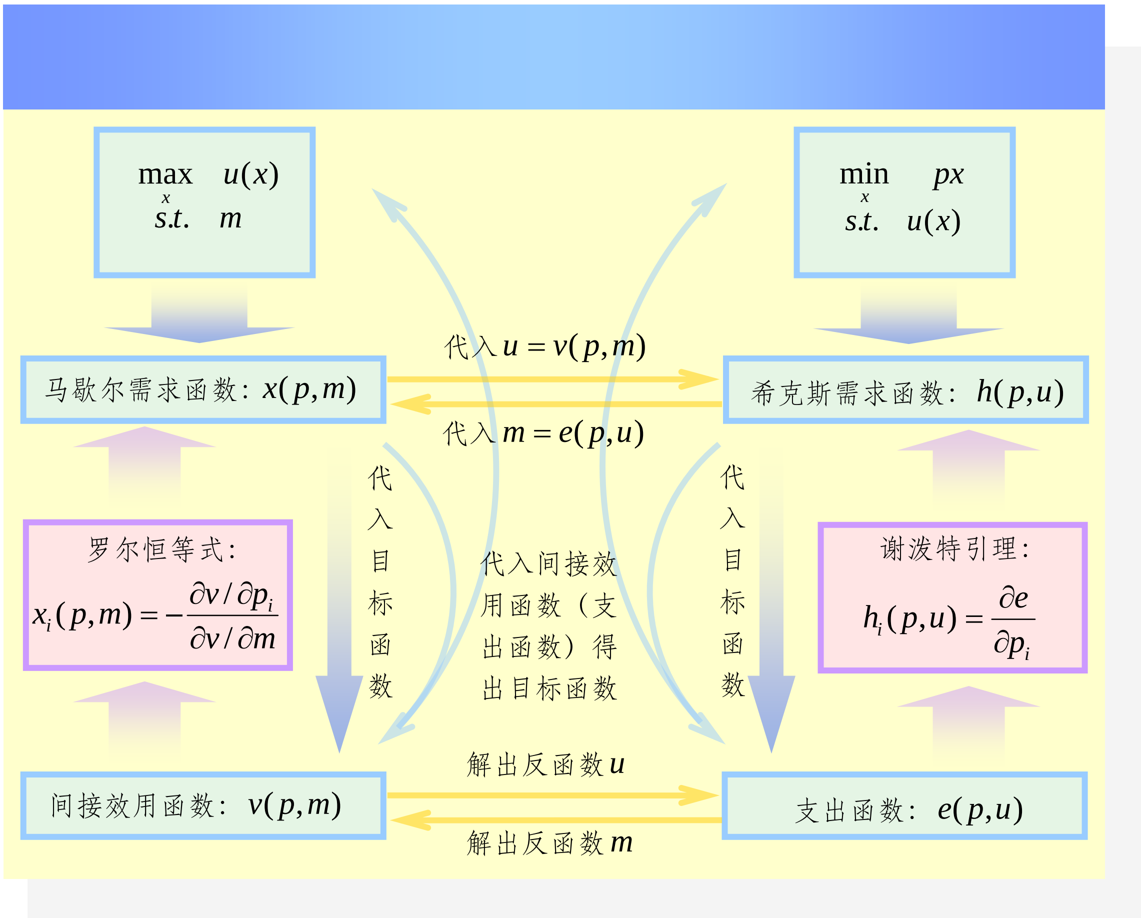
$$v=10\cdot u^2-50\Rightarrow u=\left(\frac{v+50}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

对进 $u=u(v)$ 行求导： $\frac{du}{dv}=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{v+50}{10}\right)^{-\frac{1}{2}}$

则当 $v>-50$ 时，u 为 v 的严格单增函数；即 u 为 v 的单调变换；

（1）	$u'=2$	√	（2）	$u'=2v^{-3}(v>0)$	√
（3）	$u'=-2v^{-3}(v>0)$	×	（4）	$u'=v^{-1}(v>0)$	√
（5）	$u'=ve^{-v}(v>0)$	√	（6）	$u'=2v(v>0)$	√
（7）	$u'=2v(v>0)$	√	（8）	$u'=2v(v<0)$	×

第二讲



1

$$\max_x \quad u(x)$$

$$s.t.\ m = p_1x_1 + p_2x_2$$

构造拉氏方程： $\psi(x,\lambda) = \alpha \ln x_1 + x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$

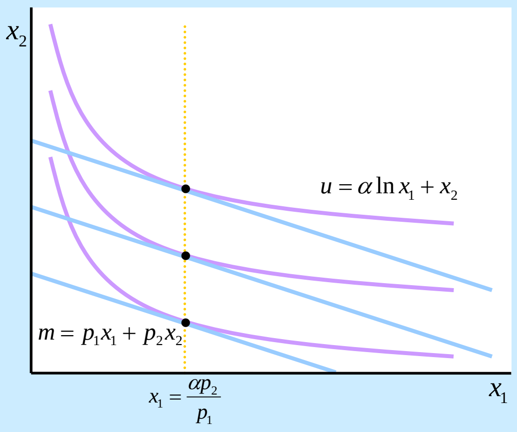
$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \qquad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得马歇尔需求函数： $x_1 = \frac{\alpha p_2}{p_1}$；

因为 x_1 为常数，把之代入（3）式得： $x_2 = \frac{m - \alpha p_2}{p_2}$



效用函数为拟线性曲线$u=v(x_1)+x_2$可知，其中x_1的需求为固定的，也就是说x_1的收入份额是一定的，而其余的钱为花在x_2上。

把上所得的马歇尔需求函数代入目标函数得间接效用函数：

$$v(m,p)=\alpha\ln\alpha+\alpha\ln p_2-\alpha\ln p_1+\frac{m-\alpha p_2}{p_2}$$

根据罗尔恒等式：$x_i(p,m)=-\dfrac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial m}$会得出同样的马歇尔需求函数：

$$x_1(p,m)=-\frac{\partial v/\partial p_1}{\partial v/\partial m}=-\frac{-\alpha/p_1}{1/p_2}=\frac{\alpha p_2}{p_1}$$

$$x_2(p,m)=-\frac{\partial v/\partial p_2}{\partial v/\partial m}=-\frac{[\alpha p_2-\alpha-(m-\alpha p_2)]/p_2^2}{1/p_2}=\frac{m-\alpha p_2}{p_2}$$

2

$$\max_x=u(x)$$

$$s.t.\ m=p_1x_1+p_2x_2$$

构造拉氏方程：$\psi(x,\lambda)=x_1^2x_2+\lambda(m-p_1x_1-p_2x_2)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=2x_1x_2-\lambda p_1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=x_1^2-\lambda p_2=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=m-p_1x_1-p_2x_2=0 \qquad (3)$$

由$\dfrac{(1)}{(2)}$得：$x_1=\dfrac{2p_2x_2}{p_1}$；　　$x_2=\dfrac{p_1x_1}{2p_2}$

把上两式分别代入（3）式得马歇尔需求函数：

$$x_1(p,m)=\frac{2m}{3p_1};\qquad x_2(p,m)=\frac{m}{3p_2}$$

把上所得的马歇尔需求函数代入目标函数得间接效用函数:

$$v(p,m)=\frac{4m^3}{3^3 p_1^2 p_2}$$

$$\min_x p_1x_1+p_2x_2$$

$$s.t. \quad u(x)=x_1^2x_2$$

构造拉氏方程: $\psi(x,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(u-x_1^2x_2)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=p_1-2\lambda x_1x_2=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=p_2-\lambda x_1^2=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=u-x_1^2x_2=0 \tag{3}$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得: $x_1=\frac{2p_2x_2}{p_1}$; $x_2=\frac{p_1x_1}{2p_2}$

把上两式分别代入（3）式得希克斯需求函数:

$$h_1(p,u)=\left(\frac{2up_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{3}}; \qquad h_2(p,u)=\left(\frac{up_1^2}{4p_2^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

把上所得的希克斯需求函数代入目标函数得支出函数:

$$e(p,u)=p_1\left(\frac{2up_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{3}}+p_2\left(\frac{up_1^2}{4p_2^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2up_1^2p_2\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{up_1^2p_2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$e(p,u)=3\left(\frac{up_1^2p_2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

也可根据间接效用函数与支出函数互为倒函数的关系直接得出:

$$v(p,m)=\frac{4m^3}{3^3p_1^2p_2}\Rightarrow\frac{v(p,m)\cdot 3^3p_1^2p_2}{4}=m^3\Rightarrow e(p,u)=3\left(\frac{up_1^2p_2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3 根据罗尔恒等式: $x_i(p,m)=-\frac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial m}$ 会得出马歇尔需求函数:

$$x_i*(p_i,m)=-\frac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial m}=\frac{m}{(p_1+p_2)}$$

4
$$\max_{x} = u(x)$$

$$s.t.\ m = p_1x_1 + p_2x_2$$

构造拉氏方程： $\psi(x,\lambda) = x_1x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{3}$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得: $x_1 = \frac{p_2x_2}{p_1}$; $x_2 = \frac{p_1x_1}{p_2}$

把上两式分别代入（3）式得马歇尔需求函数:

$$x_1(p,m) = \frac{m}{2p_1}\ ; \qquad x_2(p,m) = \frac{m}{2p_2}$$

把上所得的马歇尔需求函数代入目标函数得间接效用函数:

$$v(p,m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$$

把题设条件的三城市的价格代入间接效用函数得:

$$v_a(p,m) = \frac{m^2}{4p_1^a p_2^a} = v_b(p,m) = \frac{m^2}{4p_1^b p_2^b}$$

$$v_c(p,m) = \frac{m^2}{p_1^a p_2^a + p_1^b p_2^b + p_1^a p_2^b + p_1^b p_2^a}$$

由条件 $p_1^a p_2^a = p_1^b p_2^b = n$；又由定理 $x > 0; x + \frac{1}{x} \geq 2$ 可知，主要是比较 $v_c(p,m)$ 分母中的后两项，同时除以 $p_1^a p_2^a = p_1^b p_2^b = n$ 得:

$$\frac{p_1^a p_2^b}{p_1^a p_2^a} = \frac{p_2^b}{p_2^a}\ ; \qquad \frac{p_1^b p_2^a}{p_1^b p_2^b} = \frac{p_2^a}{p_2^b} \qquad \text{则:} \qquad \frac{p_2^b}{p_2^a} + \frac{p_2^a}{p_2^b} \geq 2$$

也就是说:
$$\frac{p_1^a p_2^b}{p_1^a p_2^a} + \frac{p_1^b p_2^a}{p_1^b p_2^b} \underline{\underline{p_1^a p_2^a = p_1^b p_2^b = n}} \frac{p_1^a p_2^b}{n} + \frac{p_1^b p_2^a}{n} = \frac{p_2^b}{p_2^a} + \frac{p_2^a}{p_2^b} \geq$$

$$\frac{p_1^a p_2^a}{p_1^a p_2^a} + \frac{p_1^b p_2^b}{p_1^b p_2^b} \underline{\underline{p_1^a p_2^a = p_1^b p_2^b = n}} \frac{p_1^a p_2^a}{n} + \frac{p_1^b p_2^b}{n} = 2$$

所以: $$p_1^a p_2^b + p_1^b p_2^a \geq p_1^a p_2^a + p_1^b p_2^b$$

$$v_a(p,m) = v_b(p,m) \geq v_c(p,m)$$

这个退休老人在有一固定收入的前提下，想效用最大化，他会选择生活在北京或上海。

5（1） $$\min_x p_1x_1 + p_2x_2$$

$$s.t. \quad u(x) = x_1x_2$$

构造拉氏方程: $\psi(x,\lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(u(x) - x_1x_2)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = p_1 - \lambda x_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = p_2 - \lambda x_1 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = u(x) - x_1x_2 = 0 \quad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得: $x_1 = \frac{p_2x_2}{p_1}$; $x_2 = \frac{p_1x_1}{p_2}$

把上两式分别代入（3）式得希克斯需求函数:

$$h_1(p,u) = \left(\frac{up_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad h_2(p,u) = \left(\frac{up_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

把上所得的希克斯需求函数代入目标函数得支出函数:

$$e(p,m) = 2(up_1p_2)^{\frac{1}{2}}$$

（2）设 $u'(x) = \ln u(x)$

$$\min_x p_1x_1 + p_2x_2$$

$$s.t. \quad \ln u = \ln x_1 + \ln x_2$$

构造拉氏方程: $\psi(x,\lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(\ln u - \ln x_1 - \ln x_2)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = p_1 - \frac{\lambda}{x_1} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = p_2 - \frac{\lambda}{x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \ln u - \ln x_1 - \ln x_2 = 0 \quad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得: $x_1 = \frac{p_2 x_2}{p_1}$; $x_2 = \frac{p_1 x_1}{p_2}$

把上两式分别代入（3）式得希克斯需求函数:

$$h_1(p,u) = \left(\frac{up_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad h_2(p,u) = \left(\frac{up_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

把上所得的希克斯需求函数代入目标函数得支出函数:

$$e(p,m) = 2(u(x)p_1p_2)^{\frac{1}{2}}$$

（3）因为效用函数没有任何经济意义，只是为不同的消费组合排序，所以任何一个效用函数的单调变化不会改变消费组合的排序，由此可看出消费者的效用函数不是唯一的。

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p61-62）

6

$$v(p,m) = \frac{m}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}$$

根据间接效用函数和支出函数之间的关系为互为反函数；即根据对偶性原理:

$$v(p,m) = v[p,e(p,u)] = u$$

则题中的式子变为:

$$v[p,e(p,u)] = \frac{e(p,u)}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}} = u$$

$$e(p,u) = up_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}$$

谢泼特引理 $h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u(x))}{\partial p_i}$ 可知:

$$h_1(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_1} = \frac{\partial (up_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha})}{\partial p_1} = \alpha u\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}$$

7 为了让我们看得更清楚，我们写得稍慢一点:

（1）

$$\max_x = u(x)$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m$$

构造拉氏方程:

$$\psi(x,\lambda) = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \lambda(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \alpha_1 A x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \cdots\cdots\cdots x_n^{\alpha_n} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \alpha_i A x_1^{\alpha_1} \cdots x_i^{\alpha_i - 1} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} - \lambda p_i = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \alpha_j A x_1^{\alpha_1} \cdots\cdots x_j^{\alpha_j - 1} \cdots x_n^{\alpha_n} - \lambda p_{j1} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \alpha_n A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots\cdots\cdots x_n^{\alpha_n - 1} - \lambda p_n = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \tag{5}$$

由 $\frac{(2)}{(3)}$ 得: $x_i = \frac{\alpha_i p_j x_j}{\alpha_j p_i}$; $x_j = \frac{\alpha_j p_i x_i}{\alpha_i p_j}$

把上两式分别代入（5）式得:

$$p_1 x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} p_1 x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} p_1 x_1 = (\frac{\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}) p_1 x_1 = m \tag{6}$$

$$(\frac{\alpha_1}{\alpha_i} + \frac{\alpha_2}{\alpha_i} + \cdots \frac{\alpha_i}{\alpha_i} \cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i}) p_i x_i = m \tag{7}$$

$$(\frac{\alpha_1}{\alpha_j} + \frac{\alpha_2}{\alpha_j} + \cdots \frac{\alpha_j}{\alpha_j} \cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_j}) p_j x_j = m \tag{8}$$

$$(\frac{\alpha_1}{\alpha_n} + \frac{\alpha_2}{\alpha_n} + \cdots \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_n}) p_n x_n = m \tag{9}$$

整理为马歇尔需求函数:

$$x_1(p, m) = \frac{m}{p_1(\frac{\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1})}$$

$$x_2(p, m) = \frac{m}{p_2(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_2})}$$

$$x_i(p, m) = \frac{m}{p_i(\frac{\alpha_1}{\alpha_i} + \cdots\cdots + \frac{\alpha_i}{\alpha_i} + \cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i})}$$

$$x_n(p, m) = \frac{m}{p_n(\frac{\alpha_1}{\alpha_n} + \frac{\alpha_2}{\alpha_n} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_n})}$$

由此可得：$x_i(p,m)=\dfrac{m}{\dfrac{p_i}{\alpha_i}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}=\dfrac{\alpha_i m}{p_i\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}$；因为 $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j=1$；所以 $x_i(p,m)=\dfrac{\alpha_i m}{p_i}$；

我们还可以通过对其效用函数进行单调变化，进而可方便的得出其马歇尔需求函数；

$$\ln u(x)=\ln A+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\ln x_i$$

（2）把上所得的马歇尔需求函数代入目标函数得间接效用函数：

$$v(p,m)=A\left(\frac{\alpha_1 m}{p_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2 m}{p_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\cdots\cdots\left(\frac{\alpha_n m}{p_n}\right)^{\alpha_n}=Am^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$；所以 $v(p,m)=Am\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}$

（3）因为间接效用函数和支出函数之间的关系为互为反函数，根据（2）的结论

$v(p,m)=Am\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{p_i}{\alpha_i}\right)^{-\alpha_i}$ 得支出函数：

$$e(p,u)=\left(\frac{u\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}}{A}\right)$$

（4）把支出函数两边取对数：

$$\ln e=\left\{\ln u-\ln A+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[\ln p_i-\ln\alpha_i\right]\right\}$$

对 p_i 求导：

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial e}{\partial p_i}=\frac{\alpha_i}{p_i}$$

根据谢泼特引理 $h_i(p,u)=\dfrac{\partial e(p,u(x))}{\partial p_i}$ 可知：

$$h_i(p,u)=e(p,u)\cdot\frac{\alpha_i}{p_i}=\frac{u}{A}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j}\cdot\prod_{j=i+1}^{n}\left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j}$$

$$(1\le i,j\le n)$$

（杰弗瑞 · A · 杰里　高级微观经济理论　第二版　上海财经大学出版社 p60）

8 $$\max_{x} = u(x)$$

$$s.t.\ m = p_1x_1 + p_2x_2$$

构造拉氏方程： $\psi(x,\lambda) = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{\alpha u(x)}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \frac{(1-\alpha)u(x)}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $x_1 = \frac{\alpha p_2x_2}{(1-\alpha)p_1}$； $x_2 = \frac{(1-\alpha)p_1x_1}{\alpha p_2}$

把上两式分别代入（3）式得马歇尔需求函数：

$$x_1 = \frac{\alpha m}{p_1}; \qquad x_2 = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}$$

把上所得的马歇尔需求函数代入目标函数得间接效用函数：

$$v(p,m) = Am\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha}$$

$$\min_{x} p_1x_1 + p_2x_2$$

$$s.t. \quad u(x) = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

构造拉氏方程： $\psi(x,\lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(u - Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha})$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = p_1 - \frac{\lambda\alpha u}{x_1} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = p_2 - \frac{\lambda(1-\alpha)u}{x_2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = u - Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} = 0 \quad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $x_1 = \frac{\alpha p_2x_2}{(1-\alpha)p_1}$； $x_2 = \frac{(1-\alpha)p_1x_1}{\alpha p_2}$

把上两式分别代入（3）式得希克斯需求函数：

$$h_1(p,u)=\frac{u}{A}\left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{1-\alpha};\qquad h_2(p,u)=\frac{u}{A}\left(\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}$$

把上所得的希克斯需求函数代入目标函数得支出函数：

$$e(p,u)=\frac{u}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha}P_1^{\alpha}P_2^{1-\alpha}$$

把上所得间接效用函数代入希克斯需求函数得马歇尔需求函数：

$$x_1(p,m)=\frac{A}{A}m\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}=\frac{\alpha m}{p_1}$$

$$x_2(p,m)=\frac{A}{A}m\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}=\frac{(1-\alpha)m}{p_2}$$

把上所得支出函数代入马歇尔需求函数得希克斯需求函数

$$h_1(p,u)=\frac{\alpha}{p_1}\frac{u}{A}p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha}=\frac{u}{A}\left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{1-\alpha}$$

$$h_2(p,u)=\frac{1-\alpha}{p_2}\frac{u}{A}p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha}=\frac{u}{A}\left(\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}$$

由此可知马歇尔需求函数和希克斯需求函数是从不同的角度来表达的同一事物。

9 因为希克斯需求函数是指在保持一定的效用水平的条件下，为实现所用收入最小化，对物品的需求。希克斯需求函数具有以下的性质：

$h_i(p,u)$ 是 P 的零次齐次函数：$t\ge 0; h_i(tp,u)=h_i(p,u)$；

$h_i(p,u)$ 是 P 的单减函数，如果它是可微的，则 $\dfrac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i}\le 0$；

如果 $h_i(p,u)$ 是可微的，则 $\dfrac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j}=\dfrac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i}$；

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p74-75）

根据以上的希克斯需求函数的性质，则题设不满足前两条，所以此说法不正确。

10 马歇尔需求函数在保持一定的收入水平的条件下，为达到效用最大化，对物品的需求。马歇尔需求函数具有以下的性质：

$x_i(p,m)$ 是 P，m 的零次齐次函数：$t\ge 0; x_i(tp,tm)=x_i(p,m)$；

满足瓦尔拉斯定律，即 $\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot x(p,m)=m$；

具有凸性（唯一性）；

（邹薇 高级微观经济学 武汉大学出版社

$$\frac{\partial x_1^2(p,m)}{\partial p_1^2}=-\frac{4m(p_1^2+p_2^2)(3p_2^2-p_1^2)}{(p_1^2+p_2^2)^4}$$

要使得 $x_1(p,m)$ 具有凸性，必须满足 $\frac{\partial x_1^2(p,m)}{\partial p_1^2}>0$；从上式可知，只有当 $3p_2^2<p_1^2$ 时，才能满足这一性质；

> 需求法则：如果一种商品的需求随着收入的增加而增加，那么这种商品的需求一定随着价格的上升而下降；
>
> （范里安 微观经济学：现代观点 三联书店 p184）

因为 $\frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m}=\frac{2p_1}{(p_1^2+p_2^2)^2}>0$；所以我们可推知 $x_1(p,m)$ 为正常品；

而 $\frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_1}=\frac{2m(p_2^2-p_1^2)}{(p_1^2+p_2^2)^2}$；只有当 $p_1\geq p_2$ 时，才能满足需求法则；

综上所述，$x_2(p,m)=\frac{2p_1^2\cdot m}{p_1^2+p_2^2}$ 不能成为一个马歇尔需求函数；

第三讲

1 当 $\frac{\partial x}{\partial m}<0$ 时，则 X 为劣质品。而又因为消费者是为了追求效用最大化；所以他会把所有的收入都消费在各种商品上，再根据恩格尔加总法则：

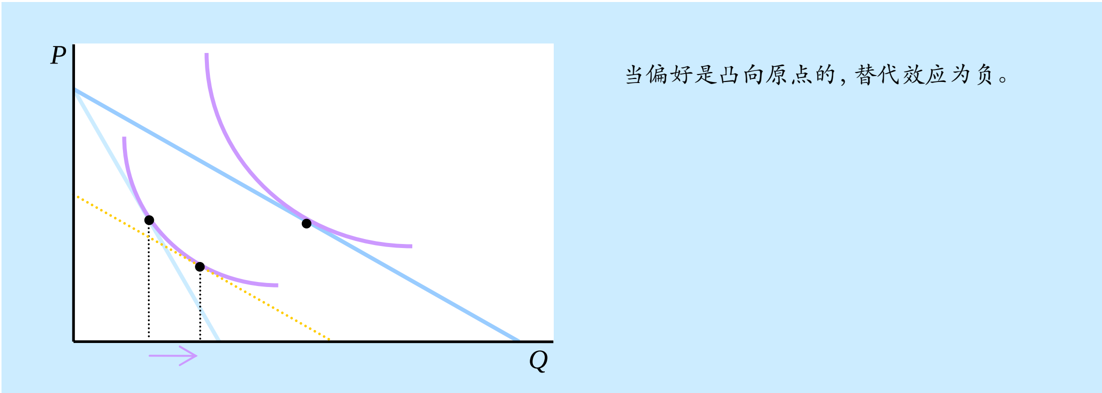
$$m=p_1\cdot x_1(p,m)+p_2\cdot x_2(p,m)$$

两边对 m 求导：
$$1=p_1\cdot\frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m}+p_2\cdot\frac{\partial x_2(p,m)}{\partial m}$$

要使上式成立，要满足至少有一个 $\frac{\partial x_i}{\partial m}>0$；所以，两种商品不可能同时为劣质品。

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p143）

2 首先要根据十八讲课本的思路先精确一下题目，题目所说的是如果偏好是凹向原点的，替代效应仍然为负的吗？



为了充分地分析这类问题，我们先从偏好是凸向原点开始，根据支出函数的性质：①$e(p,u)$ 对价格 p 是非递减的;②$e(p,u)$ 对价格 p 是一次齐次的；③$e(p,u)$ 是凹的;⋯

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p111）

而对于希克斯需求函数的性质：

①$h(p,u)$ 对价格 p 是单减的；②$h(p,u)$ 对价格 p 是一次齐次的；

③如果 $h(p,u)$ 可微，则有：$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j}=\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i}$

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p75）

我们应受到提醒的是，这都是在偏好为凸性的假设前提下推出的性质；

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p101）

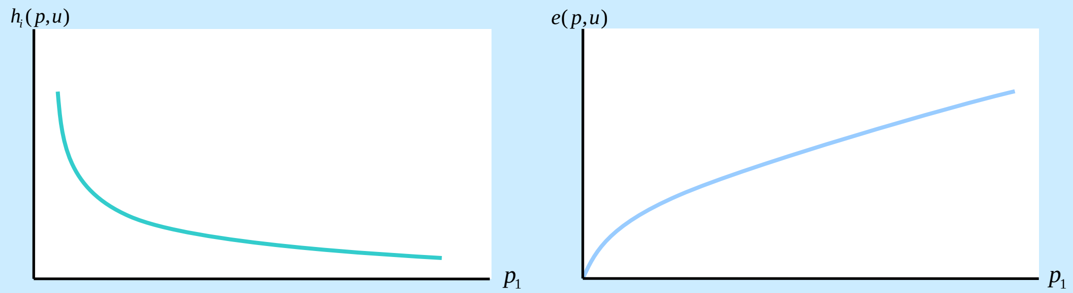
（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p65-66）

注意这里所谓的 $e(p,u)$ 是凹的是指以 p 为横轴，以 h 为纵轴的空间内是凹向原点的。又根据谢泼特引理和斯拉茨基方程的替代效应有：

$$h_i(p,u)=\frac{\partial e(p,u(x))}{\partial p_i};\qquad \frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i}=\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i^2};$$

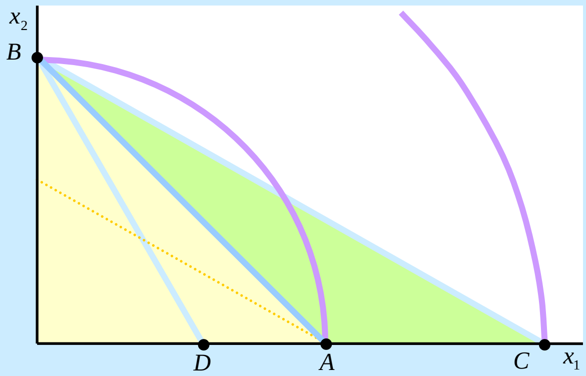
又因为 $e(p,u)$ 是凹向原点的（通过下图可看出），所以 $\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i^2}\le 0$

综上所述，当偏好是凸向原点的，替代效应为负。



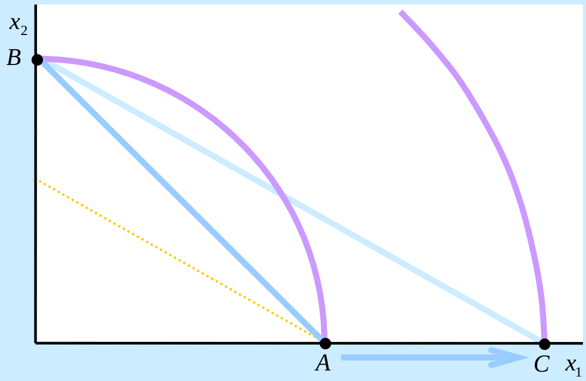
为了进一步确认，我们以$u(x)=x_1x_2$为消费者的追求目标，所得到的希克斯需求函数和支出函数后，所做的坐标图。

现在，在我们分析偏好是凹向原点时的替代效应，但它却是另一回事：

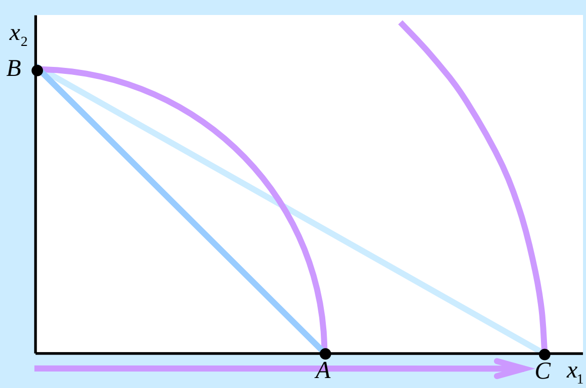


由于其效用曲线为凹性，所以此消费者的最优选择为角解（即把收入不是全部用来消费x_1，就是全用来消费x_2）；而当价格二不变，价格一变化时，预算线总会经过某一点使得消费者在两种商品之间消费是无所谓的；

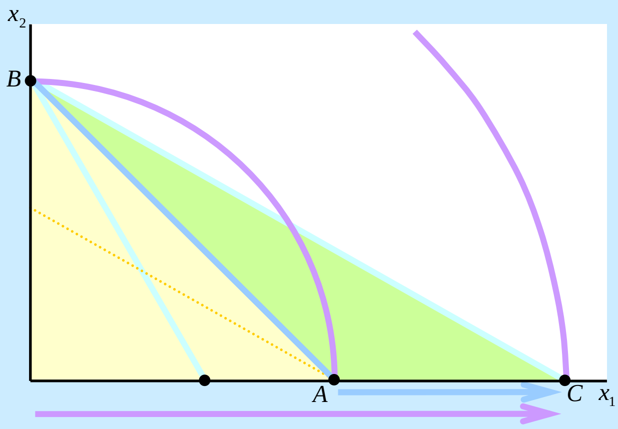
当预算线在黄色区域晃动时，消费者会全用来消费x_2，而当预算线在绿色区域晃动时，消费者会全用来消费x_1；



假设消费者最初选择 A 点消费，当预算线由 AB 变动到 BC 时，最终他会选择 C 点消费；总效应为 AC；而替代效应为零（我们可以经过 A 点做 AC 的平行线，发现消费者并没有改变其选择；所以替代效应为零）；其总效应等于收入效应；



而假设消费者最初选择 B 点消费时，当预算线由 AB 变动到 BC，最终他会选择 C 点消费；总效应为 OC；而替代效应也为 OC（因为在价格变化后，无论是 B 点还是 C 点都经过同一条预算线，所以价格的变化并没有带来实际购买力增多，所以其收入效应为零）；其总效应等于替代效应；



因为效用曲线为凹向原点的，所以消费者的最优选择为角解，在这我们应再来区分一下替代效应（当收入保持不变，而相对价格变化时，需求量的变化量）与收入效应（当相对价格保持不变，而收入变化时，需求量的变化量）的概念。当预算线由 AB 变动到 BC 时，其最终的选择为 C；而如果最初选择为 B，则替代效应（等于总效应）为负；但如最初选择为 A，则替代效应为零；总而言之，其替代效应非正。

此外，当价格 p_1 变化在前后不经过点 A 时，消费者是不会改变自己的选择，此时的总效应为零；也就是说，当价格在变化前后经过点 A 时，总效应为负；当价格在变化前后经过 A 点时，则总效应的起点或终点应从 A 点开始或结束；这相当于预算线 AB 为一个“临界”状态。

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p193）

我当时做这题，一度被 (1) 在 x_1, x_2 空间内的等效用曲线是凹向原点的；(2) 而在 e, p 空间内的 $e(p,u)$ 曲线是凸向原点的；这两点所迷惑。我也知道这答案与瓦里安 微观经济学 现代观点 p788 上的答案不一致，但我坚持自己的观点

（突破！突破！错也要错得轰轰烈烈!）

3（1） $x(p,m)=10+\dfrac{120}{10\times 3}=14$ ； $x(p',m)=10+\dfrac{120}{10\times 2}=16$

总效应为： $\Delta x = x(p',m)-x(p,m)=16-14=2$

（2）为了计算替代效应，首先要保持消费者的原有消费水平：

$$\Delta m=\Delta p x=(2-3)\times 14=-14\,; \qquad x(p',m')=10+\frac{120-14}{10\times 2}=15.3$$

则替代效应为： $\Delta x^s = x(p',m')-x(p,m)=15.3-14=1.3$

（3）收入效应为： $\Delta x^n=\Delta x-\Delta x^s=2-15.3=0.7$

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p175-177）

4（1）由效应最大化所得到的马歇尔需求函数和间接效应函数：

$$x_1(p,m)=\frac{2m}{3p_1};x_2(p,m)=\frac{m}{3p_2};v(p,m)=\frac{4m^3}{27p_1^2p_2}$$

由支出最小化所得到的希克斯需求函数：

$$h_1(p,u)=\left(\frac{2up_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta x = x(p',m)-x(p,m)=\frac{2\times 24}{3\times 2}-\frac{2\times 24}{3\times 1}=-8$$

$$\Delta m=\Delta p\cdot x=(2-1)\times 16=16$$

$$\Delta x^s = x(p',m') - x(p,m) = \frac{2\times(24+16)}{3\times 2} - \frac{2\times 24}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\Delta x^n = \Delta x - \Delta x^s = -\frac{24}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$$

综上所述，总效用为-8，替代效应为-8/3，收入效应为-16/3。

（2）另一种求解方法：

$$\Delta x_j \approx \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i}\Delta p_i = \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i}\Delta p_i - \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} x_i(p,m)\Delta p_i$$

$$\frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_1} = -\frac{2m}{3p_1^2}; \quad \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m} = \frac{2}{3p_1}; \quad \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_1} = -\frac{(2up_2)^{\frac{1}{3}} p_1^{-\frac{4}{3}}}{3}$$

$$\frac{\partial h_1(p,v(p,m))}{\partial p_1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{8m^3 p_2}{27p_1^2 p_2}\right)^{\frac{1}{3}} p_1^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2m}{9p_1^2};$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \left(\frac{\partial x_1}{\partial m}\right) x_1(p,m) = -\frac{2m}{9p_1^2} - \frac{2}{3p_1}\frac{2m}{3p_1} = -\frac{2m}{3p_1^2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1};$$

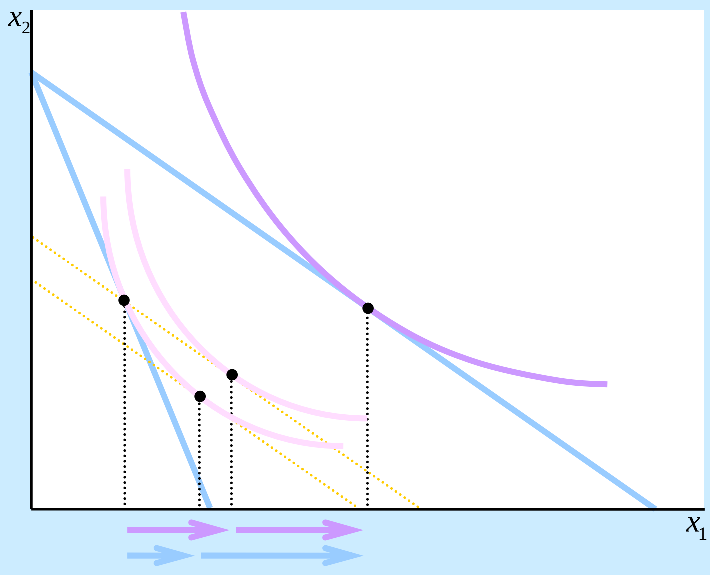
其中 $\Delta x_1 \approx \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_1}\Delta p_1 = -\frac{6m}{9p_1^2}\Delta p_1 = -\frac{6\times 24}{9}(2-1) = -16$ 为总效用；

$\frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_1}\Delta p_1 = -\frac{2m}{9p_1^2}\Delta p_1 = -\frac{2\times 24}{9}(2-1) = -\frac{16}{3}$ 为替代效应；

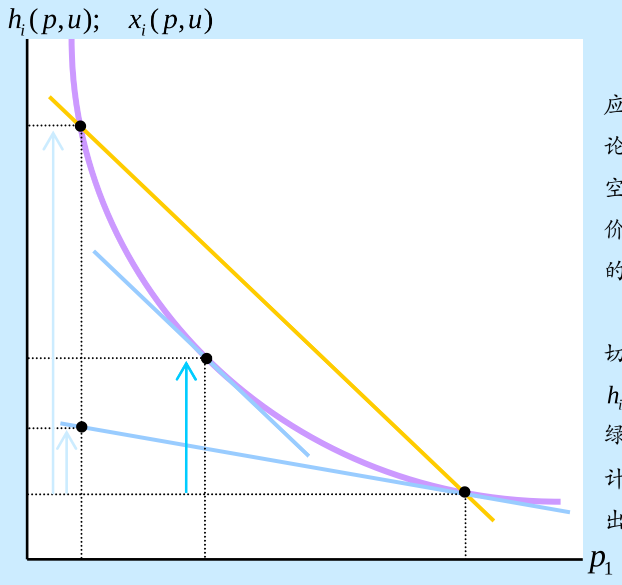
$-\frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m} x_1(p,m)\Delta p_1 = -\frac{2}{3p_1}\frac{2m}{3p_1} = -\frac{32}{3}$ 为收入效应。

（其思路为 瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p126-130）

进一步提问：为什么第一种解法和第二种解法的答案会不一致?



由图中可知，第一种解法是以保持消费水平不变的条件得出的（斯拉茨基替代效应），在图中是以绿箭头所表示；而第二种解法是以保持效用水平不变的条件得出的（希克斯替代效应），在图中是以蓝箭头所表示。虽然这两种解法所得的总效应是一致。



运用第二种解法所得的总效用，替代效应、收入效应是不确切的，因为严格的说无论是马歇尔需求函数还是希克斯需求函数在空间内都不是一条直线，而是一条曲线。在价格变化过程中其斜率也都是在不断的变化的，

纵轴为 $h_i(p,u); x_i(p,u)$ 时，当 p_1 变化，确切的效用应为蓝箭头，而以初始的 $h_i(p,u); x_i(p,u)$ 的斜率所计算的效应则为短绿箭头；以终点的 $h_i(p,u); x_i(p,u)$ 的斜率所计算的效应则为长绿箭头。由此，我们可看出后两种效应是不确切的。

（此问题困扰着我长达两天之久，是最后才想到了曲率）

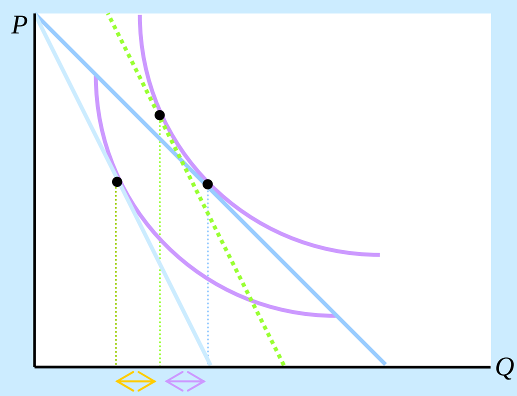
（3）还有一种更为简便的方法：

$$\begin{aligned} &Max \quad U(x_1,x_2)=x_1^2x_2 \\ &s\cdot t\cdot \quad m=p_1x_1+p_2x_2 \end{aligned}$$

其马歇尔需求函数为： $x_1(p,m)=\dfrac{2m}{3p_1}; x_2(p,m)=\dfrac{m}{3p_2}$

禀赋为： $x_1=16; x_2=8; U=8\cdot 16^2$

当价格变化后，把 $p_1'=2$ 代入 $x_1(p,m)=2m/(3p_1)$；我们会得到 $x_1'=8$，进而我们可得出总效应为： -8；



$$\begin{aligned} &Min \quad p_1x_1+p_2x_2 \\ &s\cdot t\cdot \quad U(x_1,x_2)=x_1^2x_2 \end{aligned}$$

其希克斯需求函数为： $h_1(p,U)=\left(\dfrac{2Up_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{3}}$； $h_2(p,U)=\left(\dfrac{Up_1^2}{4p_2^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

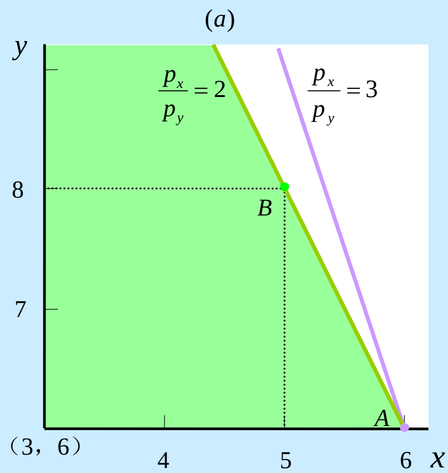
把$U=8\cdot16^2$代入希克斯需求函数，我们同样可以得到：$x_1=16;x_2=8$；而当我们根据希克斯替代效应的概念，我们把$p_1'=2$代入$h_1(p,U)=(2Up_2/p_1)^{\frac{1}{3}}$，我们得到$h_1=8\cdot\sqrt[3]{4}$；

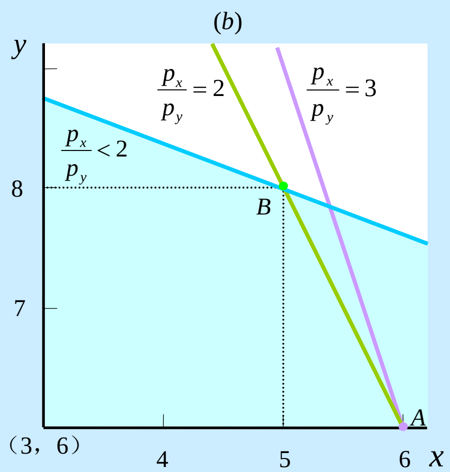
进而可以得出希克斯替代效应：$8\cdot\sqrt[3]{4}-16$，而收入效应为$8-8\cdot\sqrt[3]{4}$。

(4)恩格尔加总法则是指需求的收入弹性与收入的份额之积的所有消费品之和等于1：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i}\frac{m}{x_i}\frac{p_i x_i}{m}=\left(\frac{2m}{3p_1}\right)'_{p_1}\frac{3p_1 m}{2m}\frac{2mp_1}{3mp_1}+\left(\frac{m}{3p_2}\right)'_{p_2}\frac{3mp_2}{m}\frac{mp_2}{3mp_2}=1$$

5 这题实际上考的是变动后的预算线是否包含了初始选择点，即 A（6，6）。原有的预算线斜率$-p_x/p_y=-3$，这线是包含了 B 点，根据偏好弱公理，消费者选择 A，价格改变后要使经过 B 点的预算线不包含 A 点，则必须经过 B 的预算线的斜率的绝对值大于 2，即$p_x/p_y>2$。如（c）图中的经过 B 点的黄线。所以，此答案应为（1）。



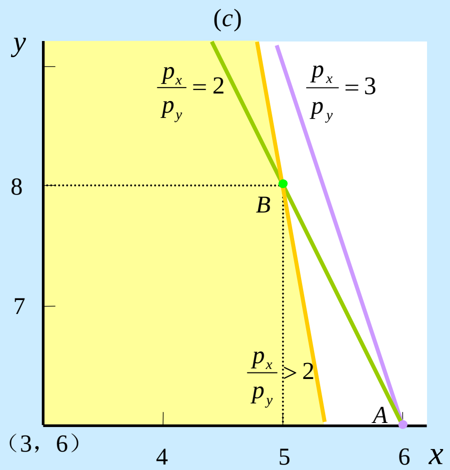


初始的预算线的斜率为-3，我们假设现在这个混蛋是选择了 A 的消费束，然后，我们赋予不同的价格来看看他的选择是否合理；

在（a）图中，我们假设有一条贯穿 A、B 两点的预算线，当我们连接后发现斜率为-2；这时他的选择是不可靠的，这意味着当价格变化后，他却选择了原来本可选择但被他放弃了的消费束，如果他果真这样做了的话，那么他的确是一个不折不扣的混蛋。

在（b）图中，当两商品的价格比小于 2 时，经过 B 点的预算线包含了 A 点，此时，如果他选择 B 点的话，我们不相信他的理由与在（a）图中一致；

在（c）图中，当两商品的价格比大于 2 时，经过 B 点的预算线没有包含 A 点，这时， 这混蛋的行为符合显示偏好弱公理。



6 首先要区分两种商品，当 $\frac{\partial x}{\partial m}<0$ 为劣质品；当 $\frac{\partial x}{\partial m}>0$ 为正常品。根据题设，x 不变，p_x 上升，则必然 X 的消费所占收入份额增大；又由于收入 M 不变（因为题设未提及，所以假定不变），那么 Y 消费所占收入份额必减少；又 p_y 上升，得出消费品一定减少。这等同于消费者把全部的收入用于 Y 消费，现在收入 M 下降，而 p_y 上升，则使 Y 得下降。综上所述，$\frac{\partial x}{\partial m}>0$,所以为正常品。答案为（*1*）。

7（1） $p(Q)=\left(\frac{A}{Q}\right)^{\frac{1}{\in}}$

（2） $\in_p=\left|\frac{dQ}{dp}\frac{p}{Q}\right|=\left|-\frac{\in Ap^{-\in-1}p}{Ap^{-\in}}\right|=\in$

（3） $|\in|>1$ 时称为有弹性；$|\in|<1$ 时称为无弹性

（4） $R=pQ=\left(\frac{A}{Q}\right)^{\frac{1}{\in}}Q$,则 $MR=\left(1-\frac{1}{\in}\right)\left(\frac{A}{Q}\right)^{\frac{1}{\in}}$； $\frac{p(Q)}{MR(Q)}=\frac{p(Q)}{\left(1-\frac{1}{\in}\right)p(Q)}=\frac{\in}{\in-1}$

由 $\frac{p(Q)}{MR(Q)}=\frac{\in}{\in-1}$ 可看出其值没包含产出，因此它是独立于产出的。

8（1） $\in_p=\left|\frac{dQ}{dp}\frac{p}{Q}\right|$ 因为需求曲线是一条直线，这只能保证其斜率 $\frac{dQ}{dp}$ 不变，但直线上的点对于 $\frac{p}{Q}$ 的值是随点变化的，所以 $\in_p$ 为变动的。

（2) 马歇尔需求函数具有 $x_i(p,m)$ 是 P, m 的零次齐次函数：$t\geq 0; x_i(tp,tm)=x_i(p,m)$ 的性质，所以题目的命题正确。

9 当 $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}>0$，则 x_1 是 x_2 的总替代品。但 x_1 是 x_2 的总替代品，则反之不一定成立，在这要区分一下，所谓的希克斯净替代和总替代，希克斯净替代是对称的，即当 x_1 是 x_2 的替代品，则 x_2 为 x_1 的替代品。但总替代是非对称的，这是相对于马歇尔需求而言的，因为其中还包括了收入效应。

（微观经济学十八讲　平新乔　北大出版社 P37-38）

10 如果提价，在缺乏价格弹性的区域，销售会减少，收益将上升：

$$R=pq$$

$$R' = (p + \Delta p)(q + \Delta q) = p \cdot \Delta q + \Delta p \cdot q + \Delta p \cdot \Delta q$$

$$R' - R = p \cdot \Delta q + \Delta p \cdot q + \Delta p \cdot \Delta q$$

$$R' - R = p \cdot \Delta q + \Delta p \cdot q$$ （最后一项忽略不计）

在原有的基础上,价格的增量与价格变化前的销售量的乘积大于产量减少与变化前的价格（因为缺乏价格弹性）则 ΔR 上升，而销售量的减少至少不会增加成本，则利润会增大。

另有，收益关于价格的关系式 $\Delta R/\Delta P = q\left[1-\left|\in_p\right|\right]$，由此可知，厂商决不会把价格定在缺乏价格弹性的区域。

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p337-339）

11（1）因为一个理性的效用者，未必一定会得出一个在空间上凸向原点的效用函数，例如，我喜欢冰棍和汽水，但我不喜欢二者同时消费，这就可得出一条凹向原点的效用函数，由本讲第二题可知，替代效应是非负的。

（2）
$$\max_x \quad u(x)$$
$$s.t.\ m = p_1x_1 + p_2x_2$$

可得出马歇尔需求函数：

$$x_1 = \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1}; \qquad x_2 = \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_2}$$

$$\in_{1,2} = \left|\frac{dx_1}{dp_2}\frac{p_2}{x_1}\right| = \left|\left[d\left(\frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1}\right)\Big/ dp_2\right]\cdot\frac{p_2}{x_1}\right| = 0$$

12 当 $\partial x/\partial p_x > 0$ 时，则 X 为吉芬品。这种商品只是存在于处在温饱边缘的商品。让我们改变一下思路，我很穷，每月我必须要 90 斤的土豆才能对付肚子，而每斤土豆为 2 元，则我每月的开销为 180 元。但现在土豆的价格下降到每斤为 1 元，我就有剩余的钱来改善生活，我每顿可用土豆加牛肉搭配，这样每月我就可消费 70 元的土豆和 110 元的牛肉，其中 110 元的牛肉代替了 20 元的土豆。从这可看出土豆是吉芬品，$\partial x/\partial p_x > 0$，而题目是反过来问的，命题是正确的。

用吉芬品的定义也可得出收入一定，其他商品的价格不变，则当吉芬品的价格上升时，吉芬品所占收入的份额上升，进而其他商品所占收入的份额下降，又其他商品的价格和收入不变，则其他商品的需求量必定减少。

14 消费者的选择是不符合显性偏好弱公理的，因为根据显性偏好弱公理的假设条件，若消费者是理性的，则在最优选择上必定会花尽手中的钱。而此时，此人只用了 $p_1'x_1' + p_2'x_2' = 3\times18 + 5\times4 = 74$ 元，他完全可以消费到更多的 x_2 和 x_1，所以，此人的行为不符合显性偏好弱公理。

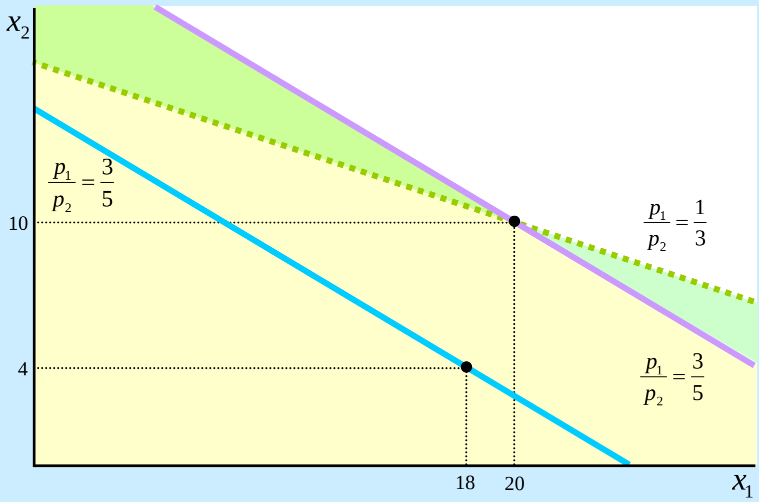
以上的做法对吗?

首先是对假设条件的误解，其的意思是指：当消费者选择后，我们都认为他

了所有的收入（而不是价格变化前后的收入一定要相等）；

价格变化前：
$$p_1x_1^A + p_2x_2^A > p_1x_1^B + p_2x_2^B$$
$$2\times 20+6\times 10=100>2\times 18+6\times 4=60$$

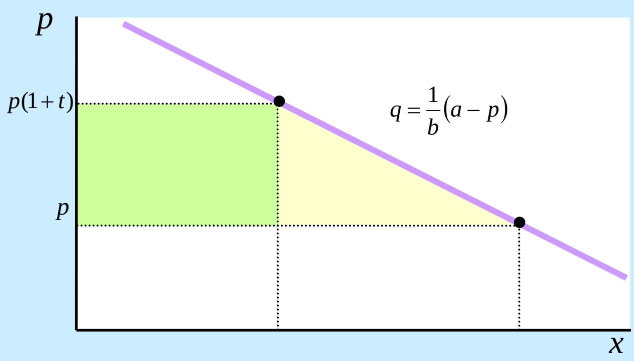
价格变化后：
$$p_1'x_1^A + p_2'x_2^A > p_1'x_1^B + p_2'x_2^B$$
$$3\times 20+5\times 10=110>3\times 18+5\times 4=74$$



在图中，绿预算线为价格改变之前的预算线，蓝预算线为价格改变之后的预算线，紫预算线为蓝预算线平移到禀赋点的平行线。

由以上计算，我们可知消费者在价格变化前后的选择是一致的，所以，他的行为符合弱公理。

15



在图中更为直观，税收收入为矩形的面积，社会损失为三角形的面积，消费者剩余损失为矩形和三角形的面积。

需求函数为：
$$q=\frac{1}{b}(a-p)$$

消费者剩余损失为：
$$\frac{1}{b}\int_p^{p(1+t)}(a-p)dp=\frac{tp}{b}(a-p-\frac{1}{2}pt)$$

税收收入为：
$$\frac{tp}{b}\big(a-p(1+t)\big)=\frac{tp}{b}(a-(1+t)p)$$

社会损失=消费者剩余损失-税收收入=$\frac{t^2p^2}{2b}$

13
$$\min_x p_1x_1 + p_2x_2$$

$$s.t. \quad u(x) = x_1^r x_2$$

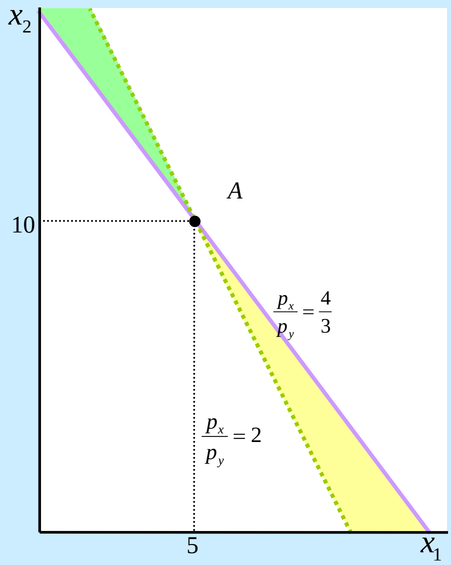
构造拉氏方程： $\psi(x,\lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(u - x_1^r x_2)$

得希克斯需求函数： $h_1(p,u) = \left(\frac{rup_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{r+1}}$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = -\frac{1}{r+1}\frac{h_1(p,u)}{p_1}; \qquad \frac{\partial h_1}{\partial p_2} = \frac{1}{r+1}\frac{h_1(p,u)}{p_2}$$

则： $\frac{\partial h_1}{\partial p_1}\cdot p_1 + \frac{\partial h_1}{\partial p_2}\cdot p_2 = 0$

16



在价格变化前后，两条预算线一定经过禀赋点，所以，消费者在此消费束上的生活水平在价格改变前后是不变的。

但如果此消费者手中有 100 元，并且在价格变化后才开始消费，他的消费束落在黄色区域内（确切的说，黄色区域的紫边缘），或他的消费束落在 A 点上的话，则他的行为符合弱公理；

如他的消费束落在绿色区域的紫边缘，则他的行为不符合弱公理。

补偿变化（Compensating Variation）与等值变化（Equivalent Variation）

1、定义：

设 $v(p,m)$ 为间接效用函数；$e(p,u)$ 为支出函数；$h(p,u)$ 为希克斯需求函数；初始价格为 p^O，终止价格为 p^I，消费者的收入为 m；

$$u^O = v(p^O, m); \quad u^I = v(p^I, m); \quad e^O(p^O, u^O) = e^I(p^I, u^I) = m$$

$$CV(p^O, p^I, m) = e(p^I, u^I) - e(p^I, u^O) = m - e(p^I, u^O)$$

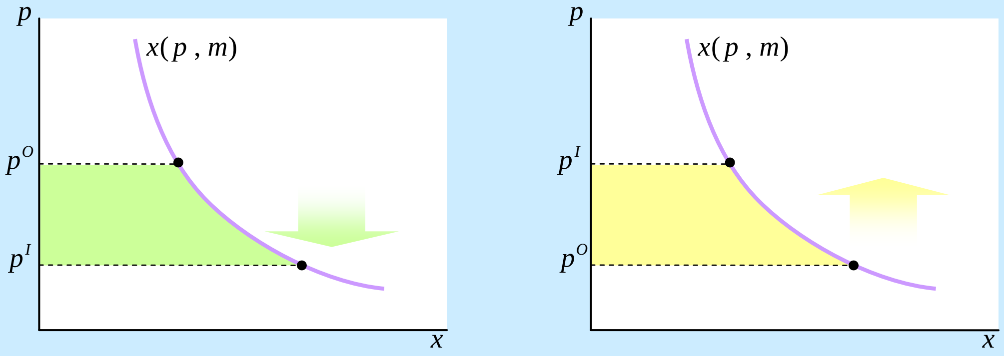
$$EV(p^O, p^I, m) = e(p^O, u^I) - e(p^O, u^O) = e(p^O, u^I) - m$$

设商品 1 的价格发生变化（由 p_1^O 变化到 p_1^I），而其他商品的价格均不变（记为 $\overline{p}_{-1}$，这里的下标表示除了商品 1 以外的所有其他商品）。则：

$$CV(p^O, p^I, m) = \int_{p^I}^{p^O} h(p_1, \overline{p}_{-1}, u^O)dp_1$$

$$EV(p^O, p^I, m) = \int_{p^I}^{p^O} h(p_1, \overline{p}_{-1}, u^I)dp_1$$

2、 “题外话”——增加、减少



在左图中，当价格下降时，消费者剩余是增加的；

在右图中，当价格上升时，消费者剩余是减少的；

如果我们规定方向，价格向下变化为正，而向上为负的话，虽然图中的绿色区域与黄色区域面积的绝对值相等，但绿色区域面积是大于黄色区域面积的。

3、关于定义中的上、下限

因为 $e^O(p^O, u^O) = e^I(p^I, u^I) = m$，所以：

$$CV(p^O, p^I, m) = e(p^I, u^I) - e(p^I, u^O) = e(p^O, u^O) - e(p^I, u^O)$$
$$EV(p^O, p^I, m) = e(p^O, u^I) - e(p^O, u^O) = e(p^O, u^I) - e(p^I, u^I)$$

又根据谢波特引理：$h_i(p,u) = \dfrac{\partial e}{\partial p_i}$

$$CV(p^O, p^I, m) = e(p^O, u^O) - e(p^I, u^O) = \int_{p^I}^{p^O} h(p_1, \overline{p}_{-1}, u^O)dp_1$$

$$EV(p^O, p^I, m) = e(p^O, u^I) - e(p^I, u^I) = \int_{p^I}^{p^O} h(p_1, \overline{p}_{-1}, u^I)dp_1$$

由上，我们可知其上、下限是由定义直接给出的，这是游戏规则。

4、关于补偿变化与等值变化的方向、区别

因为这两者很容易相混淆，所以首先来观察定义，看看我们会发现什么：

$$CV(p^O, p^I, m) = e(p^I, u^I) - e(p^I, u^O)$$
$$EV(p^O, p^I, m) = e(p^O, u^I) - e(p^O, u^O)$$

第一步：我们先解决是谁减去谁（方向）的问题。一旦我们把其定义凸出我们想要的重点时，我们就会发现其实两者是一致的；

$$CV(p^O, p^I, m) = e(\bigcirc, u^I) - e(\bigcirc, u^O)$$
$$EV(p^O, p^I, m) = e(\bigcirc, u^I) - e(\bigcirc, u^O)$$

其顺序，我们得出了：终止效用水平的支出与初始效用水平支出的差额；即变化后的东西减去变化前的东西；

第二步：我们要解决的是两者的区别。再来凸出我们想要的另一重点；因为，

$$CV(p^O, p^I, m) = \int_{p^I}^{p^O} h(p_1, \overline{p}_{-1}, u^O)dp_1 \qquad EV(p^O, p^I, m) = \int_{p^I}^{p^O} h(p_1, \overline{p}_{-1}, u^I)dp_1$$

$$CV(p^O, p^I, m) = \int_{p^I}^{p^O} h(\bigcirc, \bigcirc, u^O)dp_1 \qquad EV(p^O, p^I, m) = \int_{p^I}^{p^O} h(\bigcirc, \bigcirc, u^I)dp_1$$

其区别，我们也得出了：补偿变化是以初始价格水平为基准；

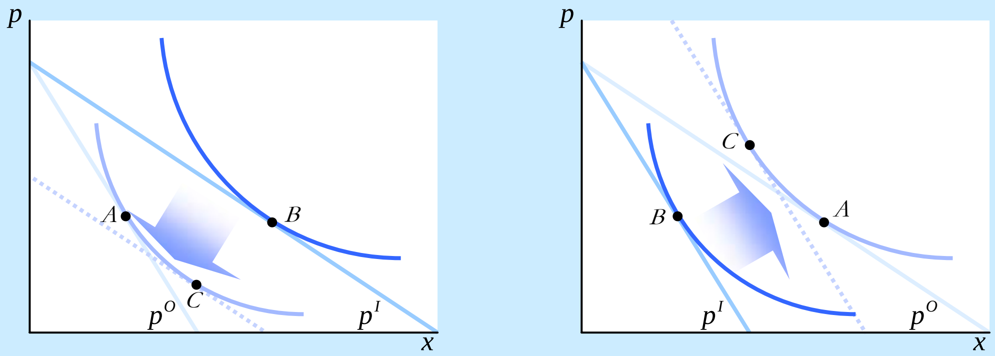
变化则是以变化后的价格水平为依据；

5、谁来为消费者的福利负责?

经济计划者（政府）对我们的福利负责，而事实上，等价变换与补偿变化都是从政府的角度来观察的，为了使得消费者的福利在价格变化前后保持不变，政府采取了两种做法：事前标准、事后标准。

当政府在改变相对价格时，以消费者在价格变化前的福利为标准，重新分配消费者的收入；被称为补偿变化（事前标准）；而以价格变化后的消费者福利为标准，重新分配消费者的财富，这就是所谓的等价变化（事后标准）。

6、希克斯替代效应与补偿变化

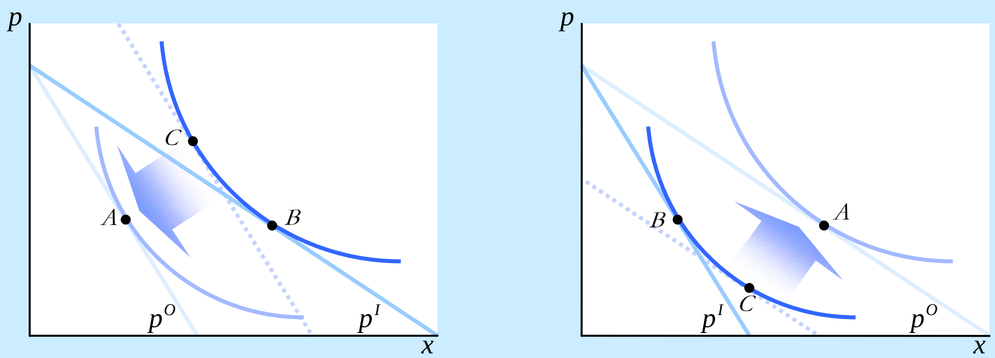


在左图中，当价格下降，（而在右图则是价格上升时的情况），由 C 点所代表的收入与 A 点的收入之间的差额为希克斯补偿；

补偿变化为 B 点收入与 C 点收入之间的差额；即以变化前的消费者效用水平为标准，政府在事后对消费者财富进行重新分配。两图的区别在于其方向不同。

在左图中，其补偿变化为正；而在右图中，其补偿变化为负。

7、等值变化



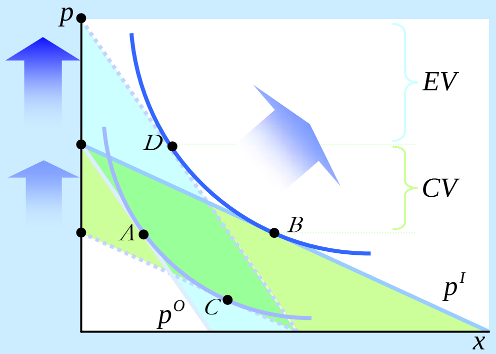
在左图中，当价格下降时，（而在右图则是价格上升时的情况）由 C 点所代表的收入与 A 点的收入之间的差额为等值变化；

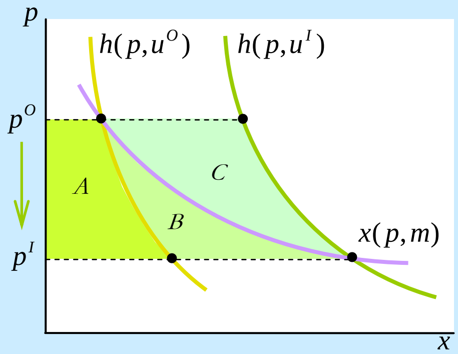
我们在这唯一试图强调的是：方向、角度；

等值变化的值等于 C 点的收入减去 A 点的收入，而不是相反；

以最终的效用水平为标准，在价格变化以前，重新分配消费者的财富，使得其效用达到标准效用；在左图中（等值变化为正），当价格下降时，使得效用水平最终会上升，于是需要补足一部分财富，而使得其效用达到标准效用水平；在右图中（等值变化为负），当价格上升时，其效用水平最终会下降，要从消费者身上抽取一部分的财富，使消费者达到价格变化后的效用水平；

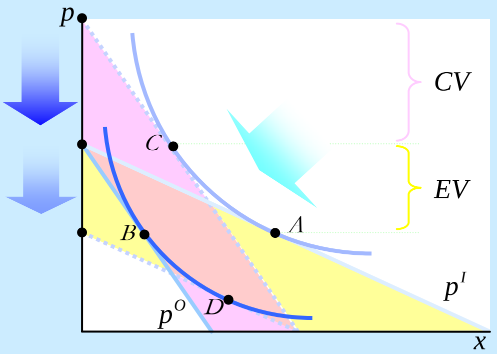
8、放在一起

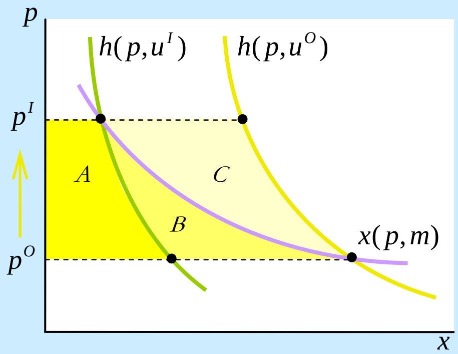




当价格下降时，最终会使得消费者的效用水平上升（正如我们在 2、“题外话”中所说的一样），在左图中，补偿变化（其值为正）等于 B 点所代表的收入与 C 点收入的差额；而等值变化（其值为正）等于 D 点的收入与 A 点收入的差额；

在右图中，补偿变化为 A 区域的面积；消费者剩余为 $A+B$ 区域的面积；等值变化为 $A+B+C$ 区域的面积；这些面积均为正值；并且，补偿变化＜消费者剩余＜等值变化；即 $CV<CS<EV$ 。

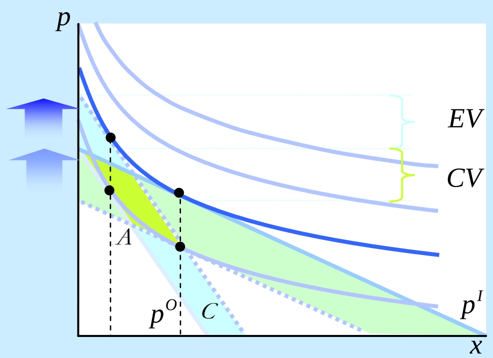




当价格上升时，最终会使得消费者的效用水平下降，在左图中，补偿变化（其值为负）等于 B 点所代表的收入与 C 点收入的差额；而等值变化（其值为负）等于 D 点的收入与 A 点收入的差额；

在右图中，补偿变化为 $A+B+C$ 区域的面积；消费者剩余为 $A+B$ 区域的面积；等值变化为 A 区域的面积；但，在这要值得注意的是这些面积均为负值（在右图中面积绝对值越大的则其值越小）；换句话说，我们同样可以得到：补偿变化＜消费者剩余＜等值变化；即 $CV<CS<EV$ 。

9、特殊情况——拟线形效用函数



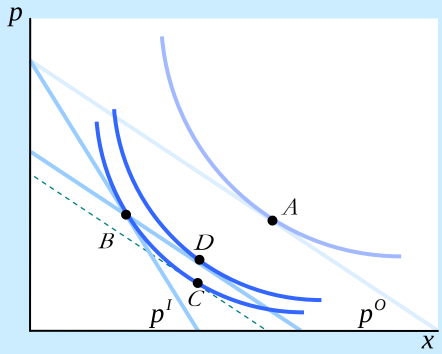
两种变化事实上只是测量两条无差异曲线某两点之间的垂直距离而已，在拟线形效用函数的情况下，两条无差异曲线之间的距离相等，而且某一商品的选择不会因为价格的变化而变化，如果我们针对的是这种商品的话，则其补偿变化与等值变化在量上是一致的；

10、一个经典的微观经济学问题

政府考虑对商品 1 征收商品税，$p_1^I = p_1^O + t$，而其他商品价格不变，由此

以得到的税收收入为$T=t\cdot x(p^I,m)$。还有一种方案：直接对消费者的财富征收一次性的所得税T（在数值上$T=t\cdot x(p^I,m)$），而不征收商品税。

问：消费者的福利在哪种征税方案下更好些?



消费者初始的预算约束为(假定其他商品的价格为1)：

$$p_1^O\cdot x_1+x_2=m$$

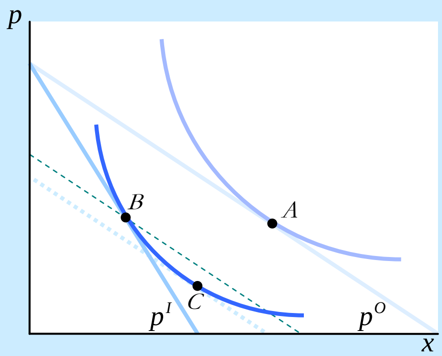
实行从量税对消费者预算约束的影响：

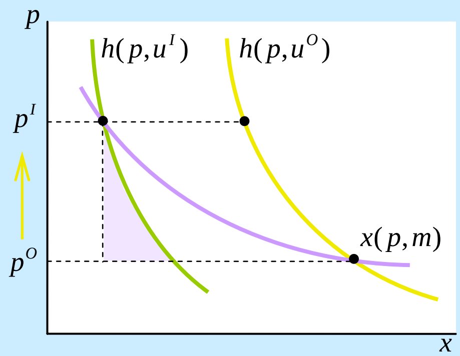
$$(p_1^O+t)\cdot x_1+x_2=m\ ; \qquad p_1^I\cdot x_1+x_2=m$$

实行所得税对消费者预算约束的影响：

$$p_1^O\cdot x_1+x_2=m-t\cdot x_1^*$$

从图中，我们可看出实行所得税的情况下，消费者的境况会更好一些。



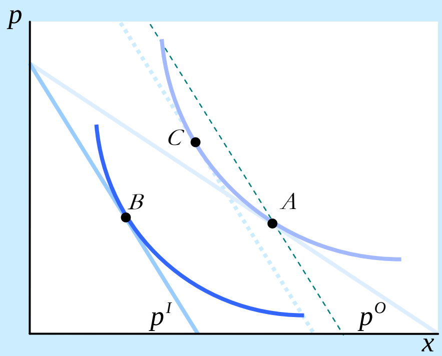


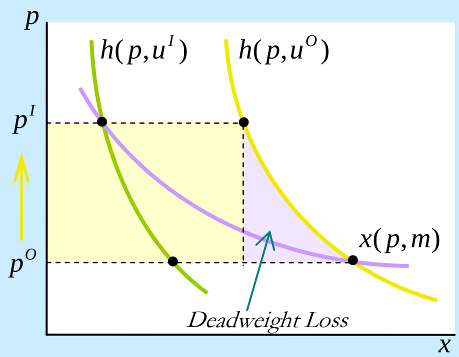
而当我们用EV来测量消费者福利的变化时；实行从量税就相当于从消费者手中抢去（A点的收入与C点收入差额的绝对值）这么多的收入；

B点的收入与C点收入差额的绝对值为*Deadweight Loss*；

Deadweight 的词义（1、something that is very heavy and difficult to carry；

2、someone or something that prevents you from making progress or being successful;）





第四讲

1 考察的是阿罗-帕拉特的绝对风险回避指数：$R_a(w) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$

由题设可知：$u'(w) = abe^{-bw}$；$u''(w) = -ab^2e^{-bw}$ 则 $R_a(w) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)} = b$

2 未必，其实 1 题就是一个很好的反例，其实，这是老生常谈的数学问题：一个函数的原函数是无穷多的；

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = c$$

则 $\dfrac{[u'(w)]'}{u'(w)} = \dfrac{du'(w)}{dw} \cdot \dfrac{1}{u'(w)} = -c$；即 $\dfrac{du'(w)}{u'(w)} = -c \cdot dw$

两边积分 $\ln[u'(w)] = -c \cdot w + C_1$

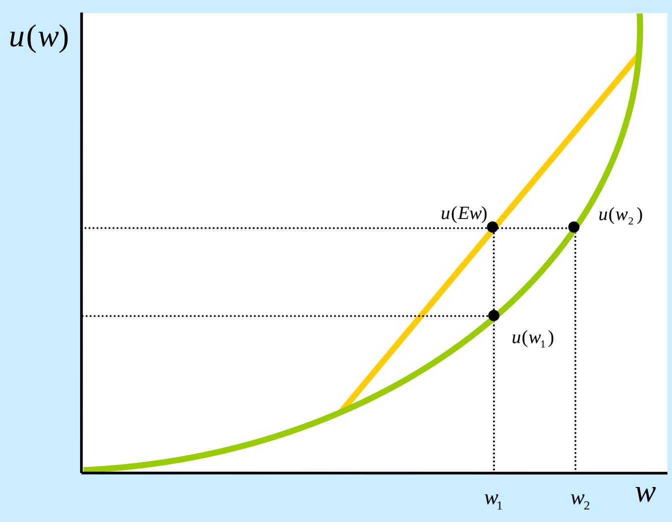
$$\frac{du(w)}{dw} = C_2 \cdot e^{-cw}$$

$$u(w) = -\frac{C_2}{c}e^{-cw} + C \Rightarrow u(w) = -Ce^{-cw} + C_3$$

（C_1、C_2、C_3 与 C 为任意常数）

在这里，我们要再次强调：在讨论消费者偏好时，我们只要求消费者能对所有的消费组合按偏好次序作出一致的排列，效用值本身不没有什么意义，通过单调变化，就可得出同一消费者的各种效用函数，所以，消费者的效用函数不是唯一的；

4 $$E(w) = \frac{1}{5} \times 900 + \frac{4}{5} \times 100 = 260$$



至于此人的效用函数，由题设可知，在同样的效用水平，其期望收入小于确定值收入；

也就是说，当期望收入等于确定值收入时，期望收入所带来的效用水平大于确定值收入所带来的效用水平，由此可知此人 为风险爱好者；

其效用函数只要满足 $u''(w) > 0$ 就行，如 $u(w) = w^2$ 等。

3 由题意：$u'(w) = 1 - 2\alpha w$；$u''(w) = -2\alpha$ 则阿罗-帕拉特的绝对风险回避指

$R_a(w)=-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}=\dfrac{2\alpha}{1-2\alpha w}$；$R_a{}'(w)=\dfrac{4\alpha^2}{(1-2\alpha w)^2}>0$，由此可知，阿罗-帕拉特的绝对风险回避指数是财富的严格增函数。

5 考察的是阿罗-帕拉特的绝对风险回避指数：$R_a(w)=-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$ 是否小于零

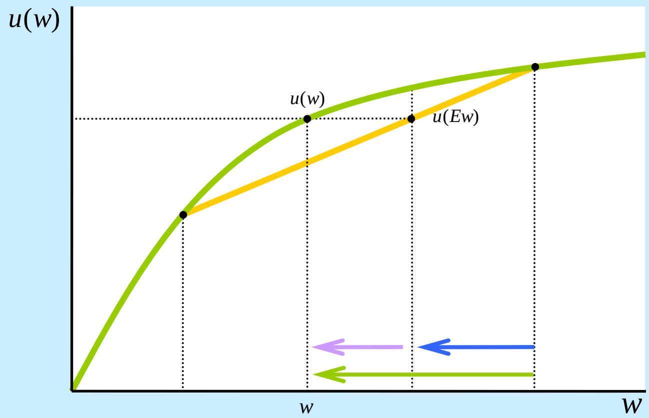
（1） $R_a(w)=-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}=-\dfrac{\beta-1}{w+\alpha}$；$R_a{}'(w)=\dfrac{\beta-1}{(w+\alpha)^2}<0$

（2） $R_a(w)=-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}=0$；

（3） $R_a(w)=-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}=\dfrac{1}{w+\alpha}$；$R_a{}'(w)=-\dfrac{1}{(w+\alpha)^2}<0$

（4） $R_a(w)=-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}=-\dfrac{2}{w}$；$R_a{}'(w)=\dfrac{2}{w^2}>0$

6



假定两场火灾是否发生是相互独立的，而且无论哪一场火灾发生，消费者只能购买一份保险，此消费者的主要的标准为效用。

但这主要说明的是，这时消费者先有投保的要求，而保险公司开始并没有提出索价。所以，消费者只能根据自己的期望效用来确定自己所能放弃的最大金额，而不是根据损失金额和火灾出现的概率的乘积的金额来做标准。

上图中的绿箭头为消费者愿意提供的最大金额，蓝箭头为保险公司的公平保险金额。紫箭头为保险公司所得的利润。

如果保险公司提供公平保险价格，整个社会得到了帕累托效用改进。

$$Eu=\frac{9}{10}\sqrt{160000}+\frac{1}{20}\left(\sqrt{90000}+\sqrt{40000}\right)=385$$

当此人购买保险时，他的标准为投保后的期望效用不小于之前的期望效用；即：

$$0.1\sqrt{160000-7620-R}+0.9\sqrt{160000-R}\ge 385$$

$$R\le 11004$$

由上可知，消费者愿意提供的最大金额为 11004 元。

进一步提问：如何求解方程?

首先，我们将方程改为：

$$0.1\sqrt{160000-7620-R}+0.9\sqrt{160000-R}=385$$

当我们放大方程左边时，即把$R+7620$看成R时，方程变为：

$$\sqrt{160000-R}>385;$$

此时，我们可得出： $R<11775$;

而当我们缩小方程左边时，即把R看成$R+7620$时，方程变为：

$$\sqrt{160000-7620-R}<385;$$

$$R>4155;$$

由上可知，R的取值范围： $4155<R<11775$;

现在，我们 “异想天开”的认为：

$$R^*=0.1\times 4155+0.9\times 11775=11013$$

当我们把$R^*=11013$代入方程得：

$$0.1\sqrt{160000-7620-R^*}+0.9\sqrt{160000-R^*}\approx 384.988$$

通过不断的捣鼓（其中一个简便的办法是把根号取整）；我们会得到其答案；

9 根据十八讲的 P58-59 的内容，我们可为 A,B,C,D 构造期望效用函数，有条件可知，

$$C\sim 0.08A+0.92D$$

$$u(A)=1;u(B)=0.4;u(C)=0.08;u(D)=0$$

7 设 $U_1=U(10000)$；$U_2=U(1000)$；$U_3=U(0)$

1 严格偏好于 2：$U_1+9U_2>2U_1+6U_2+2U_3$;

$$3U_2>U_1+2U_3$$

3 严格偏好于 4：$2U_1+6U_2+92U_3>U_1+9U_2+90U_3$;

$$3U_2<U_1+2U_3$$

由此，我们可知他的选择不是一致的；

12 如果此人参赌，那么他的期望效用最少要与不参赌时的效用一致，这是他的底线；

$$\pi\ln(w+x)+(1-\pi)\ln(w-x)=\ln w$$

对参赌额进行求导：
$$\frac{\pi}{w+x}=\frac{1-\pi}{w-x}$$
$$x=2\pi\cdot w-w$$

当$\pi=\dfrac{1}{2}$时，此人的参赌额为： $x=0$

另一种做法：

此消费者追求最大化 VNM 函数，其中 $x = x(\pi)$，从第一种做法，我们可知参赌额与获胜概率之间是存在联系的；这时，他是追求期望效用最大化，而不是只要 “保本”；这才是他的最优选择：

$$Max \quad \pi \ln(w + x(\pi)) + (1-\pi)\ln(w - x(\pi))$$

设 $W = w - x$；则 $w + x = W + 2x$；原式变为：

$$Max \quad \pi \ln(W + 2x(\pi)) + (1-\pi)\ln(W)$$

对求 π 一阶导，得：
$$\ln(W + 2x(\pi)) + \frac{2\pi x'(\pi)}{W + 2x(\pi)} - \ln(W) = 0$$

$$\ln \frac{W}{W + 2x(\pi)} = \frac{2\pi}{W + 2x}\frac{dx}{d\pi}$$

$$\frac{1}{W + 2x(\pi)} \ln \frac{W + 2x(\pi)}{W} dx = \frac{d\pi}{2\pi}$$

两边积分：
$$\int \frac{1}{W + 2x(\pi)} \ln \frac{W + 2x(\pi)}{W} dx = \int \frac{d\pi}{2\pi}$$

$$W + 2x(\pi) = \left| \frac{2c}{\ln \pi} \right|^{\frac{1}{2}}$$

把 $W = w - x$ 代入得：
$$w + x(\pi) = \left| \frac{2c}{\ln \pi} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$x(\pi) = \left| \frac{2c}{\ln \pi} \right|^{\frac{1}{2}} - w$$

因为当 $\pi = 0$ 时，消费者不会参赌，$x = 0$，当 $\pi = 1$ 时，消费者会把全部财产都赌上，$x = w$ 代入上式都不能解出 c，这是因为题目中没有给出初始值，所以在这里保留 c 或令 $c = 1$，则分别得出：

$$x(\pi) = \left| \frac{2c}{\ln \pi} \right|^{\frac{1}{2}} - w\,; \quad x(\pi) = \left| \frac{2}{\ln \pi} \right|^{\frac{1}{2}} - w$$

当 $\pi = \frac{1}{2}$ 时，代入得：

$$x(\pi) = \left| \frac{2c}{\ln \frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{2}} - w\,; \quad x(\pi) = \left| \frac{2}{\ln \frac{1}{2}} \right|^{\frac{1}{2}} - w \approx 1.7 - w$$

进一步提问：这个答案合理吗？

因为答案的第一项为常数，当 w 大于这个常数时，则 x 为负数；此负数绝对值的大小我们可理解为：表示此人不愿参赌的程度。由答案，我们可看出即使当 $\pi=\frac{1}{2}$ 时，此人也有可能不参赌，请想一想现实中所发生的情况。

（这道题困扰了我三天，三天之内什么书都没看进，如果直接解方程，到了 $\frac{w\pi-w-x}{w^2-x^2}x'=\ln\frac{w-x}{w+x}$，我无论如何都不能解出，其中，如果没有想到等价代换的话，也许还得自杀一回，好险，好险……）

8 由效用函数的性质可知，效用函数为消费束的非减函数，效用函数的比较可等价于期望收益的比较；设三种打赌的期望收入的变化量为：

$$E\Delta w_1=p_A(x-2)+(1-p_A)(-2)=p_Ax-2$$

$$E\Delta w_2=0$$

$$E\Delta w_3=p_B(x-2)+(1-p_B)(-2)=p_Bx-2$$

由题设的三种排列序，我们可知 $E\Delta w_1>E\Delta w_2>E\Delta w_3$。其中可知，$p_Ax-2>0$；$p_Bx-2<0$；又由 $0\le p\le 1$，$p_A+p_B=1$，解不等式得：$p_A>1/2$

（1）我们能得到 $p_A>p_B$，而且能得到 $p_A>1/2$；

(2) 消费者为风险回避者时，他会选择参与 A 的赌博，因为 $E\Delta w_1>E\Delta w_2>E\Delta w_3$ 由上可知，$p_Ax-2>0$，则 $p_Ax>2$。

进一步的问题：如果由多于两匹马的赛跑的话，重复课本的问题：

（1）我们只能得到 $p_A>p_B$，而不能得到 $p_A>1/2$；

（2）消费者为风险回避者时，他会选择参与 A 的赌博，因为 $E\Delta w_1>E\Delta w_2>E\Delta w_3$ 由上可知，$p_Ax-2>0$，则 $p_Ax>2$。

一、为什么不能确定其值？

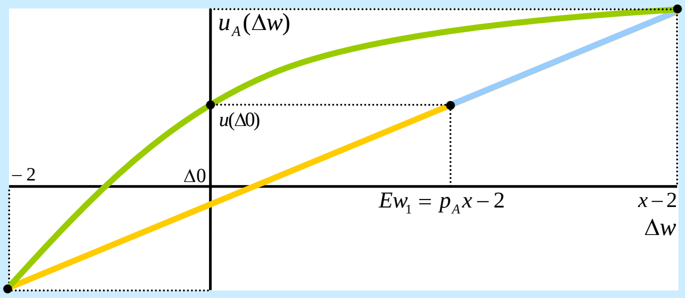
因为题中有三个未知数；但只有两个相关不等式，或者说只有一个含有两个未知数的不等式。

二、两匹马赛跑时，当 $p_Ax>2$ 时，消费者真的会参赌吗？

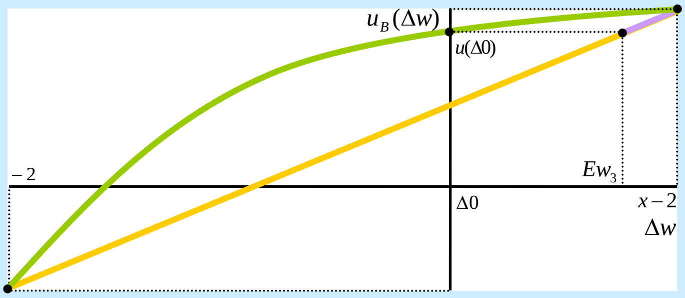
为了充分的搞清楚这个问题，我们首先要区分消费者的类型：

当消费者为风险回避者时

当李某人下注在*A*马上时：



当李某人下注在*B*马上时：



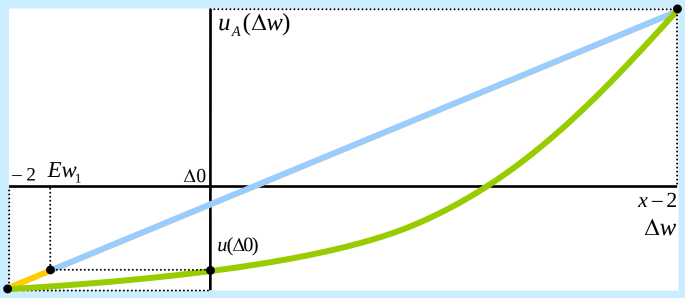
当概率为零时，其期望收益为-2；当概率为一时，其期望收益为x-2；

两图的区别在其概率不同，从而导致了纵轴的移动，当概率越大时，纵轴越靠左。

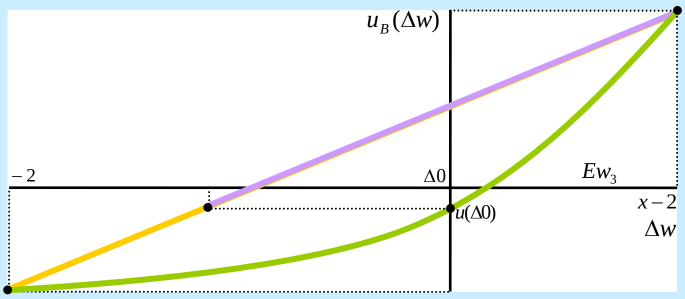
我们由上图可知，$E\Delta w_1$ 和 $E\Delta w_3$ 是分布在-2到X-2之间，只有期望效用大于不赌时的效用时，他才会参赌，这取决于P值和X；即当 $E\Delta w_i$ 与 $u(E\Delta w_i)$ 的组合分布在蓝线段或 $E\Delta w_3$ 与 $u(E\Delta w_3)$ 的组合是分布在紫线段时，他才会参赌。

当消费者为风险爱好者时

当李某人下注在*A*马上时：



当李某人下注在*B*马上时：



在这，我们需要清楚（效用函数的比较可等价于期望收益的比较）和（效用函数与期望收益的比较）之间的区别，前者只是定性分析，而后者之间的值则不能等额比较。

在图中的收益变动率为零时即 $\Delta 0$，并不代表 $u(\Delta 0)$ 或 $u(\Delta Ew = 0)$ 等于零，而当 $\Delta w > 0$ 时，并不代表一定有 $u(\Delta Ew > 0) > u(\Delta 0)$，只有当 $u(\Delta Ew) > u(\Delta 0)$ 时，消费者才会参赌（所以，我们应在图中画得尽量一般化一点，以免误导）。

大家可以画出当消费者为风险中性者时的图形。

由以上分析得：

$$u(\Delta Ew) > u(\Delta 0)$$

$$u(p_i x - 2) > u(\Delta 0)$$

$$p_i x > 2$$

（此题困扰着我长达二天之久，通过在不断写的过程中，灵感在不断的涌现。）

10 （1） $Eu(w) = 0.25\ln 80000 + 0.75\ln 100000 \approx 11.457139$

（2）根据需要函数可知，消费者为风险回避者；

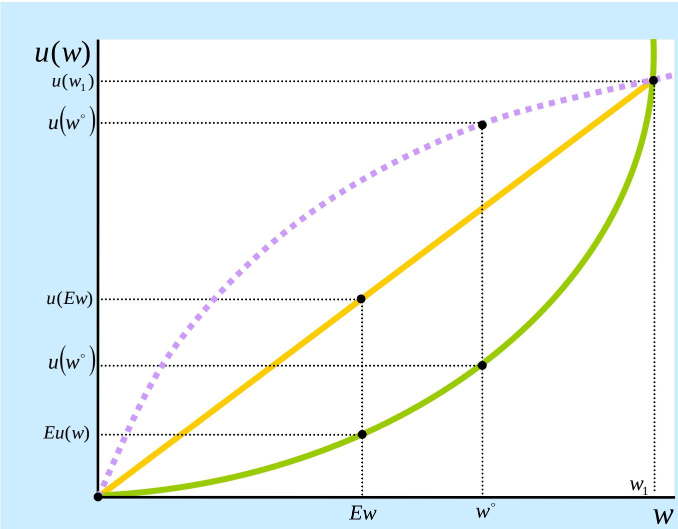
（3）根据（1）所得；$w = e^u = e^{11.457139} \approx 94574.106$;则消费者愿意最多支付的保险金额为：

$$100000 - 94574.106 = 5425.894$$

（4）公平保险费为 $25\% \times 20000 = 5000$ 元，保险公司的纯收入为：

$$5425.894 - 5000 = 425.894$$

11 （1）由效用函数的性质可知，效用函数为消费束的非减函数，由题设可知，当期望收益（所得货币）小于支付货币时，其期望收益（所得货币）的效用大于支付货币的效用，此时，此人为风险喜爱者。



当消费者购买下价值为 w° 的彩票时，他有 p 的概率获得 w_1 的财富；而有剩下 $1-p$ 的概率这张彩票会打水漂；这时的期望财富小于彩票的价格，而消费者却热衷于此，这说明买彩票所带来的期望效用大于 w° 所带来的效用；

从图中，我们可看出，只有当消费者为风险爱好者时，才会使得 $u(Ew)$ 大于 $u(w^{\circ})$。

（3）消费者的主要的标准为效用：

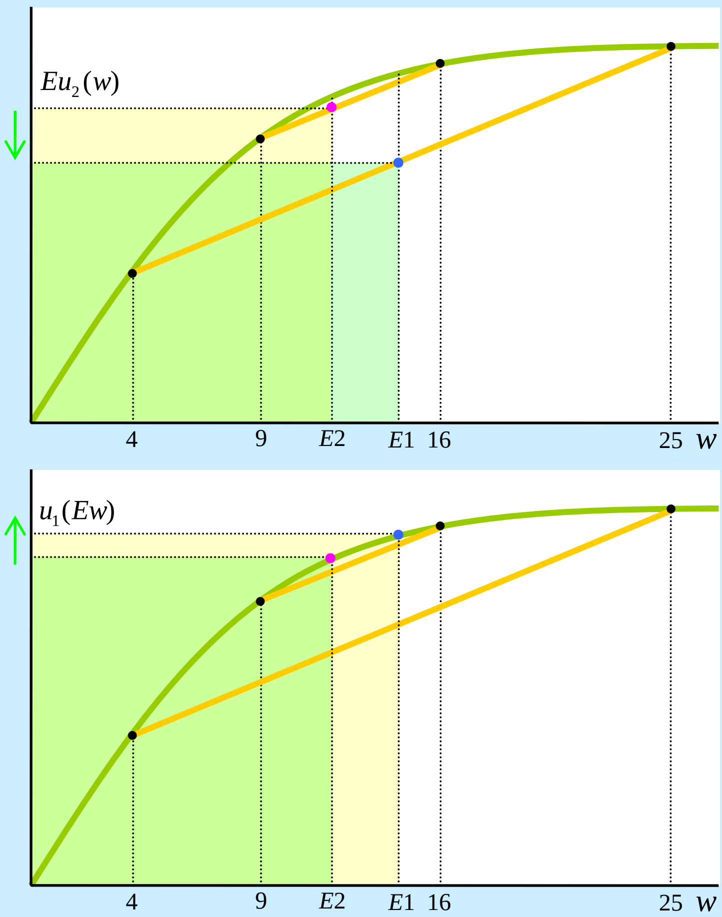
$$Eu_1 = \frac{1}{2}(4^{\frac{1}{2}} + 25^{\frac{1}{2}}) = 3.5; Eu_2 = 0.4 \times 9^{\frac{1}{2}} + 0.6 \times 16^{\frac{1}{2}} = 3.6$$

$Eu_1 < Eu_2$;所以此人偏好于第二种收益。

另一种解法：$uE_1 = (\frac{1}{2}4 + 25)^{\frac{1}{2}} = 14.5^{\frac{1}{2}}; uE_2 = (0.4 \times 9 + 0.6 \times 16)^{\frac{1}{2}} = 13.2^{\frac{1}{2}}$

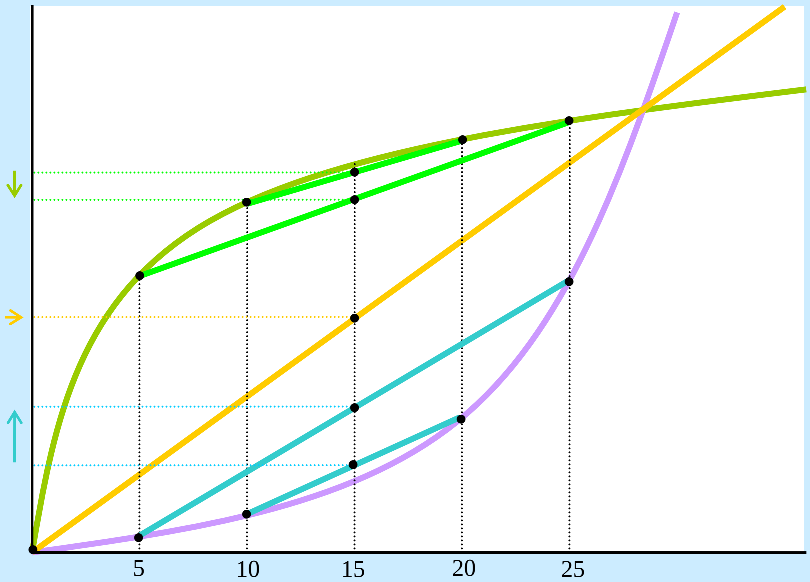
$uE_1 > uE_2$;所以此人偏好于第一种收益。

第二种解法对吗?



在这里，我们首先要区分一下期望值的效用与期望效用，因为题目是让我们比较期望收益的效用，这等价于出去风险升水的效用曲线上的某点的效用水平，而第二种方法所得的是期望值得效用，之间的区别是存在风险生水和风险升水所带来的效用损失，在两图中可更加清楚地说明题目的意思。

（2）



题中只能得出期望收入相等，但不能得出期望值得效用相等的结论。因为此结论中还忽略了方差的存在，即前者比后者的变化范围小，所以相对平稳，对两者的评价还要看消费者对风险的态度如何，图中可能更加一目了然。

13 此人的期望效用 $Eu=\frac{1}{2}((4+12)^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}})=3$；出让前后的期望效用应是一致的；则：

而奖券的期望效用为 $Eu=(4+C)^{\frac{1}{2}}=3$，$C=5$ 则此人出让时的最低价位 5 元。

14

$$pu(w_1)+(1-p)u(w_2)=u(w_0)$$

$$pw_1^{-1}+(1-p)w_2^{-1}=w_0^{-1}$$

$$w_0=\frac{w_1w_2}{pw_2+(1-p)w_1}$$

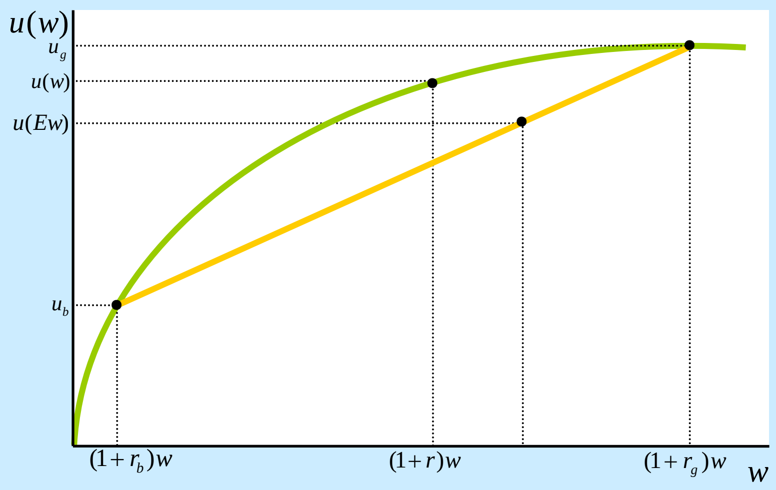
（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p209）

第五讲

4 其实这一题的表述有点含糊，根据题目可理解为，投资者拥有的总资产为 $2w$，在两种资产（风险资产，无风险资产）上均投资 w，但这不满足第二问得思路；如果根据第二问得思路，可理解为投资者的总财富为 w，可以分别投资两种资产（风险资产，无风险资产），但不满足题目的最后一句（要在 u-w 空间分析），因为要涉及其他的变量，单是在 u-w 空间不足以分析清楚；

在这，我们只注重第二种理解来解题，设投资者为风险回避者：

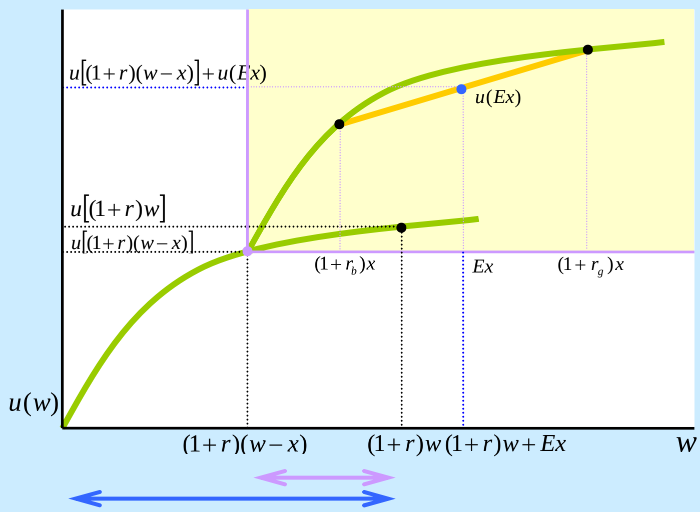
(1)



当投资者把全部的财富都投资在无风险资产上时，所得的收益为 $(1+r)w$，效用为 $u(w)$，

当投资者把全部的财富都投资在风险资产上时，所得的收益只是一个期望值，其期望收益在 $(1+r_b)w$ 和 $(1+r_g)w$ 之间的某点，其期望效用是在 u_b 和 u_g 之间的某一点上。

(2)



在图中有两个坐标系，两效用曲线其实是同一曲线分别在两坐标系内表示，右上方的坐标系是指投资在风险资产的财富所得的期望收益与期望效用，左下方的坐标系包含了全部或部分投资在无风险资产所得的收益与效用，和资产组合所带来的总收益与总效用。在这要特别强调的是，只有当投资者的资产组合所带来的总效用大于全部投资在无风险资产所得的效用时，投资者才会持有包含有风险资产的资产组合；

在图中，其风险资产与财富之比相当于短线段与长线段的长度之比。（用其他的风险态度也可得出类似的结论）

设出现好日子的概率为 π，投资在风险资产上的财产为 x，其中 $x = x(\pi)$，则

投资者为实现期望收益最大化，得：

$$Max \quad (w-x)(1+r)+\left[\pi(1+r_g)x+(1-\pi)(1+r_b)x\right]$$

对求π一阶导，得： $\left[(r_g-r_b)\pi-(r-r_b)\right]x'+(r_g-r_b)x=0$

$$\left[\frac{(r-r_b)}{(r_g-r_b)}-\pi\right]x'=x$$

两边积分： $$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d\pi}{(\ \cdot\ )-\pi}$$

$$\ln x=-\ln\left|\ (\ \cdot\ )-\pi\ \right|+\ln c$$

$$x=\frac{c}{\left|\ (\ \cdot\ )-\pi\ \right|}$$

把$\pi=1$时，$x=w$代入得：$c=\left(\frac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)w$

（因为当$\pi=0$时，消费者不会投资，$x=0$，解不出c的值）

则： $$x=\frac{\left(\frac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)w}{\left|\frac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|}$$

设出现好日子的概率为π，投资在风险资产上的财产占总财富的份额为 p，其中$p=p(\pi)$，则投资者为实现期望收益最大化，得：

$$Max \quad (1-p)w(1+r)+\left[\pi(1+r_g)+(1-\pi)(1+r_b)\right]pw$$

解上式可得： $$p=\frac{\left(\frac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)}{\left|\frac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|}$$

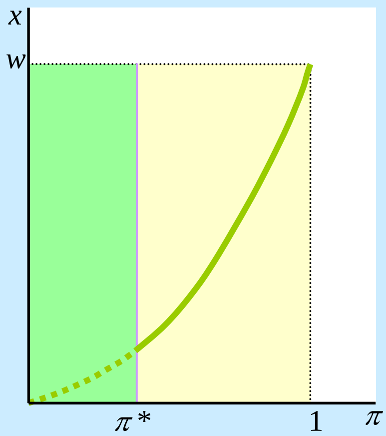
但π要满足什么条件时，投资者才会投资风险资产呢？只有当投资者的资产组合所带来的总效用大于全部投资在无风险资产所得的效用时，投资者才会持有包含有风险资产的资产组合。现在，我们来求π的临界条件：

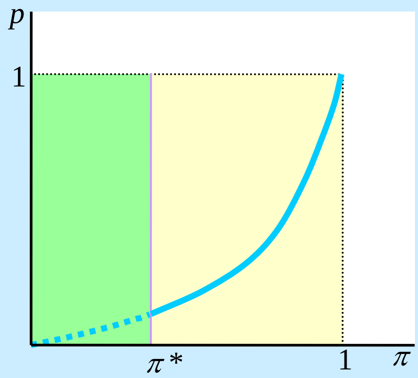
$$\left[\pi(1+r_g)x+(1-\pi)(1+r_b)x\right]=(1+r)x$$

可解得： $$\pi^*=\left(\frac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)$$

所以可以补足$x=x(\pi)$和$p=p(\pi)$的关系式：

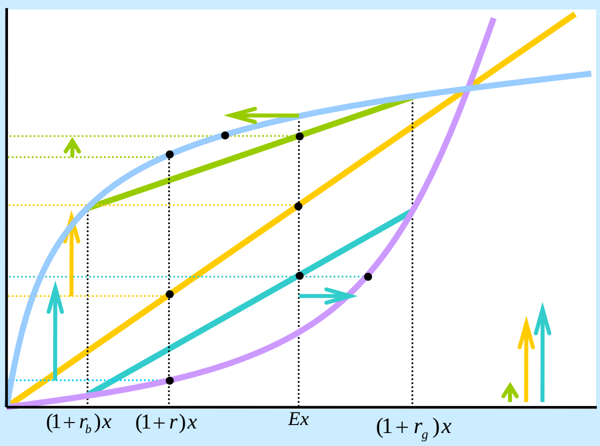
$$x=\frac{\left(\dfrac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)w}{\left|\dfrac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|}\;;\quad \pi\geq\left(\frac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)\qquad\qquad p=\frac{\left(\dfrac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)}{\left|\dfrac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|}\;;\quad \pi\geq\left(\frac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)$$





因为两函数的一，二阶导均为正数，可知曲线为以下形状，还说明了随着的增大，风险资产在财富中的份额是逐渐增大的。

（3）



投资者是否持有风险资产的标准是总期望效用最大化，当资产组合所带来的总效用小于其无风险资产所带来的总效用时，任何风险态度的投资者都不会持有风险资产。

而当投资者的资产组合所带来的总效用大于全部投资在无风险资产所得的效用时，风险喜爱者，中性者，回避者的风险生水分别小于，等于，大于零，对于同样的资产组合，三类型的投资者对之的依次减少，所以其所持有的风险资产所占财富的比例依次减少。

（瓦尔特 · 尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p247）

5（1）由上题可知，$p=\dfrac{\left(\dfrac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)}{\left|\dfrac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|}$；　$\pi\geq\left(\dfrac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)$对财富按比例征税不会影响风险资产对财富的比例。

（2）由题设可知，这相当于无风险资产的收益率下降，又由

$$p'(r)=\frac{-\frac{1}{r_g-r_b}\left|\frac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|-(\pi+\frac{1}{r_g-r_b})\frac{r-r_b}{r_g-r_b}}{\left|\frac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|^2}<0$$ 可知，当收益率下降时，风险资产的份额会上升。这样，在投资者之中所持有的无风险资产份额越大，所受的影响就会越大，即风险回避者所受的影响为最大。

（3）由题设可知，即所有的资产全下降相同的数值的收益率，设收入税为 R，则：

$$p(R)=\frac{\left(\frac{(r-R)-(r_b-R)}{(r_g-R)-(r_b-R)}\right)}{\left|\frac{(r-R)-(r_b-R)}{(r_g-R)-(r_b-R)}-\pi\right|}=\frac{\left(\frac{r-r_b}{r_g-r_b}\right)}{\left|\frac{r-r_b}{r_g-r_b}-\pi\right|}$$

由上可知，风险资产的份额不受影响。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p248）

1（1）事实上，题目是要求期望效用最大化的问题

$$Eu_w=\frac{1}{2}(\ln y_r+\ln y_{nr})=\frac{1}{2}\ln\left(280\times10^6\right)$$

$$Eu_c=\frac{1}{2}(\ln y_r+\ln y_{nr})=\frac{1}{2}\ln\left(285\times10^6\right)$$

由于，$Eu_w<Eu_c$，所以农民会种谷子；

（2）既然农民是追求效用最大化，那么，在第二年，农民选择混合种植：

$$Eu==\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\cdot28000+\frac{1}{2}\cdot19000\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\cdot10000+\frac{1}{2}\cdot15000\right)=\frac{1}{2}\ln\left(293.75\times10^6\right)$$

由于，$Eu_w<Eu_c<Eu$，所以农民会混合种植；

（3）设小麦的份额为 α；

$$EU=\frac{1}{2}\ln[28000\alpha+19000(1-\alpha)]+\frac{1}{2}\ln[10000\alpha+15000(1-\alpha)]$$

一阶条件：$$\frac{dEU}{d\alpha}=\frac{1}{2}\frac{[28000-19000]}{[28000\alpha+19000(1-\alpha)]}+\frac{1}{2}\frac{[10000-15000]}{[10000\alpha+15000(1-\alpha)]}=0$$

$$\alpha=\frac{4}{9}$$

当农民用 $\frac{4}{9}$ 的土地来种植小麦、$\frac{5}{9}$ 的土地来种植谷子时，其期望效用达到最大化；

此时的期望效用为：$MaxEU=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2645}{9}\times10^6\right)\approx\frac{1}{2}\ln\left(293.9\times10^6\right)$

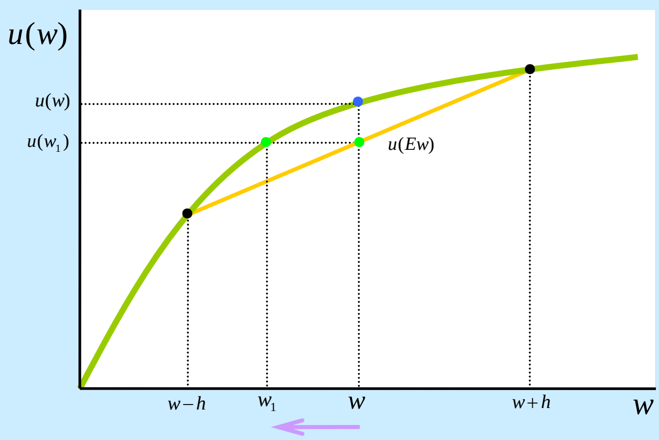
（4） $Eu'_w = \frac{1}{2}\ln(28000-4000) + \frac{1}{2}\ln(10000+4000) = \frac{1}{2}\ln\left(336\times10^6\right)$

$$EU' = \frac{1}{2}\ln[23000-4000] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{115000}{9}+4000\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2869}{9}\times10^6\right) \approx \frac{1}{2}\ln\left(318.8\times10^6\right)$$

由于，$Eu'_w > EU'$，则农民会改种小麦。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p247）

2



根据题设可知，通过打赌的期望值与不打赌的初始财富是一致的，但此人为风险厌恶者，其效用函数是凹向原点的，则其期望效用小于初始效用，所以他不会参加赌博。

从图中可看出，其实通过打赌，此人所处的位置是在出去风险升水的 w_1，则他的效用实为 $u(w_1) = u(E) < u(w)$。

3 停车者的期望效用为：　$Eu = p\cdot u(w-f) + (1-p)\cdot u(w)$

$$Eu = p\cdot u(w) - pf\cdot u'(w) + \frac{pf^2}{2}\cdot u''(w) + (1-p)\cdot u(w)$$

当分别对可能性与罚金以同比例增加时，设 $\lambda > 1$，则有：

$$Eu^{\lambda p} = \lambda p\cdot u(w) - \lambda\cdot pf\cdot u'(w) + \lambda\cdot\frac{pf^2}{2}\cdot u''(w) + (1-\lambda p)\cdot u(w)$$

$$Eu^{\lambda f} = p\cdot u(w) - \lambda\cdot pf\cdot u'(w) + \lambda^2\cdot\frac{pf^2}{2}\cdot u''(w) + (1-p)\cdot u(w)$$

$$Eu^{\lambda p} - Eu^{\lambda f} = (\lambda-1)p\cdot u(w) + (\lambda-\lambda^2)\cdot\frac{pf^2}{2}\cdot u''(w) - (\lambda-1)p\cdot u(w)$$

$$Eu^{\lambda p} - Eu^{\lambda f} = (\lambda-\lambda^2)\cdot\frac{pf^2}{2}\cdot u''(w) > 0$$

换句话说，被抓住的可能性增加会使得停车者的期望效用变化得更大；所以这种方法会更有效。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p246）

6　$\max\limits_{C} \quad = \quad u\,(\,c\,)$

$$s.t.\ I_0 + I_1\frac{1}{1+r} = c_0 + c_1\frac{1}{1+r}$$

构造拉氏方程： $\psi(c,\lambda) = c_0 c_1^{\frac{1}{2}} + (I_0 + I_1\frac{1}{1+r} - c_0 - c_1\frac{1}{1+r})$

$$\frac{\partial\psi}{\partial c_0} = c_1^{\frac{1}{2}} - \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial c_1} = \frac{1}{2}\frac{c_0 c_1^{\frac{1}{2}}}{c_1} - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = I_0 + I_1\frac{1}{1+r} - c_0 - c_1\frac{1}{1+r} = 0 \qquad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $c_0 = \frac{2}{1+r}c_1$； $c_1 = \frac{1+r}{2}c_0$

把上两式分别代入（3）式得：

$$c_0 = \frac{2W}{3}; \qquad c_1 = \frac{(1+R)W}{3}$$

（设 w 为 $I_0 + I_1\frac{1}{1+r}$）

则当 $r=0$ 时， $c_0 = \frac{320}{3}$，他该借贷

当 $r=1$ 时， $c_1 = \frac{220}{3}$，他仍该借贷

7（1）

$$\max_C = u(c)$$

$$s.t.\ \omega = c_1 + c_2\frac{1}{1+r}$$

构造拉氏方程： $\psi(c,\lambda) = u + \lambda(\omega - c_1 - c_2\frac{1}{1+r})$

可以得出： $\frac{u_1'}{u_2'} = 1 + r = MRS_{c_1,c_2}$

（2）简而言之，利率与消费之间的关系是不明确的；即不能确定 $\partial c_2/\partial r$, $\partial c_1/\partial r$ 的符号。先看 $\partial c_1/\partial r$ ，用消费理论的“黑话”来说就是：其效用函数未定，所以不知其总效应的符号；而说得详细一点：利率的变动对消费产生了收入效应与替代效应。在替代效应作用下，利率与消费呈反方向变化；而在收入效应作用下，利率与消费呈同方向变化；对于两者同方向变化的解释为：人们储蓄是为了积累某一个固定数量的资产用于将来购买大宗的耐用消费品或者用于支付退休时期的消费需要。如果利率提高，消费者所需要储蓄的数量就减少，因此消费增加。而对于 $\partial c_2/\partial r$ ，我们也可用类似的分析得出。

（张一驰 宏观经济分析 中国经济出版社

进一步提问：为什么以下做法不正确？

$$c_1=\omega-c_2\frac{1}{1+r}\,;\qquad c_2=(1+r)(\omega-c_1)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}=\frac{c_2}{(1+r)^2}\ge 0\,;\qquad \frac{\partial c_2}{\partial r}=\omega-c_1\ge 0$$

因为，这是在没有效用最大化的条件下所得出的，其中的得并不是消费者的最优选择(当然，这样的计算或许包含了某种条件下的最优消费量）但这样在没有限制条件下所得出的结果并不具有代表性。

（思考了两个多小时，突然，在回光返照的瞬间想到了消费理论，好险，好险）

8 此题是要比较现值的题目，有两种消费：

（1）第一年消费 100000 元，后四年分别消费 2000 元；

（2）第一年消费 100000 元，后 35 年分别消费 400 元

$$pv_1=100000+\sum_{i=1}^{4}\frac{2000}{(1+r)^i}\,;\qquad pv_2=100000+\sum_{i=1}^{35}\frac{400}{(1+r)^i}\approx 100000+\frac{1+r}{r}400$$

解出 $pv_1=pv_2$ 时的 $r=r_0$ 值，当 $r<r_0$ 时，$pv_1<pv_2$；当 $r>r_0$ 时，$pv_1>pv_2$；

所以推销员的话是不全面的；又当 $r=10\%$ 时：

$$pv_1=\sum_{i=1}^{4}\frac{2000}{(1+r)^i}=100000+2000\left[\frac{1}{(1+10\%)}+\frac{1}{(1+10\%)^2}+\cdots\right]=106340$$

$$pv_2=100000+\sum_{i=1}^{35}\frac{400}{(1+r)^i}\approx 100000+\frac{1+r}{r}400=100000+\frac{1+10\%}{10\%}400=104400$$

9 此题也是比较现值的题目，有两种消费:

（1）第一年初消费 100000 元，在第一，二，三年末分别消费 1000 元；

（2）在三年中每月，分别消费 350 元

$$pv_1=10000+\sum_{i=1}^{3}\frac{1000}{(1+r)^i}=12487$$

$$pv_2\approx 350\cdot 12\times\left(e^{-0.1}+e^{-0.2}+e^{-0.3}\right)=10350$$

因为 pv_2 中的年利率为 $\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12}\approx e^r$ 所以其贴现因子为 e^{-nr}，其中 n 为年数，

由此可看出汽车贷款为低成本之举。pv_2 不能用 $pv_2=\sum_{i=1}^{36}\dfrac{350}{(1+\frac{r}{12})^i}$ 来计算，因为期值

是不断的在变化的，或是说这是连续复利。

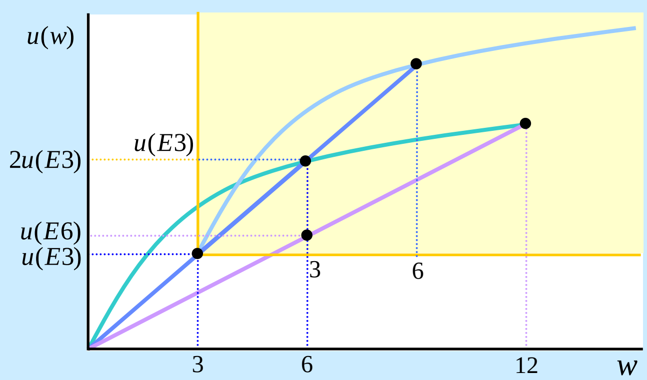
10 消费者为损失支付的最高保险金额为 1000/4=250 元。

（此题为微观经济学十八讲　平新乔　北大出版社 P66 的

12（1）题设其实是要求期望值

$$E_1=\frac{1}{2}(12+0)=6\,;\qquad E_2=\frac{1}{2}(6+0)+\frac{1}{2}(6+0)=6$$

（2）



假定此人为风险回避者，下图有两个坐标系，为的是更直观的显示题目的路径，两效用曲线其实是同一曲线分别在两坐标系内表示，其中左下的坐标系中标有（1）中的两种战略所带来的期望效用（其中，在第二种战略中所走完第一条路时的期望效用）以 3 与 u（*E3*）为原点作坐标系，标有第二条路时所带来的期望效用，在左下的坐标系可看到两种战略所带来的总的期望效用。很明显，此人会更倾向于第二种战略。

另一种方式说明，假定此人为风险回避者，$u''(w)<0$，证明 $f(x)=nu(x)-u(nx)$ 为增函数，其中 n 为正整数；$f'(x)=n[u'(x)-u'(nx)]$，因为 $u''(w)<0, nx>x$，则 $[u'(x)-u'(nx)]>0$，由 $f'(x)>0$ 可知，命题成立。当 n=2 时，则为（2）的答案。

（3）由上证明可知，消费者采取每次一个鸡蛋，反复走 12 次会获得最大期望效用，因此，当采用多于 2 条路的方案时，效用会进一步改善。而当其他路径有成本时，很显然，此人会避开此路，而重复行走那些无成本的路，这也可获得期望效用最大化。

其实，（3）的问题表达很模糊，一开始，我认为每条路必走，则：

$$Max\quad 2u(1)+n(c)u\left[\frac{10}{n(c)}-c\right]$$

其中 n 为走的有成本的路径数，n 小于或等于 10，但一阶导后；

$$n'(c)u\left[\frac{10}{n(c)}-c\right]-(1+\frac{10}{n^2}n')nu'(\frac{10}{n}-c)=0$$

要想进一步计算的话；则需要确定 c 和 n 的表达式了。 不过，上式得变形也应可以做为最后结论。

11（1）
$$\max_{C}\ = u\,(\,c\,)$$

$$s.t.\ 100+180\frac{1}{1+r}=c_1+c_2\frac{1}{1+r}$$

构造拉氏方程：$\psi(c,\lambda)=c_1^{0.4}c_2^{0.6}+(100+180\frac{1}{1+r}-c_1-c_2\frac{1}{1+r})$

$$\frac{\partial\psi}{\partial c_1}=\frac{0.4u}{c_1}-\lambda=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial c_2}=\frac{0.6u}{c_2}-\frac{\lambda}{1+r}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=100+180\frac{1}{1+r}-c_1-c_2\frac{1}{1+r}=0 \quad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得: $c_1=\frac{2}{3(1+r)}c_2$; $c_2=\frac{3(1+r)}{2}c_1$

把上两式分别代入（3）式得:

$$c_1=\frac{2W}{5};\qquad c_2=\frac{3(1+r)W}{5}$$

（设 w 为 $I_0+I_1\frac{1}{1+r}$）

（2）设一期的消费和一期的收入相等: $100=2W/5$; 得 $r=20\%$

当 $r>20\%$ 时，$c_1<W$，则消费者变为储蓄者;

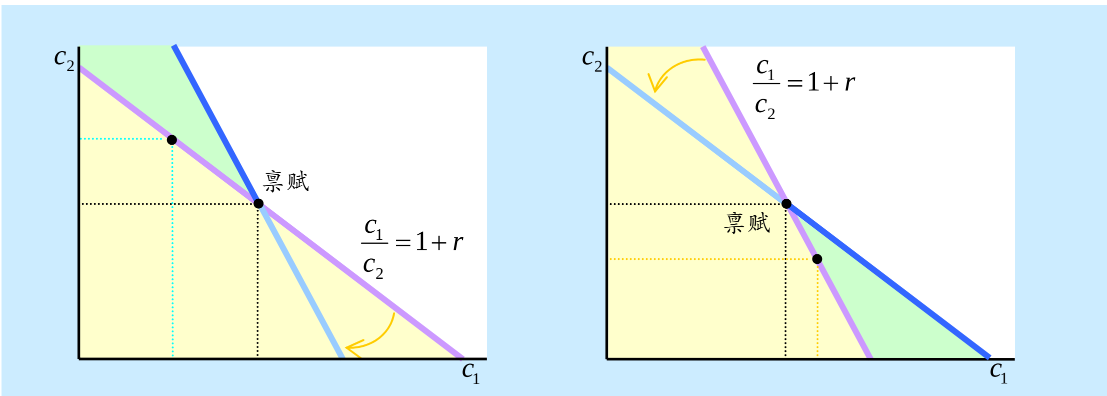
当 $r<20\%$ 时，$c_1>W$，则消费者变为贷款者;

当 $r=20\%$ 时，$c_1=W$，则消费者正好用完一期的收入;

（3）整理得，$c_1=40+\frac{72}{1+r}$; $c_2=60(1+r)+108$，则

$$c_1'(r)=-\frac{72}{(1+r)^2};\qquad c_2'(r)=60$$

13（1）不确切，这是考察的是显示偏好弱公理的应用；其角色不会改变，但由于缺乏条件，所以其数量不能确定；



（2）正确；

（3）不正确，这意味着如果把钱攥在手上的话，到了下期，消费者的实际购买力会比存款时下降得更多，因为通过存款会得到利息的补偿来抵消一部分通货膨胀而带来的损失。

14 $$\max_{C} \quad = u(c)$$

$$s.t.\ 1000 - 25\%(1000 - c_1) + 150 = c_2 + c_1$$

构造拉氏方程：$\psi(c,\lambda) = c_1c_2 + \lambda[1000 - 25\%(1000 - c_1) + 150 - c_2 - c_1]$

$$\frac{\partial\psi}{\partial c_1} = c_2 - \lambda\frac{3}{4} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial c_1} = c_1 - \lambda = 0 \qquad (2)$$

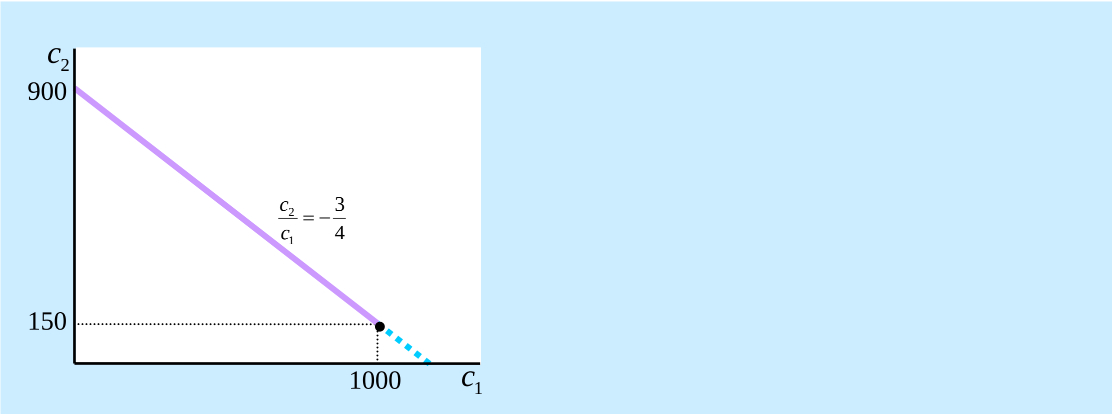
$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 1000 - (1000 - c_1)25\% + 150 = 0 \qquad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得: $c_1 = \frac{4}{3}c_2$； $c_2 = \frac{3}{4}c_1$

把上两式分别代入（3）式得:

$c_1 = 600$； $c_2 = 450$； $25\%(1000 - 600) = 100$；

（1）



（2）村民今年的消费量为：$c_1 = 600$；

（3）老鼠会吃掉：$25\%(1000 - 600) = 100$；

（4）村民明年的消费量为：$c_2 = 450$；

（5）因为村庄与外界无贸易来往，这意味着村民无法向未来借入收成，所以村民的最优消费决策是在前二年保持效用最大化的条件下消费，而在第三年消费完全部的收成。其答案是一致的。

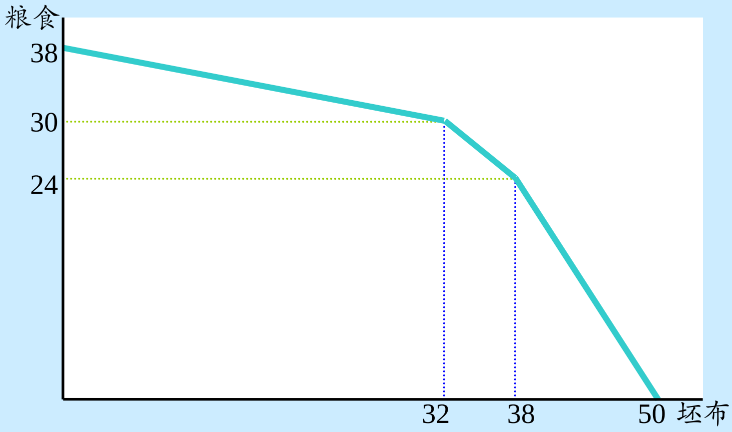
因为我试过 $$\max_{C} \quad = u(c)$$

$$s.t.\quad 1000 - 25\%(1000 - c_1) + 150 + 1000 = c_2 + c_1 + c_3$$

所得出的 $c_2 + c_1$ 超过了前二年的总收成。

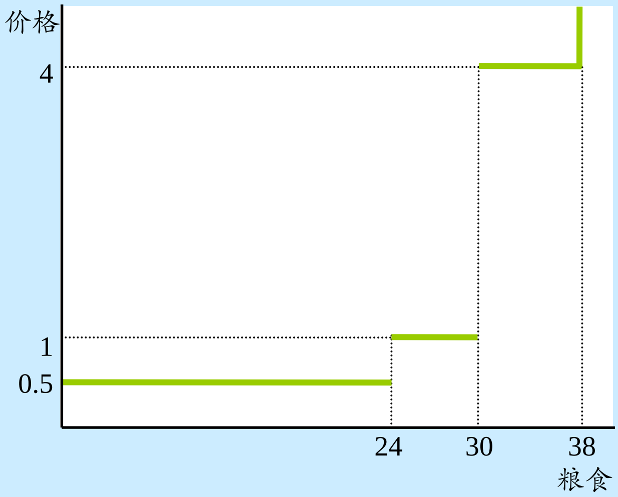
第六讲

3 为了分析更为直观，我们先看第二段，从中可画出其生产转换曲线。



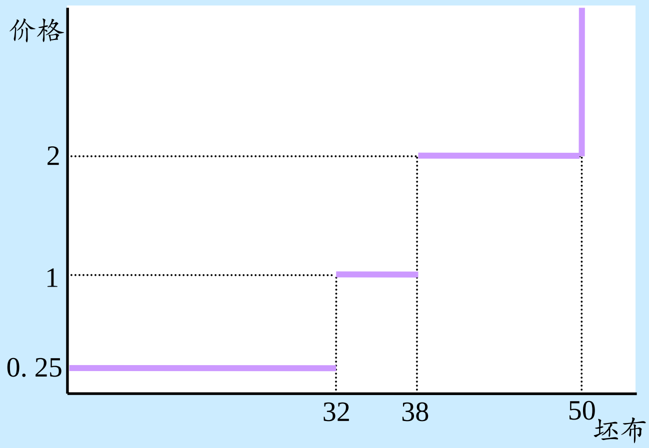
设这个村庄只有一块地，可种植粮食和棉花，而在市场的最终产品为一定担数的粮食和坯布，村庄的目的是实现其产品的市场价值最大化。

(1)



市场上的每米坯布的价格为 1 元不变；当每担粮食低于 0.5 元时，这块地全用来种植棉花，生产出 50 米的坯布，这时，村庄实现了最大化的市场价值 50 元；当每担粮食的价格为 0.5 元时，无论这块地全种植棉花，还是其中一部分种植粮食、一部分种植棉花而得出的 24 担粮食和 38 米坯布，其市场价值均为 50 元；同理，当每担粮食为 1 元时，则生产 30 担粮食和 32 米坯布或是 24 担粮食和 38 米坯布，其市场价值均为 62 元,；而当每担粮食为 4 元时，则倾其全部的土地来种植粮食或是 30 担粮食和 32 米坯布，其最终市场价值均为 152 元。

(2)



同上的分析，市场的每担粮食的价格为 1 元不变；当每米坯布的价格低于 0.25 元时，全部产粮食；等于 0.25 元时，0 米坯布，38 担粮食或是 32 米坯布和 30 担粮食；等于 1 元时 32 米坯布和 30 担粮食或是 38 米坯布和 24 担粮食；等于 2 元时，38 米坯布和 24 担粮食或全用来种植棉花都将产生 100 元的价值；大于 2 元时，全部种植棉花来生产坯布。

因为根据题设条件，我们只能“离散”型的供给曲线。

1 （1）设资本投入的价格为 v，则：

$$\pi = pQ - wL - v\overline{K} = (-2L^2 + 16L - 18) - 8L - 2v$$

$$\frac{d\pi}{dL} = -4L + 16 - 8 = 0\,; \qquad \frac{d^2\pi}{dL^2} = -4 < 0$$

$$L = 2$$

（2）
$$AL = \frac{Q}{L} = -2L + 16 - \frac{18}{L}$$

$$\frac{dAL}{dL} = -2 + \frac{18}{L^2} = 0\,; \qquad \frac{d^2AL}{dL^2} = -2\frac{18}{L^3} < 0$$

$$L = 3$$

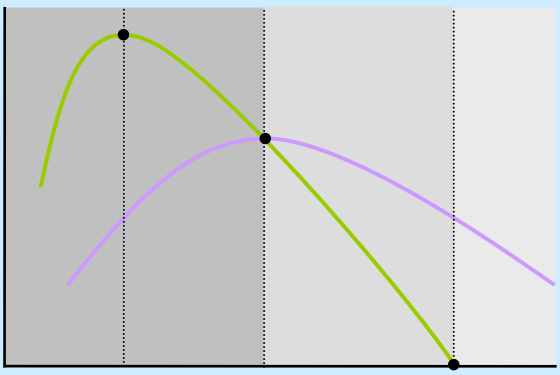
$$AQ = \frac{Q}{L} = \frac{-2\times 3^2 + 16\times 3 - 18}{3} = 4$$

2 （1） $f(tx.ty) = t^3x^3 - t^2xy + t^3y^3 \neq t^k f(x,y)$ $\qquad$ k 为常数

（2） $f(tx.ty) = 2tx - ty + 3t(xy)^{\frac{1}{2}} = t\left[2x + y + 3(xy)^{\frac{1}{2}}\right] = tf(x,y)$ $\qquad$ 规模报酬不变

（3） $f(tx,ty,tw) = t^{\frac{2}{3}}(x^4 - 5yw^3)^{\frac{1}{6}} = t^{\frac{2}{3}} f(x,y)$ $\qquad$ 规模报酬递减

5（1）



边际产出大于零时，总产量将随着投入的增加而上升，这是因为边际产出实为总产量的斜率；当边际产出大于平均产出时，平均产出上升，当边际产出小于平均产出时，平均产出下降。

（2）题设混淆了规模报酬递增和范围经济的概念，有关内容在课本的 111-112 页。

4（1） $f(tx.ty) = \beta_0 + t\beta_1(KL)^{\frac{1}{2}} + t\beta_2K + t\beta_3L$，要使 $f(tx.ty) = tf(x,y)$，则必须满足

$\beta_0 = 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能同时为零；

（2）
$$MP_K = \frac{1}{2}\beta_1\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} + \beta_2\,; \qquad MP_L = \frac{1}{2}\beta_1\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} + \beta_3$$

$$MP_K' = -\frac{1}{4}\beta_1L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{2}} < 0\,; \qquad MP_L' = -\frac{1}{4}\beta_1L^{-\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} < 0$$

$$MP_K(tK,tL)=\frac{1}{2}\beta_1\left(\frac{tL}{tK}\right)^{\frac{1}{2}}+\beta_2=MP_K(K,L)$$

$$MP_L(tK,tL)=\frac{1}{2}\beta_1\left(\frac{tK}{tL}\right)^{\frac{1}{2}}+\beta_3=MP_L(K,L)$$

6
$$\pi=py-wL-\overline{K}=3L^{\frac{1}{3}}-4L-2$$

$$\frac{d\pi}{dL}=L^{-\frac{2}{3}}-4=0$$

$$L^*=\frac{1}{8};y^*=\frac{1}{2};\pi^*=-1$$

虽然企业的利润为负的，但是，我们应该这样来看，假定企业的前期的固定投资不在本期发生，则在本期内的利润为$\pi^*=1$，是为正的，这相当于企业收回了前期固定投资的一半，所以，企业不应该关闭。

7 当这企业处于短期劳动的最优投入量时，应满足：

$$p\cdot MP_L=w \tag{1}$$

又知企业的生产函数$q=AL^{\alpha}$则： $MP_L=\alpha AL^{\alpha-1}$ （2）

$$L=A^{-\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3}$$

把（3）代入（2）得： $MP_L=\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ （4）

把（4）代入（1）得： $p\cdot\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}=w$

设$F(p,q,w)=p\cdot\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-w$，则：

$$\frac{\partial q}{\partial p}=-\frac{F_p'}{F_q'}=-\frac{\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}q}{\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\frac{\alpha-1}{\alpha}p}=\frac{\alpha q}{(1-\alpha)p}>0$$

$$\frac{\partial q}{\partial w}=-\frac{F_w'}{F_q'}=\frac{q}{\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\frac{\alpha-1}{\alpha}p}=\frac{q^{\frac{1}{\alpha}}}{A^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha-1)p}<0$$

阴险！真他妈的阴险！我一开始相到的是：$\pi=pq-wL-J$，设

$$F(p,q,w)=pq-wL-J-\pi$$

$$\frac{\partial q}{\partial p}=-\frac{q}{p}<0\text{；}\quad\frac{\partial q}{\partial w}=\frac{L}{p}>0$$

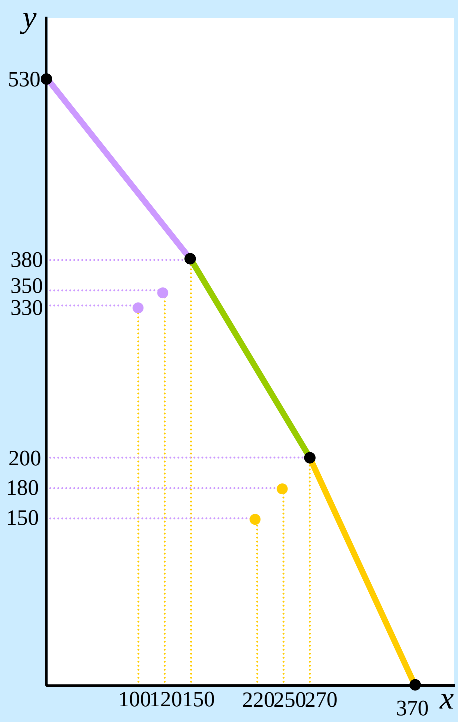
其错误在于 L 为 q 的函数，这被我遗忘了，然后想到：

$$\pi = pq - wA^{-\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{1}{\alpha}} - J$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{q}{\alpha^{-1}wA^{-\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - p};$$

只有当 $wA^{-\frac{1}{\alpha}}\alpha^{-1}q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > p$ 时，$\frac{\partial q}{\partial p} > 0$，当把 $p \cdot MP_L = w$ 和 $MP_L = \alpha AL^{\alpha-1}$ 代入时，分母为零。其错误在于并没有在最优状态下分析，只是在厂商的所有产出范围内分析其价格的变化对厂商的产出的影响，当然，如果题目是问这个问题的话，应为答案。

9



如果三分公司同时生产 x，则为（370，0），如果同时生产 y，则为（0，530），如果利用其优势，甲、乙生产 y 而丙生产 x，则为（150，380）；或乙、丙生产 x 而甲生产 y，则为（270，200）；这样，我们可得到生产转换曲线；

我们还可以得到内部的生产组合，如（100，330），（120，350），（220，150），（250，180），在图中，我们把几个距离原点最远的点相连便得到生产转换线。

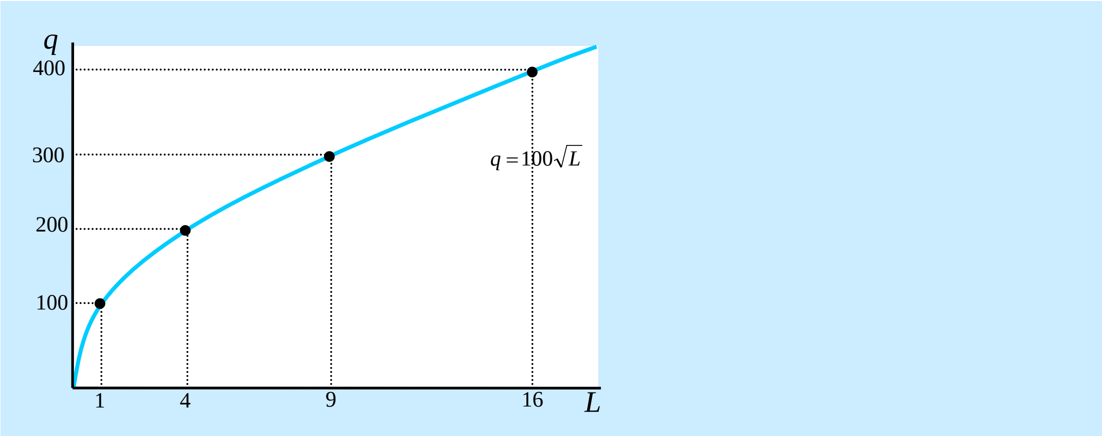
8 （1） $$\pi = pF(K,L) - wL - vK - k = 4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}L - \frac{1}{2}K - k$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \frac{F(K,L)}{2K} - \frac{1}{2} = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{F(K,L)}{4L} - \frac{1}{4} = 0 \qquad (2)$$

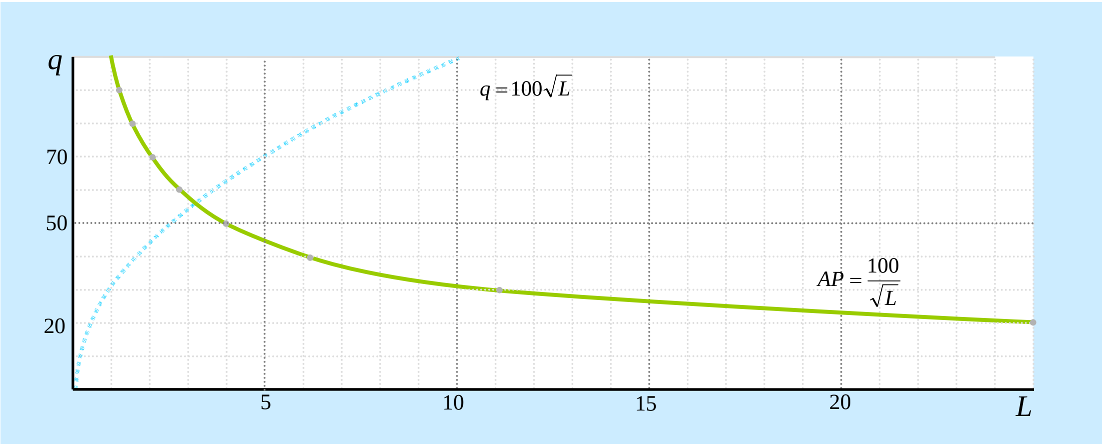
由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得：
$$\frac{K}{L} = 1 \qquad (3)$$

（2） 把（3）代入（1）或（2）得：$K = L = 4^4 = 256$

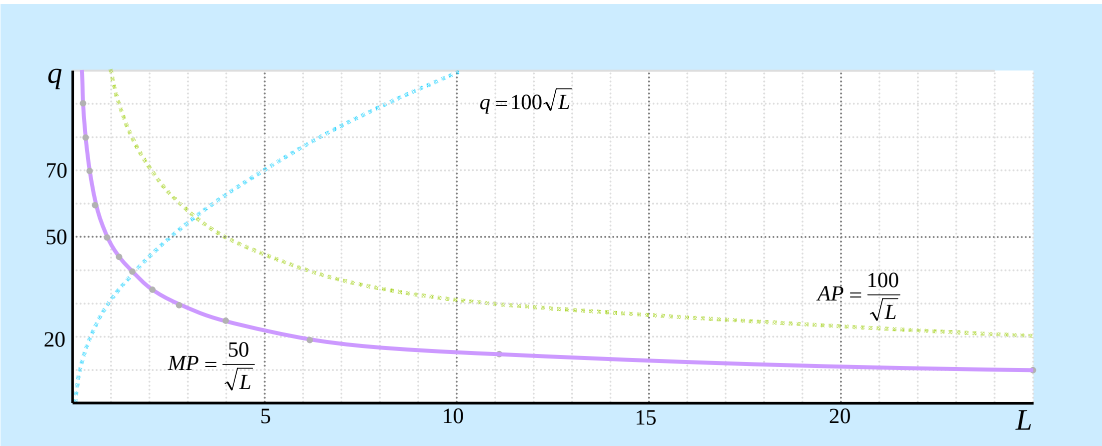
10（1）



（2）



（3）



$$AP_L=\frac{q}{L}=\frac{100}{\sqrt{L}}; \qquad MP_L=q'_L=\frac{50}{\sqrt{L}}$$

因为 $AP_L-MP_L>0$，这是生产函数所决定的。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p304）

11 由题设可知，大型和小型除草机的固定比例的生产函数分别为：

$$F_1=8000\min\left(\frac{K}{2},L\right); \qquad F_2=5000\min(K,L)$$

传说中，也被高手们称之为里昂惕夫生产函数

（1） 把 F=4000 代入大型除草机生产函数得：$\frac{1}{2}=\min\left(\frac{K}{2},L\right)$ 由此可知：$K=1;L=\frac{1}{2}$；

把 F=4000 代入小型除草机生产函数得：$\frac{4}{5}=\min(K,L)$ 由此可知：$K=\frac{4}{5};L=\frac{4}{5}$；

（2） 当 F=2000 分别代入大型和小型除草机的生产函数得：

$$\frac{1}{4}=\min\left(\frac{K}{2},L\right);\quad K_1=\frac{1}{2};L_1=\frac{1}{4};\qquad \frac{2}{5}=\min(K,L);\quad K_2=\frac{2}{5};L_2=\frac{2}{5}$$

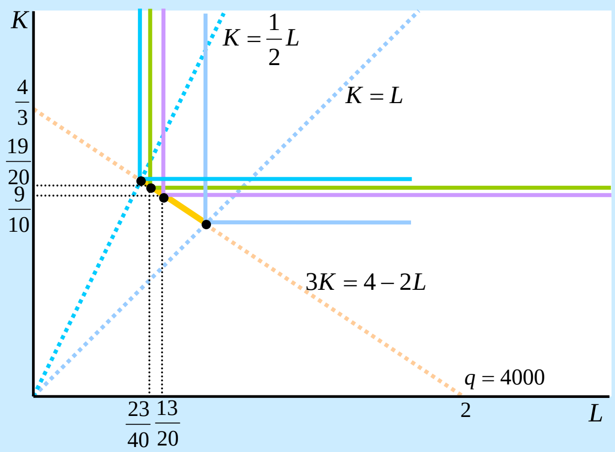
则 $K=K_1+K_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$； $L=L_1+L_2=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{13}{20}$

（3） 当 $F_1=3000$； $F_2=1000$ 分别代入大型和小型除草机的生产函数得：

$$\frac{3}{8}=\min\left(\frac{K}{2},L\right);\quad K_1=\frac{3}{4};L_1=\frac{3}{8};\qquad \frac{1}{5}=\min(K,L);\quad K_2=\frac{1}{5};L_2=\frac{1}{5}$$

则 $K=K_1+K_2=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$； $L=L_1+L_2=\frac{3}{8}+\frac{1}{5}=\frac{23}{40}$

（4）



由题设可知，当使用大（小）型除草机时，每小时的产出需要一定量的资本与劳动的搭配，否则就会造成浪费；换句话说，产出函数的两种投入是完全互补的。

公司为了达到成本最小化，会选择在产出曲线的折点来配置资本、劳动投入。

当我们通过反复第三问的不同生产配置，会得出在同一产出的不同生产组合，它们的轨迹为一条等产量曲线。

设大型除草机完成 4000 平方英尺草坪中的 S 份额，而其余的则由小型除草机负责；

$$4000\cdot S=8000\min\left(\frac{K}{2},L\right);\qquad 4000\cdot(1-S)=5000\min(K,L)$$

$$K_1=S;\ L_1=\frac{S}{2}\qquad\qquad K_2=L_2=\frac{4}{5}\cdot(1-S)$$

$$K=K_1+K_2=S+\frac{4}{5}\cdot(1-S)=\frac{4+S}{5};\quad L=L_1+L_2=\frac{S}{2}+\frac{4}{5}\cdot(1-S)=\frac{8-3S}{10}$$

$$S=5K-4;\qquad\qquad S=\frac{1}{3}\cdot(8-10L)$$

$$5K-4=\frac{1}{3}\cdot(8-10L)$$

$$K=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}L$$

现在，我们来确定等产量曲线的两个端点；因为通过第一问，我们就可以知道这两个端点；即 $K\in\left[\frac{4}{5},1\right]$； $L\in\left[\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]$；最后补足得：

$$K=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}L\ ;\ \ K\in\left[\frac{4}{5},1\right];\ \ L\in\left[\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]$$

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p304）

12（1） $$e_L=\frac{\partial q}{\partial L}\frac{L}{q}=\frac{\alpha q}{L}\frac{L}{q}=\alpha\ ;\qquad e_K=\frac{\partial q}{\partial K}\frac{K}{q}=\frac{\beta q}{K}\frac{K}{q}=\beta$$

（2） $$MP_L=\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}>0\ ;\qquad MP_K=\beta\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}>0$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2}=-\alpha\beta K^{\beta}L^{-\beta-1}<0\ ;\qquad \frac{\partial^2 q}{\partial K^2}=-\alpha\beta K^{-\alpha-1}L^{\alpha}<0$$

（3） $$MRTS_{L,K}=\left|-\frac{MP_L}{MP_K}\right|=\frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L}\ ;\qquad \frac{dMRTS_{L,K}}{d\left(\frac{L}{K}\right)}=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^2<0$$

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p305）

13 由欧拉定理得： $$q=MP_K\cdot K+MP_L\cdot L$$

等式两边同时除以 q 得： $$1=\frac{MP_K}{AP_K}+\frac{MP_L}{AP_L}\qquad（1）$$

当 $MP_L>AP_L$ 时，即 $MP_L/AP_L>1$，要使（1）式成立，则必须满足 $MP_K<0$，这意味着厂商在第一阶段进行生产，为了达到利润最大化厂商不应该使企业在劳动的平均产出递增的点进行生产。

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p306）

14 $$f_L'\cdot L+f_K'\cdot K=f$$

对 L 求导得： $$f_L'+Lf_L''+f_{KL}''\cdot K=f_L'$$

$$f_{KL}''=-\frac{L}{K}f_L''$$

又因为边际生产力递减的，即 $f_L''<0$，由此，我们可推出 $f_{KL}''>0$

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社

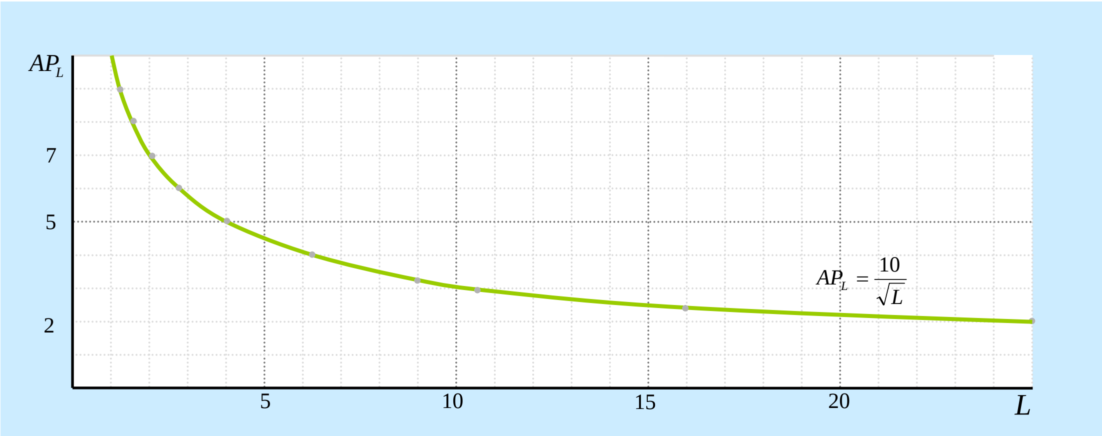
15（1） $AP_L=\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$； $AP_K=\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$

（3） $MP_L=\frac{1}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}AP_L$； $MP_K=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}AP_K$

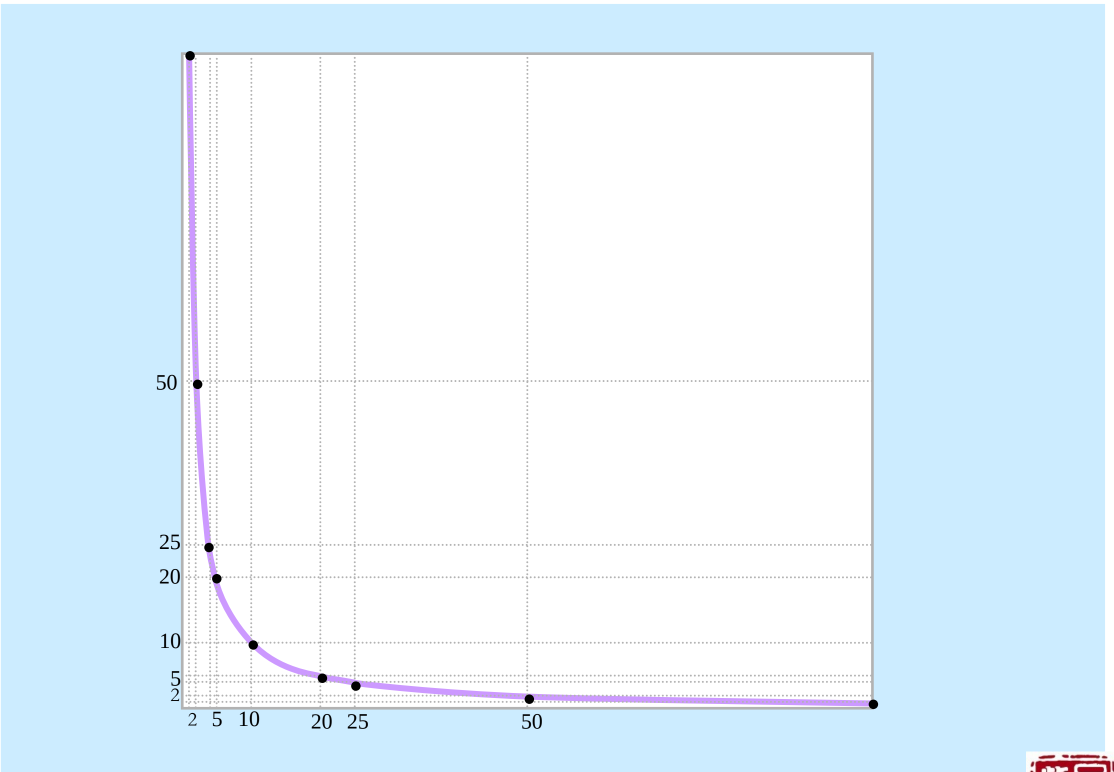
（5） $MRTS=\left|-\frac{MP_L}{MP_K}\right|=\frac{K}{L}$； $MRTS_{4,25}=\frac{25}{4}$； $MRTS_{10,10}=1$； $MRTS_{25,4}=\frac{4}{25}$；又

$MRTS_L'=-\frac{K}{L^{-2}}$；由上可知，随着劳动投入量的增加，其边际技术替代率是递减的。

（2）



（4）



（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社

第七讲

1 $$Max \qquad \pi = pf(x_1, x_2) - C$$

$$\pi = 0.5p\ln x_1 + 0.5p\ln x_2 - w_1x_1 - w_2x_2 \quad (1)$$

一阶条件： $$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = \frac{p}{2x_1} - w_1 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = \frac{p}{2x_2} - w_2 = 0 \quad (3)$$

由 $\frac{(2)}{(3)}$ 得: $x_1 = \frac{p}{2w_1}$ （4）； $x_2 = \frac{p}{2w_2}$ （5）

把（4），（5）式代入目标函数（1）得利润函数： $\pi(w, p) = \frac{p}{2}\left(\ln p^2 - \ln 4w_1w_2\right) - p$

由霍特林引理 $y(w, p) = \frac{\partial \pi(w, p)}{\partial p}$ 可得厂商的供给函数：

$$y(w, p) = \frac{\partial \pi(w, p)}{\partial p} = \frac{1}{2}\left(\ln p^2 - \ln 4w_1w_2\right)$$

把（4），（5）式代入题设所给的生产函数也能得厂商的供给函数：

$$y(w, p) = \frac{1}{2}\left(\ln p^2 - \ln 4w_1w_2\right)$$

2 $$Max \qquad \pi = pf(x_1, x_2) - C$$

$$\pi = pQ - Q^2 - 5Q - 4 \quad (1)$$

一阶条件： $$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = p - 2Q - 5 = 0$$

即： $$Q = \frac{p-5}{2} \quad (2)$$

把（2）式代入目标函数（1）得利润函数： $\pi(p) = \frac{(p-5)^2}{4} - 4$

由霍特林引理 $S(p) = \frac{\partial \pi(p)}{\partial p}$ 可得厂商的供给函数： $S(p) = \frac{\partial \pi(p)}{\partial p} = \frac{p-5}{2}$

3 不满足，因为由利润函数的性质可知 $\pi(p)$ 是 p 的一次齐次方程，而题设不满足这一性质。

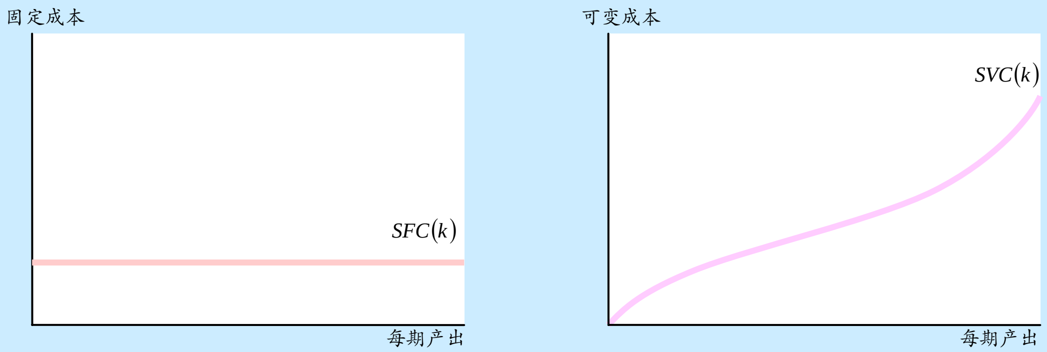
（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社

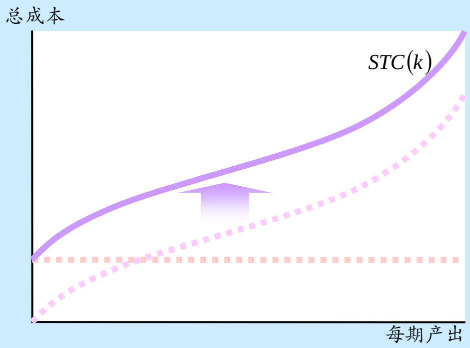
4 先精确一下题目的意思：有一组短期平均成本曲线，其最低点与长期平均成本曲线

此说法正确否？

为了充分的分析有关这方面的问题，我们先进一步提问（我相信这不会仅仅是我才会有的疑问）：

（1）短期成本曲线的含义，大家都清楚吗？





我们所要唯一强调的是：短期总成本曲线表示的并不是在不同的产出水平上，其成本为最小成本；

图中的短期总成本曲线只是告诉了我们：当企业的规模为 k 时，生产不同的产量时，所对应的总成本水平，换句话说，短期总成本曲线的图形并没有明确的指示出其最小的成本与最优的产量水平。

（好像是挺简单，但要说清楚还是挺麻烦的）

（2）在短期内的坐标系中，位于上方的平均成本曲线的规模一定比位于下方的平均成本曲线的大吗？

这没有什么直接的联系，这仅仅说明了在同一产量上，位于下方的平均成本比位于上方的平均成本要低。

（3）在短期内的坐标系中，最低点相同的情况下，位于右方的平均成本曲线的规模一定比位于左方的平均成本曲线的大吗？

可以这样认为；因为横轴上的产量水平偷偷地告诉了我们这个秘密：照常理来说，规模大的企业最优产量水平要比规模小的企业最优产量水平大。

（4）规模报酬？在长期内，企业真的会这么傻吗？

$f(tx,ty)=t^{\lambda}f(x,y)$，规模报酬是指当所有的投入量同比例变化时，产出量的相应变化；此时可分为规模报酬递增、不变、递减；

但在长期内，厂商会想方设法的寻找到对应产量上的最小成本，而不会只拘泥于同比例的变化投入量，也许他们会发现对于某一产量，增加一倍的工厂规模、两倍的劳动投入量会比增加两倍的工厂规模与劳动投入量所用的成本要小得多；

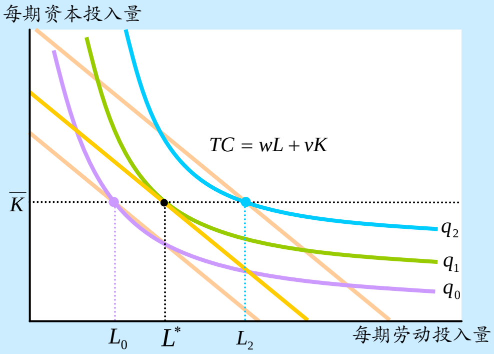
这样，我们就引出规模经济与规模不经济的概念：成倍（比如双倍）的成本是否会获得成倍（双倍）的产量，从而企业不会仅仅只考虑成本中所包含的各投入量是否同比例变化；当然，规模经济这个概念包括规模报酬递增的特殊情况。

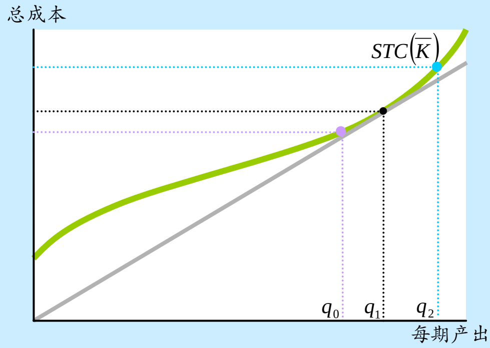
（平狄克 微观经济学 第二版 中国人民大学出版社 p194）

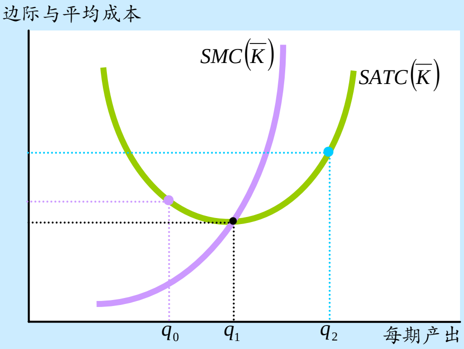
（曼昆 中国人民大学出版社 经济学原理 第三版 p236）

（斯蒂格利茨 经济学 第二版 中国人民大学出版社

（5）在短期内，企业的最优、非最优产量选择？





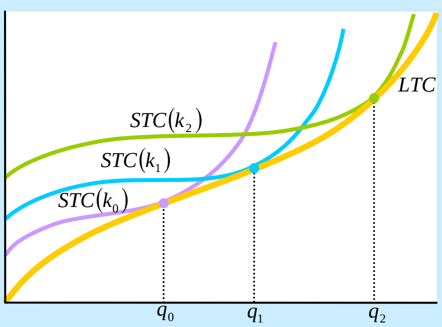


当企业处于短期时，其企业是受到规模的限制，所以企业是根据其规模来确定最优产量水平；

q_0、q_1与q_2为等产量曲线，此时对于企业而言的最优的产量选择为q_1；而非最优产量为q_0、q_2；

最优产量在短期总成本曲线上表现为其平均成本等于边际成本，而平均成本达到最小值。

（6）怎样从平均成本曲线上辨认厂商的规模效应、规模是否经济？

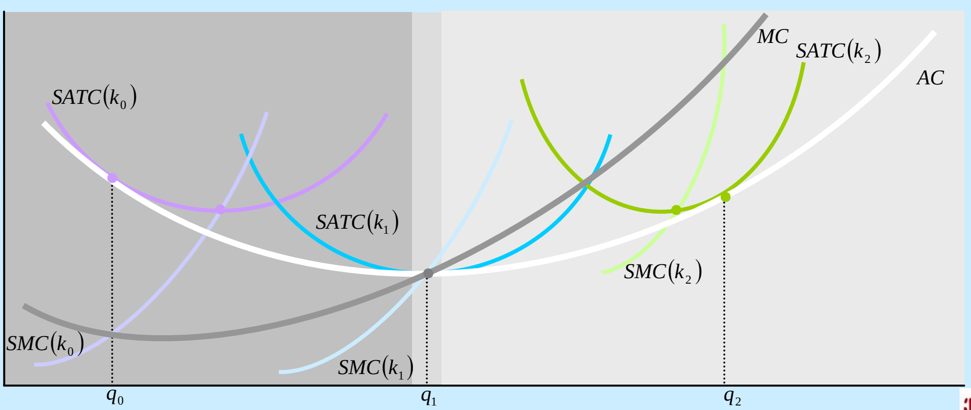


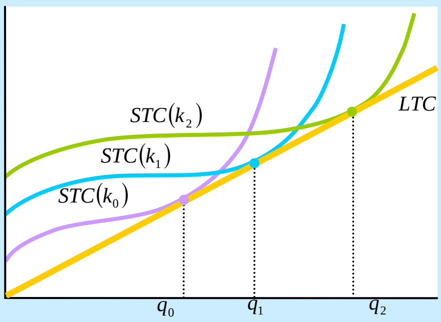
这是我们最常见的三次曲线型的成本曲线；

无论其长期、短期平均成本曲线和边际成本曲线都具有通常的 U 形；

我们又可通过 $f(tx,ty) = t^{\lambda} f(x,y)$ 的规模报酬概念：当劳动 q_0 与资本 k_0 的投入量以同一比例增长到 q_1、 k_1 时，其平均成本是下降的，这时企业表现出规模报酬递增的阶段（平均成本曲线的下降部分）；同理，在下图中，我们可看出企业所经历了规模报酬递增、不变、递减的阶段。

（在这，我们只是用了规模经济的一个特例来说明问题）



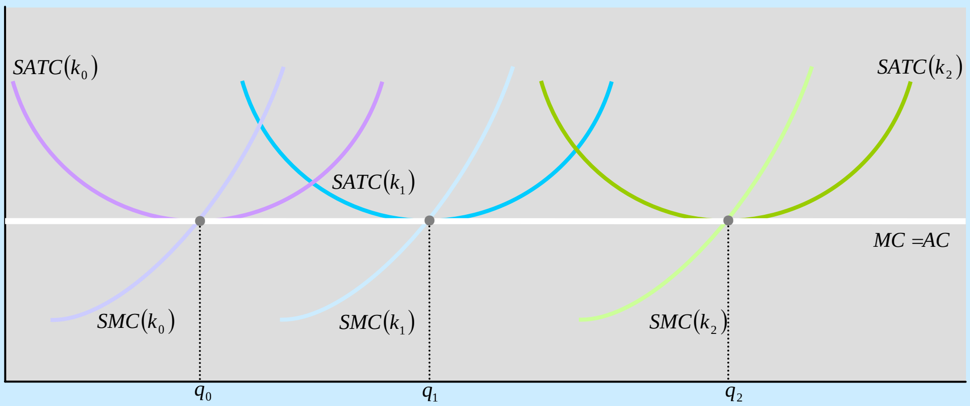


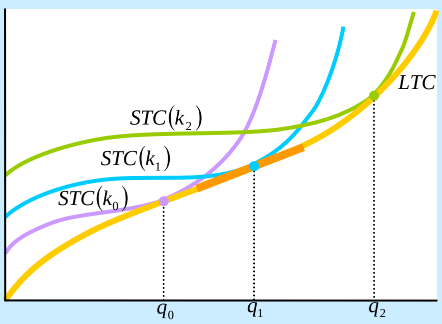
但三次曲线型的成本曲线并非是我们的唯一选择，这是规模报酬不变的成本曲线；

其短期平均成本曲线和边际成本曲线具有通常的 U 形，但由于规模报酬不变，其长期平均成本曲线和边际成本曲线为下图中的直线，并且重合；这时企业所经历的全都处在规模报酬不变的阶段。

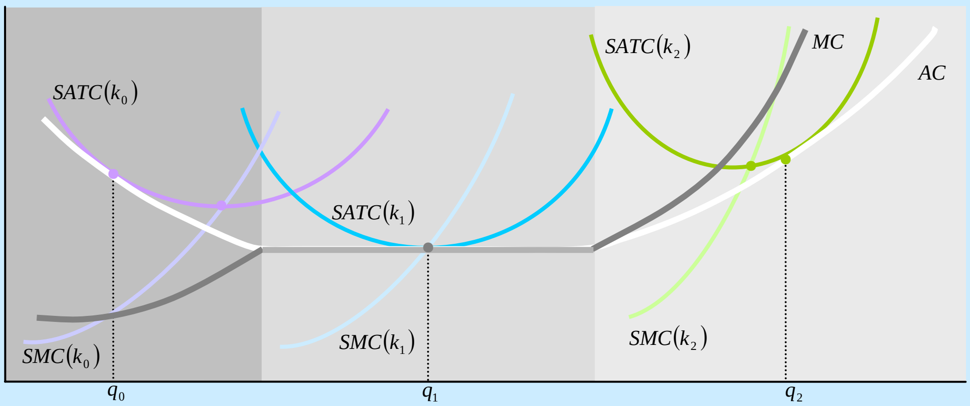
许多天才经济学家都认为，在制造业中，规模报酬不变是最常见的。

（斯蒂格利茨 经济学 第二版 中国人民大学出版社 p246）





但这有可能是现实中更容易发生的企业轨迹。



（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p338
（曼昆 中国人民大学出版社 经济学原理 第三版 p235

（7）放心！以上几个问题只是热热身，如果大家认为自己的水平不错，那么我们继续出招：

①在短期内，我们知道当边际成本等于平均成本时，平均成本达到最低水平，但在长期内，厂商会有可能选择在此点所对应的产量上进行生产吗？

②在产量-总成本空间，所得的长期总成本曲线是各规模的短期总成本曲线所对应的平均成本的最低点的集合，所以由此推出，在产量-平均成本空间，长期平均成曲线必定与短期平均成本曲线的最低点相切，此说法对否？

③在长期，如果企业的长期总成本曲线呈U型时，为什么企业的长期的最优产量决策有时不会在相应的产量的短期平均成本曲线的最低点进行？

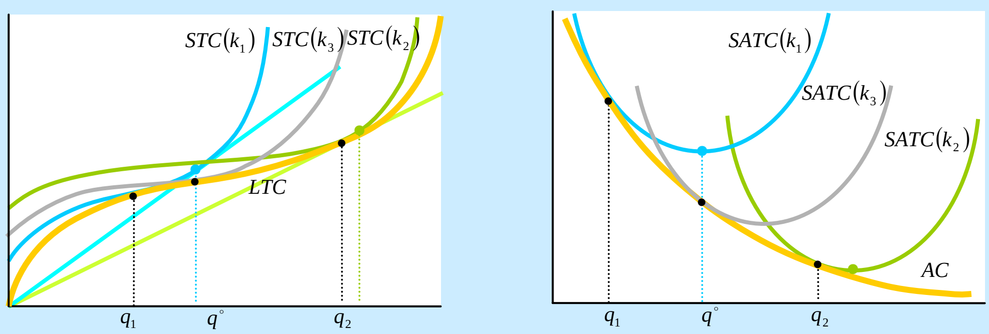
④请解释在规模报酬递增的阶段，企业的长期最优产量会出现在相同企业规模的短期平均成本曲线最低点的左侧，明明最低点的平均成本是最小的；

其实，以上几个问题所问的只是同一件事：企业的短期与长期生产决策差异的原因；

众多的教科书上都会有类似的解释：因为在短期内厂商受到企业规模的限制，而长期内是不存在固定成本，所以导致了两者的差异；或者是说因为企业存在规模经济、规模报酬不变与规模不经济的阶段，所以两者的决策不同……

（这样的解释说明问题了吗，也许在经济学家眼中这是很明显的问题，但对于初学者而言，则是另一码事）

不过，在此之前，我们需要先澄清一件事：②问中的说法正确吗？（这有可能是所有误解的根源所在）这有一个明确的提示：错误！



长期总成本曲线是由各短期总成本曲线的下包络线，其显示了对于各产量，厂商会选择最优的企业规模从而达到长期成本最小化，而不是各短期成本曲线的最小平均成本点的集合；

以上两图绘制了规模经济时的情况，右图可清楚地区分企业的短期与长期生产决策差异的原因，在短期，规模为k_1的企业会选择q°的最优产量，而在长期，当企业决定生产q°的产量时，其最优的规模应是k_3，左图中可看出在q°的产量上，规模k_1的企业比规模为k_3的企业的总成本要高（这是我们最想知道的）；

当企业处于规模不经济时，在总成本曲线图中，短期的最优产量会出现在长期最优产量的右边；只有当企业处于规模保持不变时，企业的短期与长期的生产决策才会一致。

通过对以上的几个问题的分析，相信对题目的答案已是了然在胸了；那就是对于不同的成本曲线，两人的说法都有可能正确。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p 343）

（原来，在通向真理的道路上布满如此多的荆棘，有点明白这个道理了……）

5（1）实为解方程：

$$150 = 30\,j_1^{\frac{1}{2}}\,; \qquad 300 = 30\,j_2^{\frac{1}{2}}\,; \qquad 450 = 30\,j_3^{\frac{1}{2}}$$

$j_1 = 25$;　　　$j_2 = 100$;　　　$j_3 = 225$

（2）题目实为求短期边际成本函数，有题设可知，$J = \left(\frac{q}{\sqrt{S}}\right)^2$ 则短期总成本函数为：

$$STC(w_S, w_J, q, \overline{S}) = w_S\overline{S} + w_J J = w_S\overline{S} + \frac{w_J}{\overline{S}}q^2$$

$$SMC(w_S, w_J, q, \overline{S}) = 2\frac{w_J}{\overline{S}}q$$

当 $q = 150$ 时，$SMC = 4$；当 $q = 300$ 时，$SMC = 8$；当 $q = 450$ 时，$SMC = 12$；

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p 343）

进一步提问：为什么以下做法不正确？

（2）
$$\min_{S,J} w_S S + w_J J$$

$$s.t.\quad q = S^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}$$

构造拉氏方程：　$\psi(w,\lambda) = w_S S + w_J J + \lambda(q - S^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}})$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial S} = w_S - \lambda\frac{q}{2S} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial J} = w_J - \lambda\frac{q}{2J} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = q - S^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得：　$S = \frac{w_J}{w_S}J$；　$J = \frac{w_S}{w_J}S$

把上两式分别代入（3）得条件要素需求函数：$S = q\left(\frac{w_J}{w_S}\right)^{\frac{1}{2}}$；$J = q\left(\frac{w_S}{w_J}\right)^{\frac{1}{2}}$

把要素需求函数代入目标函数得成本函数：$c(w,q) = 2q(w_S w_J)^{\frac{1}{2}}$

$$Mc_q = 2(w_S w_J)^{\frac{1}{2}} = 2(3\cdot 12)^{\frac{1}{2}} = 12$$

因为以上做法实为求长期边际成本，做法本身并没有什么不妥，只是答非所问而已。在以下的题目中，我们会进一步区分出长期与短期成本函数的区别。（这也是我几个星期被困在这一讲得原因，我相信这并不是光光困扰我的问题）

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p68-70）

6（1）
$$\min_{K,L} vK + wL$$

$$s.t.\quad q = K^{\alpha}L^{\beta}$$

构造拉氏方程： $\psi(v,w,\lambda)=vK+wL+\lambda(q-K^{\alpha}L^{\beta})$

一阶条件：

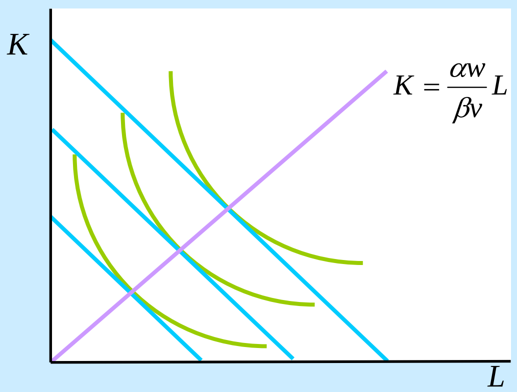
$$\frac{\partial\psi}{\partial K}=v-\lambda\frac{\alpha q}{K}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial L}=w-\lambda\frac{\beta q}{L}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=q-K^{\alpha}L^{\beta}=0 \qquad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $K=\frac{\alpha w}{\beta v}L$； $L=\frac{\beta v}{\alpha w}K$

由上可知： $\frac{v}{\alpha}K=\frac{w}{\beta}L$，该厂商的扩张曲线为：



把上两式分别代入（3）得条件要素需求函数：

$$K=q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha w}{\beta v}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}};\quad L=q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta v}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

把要素需求函数代入目标函数得长期总成本函数：

$$LTC(v,w,q)=\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}v^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

（2）当设 $\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]=B$ 时， $LTC(v,w,q)=Bq^{\frac{1}{\alpha+\beta}}v^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$

（3）当 $\alpha+\beta=1$ 时，设 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=a$ 则， $LTC(v,w,q)=Bqv^{a}w^{1-a}, \frac{\partial c}{\partial q}=Bv^{a}w^{1-a}=$ 常数

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 P

7 （1） 由题设所给的生产函数可知，$q=5K=10L$，则：$K=\frac{q}{5}$；$L=\frac{q}{10}$

长期总成本函数为： $LTC(v,w,q)=vK+wL=\frac{q}{5}+\frac{3q}{10}=\frac{q}{2}$

长期平均成本为：$LAC=\frac{1}{2}$； 长期边际成本为：$LMC=\frac{1}{2}$

（2） 当 $K=10$ 时，此时短期厂商的最大产量为 50，而短期总成本函数为：

$$STC(v,w,q,\overline{K})=v\overline{K}+wL=\overline{K}+3\frac{q}{10} \quad ; \ (q\le 50)$$

$$SAC=\frac{\overline{K}}{q}+\frac{3}{10}; \qquad SMC=\frac{3}{10}$$

当 $q=10$ 时， $STC=13$；$SAC=\frac{13}{10}$；$SMC=\frac{3}{10}$；

当 $q=50$ 时， $STC=25$；$SAC=\frac{1}{2}$；$SMC=\frac{3}{10}$；

而产量以当前的规模是不可能达到 100 单位的，这是由生产函数所限。

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p 343）

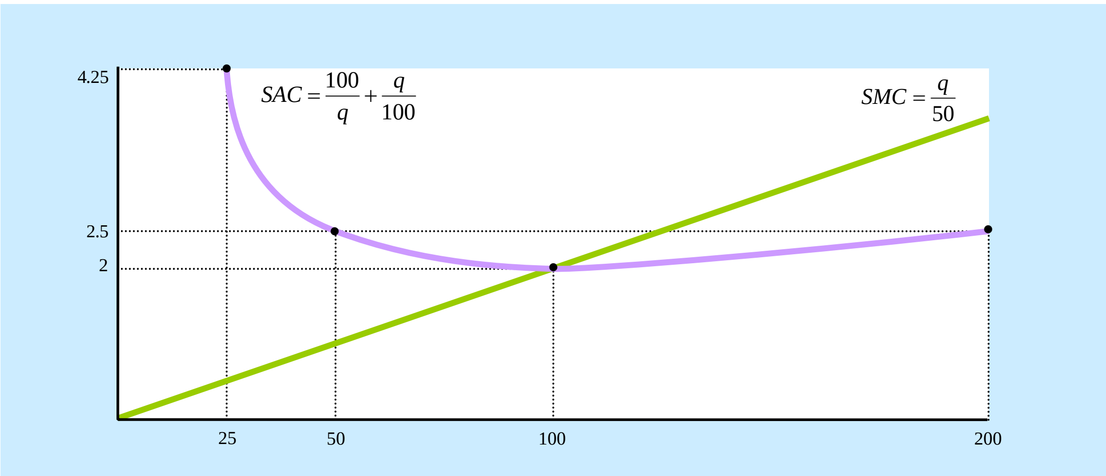
8（1） 由题设可知，$K=100$ 则：$q=20\sqrt{L}$；$L=\left(\frac{q}{20}\right)^2$，又知：$v=1;w=4$ 得：

短期总成本函数为： $STC(v,w,q,\overline{K})=v\overline{K}+wL=100+\frac{q^2}{100}$

短期平均成本函数为：$SAC=\frac{100}{q}+\frac{q}{100}$

短期边际成本函数为：$SMC=\frac{q}{50}$

（3）



（2） 当 $q=25$ 时， $STC=106.25$；$SATC=4.25$；$SMC=0.5$；

当 $q=50$ 时， $STC=125$； $SATC=2.5$； $SMC=1$；

当 $q=100$ 时， $STC=200$； $SATC=2$； $SMC=2$；

当 $q=200$ 时， $STC=500$； $SATC=2.5$； $SMC=4$；

（4） 短期平均成本曲线的最低点与短期边际成本曲线相交，其解释在课本的 121 页。

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p 344）

进一步提问：这种做法是编书者的思路，问题与解题过程很一致，但以下的做法如何？

（1）

$$\min_{K,L} vK+wL$$

$$s.t.\quad q=2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

构造拉氏方程：$\psi(v,w,\lambda)=vK+wL+\lambda(q-2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}})$

一阶条件：

$$\frac{\partial\psi}{\partial K}=v-\lambda\frac{q}{2K}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial L}=w-\lambda\frac{q}{2L}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=q-2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=0 \qquad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $K=\frac{w}{v}L$； $L=\frac{v}{w}K$

把上两式分别代入（3）得条件要素需求函数：$K=\frac{q}{2}\left(\frac{w}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$； $L=\frac{q}{2}\left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$

把要素需求函数代入目标函数得长期总成本函数：

$$LTC(v,w,q)=\frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}+\frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}$$

当 $K=100$， $v=1$， $w=4$ 时，短期总成本函数为：$STC(v,w,q,\overline{K})=100+q$；

短期平均成本函数为：$SAC=\frac{100}{q}+1$

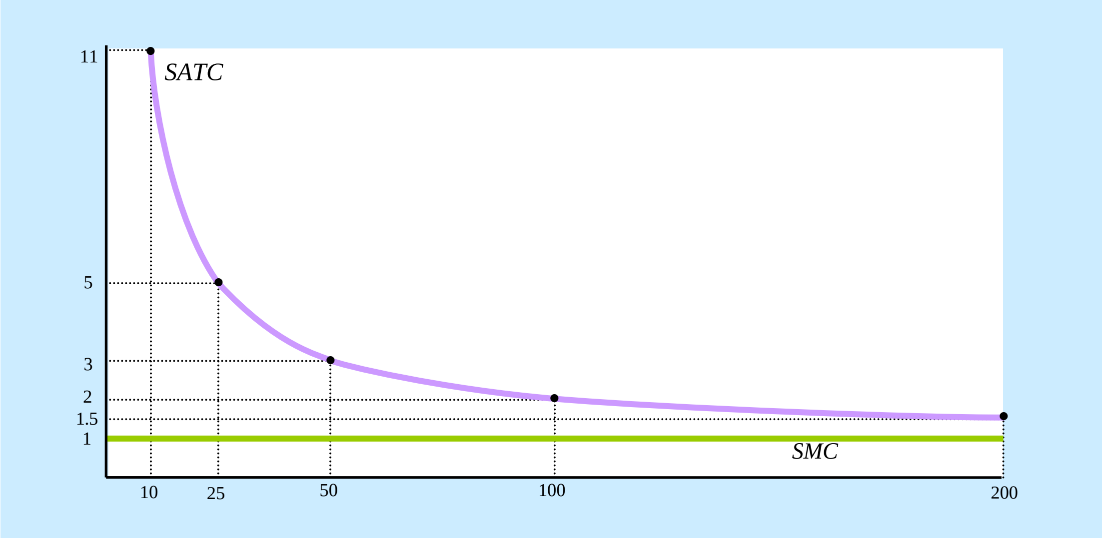
（2） 当 $q=25$ 时， $STC=125$； $SATC=5$； $SMC=1$；

当 $q=50$ 时， $STC=150$； $SATC=3$； $SMC=1$；

当 $q=100$ 时， $STC=200$； $SATC=2$； $SMC=1$；

当 $q=200$ 时， $STC=300$； $SATC=1.5$； $SMC=1$；

(3)



(4)短期边际成本曲线不可能与短期平均总成本相交。因为在规模报酬不变的企业是不可能达到利润最大化的。

进一步提问:答案跟不上题目的思路,难道我们的做法不妥吗?

的确有所不妥,在该死的蓝色字体出现之前,求长期总成本函数的思路是无可否认的,但值得注意的是由长期成本函数推出的短期成本函数时,则出现了问题,让我们来看看这是怎么回事:

由第一种正确做法得出的短期成本曲线为: $STC(v,w,q,\overline{K})=v\overline{K}+w\dfrac{q^2}{4\overline{K}}$

由第二种错误做法得出的短期成本曲线为: $STC(v,w,q,\overline{K})=v\overline{K}+\dfrac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}$,为了可以更清楚的显示两者的区别,我们把由第二种错误做法得出的短期成本曲线为:

$$STC(v,w,q,\overline{K})=v\overline{K}+w\frac{q}{2}\left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$$

现在我们可知道错误的原因在于对劳动量的确定上,第二种错误做法所得的劳动量在短期内是不受资本的替代效应的影响,这是错误所在的根本;因为题设所给的生产函数为双曲线,而由第二种错误做法得出的劳动量代入原技术,则是一条斜率为正的射线。至于(4)的答案错误的原因在于没有分清长期与短期,虽然在长期,购买报酬不变的企业无利润最大化的产量,但在短期内,其规模是受到资本投入的影响,然而,厂商会根据其资本投入量的大小来确定其的最优产量,从而达到利润最大化。所以,在短期内是有利润最大化的产量。

(好险,好险,这题占我四个晚上的时间,几乎都要向自己所提的问题妥协了。)

9(1) 由题设可知, $q=\sqrt{\overline{K_i}L_i}$; $L=\dfrac{q^2}{\overline{K_i}}$,又知: $v=1;w=1$得:

短期总成本函数为: $STC_i(v,w,q_i,\overline{K_i})=v\overline{K_i}+wL_i=v\overline{K}_i+w\dfrac{q_i^2}{\overline{K}}$

$$STC_1(v,w,q_1,\overline{K_1})=v\overline{K_1}+wL_1=v\overline{K}_1+w\frac{q_1^{\ 2}}{\overline{\overline{K}}}=25+\frac{q_1^2}{25}$$

$$STC_2(v,w,q_2,\overline{K_2})=v\overline{K_2}+wL_2=v\overline{K}_2+w\frac{q_2^{\ 2}}{\overline{\overline{K}}}=100+\frac{q_2^2}{100}$$

$$\min_{q_1,q_2} STC_1(q_1)+STC_2(q_2)$$

$$s.t. \qquad q=q_1+q_2$$

构造拉氏方程： $\psi(q,\lambda)=STC_1(q_1)+STC_2(q_2)+\lambda(q-q_1-q_2)$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1}=\frac{2q_1}{25}-\lambda=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=\frac{2q_2}{100}-\lambda=0 \tag{2}$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得：
$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{1}{4}$$

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p441）

（2）两工厂的短期总成本函数为：

$$STC_1=vK_1+wL_1=25+\left(\frac{q_1}{5}\right)^2; \qquad STC_2=vK_2+wL_2=100+\left(\frac{q_2}{10}\right)^2$$

两工厂的短期平均成本函数为： $SAC_1=\frac{25}{q_1}+\frac{q_1}{25}$； $SAC_2=\frac{100}{q_2}+\frac{q_2}{100}$

两工厂的短期边际成本函数为： $SMC_1=\frac{2q_1}{25}$； $SMC_2=\frac{q_2}{50}$

短期总成本函数为： $STC=STC_1\left(\frac{1}{5}q\right)+STC_2\left(\frac{4}{5}q\right)=125+\frac{q^2}{5^3}$

短期平均成本函数为： $SATC=\frac{STC}{q}=\frac{5^3}{q}+\frac{q}{5^3}$

短期边际成本函数为： $SMC=\frac{dSTC}{dq}=\frac{2q}{5^3}$

当 $q=100$ 时， $STC=205$； $SATC=2.05$； $SMC=1.6$；

当 $q=125$ 时， $STC=250$； $SATC=2$； $SMC=2$；

当 $q=200$ 时， $STC=445$；$SATC=2.225$；$SMC=3.2$；

（3）在长期的话，两个工厂的生产函数就是一致的，又其生产函数表现为规模报酬不变，所以，厂商可在两个工厂之间任意的分配产量；

$$\min_{K,L} vK+wL$$

$$s.t.\quad q=K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

构造拉氏方程： $L(v,w,\lambda)=vK+wL+\lambda(q-K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}})$

一阶条件：

$$\frac{\partial\psi}{\partial K}=v-\lambda\frac{q}{2K}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial L}=w-\lambda\frac{q}{2L}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=q-K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=0 \quad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $K=\frac{w}{v}L$； $L=\frac{v}{w}K$

把上两式分别代入（3）得条件要素需求函数： $K=\frac{q}{2}\left(\frac{w}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$； $L=\frac{q}{2}\left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$

把要素需求函数代入目标函数得长期总成本函数：

$$LTC(v,w,q)=\frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}+\frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}$$

长期总成本函数： $LTC(v,w,q)=\frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}+\frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}=q$

长期平均成本函数： $LATC=1$

长期边际成本函数： $LMC=1$

（4）在第三问中，其生产函数表现为规模报酬不变，所以，无论厂商在两个工厂怎样分配产量都不会造成长期成本的增加，但如果两个工厂的生产函数都表现为规模报酬递减的话，情况则完全不同了，这时，厂商分配产量的标准是要使得两个工厂的边际成本相等；只有这样才能达到产量分配最优；有由题设可知两工厂的生产函数相同，所以，厂商的产量分配为 $q_1=q_2=\frac{1}{2}q$；（这也可由重复第一问的运算过程得出）

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p441）

现在我们设生产函数为： $q=K^{\alpha}L^{\beta}$；（$\alpha+\beta<1$）（可看出这是规模报酬递减的企业，所以在长期存在利润最大化和成本最小化的解）

$$\min_{K,L} vK+wL$$

$$s.t.\quad q=K^{\alpha}L^{\beta}$$

构造拉氏方程：$\psi(v,w,\lambda)=vK+wL+\lambda(q-K^{\alpha}L^{\beta})$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial K}=v-\lambda\alpha\frac{q}{K}=0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial L}=w-\lambda\beta\frac{q}{L}=0 \quad (2)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=q-K^{\alpha}L^{\beta}=0 \quad (3)$$

由$\frac{(1)}{(2)}$得：$K=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{v}L$；　$L=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{v}{w}K$

代入（3）得条件要素需求函数：$K=q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{v}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$；　$L=q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{v}{w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

把要素需求函数代入目标函数得长期总成本函数：

$$LTC(v,w,q)=q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot v^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\cdot w^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}}\cdot v^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

设 $B=\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot v^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\cdot w^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}}\cdot v^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$

长期总成本函数：$LTC(v,w,q)=B\cdot q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$

长期平均成本函数：$LATC=B\cdot q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

长期边际成本函数：$LMC=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot B\cdot q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

我们再把$q_1=q_2=\frac{1}{2}q$；代入得：

长期总成本函数：$LTC=LTC_1+LTC_2=2\cdot B\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot q\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}=2^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cdot B\cdot q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$

长期平均成本函数：$LATC=2^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cdot B\cdot q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

长期边际成本函数：$LMC=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot 2^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cdot B\cdot q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p 345）

10（1）由题设可知，$q=2\sqrt{KL}$；$L=\frac{q^2}{4K}$

短期总成本函数为：　$STC(v,w,q,\overline{K}) = vK + wL = v\overline{K} + w\dfrac{q^2}{4\overline{K}}$

（2）
$$\min_{K,L} vK + wL$$
$$s.t. \quad q = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

构造拉氏方程：　$\psi(v,w,\lambda) = vK + wL + \lambda(q - 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}})$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial K} = v - \lambda\frac{q}{2K} = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial L} = w - \lambda\frac{q}{2L} = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = q - 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad (3)$$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 得：　$K = \dfrac{w}{v}L$；　$L = \dfrac{v}{w}K$

由上可知：$\dfrac{K}{L} = \dfrac{w}{v}$ 则：　$K = \dfrac{q}{2}\sqrt{\dfrac{w}{v}}$

（3）把上两式分别代入（3）式得条件要素需求函数：$K = \dfrac{q}{2}\left(\dfrac{w}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$；$L = \dfrac{q}{2}\left(\dfrac{v}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$

把要素需求函数代入目标函数得长期总成本函数：
$$LTC(v,w,q) = \frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}$$

另一种解法（这是书上的内容）

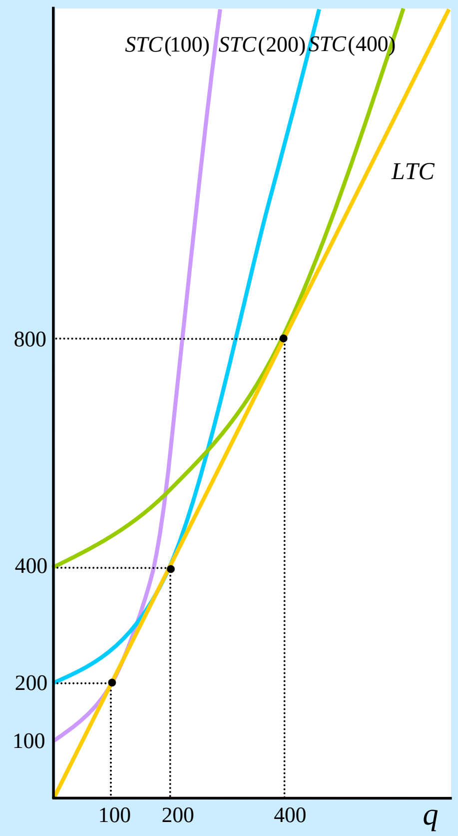
短期总成本函数为：　$STC(v,w,q,\overline{K}) = vK + wL = v\overline{K} + w\dfrac{q^2}{4\overline{K}}$

设 $F(v,w,q,\overline{K}) = v\overline{K} + w\dfrac{q^2}{4\overline{K}} - STC$，则：

一阶条件：
$$\frac{\partial F(v,w,q,\overline{K})}{\partial\overline{K}} = v - w\frac{q^2}{4\overline{K}^2} = 0$$
$$\overline{K} = \frac{q}{2}\left(\frac{w}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$$

把上式代入短期总成本函数得长期总成本函数：
$$LTC(v,w,q) = \frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2}(wv)^{\frac{1}{2}}$$

（4）



当 $v=1$，$w=4$ 时，

长期总成本函数：$LTC(q)=2q$

当 $\overline{K}=100$ 时，$STC=100+\dfrac{q^2}{100}$；

当 $\overline{K}=200$ 时，$STC=200+\dfrac{q^2}{200}$；

当 $\overline{K}=400$ 时，$STC=400+\dfrac{q^2}{400}$；

解方程 $\begin{cases} LTC(q)=2q \\ STC(q)=\overline{K}+\dfrac{q^2}{\overline{K}} \\ LTC(q)=STC(q) \end{cases}$ 得：$q_1=q_2=\overline{K}$

这说明，短期成本函数与长期成本函数相切，由此可知，长期成本曲线是短期成本曲线的包络线。

11　首先，我们这样来看这问题，由利润最大化得出的要素需求函数为要素价格和产品价格的函数，而由成本最小化所得出的条件要素需求函数为要素价格和产品产量的函数，为方便我们查阅，我们在这举个具体例子：（微观经济学十八讲　平新乔　北大出版社 P117）生产函数为：$q=Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$；$\alpha>0;\beta>0$；$\alpha+\beta<1$ 由利润最大化得：

$$\max \pi(x)=p\cdot Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}-r_1x_1-r_2x_2$$

一阶条件：

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_1}=p\cdot\alpha\frac{q}{x_1}-r_1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_1}=p\cdot\beta\frac{q}{x_2}-r_2=0 \qquad (2)$$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 得：$x_1=\dfrac{\alpha r_2}{\beta r_1}x_2$；　$x_2=\dfrac{\beta r_1}{\alpha r_2}x_1$

把上两式代入一阶条件的要素需求函数：

$$x_1=(A\cdot p)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\beta}{r_2}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\alpha}{r_1}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}; \qquad x_2=(A\cdot p)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\beta}{r_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\alpha}{r_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

通过以上的要素需求函数我们可以知道他的性质：

（1）因为存在利润最大化，所以对要素需求的二阶函数为小于零，这意味着要素需求函数是要素价格的减函数，这可由一阶条件对要素价格求导得出。
（2）一阶条件对产品价格求导可得出，要素需求函数为产品价格的增函数。
（3）假定生产函数二阶可导并且连续，这意味着要素的交叉价格相应是相等的，即

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j}=\frac{\partial x_j}{\partial r_i} \quad (i,j=1,2)。$$

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p34-37）
（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p22-25）

$$\min_x r_1x_1+r_2x_2$$

$$s.t.\quad q=Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

构造拉氏方程： $\psi(x,\lambda)=r_1x_1+r_2x_2+\lambda(q-Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta})$

一阶条件： $$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=r_1-\lambda\frac{\alpha q}{x_1}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=r_2-\lambda\frac{\beta q}{x_2}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=q-Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}=0 \quad (3)$$

由 $\frac{(1)}{(2)}$ 得： $x_1=\frac{\alpha r_2}{\beta r_1}x_2$； $x_2=\frac{\beta r_1}{\alpha r_2}x_1$

把上两式代入（3）的条件要素需求函数：

$$x_1=\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta r_1}{\alpha r_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}};\qquad x_2=\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha r_2}{\beta r_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

通过以上的条件要素需求函数我们可以知道他的性质：
（1）条件要素需求函数是要素价格的零次齐次方程
（2）条件要素需求函数是自身要素价格的减函数；
（3）要素的交叉价格相应是相等的，即 $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}=\frac{\partial x_j}{\partial r_i} \quad (i,j=1,2)$。

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p61-65
蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p48）

由上，我们可看出要素需求函数和条件要素需求函数各有各的特点，并不是前者具有后者的所有性质。

12 成本函数所具有的性质有：
（1）是要素价格的非减函数；
（2）是要素价格的一次齐次函数；
（3）是要素价格的凹函数；

（4）在要素价格上连续的。

由上可这，题设的函数不能成为成本函数。

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p76-77）

13 （1）由题设所给的生产函数可知，两要素是完全替代的，所以厂商会选用较便宜的要素，则此技术的成本函数为：$C(r,q)=q\cdot\min\{r_1,r_2\}$；

（2）由题设所给的生产函数可知，两要素是完全替代的，所以厂商会选择在折点进行生产，则此技术的成本函数为：$C(r,q)=q(r_1+r_2)$；

当限制条件为固定比例（里昂惕夫）生产函数或是线形技术的生产函数时，我们可通过简单的分析后，直接写出其成本函数。

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p59-60）

（3）
$$\min_z r_1z_1+r_2z_2$$

$$s.t.\quad q=\left(z_1^\rho+z_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

构造拉氏方程：$\psi(z,\lambda)=r_1z_1+r_2z_2+\lambda\left[q-\left(z_1^\rho+z_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial z_1}=r_1-\lambda\left(z_1+z_2\right)^{\frac{1}{\rho}-1}z_1^{\rho-1}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_2}=r_2-\lambda\left(z_1+z_2\right)^{\frac{1}{\rho}-1}z_2^{\rho-1}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial \lambda}=q-\left(z_1^\rho+z_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}=0 \qquad (3)$$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 得： $z_1=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}z_2$； $z_2=\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}z_1$

把上两式代入（3）的条件要素需求函数：

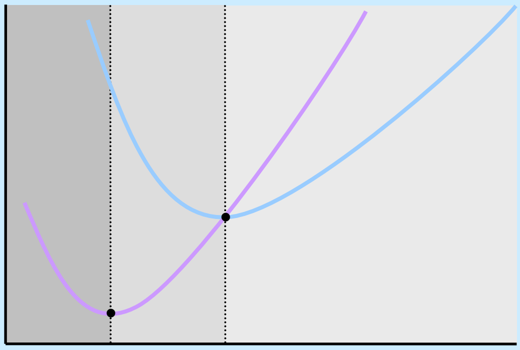
$$z_1=\frac{r_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(r_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+r_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\cdot q \quad ; \qquad z_1=\frac{r_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(r_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+r_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\cdot q$$

把条件要素需求函数代入目标函数得成本函数：

$$C(r,q)=q\left(r_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+r_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$$

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社

14 我就不说了



15 $$Max \qquad \pi = pf(x_1, x_2) - C$$

$$\pi = a_1 p \ln x_1 + a_2 p \ln x_2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 \quad (1)$$

一阶条件: $$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = \frac{a_1 p}{x_1} - w_1 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = \frac{a_2 p}{x_2} - w_2 = 0 \quad (3)$$

由（2），（3）得: $x_1 = \dfrac{a_1 p}{w_1}$ （4）; $x_2 = \dfrac{a_2 p}{w_2}$ （5）

把（4），（5）式代入目标函数（1）得利润函数:

$$\pi(w, p) = p\left(a_1 \ln \frac{a_1 p}{w_1} + a_2 \ln \frac{a_2 p}{w_2}\right) - (a_1 + a_2)p$$

把（4），（5）式代入生产函数得供给函数:

$$y(w, p) = p\left(a_1 \ln \frac{a_1 p}{w_1} + a_2 \ln \frac{a_2 p}{w_2}\right)$$

1 $\pi'_p(w, p) = \left(a_1 \ln \dfrac{a_1 p}{w_1} + a_2 \ln \dfrac{a_2 p}{w_2}\right) \geq 0$

$\pi'_{w_1}(w, p) = -\dfrac{a_1 p}{w_1} \leq 0$; $\pi'_{w_2}(w, p) = -\dfrac{a_2 p}{w_2} \leq 0$

2 $\pi(tw, tp) = tp\left(a_1 \ln \dfrac{a_1 tp}{tw_1} - a_2 \ln \dfrac{a_2 tp}{tw_2}\right) - (a_1 + a_2)tp = t\pi(w, p); t \geq 0$

3 设 $p_1 < p < p_2; w_{i1} < w_i < w_{i2}; p = tp_1 + (1-t)p_2; w_i = tw_{i1} + (1-t)w_{i2}\, 0 \leq t \leq 1$

$$\pi((1-t)w,(1-t)p)+\pi(tw,tp)$$

$$=(1-t)p\left(a_1\ln\frac{a_1((1-t)p_2)}{(1-t)w_{12}}-a_2\ln\frac{a_2((1-t)p_2)}{(1-t)w_{22}}\right)-(a_1+a_2)(1-t)p_2+$$

$$tp\left(a_1\ln\frac{a_1tp_1}{tw_{11}}-a_2\ln\frac{a_2tp_1}{tw_{21}}\right)-(a_1+a_2)tp_1$$

$$=(1-t)tp\left(a_1\ln\frac{a_1p}{w_1}-a_2\ln\frac{a_2p}{w_2}\right)-(a_1+a_2)p<\pi(w,p)$$

4 $-\dfrac{\partial\pi}{\partial w_i}=x_i=\dfrac{a_ip}{w_i}$；$\dfrac{\partial\pi}{\partial p}=y(w,p)=p\left(a_1\ln\dfrac{a_1p}{w_1}+a_2\ln\dfrac{a_2p}{w_2}\right)$

综上所述，所得的利润函数满足利润函数的所有性质。课本上的 131 页的错误，利润函数是对于要素价格递减的，而不是递增的。

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p43-44）

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p25-28）

16 设厂商的最大利润为 $\pi=pf(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2$，此时，企业处于规模报酬递增阶段，即 $f(tx_1,tx_2)=tf(x_1,x_2)$，$t\geq 0$，现在厂商扩大规模，我们有：

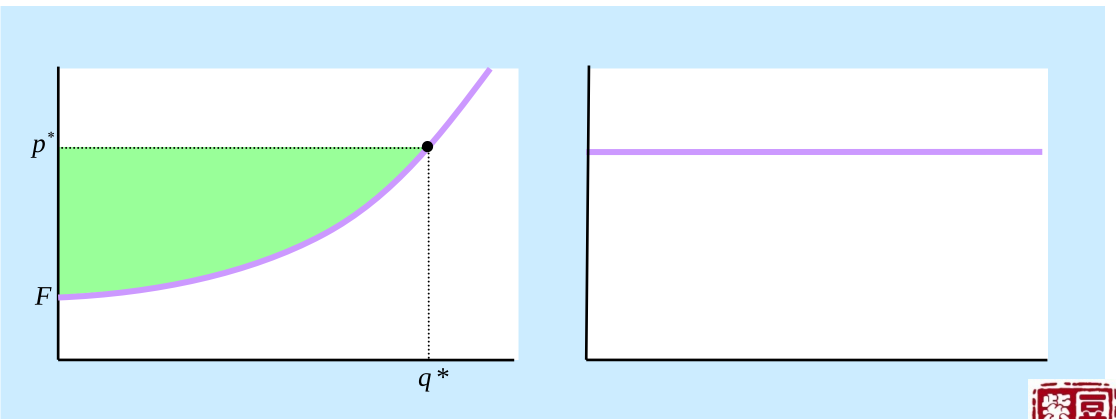
$$f(tx_1,tx_2)-tw_1x_1-tw_2x_2=t[f(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2]=t\pi$$

这与假定前提相矛盾，在厂商达到利润最大化时必须满足 $\pi=t\pi$，我们可得出厂商在规模报酬不变的阶段的最大利润为零。

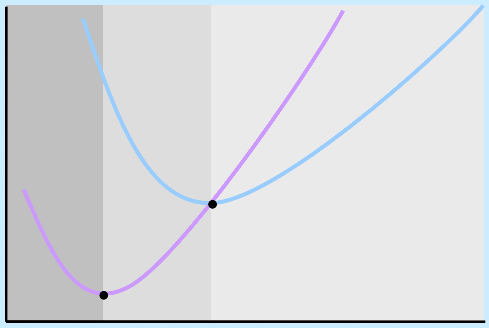
17 题设中的 $\partial\pi/\partial p=y(w,p)$，这实际上是厂商的供给函数，根据数学知识可知，题中的式子为图中的显眼的部分，而根据生产者剩余的概念可知，此部分为生产者剩余。

则在短期内：$\int_0^{p^*}\dfrac{\partial\pi^*}{\partial p}dp=\pi(p)\Big|_0^{p^*}=\pi(p^*)-\pi(0)=\pi+FC$

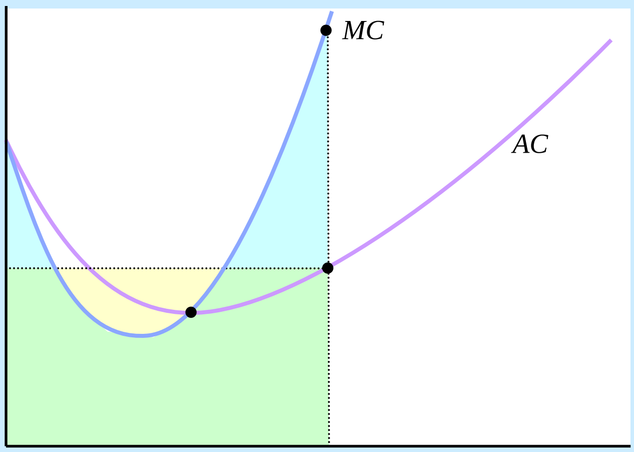
在长期内，由于企业为价格接受者，所以其供给曲线为水平线，且 $p=MC$，此时的利润为零；



19 （1）



（2）



从图中可看出，$\sum_{i=1}^{n} C(q_i)$ 为边际成本曲线以下的区域，而 $C\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)$ 为矩形区域，只要满足 $\sum_{i=1}^{n} C(q_i) > C\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)$ 的情况下，则不能得出平均成本递减的结论。

18 （1）

$$Max \qquad \pi = pf(x_1, x_2) - C$$

$$\pi = pf(x_1, x_2) - C = 20q - q^2 - 25$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 20 - 2q = 0 \qquad\qquad q = 10$$

$$\pi^* = 20 \cdot 10 - 10^2 - 25 = 75$$

（2）生产者剩余：利润+固定成本=25+75=100

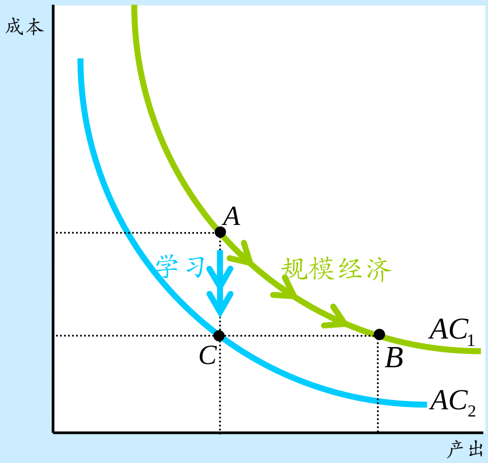
（3）

$$\pi = pf(x_1, x_2) - C = p \cdot q - q^2 - 25$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p - 2q = 0 \qquad\qquad p = 2q$$

生产者剩余：利润+固定成本$=\dfrac{p^2}{4}$

20　规模报酬递增是指其他的变量不变的情况下，$f(tx_1,tx_2)>tf(x_1,x_2)$，企业的长期平均成本曲线没有整条曲线下降的现象；而学习曲线是指企业的长期平均成本曲线的逐渐下降，这可能来源于企业随着产量的积累而不断进行学习的结果。或许两者在一定的时间范围之内所造成的结果是一致的，但其原因不同。



直观上说，规模报酬递增、规模经济是使得点沿着平均成本曲线向右下方移动，而学习效应则是使得整条平均成本向下移动。

（平狄克 微观经济学 第二版 中国人民大学出版社 p199-201）

21（1）在生产过程中而不断进行学习、随着产量的增加，企业或许正处于规模报酬递增的阶段，随着规模的不断增加共同作用而长期平均成本下降；学习曲线效应是随着生产的不断重复而不断进行学习，从而对降低平均成本的作用，其学习曲线效应为0.387；规模经济效应是指随着企业规模的增大导致的平均成本的下降的作用，其规模经济效应为0.173；

（微观经济学十八讲　平新乔　北大出版社 P125）

（2）想把形态各异的社会的某一部分提炼出其对我们的研究有帮助的部分是十分困难的，也就是说，化简社会，建立模型进行分析研究，试图发现社会的运行规律，用以相对于社会本身而言简单的语言、图形、数学公式来表达，其过程的艰辛往往是超出我们的想象范围，因为往往建立模型比得出结论本身要复杂得多，我们并不知道什么该放弃而什么又是必须涉入我们的研究框架的。

在对研究中国工业行业中的学习曲线效应与规模经济时，至少要确定的有企业的建厂以来的各期产量、各期包括总、边际各项成本记录与各期企业的规模等，对统计数据先要进行标准化、回归性分析等等。

附上另一问题：一个企业可同时经历规模报酬不变与边际产量递减吗?

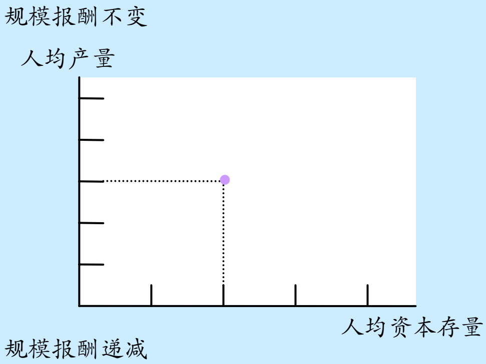
规模报酬不变是指 $f(tx,ty)=t\cdot f(x,y)\quad t>0$；而如果生产函数可导时，边际产量是指对其自变量的一阶导数；举个例子：

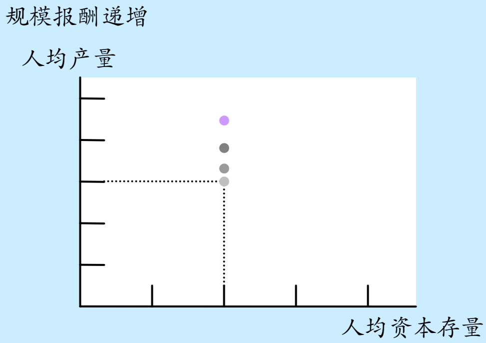
设一规模报酬不变的生产函数为 $Y=F(K,L)$，其中的 K 为资本存量；L 为投入生产的劳动力；

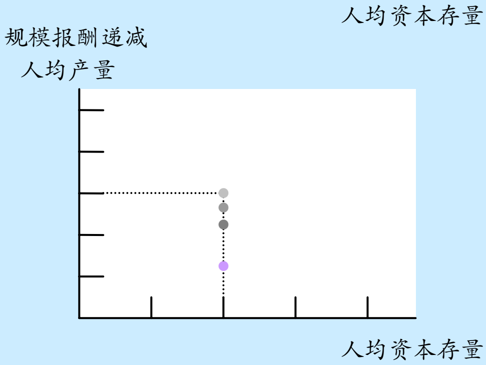
为了更好的说明问题，我们把此函数变形为人均形式；设 $t=\dfrac{1}{L}$，根据模报酬不变的概

念，$tY = F(tK, tL) = tF(K, L)$，则把之代入得：$\frac{1}{L}\cdot Y = F(\frac{1}{L}\cdot K, \frac{1}{L}\cdot L) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$，我们再

假定$\frac{1}{L}\cdot Y = y$；$\frac{1}{L}\cdot K = k$；$F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k)$；

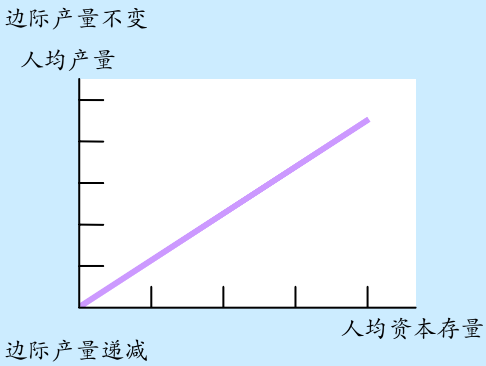


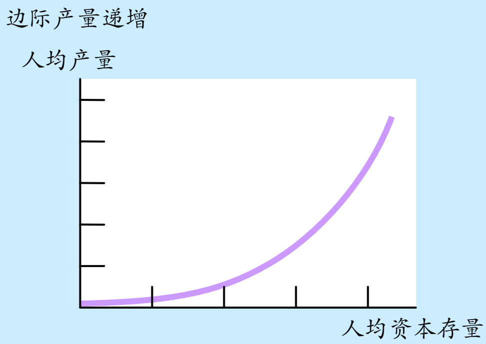


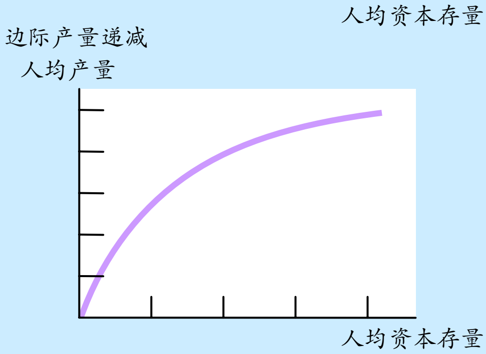


因为根据模报酬不变的概念，资本存量与劳动力同时增加同样的比例，所以人均资本存量是不变的，进而人均产出也是不变的；如果增加则是规模报酬递增；减少则是规模报酬递减；

现在，我们来说在规模报酬不变时的边际产量递减，这就比较轻松了；不像规模报酬那样，边际产量则意味着人均资本存量是由小到大变动的；这不是同水平的比较；而是不同水平之间变化量的比较；

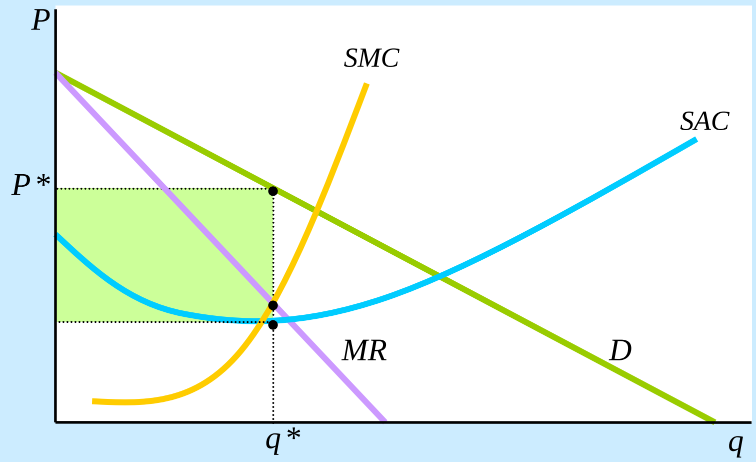




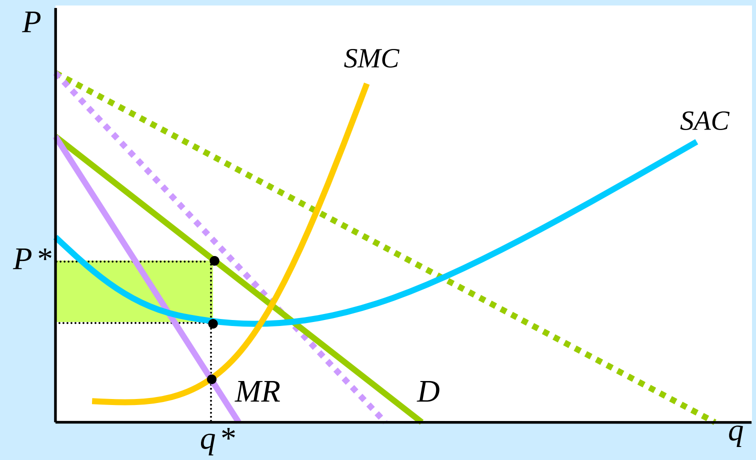


第九讲

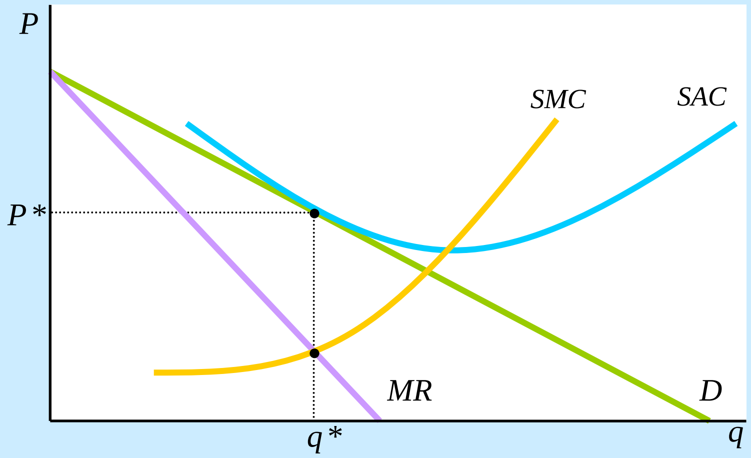
15（1）宝洁公司所处的市场为垄断竞争市场，此题所分析的是短期市场的均衡；



如果企业存在垄断利润的话，则会存在潜在的企业会进入市场；



短期内企业所面临的需求曲线如果向原点移动的话，则可以断定有别的企业进入市场；



如果企业不存在垄断利润的话，则会不存在潜在的进入者。

在这一反托拉斯的案例中，法庭应寻找企业的垄断利润是否存在。

（瓦尔特 · 尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社

1（1）用拉氏函数得不出答案，通过再观察可知，当$Q=1$时，各自的成本为：

$$C_1=4+2=6；\ C_2=3+3=6$$

当$Q>1$时，$C_1<C_2$；　当$Q<1$时，$C_1>C_2$；

假定现在由1来生产全部的产量：$Max \quad \pi_1=p_1Q_1-C_1$

$$Max \quad \pi_1=(10-Q_1)Q_1-4-2Q_1$$

一阶条件：$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1}=10-2Q_1-2=0$$

$$Q_1=4；\quad p_1=6；\quad C_1=12；\quad \pi_1=12$$

假定现在由2来生产全部的产量：$Max \quad \pi_2=p_2Q_2-C_2$

$$Max \quad \pi_2=(10-Q_2)Q_2-3-3Q_2$$

一阶条件：$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2}=10-2Q_2-3=0$$

$$Q_2=3.5；\quad p_2=6.5；\quad C_2=13.5；\quad \pi_2=9.25$$

而事实上，这就如同一个企业拥有两个工厂，为了在两工厂之间的产量分配合理，其标准是边际成本相等。通过题目，我们得知：$MC_1=2$；$MC_2=3$，这就意味着当$Q\geq 1$时，企业都会用工厂一来生产。所以：

$$Q^*=4；\ p^*=6；\ Q_1=4；\ Q_2=0；\ \pi_1=12；\ \pi_2=-3$$

（2）$$Max \quad \pi_1=(10-Q_1-Q_2)Q_1-4-2Q_1$$
$$Max \quad \pi_2=(10-Q_1-Q_2)Q_2-3-3Q_2$$

一阶条件：$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1}=10-2Q_1-Q_2-2=0$；$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2}=10-Q_1-2Q_2-3=0$

由一阶条件得反应函数 $$\begin{cases} Q_1=\dfrac{8-Q_2}{2} \\ Q_2=\dfrac{7-Q_1}{2} \end{cases};$$

由反应函数可得各自的产量$Q_1=3$；$Q_2=2$；$p=5$；$\pi_1=5$；$\pi_2=1$

（3）企业1对企业2的价格为不大于两情况的利润差，即$p\leq 12-5=7$。

2（1）$$Max \quad \pi=pQ-C$$

$$Max \quad \pi=(53-Q)Q-5Q$$

一阶条件：$$\frac{\partial \pi}{\partial Q}=53-2Q-5=0$$

$$Q=24；\quad p=29；\quad \pi=576$$

（2）
$$Max \quad \pi_1 = [53-(Q_1+Q_2)]Q_1 - 5Q_1$$
$$Max \quad \pi_2 = [53-(Q_1+Q_2)]Q_2 - 5Q_2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 53 - 2Q_1 - Q_2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = 53 - Q_1 - 2Q_2 - 5 = 0$$

由一阶条件得反应函数
$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{48-Q_2}{2} \\ Q_2 = \dfrac{48-Q_1}{2} \end{cases};$$

$$Q_1 = 16;\quad Q_2 = 16;\quad p = 21;\quad \pi_1 = 256;\quad \pi_2 = 256$$

（3）
$$Max \quad \pi_i = [53-(N+1)Q_i]Q_i - 5Q_i$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial Q_i} = 53 - 2Q_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N+1} Q_j - 5 = 0$$

由一阶条件得反应函数：$Q_i = \dfrac{48 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N+1} Q_j}{2}$，当达到均衡时，

$Q_i = Q_j$；$Q_i = \dfrac{48 - NQ_i}{2}$；

$$Q_i = \frac{48}{N+2};\quad p = \frac{5(N+1)+53}{N+2};\quad \pi_i = \frac{48^2}{(N+2)^2}$$

当我们分别将 $N=0$、$N=1$ 代入以上所得结果，便会得出（1）、（2）的答案；

（4）当 N 趋向于很大时，市场相当于完全竞争市场，每个企业的产量相对于整个市场的需求量而言很小，无足轻重，价格等于边际成本，而各企业的利润为零。

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p601）

4（1）

	Q=1			Q=2			Q=3			Q=4			Q=5		
	TC	AC	MC	TC	AC	MC	TC	AC	MC	TC	AC	MC	TC	AC	MC
庄园 1	25	25	10	40	20	20	65	65/3	30	100	25	40	145	29	50
庄园 2	28	28	6	37	18.5	12	52	52/3	18	73	73/4	24	100	20	30
庄园 3	19	19	8	31	15.5	16	51	17	24	79	79/4	32	115	23	40
庄园 4	26	26	12	44	22	24	74	74/3	36	116	29	48	170	34	60

（2）用拉氏函数得不出答案，但这里的问题相当于一个厂商拥有四个工厂，要想使总成本达到最低，其游戏规则是各工厂的边际成本必须相等；

$$MC_1 = MC_2 = MC_3 = MC_4$$

$$5Q_1 = 3Q_2 = 4Q_3 = 6Q_4 \tag{1}$$

$$s \cdot t \cdot \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 10 \tag{2}$$

由（1）式，我们可得到：$Q_1 = \frac{6}{5}Q_4$；$Q_2 = 2Q_4$；$Q_3 = \frac{3}{2}Q_4$　　（3）

把（3）代入（2）得：$Q_4 \approx 1.75$；$Q_1 \approx 2.1$；$Q_2 \approx 3.5$；$Q_3 \approx 2.625$

剩下的问题就好办了，因为由题设的限制，产量只能取整数，我们现在试着来：

当我们取 $Q_4 = 2$；$Q_1 = 2$；$Q_2 = 3$；$Q_3 = 3$ 时，$TC = 44 + 40 + 52 + 51 = 187$

取 $Q_4 = 2$；$Q_1 = 2$；$Q_2 = 4$；$Q_3 = 2$ 时，$TC = 40 + 73 + 31 + 44 = 188$

取 $Q_2 = 4$；$Q_3 = 3$；$Q_1 = 2$；$Q_4 = 1$ 时，$TC = 73 + 51 + 40 + 26 = 190$

…… ……

通过以上捣鼓，我们可谨慎的得出结论，其产量分配为：

$$Q_1 = 2；Q_2 = 3；Q_3 = 3；Q_4 = 2$$

另一种更为简便的方法：

找出图表中所对应的 10 个最小的边际成本；这样其最优的产量分配为：

$$Q_1 = 2；Q_2 = 3；Q_3 = 3；Q_4 = 2$$

	Q=1			Q=2			Q=3			Q=4			Q=5		
	TC	AC	MC	TC	AC	MC	TC	AC	MC	TC	AC	MC	TC	AC	MC
庄园 1	25	25	10	40	20	20	65	65/3	30	100	25	40	145	29	50
庄园 2	28	28	6	37	18.5	12	52	52/3	18	73	73/4	24	100	20	30
庄园 3	19	19	8	31	15.5	16	51	17	24	79	79/4	32	115	23	40
庄园 4	26	26	12	44	22	24	74	74/3	36	116	29	48	170	34	60

一个拥有四个庄园的厂商，在总产量为 10 的情况下，他会这样来考虑：为了达到总成本最小，他会在每增加一个产量水平上选择一个最小的成本增量，即边际成本；例如在第一个产量时，他会选择庄园 2（因为在图表中的所有边际成本，它为最小）；接下来在第二产量时，他仍然会在图表中挑选所剩下的边际成本中最小的一个……；最终的结果为：选到了所有的边际成本中最小的 10 个。

进一步提问:还有一种更便宜的方法，由庄园 2 每次生产的产量为 2，分 5 次来生产出产量 10，这样一来，其总成本仅为 155 。这样行吗?

当然不行，因为榴莲从生长到成熟需要一段时期，每个庄园必须在生长周期开始决定其种植数量，而单由庄园 2 生产，则需要 5 个生长周期。换句话说，当卡特尔做出生产决[illegible]每个庄园最多可用一次。

（3）如果我们把 “在 b 的产量水平和价格下”理解为“在（2）问中的产量水平和价格下”的话，在市场价格为 25 时，如果每个庄园都自行决定产量，则：

$$Max \quad \pi_1 = 25Q_1 - 5Q_1^2 - 20\,; \quad Q_1 = 2 \text{或} 3\,; \quad \pi_1 = 10$$
$$Max \quad \pi_2 = 25Q_2 - 3Q_2^2 - 25\,; \quad Q_2 = 4\,; \quad \pi_2 = 27$$
$$Max \quad \pi_3 = 25Q_3 - 4Q_3^2 - 15\,; \quad Q_3 = 3\,; \quad \pi_3 = 24$$
$$Max \quad \pi_4 = 25Q_4 - 6Q_4^2 - 20\,; \quad Q_4 = 2\,; \quad \pi_4 = 6$$

而当卡特尔联合定产时：

$$Q_1 = 2\,; \quad \pi_1 = 10\,; \quad \Delta\pi_1 = 0$$
$$Q_2 = 3\,; \quad \pi_2 = 23\,; \quad \Delta\pi_2 = 4$$
$$Q_3 = 3\,; \quad \pi_3 = 24\,; \quad \Delta\pi_3 = 0$$
$$Q_4 = 2\,; \quad \pi_4 = 6\,; \quad \Delta\pi_4 = 0$$

此时，庄园 2 的欺诈冲动最大。

（真他妈的麻烦……）

5 设厂商 i 的产量为 q_i，总产量为 $Q = \sum q_i$，成本函数为 $C_i = C(q_i)$，反需求曲线为 $p = p(Q)$，对于厂商而言：

$$Max \quad \pi_i = p(Q)q_i - C(q_i)$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + \frac{dp}{dQ}q_i - MC(q_i) = 0$$

$$p\left(1 + \frac{dp}{dQ}\frac{q_i}{p}\frac{Q}{Q}\right) = MC(q_i)$$

$$p\left(1 - \frac{1}{|\in|}\frac{q_i}{Q}\right) = MC(q_i)$$

$$|\in| = \frac{q_i}{Q}\frac{p}{p - MC(q_i)}$$

当市场处于古诺均衡时，$Q = Nq_i$：

$$|\in| = \frac{1}{N}\frac{p}{p - MC(q_i)}$$

$|\in|$为此时厂商所面临的市场需求价格弹性，因为$\frac{p}{p - MC(q_i)} > 1$，所以$|\in| > \frac{1}{N}$。

3（1）由题设可知，
$$D = 160p^{-\frac{1}{2}} - \frac{31}{3}p^{\frac{1}{2}}$$

现在，我们来估计一下 D 的形状：
当 $W=S$ 时，得出其交点（15.48，40.66）

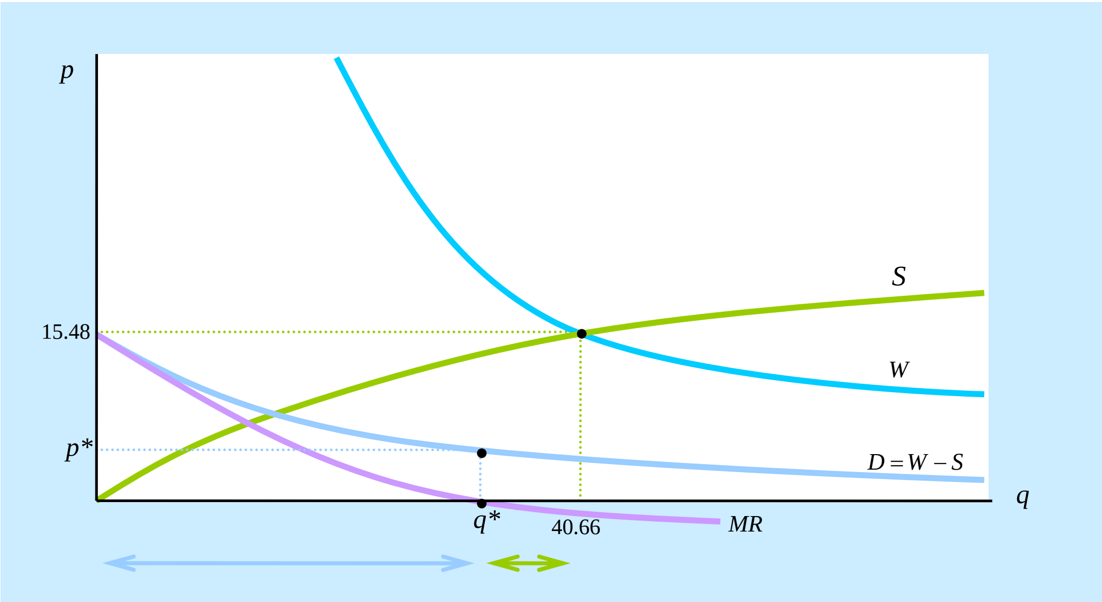
$$D'=-\frac{1}{2}\cdot 160p^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{31}{3}p^{-\frac{1}{2}}<0\,;\qquad D''=\frac{3}{4}\cdot 160p^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{31}{3}p^{-\frac{3}{2}}>0$$

我们来估计一下 MR 的形状：

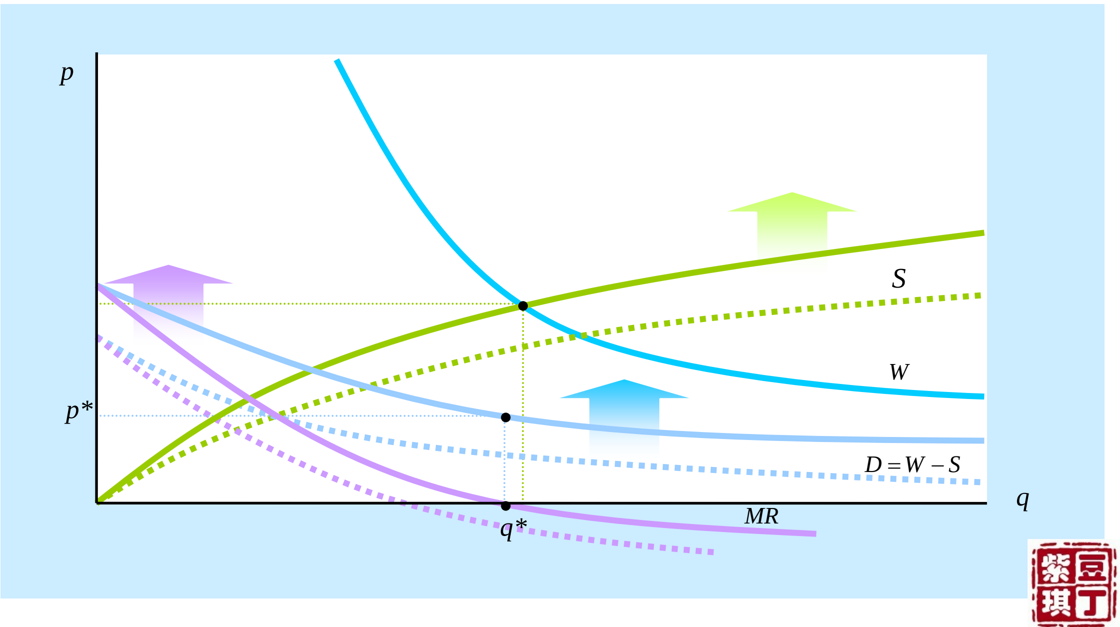
反需求函数为： $p(q)=\left(\dfrac{-3q+\sqrt{9q^2+59520}}{62}\right)^2$

$$MR=\frac{1}{62^2}\cdot\left(54q^2+59520^2-12q\sqrt{9q^2+59520}-\frac{108q^3}{\sqrt{9q^2-59520}}\right)$$

通过运算可知，$MR'<0$，$MR''>0$，由此可知，MR 与横轴定有交点。



（2）



（以上两图画得不够准确，曲线交点的坐标值与计算的结果不太相符）

（3）若石油消费国联合起来，形成买方垄断势力，则世界石油市场上相当于只存在两个人，此时的价格很有可能是商量着来。

6 企业 1 的利润函数应该为 $\pi_1 = -(p_1 - ap_2 + c)^2 + p_2^2$，如果为 $\pi_1 = -(p_1 - ap_2 + c)^2 + p_1^2$ 的话，则有：$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = -2(p_1 - ap_2 + c) + 2p_1 = 0$，解得 $p_2 = \frac{c}{a}$，把其代入企业 1 的利润函数得到企业 1 的最大利润为零。这显然不符合逻辑。

由题设可知，企业的利润取决于价格：

（1） 当企业 1 先决策时，他的目标为自身的利润最大化：

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = -2(p_1 - ap_2 + c) = 0$$

当市场均衡时，价格 1 等于价格 2，则： $p_1 = \frac{c}{a-1}$

（2） 当企业 2 先决策时，他的目标也是自身的利润最大化：

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = -2(p_2 - b) = 0$$

当市场均衡时，价格 1 等于价格 2，则： $p_2 = b$

（3） 每个企业都想自己先决策的动机源于自身的利润最大化，换句话说，当由别人先决策时，自身的最大利润会受损，根据这思路可得：

当企业 1 先决策时： $p_1 = \frac{c}{a-1}$； $\pi_1^1 = \left(\frac{c}{a-1}\right)^2$； $\pi_2^1 = \frac{c}{a-1} - \left(\frac{c}{a-1} - b\right)^2$

当企业 2 先决策时： $p_2 = b$； $\pi_2^2 = b^2$； $\pi_1^2 = b^2 - [b(1-a) + c]^2$

如果每个企业都想自己先决策，则有： $\pi_1^1 > \pi_1^2$； $\pi_2^2 > \pi_2^1$，即：

$$\left(\frac{c}{a-1}\right)^2 > b^2 - [b(1-a) + c]^2; \qquad b^2 > \frac{c}{a-1} - \left(\frac{c}{a-1} - b\right)^2$$

整理得：

$$\left(\frac{c}{a-1}\right)^2 > b^2 - [b(1-a) + c]^2; \qquad \left(\frac{c}{a-1}\right)^2 > (2b+1)\left(\frac{c}{a-1}\right) - 2b^2$$

只要 *a*，*b*，*c* 同时满足以上两个不等式时，两企业都会希望自己先决策。

（因为是三个未知数，而只有两个方程，又是二次、四次方多多，我是没有本事解出来。）

事实上，在价格竞争模型中，企业的决策的先后顺序是无关紧要的（在题目的前两问），重要的是企业制定价格的数值；这可以间接的反应企业

成本MC_i；换句话说，谁的边际成本MC_i低，谁将最终占领市场；就题目的利润函数而言：

（a）当企业以利润最大化决策时，如果$p_1 > p_2$，即$\frac{c}{a-1} > b$，企业二就会迫使企业一把价格定在其边际成本处；而此时：

$$\pi_1 = p^2 - (p - ap + c)^2 = 0$$

因为$\frac{c}{a-1} > b = p$，这就意味着$p - ap + c > 0$，所以：

$$p = p - ap + c \Rightarrow ap = c$$

$$p^* = \frac{c}{a}$$

虽然此时企业一的利润为零，但根据经济利润的概念，企业一还是可以进行正常的生产活动，而此时企业二的利润为：

$$\pi_2 = \frac{c}{a} - (\frac{c}{a} - b)^2$$

（b）当企业以利润最大化决策时，如果$p_1 < p_2$，即$\frac{c}{a-1} < b$，企业一就会迫使企业二把价格定在其边际成本之上；而此时：

$$\pi_2 = p - (p - b)^2 = 0$$

$$p^2 - (2b+1)p + b^2 = 0$$

$$p^* = \frac{2b + 1 \pm \sqrt{4b+1}}{2}$$

则企业一此时的利润为

$$\pi_1 = (p^*)^2 - (p^* - ap^* + c)^2$$

（c）当$p_1 = p_2$时，两个企业都将在其边际成本处进行生产；其利润均为零；即：

$$p^* = \frac{c}{a} = \frac{2b + 1 + \sqrt{4b+1}}{2}$$

由以上的等式，我们很难解出各常数的确定值；

如果$\pi_1 = p_2 - \left(p_1 - ap_2 + c\right)^2$，$\pi_2 = p_1 - \left(p_2 - b\right)^2$，则各自的决策为：

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = -2\left(p_1 - ap_2 + c\right) = 0 \qquad \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = -2\left(p_2 - b\right) = 0$$

$$p_1 = \frac{c}{a-1}; \qquad p_2 = b$$

如果按照我们以上的思路：

（a） $p_1 > p_2$，即 $\frac{c}{a-1} > b$，企业二就会迫使企业一把价格定在其边际成本处；

$$\pi_1 = p - (p - ap + c)^2 = 0$$

$$(1-a)p^2 + [2(1-a)c - 1]p + c^2 = 0$$

我们再假定 $1 - 4(1-a)c \geq 0$，再者我们只取对我们有意义的数值；

$$p^* = \frac{1 - 2(1-a)c \pm \sqrt{1 - 4(1-a)c}}{2(1-a)^2}$$

$$\pi_2 = p^* - (p^* - b)^2$$

（b）如果 $p_1 < p_2$，即 $\frac{c}{a-1} < b$，企业一就会迫使企业二把价格定在其边际成本之上；

$$\pi_2 = p - (p - b)^2 = 0$$

$$p^2 - (2b+1)p + b^2 = 0$$

$$p^* = \frac{2b + 1 \pm \sqrt{4b+1}}{2}$$

$$\pi_1 = p^* - (p^* - ap^* + c)^2$$

（c）当 $p_1 = p_2$ 时，两个企业都将在其边际成本处进行生产；其利润均为零；即：

$$p^* = \frac{1 - 2(1-a)c \pm \sqrt{1 - 4(1-a)c}}{2(1-a)^2} = \frac{2b + 1 \pm \sqrt{4b+1}}{2}$$

7（1） $$Max \quad \pi_1 = [100 - 2(Q_1 + Q_2)]Q_1 - 4Q_1$$

$$Max \quad \pi_2 = [100 - 2(Q_1 + Q_2)]Q_2 - 4Q_2$$

一阶条件： $$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 100 - 4Q_1 - 2Q_2 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = 100 - 2Q_1 - 4Q_2 - 4 = 0$$

由一阶条件得反映函数 $$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{48 - Q_2}{2} \\ Q_2 = \dfrac{48 - Q_1}{2} \end{cases};$$

$$Q_1 = 16\text{；}\quad Q_2 = 16$$

（2）把（1）中所得的Q_2的反应函数代入$\pi_1 = [100 - 2(Q_1 + Q_2)]Q_1 - 4Q_1$得：

$$Max \qquad \pi_1 = \left[100 - 2\left(Q_1 + \frac{48 - Q_1}{2}\right)\right]Q_1 - 4Q_1$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 52 - 2Q_1 - 4 = 0$$

$$Q_1 = 24\text{；}\quad Q_2 = 12$$

8（1）实为*Stackelberg*模型：

$$Max \qquad \pi_2 = [10 - (Q_1 + Q_2)]Q_2 - Q_2^2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = 10 - Q_1 - 4Q_2 = 0$$

$$Q_2 = \frac{10 - Q_1}{4}$$

$$Max \qquad \pi_1 = \left[10 - \left(Q_1 + \frac{10 - Q_1}{4}\right)\right]Q_1 - 4 - 2Q_1$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 10 - 2Q_1 - \frac{10 - 2Q_1}{4} - 2 = 0$$

$$Q_1 = \frac{11}{3}\text{；}\quad Q_2 = \frac{19}{12}$$

（2）
$$Max \qquad \pi_1 = [10 - (Q_1 + Q_2)]Q_1 - 4 - 2Q_1$$

$$Max \qquad \pi_2 = [10 - (Q_1 + Q_2)]Q_2 - Q_2^2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 10 - 2Q_1 - Q_2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = 10 - Q_1 - 4Q_2 = 0$$

由一阶条件得反映函数
$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{8 - Q_2}{2} \\ Q_2 = \dfrac{10 - Q_1}{4} \end{cases}\text{；}$$

$$Q_1=\frac{22}{7}\text{；}\quad Q_2=\frac{12}{7}$$

9 在寡头垄断市场上，以价格为决策，可分为同时决策和序列决策。当厂商同时决策时，其结果有可能为 *Bertrand* 均衡，而当厂商序列决策时，其结果有可能为价格领导所导致的均衡。

10 $$Max \quad \pi_k=\left[150-Q_k-0.02\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{101}Q_i\right]Q_k-0.5Q_k^3+20Q_k^2-270Q_k$$

一阶条件：
$$\frac{\partial\pi_k}{\partial Q_k}=\left[150-2Q_k-0.02\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{101}Q_i\right]-1.5Q_k^2+40Q_k-270=0$$

二阶条件：
$$\frac{\partial^2\pi_k}{\partial Q_k^2}=3Q_k-38\le 0$$

当均衡时，$Q_k=Q_i$：

$$1.5Q^2-36Q+120=0$$

$$Q_1=20\text{；}\quad Q_2=4$$

当均衡时，
$$\pi_k=[150-3Q_k]Q_k-0.5Q_k^3+20Q_k^2-270Q_k$$

$$\pi_k^4=[150-3\cdot 4]4-0.5\cdot 4^3+20\cdot 4^2-270\cdot 4=-240$$

$$\pi_k^{20}=[150-3\cdot 20]20-0.5\cdot 20^3+20\cdot 20^2-270\cdot 20=400$$

$$p^*=90\text{；}\qquad Q_1^*=20$$

11 $$Max \quad \pi_1=[100-0.5(Q_1+Q_2)]Q_1-5Q_1$$

$$Max \quad \pi_2=[100-0.5(Q_1+Q_2)]Q_2-0.5Q_2^2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial\pi_1}{\partial Q_1}=100-Q_1-0.5Q_2-5=0$$

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial Q_2}=100-0.5Q_1-2Q_2=0$$

由一阶条件得反映函数
$$\begin{cases}Q_1=\dfrac{190-Q_2}{2}\\[2ex] Q_2=\dfrac{200-Q_1}{4}\end{cases}\text{；}$$

（1）我们先设企业 2 先进行生产，把企业 1 反应函数代入利润函数 2：

$$Max \qquad \pi_2=\left[100-0.5\left(\frac{190-Q_2}{2}+Q_2\right)\right]Q_2-0.5Q_2^2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2}=105-0.5Q_2-Q_2=0$$

$$Q_1=77.5\,;\;\; Q_2=35\,;\;\; p=43.75\,;\;\; \pi_1=3003.125\,;\;\; \pi_2=918.75$$

当企业 1 先进行生产：

$$Max \qquad \pi_1=\left[100-0.5\left(Q_1+\frac{200-Q_1}{4}\right)\right]Q_1-5Q_1$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1}=70-\frac{3}{4}Q_1=0$$

$$Q_1=\frac{280}{3}\,;\;\; Q_2=\frac{80}{3}\,;\;\; p=40\,;\;\; \pi_1=3266\frac{2}{3}\,;\;\; \pi_2=711\frac{1}{9}$$

通过以上计算，我们可知无论企业 2 是否先进行生产，它的均衡产量、利润都是比企业 1 的均衡时的要少，所以我们可得出企业 1 会成为行业领导者的结论。

进一步提问：为什么不能以 “是否先生产” 来判断厂商的角色？

（擅自打乱了课本的次序，希望还没学到博弈论的同学多多原谅）

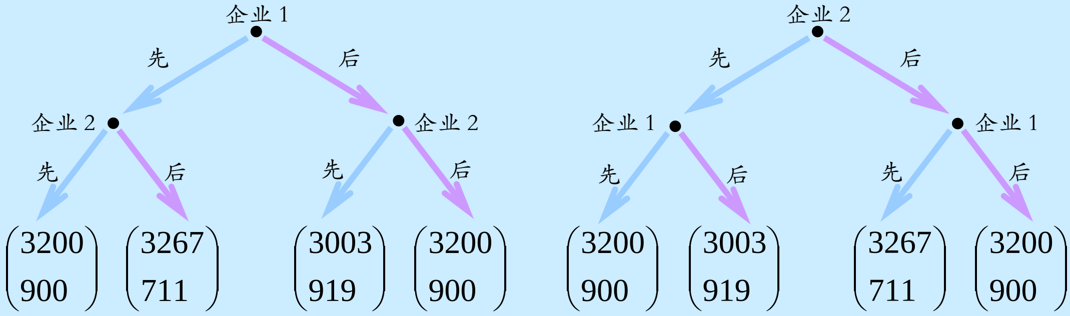
一个最简便的方法就是直接从概念判断：领导者是指在行业中处于支配地位的企业；在斯坦克伯格模型中表现为产量领导；而在价格领导模型中则表现为价格领导；

		企业 *2*	
		先	后
企业 *1*	先	*3200，900*	*3266，711*
	后	*3003，919*	*3200，900*

首先，当两企业同时进行生产决策是，对于企业 1、2 而言，策略“先”都是其的占优策略；各个企业都会采取这样的决策，所以不能以此来作为衡量标准；（在此的最终均衡为二问的纳什均衡）

		企业 *2*	
		先	后
企业 *1*	先	*3200，900*	*3266，711*
	后	*3003，919*	*3200，900*

即使企业 1、2 施行最大最小策略，其均衡仍然为（先，先）；



		企业 2			
		先，先	先，后	后，先	后，后
企业 1	先	*3200，900*	*3200，900*	*3267，711*	*3267，711*
	后	*3003，919*	*3200，900*	*3003，919*	*3200，900*

其子博弈的完美纳什均衡为{先，（先，后）}；

		企业 1			
		先，先	先，后	后，先	后，后
企业 2	先	*3200，900*	*3200，900*	*3003，919*	*3003，919*
	后	*3267，711*	*3200，900*	*3267，711*	*3200，900*

其子博弈的完美纳什均衡为{先，（先，后）}；

而当两企业进行非同时决策时，大家都会抢先进行生产；也就是说，双方都存在先动优势；所以也不能以是否先生产来作为领导者评判标准。

（2）由上可知，先走宣布产量并开始生产，这是每个企业的最优决策，所以，该市场的最终结果为古诺均衡。即：

$$Q_1 = 80\,;\quad Q_2 = 30\,;\quad p = 45\,;\quad \pi_1 = 3200\,;\quad \pi_2 = 900$$

12 $$Max \qquad \pi = [100 - 2Q_1 - Q_2]Q_1 - 2.5Q_1^2$$

由 $Q_2 = \frac{1}{2}Q_1$ 得：
$$Max \qquad \pi = \left[100 - 2Q_1 - \frac{1}{2}Q_1\right]Q_1 - 2.5Q_1^2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 100 - 10Q_1 = 0$$

$$Q_1 = 10\,;\quad Q_2 = 5\,;\quad p = 75\,;\quad \pi_1 = 500$$

13 垄断厂商的目标位两期的总利润最大化，$\frac{1}{1+r}$ 为贴现因子，r 为利率：

$$Max \qquad \pi = \pi_1 + \pi_2 = (1 - Q_1)Q_1 - cQ_1 + \frac{1}{1+r}(1 - Q_2)Q_2 - \frac{1}{1-r}(c - \lambda Q_1)Q_2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1}=1-2Q_1-c+\frac{1}{1+r}\lambda Q_2=0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}=\frac{1}{1+r}\left(1-2Q_2-c+\lambda Q_1\right)=0$$

$$\begin{cases}2Q_1-\dfrac{1}{1+r}\lambda Q_2=1-c\\ \dfrac{1}{1+r}\lambda Q_1-2\dfrac{1}{1+r}Q_2=-\dfrac{1}{1+r}(1-c)\end{cases}$$

$$Q_1=\frac{(1-c)\left(2+\dfrac{\lambda}{1+r}\right)}{4-\dfrac{\lambda^2}{1+r}};\qquad Q_2=\frac{(1-c)(2+\lambda)}{4-\dfrac{\lambda^2}{1+r}}$$

当 $\frac{1}{1+r}=1$ 时，$Q_1=Q_2=\frac{(1-c)}{2-\lambda}$。

14(1)设厂商 i 的产量为 Q_i，而行业的总产量为 $Q=\sum Q_i$，厂商 i 的成本函数为 $C_i=C(Q_i)$，价格函数为 $p=p(Q_1,\cdots,Q_i,\cdots)$，而题目让我们求证：

$$\frac{\sum\left[PQ_i-C(Q_i)\right]}{PQ}=\frac{\dfrac{\sum(PQ_i)^2}{(PQ)^2}}{|\in|}\tag{1}$$

因为各厂商是根据古诺产出决策的，所以当市场均衡时，各厂商所面临的价格是一致的，又因为各厂商有不变的规模收益（报酬）的生产函数，这意味着，成本产量的弹性为 1，即 $E_Q^c=\frac{dC(Q)}{dQ}\frac{Q}{C(Q)}=1$ ；$C(Q)=C'(Q)\cdot Q$，在题目中的成本函数可表现为：$C(Q_i)=MC\cdot Q_i$（这是很显然的，因为边际生产力的最高点所对应的正好是边际成本的最低点。）

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p44）

则（1）式的左边变形为：$\frac{\sum\{[P-MC(Q_i)]\cdot Q_i\}}{PQ}$ （2）

又由 $p\left(1-\frac{1}{|\in|}\frac{Q_i}{Q}\right)=MC(Q_i)$ 得：

$$P-MC(Q_i)=P\frac{1}{|\in|}\frac{Q_i}{Q}$$

把（3）代入（2）得：$$\frac{\sum P\frac{1}{|\in|}\frac{Q_i}{Q}\cdot Q_i}{PQ} \tag{4}$$

把（4）代入（1）得知，命题得证。

（2）行业集中指数是指：$I_i=\frac{\sum(Q_i)^2}{Q^2}$，代入结论得：

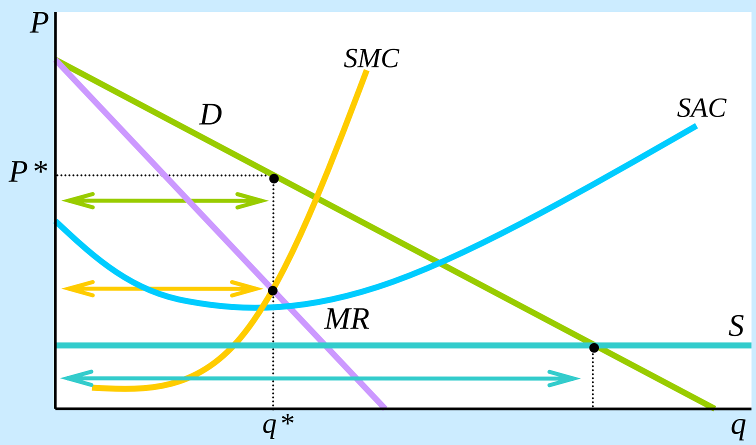
$$I_i=\left(\sum[PQ_i-C(Q_i)]\right)\cdot\frac{|\in|}{PQ}$$

$$\frac{dI_i}{d\left(\sum[PQ_i-C(Q_i)]\right)}=\frac{|\in|}{PQ}\geq 0$$

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p602）

（三天的思想与身体分离之后，只是换来了在厚厚的演算纸前，兴奋得像条发情的母狗一样，在不断地狂吠……）

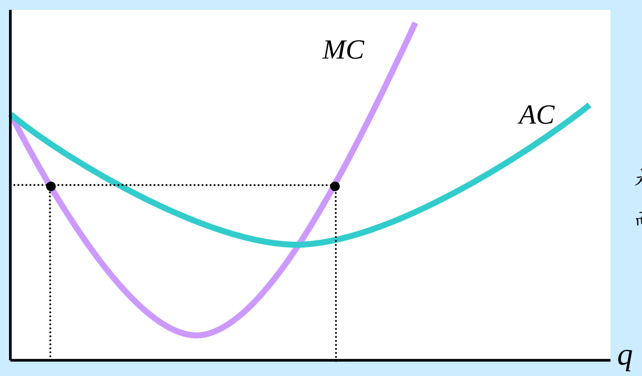
18（1）



垄断厂商根据自身利润最大化制定供给、价格；由于价格会调节需求水平正好达到其市场的供给水平；所以达到均衡时，供给是等于均衡的。

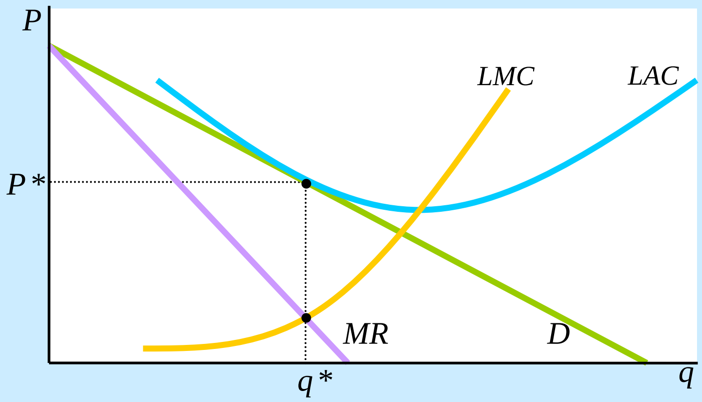
此时的需求也会是大大的小于完全竞争时的需求。

（3）



注意：边际收益等于边际成本只是厂商达到利润最大化的必要条件，而不是其充分条件。

（4）



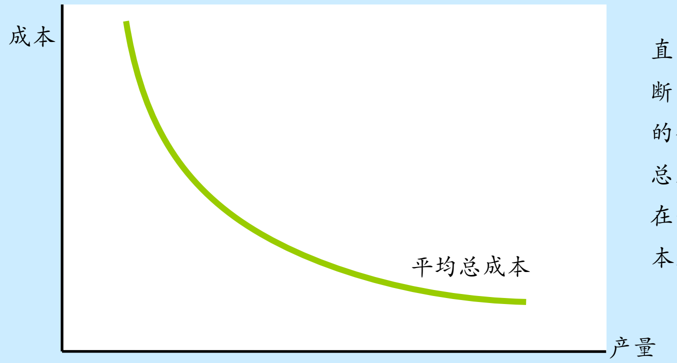
两者并没有什么必然的联系，在长期内，垄断厂商的最优的决策是边际收益等于边际成本的产量上生产，但此时的平均成本等于其市场的价格，垄断厂商的超额利润消失。

（2）*Bertrand* 模型说的是所有的厂商都进行价格竞争。而在现实中很少有完全满足这些条件的企业存在。所以在现实中的寡头市场应有超额利润存在。

16 自然垄断是指在进行生产之前必须投入大量的固定成本，而当进行生产时的边际成本则为很小，且这两种情况并存。一般的公用事业部门经常处于自然垄断地位。

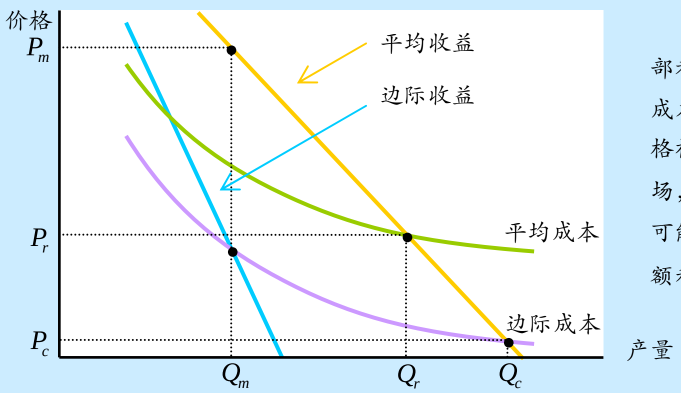
（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p513-515）

当一个企业能以低于两个或多个企业的成本为整个市场提供一种物品或劳务时，整个行业就是自然垄断。当相关产量范围存在规模经济时，自然垄断就产生了。下图显示了有规模经济的企业的平均总成本。在这种情况下，当市场只存在一个企业时，在任一产量水平上，其总成本相对最低，换句话说，在任何既定的产量水平上，企业数量越多，每个企业的产量就越少，其平均总成本就越高。



当一个企业的平均总成本曲线一直下降时，该企业就会被称为自然垄断，在这种情况下，当产量分到更多的企业时，每个企业生产少了，平均总成本上升了，因此，当市场上只存在一个企业时，可以以相对最小的成本生产任一即定的产量产品。

（曼昆 中国人民大学出版社 经济学原理 第三版 p262）



一个厂商在它的任何产量范围内部都有规模经济（下降的平均、边际成本），因而是一个自然垄断，如果价格被管制在 P_c，厂商将赔本并推出市场，令价格等于 P_r，则能实现最大的可能产量 Q_r，厂商会继续经营，但超额利润为零。

（平狄克 微观经济学 第二版 中国人民大学出版社 p

关于自然垄断的乱弹：

笨蛋 面：自然垄断是指天然的、自然而然的处于垄断地位的企业；

笨蛋 郭：哈哈……，笨蛋！自然垄断当然是指从事大自然资源开采的垄断厂商了，这在马克思的政治经济学中说得清清楚楚的……

（1）判断电信业务是否为自然垄断行业，只要确定其边际、平均成本是否递减：

$$MC=\frac{50}{0.1Q-20}; \qquad AC=\frac{500\ln(0.1Q-20)}{Q}$$

$MC'=-\dfrac{5}{(0.1Q-20)^2}<0$，并且由边际成本递减，我们也可得出平均成本递减；所以电信业务为自然垄断行业；

（2） $$Max \quad \pi=(20-0.02Q)Q-500\ln(0.1Q-20)$$

一阶条件： $$-Q^2+700Q-112500=0$$

二阶条件： $$-2Q+700<0$$

$$Q=250\text{（舍弃）}; \qquad Q^*=450$$

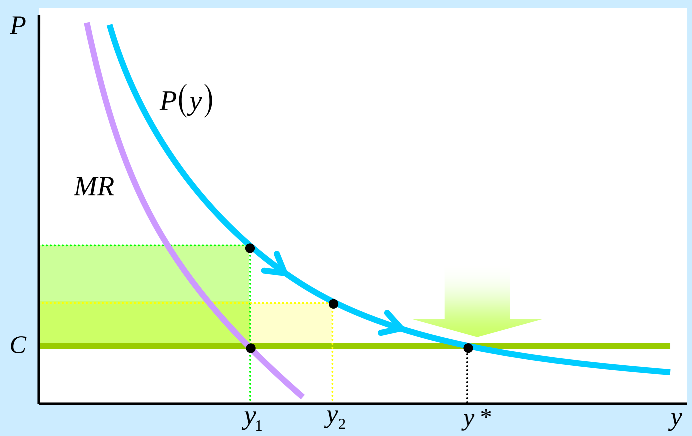
$$p^*=11; \qquad \pi\approx 3340.5621$$

（3）如果允许活跃的竞争（问题不在于进入市场是否存在困难，而在于如果有其他企业进入市场的话），根据 $p=MC\Big/\left(1-\dfrac{1}{|\in|}\right)$ 可知，价格会下降。

17（1）市场为完全竞争的，则市场的供给曲线为截距是 c 的水平线。c 为市场的均衡价格反需求曲线与水平线的交点为整个市场的总均衡产量，而每个企业的均衡供给量等于总均衡产量的 j 分之一，各企业的利润额为零；

（2）最低限价将不得低于其边际成本，且行业协会会根据需求曲线来制定最优价格使其总利润最大化，即 $p=MC\Big/\left(1-\dfrac{1}{|\in|}\right)$，而每个企业将平分所得的利润；

（3）

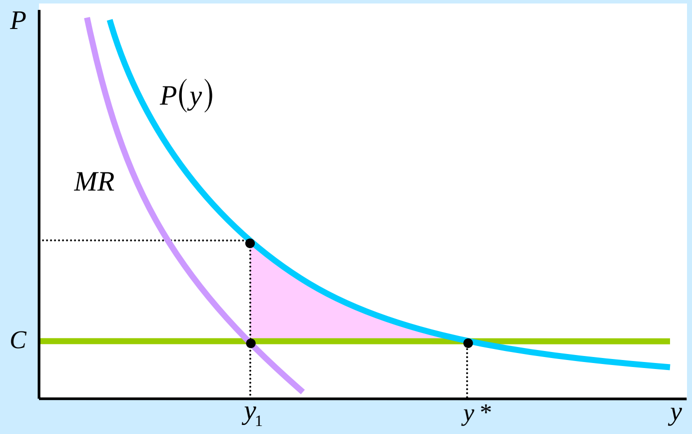


没有政府的支持指最低限价是没有以法律的形式确定下来，每个企业的私下降价不会受到法律的制裁。又因为某一企业降价而其他企业的定价不变的话，这个企业将会占领整个市场，所以这种合谋定价是不会长久；

$$\Delta\pi=[p(y_2)-c]y_2-[p(y_1)-c]\frac{y_1}{j}$$

当 $\Delta\pi>0$ 时，企业会选择降价，而当所有的企业都这样做的时候，则其市场的价格会慢慢的下降到 c。

（4）

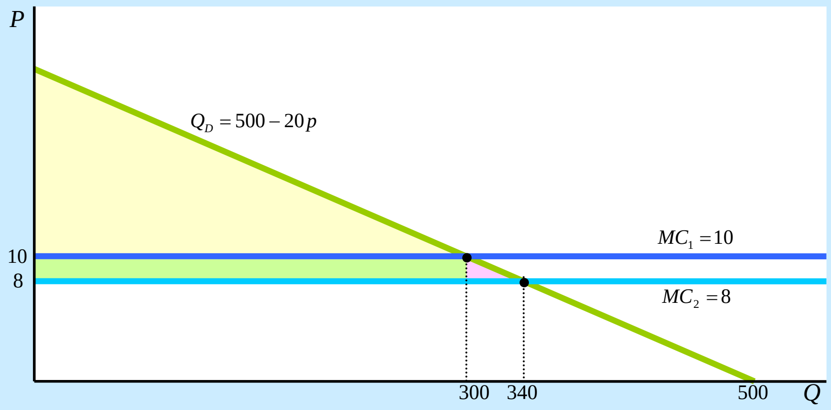


从社会经济效率的角度看，政府不应该帮助企业实行价格自律，因为当实行价格自律时，社会损失为紫色区域。

$$\text{社会损失} = \int_{y_1}^{y^*} [p(y) - c] dy$$

第十讲

1



在图中，黄色三角形面积为消费者剩余，绿色矩形面积为生产者剩余，系统损失为紫色面积；所以说，当两个边际成本不等的企业进行价格竞争时，会导致帕累托无效。

(1) 当两企业进行价格竞争时，边际成本低的企业，即厂商 2 会胜出，这时，厂商 2 只要出价稍低于厂商 1 的边际成本就可以迫使厂商 1 退出市场，所以当市场达到均衡时，其均衡价格为 $p^* = 10 - \in$，其中 $\in$ 为任意小的一个增量；

(2) 厂商 1 的利润为零，厂商 2 的利润为 $\pi_2 = [500 - 20(10 - \in) - 8] \cdot (10 - \in)$；

(3) 从直观而言，要判断均衡是否为帕累托有效，是要看看上图中需求曲线与供给曲线相交的右半部分的 “剩余”是否被消费者与生产者索取完。不言而喻，从图中，我们可看出厂商在价格竞争所达到的均衡是帕累托无效的。

2 消费者的目标是获得支付水平最大，当 *A* 选择为下时，我们可知，$d < c$，知道 B 选择右时，我们可知 $b < 1$，答案为（3）。

3 根据题意，构造收益矩阵：

		John		
		1	*2*	*3*
Smith	*1*	*3，　-3*	*-1，　1*	*-1，　1*
	2	*-1，　1*	*3，　-3*	*-1，　1*
	3	*-1，　1*	*-1，　1*	*3，　-3*

（1）当知道 *John* 出 1 时，*Smith* 的最优战略为 2 或 3；而当知道 *Smith* 出 2 时，*John* 的最优战略为 2；但如果 *Smith* 知道 *John* 出 2 时，他的最优战略则为 1 或 3；……如此反复，以至无穷，仍不会有最终的均衡结果。

（2）因为，对于 *Smith* 而言，*John* 对 1、2、3 出牌的概率均为 $\frac{1}{3}$，则

Smith 出牌 1 的期望收益为：$E_{S1} = \frac{1}{3}(3 - 1 - 1) = \frac{1}{3}$

Smith 出牌 2 的期望收益为：$E_{S2}=\frac{1}{3}(3-1-1)=\frac{1}{3}$

Smith 出牌 3 的期望收益为：$E_{S3}=\frac{1}{3}(3-1-1)=\frac{1}{3}$，由此我们得出：$E_{S1}=E_{S2}=E_{S3}$

同理，我们也可得出：　　$E_{J1}=E_{J2}=E_{J3}$

综上所述，$\sigma_S\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$；$\sigma_J\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$为混合战略的纳什均衡。

为了彻底的了解混合战略的纳什均衡，我们再来玩玩课本上的性别冲突的例子：

首先，我们先要了解一下纳什均衡的概念：

如果局中人所选的战略处于这样一种状态：在其他的局中人不改变当前的战略前提下，任何一个局中人都无法单方通过改变自己的战略而获得更高的支付。（ 蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p262）这也是微观经济学十八讲 p201 上的定义。

而引入混合战略后，则局中人的目标需要修改为“最大化自己的期望支付”。

		丈夫	
		看拳击	看芭蕾
妻子	看拳击	4， 5	0， 0
	看芭蕾	1， 1	5， 4

现在，我们设丈夫、妻子看拳击的概率分别为 p、q，则丈夫的目标为：

$$Max \quad p[5q+(1-q)]+(1-p)[0\cdot q+4(1-q)]$$

一阶条件：
$$[5q+(1-q)]-[4(1-q)]=0$$
$$q=\frac{3}{8}$$

而妻子的目标为：

$$Max \quad q[4p+0\cdot(1-p)]+(1-q)[1\cdot p+5(1-p)]$$

一阶条件：
$$[4p]-[p+5(1-p)]=0$$
$$p=\frac{5}{8}$$

所以，混合战略的纳什均衡为：丈夫以$\frac{5}{8}$的概率来选择看拳击，以$\frac{3}{8}$的概率来看芭蕾；而妻子以$\frac{3}{8}$的概率来选择看拳击，以$\frac{5}{8}$的概率来看芭蕾，即：

$$\sigma_H\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right);\quad \sigma_W\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$$

		丈夫	
		看拳击	看芭蕾
妻子	看拳击	$\frac{3}{8}\cdot 4,\quad \frac{5}{8}\cdot 5$	$\frac{3}{8}\cdot 0,\quad \frac{3}{8}\cdot 0$
	看芭蕾	$\frac{5}{8}\cdot 1,\quad \frac{5}{8}\cdot 1$	$\frac{5}{8}\cdot 5,\quad \frac{3}{8}\cdot 4$

而不是像某些同学（主要是前一段时间的我）所想的，当丈夫以 5/8 的概率来选择看拳击，以 3/8 的概率来看芭蕾；而妻子以 5/8 的概率来选择看拳击，以 3/8 的概率来看芭蕾时，矩阵为：

这矩阵中的混合战略的纳什均衡为：（丈夫看拳击，妻子看拳击）、（丈夫看芭蕾，妻子看芭蕾）。

这个答案是很凑巧的吗？我们再来以混合战略的纳什均衡的概念来检验一下其答案，当一个局中人依其均衡战略行为行事时，另一个局中人的战略选择问题：当 $\sigma_W\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$（妻子以 $\frac{3}{8}$ 的概率来选择看拳击，以 $\frac{5}{8}$ 的概率来看芭蕾）时，丈夫选择任意一个概率 p 所得到的支付为：

$$p\left[5\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right]+(1-p)\left[0\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{5}{8}\right]=\frac{20}{8}p+(1-p)\frac{20}{8}=\frac{20}{8}$$

这时，注意这个支付与丈夫的战略 p 无关，同样可验证，如果丈夫选择其均衡战略时，妻子任意选择一个概率所得到的支付都是 $20/8$，这样，我们就可验证混合战略的纳什均衡的概念了：当妻子（丈夫）不改变其均衡战略的前提下，无论丈夫（妻子）如何选择自己的战略，都不会使自己获得更高的支付。

5

		2		
		L	*M*	*R*
1	*U*	4， 3	5， 1	6， 2
	M	2， 1	8， 4	3， 6
	D	3， 0	9， 6	2， 8

为了方便分析，我们从 2 开始，（因为 1 的战略中不存在明显的占优战略）

对于 2 而言，*R* 优于 *M*，所以 2 将会在 *R*、*L* 战略中进行选择，而对于 1 来说，知道了 2 是在 *L*、*R* 中选择，则他的 *U* 战略要优于 *M*、*D* 战略，他会选择 *U* 战略，当 2 知道 1 选择了 *U* 战略时，他则最终会选择 *L* 战略，所以，最终的占优均衡为（*U*，*L*）；

6 设 *S* 为棒子（*stick*），*T* 为老虎（*tiger*），*C* 为鸡（*cock*），*W* 为虫子（*worm*），则其支付矩阵为：

		2			
		S	T	C	W
1	S	0， 0	1， -1	0， 0	-1， 1
	T	-1， 1	0， 0	1， -1	0， 0
	C	0， 0	-1， 1	0， 0	1， -1
	W	1， -1	0， 0	-1， 1	0， 0

当 1 知道 2 出 S 时，1 的最优的战略为 W；而当 2 知道 1 出 W 时，2 的最优战略则为 C；当 1 知道 2 出 C 时，1 的最优战略为 T；而当 2 知道 1 出 T 时，2 的最优战略为 S……如此反复，以至无穷，仍不会有最终的均衡结果；

设 1、2 出 S、T、C、W 的概率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4 和 q_1,q_2,q_3,q_4，则矩阵达到均衡，2 的期望收益必须满足：

$$0\cdot p_1+1\cdot p_2+0\cdot p_3-1\cdot p_4=-1\cdot p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3+0\cdot p_4$$
$$=0\cdot p_1-1\cdot p_2+0\cdot p_3+1\cdot p_4=1\cdot p_1+0\cdot p_2-1\cdot p_3+0\cdot p_4$$

整理为： $-p_2+p_4=p_2-p_4=p_1-p_3=-p_1+p_3$

把前两项移项得：$2p_2=2p_4$；后两项移项得：$2p_1=2p_3$；

把之代入原式，我们就可以得到：$p_1=p_2=p_3=p_4$，又 $p_1+p_2+p_3+p_4=1$，可得出：$p_1=p_2=p_3=p_4=1/4$；同理,我们也可得出：$q_1=q_2=q_3=q_4=1/4$

综上所述，混合战略的纳什均衡为：

$$\sigma_1\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right);\qquad \sigma_2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

4（1）题目相当于：欧佩克组织是由 20 个国家组成的，每个国家的石油贮量为 10000，它们从地里开采出的原油成本忽略不计，如果欧佩克的总产量太多的话，市场一下子不可能全部吸纳，从而会导致其价格的下降，欧佩克为了寻求总利润最大化，而合谋定价，这样会有：

$$Max\qquad \pi=\left[1-\frac{1}{1000}Q\right]Q$$

一阶条件：
$$\frac{\partial\pi}{\partial Q}=1-\frac{1}{500}Q=1$$

$$Q=500;\quad p=\frac{1}{2};\quad q=\frac{Q}{20}=25$$

（2）因为每个成员国都会考虑到如果其他成员国的产量不变的情况下，自己增加产量会使得自己的利润上升，所以，每个成员国都有增产的冲动，而当某个成员国开始增产，其他的成员国就会效仿，最终，市场会由于产量的增多而使得价格下降。所以，这种合谋定价是不稳定的。

（3）在通过改变产出和不存在成员国的超额利润的情况下所达到的均衡为：其价格为零，市场上的总供应量为 1000，每个成员国的产量为 50。

7（1）此收益矩阵有两个纳什均衡：（低，高）；（高，低）；

(2) 最大最小战略均衡为:(高,高);
(3) 如果选择合作的话,则以企业的总收益最大化为目标,其结果为(低,高);
(4) 在现存的两个纳什均衡中,如果厂商 1 选择低时,它会比选择高的收益要多出 800,而厂商 2 选择高时,则收益会降低 200,所以要厂商 1 说服厂商 2 选择高,厂商必须过渡给厂商 2 的收益要不少于 200。

8 为了更好的阐述,我们把课本上的条件写为:

如果所有的厂商都生产**大**型车,则所有的厂商的利润为 r;

如果所有的厂商都生产**小**型车,则所有的厂商的利润为 r;

如果一家厂商生产**大**型车,其它两家厂商生产**小**型车,则生产**大**型车的厂商的利润为 α,而生产**小**型车的厂商的利润为 β;

如果一家厂商生产**小**型车,其它两家厂商生产**大**型车,则生产**小**型车的厂商的利润为 α,而生产**大**型车的厂商的利润为 β;

根据题意,所得收益矩阵为:

当 3 生产大型车时:

		2	
		大	小
1	大	γ,γ,γ	β,α,β
	小	α,β,β	β,β,α

当 3 生产小型车时:

		2	
		大	小
1	大	β,β,α	α,β,β
	小	β,α,β	γ,γ,γ

为了使得我们的分析没有遗漏,让我们逐个验证(最后,我们将会得到:只要其中一个汽车生产厂商与其他厂商的生产决策不同,则均为纳什均衡的结论):

(以下的右边的两个小矩阵是为了更好的让我们方便观察:当企业知道其它的厂商的生产决策时,自己应该如何达到自身的利润最大化;)

(1) 当 $\alpha > \beta > \gamma$ 时,

A: 当 3 大,2 大时,则 1 小;

γ				
α				

当 1 小,3 大时,则 2 随意;

β	β			

当 1 小,2 大时,则 3 随意;

β			β	

把三列图形重叠,所得到的蓝色重叠部分便为纳什均衡(小,大,大);

B: 当 1 大，3 大时，则 2 小；

γ	α		

当 1 大，2 小时，则 3 随意；

	β		β

当 2 小，3 大时，则 1 随意；

	β		
	β		

把三列图形重叠，所得到的蓝色重叠部分便为纳什均衡（大，小，大）；

C: 当 1 小， 3 小时，则 2 大；

		α	γ

当 1 小， 2 大时，则 3 随意；

β		β	

当 2 大，3 小时，则 1 随意；

		β	
		β	

把三列图形重叠，所得到的蓝色重叠部分便为纳什均衡（小，小，大）；

D: 当 2 大，1 大时，则 3 小；

γ		α	

当 1 大，3 小时，则 2 随意；

		β	β

当 2 大，3 小时，则 1 随意；

		β	
		β	

把三列图形重叠，所得到的蓝色重叠部分便为纳什均衡（大，大，小）；

E: 当 1 小， 3 小时，则 2 大；

α	γ

当 1 小， 2 大时，则 3 随意；

β	

β	

当 2 大，3 小时，则 1 随意；

β	
β	

把三列图形重叠，所得到的蓝色重叠部分便为纳什均衡（小，大，小）；

F: 当 2 小， 3 小时，则 1 大；

	α
	γ

当 2 小， 1 大时，则 3 随意；

	β

	β

当 1 大，3 小时，则 2 随意；

β	β

把三列图形重叠，所得到的蓝色重叠部分便为纳什均衡（大，小，小）；

α,β,β	

β,β,α	

	β,α,β

β,α,β	

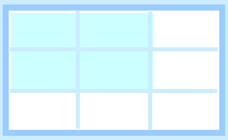
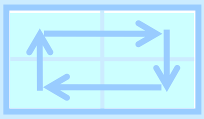
	β,β,α

	α,β,β

综上所述，当 $\alpha>\beta>\gamma$ 时，我们一共可以得出六个纳什均衡，分别为（小，大，大）、（大，小，大）、（小，小，大）与（大，大，小）、（小，大，小）、（大，小，小）；

（2）当 $\alpha>\gamma>\beta$ 时，从（1）中可知，在我们的分析中，只涉及到 α 、β 之间；α 、γ 之间的比较，而没有涉及 γ 、β 之间的比较，所以，我们可断定；（2）的分析过
论和（1）是一致的。（这是我根据（2）的条件独立分析完毕所得出的结论）

9

让我们先分析  这块区域，通过分析，我们会得出  的结果；当 *A* 出上时，*B* 的最优战略为中;而当 *B* 出中时，*A* 出中；当 *B* 出中时，*B* 出左；当 *B* 出左时，*A* 出上……如此反复，以至无穷，仍不会有最终的均衡结果。

而当 *A* 知道 *B* 会出右时，*A* 会出下，当 *B* 知道 *A* 出下时，*B* 会出右，所以，该博弈里只有一个纳什均衡。

10

		2	
		左	右
1	左	0，0，10	-5，-5，0
	右	-5，-5，0	1，1，-5

		2	
		左	右
1	左	-2，-2，0	-5，-5，0
	右	-5，-5，0	-1，-1，5

（1）第一个矩阵得出（上，左）和（下，右）两个纳什均衡；第二个矩阵得出（上，左）和（下，右）两个纳什均衡；因为这时，在其他的局中人不改变当前的战略前提下，任何一个局中人都无法单方通过改变自己的战略而获得更高的支付；

（2）因为游戏者 3 在两个矩阵的期望收益是一样的，但两个矩阵的方差不同：第一个大于第二个矩阵，而对于游戏者 3 更倾向于哪一个矩阵，则是要看他是哪一种风险类型；

当游戏者 3 为风险规避者时，他会更倾向于第二个矩阵；为风险中性者时，则是无所谓；而为风险爱好者时，他会选择第一个矩阵；

两个人结盟时是追求总收益最大，当游戏者 1、2 结盟时，会迫使游戏者 3 选择第一个矩阵（因为当游戏者 3 选择 B 矩阵时，游戏者 1、2 则会以放弃游戏来威胁），这时的纳什均衡为（下，右）；

而只有当游戏者 3 为风险爱好者或风险中性者时，才会与游戏者 1 或者 2 结盟（因为当游戏者 3 为风险规避者时，他与其他准联盟的游戏者首先在自身同盟内部都不能达成一致的意见），游戏者 1、3 结盟时（这与游戏者 2、3 结盟时的决策一致）的纳什均衡为（上，左）；

很遗憾，在这题中不存在这样的均衡，因为通过我们的以上分析，在两游戏者结盟时的最终达成的两个均衡是不一致的。这说明他们的决策目标是有差异的。

12（1）正确，因为占优均衡是纳什均衡的一个特例；

（2）不正确，因为对于一个囚犯知道另一个囚犯不揭发时，他的最优的战略为揭发，每个囚犯都会有背叛自己同伴的冲动。

（3）因为系统中只存在一个行为者，这连博弈都称不上，何来的混合战略。

11

		游戏者 II		
		左	中	右
游戏者 I	上	2， 0	1， 1	4， 2
	中	3， 4	1， 2	2， 3
	下	1， 3	0， 2	3， 0

对于游戏者 1 而言，上是占优于下的，所以，游戏者 1 是不会选择下的，进而对于游戏者 2 而言，当他知道游戏者 1 的第一步选择后，他会确信右是占优于中的，所以，游戏者 2 是不会选择中的；在所剩的选择中存在两个纳什均衡（上，右），（中，左）。

13 小镇上的居民的目标是追求自身的利润最大化，但自身的利润又是取决于自己和别人的行为，这相当于囚犯困境的问题。

我们先化简问题，而会更有利于我们得出一般性的结论；假设这个小镇只存在两个居民 1、2，他们有两个选择：出 100 元或是不出钱，根据题目所提供的条件，我们可得出一个收益矩阵：

		2	
		100	0
1	100	100，100	0， 100
	0	100， 0	0， 0

如果大家都出 100 元的话，则大家的利润都将是 100。但其中一人会想如果在对方出 100 的时候，自己不出钱一样的会获利 100，换句话说，每人的最优的战略为不出钱。这就会出现帕累托无效的均衡。

当我们推广到小镇上有 n 个居民时，我们会发现如果某一居民出钱的话，有可能他会出现亏损，这更会使居民坚持不出钱的“最优”战略。最终，会达到每人都不出钱的一个无效的均衡。

有人会说，如果他们相互联合的话呢？我想其结果应是一样的。因为在相互联合的情况下，每个人都不可能清楚的知道其他人的真正行为。

一种更严密的证明：

一个小镇上有 N 个人，第 i 个人的捐赠为 F_i，捐赠总额为 $F=\sum_{i=1}^{N}F_i$，记 $F_{-i}=\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}F_j$；

第 i 个人的净收入为：$\prod_i(F_i)=\dfrac{2\cdot(F_i+F_{-i})}{N}-F_i$

$$\prod{}'=\frac{2}{N}-1$$

当 $N=2$ 时，净收入不随捐赠数额的变化而变化；

当 $N>2$ 时，净收入是随着捐赠数额的增多而减少；此时，他的最优选择为不捐赠

		Nancy	
		Sunset	Gulf
Frank	Sunset	3， 2	0， 0
	Gulf	0， 0	2， 3

(1) 因为两人都不知道对方的战略，所以有可能存在纯战略的纳什均衡（*Sunset* ，*Sunset*）、（*Gulf*， *Gulf*）；我们可由以下的运算来看是否存在混合战略的纳什均衡：

设 *Frank*、*Nancy* 去 *Sunset* 的概率分别为 p、q，则 *Frank* 的目标为：

$$Max \quad p[3q+0\cdot(1-q)]+(1-p)[0\cdot q+2(1-q)]$$

一阶条件：
$$[3q]-[2(1-q)]=0$$

$$q=\frac{2}{5}$$

而 *Nancy* 的目标为：

$$Max \quad q[2p+0\cdot(1-p)]+(1-q)[0\cdot p+3(1-p)]$$

一阶条件：
$$[2p]-[3(1-p)]=0$$

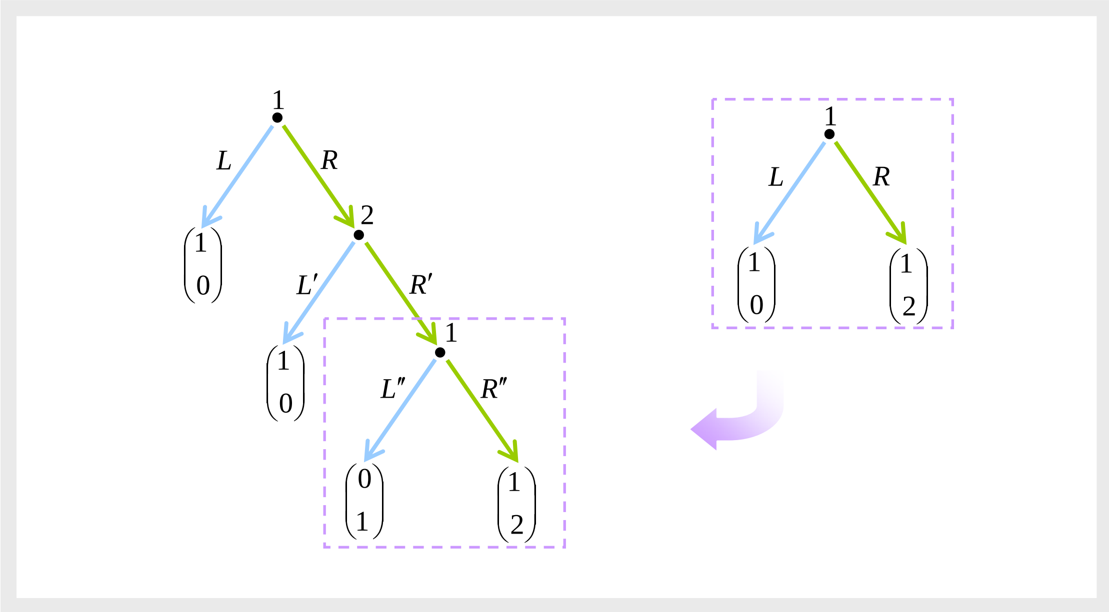
$$p=\frac{3}{5}$$

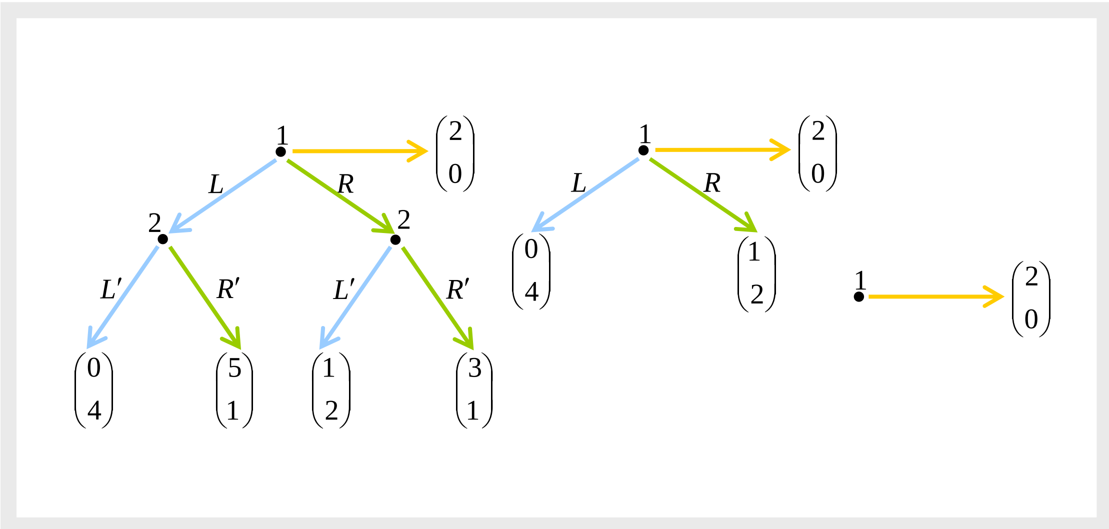
$$\sigma_F\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right);\ \sigma_N\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$$

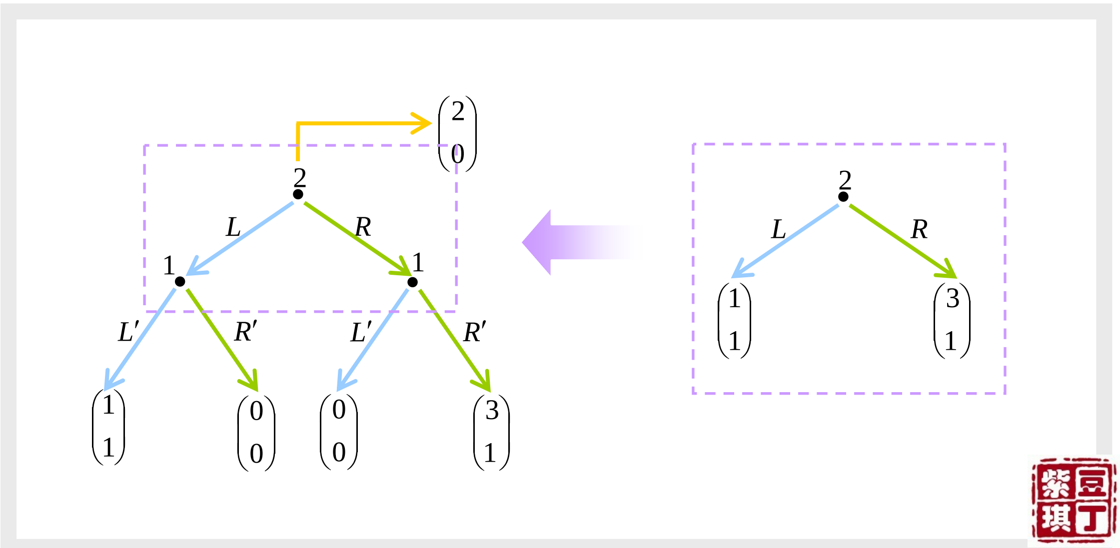
(2) 这一博弈不存在占优均衡。

第十一讲

3 我们可用反向归纳法来分析以下的广延型博弈，如果其最后的结果仍为最初的广延型博弈中的某一部分，则此博弈为多重反向归纳策略。







1（1）

关于开发商 *A* 的策略：开发、不开发；

关于开发商 *B* 的策略：

①无论 *A* 怎样选择，*B* 都会选择开发；我们用（开发，开发）表示；

②当 *A* 选择开发时，*B* 选开发；当 *A* 选不开发时，*B* 选不开发；我们用（开发，不开发）表示；

③当 *A* 选择开发时，*B* 选不开发；当 *A* 选不开发时，*B* 选开发；我们用（不开发，开发）表示；

④无论 *A* 怎样选择，*B* 都会选择不开发；我们用（不开发，不开发）表示；

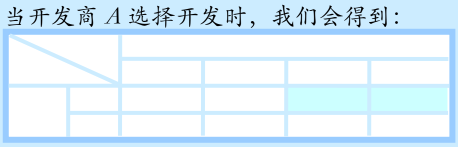
地产开发博弈：策略式表述

		开发商 *B*			
		开发，开发	开发，不开发	不开发，开发	不开发，不开发
开发商 *A*	开发	-3，-3	-3，-3	1，0	1，0
	不开发	0，1	0，0	0，1	0，0

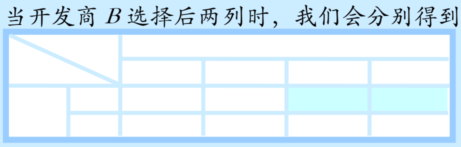
（2）

我们来找一下纳什均衡：

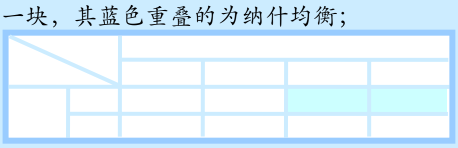
当开发商 *A* 选择开发时，我们会得到：



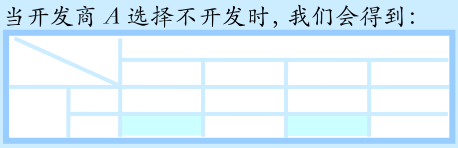
当开发商 *B* 选择后两列时，我们会分别得到：



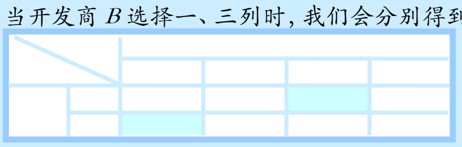
当我们把以上两个矩阵并在一块，其蓝色重叠的为纳什均衡；



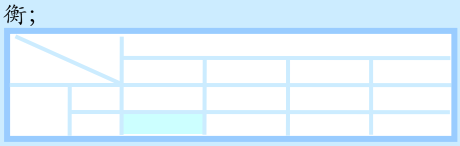
当开发商 *A* 选择不开发时，我们会得到：



当开发商 *B* 选择一、三列时，我们会分别得到：



我们又可得到另一个纳什均衡；



综上所述，我们一共得到三个纳什均衡；分别为：

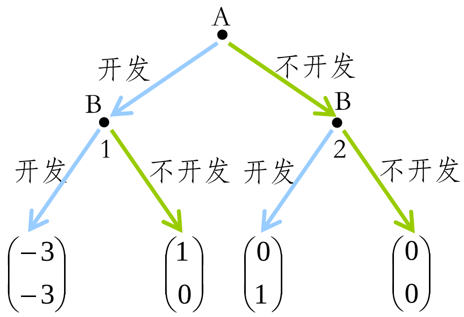
①｛不开发，（开发，开发）｝；②｛开发，（不开发，开发）｝；③｛开发，（不开发，不开发）｝；

（3）**子博弈完美纳什均衡**：一个策略组合是子博弈完美纳什均衡，如果它满足：

①对于整个博弈而言，它是一个纳什均衡；

②对于任一个子博弈而言，它都是一个纳什均衡；

而事实上，我们在（2）中所求的策略组合是对整个博弈而言的；即以上
策略组合对于整个博弈而言都是纳什均衡；



对于第一个组合而言，{不开发，(开发，开发)}—开发商 A 选不开发，而开发商 B 选开发—是整个博弈的一个纳什均衡。虽然这个组合没有涉及到开发商 A 选择开发的这一策略；但开发商 B 的策略却意味着：即使 A 选择开发，他也会选择开发，这与“游戏者追求目标极大化”的假定相矛盾。

而对于树状图而言，在 2 的子博弈上 B 的策略是最优的；但在 1 的子博弈上 B 的策略却不是均衡策略；所以，第一个组合不是子博弈的完美纳什均衡。同样，我们可得出第三个组合也不是；

只有第二个组合为子博弈的完美纳什均衡。

纳什均衡仅要求在均衡路径所涉及的子博弈上每个游戏者的行为都是最优的，但它容忍在均衡路径实际上不能到达的子博弈上游戏者的非理性行为。泽尔腾（Selten）在 1965 首先指出了这种纳什均衡的不合理性，并提出了的子博弈完美纳什均衡概念。（蒋殿春 p277）

2（1）当厂商同时宣布产量的时候，其得最优选择是按照古诺模型行事，因为这是各企业以对方的最有选择情况下做出的自己的最优选择：

$$Max \quad \pi_1 = [30 - Q]Q_1$$

$$Max \quad \pi_2 = [30 - Q]Q_2$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 30 - 2Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = 30 - Q_1 - 2Q_2 = 0$$

由一阶条件得反映函数
$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{30 - Q_2}{2} \\ Q_2 = \dfrac{30 - Q_1}{2} \end{cases};$$

$$Q_1 = 10;\ \ Q_2 = 10;\ \ p = 10;\ \ \pi_1 = 100;\ \ \pi_2 = 100$$

（2）当自身是先宣布产量时，则企业应遵循 *Stackelberg* 模型行事：

$$Max \quad \pi_1 = \left[30 - Q_1 - \frac{30 - Q_1}{2}\right]Q_1$$

一阶条件：
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 15 - Q_1 = 0$$

$$Q_1 = 15;\ \ Q_2 = 7.5;\ \ p = 7.5;\ \ \pi_1 = 112.5;\ \ \pi_2 = 56.25$$

由以上的计算可知，先宣布产量是一种优势，为了得到先宣布产量的选择权所付出的代价应不大于这两种情况下的利润差，即：

$$p_{stackelberg} \le 112.5 - 100 = 12.5$$

（3）当两企业进行有限次的博弈时，则不合作是各自的最优选择，即按照古诺模型来确定自身的最优产量行事，所以每次的产量都应为 10 ，因为两企业为了实现利润最大的最优选择原本应是按照联合定价的卡特尔模型行事，但在第十次生产时，双方都知这是最后一次博弈，为实现自身的利润最大，都会选择背叛，即实行先宣布产量的战略，从而使得市场的最后均衡为古诺均衡，而第九次博弈时，既然，双方都知道在第十次博弈时，对方一定会背叛自己，那就没有理由在第九次博弈中合作，而市场的最终结果还是古诺均衡。

4

		游戏者 2	
		左	右
游戏者 1	左	1， 3	0， 0
	右	0， 0	3， 1

因为是双方同时进行博弈，无法判断对方的策略，但这个矩阵还是有可能存在（左，左）、（右，右）的纯策略的纳什均衡；我们进一步来看是否也存在混合策略的纳什均衡，设游戏者 1、2 选择左的概率分别为 p、q，则游戏者 1 的目标为：

$$Max \quad p[q + 0\cdot(1-q)] + (1-p)[0\cdot q + 3(1-q)]$$

一阶条件：

$$[q] - [3(1-q)] = 0$$

$$q = \frac{3}{4}$$

而游戏者 2 的目标为：

$$Max \quad q[3p + 0\cdot(1-p)] + (1-q)[0\cdot p + 1(1-p)]$$

一阶条件：

$$[3p] - [(1-p)] = 0$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_1\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right);\ \sigma_2\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

所以 $\sigma_1\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$；$\sigma_2\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ 为此矩阵的混合策略的纳什均衡。

7（1）当 *WET* 把市场的价格定为 1000 时：

WET 垄断市场：　$\pi_{WET} = 1000 \times 25{,}000 = 25{,}000{,}000$

进入者进入市场：$\pi_{WET} = 1000 \times 12{,}500 = 12{,}500{,}000$

$$\pi_{entrant} = 1000 \times 12{,}500 - 10{,}000{,}000 = 2{,}500{,}000$$

当 *WET* 把市场的价格定为 600 时：

WET 垄断市场：　$\pi_{WET} = 600 \times 25{,}000 = 15{,}000{,}000$

进入者进入市场：$\pi_{WET} = 600 \times 15{,}000 = 9{,}000{,}000$

$$\pi_{entrant} = 600 \times 15{,}000 - 10{,}000{,}000 = -1{,}000{,}000$$

由以上的运算结果可构造出其策略型表达：

		ENTRANT			
		进入，进入	进入，不进入	不进入，进入	不进入，不进入
WET	*1000*	*12,500,000，2,500,000*	*12,500,000，2,500,000*	*25,000,000，　0*	*25,000,000，　0*
	600	*9,000,000，-1,000,000*	*15,000,000，　0*	*9,000,000，-1,000,000*	*15,000,000，　0*

纳什均衡为｛1000，（进入，进入）｝、｛600，（进入，不进入）｝；而子博弈的完美纳什均衡为｛600，（进入，不进入）｝；

（2）*WET* 投资新建厂的策略是无利可图的：定价 600 时，这时 *WET* 已经是垄断市场了，如果要建厂的话，*WET* 的这项新的举措将是得不偿失的，建厂的成本大于其利润（10,000,000>600×5,000）；因为 *WET* 也没有必要定价为 1000，由题目的条件限制，*WET* 也不可能进一步使得在价格为 1000 的市场上增加；

其实这也可以直接从纳什均衡的概念得出：如果局中人所选的战略处于这样一种状态：在其他的局中人不改变当前的战略前提下，任何一个局中人都无法单方通过改变自己的战略而获得更高的支付。

5

		电视台 *1*	
		前	后
电视台 *2*	前	*18，　18*	*23，　20*
	后	*4，　23*	*16，　16*

（1）因为是双方同时进行博弈，无法判断对方的策略，但电视台的选择是可预测

们通过观察可以发现电视台 2 具有占优选择，他是无论如何都不会选择后的，所以这个矩阵的纯策略的纳什均衡为（后，前）；

（2）如果双方都采用回避风险的策略：

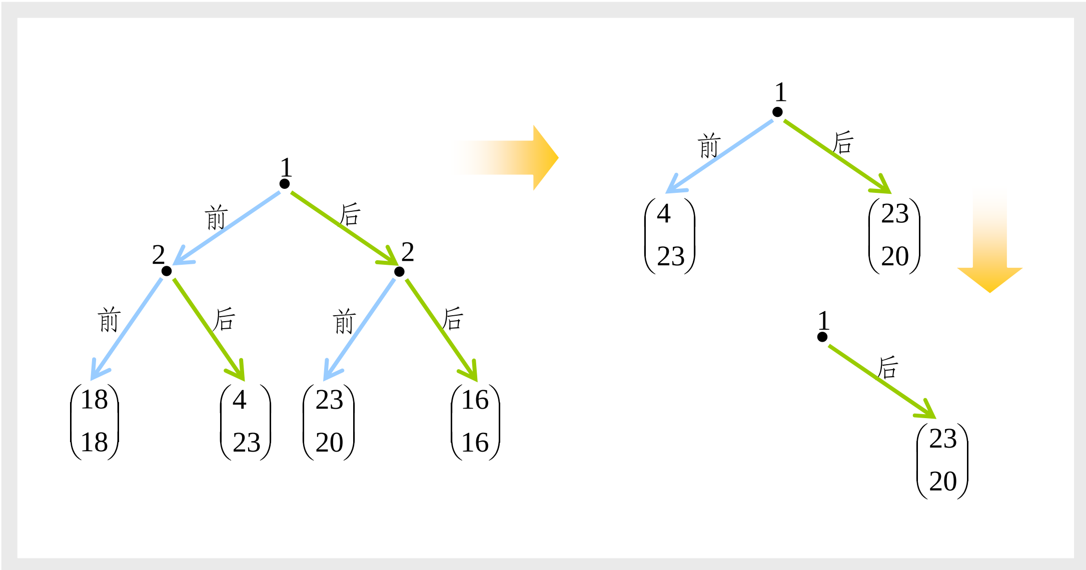
当电视台 1 选择前时：$\min(18,23)=18$；当电视台 1 选择后时：$\min(20,16)=16$

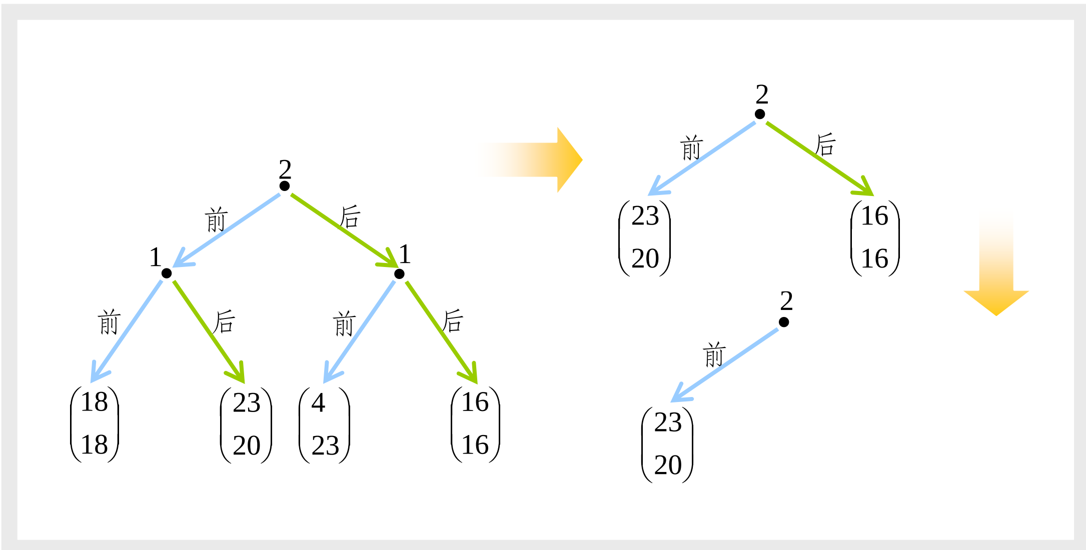
所以电视台 1 为了回避风险，他会选择前；

电视台 2 具有占优选择，他是无论如何都不会选择后的，电视台 2 为了回避惨遭 4 的收视率的风险，他会选择前；

则此时的最大最小策略为（前，前）；

（3）





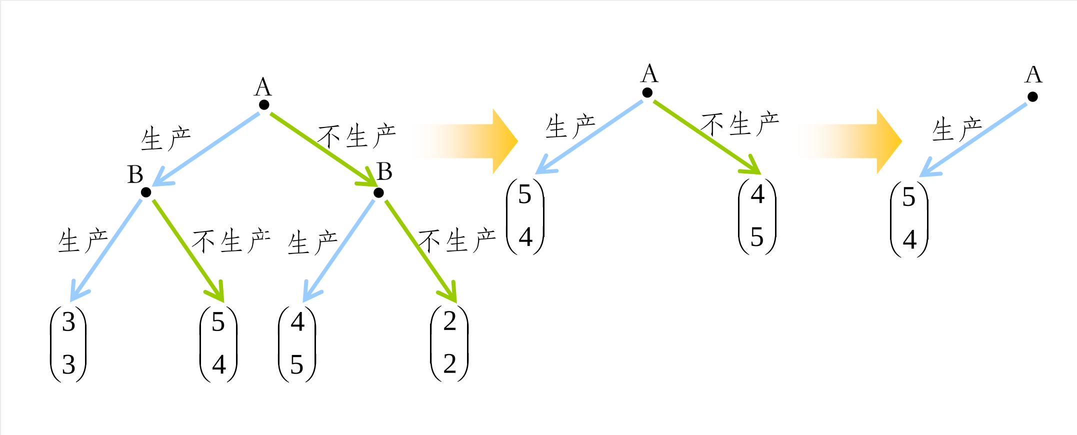
（4）电视台 2 的行为是可信的，因为这是他的占优策略，而电视台 1 的行为是不可信的，因为当他知道电视台 2 的策略后，他会选择后，这回给他带来额外的 2 个收视点，所以最终的结果为（后，前）。

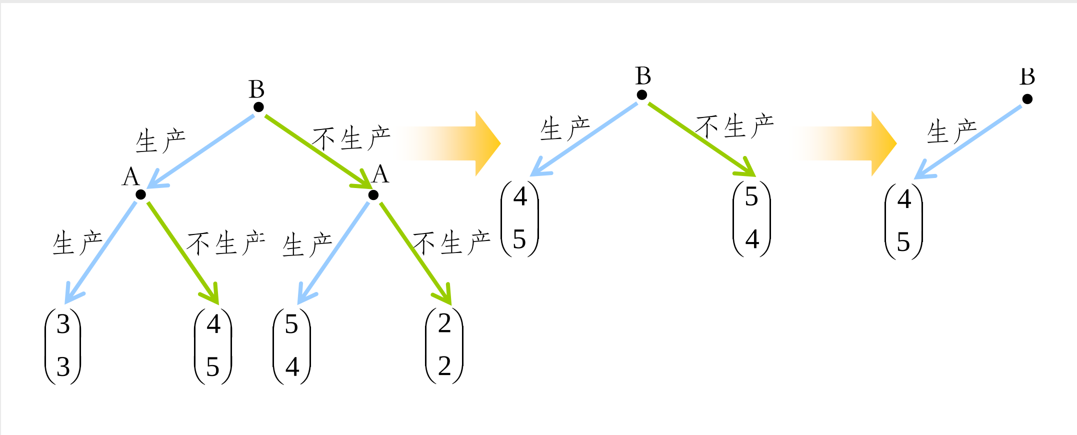
6

		厂商 *B*	
		生产	不生产
厂商 *A*	生产	3， 3	5， 4
	不生产	4， 5	2， 2

(1) 纳什均衡为（生产，不生产）、（不生产，生产）;

(2)

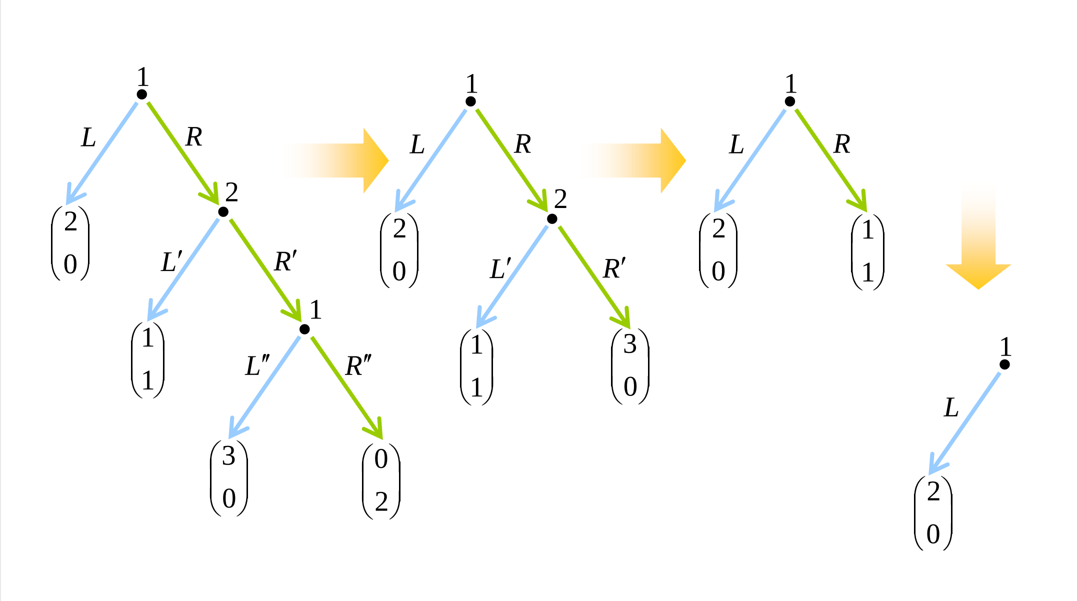




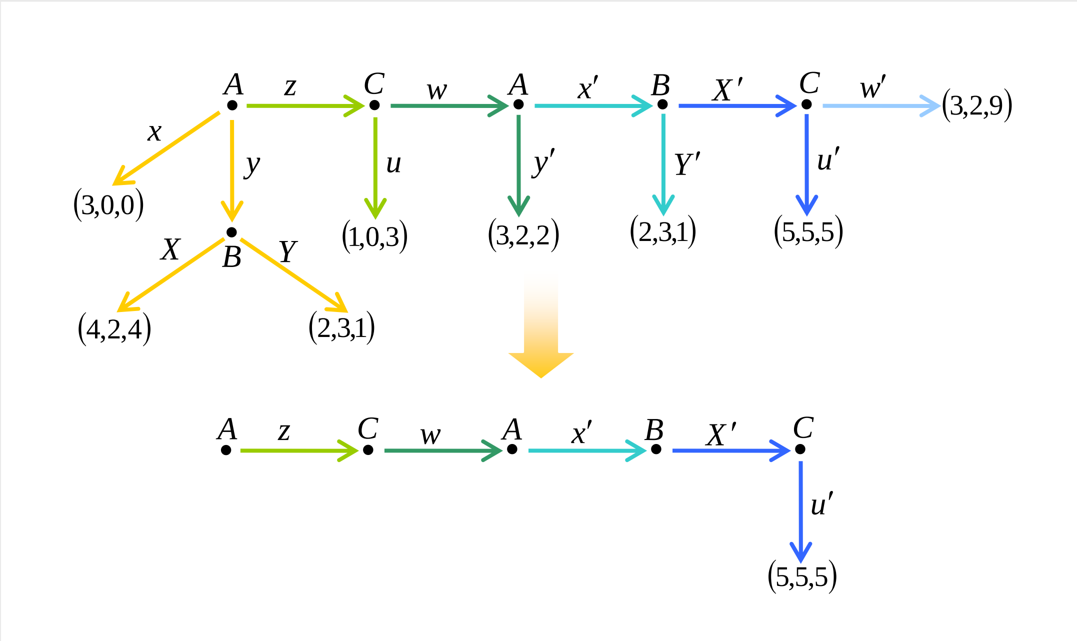
由上可知，对于两企业而言，都有先动优势。

(3) 先精确以下题目：厂商 *B* 通过欺骗厂商 *A*，可以把厂商 *A* 赶出市场吗？不能，因为在（生产，不生产）时，厂商 *B* 也进行生产的话，厂商 *A* 的利润仍可以为 3；而在（不生产，生产）时，厂商 *B* 不生产，厂商 *A* 的利润为 2；换句话说，无论厂商 *B* 选择什么样的策略，厂商 *A* 的利润都是为正的。

8



9



就简单而言，原来的国有股是不许进入股市买卖的，现在国家要把国有股推向市场，但其成本是非常低的，如同一种低价格的商品进入市场，这就会对市场造成不小的冲击；

国家的目的是让自己甩掉包袱，试想一下，在当初进行国企改革时，每股只不过是一元，而且还不算每年的分红，事实上，国家早就把其资金的大部分收回了，但现在又要把这些国有股推向市场，它当然不会以原来的价格买出，即使是低于现在股市的平均价格，也会是在十元左右，这就意味着不算折旧，还会比原来多好几倍的价格买出，这样，国家只会赚而不会赔，对国家是有好处的；说得不好听的话，这是国家在明目张胆“圈钱”；

但对老百姓而言，如果国家这一下搞得不好的话，许多人都将会赔上血本；因格的股票进入市场会使得股市价格下降，实际数据表明自从国家宣布要进行股改以

市一直都是低迷不振；

但对于长期而言，对双方都是有利的，中国也只不过是参照了西方的做法，其中，最典型的就算是英国在 1979 年，柴契尔夫人所推行的国有企业私有化运动，并获得了巨大的成功；

10（1）

关于游戏者 *1* 的策略：左、右；

关于游戏者 *2* 的策略：

①无论 *1* 怎样选择，*2* 都会选择左；我们用（左，左）表示；

②当 *1* 选择左时，*2* 选左；当 *A* 选右时，*B* 选右；我们用（左，右）表示；

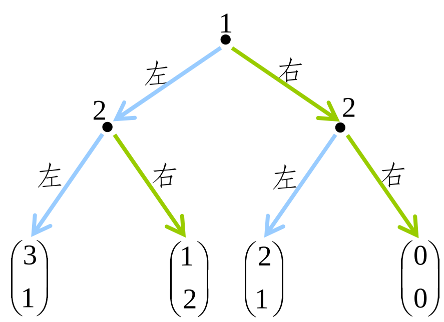
③当 *1* 选择左时，*2* 选右；当 *A* 选右时，*B* 选左；我们用（右，左）表示；

④无论 *1* 怎样选择，*2* 都会选择右；我们用（右，右）表示；

游戏者博弈：策略式表述

		游戏者 *2*			
		左，左	左，右	右，左	右，右
游戏者 *1*	左	*3*，*1*	*3*，*1*	*1*，*2*	*1*，*2*
	右	*2*，*1*	*0*，*0*	*2*，*1*	*0*，*0*

（2）纳什均衡为 {左，(右，右)}、{右，(右，左)}；



在以上两个组合中，只有第二个策略组合为子博弈完美纳什均衡；

第十二讲

1 前提条件：

因为是在 *Bertrand* 模型中，所以这规定了市场上的企业生产的产品完全相同，企业也完全相同，（即成本函数完全一样，生产的边际成本等于单位成本 *c*，设固定成本为零）

（微观经济学十八讲 p173）

分析：

每个企业面临两种选择：合作、背叛：

（1）合作：各企业联合起来，行业的总利润实现最大化，各企业平分总利润；

（2）背叛：某个企业单方面降低价格，从而该企业占领整个市场，而其余各企业采取不合作的策略，这会使得市场最终以 $p=MC=c$ 定价，市场的总供应量为 $Q=a-c$，各企业的供应量为 $\frac{Q}{n}$，各企业的利润为零；

（1）　由 $p=a-Q \quad \Rightarrow Q=a-p$

$$\pi = pQ - cQ = p(a-p) - c(a-p)$$

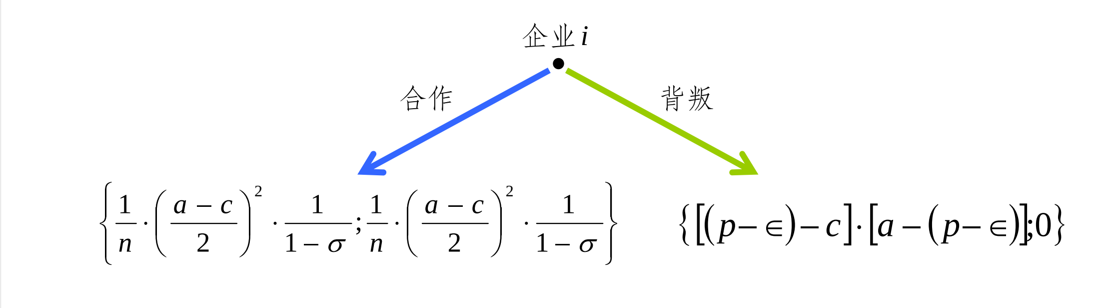
一阶条件：

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = a - p + c - p = 0$$

$$p=\frac{a+c}{2};\ Q=\frac{a-c}{2};\ q=\frac{1}{n}\cdot\frac{a-c}{2};\ \pi=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

（2）当企业 *i* 选择背叛时，他的价格稍微下降 $\in$ 量，而其他的企业的价格仍保持不变，那么所有的消费者就都会做出购买企业 *i* 的商品的选择，通过对价格作任意小量的削减，企业 *i* 就能垄断整个市场，当整个行业都进行价格竞争时，则市场最终达到 *Bertrand* 均衡。

通过以上的计算，我们可以画出其广延博弈：

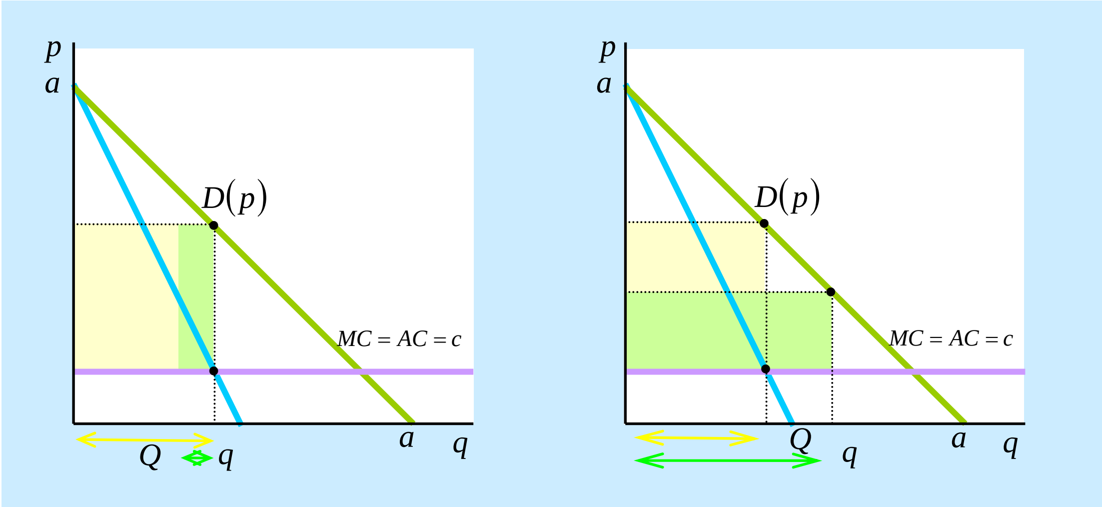


要使得企业 i 不和其余的企业合作，这必须满足：

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a-c}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\sigma} \le [(p-\in)-c]\cdot[a-(p-\in)]$$

$$\sigma \ge \frac{(a-c)^2}{4n[(p-\varepsilon)-c]\cdot[a-(p-\in)]} - 1;\ (\sigma \ge 0)$$

$$\frac{d\sigma}{dn} \geq -\frac{(a-c)^2}{4n^2[(p-\in)-c]\cdot[a-(p-\in)]} < 0$$



2

		2		
		左	中	右
1	上	3， 1	0， 0	5， 0
	中	2， 1	1， 2	3， 1
	下	1， 2	0， 1	4， 4

因为是两人同时博弈，所以双方无法知道对方的确切的策略，但双方可以预测对方的策略。我们有理由相信游戏者 1 不会选择下，因为上的策略是占优于下的策略；回过头来看游戏者 2，当他知道游戏者 1 不会选择下时，他的中的和左的策略是占优于右的策略。在所剩的选择中存在两个纳什均衡（上，左），（中，中）。所以，（下，右）不会成为第一次博弈的结果；我们再看看这个矩阵是否存在混合策略的纳什均衡。

我们现在设游戏者 1、2 选择上、左的概率分别为 p、q，则游戏者 1 的目标为：

$$Max \quad p[3\cdot q+0\cdot(1-q)]+(1-p)[2\cdot q+1(1-q)]$$

一阶条件：

$$[3q]-[(1+q)]=0$$

$$q=\frac{1}{2}$$

而游戏者 2 的目标为：

$$Max \quad q[1\cdot p+1\cdot(1-p)]+(1-q)[0\cdot p+2(1-p)]$$

一阶条件：

$$1-[2(1-p)]=0$$

$$p=\frac{1}{2}$$

$$\sigma_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ \sigma_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

所以，通过计算，我们可知在两个游戏者同时博弈时，此矩阵存在混合策略的纳什均衡。

3　重复博弈可分为有限和无限重复博弈，都有类似于合作与背叛的策略存在；

子博弈是指如果某一节点处的信息集只包含唯一的一个元素（这个节点本身），并且由此后延的博弈树中不包含残缺的信息集。

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p285）

（微观经济学十八讲 平新乔 北大出版社 P226-227）

一个策略组合是自博弈完美纳什均衡，如果它满足：

（1）对于整个博弈来说，它是一个纳什均衡；

（2）对于任一个子博弈来说，它都是一个纳什均衡。

（微观经济学十八讲 平新乔 北大出版社 P227）

4 市场上的企业生产的产品完全相同，企业也完全相同，（即成本函数完全一样，生产的边际成本等于单位成本 c，设固定成本为零）

每个企业面临两种选择：合作、背叛：

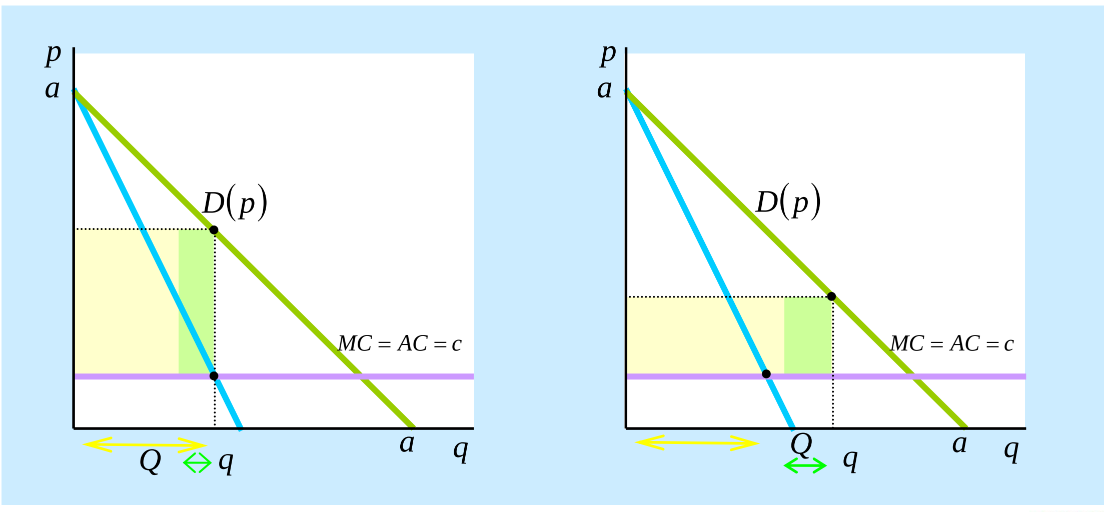
（1）合作：各企业联合起来，行业的总利润实现最大化，各企业平分总利润；

（2）背叛：某个企业单方面改变产量，则各企业按照实现自身的利润最大化进行生产，市场最后达到多企业的古诺均衡；

（1）
$$\pi=(a-Q)Q-cQ$$

一阶条件：
$$\frac{d\pi}{dQ}=a-2Q-c=0$$

$$Q=\frac{a-c}{2};\quad p=\frac{a+c}{2};\quad q=\frac{1}{n}\cdot\frac{a-c}{2};\quad \pi=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$



（2）企业 i 是根据现行的其他企业的产量来制定自身的产量；

$$\pi_i=\left(a-\frac{(n-1)(a-c)}{2n}-q_i\right)q_i-cq_i$$

一阶条件： $$\frac{d\pi}{dq_i}=\frac{2na-(n-1)(a-c)}{2n}-2q_i-c=0$$

$$q_i=\frac{(n+1)(a-c)}{4n};\quad \pi_i=\frac{(n+1)^2(a-c)^2}{16n^2}$$

在下一期时，各企业实行古诺模型中的个别企业的最优产量；

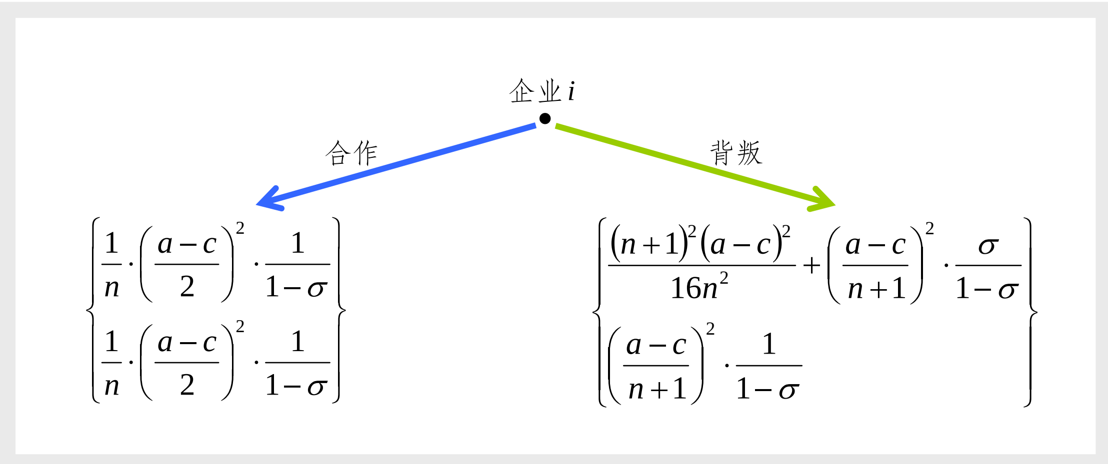
$$\pi=(a-Q)q-cq$$

一阶条件： $$\frac{d\pi_i}{dq_i}=a-2q_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}q_j-c=0$$

当市场达到均衡时，$q_i=q_j$

$$q=\frac{a-c}{n+1};\quad \pi=\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$$

通过以上的计算，我们可以画出其广延博弈：



要使得企业 i 和其余的企业合作，这必须满足：

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a-c}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\sigma}\geq\frac{(n+1)^2(a-c)^2}{16n^2}+\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2\frac{\sigma}{1-\sigma}$$

$$\sigma\geq\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+4n}$$

由此可知，贴现因子最低应等于 $\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+4n}$；

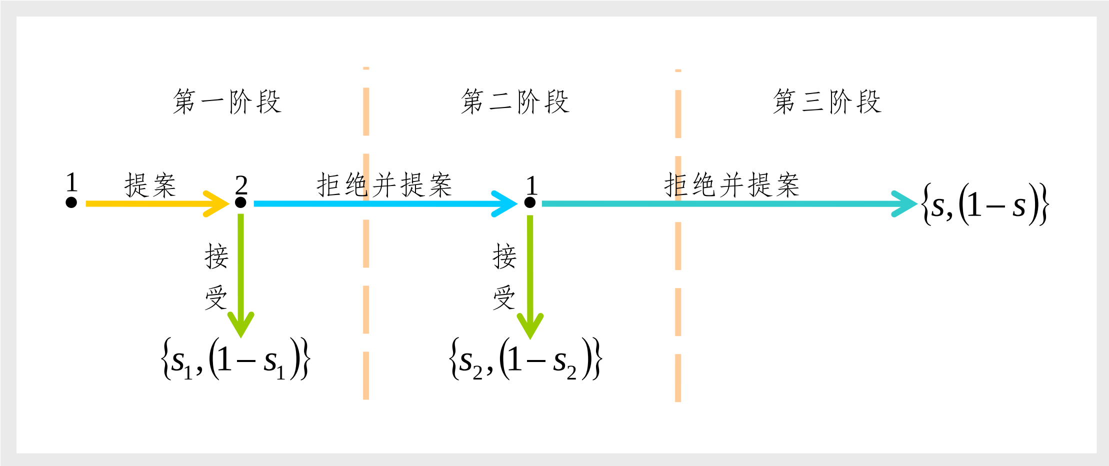
两边取对数：

$$\ln\sigma = 2\ln(n+1) - \ln\left[(n+1)^2 + 4n\right]$$

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dn} = \frac{2}{n+1} - \frac{2(n+1)+4}{(n+1)^2+4n}$$

$$\frac{d\sigma}{dn} = \left[\frac{2}{n+1} - \frac{2(n+1)+4}{(n+1)^2+4n}\right]\cdot\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+4n} > 0\text{；}\qquad (n>1)$$

5 此为著名的 Rubinstein 讨价还价模型；



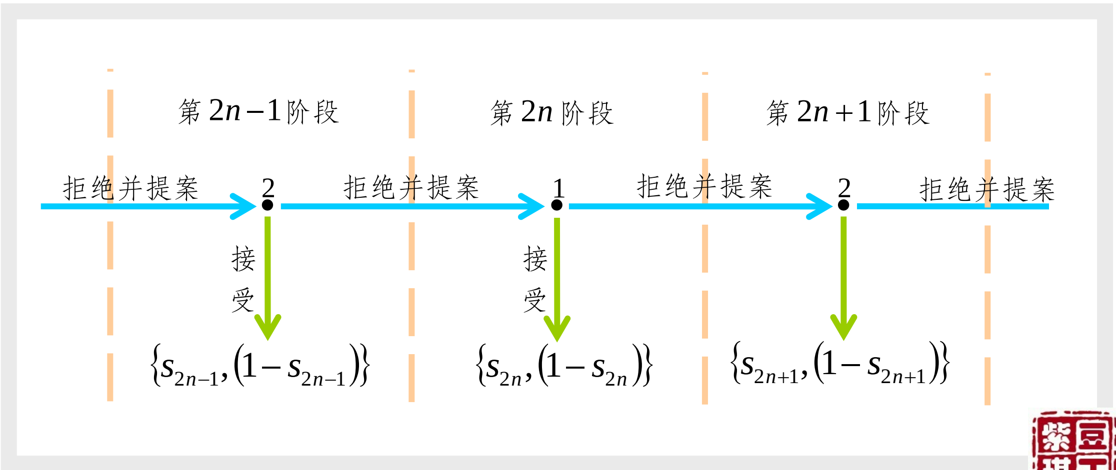
游戏者的目标为自身的收益最大化，让我们从博弈树的终点开始分析，在第三阶段时，游戏者都知道自己的最后的所得，所以在第二阶段时，游戏者 2 所提的议案想要被游戏者 1 所接受，必须要使游戏者 1 的所得不少于第三阶段的所得，而在第三阶段的 s 对于游戏者 1 来说相对于第二阶段的 $\delta\cdot s$，游戏者 2 的所得为剩下的 $1-\delta\cdot s$；

$$s_2 = \delta\cdot s\text{；}\qquad 1-s_2 = 1-\delta\cdot s$$

在第一阶段时，游戏者 1 所提的议案想要被游戏者 2 所接受，则必须满足游戏者 2 不少于在第二阶段的所得；而剩下的归游戏者 1；

$$1-s_1 = \delta\cdot(1-\delta\cdot s)\text{；}\quad s_1 = 1-\delta\cdot(1-\delta\cdot s)$$

6 因为该博弈重复无穷次，所以倒推法不适用，因为我们无法找到倒推的起点，但我们还是可以从无穷重复的博弈中找到其规律：



在第 $2n$ 阶段时，游戏者 2 的议案想要被游戏者 1 所接受，则必须满足：

$$s_{2n} = \delta \cdot s_{2n+1}；\ 1 - s_{2n} = 1 - \delta \cdot s_{2n+1}$$

在第 $2n-1$ 阶段时，游戏者 1 的议案想要被游戏者 2 所接受，则必须满足：

$$1 - s_{2n-1} = \delta \cdot (1 - \delta \cdot s_{2n+1})；\ s_{2n-1} = 1 - \delta \cdot (1 - \delta \cdot s_{2n+1})$$

由此，我们可得到：

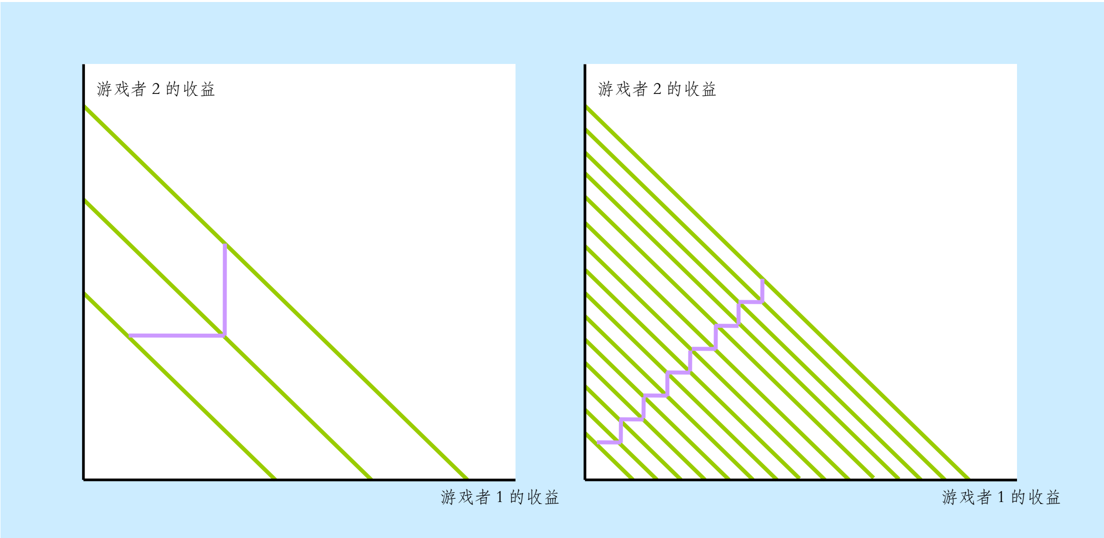
$$s_{2n-1} = 1 - \delta \cdot (1 - \delta \cdot s_{2n+1})$$

$$1 - s_{2n-1} = \delta \cdot [1 - \delta \cdot (1 - s_{2n+1})]$$

当 $n \to +\infty$ 时，$2n-1 = 2n+1$，则以上两式为：

$$s = \frac{1}{1+\delta}；\quad 1 - s = \frac{\delta}{1+\delta}$$

由我们的思路可知：上述两游戏者的策略为纳什均衡，而且我们的分析是由子博弈推导出的，只要任何一个游戏者提出 $\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$ 的策略时，在博弈树上的任何一个节点都可以结束，所以对于整个博弈树而言，这是一个纳什均衡，进而我们可知这是一个完美的子博弈的纳什均衡。



在图中，离原点最远的线为第一阶段的可能达成的结果，往原点移动一个单位的线为第二阶段可能达成的结果的现值……

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p292-294）

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p279-282）

第十三讲

就本章而言，比较有用的几种做题思路：

首先，我们必须知道当涉及合同时，其标准是实现行为人的（期望）效用最大化，而不是别的什么。

（1）当涉及代理人的最优选择时：

代理人追求的是期望效用最大：直接用代理人的期望净效用（代理人为风险中性者）或其确定性等值（代理人为风险厌恶者）对努力水平（或激励强度）进行求导即可；

（2）当涉及委托人（风险中性者）的最优选择时：

委托人追求的是两者的期望效用最大：直接用两者的期望净的总效用（代理人为风险中性者）或代理人确定性等值与委托人的期望净效用之和（代理人为风险厌恶者）对努力水平（或激励强度）进行求导即可；

（3）当涉及努力程度不可观察时的最优合同时：

把（1）的结果代入（2）便可直接得出其结论。

1（1）

$$Max \quad w-e$$

$$e=1;\quad w=2;\quad w-e=1;\quad R=10-x;\quad \pi=R-w=8-x$$

（2）

$$Max \quad \frac{10e-e^2x}{2}-e$$

一阶条件：

$$5-ex-1=0$$

$$e=\frac{4}{x};\quad w=\frac{12}{x};\quad w-e=\frac{8}{x};\quad R=\frac{24}{x};\quad \pi=R-w=\frac{12}{x}$$

（3）

$$Max \quad 10e-e^2x-12.5-e$$

一阶条件：

$$10-2ex-1=0$$

$$e=\frac{9}{2x};\quad w=\frac{99}{4x}-12.5;\quad w-e=\frac{81}{4x}-12.5;\quad R=\frac{99}{4x};\quad \pi=R-w=12.5$$

因为行为人的行动标准都是实现自身的目标最大化，而两者的目标有时是不一致的，委托人是要解决这一问题，要使得代理人的目标与委托人的目标相容。而以上的不同的工资制度所得到的不同的结果反映了委托人在这方面的努力，这也说明了各种制度所激发的代理人的努力程度不同。

2（1）return：To produce or yield (profit or interest) as a payment for labor, investment, or expenditure. 获利，生息：生产制造或产生（利润或收益）以支付作为劳动力、投资或开销的报酬

此项目的期望毛回报为 $E(R)=\frac{100+150}{2}=125$，而期望回报率为：

$$E(r)=\frac{\left(\frac{100+150}{2}-100\right)}{100}=25\%$$

（2）银行的利润来自于贷款利率与存款利率之差，而项目的期望回报率为 25%，利率一定会小于其期望回报率，所以上述项目不可能从银行获得贷款。

（3）银行监管每个项目的费用为 5，占每个项目款的 5%，而存款利率为 10%，所以银行的总成本占每个项目款的 15%，所以，银行要从每个项目的回报中至少分 15%，主要才能使银行的收支相抵。

（4）

		银行贷款利率	
		$0 \le x < 15\%$	$15\% \le y < 25\%$
企业	贷款	$25\% - x\,,\ x - 15\%$	$25\% - y\,,\ y - 15\%$
	不贷款	0， 0	0， 0

上述矩阵为企业、银行的收益矩阵，企业的策略为是否向银行贷款；而银行的策略为提供两种不同利率的贷款。企业存在占优策略，即向银行贷款；而银行只有在提供利率不小于 15%的贷款时，他才会获利。所以，矩阵存在：企业向银行贷款；银行提供贷款利率为$15\% \le y < 25\%$ 的贷款给企业的纳什均衡。

3（1）
$$E[w(\pi)] = \alpha + \beta e\,; \qquad Var[w(\pi)] = \beta^2\sigma^2$$

把以上两式代入$E(u) = E(w) - \phi Var(w) - g(e)$得：

$$E(u) = \alpha + \beta e - \phi\beta^2\sigma^2 - g(e)$$

（2）当代理人行动可观察时，我们这样来看问题：某个企业有一个总经理的职务空缺，这时的老板的任务是找一个能使实现企业利润最大化目标的职业经理人，但要实现这个目标，有几个他十分不想面对的困难摆在他的面前：报酬方案的确定、对经理人努力水平的选择；让我们分两步来；

第一步：是设计出一个来报酬方案（此时，我们假定努力水平为常量）；第二步：确定一个对于利润最大化而言的最优努力水平；

而剩下的问题就简单了，当众多个经理人来应聘岗位时，他们声称会提供各种水平的努力程度；我们的老板所要做的是：只需聘用那个与自己结论一致的职业经理人；

又因为委托人为风险中性者，所以，$EU = U(E\pi)$，即：其期望效用等于期望利润的效用；且我们假定代理人的保留效用为零；

委托人的目标：
$$\max_{\alpha,\beta,e} \quad EU = e - \alpha - \beta e$$

$$s \cdot t \cdot \quad \alpha + \beta e - \phi\beta^2\sigma^2 - g(e) \ge 0$$

第一步：
$$\max_{\alpha,\beta} \quad EU = e - \alpha - \beta e$$

$$s \cdot t \cdot \quad \alpha + \beta e - \phi\beta^2\sigma^2 - g(e) \ge 0$$

贪婪的老板会一直压榨经理人的工资，使得经理人最终只能得到经理人的效用水平的最低限度，所以最优解出的约束条件一定是取等号的。

构造拉氏方程：$\psi(\alpha,\beta,\lambda) = e - \alpha - \beta e - \lambda\left[\alpha + \beta e - \phi\beta^2\sigma^2 - g(e)\right]$

一阶条件： $$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=-1-\lambda=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=-e-\lambda\left[e-2\phi\beta\sigma^2\right]=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=\alpha+\beta e-\phi\beta^2\sigma^2-g(e)=0 \tag{3}$$

由以上，我们可得出：$\begin{cases}\alpha=g(e)\\ \beta=0\end{cases}$

（如果大家够胆色的话，试试以委托人最小支出为目标来计算玩玩）

由题设给出的报酬方案 $w(\pi)=\alpha+\beta\pi$，我们可知最优工资为：$w^*(\pi)=g(e)$；

第二步： $$\underset{e}{Max}\quad EU=e-g(e)$$

由一阶条件，我们可知当 $g'(e)=1$ 时，这就确定了最优努力水平 e^*，由此我们可以补足其最优工资为：$w^*(\pi)=g(e^*)$ ；

老板的最大期望效用为：$EU^*=e^*-g(e^*)$ ；

（3）当代理人行动不可观察时，我们同样份两步走，这时，我们试着倒着来，这也是书上所说的反向归纳，我们可爱的老板将不得不更加要费脑细胞，他要设计出另一套报酬方案来激发出可恶的经理人的最大潜能：

委托人的目标： $$\underset{\alpha,\beta,e_O}{Max}\quad EU=e_O-\alpha-\beta e_O$$

$$s\cdot t\cdot\quad (i)\quad \alpha+\beta e_O-\phi\beta^2\sigma^2-g(e_O)\ge 0$$

$$(ii)\quad \alpha+\beta e_O-\phi\beta^2\sigma^2-g(e_O)\ge\alpha+\beta e-\phi\beta^2\sigma^2-g(e)$$

第一步： $$\underset{\alpha,\beta}{Max}\quad EU=e_O-\alpha-\beta e_O$$

$$s\cdot t\cdot\quad (i)\quad \alpha+\beta e_O-\phi\beta^2\sigma^2-g(e_O)\ge 0$$

$$(ii)\quad \alpha+\beta e_O-\phi\beta^2\sigma^2-g(e_O)\ge\alpha+\beta e-\phi\beta^2\sigma^2-g(e)$$

先从约束条件二开始：贪婪的老板肯定是想方设法的使经理人玩命的干，所以我们大可认为约束条件二是在求 $\alpha+\beta e_O-\phi\beta^2\sigma^2-g(e_O)$ 的最大值，因而，会很容易对 e_O 求导得出：当 $g'(e_O)=\beta$ 时，$\alpha+\beta e_O-\phi\beta^2\sigma^2-g(e_O)$ 达到最大值，这样，我们无意中就把两个未知数中的一个解了出来，我们就可用此结论来代入约束条件一，进而得到；

$$\underset{\alpha}{Max}\quad EU=e_O-\alpha-\beta e_O$$

$$s\cdot t\cdot \quad (i) \quad \alpha + g'(e_O)e_O - \phi[g'(e_O)]^2\sigma^2 - g(e_O) = 0$$

把约束条件一稍加变形，$\alpha = \phi[g'(e_O)]^2\sigma^2 + g(e_O) - g'(e_O)e_O$，这样，我们消灭了最后一个未知数，第一步的任务完成，最优工资为：$w*(\pi) = \phi[g'(e_O)]^2\sigma^2 + g(e_O)$；

第二步： $\underset{e}{Max} \quad EU = e_O - \phi[g'(e_O)]^2\sigma^2 - g(e_O)$

一阶条件： $$g'(e_O*) = \frac{1}{2\phi\sigma^2 g''(e_O*)+1} = \beta$$

这就确定了最优努力水平 e_O*，由此我们可以补足其最优工资为：$w*(\pi) = \phi[g'(e_O*)]^2\sigma^2 + g(e_O*)$ ；

老板的最大期望效用为：$EU* = e_O* - \phi[g'(e_O*)]^2\sigma^2 - g(e_O*)$ ；

$$\frac{\partial g'(e_O*)}{\partial \phi} = -\frac{2\sigma g''(e_O*)}{[2\phi\sigma^2 g''(e_O*)+1]^2} < 0 ; \qquad \frac{\partial g'(e_O*)}{\partial \sigma^2} = -\frac{2\phi g''(e_O*)}{[2\phi\sigma^2 g''(e_O*)+1]^2} < 0$$

当 ϕ 或 σ^2 增加时，代理人风险规避程度增加，β 下降，即对委托人的激励下降。

另一种求法：

（2）这事实上是求：代理人的期望效用、委托人的期望效用最大化；

委托人（*principal*）的目标： $\underset{e}{Max} \quad E_p(u)$

代理人（*agent*）的目标： $\underset{e}{Max} \quad E_a(u)$

$s\cdot t\cdot \quad E_a(u) \geq \bar{u}$ ； （$\bar{u}$ 为代理人的保留效用水平）

因为，委托人是在满足了代理人的期望效用最大化的情况下，来实现自己的期望效用最大化的， 所有两者的目标是一致的，接下来，我们会发现这样作有利于我们更直观地看出结论的性质；其中 $E_p(u) = E[\pi - w(\pi)] = e - \alpha - \beta e$，则我们所求变为：

$$\underset{e}{Max} \quad E(u) = E_p(u) + E_a(u)$$

$$E(u) = e - \alpha - \beta e + \alpha + \beta e - \phi\beta^2\sigma^2 - g(e)$$

$$E(u) = e - \phi\beta^2\sigma^2 - g(e)$$

一阶条件： $$\frac{\partial E(u)}{\partial e} = 1 - g'(e) = 0$$

$$g'(e*) = 1$$

当 e 可观察时，其最优的合同为规定一个管理者的努力水平 e^*（满足 $g'(e^*)=1$）和一个固定的工资报酬 $w[\pi(e^*)]$；

进一步提问：以下的做法如何?

委托人的目标：
$$\underset{e}{Max} \quad E_p(u)$$
$$s\cdot t\cdot \quad E_a(u)\ge \bar{u}$$

构造拉氏方程：$\psi(e,\lambda)=e-\alpha-\beta e+\lambda[\bar{u}-\alpha-\beta e+\phi\beta^2\sigma^2+g(e)]$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial e}=1-\beta+\lambda[g'(e)-\beta]=0$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=\bar{u}-\alpha-\beta e+\phi\beta^2\sigma^2+g(e)=0$$
$$g'(e)=\frac{(\lambda+1)\beta-1}{\lambda} \qquad (1)$$

代理人的目标：
$$\underset{e}{Max} \quad E_a(u)$$
$$s\cdot t\cdot \quad E_a(u)\ge \bar{u}$$

构造拉氏方程：
$$\psi(e,\lambda)=\alpha+\beta e-\phi\beta^2\sigma^2-g(e)+\lambda[\bar{u}-\alpha-\beta e+\phi\beta^2\sigma^2+g(e)]$$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial e}=\beta-g'(e)-\lambda[g'(e)-\beta]=0$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=\bar{u}-\alpha-\beta e+\phi\beta^2\sigma^2+g(e)=0$$
$$\lambda=-1 \qquad (2)$$

把 $\lambda=-1$ 代入拉氏方程得：
$$\psi(e)=2\alpha+2\beta e-2\phi\beta^2\sigma^2-2g(e)-\bar{u}$$

一阶条件：
$$\frac{\partial\psi}{\partial e}=\beta-g'(e)=0$$
$$g'(e)=\beta \qquad (3)$$

把（2）式代入（1）式得：$g'(e^*)=1$；如果不放心的话，把（3）式代入（1）式同样会得：$g'(e^*)=1$

（3）我会依照着张定胜的思路依样画葫芦：（其思路来源见本章末）

设 e^* 为实现代理人的期望效用最大化的努力水平；而 e' 为其它的努力水平；则：

委托人的目标：
$$\underset{e}{Max} \quad E_p(u)$$
$$s\cdot t\cdot \quad (i)\ \ E_a(u)\ge \bar{u}$$

$$(ii)\ \alpha+\beta e^{*}-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e^{*})>\alpha+\beta e'-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e')$$

构造拉氏方程:

$$\psi(e^{*},\lambda_1,\lambda_2)=e^{*}-\alpha-\beta e^{*}+\lambda_1\left[\bar{u}-\alpha-\beta e^{*}+\phi\beta^{2}\sigma^{2}+g(e^{*})\right]$$

$$+\lambda_2\left[\alpha+\beta e'-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e')-\alpha-\beta e^{*}+\phi\beta^{2}\sigma^{2}+g(e^{*})\right]$$

一阶条件: $$\frac{\partial\psi}{\partial e^{*}}=1-\beta+\lambda_1[g'(e*)-\beta]+\lambda_2[g'(e*)-\beta]=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_1}=\bar{u}-\alpha-\beta e^{*}+\phi\beta^{2}\sigma^{2}+g(e*)=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_2}=\alpha+\beta e'-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e')-\alpha-\beta e*+\phi\beta^{2}\sigma^{2}+g(e*)=0$$

$$g'(e*)=\frac{\beta-1}{\lambda_1+\lambda_2}+\beta\ ;\qquad (\lambda_1,\lambda_2>0)$$

另一种更为简便的方法:

当努力水平不可观察时的最优合同实为当代理人实现期望效用水平最大化的努力水平下的努力水平可观察时的最优合同。

代理人的目标: $$\underset{e}{Max}\quad E_a(u)$$

$$\underset{e}{Max}\quad E_a(u)=\alpha+\beta e-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e)$$

一阶条件: $$\frac{\partial E_a(u)}{\partial e}=\beta-g'(e)=0$$

$$g'(e)=\beta$$

委托人的目标: $$\underset{e}{Max}\quad E(u)=E_p(u)+E_a(u)$$

$$E(u)=e-\alpha-\beta e+\alpha+\beta e-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e)$$

$$E(u)=e-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e)$$

把 $g'(e)=\beta$ 代入 $E(u)=e-\phi\beta^{2}\sigma^{2}-g(e)$ 得:

$$E(u)=e-\phi[g'(e)]^{2}\sigma^{2}-g(e)$$

一阶条件: $$\frac{\partial E(u)}{\partial e}=1-2\phi\sigma^{2}g'(e)g''(e)-g'(e)=0$$

$$g'(e*)=\frac{1}{2\phi\sigma^{2}g''(e*)+1}$$

这时,由于委托人无法观察到代理人的努力程度,所以其固定工资的数额将下降,且随着$\phi,\sigma,g''(e)$的增大而减小;但如果委托人想达到其得益最大化,则必须过度一部分利润给代理人,使得二者共同承担风险。

（马斯·科莱尔 微观经济学 上海财经大学出版社 p507）

（吴汉洪 高级微观经济学习题集 经济科学出版社 p243-245）

（没想到我还能活着盼到这一刻的到来……）

4（1）假定委托人为风险中性者,所以他的期望效用等于期望收入,委托人所考虑的是在得到同样的利润的前提下,应尽可能的选择一种低的工资报酬,来实现自身的得益最大化,而委托人所选择的工资报酬是使得代理人刚好补偿自己的主观努力成本（即效用函数）:

当代理人所付出的努力水平为e_i时,其期望收益为:

$$E(R)=R_L\cdot f\left(R_L\middle|\ e_i\right)+R_H\cdot f\left(R_H\middle|\ e_i\right),\text{则:}$$

$$E[R(e_1)]=0\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{2}{3}=\frac{20}{3};$$

$$E[R(e_2)]=0\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{2};$$

$$E[R(e_3)]=0\cdot\frac{2}{3}+10\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{3};$$

而相应的工资报酬为: $w_i=v^2(w_i)=g^2(e_i)$,由此我们可得:

$$E[\pi(e_1)]-g^2(e_1)=\frac{20}{3}-\frac{25}{9}=\frac{35}{9}=3.89$$

$$E[\pi(e_2)]-g^2(e_2)=\frac{10}{2}-\frac{64}{25}=\frac{122}{50}=2.44$$

$$E[\pi(e_3)]-g^2(e_3)=\frac{10}{3}-\frac{16}{9}=\frac{14}{9}=1.5$$

由上计算可知,当努力水平可观察时,最优合同为:规定代理人的努力水平为e_1,而其固定的工资报酬为$w_1=v^2(w_1)=g^2(e_1)=\dfrac{25}{9}$;

（2）当代理人的努力水平是不可观测时,但委托人是能观测到企业的利润,他自然会想到既然不能观测到代理人的努力水平,那么就使得代理人的工资与企业利润挂钩,当企业获得高利润时,代理人也会获得高的报酬,反之亦然。

我们设高、低利润出现时的代理人期望效用分别为v_H,v_L,而代理人获得的报酬分别为w_H,w_L,要使得代理人实施e_2,则必须满足:

$$(i)\quad \frac{1}{2}v_H+\frac{1}{2}v_L-\frac{8}{5}\geq 0$$

这个报酬方案的设计必须要使得代理人实施努力水平e_2时的期望效用大

力成本，这个条件也被高手们称之为参与约束条件；

$$(ii)\quad \frac{1}{2}v_H+\frac{1}{2}v_L-\frac{8}{5}\geq\frac{2}{3}v_H+\frac{1}{3}v_L-\frac{5}{3}$$

$$(iii)\quad \frac{1}{2}v_H+\frac{1}{2}v_L-\frac{8}{5}\geq\frac{1}{3}v_H+\frac{2}{3}v_L-\frac{4}{3}$$

这个报酬方案的设计也要必须要使得代理人实施努力水平e_2时的期望效用大于其在实施其它努力水平时所获得的期望效用水平，以上两条件也被高手们称之为激励相容约束条件；

化简以上三个条件可得：$\begin{cases} v_H+v_L\geq\dfrac{16}{5} \\ v_H\leq v_L+\dfrac{2}{5} \\ v_H\geq\dfrac{8}{5}+v_L \end{cases}$ 显然，后两个不等式矛盾；

因此，当代理人的努力水平是不可观测时，代理人不会实施e_2；如果要使代理人实施e_2，我们则要修改后两式中的努力成本：

$$(ii)\quad \frac{1}{2}v_H+\frac{1}{2}v_L-g(e_2)\geq\frac{2}{3}v_H+\frac{1}{3}v_L-\frac{5}{3}$$

$$(iii)\quad \frac{1}{2}v_H+\frac{1}{2}v_L-g(e_2)\geq\frac{1}{3}v_H+\frac{2}{3}v_L-\frac{4}{3}$$

化简得：$(ii)\quad v_H\leq v_L-6g(e_2)+10$

$(iii)\quad v_H\geq v_L+6g(e_2)-8$

解得：$g(e_2)\leq\dfrac{3}{2}$；

另一种解法：

（2）让我们根据上题的第三题的思路来解这一问：

这时，委托人无法观察代理人的努力程度，但他知道代理人有三种努力程度，并且委托人假定这三种努力程度出现的概率相同，即$p(e_1)=p(e_2)=p(e_3)=\dfrac{1}{3}$，现在，委托人的目标是追求自己和代理人的期望总得益最大化，而两者的期望总得益为：

$$\frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{3}\pi_H\cdot f(\pi_H|\ e_i)\right]-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}g(e_i)$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{20}{3}+\frac{10}{2}+\frac{10}{3}\right]-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+\frac{8}{5}+\frac{4}{3}\right)=\frac{225}{45}-\frac{69}{45}=\frac{156}{45}=\frac{312}{90}$$

而当努力水平可以观察到的时候：

当代理人使用e_1时： $\dfrac{20}{3}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{150}{30}=\dfrac{450}{90}$

当代理人使用e_2时： $\dfrac{10}{2}-\dfrac{8}{5}=\dfrac{102}{30}=\dfrac{306}{90}$

当代理人使用e_3时： $\dfrac{10}{3}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{60}{30}=\dfrac{180}{90}$

这类似于两个企业联合起来追求利润最大化的问题，这时，委托人会想最起码两者的得益不少于其期望得益，即$\dfrac{312}{90}$；而当代理人使用e_2时整个系统的总得益只为$\dfrac{306}{90}$；所以，当努力水平不可观察时，代理人不会实施e_2；

如果要使得代理人实施e_2则必须满足：当他实施e_2的时候两者的总得益至少不小于两者的期望总收益，即：

$$\frac{10}{2}-x\geq\frac{312}{90}$$

$$x\leq\frac{138}{90}\approx 1.53$$

（3）委托人的目标： $\underset{e}{Max}\quad E[\pi(e_i)]-g^2(e_i)$

当代理人使用e_1时： $E[\pi(e_1)]-g^2(e_1)=\ 10x-8$

$$\lim_{x\to 1}10x-8=10-8=2$$

当代理人使用e_2时： $E[\pi(e_2)]-g^2(e_2)=\dfrac{10}{2}-\dfrac{64}{25}=\dfrac{122}{50}=2.44$

当代理人使用e_3时： $E[\pi(e_3)]-g^2(e_3)=\ \dfrac{10}{3}-\dfrac{16}{9}=\dfrac{14}{9}=1.5$

当努力水平可观察时，最优合同为选择e_2和一个固定的工资报酬$\dfrac{64}{25}$。

（马斯·科莱尔 微观经济学 上海财经大学出版社 p507）

（吴汉洪 高级微观经济学习题集 经济科学出版社 p253 260-263）

5（1）

$$\underset{a}{Max}\quad E[w(a)-C(a)]$$

$$\underset{a}{Max}\quad s+bka-C(a)$$

一阶条件： $C'(a)=bk$

代理人会选择一个a使得满足$C'(a)=bk$，随着b,k的增大代理人的努力水平a会随之增大；

（2）因为代理人为风险规避者，所以其期望效用不等于其期望收入，所以我们先要求出代理人期望效用的确定性等值，设 x 的分布服从正态分布，且其均值为 m，方差

这时，代理人的期望效用为：

$$E(u)=\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-rx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}\cdot dx=-e^{-r\left(m-\frac{rv}{2}\right)}$$

$$CE=m-\frac{rv}{2}$$

$$E[w(a)-C(a)]=s+bka-\frac{1}{2}a^2\ ;\qquad Var[w(\pi)]=b^2\sigma^2$$

$$CE(s,b)=s+bka(b)-\frac{1}{2}a^2(b)-\frac{1}{2}rb^2\sigma^2$$

$CE(s,b)$相当于代理人的期望工资，委托人为风险中性者，所以他的期望效用等于期望收入，而委托人的目标为实现两者的得益最大化：

$$\underset{b}{Max}\quad E(y)+CE(s,b)$$

$$\underset{b}{Max}\quad ka(b)-s-bka(b)+s+bka(b)-\frac{1}{2}a^2(b)-\frac{1}{2}rb^2\sigma^2$$

由$C'(a)=bk$，$C(a)=\frac{1}{2}a^2$可知：$a=bk$，则上式变为：

$$\underset{b}{Max}\quad k^2b-\frac{1}{2}k^2b^2-\frac{1}{2}rb^2\sigma^2$$

一阶条件：
$$k^2-k^2b-rb\sigma^2=0$$

$$b^*=\frac{k^2}{k^2+r\sigma^2}$$

（终于看到了长得像点人样的题目了）

6（1）因为代理人为风险中性者，所以他的期望效用等于期望收入

$$\underset{a}{Max}\quad E[w(a)-C(a)]$$

$$\underset{a}{Max}\quad s+ba-ma^2$$

一阶条件：
$$a=\frac{b}{2m}$$

代理人会选择一个a使得满足$a=\frac{b}{2m}$，随着b的增大代理人的努力水平a会随之增大；随着m的增大代理人的努力水平a会随之增减小；

（2）设 x 的分布服从正态分布，且其均值为 m，方差为 v，这时，代理人的期望效用为：

$$E(u)=\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-rx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}\cdot dx=-e^{-r\left(m-\frac{rv}{2}\right)}$$

$$CE=m-\frac{rv}{2}$$

$$E[w(a)-C(a)]=s+ba-ma^2\ ;\qquad Var[w(\pi)]=b^2\sigma^2$$

$$CE(s,b)=s+ba(b)-ma^2(b)-\frac{1}{2}rb^2\sigma^2$$

委托人为风险中性者，所以他的期望效用等于期望收入，委托人的目标为：

$$\underset{b}{Max}\ E[y(b)-w(b)]$$

$$s\cdot t\cdot\quad (i)\quad \underset{b}{Max}\qquad s+ba(b)-ma^2(b)-\frac{1}{2}rb^2\sigma^2$$

$$(ii)\ s+ba(b)-ma^2(b)-\frac{1}{2}rb^2\sigma^2\geq\overline{CE}$$

根据(ii)的约束条件，由反向归纳法得：$a=\dfrac{b}{2m}$，取$\overline{CE}=0$，$\lambda=1$构造拉氏方程：

$$\underset{b}{Max}\quad \frac{b}{2m}-\frac{b^2}{4m}-\frac{1}{2}rb^2\sigma^2$$

一阶条件：

$$\frac{1}{2m}-\frac{b}{2m}-rb\sigma^2=0$$

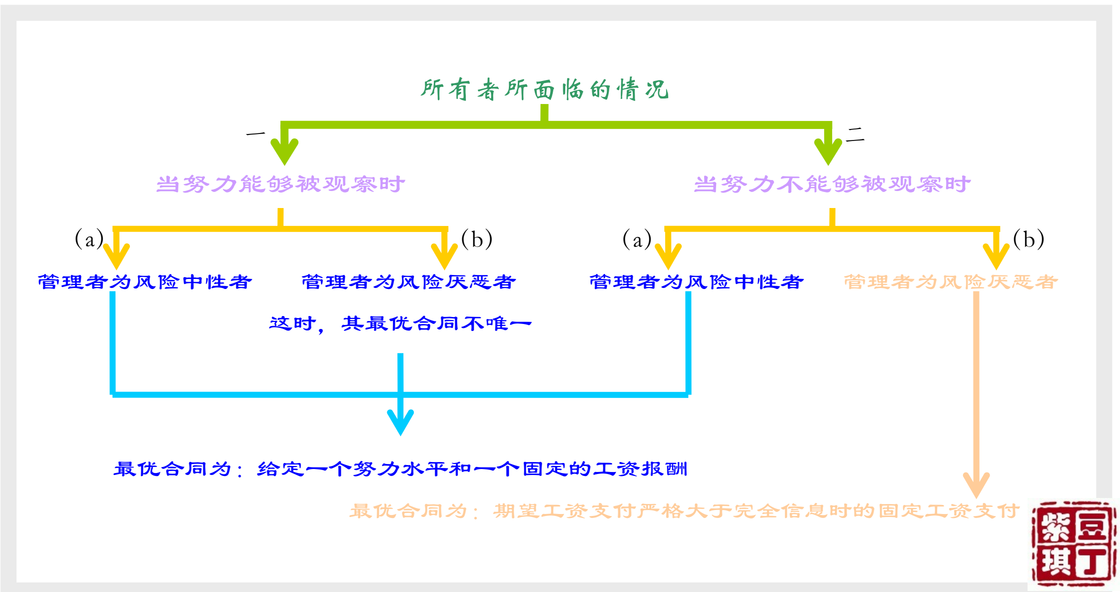
$$b^*=\frac{1}{1+2mr\sigma^2}$$

因为我在看这章后来做练习，便陷入了无限的恐慌之中，以我现在的水平是无法完成此章的练习的，所以唯一的选择就是从不同的角度来看同样事物。以下是我看武汉大学出版社张定胜编著的《高级微观经济学》p178-189的相关读书笔记，我想，这肯定不仅仅只是我所迷惑的问题：

课本先直接给出结论；且这些结论都是浅显易懂的：

当企业者和管理者签订合同时，（一）如果企业所有者能观察到管理者的行为时，则合同问题则是比较简单，合同将简单规定管理者采取什么的行为以及相应的支付一个工资报酬；（二）当所有者不能观察到管理者的行为时，则合同就有可能不再会以这种简单有效的方式签订，所有者必须设计一个工资报酬方案已间接地给管理者一个激励，使得他采取正确的行为。

课本的思路为：



假设：

e 为管理者的努力选择或努力水平，假定管理者只有两种可能的努力水平 e_H 和 e_L，其中 e_H 是一个高努力水平，它所得到的利润可能比 e_L 的高，但管理者必须承担更大的困难。

设 $f(\pi|e_H)$ 和 $f(\pi|e_L)$ 为管理者不同努力水平的条件下所能获得的利润的条件概率密度，并且管理者选择 e_H 所得到的期望利润大于选择 e_L 所得到的期望利润 $\int \pi f(\pi|e_H)d\pi > \int \pi f(\pi|e_L)d\pi$；

管理者的效用函数为 $u(w,e)$，w 为工资，e 为努力水平，我们假定 $u(w,e)=v(w)-g(e)$；其中 $v'(w)>0$； $v''(w)\le 0$； $g(e_H)>g(e_L)$；

所有者所得等于项目的利润减去支付给管理者的工资，我们假设所有者是风险中性者的，所以他们的目标是所得极大化。

分析：

一、当努力能够被观察时的最优合同

所有者提供管理者一份合同，这合同规定管理者的努力水平和他的工资，如果管理者接受这个合同，这意味着这个合同所带给他们的期望效用水平不少于他在其他企业的合同上所得的期望效用水平 $(\bar{u})$。（此也为管理者的保留效用）

所有者的最优合同：

$$\underset{e,w(\pi)}{Max} \quad \int[\pi - w(\pi)]f(\pi|e)d\pi$$

$$s\cdot t\cdot \quad \int v[w(\pi)]f(\pi|e)d\pi - g(e)\ge \bar{u}$$

我们再来看以上两式中有两个未知数 e、$w(\pi)$，所以我们分两步来：（1）先确定 $w(\pi)$；（2）再确定 e；

（1）当合同规定管理者的努力水平 e 时（我们现在只是假定了 e 为一个常数，而并不代表在这是对于所有者而言的最优的 e。这相当于我们先分析对于任何一个 e，都求出相应的最优的 $w(\pi)$，然后在这些所有的最优的 $w(\pi)$ 中，找出对于所有者而言的最优的 e。）所有者要使得实现了最小的负项（支付工资）才能最大化所有者的所得，即：

$$\underset{w(\pi)}{Min} \quad \int w(\pi)\cdot f(\pi|e)d\pi$$

$$s\cdot t\cdot \quad \int v[w(\pi)]f(\pi|e)d\pi - g(e)\ge \bar{u}$$

这时，所有制会一直压榨管理者的工资，使得管理者最终只能得到管理者的效用水平的最低限度，所以最优解出的约束条件一定是取等号的。

构造拉氏方程：

$$L[w(\pi),\lambda]=\int w(\pi)\cdot f(\pi|e)d\pi+\lambda\{\bar{u}-\int v[w(\pi)]f(\pi|e)d\pi+g(e)\}$$

一阶条件:

$$f(\pi|e)-\lambda v'[w(\pi)]f(\pi|e)=0$$

$$\lambda=\frac{1}{v'[w(\pi)]}$$

（a）当管理者为风险厌恶者时$(v''(w)<0)$

因为为λ某一常数$\Rightarrow v'[w(\pi)]$为某一常数$\Rightarrow w(\pi)$为某一常数，这时，所有者在合同中应写明会提供管理者一个固定的工资，在这种情况下，管理者不承担任何风险（即：工资在什么情况下都是一个确定值）

因此，在给定某一努力水平e，所有者在合同中规定给管理者一个固定的工资报酬，使得管理者刚好达到其保留效用水平：$v(w_e^*)-g(e)=\bar{u}$，且合同中所规定的能力水平越高，则其报酬越高。

（b）当管理者为风险中性者$(v''(w)=0)$

对于任何的$w(\pi)$，$v'[w(\pi)]$为某一常数；所以，在合同中可以规定任何一个工资报酬方案，只要满足$v(w_e^*)-g(e)=\bar{u}$的任何工资报酬方案都是最优的。

（2）确定e的最优选择:

当所有者选择e时，必须要满足:

$$\underset{e}{Max}\quad \int \pi f(\pi|e)d\pi-v^{-1}[\bar{u}+g(e)]$$

第一项为期望利润（当管理者的努力水平为e时），第二项为工资（支付给管理者在付出努力水平为e，且正好满足管理者的保留效用水平的工资。）

这时是要选e_H还是选e_L，则是要看哪一个使得所有者的目标最大化。

结论：在能够观察管理者努力水平的合同里，规定了一个最优的努力水平和一个固定的工资（其中最优的e是要满足所有者的目标最大化，而固定的工资是要满足$v(w_e^*)-g(e)=\bar{u}$），当对于所有的$w(\pi)$有$v''(w)<0$时这是唯一的最优的合同。

二、当努力水平不能够被观察时的最优合同

（a）当管理者为风险中性者$(v''(w)=0)$

事实上，这一分析是重复了当管理者为风险中性者时且当努力水平能够被观察时的最优合同的过程。所以我们可以直接得出结论:

在一个不能够观察管理者的努力水平的委托—代理模型里，如果管理者是风险中性者，那么最优合同所产生的管理者努力选择和期望效用以及所有者的报酬同完全信息时一

（b）当管理者为风险厌恶者时$(v''(w)<0)$

我们同样也分两步来：(1) 所有者在管理者现在两个不同的努力水平条件下确定出的最优合同；(2) 所有者来确定努力水平来实现目标最大化；

(1) 在一个特定的努力水平条件下，其合同是在两个约束水平下最小化所有者的期望工资支付，同前面一样，管理者接受这个合同，他必须得到至少 $\bar{u}$ 这么多的期望效用，然而，当管理者选择努力水平 e 必须是实现自身的期望效用的努力水平，所以所有者实现最大化目标（即最小支付）必须满足：

$$\underset{w(\pi)}{Min} \quad \int w(\pi)\cdot f(\pi|e)d\pi$$

$$s\cdot t\cdot \quad (i) \quad \int v[w(\pi)]f(\pi|e)d\pi - g(e) \geq \bar{u}$$

$$(ii)\ e \text{ 是 } \underset{e}{Max} \quad \int v[w(\pi)]f(\pi|\tilde{e})d\pi - g(\tilde{e}) = \bar{u} \text{ 的解}$$

实施 e_L：即这是实现管理者的期望效用水平最大化的解时，在相当于是在一个不太费力的工作岗位上，如在某些清水衙门的政府机关，虽然所有者难于过程管理者的努力水平，但所有者会估计到其工作岗位的性质，所以其合同会是一个固定的工资报酬，这相当于 (ii) 的约束条件可以不用，则拉氏函数变为努力程度可被观察到的情况下一致；

实施 e_H：如果所有者希望管理者实施努力水平 e_H，则第二约束条件变为：

$$\int v[w(\pi)]f(\pi|e_H)d\pi - g(e_H) \geq \int v[w(\pi)]f(\pi|e_L)d\pi - g(e_L)$$

构造拉氏方程：

$$L[w(\pi),\lambda_1,\lambda_2] = \int w(\pi)\cdot f(\pi|e_H)d\pi + \lambda_1\left\{\bar{u} - \int v[w(\pi)]f(\pi|e_H)d\pi + g(e_H)\right\}$$

$$+\lambda_2\left\{ \int v[w(\pi)]f(\pi|e_L)d\pi - g(e_L) - \int v[w(\pi)]f(\pi|e_H)d\pi + g(e_H) \right\}$$

一阶条件：

$$f(\pi|e) - \lambda_1 v'[w(\pi)]f(\pi|e_H) + \lambda_2 v'[w(\pi)][f(\pi|\ e_L) - f(\pi|\ e_H)] = 0$$

$$\frac{1}{v'[w(\pi)]} = \lambda_1 + \lambda_2\left[1 - \frac{f(\pi|\ e_L)}{f(\pi|\ e_H)}\right]; \text{（且 } \lambda_1;\lambda_2 > 0\text{）}$$

从以上分析，我们可以断定此时的工资支付是要比在努力能够被观察时的最优合同的工资支付要多。且这时的最优合同的工资报酬形式不太可能是一种简单的（比如线形）形式；管理者的工资报酬的期望值严格大于他完全信息时的固定工资。从直观上，所有制必须支付给管理者一个较高的工资以补偿他所承担的风险。结果，不可观察性增加了所有者为实施努力水平 e_H 而支付的工资报酬成本。

结论：在一个不能够观察管理者的努力水平的委托—代理模型里，如果管理者是风险厌恶者，实施 e_H 的最优工资报酬方案满足条件：

$$\frac{1}{v'[w(\pi)]}=\lambda_1+\lambda_2\left[1-\frac{f(\pi|\ e_L)}{f(\pi|\ e_H)}\right];（且\ \lambda_1;\lambda_2>0）$$

在这个工资报酬方案下，管理者所得到的期望效用是$\overline{u}$，而期望工资支付严格大于完全信息时的固定工资支付。实施e_L最优工资报酬方案规定一个同努力水平可观察时一样的固定工资支付。只要第一好的努力水平是e_H，不可观察性会引起一个福利损失。

（以上，这只是课本的一部分，其详细的内容可见课本）

我们必须清楚以上的一大版只是说明其定性分析：最优合同的思路是一致的，这便是所有者追求其期望效用最大化；（其情况分为两种：是否可观察的努力水平。在可观察的努力水平的情况下有一个约束条件；而在不可观察的努力水平的情况下有两个约束条件）

我们再来观察以上的结论与十八讲的结论之间的联系：

以上是以工资报酬$w(\pi)$和努力程度e来作为分析目标的，而十八讲则是以工资报酬$w=s+b\cdot y(a)$中的激励强度b为分析对象的；张定胜的课本关注的是工资报酬，而十八讲关注的是工资报酬中的一部分，张定胜的课本上的结论为：

$$\lambda=\frac{1}{v'[w(\pi)]};\qquad \frac{1}{v'[w(\pi)]}=\lambda_1+\lambda_2\left[1-\frac{f(\pi|\ e_L)}{f(\pi|\ e_H)}\right];（且\ \lambda_1;\lambda_2>0）$$

当管理者为风险厌恶者且努力程度不可观察时，其工资报酬是比其他情况时上升了，从直观上，所有制必须支付给管理者一个较高的工资以补偿他所承担的风险。

而十八讲的结论为：

$$C'[a(b)]=b;\qquad b=\frac{1}{1+r\sigma^2}$$

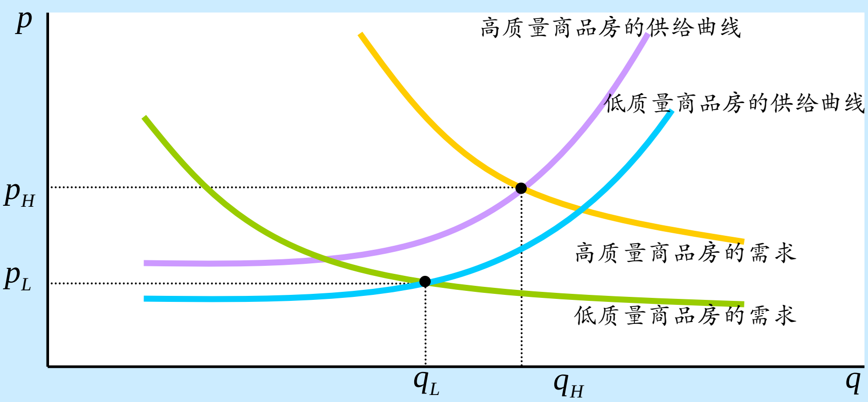
第一个为代理人为风险中性者时获得最大得益时的努力水平；第二个为代理人为风险厌恶者时获得最大得益时的努力水平，但在这时，这只是代理人的最优选择而非委托人的最优选择（特别是在努力水平观察不到的情况下），对于委托人而言是处于两难的状态，一方面委托人需要风险厌恶的代理人不畏风险，那么他必须要补偿风险厌恶的代理人所冒风险而带来的损失，又因为代理人的行为不可观察，他应增加代理人的工资报酬，另一方面，因为代理人为风险厌恶者，他必须减少其工资报酬。这两个相背离的标准会使得委托人两难取舍。但有一点是肯定的，那就是无论怎么着，都会造成系统的福利损失。

第十四讲

5 我们首先假定房地产市场为完全竞争市场，我们如果把这题的房地产市场的质量不同的商品房换成二手车市场的质量不同的二手车会令我们更加舒服一点；

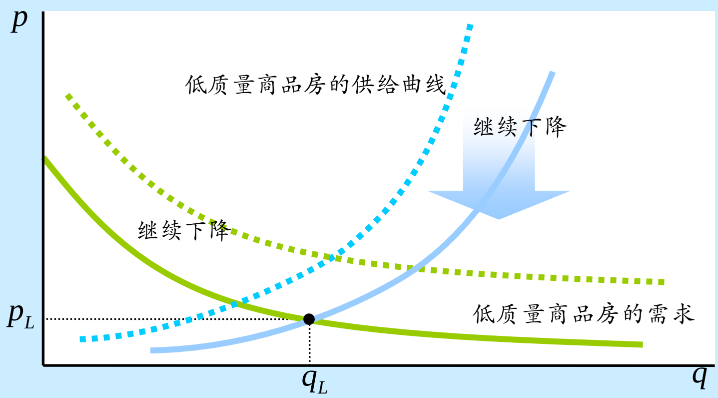
因为在二手车市场上，总体而言，买主所提供的都是车（只是质量不同的二手车而已），对于不同的价格，不同的卖主提供质量不同的二手车，市场上有需要各种质量的二手车的买主存在，为了方便分析，我们只从中挑取（购买相同质量的二手车）两类卖主，即购买高、低质量的两类买主 ，因为对于卖主们而言，高质量的二手车的保留价格一定会比低质量的二手车的保留价格高，所以，我们能断定购买高质量的二手车的需求曲线位于低质量的二手车的需求曲线之上。

（1）



因为高、低质量只是相对而言的，而在信息对称的市场上，由于管理水平、经验等方面的差异，不同的开发商所提供得商品房的质量也有所不同，但开发商的本意应是提供高质量的商品房（如果他提供的是低质量的商品房的话，他将面临保修、法律诉讼等一系列的问题），所以在整体的商品房中，相对较低质量的商品房所占的比例会是很小的，所以在商品房市场中的高质量的商品房成交的数量是会比低质量的商品房成交的数量要多。当购买高、低质量的两类买主购买到自己中意的商品房时，这时，所有类型的购买者都会购买到自己所中意的商品房，房地产市场的所有的商品房都会成交。（注意我们的市场假设条件）

（2）



在信息不对称的条件下，低质量的商品房会驱逐高质量的商品房，这时购房者也应有理由知道整个市场只有低质量的商品房存在（至少购房者在不知道商品房的质量时不会冒然花费自己的多年积蓄），通过买卖双方的无数次相互博弈后，进而只会出现：市场上只有极少数没有房住、急需房子的购房者，这样整个房地产市场会出现供大于求，大量的劣质房充实整个房地产市场，最终的房地产市场只有得到枯萎的结果。

(3) 其实，这类问题已经有许多天才的经济学家在他们所发表的论文中提出了各种解决信息不对称下所造成的问题，如向需求者发出包括价格在内的多种信息、买卖双方在长期内共担风险等等。

1 卖主的效用函数为：$u_1 = y_1 + (q-p)n$ ；　卖主卖出二手车的条件为：$p \ge q$；

买主的效用函数为：$u_2 = y_2 + \left(\frac{3}{2}\mu - p\right)n$；　买主买入二手车的条件为：$\frac{3}{2}\mu \ge p$；

(1) 当买主出价为 $p,(p \ge t)$ 时，市场上的二手车质量服从于 $[t,z]$ 区间上的平均分布，则二手车的平均质量为 $\mu = \frac{p+t}{2}$；

(2) 关于出价的递推公式：当买主出价 p 时，二手车市场的平均质量变为 $\mu = \frac{p+t}{2}$，则买主在下一回合会以上一回合的二手车市场的平均质量 $\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{p+t}{2}+t\right)$ 来定价：

$p = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p+t}{2}+t\right)$；于是，我们可得出：

$$p_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_{n-1}+t}{2}+t\right);$$

关于平均质量的递推公式：假定在上一回合会的二手车市场的平均质量为 μ，则买主出价为 $p = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\mu+t}{2}\right)$，但这时的二手车市场的平均质量会马上变为

$\mu = \frac{1}{2}\left[t + \frac{3}{2}\left(\frac{\mu+t}{2}\right)\right]$，于是，我们可得出：

$$\mu_n = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mu_{n-1}+t}{2}\right)+t\right];$$

我们可通过整理得出：
$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{8}(9t + 3p_{n-1}) \\ \mu_n = \frac{1}{8}(7t + 3\mu_{n-1}) \end{cases};$$

当 $n \to +\infty$ 时，$p_n = p_{n-1}$；$\mu_n = \mu_{n-1}$，则：

$$p_n = \frac{9}{5}t; \qquad \mu_n = \frac{7}{5}t$$

而当 $t=0$ 时，则为书中 p256 的结论，即市场将枯萎；

（3） 当信息充分时，对于任何一辆二手车 i 而言其成交价为：$q_i \le p_i * \le \frac{3}{2}q_i$（而整个二手车市场的平均成交价为 $\frac{t+z}{2} \le p* \le \frac{3}{2}\cdot\frac{t+z}{2}$）；因为阿克莱夫是假定二手车市场为完全竞争的市场；又通过买卖双方的效用函数可知，买主对二手车的需求更为迫切，所以在信息充分时，二手车市场的二手车会全部都被卖出；

但在信息不充分时，只有质量在 $\left[t \sim \frac{7}{5}t\right]$ 的二手车会被卖出，而质量在 $\left[\frac{7}{5}t \sim z\right]$ 之间的二手车被逐出市场（在信息不充分时，劣币驱逐良币）；

对于任何一辆没有被卖出的二手车 i 而言，买主的损失（类似于消费者剩余损失的部分）为 $\left(\frac{3}{2}q_i - p_i *\right)$，而卖主损失的是 $\left(p_i * - q_i\right)$，而这辆没有被卖出的二手车 i 的买、卖双方的损失为：$\left(\frac{3}{2}q_i - q_i\right) = \frac{1}{2}q_i$；通过加总，我们可得出买、卖双方在 $\left[\frac{7}{5}t \sim z\right]$ 区间内的总损失（我们假定在 $\left[\frac{7}{5}t \sim z\right]$ 区间内一共有 N 辆二手车）；而每辆没被卖出的二手车，对于买、卖双方而言，的平均损失为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(z - \frac{7}{5}t\right)$；则：

$$总损失 = \frac{1}{4}\cdot N\left(z - \frac{7}{5}t\right)$$

2 卖主的效用函数为：$u_1 = y_1 + (q-p)n$； 卖主卖出二手车的条件为：$p \ge q$；

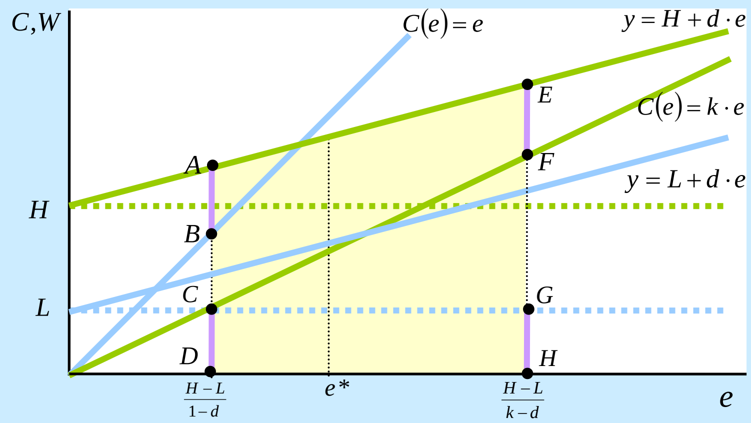
买主的效用函数为：$u_2 = y_2 + \left(\frac{3}{2}\mu - p\right)n$； 买主买入二手车的条件为：$\frac{3}{2}\mu \ge p$；

这时，买卖双方都不知道其商品的具体信息，买卖双方会以其平均质量来判断价格，对于任何一辆二手车 i 而言，当满足 $p \ge 1$ 时，卖方会卖出二手车的价格；而当满足 $p \le \frac{3}{2}$ 时，买方会买入二手车；则市场的成交价格会在 $1 \le p_i * \le \frac{3}{2}$，因为市场上不存在信息不对称，所以双方都不会在出价后，具有逆向选择的冲动。

4 我们首先假定企业以工资等于其生产率来确定工人的报酬，而工人的目标是选择报酬最大化，即 $Max\ \ W - C$，当高能力的工人不受教育时，他无法把自己与低能力劳动者区分，只能领取低能力劳动者的工资 L（而不是 $L + d\cdot e$）；当低能力劳动者通过自己的努力获得学历后，也会被企业当成高能力的工人来看待，获得的工资为 $H + d\cdot e$。而企业要确定一个 $e*$ 来区分两类工人，则必须满足：这个对于 $e*$，高能力的工人而言，接受高质量的教育是有利的，而对于低能力的工人而言，不接受教育所获得的报酬会更多；根据思路得：

$$\begin{cases} H+d\cdot e-k\cdot e>L \\ L>H+d\cdot e-e \end{cases};\qquad 得出\begin{cases} e<\dfrac{H-L}{k-d} \\ e>\dfrac{H-L}{1-d} \end{cases}$$

$$\frac{H-L}{1-d}<e^*<\frac{H-L}{k-d}$$



在上图中，左边的两段紫线段 AB,CD 为低能力的劳动者接受教育的边缘条件，即 $L=H+d\cdot e-e$，即 $AB=CD$，这时，低能力的劳动者是否接受教育所得的净效用是一样的（净效用 $=AB=CD$），往 D 点向右的区域，低能力的劳动者的占优选择为不接受教育；

我们再来看右边的两段紫线段 EF,GH，这是为高能力的劳动者接受教育的边缘条件 $L=H+d\cdot e-k\cdot e$，即 $EF=GH$，这时，高能力的劳动者是否接受教育所得的净效用是一样的（净效用 $=EF=GH$），所以往 H 点向左的区域，则高能力的劳动者的占优选择为接受教育；则企业选择 e^* 的范围为图中的黄色区域。

6（1）
$$EU=\theta u(I-p+s-L)+(1-\theta)u(I-p)$$

$$E\pi=\theta(p-s)+(1-\theta)p=p-s\theta$$

（2）投保人的约束条件为：

$$\theta u(I-p+s-L)+(1-\theta)u(I-p)\geq\theta u(I-L)+(1-\theta)u(I)$$

（3）
$$\underset{s,p}{Max}\quad p-s\theta$$

$$s\cdot t\cdot\quad \theta u(I-p+s-L)+(1-\theta)u(I-p)\geq\bar{u}$$

（其中 $\bar{u}=\theta u(I-L)+(1-\theta)u(I)$）

构造拉氏方程：$L(s,p,\lambda)=p-s\theta+\lambda[\bar{u}-\theta u(I-p+s-L)-(1-\theta)u(I-p)]$

一阶条件：
$$\frac{\partial L}{\partial s}=-\theta+\lambda[\theta u_s'(I-p+s-L)]=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial p}=1+\lambda[\theta u_p'(I-p+s-L)+(1-\theta)u_p'(I-p)]=0$$

只有在$u_s'(I-p+s-L)=u_p'(I-p+s-L)$时，我们才能得出$L=s$的结论，事实上，以上的推导是建立在投保人进行的是全额投保的前提下的，即把保险市场指定为完全竞争市场；

为了充分的分析有关这方面的问题，让我们从头来过：

首先，我们必须明确在以两种结果为纵、横轴的空间中，风险规避者的效用函数是严格凹的。

（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p188-191）

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p211-214）

假设：自然存在两种可能的状态：好状态1和坏状态2。在好状态1下，个体的财产为m，即$y_1=m$，在坏状态2下，个体的财产为$m-L$，即$y_2=m-L$，好状态1和坏状态2发生的概率分别为$(1-\theta),\theta$；这时，个体禀赋点的初始效用为：

$$U_0=(1-\theta)\cdot u(y_1)+\theta\cdot u(y_2)$$

微分得：
$$(1-\theta)\cdot u'(y_1)dy_1+\theta\cdot u'(y_2)dy_2=0$$

从而在点(y_1,y_2)，无差异曲线的斜率为：

$$\frac{dy_2}{dy_1}=-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{u'(y_1)}{u'(y_2)}$$ （联想一下消费理论）

假设有一保险公司承办相关保险业务。坏状态发生时保险公司的赔偿额为s，投保个体则需为此必须预先交付保险费额为π（注意这里的π不一定等于θ）的保险费$\pi\cdot s$（毕竟任何的保险费都可表示成这样的形式），两种状态下的个体的财产为：

$$y_1=m-\pi\cdot s \qquad (1)$$

$$y_2=m-L+(1-\pi)\cdot s \qquad (2)$$

注意：把（1）中$s=\dfrac{m-y_1}{\pi}$的代入（2）则得到投保个体的期望财产为（预算约束方程）：

$$(1-\pi)y_1+\pi y_2=(1-\pi)m+\pi(m-L)$$

我们也可以写成：　　$EW_\pi=(1-\pi)m+\pi(m-L)$这样，我们就可得出在保险公司提供各种不同的保险费率下的多条投保人的预算约束曲线；

另一方面，给定某个保险率π，个体选择适当的投保额s以最大化自己的期望效用：

$$\max_s \quad (1-\theta)u(m-\pi s)+\theta u[m-L+(1-\pi)s]$$

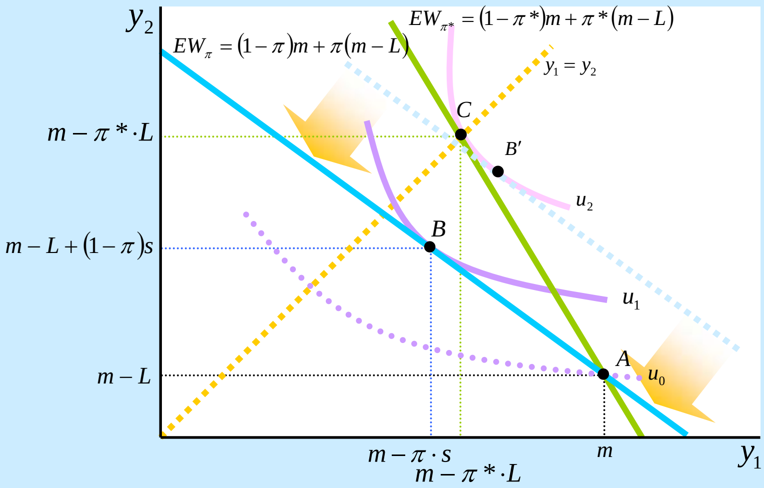
s的一阶条件：$-\pi(1-\theta)u'(m-\pi s)+(1-\pi)\theta u'[m-L+(1-\pi)s]=0$

s的二阶条件：$\pi^2(1-\theta)u''(m-\pi s)+(1-\pi)^2\theta u''[m-L+(1-\pi)s]<0$

从一阶条件可得出投保个体的最优投保额$s^*=s(m,L,\pi)$，我们也从一阶条件可得到：

$$-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{u'(y_1)}{u'(y_2)}=-\frac{1-\pi}{\pi}$$

我们从上式可知，等式左边为无差异曲线的斜率，等式右边为预算约束方程的斜率，投保个体在其预算线和无差异曲线的切点达到最优。



在图中，投保个体的初始禀赋点为 A，通过初始禀赋点的效用为 u_0，当保险公司所提供的保险率为 $\pi^* = \theta$（公平保险，再附上公平保险费率的概念：如果保险公司提供的保险费率不改变个体的初始的期望收益，我们称其为公平保险费率）时，投保个体的最优选择是全部投保，此时投保个体的期望效用达到最高水平；

当保险公司所提供的保险率为 $\pi > \pi^*$ 时，我们由投保个体的效用函数是严格凹的可知，投保个体的预算线和无差异曲线的切点一定是落在线 $y_1 = y_2$ 的右边，这时，投保个体的最优选择是部分投保。

（严格的证明）：

如果 $\pi > \pi^* = \theta$ 的话，通过一阶条件 $-\dfrac{1-\theta}{\theta}\cdot\dfrac{u'(y_1)}{u'(y_2)} = -\dfrac{1-\pi}{\pi}$ 可知，$\dfrac{1-\theta}{\theta} > \dfrac{1-\pi}{\pi}$，将有 $\dfrac{u'(y_1)}{u'(y_2)} < 1$，即 $u'(y_1) < u'(y_2)$；由于严格单减 $(u''(y) < 0)$，必然有 $y_1 > y_2$，（$y_1 = m - \pi\cdot s$；$y_2 = m - L + (1-\pi)\cdot s$）即：

$$m - \pi\cdot s > m - L + (1-\pi)\cdot s$$
$$L > s$$

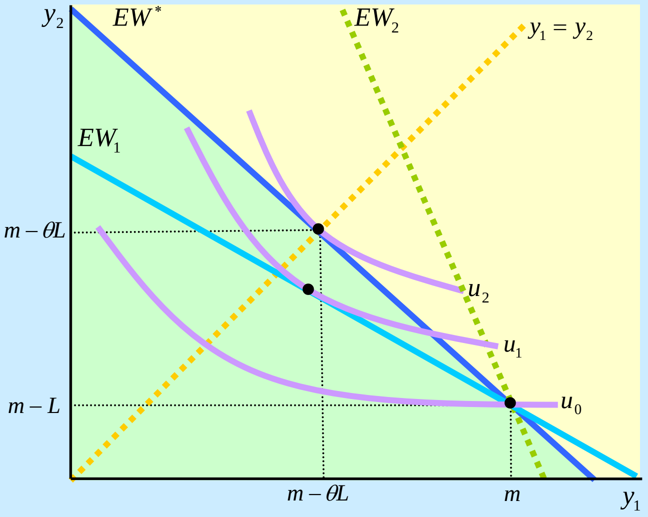
（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p229-234）

必须澄清的几个问题：

（1）投保个体在全额保险的时候，他所能达到的最大期望效用水平与预算线的切点一定是经过平分线 $y_1 = y_2$ 吗？

我们敢肯定这是一定的，因为我们可以根据投保个体的行为来得出这个结论，给定某个保险率 π，个体选择适当的投保额 s 以最大化自己的期望效用，从一阶条件可得出 $-\dfrac{1-\theta}{\theta}\cdot\dfrac{u'(y_1)}{u'(y_2)} = -\dfrac{1-\pi}{\pi}$，这个条件确定了投保个体在其预算线和无差异曲线的切点达到最优，而在保险公司所提供的公平的保险费率 $\pi = \theta$ 时，一阶条件变为 $-\dfrac{1-\theta}{\theta}\cdot\dfrac{u'(y_1)}{u'(y_2)} = -\dfrac{1-\theta}{\theta}$ 即 $\dfrac{u'(y_1)}{u'(y_2)} = 1$，也就是说在两种状态下，投保个体的效用都一样，即 $u'(y_1) = u'(y_2)$，从而得出 $y_1 = y_2$，这样就确定了其切点落在平分线 $y_1 = y_2$ 上。

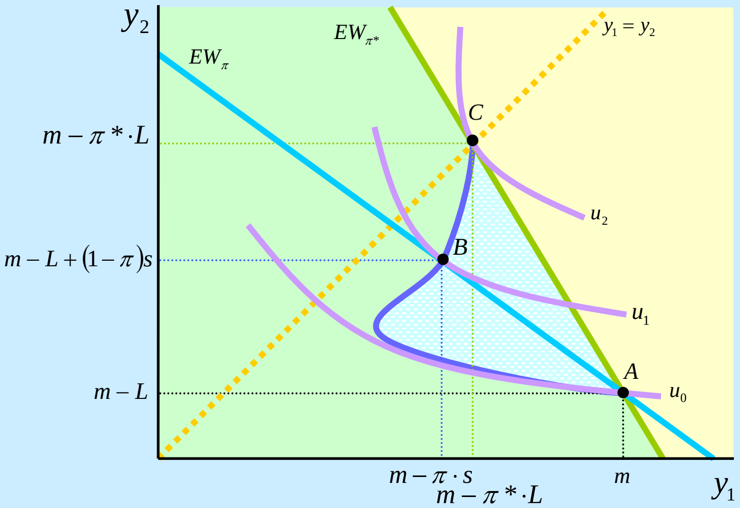
(2) 就保险公司而言，它的期望利润是任何分布的？即在满足什么条件下，保险公司才会提供保险业务？



$E\varphi=(1-\theta)\cdot\pi\cdot s+\theta\cdot(\pi-1)\cdot s$ 为保险公司的期望利润，即 $E\varphi=(\pi-\theta)s$，由此我们会看出只有当 $\pi\geq\theta$ 时，保险公司才会提供保险业务；

在图中，绿色的区域满足保险公司的期望利润不小于零，而黄色区域为保险公司的期望利润为小于零。

(3) 那么紧接着的问题，图示出公平保险合同所代表的点（保险市场包括垄断或垄断竞争市场和完全竞争市场）；



首先，我们明确公平保险费率的：如果保险公司提供的保险费率不改变个体的初始的期望收益，我们称其为公平保险费率，由概念可知，在确定某个保险率 π 后，公平保险合同代表的点是落在其预算线上的。

然后我们再来看图，就 B 而言，公平保险合同代表的点会不会落在所经过预算线的左上方？通过分析我们可知这是不可能的，因为在 B 点左上方预算线所能达到的期望效用完全可以在 B 点右下方的预算线上达到，所以就某一条预算线而言，其公平保险合同代表的点是落在相当于 AB 的线段上，通过加总我们可以得到 ABC 的公平保险合同代表的点不规则区域。

换句话说，投保个体从 A 的初始禀赋点出发在进行帕累托改进后的点定会落在 ABC 不规则区域中。当保险市场为完全竞争市场时，经过多家保险公司的不断重新定价，达到市场均衡时，每家保险公司的期望利润都应为零，这时每家保险公司提供的保险费率为 $\pi^*=\theta$，而保险个体的最优选择为完全投保，此时，投保个体的期望效用达到最大化。

(4) 在保险公司提供公平保险费率时，保险公司的期望利润为零。这句话说对了吗？

两者并没有什么联系，此外，我们可从图中找出答案，在 EW_{π^*} 的左边，保险公司的期望利润是正的，而在其右边，则为负的；只要保险公司的保险合同是落在投保人的预算线上 EW_π 时，保险公司提供了公平保险费率，这时，保险公司的期望利以为正。但如果保险市场为完全竞争市场，保险公司提供公平保险费率时，保的期望利润为零。

6 重写题目：一个消费者的初始收入为 m，如果事故发生，他会损失 L，假设出现事故的概率为 θ，消费者在不发生事故时不会有损失。消费者是严格讨厌风险的。保险公司为风险中性者。

（1）写出消费者的期望效用，写出保险公司的期望利润；

（2）如果保险公司要选择保险费率与事故赔偿额来确保其期望利润最大化，应该满足投保人什么样的约束？

（3）解出二问列出的数字规划。

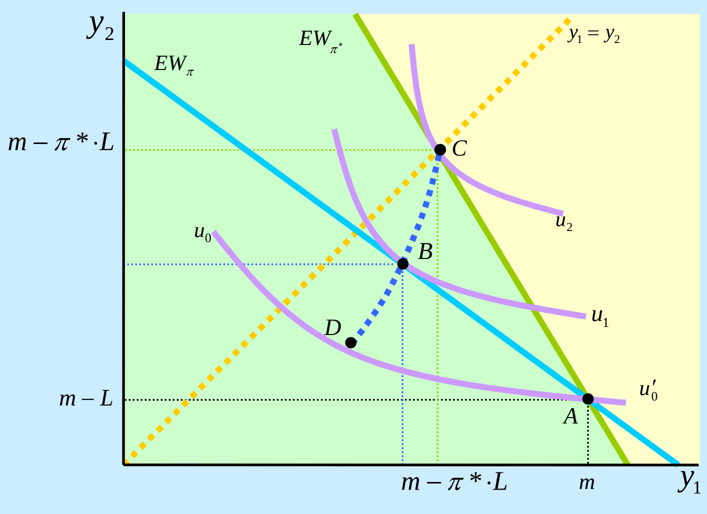
假定：保险公司所提供的保险费率为 π，这里的是有可能 π 不等于 θ，当事故发生时，其赔偿金为投保金额；

设消费者的效用函数为 $u(\cdot)$，满足 $u''(\cdot)<0$；而投保人是有可能不是全额投保，所以我们设投保人的投保金额为 $\alpha\cdot L$（毕竟，任何数量的投保额都可表示成此形式），其中 $0\le\alpha\le1$，由消费者的效用函数性质所确定的；

（1）
$$EU=\theta\cdot u\{m-[1-(1-\pi)\cdot\alpha]L\}+(1-\theta)\cdot u(m-\pi\cdot\alpha L)$$
$$E\varphi=\theta(\pi\cdot\alpha L-\alpha L)+(1-\theta)\cdot\pi\cdot\alpha L=(\pi-\theta)\cdot\alpha L$$

（2）投保人的约束条件为：
$$EU=\theta\cdot u\{m-[1-(1-\pi)\cdot\alpha]L\}+(1-\theta)\cdot u(m-\pi\cdot\alpha L)\ge\bar{u}$$
（其中 $\bar{u}=\theta u(I-L)+(1-\theta)u(I)$）

（3）保险公司想要达到期望利润最大化，它就必须揣摩投保人的行为方式，换句话说，只有投保人达到了期望效用最大化的情况下，才有保险公司的期望利润最大化；所以，我们站在保险公司的立场上，就要分两步走，第一步：确定投保人的行动准则，这会使得保险公司了解在提供众多的保险费率的情况下，投保人会分别投保多少金额；第二步：从中选出使得保险公司最赏心悦目的费率，而达到其目标；



当保险市场为完全垄断时，保险公司会尽量的压榨投保人的期望效用；

而当保险市场为寡头垄断市场时，投保人的最优保险合同有可能在 DBC 的不规则线上的某一点；

当保险市场为完全竞争市场时，投保人的期望效用会达到最高。

第一步：其目标可转化为求投保人的期望效用最大化；这时，对于投保人而言，保险公司的投保费率为既定的：

$$\underset{\alpha}{Max}\quad EU$$

一阶条件：
$$-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{u'_{1-\theta}(\cdot)}{u'_{\theta}(\cdot)}=-\frac{1-\pi}{\pi}$$

第二步：此时，对于保险公司而言，投保人的 α 是既定的：

$$\underset{\pi}{Max} \quad E\varphi=(\pi-\theta)\cdot\alpha L$$

这时，我们知道保险公司会在可能的范围，尽量挑选大的 π；

虽然，我们不能从题中得出具体的答案，但有一点是肯定的：当保险市场不为完全竞争市场时，投保人是不会购买全额保险，此时的保险公司的期望利润是不为零的，只有当保险市场为完全竞争市场时，才能满足书上的结论。

（三天，三天之后，诈尸而醒，把守灵的那帮杂碎兄弟吓得半死，
我迎风流着热泪，再次从地狱中复活……）

7 因为通过题目所给的效用函数，我们可知福格小姐为风险规避者，她会通过购买保险而使得她的期望效用得到提高，当福格小姐丢失 1000 美元的概率为 25%时，其公平的保险费率为 25%，也许保险公司料到福格小姐在买了保险之后会有道德风险的行为发生，即她的粗心会导致丢失 1000 美元的概率上升为 30%，此时的公平的保险费率为 30%；
当保险公司所提供的公平的保险费率为 25%时，福格小姐的预算约束线为：

$$EW_{\pi}=(1-\pi)m+\pi(m-L)$$

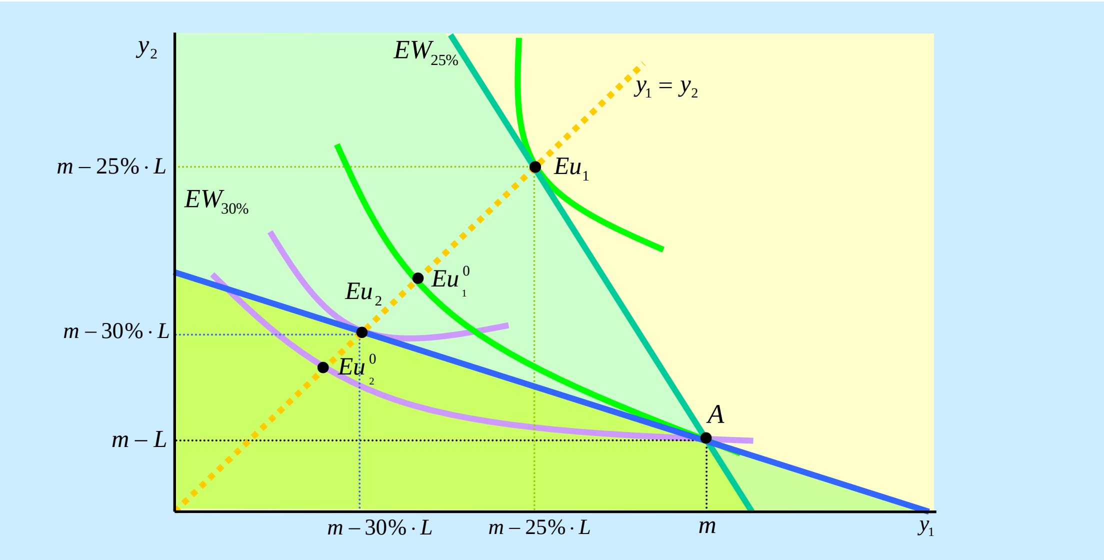
$$EW_{25\%}=75\%\cdot 10000+25\%\cdot 9000$$

此时，福格小姐的预算约束线的斜率为 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{(m-L)}{m}=-\dfrac{75\%}{25\%}=-3$

当保险公司所提供的公平的保险费率为 25%时，福格小姐的预算约束线为：

$$EW_{30\%}=70\%\cdot 10000+30\%\cdot 9000$$

此时，福格小姐的预算约束线的斜率为 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{(m-L)}{m}=-\dfrac{70\%}{30\%}=-\dfrac{7}{3}$



在图中，我们可以清楚地看到，在各种状态下所能达到的期望效用。

当福格小姐没有购买保险时的期望效用 Eu_1^0 为：

$$Eu_1^0=25\%\cdot\ln 9000+75\%\cdot\ln 10000\approx 9.1840$$

当福格小姐购买保险后的期望效用 Eu_1 为：

$$Eu_1=25\%\cdot\ln 9750+75\%\cdot\ln 9750\approx 9.1850$$

当福格小姐购买保险后，而产生道德风险后的期望效用 Eu_2 为：

$$Eu_2=30\%\cdot\ln 9700+70\%\cdot\ln 9700\approx 9.17989$$

通过计算，我们可知 $Eu_2 < Eu_0^1 < Eu_1$，因为产生道德风险后，如果福格小姐购买保险，她所得到的期望效用还不如不购买保险时的期望效用，所以，福格小姐是不会购买保险的。

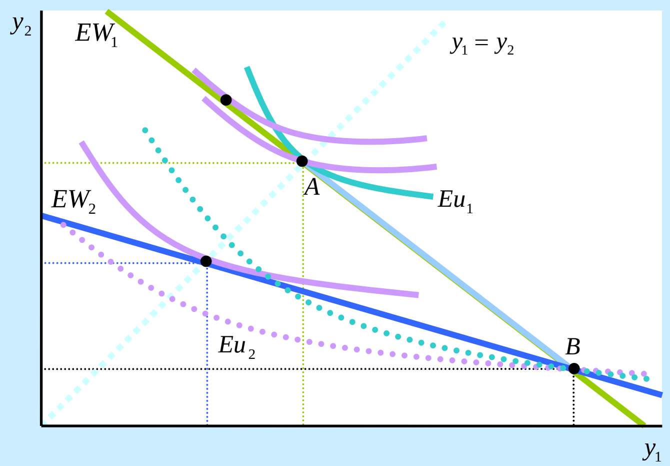
（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p272）

8 我们首先假定保险市场为完全竞争市场；

一个人无论他是否购买保险，他都有可能实施两种行为，注意身体（行为 1）与放任自流（行为 2），假定投保人的财富为 W，不同行为所产生的生病的概率分别为 θ_1 和 θ_2，且 $\theta_1 < \theta_2$，损失为 L，$L_1 = 7000$；$L_2 = 10000$；但保险公司却无法区分这这类投保人实施哪种行为，即存在道德风险；但由于保险公司通过提供费用分担（部分）保险，会使得投保人只实施行为 1，其公平保险价格为 $7000\theta_1$；

因为投保人是追求期望效用最大化的，所以不可能有谁会偏爱部分保险；

投保人无所谓偏爱哪一种行为；而是在受到限制的情况下，最大化自身的期望效用；



在没有投保的情况下，投保人会注意自己的身体，而当购买保险后，投保人的行为则会不确定；所以，由于存在道德风险，保险公司不会实行全额保险，其均衡的保险合同会分布在 AB 段；

稍后会有更加详细的解释；

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p272）

以上两题是有关于保险市场的非对称信息：道德风险　的内容，我们在这有必要重新整理一下思路：

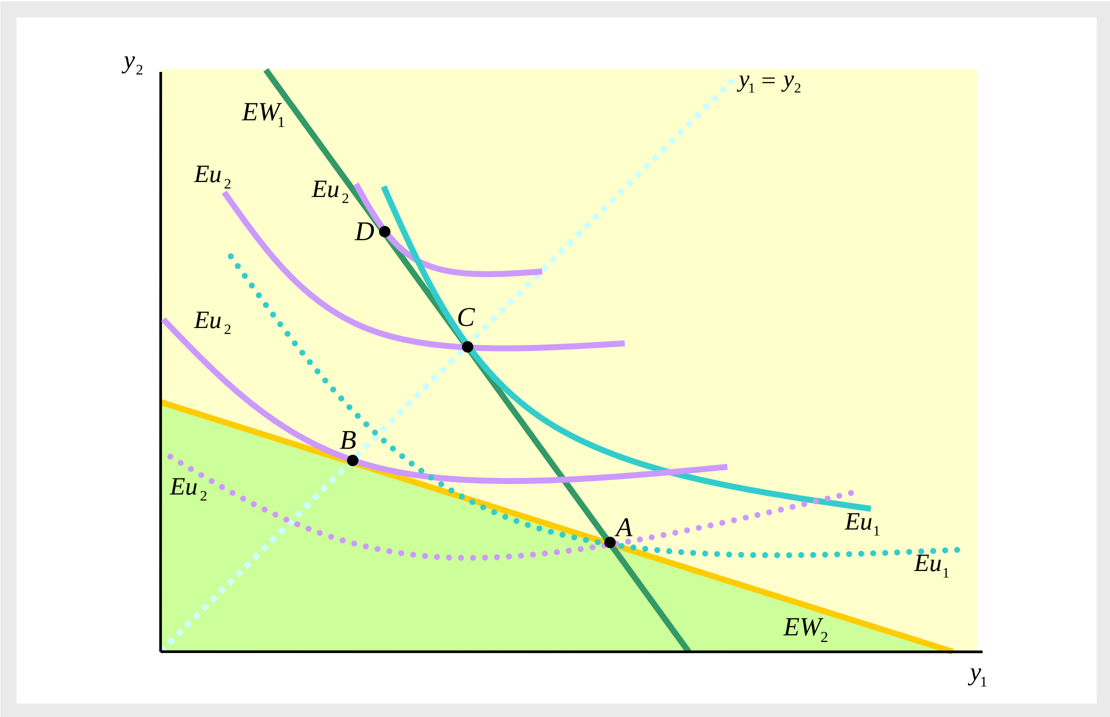
一方面，在许多场合下，投保人的事故的概率有可能是内生的，投保人的行为将影响他遭遇事故的可能性大小。另一方面，保险合同可能会改变投保人的行为，因为它降低了事故对投保人造成的损失。

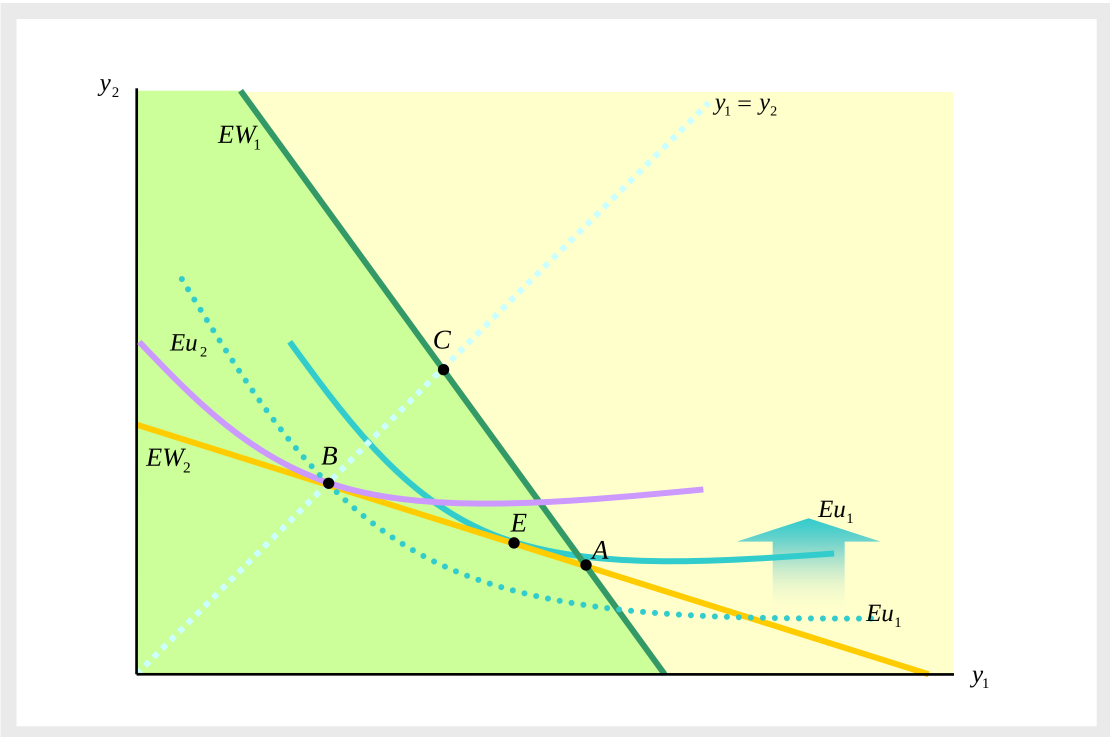
假设：保险市场是完全竞争的市场，某风险规避者要为他的 L 财富购买保险，他的总财产为 m，购买保险后，他会有两种不同的态度：善加看管（此行为记为 1）或任其自然（2）。在两种行为下财富损失的概率为 θ_1 和 θ_2，且 $\theta_1 < \theta_2$。根据投保人的行为的不同，保险公司需要不同的保险费率政策才能保证收支平衡（即收取公平费率）。

值得注意的是，过空间中的任何一点，投保人都会有两条无差异曲线，这取决于他采取哪一种行为。在任何一点的行为 1 的无差异曲线都比行为 2 的要陡峭（因为无差异曲线的斜率为 $\dfrac{dy_2}{dy_1} = -\dfrac{1-\theta}{\theta} \cdot \dfrac{u'(y_1)}{u'(y_2)}$）。

我们先分析 C 点（C 点是不是均衡点），从 A 点出发，投保人肯定是一行为 1 行事（当我们要判断任何一点的哪一种行为对投保人有利，当两条无差异曲线交点在平分线上时，我们只需看看两条无差异曲线交点的斜率 $\dfrac{dy_2}{dy_1} = -\dfrac{1-\theta}{\theta} \cdot \dfrac{u'(y_1)}{u'(y_2)}$，其绝对值大的则大

点不在平分线上时，我们只需看看两条无差异曲线与平分线的交点即可)，如果保险公司对投保人提供θ_1的公平保险费率的话，投保人就会发现如果他以行为 2 来行事，他就可获得更高的期望效用（图中的 D 点)。如果他这样做了的话 ，则保险公司就可能会出现亏损。所以，C 点不可能是均衡点。





我们再来分析 E 点（E 点是不是均衡点)，既然投保人总是以行为 2 来行事，那么保险公司就会对投保人提供θ_2的公平保险费率。投保人以行为 2 来行事可在 B 点以完全保险的方式达到期望效用最大化，但这时的保险费太昂贵，投保人会考虑他是否要部分投保

点，如果他以行为 1 来行事，比起行为 2 而言，在 B 点可获得更高的期望效用，但在 E 点以部分保险的方式达到期望效用最大化），但由于保险市场是完全竞争的市场，此时如果别的保险公司所提供的保险费率只要低于 θ_2，就可把投保人拉走，一句话，只要市场的保险费率还高于对应于行为 1 的公平保险费率 θ_1，那么，这种竞争就不会停息。所以，E 点不可能是均衡点。

那么，非对称信息的道德风险均衡点在哪？

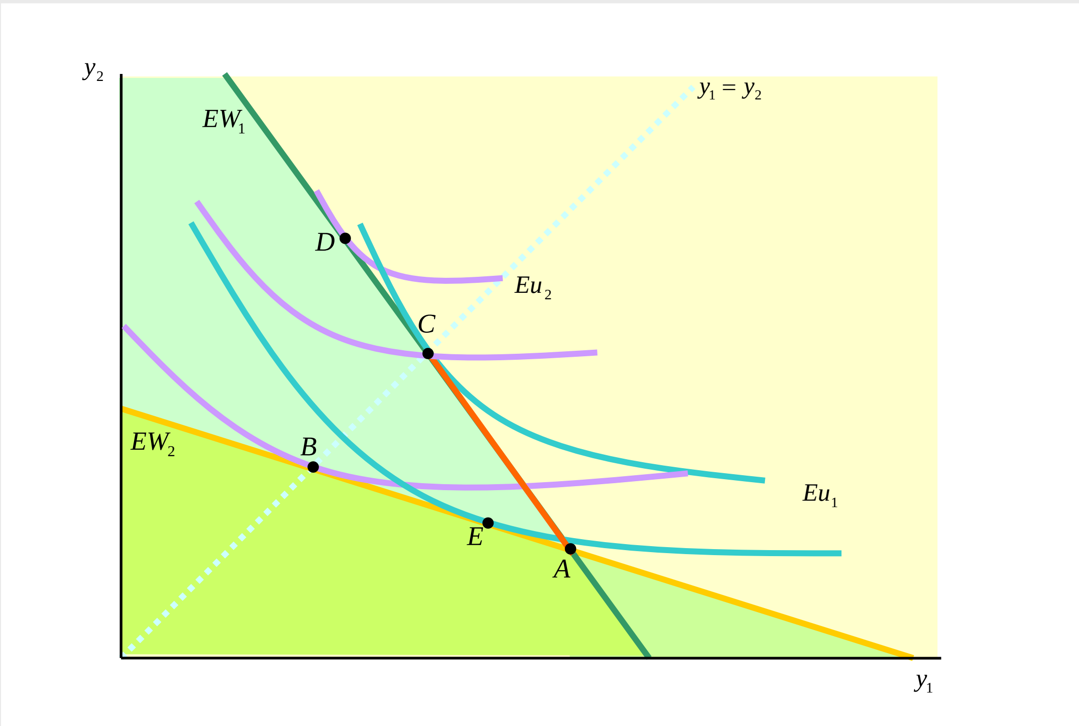
首先，我们能断言，均衡是在介于 AC 之间的某一点。

为了说明这个问题，我们必须再引入一个新的变量：设

$$\mu = Eu_1 - Eu_2$$

只要投保人的期望效用函数是连续的，那么 $\mu = Eu_1 - Eu_2$ 也是连续的，的正负显示投保人在均衡点选择哪一种行为。$\mu > 0$，投保人的行为为 1；$\mu < 0$，投保人的行为为 2；$\mu = 0$，选择哪一种行为无所谓。

我们要把两图的关键部分综合起来：让我们进一步说明，在 A 点时，$\mu > 0$，投保人的行为为 1；在 C 点时，$\mu < 0$，投保人的行为为 2，那么在之间必存在一点使得 $\mu = 0$。



显然，道德风险存在时的均衡（介于 AC 之间的某一点）与信息对称时的均衡（B、C 点）相比，投保人的期望效用降低了；由本来最优的选择为完全保险合同变为部分保险契约；而保险公司本来无所谓提供完全保险还是部分保险，因为它的期望利润都是没有改变，它，其期望利润都为零，但它却担心在信息不对称的情况下会出现道德风险，所以，均衡的保险合同一定需要投保人自己也承担部分风险。

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p459-464）

9（1）假定保险市场是完全竞争的市场；

棕眼睛的人的初始期望效用为：$EU''_{BR}=\frac{1}{5}\ln 9900+\frac{4}{5}\ln 10000\approx 9.2083303$

蓝眼睛的人的初始期望效用为：$EU''_{BL}=\frac{4}{5}\ln 9900+\frac{1}{5}\ln 10000\approx 9.2023001$

由于保险公司认为两类人具有同样的概率，则保险公司有可能会取到80%或20%，所提供的公平保险费率为80%或20%；

（2）当费率为80%时，蓝眼睛的人一定会购买保险，又因为投保人都是风险规避者，这意味着蓝眼睛的人通过购买保险，其期望效用会增加；而棕眼睛的人不会购买保险；当费率为20%时，蓝眼睛的人还是一定会购买保险，因为这样他会获得更高的期望效用，而棕眼睛的人也会购买保险；保险公司如果可以区分出这两类投保人的话（因为眼睛的颜色是很好区分的），它将不会提供保险业务给蓝眼睛（在只有高风险者投保的情况下，会使得保险公司的期望利润为负），那么，蓝眼睛的人的期望效用为 $EU''_{BL}\approx 9.2023001$。

（3）棕眼睛的人的期望效用为：

$$EU^{80\%}_{BR}=\frac{4}{5}\cdot\ln(10000)+\frac{1}{5}\cdot\ln(10000-100)\approx 9.2083303$$

$$EU^{20\%}_{BR}=\frac{4}{5}\cdot\ln(10000-20)+\frac{1}{5}\cdot\ln(10000-100+100-20)\approx 9.2083384$$

蓝眼睛的人的期望效用为：

$$EU^{80\%}_{BL}=\frac{1}{5}\cdot\ln(10000-80)+\frac{4}{5}\cdot\ln(10000-100+100-80)\approx 9.2023082$$

$$EU^{20\%}_{BL}=\frac{1}{5}\cdot\ln(10000-20\%\times 37525)+\frac{4}{5}\cdot\ln(10000-100+37525-7505)\approx 10.040115$$

当费率为20%时，情况可能会稍复杂一点，因为投保人的行动标准为：其期望效用曲线要与现行费率所提供的预算线相切；其中，$\theta=80\%$；$\pi=20\%$，$u=\theta\cdot\ln(10000-100-\pi\cdot s_{BL}+s_{BL})+(1-\theta)\ln(10000-\pi\cdot s_{BL})$；

我们把期望效用函数写为：$u=\theta\cdot\ln(y_2)+(1-\theta)\ln(y_1)$，则其斜率为：

$$du=\theta\cdot\ln'(y_2)\cdot dy_2+(1-\theta)\ln'(y_1)\cdot dy_1=0$$

$$\frac{dy_2}{dy_1}=-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{\ln'(y_1)}{\ln'(y_2)}$$

而预算线的斜率为：$-\frac{1-\pi}{\pi}$，合并两式得：

$$-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{\ln'(y_1)}{\ln'(y_2)}=-\frac{1-\pi}{\pi}$$

$$\ln'(y_1)=\frac{1}{10000-\pi\cdot s_{BL}};\qquad \ln'(y_2)=\frac{1}{10000-100-\pi\cdot s_{BL}+s_{BL}}$$

$$\frac{\ln'(y_1)}{\ln(y_2)} = \frac{10000 - 100 - \pi \cdot s_{BL} + s_{BL}}{10000 - \pi \cdot s_{BL}}$$

$$\frac{1-80\%}{80\%} \cdot \frac{10000 - 100 - 20\% \cdot s_{BL} + s_{BL}}{10000 - 20\% \cdot s_{BL}} = \frac{1-20\%}{20\%}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{10000 - 100 + \frac{4}{5} \cdot s_{BL}}{10000 - \frac{1}{5} \cdot s_{BL}} = \frac{4}{1}$$

$$s_{BL} = 37525$$

此时，蓝眼睛的行为是相当于骗保，他会借着钱来投保，如果此时的保险公司承保的话，公司则将面临亏本；

（4）如果保险公司向棕眼睛的人单独提供公平保险，则公平保险费率为 20%，棕眼睛的人所面临的预算约束线的斜率为：-4；

这时，棕眼睛的人的期望效用为：$EU'_{BR} = \ln 9980 \approx 9.2083384$

如果保险公司向蓝眼睛的人单独提供公平保险，则公平保险费率为 80%，棕眼睛的人所面临的预算约束线的斜率为：$-\frac{1}{4}$；

这时，蓝眼睛的人的期望效用为：$EU'_{BL} = \ln 9920 \approx 9.2023082$

（瓦尔特 · 尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p272）

上题是有关于保险市场的非对称信息：逆向选择　的内容，让我们来全面的看一下这部分的内容：

如果投保人类型的信息是非对称的，那么针对每一类型的投保人分别用不同的保险费率的政策显然是行不通的。因为没有人会承认自己是高风险者，如果每人都声称自己的事故概率都很低，保险公司则用低的保险费率政策，这样会导致保险公司亏损。

那么如果保险公司提供一个单一的保险费率的策略会使得保险市场存在均衡吗？

我们先假设是存在均衡的，再假设投保人群中低风险者所占的比例为$\gamma, (0 < \gamma < 1)$，那么均衡的保险费率只可能为：

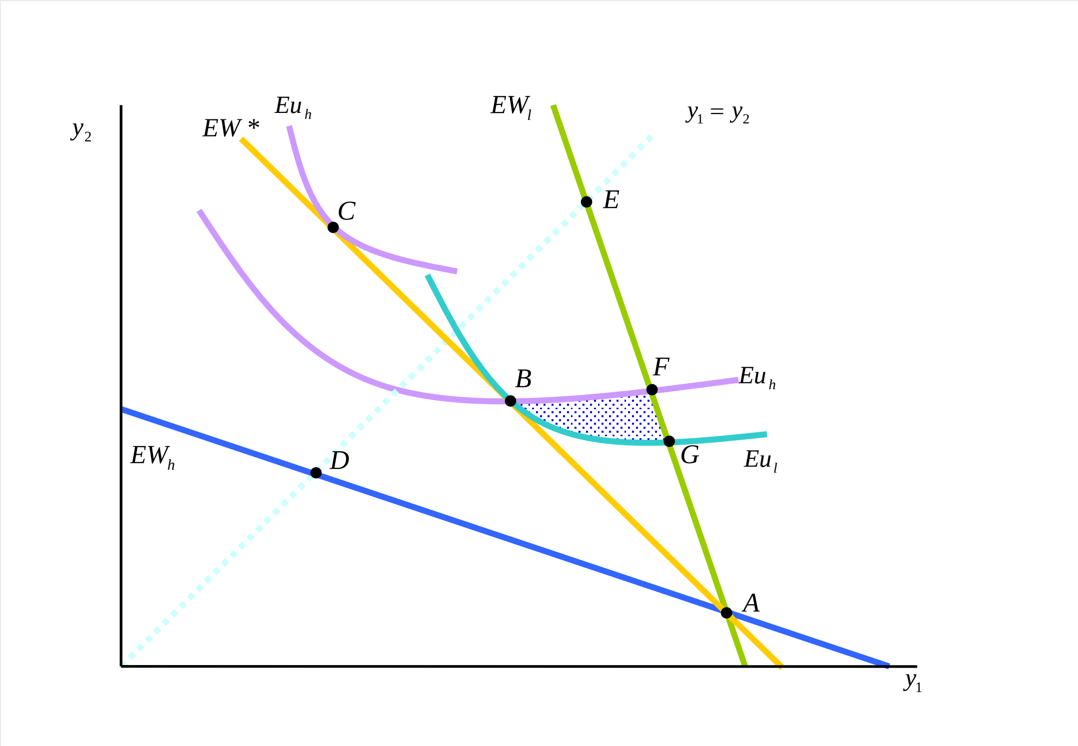
$$\pi^* = \gamma\theta_l + (1-\gamma)\theta_h$$

因为保险市场是完全竞争的市场，保险公司的期望利润为零。

由于投保人都为风险规避者，他们的效用函数都是凸向原点的，正是因为效用函数的这个性质，我们敢断言，在保险公司所提供的π^*保险费率的情况下，高风险投保人实现期望效用最大化的点一定是落在平分线的左边，而低风险的投保人的最优选择的点则是落在了平分线的右边。

此时，C点不可能是市场的均衡点，其理由为：C点的保险合同申请单相当于告诉了保险公司投保人是高风险的，因为低风险投保人在此时的预算线上总是会选择 B 的，一旦识破某一投保人实事上为高风险者，追求利润最大化的保险公司只会提供给他 D 点所

保险合同。如果高风险者可以预见到这一点，他就会佯装成低风险者去选择 B，至少这还比 D 点所代表的保险合同带给他的期望效用高。



遗憾的是，B 点不可能是市场的均衡点，其理由为：在 BFG 的不规则区域中的任何一点所代表的保险合同都回使得低风险投保人达到更高的期望效用，同时，保险公司这时的期望利润还是为正的，任何一个其他的保险公司只要通过的保险费率低于 $\pi*$ 时，就可以把低风险投保人拉走。

这说明，非对称信息下不存在一个单一的保险费率的策略会使得保险市场存在均衡；或者说，如果非对称信息下的保险市场存在完全竞争均衡，它必然是分离的均衡。

非对称信息下的保险市场存在均衡吗?

非对称信息下的保险市场有可能存在分离的均衡，也有可能不存在均衡。

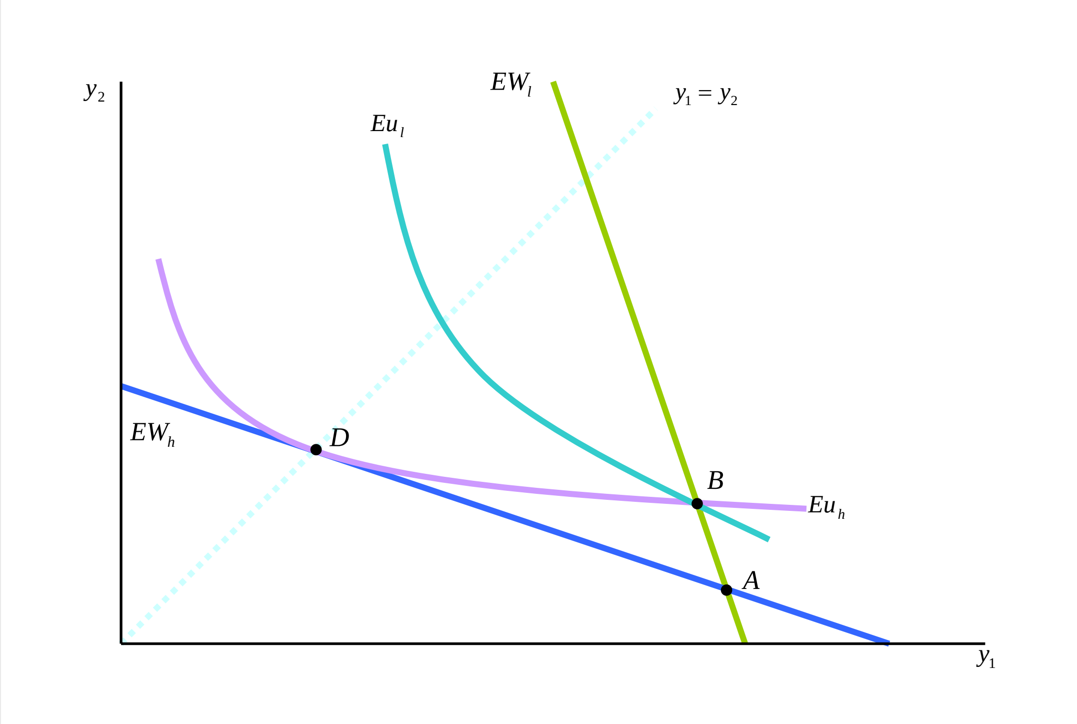
假设保险公司向高、低风险投保人所提供的保险费率分别为 π_h* 和 π_l*。完全竞争条件的一个直接结果是，如果 π_h* 和 π_l* 构成一个分离均衡的话，它们不可能高于各类投保人的事故的发生概率，因为竞争将使得任何高于事故的发生概率的定价的保险公司失去所有的客户；反过来，均衡的 π_h* 和 π_l* 也不可能低于各类投保人的事故的发生概率，否则保险公司将入不敷出。所以，如果存在竞争的分离均衡，在均衡点提供给各类投保人的保险费率必然分别等于他们的事故的发生概率。

下图显示了一种可能的分离均衡，它是由 B、D 点所代表的保险合同组成。

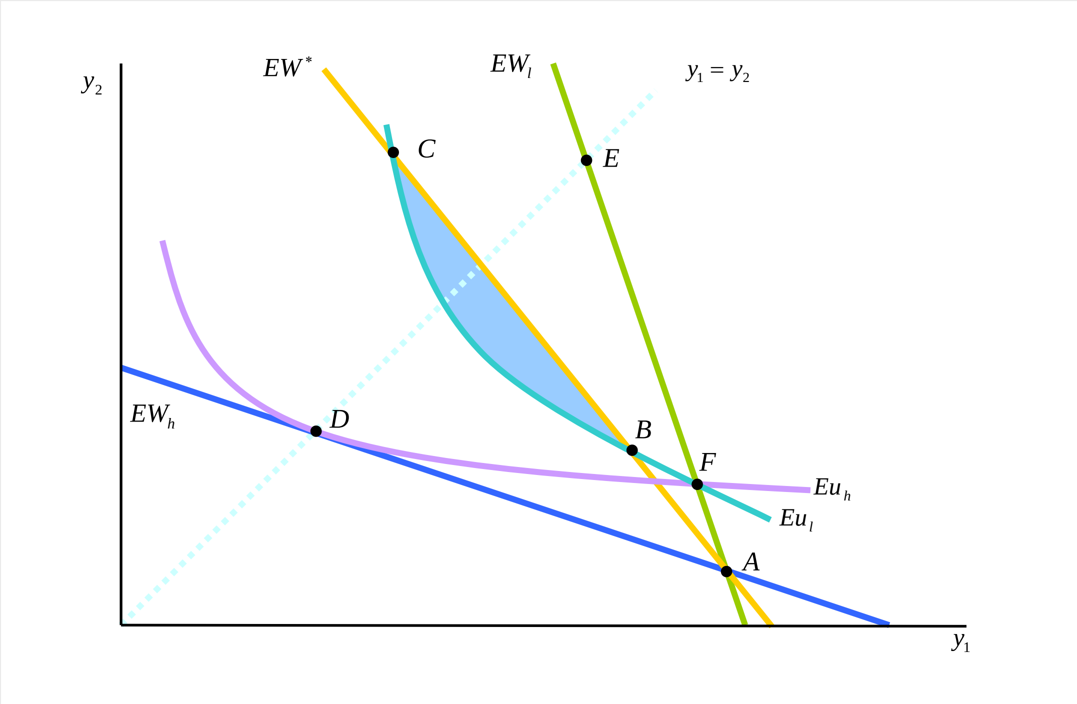
D 是为高风险投保人准备的，这与对称信息下分离均衡中的保险合同没有区别；对于低风险投保人，保险公司允许他按其事故的发生概率的保险费率购买保险，但对投保水平作了限制，相应的合同对应于图中的 B 点。这时，各类的投保人在现有的情况下实现了期望效用的最大化，两类合同都是在其各自得预算线上，所以保险公司的期望利润为零，这也满足完全竞争的假设。

与对称信息的情况相比，高风险者的期望效用没有改变，但低风险者却遭受了损失，由本来的全额保险变为部分保险，保险公司的期望利润也没有改变，均为零；由

低风险者的共存，而保险公司又无法区分投保人的种类，保险市场无可避免的存在外在性，这种负的外部性全部落到了低风险投保人的头上。



请告诉我们，下图存在均衡吗?



首先，我们必须清楚这时不能通过两效用曲线的交点来判断其效用的大小，因为这时并不是某一行为人在某一点的两种不同可能行为；

当保险公司提供一个单一的保险费率时，所对应的预算线与低风险者的无差异曲线相交，一定会存在下图中的蓝色半月形区域，这时区域内的任何一点都位于高、低风险

无差异曲线的右上方，这意味着两种类型的投保人都会有达到更高的期望效用的余地，当两种类型的投保人的保险合同所对应得点落在区域内，保险公司的期望利润为正，而保险市场的完全竞争会使得各保险公司所提供的保险合同最终落在预算线上时，其期望利润变为零，这最终的结果则是又回到我们以前所讨论的情况：非对称信息下不存在一个单一的保险费率的策略会使得保险市场存在均衡。

所以，此图是不存在均衡的。

（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社 p451-459）

（接下来的题目则是顺风顺水了，

由于过度亢奋，刚踏出棺材时，一脚蹬空，又不幸摔落入……）

10 工人的目标是选择报酬最大化，即 $Max\ \ W-C$,当高能力的工人不受教育时，他无法把自己与低能力劳动者区分，只能领取低能力劳动者的工资；当低能力劳动者通过自己的努力获得学历后，也会被企业当成高能力的工人来看待，获得高能力工人的工资。而企业要确定一个 $e*$ 来区分两类工人，则必须满足：这个对于 $e*$，高能力的工人而言，接受高质量的教育是有利的，而对于低能力的工人而言，不接受教育所获得的报酬会更多；

（1）设高、低能力工人在获取高中文凭的花费分别为：C_H, C_L 则

$$5000-C_H>3000\ ; \qquad 3000>5000-C_L$$

$$C_H<2000\ ; \qquad C_L>2000$$

又由条件可知，$C_H=C_L$，通过分析，我们能得出不存在这种高能力工人拿高工资、低能力工人拿低工资的分离均衡的结论。

（2）由（1）我们可知高能力工人在获取高中文凭所愿意支付的最大费用为 2000；如果我们联立（1）的两个条件，我们可以得到：$5000-C_H \ge 5000-C_L$，即 $C_H \le C_L$。

3 让我们这样来分析：设垄断厂商提供商品的价格为 p，当厂商生产优质商品时的单位成本为 c_1；而厂商生产优质商品时的单位成本为 c_0，假定在全体消费者中，知情者占 α，不知情者占 $(1-\alpha)$；

如果垄断厂商生产的每一单位的优质商品所获得的期望利润为：

$$\pi_1=\alpha\cdot(p-c_1)+(1-\alpha)\cdot(p-c_1)=p-c_1$$

如果垄断厂商生产的每一单位的劣质商品所获得的期望利润为：

$$\pi_0=(1-\alpha)\cdot(p-c_0)$$

由题设可知，$\pi_1<\pi_0$ 即：$p-c_1 \le (1-\alpha)\cdot(p-c_0)$ 也可整理为题中的已知条件：

$$\alpha\cdot p<c_1-(1-\alpha)c_0$$

当垄断厂商进行每一单位商品生产决策时，知道生产劣质品对自身而言利润更多，从而在生产一批商品时，劣质品生产是他的占优选择，所以市场会被劣质品所占满，这时，只有不知情者会购买。而不会出现只有不知情者会购买，垄断厂商会在优、劣质品之间随机选择的相互矛盾情况出现。

因为既然厂商生产了优质品，那么知情者则会购买商品，又既然厂商知道生产劣质品对他有利，那么厂商就不可能再有生产优质品的相悖的行为出现。

第十五讲

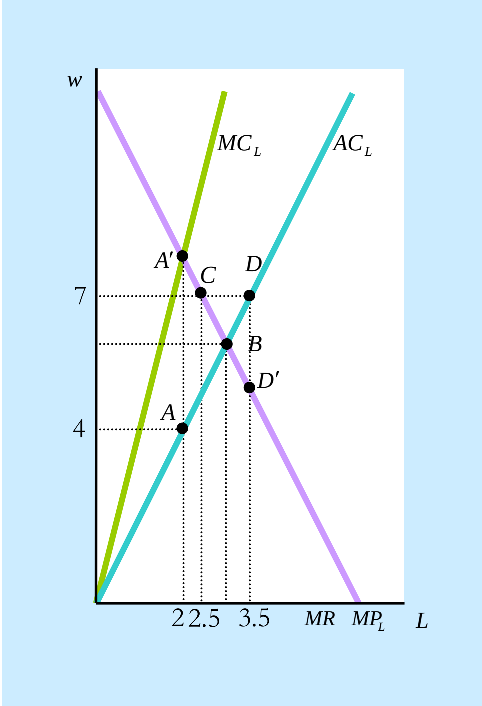
1（1）因为我们知道劳动供给函数为厂商对劳动的平均支出，所以：

$$MC_L=(w\cdot L)'=(2L^2)'=4L$$

（2）此时的独一公司的最优选择标准是在：雇用最后一单位的劳动力所能产生的价值正好等于雇用此单位劳动力所花的成本的地方生产（$MR\cdot MP_L=MC_L$）

$$12-2L=4L$$
$$L=2;\quad w=4$$

（3）在无政府或工会介入的情况下，当公司雇用最后的一个劳动力时，所产生的商品价值为 4，这时企业达到利润最大化，而当本地区的最低工资率为 7 时，企业也会根据其最优选择标准（$MR\cdot MP_L=MC_L$）来决定自身的策略：



$$12-2L=4L$$
$$L=2$$

而此时的工资为 $w=7$，厂商会把这部分的额外增加的工资成本加到商品的价格上，从而转嫁给消费者（这类似于增加税收后对厂商的影响）。

（4）当劳动市场为完全竞争时，需求等于供给：

$$12-2L=2L$$
$$L=3;\quad w=6$$

当市场设定最低工资率时：

$$12-2L_d=7;\quad 7=2L_s$$

$$L_d=2.5;\quad L_s=3.5$$

此时，劳动力市场存在过度的劳动力供给，失业的人数为 $L_s-L_d=1$。

2 根据题设所给的效用函数 $u[Y(L)]=100\cdot wL-\frac{1}{2}(wL)^2$ 可知，此人接受第一个职位所获得的效用为 $u_1[Y(L)]=100\times5\times8-\frac{1}{2}(5\times8)^2=3200$，要想使得此人接受更冒险的第二个职位，则必须使得第二个工作所带来的期望效用要大于等于 $u_1[Y(L)]$，即：

$$Eu_2[Y(L)]=E\left[100\cdot w\cdot L-\frac{1}{2}(w\cdot L)^2\right]>3200$$

$$100\cdot w\cdot E(L)-\frac{1}{2}w^2\cdot E(L^2)>3200$$

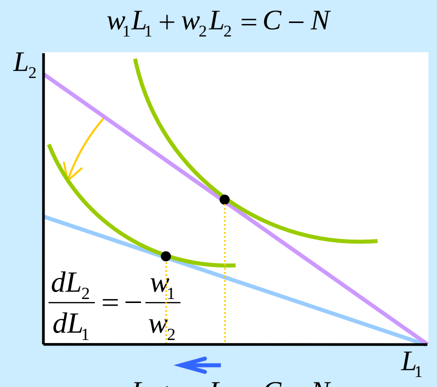
又 $E\left(X^2\right)=VarX+E^2(X)$

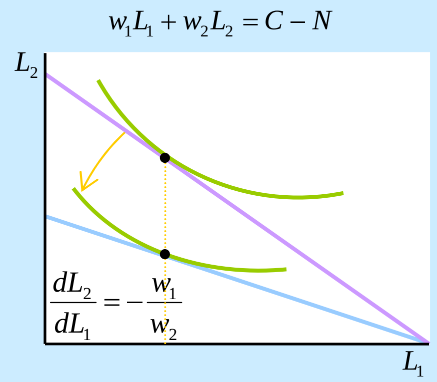
$$100\cdot w\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot w^2\cdot(36+64)\geq 3200$$

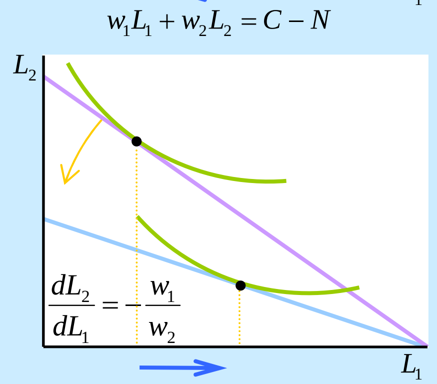
$$16\cdot w-w^2\geq 64\Rightarrow (w-8)^2\leq 0$$

通过计算，我们可知 $(w-8)^2$ 不可能小于零，所以，当工资满足 $w=8$ 时，此人才会接受这项更冒险的工作。

3（1） 或许有些男人可能是大男人主义，容不下妻子的工资不断的接近或超过自己，这会使得其闲暇时间减少而拼命工作；而同样的情况也会出现在好胜的妻子身上，这会使得 $\dfrac{\partial H_1}{\partial w_2}$ 和 $\dfrac{\partial H_2}{\partial w_1}$ 的符号都是难以确定；







因为题目中的效用函数没有确定，所以，当第二人的工资上涨时，第一人的工作时间会出现下降、不变与上升的三种情况，而其闲暇时间是与其工作时间呈负相关的，所以第二人的工资报酬对第一人的闲暇时间的影响是有可能上升、不变与下降的；

由同样的逻辑，第一人的工资报酬对第二人的闲暇时间的影响也是不确定的；

（2） 让我们这样来分析：我们假定是妻子下班后还要在家做家务和照顾孩子（有时甚至还要伺候丈夫），这时妻子的最优工作时间有可能会上升（这也许会养成丈夫对妻子的过分依赖，而使得他变得懒惰，最终，上下班不按时，因为他会想自己有一个好妻子，什么都能作，而自己可以尽情的享福）、不变（这是可能在社会上普遍存在的，因为可能有相当的一部分人认为家务和照顾孩子是女方份内的工作，而且有些妻子还乐此不疲，她们认为男人比较粗心，比如像照顾孩子这样的重要事情还是自己来比较放心）和下降（当丈夫比较体贴妻子，而自己又不善长做家务时候）。所以，通过以上的分析我们会发现各种情况都有可能发生。

（瓦尔特 · 尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社

4（1）题目的劳动需求曲线为：$MR \cdot MP_L = 10 - \frac{1}{40}L$；

其需求曲线为：$w = \frac{1}{80}L$，而其边际成本曲线为：$MC_L = \left(\frac{1}{80}L \cdot L\right)' = \frac{1}{40}L$；

则卡尔作为垄断厂商的决策为：

$$MR \cdot MP_L = MC_L$$

$$\frac{1}{40}L = 10 - \frac{1}{40}L$$

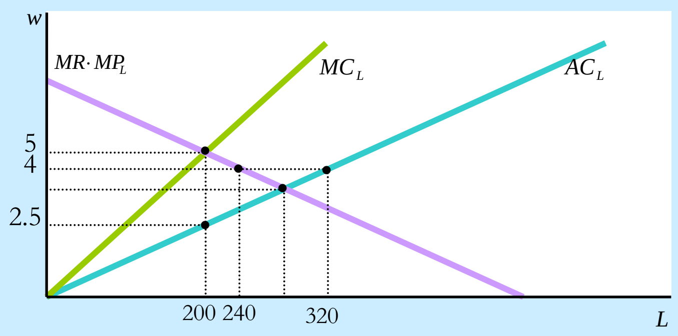
$$L = 200;\quad w = 2.5$$

（2）

$$\frac{1}{80}L_s = 4;\quad L_s = 320$$

而对于劳动需求方面而言，只要其最低的工资定在 5 以下时，都不会影响厂商的最优选择，所以此时的劳动需求仍为 $L_d = 200$，失业的人数为 $L_s - L_d = 320 - 200 = 120$

（3）



（4）当劳动力市场为完全竞争市场时，设定最低工资：

$$\frac{1}{80}L_s = 4;\quad L_s = 320$$

$$10 - \frac{1}{40}L_d = 4;\quad L_d = 240$$

此时的失业的人数为 $L_s - L_d = 320 - 240 = 80$

5（1）此人通过某种方式（也许是在电视机厂的朋友告诉他）市场上的电视的价格和其分布规律，那么此人是在知道电视的“底价”的情况下来对各个商场询问其价格，他没有理由用高于底价的价格来购买电视，所以，我们有理由相信此人最终支付电视的最小的期望价格为不大于 300 美元；

（2）当此人第一次拨通商场的电话号码时，所询问到的价格有可能是 400 美元、358 美元、329 美元……，但我们可以相信此时的期望价格为 350 美元（因为各商场的某款电视的价格是平均分布于 300~400 美元之间的），在第二次时，也许会同样的结果
们有理由相信此人会用各种暗示来达到他的目的（如：他会说我已经询问了多家

它们的最低价格为……，如果你这更低的话，我将在你这购买等等），那么，第二次的期望价格为 325 美元，同理，在第三次……，由此，我们可以推出打电话的次数与电视的期望价格之间的关系式：

$$EP(n)=300+\frac{100}{2^n};\qquad \text{（n 为正整数）}$$

$$EP'(n)=-\frac{100}{2^{2n}}\cdot\frac{2^n}{\ln 2}=-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{100}{2^n}<0$$

另一种做法：此人只打一次电话时的期望价格为 350 美元，在打二次电话时，他直接询问各个商场的电视的售价（假定为 x、y），然后又根据他所掌握的最高、低的价格来进行整理：400-300、x-300、y-300 三者之和除以三以后再加上 300， 这就得出打二次电话时的期望价格，同理，在打三次电话时……由此，我们也可以推出打电话的次数与电视的期望价格之间的另一种关系式：

$$EP(n)=300+\frac{100}{n+1}$$

$$EP'(n)=-\frac{100}{(n+1)^2}<0$$

(3) 假定时间和努力可以用金钱来衡量的话，则每次打电话的成本为 2 美元，此人的最优打电话的次数由当他最后一次打电话所询问到的期望价格的减少量正好等于 2 美元来决定的，即：

$$\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{100}{2^n}\geq 2$$

$$(n+1)\cdot\ln 2\leq \ln\left(\frac{100}{\ln 2}\right)$$

$$n\leq 6.173$$

我们通过取整可以得到 $n^*=6$。

而当此人以第二种方式来询问价格时：

$$\frac{100}{(n+1)^2}\geq 2$$

$$n\leq 6.071$$

我们通过取整可以得到 $n^*=6$。

（瓦尔特·尼科尔森 微观经济理论 第六版 中国经济出版社 p273）

6 如果我要是找工作的话，则我的期望增加的工资为 125 元，而面试花费只用 50 元，所以在就业市场上找工作是划算的。

（十八讲 p297）

7（1） 当 $e\equiv 1$ 时，厂商的利润函数变为：$\pi=\frac{L^\alpha}{\alpha}-wL$

①当 e 为外生时： $\underset{L}{Max}\quad \pi=\frac{L^\alpha}{\alpha}-wL$

$$\frac{d\pi}{dL}=L^{\alpha-1}-w=0$$

$$L^*=w^{\frac{1}{\alpha-1}};\qquad \pi^*=\frac{1}{\alpha}w^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}-w^{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)w^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

②因为由①的答案，我们知道了企业的最优选择劳动力的标准，而当企业与工会共同追求$u^{\gamma}\pi^{1-\gamma}$最大化时，我们有理由相信至少企业不会改变它的最优选择标准，因为企业完全可以根据工会所提出的工资要求来选择自身利润最大化的最优劳动力的数量，而剩下的，我们则主要是看工会是如何选择其自身的工资水平：

如果工会的效用函数为$u=(w-x)$的话：

$$\underset{w,L}{Max}\qquad \gamma\ln(w-x)+(1-\gamma)\ln\left(\frac{L^{\alpha}}{\alpha}-wL\right)$$

把①的答案代入得：

$$\underset{w}{Max}\qquad \gamma\ln(w-x)+(1-\gamma)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{1-\alpha}\ln w$$

对w的一阶求导得：

$$\frac{\gamma}{w-x}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{(1-\alpha)w}=0$$

$$w^*=\frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma}x$$

如果工会的效用函数为$u=(w-x)L$的话：

$$\underset{w,L}{Max}\qquad \gamma\ln[(w-x)L]+(1-\gamma)\ln\left(\frac{L^{\alpha}}{\alpha}-wL\right)$$

把①的答案代入得：

$$\underset{w}{Max}\qquad \gamma\ln(w-x)-\frac{\gamma}{1-\alpha}\ln w+(1-\gamma)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{1-\alpha}\ln w$$

对w的一阶求导得：

$$\frac{\gamma}{w-x}-\frac{\gamma}{(1-\alpha)w}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{(1-\alpha)w}=0$$

$$w^*=\frac{\gamma+\alpha(1-\gamma)}{\alpha}x$$

③（我想，题目所求的应是$\frac{d\ln w}{d\gamma}$，不然的话，如果是$\frac{\alpha\ln w}{\alpha\gamma}$，当$\gamma=0$时，则$\frac{\alpha\ln w}{\alpha\gamma}$的值不存在）

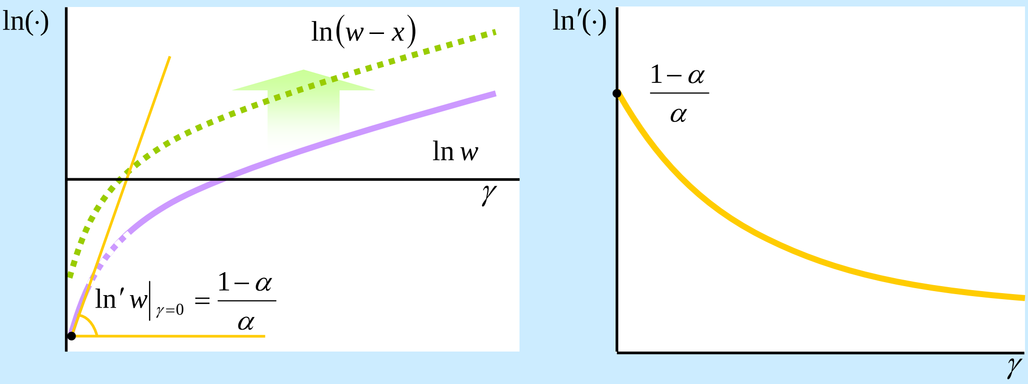
$$\frac{d\ln w}{d\gamma}=\ln'[w(\gamma)]=\frac{dw(\gamma)/d\gamma}{w(\gamma)}$$

这相当于对于γ而言，$w(\gamma)$的增长率；我们把的答案代入上式得：

如果工会的效用函数为$u=(w-x)$的话：

$$\ln'[w(\gamma)]=\ln'\left[\frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma}\cdot x\right]=\frac{1}{\alpha-\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}$$

当$\gamma=0$时： $\ln'[w(\gamma)]=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$



为了让我们理解$\ln'[w(\gamma)]$（斜率）所代表的经济含义，我们先把工会的效用函数变形为：$\ln u=\ln(w-x)$，而$\ln' u=\ln'(w-x)=\ln' w$，这时，我们可把$\ln'(\cdot)$理解为工会的谈判能力对工人的工资（效用）增长的影响；从右图中，我们可看出随着工会谈判能力的增加，其对工人工资（效用）的增长作用是越来越小的；

因为效用函数没有任何经济意义，只是为不同的消费组合排序，所以任何一个效用函数的单调变化不会改变消费组合的排序，我们也尽可放心当$\ln[w(\gamma)]<0$时，并不代表$w<0$；

如果工会的效用函数为$u=(w-x)L$的话：

$$\ln'[w(\gamma)]=\ln'\left[\frac{\gamma+\alpha(1-\gamma)}{\alpha}\cdot x\right]=\frac{1-\alpha}{\gamma+\alpha(1-\gamma)}$$

当$\gamma=0$时： $\ln'[w(\gamma)]=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$

（2）当$e=\left(\dfrac{w-x}{x}\right)^{\beta}$时，厂商的利润函数变为：$\pi=\dfrac{L^{\alpha}}{\alpha}\cdot\left(\dfrac{w-x}{x}\right)^{\alpha\beta}-wL$

① $$\underset{L}{Max}\quad \pi=\frac{L^{\alpha}}{\alpha}\cdot e^{\alpha}-w\cdot L=\frac{L^{\alpha}}{\alpha}\cdot\left(\frac{w-x}{x}\right)^{\alpha\beta}-wL$$

$$\frac{d\pi}{dL}=L^{\alpha-1}\cdot e^{\alpha}-w=L^{\alpha-1}\cdot\left(\frac{w-x}{x}\right)^{\alpha\beta}-w=0$$

$$L^{*}=w^{\frac{1}{\alpha-1}}\cdot e^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}=w^{\frac{1}{\alpha-1}}\cdot\left(\frac{w-x}{x}\right)^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}};\qquad \pi^{*}=\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot w^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\cdot\left(\frac{w-x}{x}\right)^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}}$$

②如果工会的效用函数为 $u=(w-x)$ 的话：

$$\max_{w}\quad \gamma\ln(w-x)+(1-\gamma)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{1-\alpha}\ln w+\frac{\alpha\beta(1-\gamma)}{1-\alpha}\left[\ln(w-x)-\ln x\right]$$

对 w 的一阶求导得：

$$\frac{\gamma}{w-x}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{(1-\alpha)w}+\frac{\alpha\beta(1-\gamma)}{(1-\alpha)(w-x)}=0$$

$$w^{*}=\frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma-\alpha\beta(1-\gamma)}x$$

如果工会的效用函数为 $u=(w-x)L$ 的话：

$$\max_{w}\quad \gamma\ln(w-x)-\frac{\gamma}{1-\alpha}\ln w+(1-\gamma)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{1-\alpha}\ln w+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\left[\ln(w-x)-\ln x\right]$$

对 w 的一阶求导得：

$$\frac{\gamma}{w-x}-\frac{\gamma}{(1-\alpha)w}-\frac{\alpha(1-\gamma)}{(1-\alpha)w}+\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(w-x)}=0$$

$$w^{*}=\frac{\gamma+\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\alpha\beta}x$$

③

$$\frac{d\ln w}{d\gamma}=\ln'[w(\gamma)]=\frac{dw(\gamma)/d\gamma}{w(\gamma)}$$

我们把的答案代入上式得：

如果工会的效用函数为 $u=(w-x)$ 的话：

$$\ln'[w(\gamma)]=\ln'\left[\frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma-\alpha\beta(1-\gamma)}x\right]=\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\gamma-\alpha\beta(1-\gamma)}-\frac{1}{1-\gamma}$$

当 $\gamma=0$ 时： $$\ln'[w(\gamma)]=\frac{1-\alpha-\alpha\beta}{\alpha}$$

如果工会的效用函数为 $u=(w-x)L$ 的话：

$$\ln'[w(\gamma)]=\ln'\left[\frac{\gamma+\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\alpha\beta}x\right]=\frac{1-\alpha}{\gamma+\alpha(1-\gamma)}$$

当 $\gamma=0$ 时： $$\ln'[w(\gamma)]=\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

当不考虑效率工资时，工人的工资为 $w^*=\dfrac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma}x$，而当考虑效率工资时，工人的工资为 $w^*=\dfrac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha-\gamma-\alpha\beta(1-\gamma)}x$，这说明效率工资提高了工人的工资；且当 $\gamma\neq 0$ 时，$\dfrac{1-\alpha\beta}{\alpha-\gamma-\alpha\beta(1-\gamma)}-\dfrac{1}{1-\gamma}>\dfrac{1}{\alpha-\gamma}-\dfrac{1}{1-\gamma}$（通过简单的计算，我们可得出其结论），这说明效率工资提高了其斜率。这正好被萨莫斯所言中。

（天啊……，从深渊爬出的我，第一次发现原来山林的鸟鸣声是如此的悦耳……）

在做第八题之前，我们首先要做的是试图揭开效率工资的“神秘”面纱；

便宜没好货，厂商通过提供给工人更高的工资，以便激发出工人更高的生产能力；但问题是多高才最好呢？传统的竞争性企业模型与效率工资模型决策的差异在哪？

传统的竞争企业模型：

$$\pi=F(L)-w\cdot L$$

$$\frac{d\pi}{dL}=MPL-w=0$$

$$w=MPL$$

效率工资模型：

$$\pi=F[e(w)\cdot L]-w\cdot L$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\pi}{\partial L}=F'\cdot e-w=0 & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial\pi}{\partial w}=F'\cdot L\cdot e'_w-L=0 & (2)\end{cases}$$

把（1）式变形后代入（2）式得：

$$\frac{de(w)}{dw}\cdot\frac{w}{e(w)}=1$$

两模型的思路是一致的，但传统的竞争企业模型与效率工资模型的区别在于对生产函数的不同定义，而得出的不同结论；传统的模型认为企业的利润最大化是正好在工人工资等于其边际产量上出现；而效率工资模型则认为是出现在工人努力对工资的弹性为一的地方；

8（1）企业所追求的目标位利润最大化，而在这我们可以分两种情况来分析：

在效率工资模型中，企业利润最大化在其工人努力的工资弹性等于一处实现；（犹如在传统模型中的劳动的边际产量等于其实际工资 $w=MPL$），即：

$$\frac{de(w)}{dw}\cdot\frac{w}{e(w)}=1 \qquad (1)$$

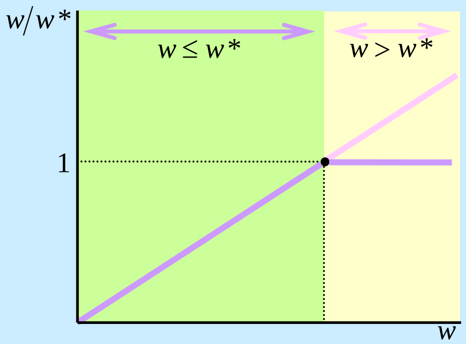
由于工人努力水平函数 $e=\min\left\{\dfrac{w}{w^*};1\right\}$；

①当 $w>w^*$ 时，$e=1$，而此时 $\dfrac{de(w)}{dw}=\dfrac{d1}{dw}=0$，把之代入（1）式，我们可知这不满足均衡条件；

②当 $w \le w^*$ 时，$e=\dfrac{w}{w^*}$，而 $\dfrac{de(w)}{dw}=\dfrac{1}{w^*}$，把之代入（1）式得：

$$\frac{1}{w^*}\cdot\frac{w}{w}\cdot w^*=1$$

等式成立，所以，由此我们可知，企业会以在 $[0, w^*]$ 区间内的任何一个工资来雇用工人，这都会使得企业达到利润最大化；



企业所提供的工资选择范围在绿色区域，而根据题目的条件可知，这时，企业会付给工人的工资为这一区域的最大值，即 w^*；

（2）①根据以上的思路，我们再不辞劳苦一下；其均衡条件为：

$$\frac{de(w)}{dw}\cdot\frac{w}{e(w)}=1 \tag{1}$$

而工人努力水平函数变为：$e=\min\left\{\dfrac{w}{\overline{w}+a-bu};1\right\}$；

同样，企业也不可能考虑 $w>\overline{w}+a-bu$ 的情况；而当 $w\le\overline{w}+a-bu$ 时，工人的努力水平为 $e(w)=\dfrac{w}{\overline{w}+a-bu}$，其导数为 $\dfrac{de(w)}{dw}=\dfrac{1}{\overline{w}+a-bu}$，把之代入（1）式得：

$$\frac{1}{\overline{w}+a-bu}\cdot\frac{w}{w}\cdot(\overline{w}+a-bu)=1$$

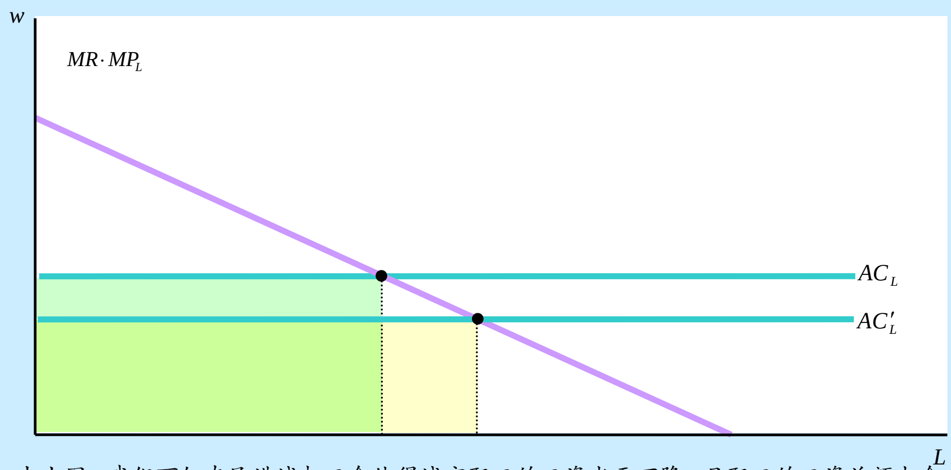
等式成立，所以，此时，企业还是会付给工人公平工资，$w=w^*=\overline{w}+a-bu$；

②当市场处于均衡时，各企业的利润为零，而对于如何企业的职工而言，选择在哪一个企业上班都是一样的，其所获得的工资一致（$w^*=\overline{w}$），这时的市场已经是充分成熟，这意味着工人的努力水平为 1，换句话说，此时 $a-bu=0$，即这样的均衡不会对企业选择工资造成制约（因为当 $a-bu=0$ 时，$w^*=\overline{w}+a-bu$ 不

后两项）；此时的失业率为 $u=\dfrac{a}{b}$；要使得市场在均衡时具有正的失业率，则必须满足 $a>0$ 的条件；

（仍然激动不已，因为心里还是没底，
感觉如同被一条发情的母狗追得慌不择路时的差不多……）

9（1）我们有理由相信大批农民进城打工只能影响初级劳动力市场，从事加工制造等劳动力密集型的行业。而我们正是分析这部分的劳动力市场。我们首先假定此劳动市场为完全竞争市场且他们并不影响劳动力市场的需求曲线，但他们的出现会影响劳动力的供给曲线，使得在同一劳动力供给水平上会出现更低的工资水平（即劳动供给曲线向下方移动），并且， 他们对城市职工有可能会造成类似挤出效应的影响；



由上图，我们可知农民进城打工会使得城市职工的工资水平下降，且职工的工资总额也会下降（由图中可知，即使农民进城打工不会出现挤出效应，城市职工的工资总额也会下降）。

（2）当农民大量的涌入城市时，这有可能会打破劳动力市场的长期均衡，由于部分企业雇用了农民而降低了其成本，这会使其产生正的利润，进而会使得更多的企业尽先雇用农民，最终会导致劳动力市场上的供给曲线下移，当劳动力市场达到新的长期均衡时，各企业的利润重新回到零的水平。

（3）农民进城打工具有正面与负面的影响：
正面影响：有助于相关企业的成本和商品的价格下降；
负面影响：有可能对城市职工造成就业竞争的压力，也有可能会导致一部分的城市职工失业。

第十六讲

就本章而言，比较有用的一种做题思路：

（1）首先求出消费者 1、2 的马歇尔需求函数；

（2）利用瓦尔拉斯均衡的概念，假定某个市场处于均衡，在此条件下得出价格之间的关系式；

（3）把价格之间的关系式代入马歇尔需求函数，便可得出瓦尔拉斯均衡时的各消费者的需求；

举个例子：在一个纯交换的经济中，有两个消费者 1、2，两种商品 1、2，两个消费者 1、2 的效用函数分别为：$u^1(x_1^1,x_2^1)=(x_1^1)^{\alpha}\cdot(x_2^1)^{1-\alpha}$；$u^2(x_1^2,x_2^2)=(x_1^2)^{\beta}\cdot(x_2^2)^{1-\beta}$；消费者 i 的禀赋为 $(\omega_1^i,\omega_2^i)>>0, i=1,2$。求解均衡价格比率和配置，说明它们如何随着 ω_1^1 的变化而变化？

解：消费者 1 的目标为： $\underset{x}{Max} \quad u^1(x_1^1,x_2^1)=(x_1^1)^{\alpha}\cdot(x_2^1)^{1-\alpha}$

$$s\cdot t\cdot p_1x_1^1+p_2x_2^1=p_1\omega_1^1+p_2\omega_2^1$$

构造拉氏方程：$\varphi(x_1^1,x_2^1,\lambda)=(x_1^1)^{\alpha}\cdot(x_2^1)^{1-\alpha}+(p_1\omega_1^1+p_2\omega_2^1-p_1x_1^1-p_2x_2^1)$

一阶条件：
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1^1}=\frac{\alpha}{x_1^1}\cdot u^1-\lambda p_1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2^1}=\frac{1-\alpha}{x_2^1}\cdot u^1-\lambda p_2=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=p_1\omega_1^1+p_2\omega_2^1-p_1x_1^1-p_2x_2^1=0 \qquad (3)$$

由（1）/（2）我们可得出：

$$x_2^1=\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot x_1^1;\qquad x_1^1=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot x_2^1$$

由把以上两式分别代入（3）我们可得出马歇尔需求函数：

$$x_1^1(p_1,p_2,\omega_1^1,\omega_2^1)=\alpha\left(\omega_1^1+\frac{p_2}{p_1}\cdot\omega_2^1\right);\qquad x_2^1(p_1,p_2,\omega_1^1,\omega_2^1)=(1-\alpha)\left(\frac{p_1}{p_2}\cdot\omega_1^1+\omega_2^1\right)$$

同理，我们也可求出消费者 2 的马歇尔需求函数：

$$x_1^2(p_1,p_2,\omega_1^2,\omega_2^2)=\beta\left(\omega_1^2+\frac{p_2}{p_1}\cdot\omega_2^2\right);\qquad x_2^2(p_1,p_2,\omega_1^2,\omega_2^2)=(1-\beta)\left(\frac{p_1}{p_2}\cdot\omega_1^2+\omega_2^2\right)$$

现在，我们假定商品 2 的市场出清（假定商品 1 的市场出清所得出的结论是一致的）（这是为了得出价格 1 比价格 2 的值，这相当于边际替代率）：

$$x_2^1+x_2^2-\omega_2^1-\omega_2^2=0$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{p_1}{p_2}\cdot\omega_1^1+\omega_2^1\right)+(1-\beta)\left(\frac{p_1}{p_2}\cdot\omega_1^2+\omega_2^2\right)-\omega_2^1-\omega_2^2=0$$

把通过整理，我们可得出市场均衡时的价格比：

$$\frac{p_1*}{p_2*}=\frac{\alpha\omega_2^1+\beta\omega_2^2}{(1-\alpha)\omega_1^1+(1-\beta)\omega_1^2}$$

把上式代入马歇尔需求函数：

$$x_1^1(p_1,p_2,\omega_1^1,\omega_2^1)=\alpha\left(\omega_1^1+\frac{\alpha\omega_2^1+\beta\omega_2^2}{(1-\alpha)\omega_1^1+(1-\beta)\omega_1^2}\omega_2^1\right)$$

$$x_2^1(p_1,p_2,\omega_1^1,\omega_2^1)=(1-\alpha)\left(\frac{\alpha\omega_2^1+\beta\omega_2^2}{(1-\alpha)\omega_1^1+(1-\beta)\omega_1^2}\omega_1^1+\omega_2^1\right)$$

$$x_1^2(p_1,p_2,\omega_1^2,\omega_2^2)=\beta\left(\omega_1^1+\frac{\alpha\omega_2^1+\beta\omega_2^2}{(1-\alpha)\omega_1^1+(1-\beta)\omega_1^2}\omega_2^1\right)$$

$$x_2^2(p_1,p_2,\omega_1^2,\omega_2^2)=(1-\beta)\left(\frac{\alpha\omega_2^1+\beta\omega_2^2}{(1-\alpha)\omega_1^1+(1-\beta)\omega_1^2}\omega_1^1+\omega_2^1\right)$$

利用以上的五个式子对 ω_1^1 求导：

$$\frac{\partial(p_1/p_2)}{\partial\omega_1^1}<0\text{；}\quad\frac{\partial x_1^1}{\partial\omega_1^1}>0\text{；}\quad\frac{\partial x_2^1}{\partial\omega_1^1}>0\text{；}\quad\frac{\partial x_1^2}{\partial\omega_1^1}>0\text{；}\quad\frac{\partial x_2^2}{\partial\omega_1^1}<0$$

其实，以上所求的市场均衡时的价格比实为瓦尔拉斯均衡时的预算线斜率的绝对值、消费者 1、2 的边际替代率。而市场均衡时的马歇尔需求函数实为瓦尔拉斯均衡时的消费束。

（吴汉洪　高级微观经济学习题集　经济科学出版社　p172　178-179）

1 让我们先计算出此系统中两种物品的总量：

$$e_1=e_1^1+e_1^2=18+3=21;\qquad e_2=e_2^1+e_2^2=4+6=10$$

（1） 两消费者的最初的效用为：$u_1=(18\times4)^2=5184$；$u_1=\ln3+2\ln6\approx4.68$，当两消费者进行相互交易时，使得系统得到的总效用增大，换句话说，当消费者进行交易后，各自的效用水平不小于初始效用水平，即：

$$\begin{cases}u^1=\left(x_1^1x_2^1\right)^2\geq5184\\u^2=\ln x_1^2\left(x_2^2\right)^2\geq4.68\end{cases}$$

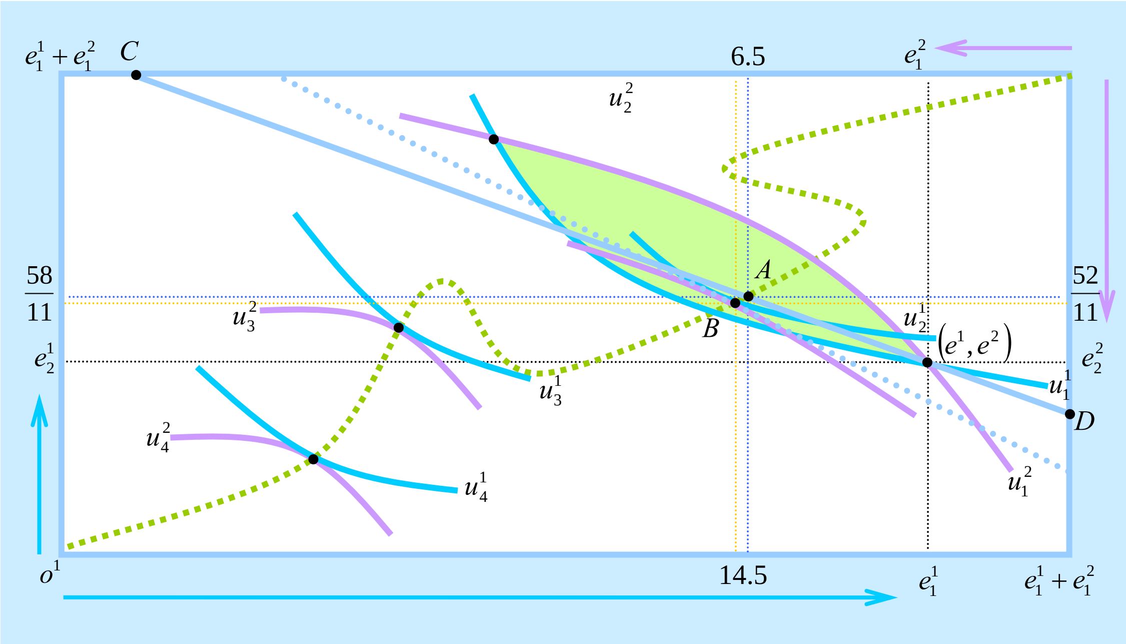
当我们把 $x_1^2=e_1-x_1^1=21-x_1^1$；$x_2^2=e_2-x_2^1=10-x_1^2$ 代入得出该集的特征函数式：

$$\begin{cases}x_1x_2\geq72\\(21-x_1)(10-x_2)^2\geq108\end{cases}$$

我们设 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合：

$$M=\left\{x_1^1,x_2^1\ \middle|x_1^1,x_2^1\geq 0\quad ,[x_1^1\cdot x_2^1\geq 72]\cap[\left(21-x_1^1\right)\left(10-x_2^1\right)^2\geq 108]\right\}$$

以上的帕累托有效集暗示了它可同时决定两个消费者的消费束，而图中的绿色透镜区域为帕累托有效集；



（2）由题设所给的效用函数可得出各个消费者的马歇尔需求函数：

$$x_1^1(p_1,p_2)=9+2\cdot\frac{p_2}{p_1}\ ;\quad x_2^1(p_1,p_2)=9\cdot\frac{p_1}{p_2}+2$$

$$x_1^2(p_1,p_2)=1+2\cdot\frac{p_2}{p_1}\ ;\quad x_2^2(p_1,p_2)=2\cdot\frac{p_1}{p_2}+4$$

假定商品 2 的市场出清，根据瓦尔拉斯均衡：

$$9\cdot\frac{p_1}{p_2}+2+2\cdot\frac{p_1}{p_2}+4-4-6=0$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{4}{11}\ ;\quad x_1^1=\frac{58}{4}=14.5\ ;\quad x_2^1=\frac{58}{11}\approx 5.27\ ;\quad x_1^2=\frac{26}{4}=6.5\ ;\quad x_2^2=\frac{52}{11}\approx 4.73$$

由上可知，瓦尔拉斯均衡配置 $WEAs$ $\left(Walrasian\ Equilibrium\ Allocations\right)$ 为：

$$x^1=\left(\frac{58}{4},\frac{58}{11}\right);\quad x^2=\left(\frac{26}{4},\frac{52}{11}\right)$$

由以上我们可看出瓦尔拉斯均衡集为帕累托有效集的子集。

（杰弗瑞 ·A ·杰里　高级微观经济理论　第二版　上海财经大学出版社 p183　216）

另一种做法：

瓦尔拉斯均衡（又称市场均衡或竞争均衡，即：按现价每人想购买的每种商品

同该商品可提供的总量相等；换句话说，若存在一组价格，在此价格的条件下，每个消费者正在选择他或她的最偏爱的、并且买得起的消费束，而所有消费者的这样的选择是能够共存的)。该瓦尔拉斯均衡下满足两消费者的边际替代率相等，即：

$$MRS^1 = MRS^2$$

我们把 $x_1^2 = e_1 - x_1^1 = 21 - x_1^1$； $x_2^2 = e_2 - x_2^1 = 10 - x_1^2$ 代入得：

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{\left(10 - x_2^1\right)}{2\left(21 - x_1^1\right)}$$

上式变形、整理为： $42x_2^1 - 10x_1^1 - x_1^1 x_2^1 = 0$

（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p601-612）

我们可推算出瓦尔拉斯均衡： $x_1^1 = 14$； $x_2^1 = 5$（图中的 B 点）；

此时的预算线（虚蓝线段）的斜率的绝对值为： $\left|\frac{dx_1^1}{dx_2^1}\right| = MRS^1 = MRS^2 = \frac{5}{14}$；

以上做法为什么有误？

瓦尔拉斯均衡至少有三个限定：（1）均衡时的预算线一定经过初始禀赋点；（2）各个消费者在均衡时消费束一定在其预算线与效用曲线的切点上；（3）两切点一定是重合的；以上做法在该死的蓝色字体出现后，只是满足了后两个条件而已。

（两个晚上后，我才混沌初开……好险）

2 我们设第 k 种商品的价格为 p_k， $k \in n$，系统内存在 I（I 为正整数）个消费者，第 i 个消费者的初始禀赋为 e_k^i， $i \in I$，而第 i 个消费者对第 k 种商品的消费量为 x_k^i，根据瓦尔拉斯定律可知系统中的超额的市场价值为零(消费者的初始禀赋点与在市场交易完毕的消费束都落在了其预算线上)，即：

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i \in I} x_k^i - \sum_{i \in I} e_k^i \right) = 0$$

当（n-1）个商品市场已经实现均衡，即（n-1）个商品市场的超额需求为零，这时有：

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\sum_{i \in I} x_k^i - \sum_{i \in I} e_k^i \right) + p_n \left(\sum_{i \in I} x_k^i - \sum_{i \in I} e_k^i \right) = 0$$

$$p_n \left(\sum_{i \in I} x_k^i - \sum_{i \in I} e_k^i \right) = 0$$

$$\left(\sum_{i \in I} x_k^i = \sum_{i \in I} e_k^i \right)$$

由此，我们可得出第 n 个市场的超额需求也为零，即第 n 个商品市场也实现了均衡

（此题如同是说已知 n 个数之和为零，又知 n-1 个数为零，问第 n 个数的值为多少

3（1）先计算出此系统中两种物品的总量：

$$e_1 = e_1^1 + e_1^2 = 30 + 0 = 30; \quad e_2 = e_2^1 + e_2^2 = 0 + 20 = 20$$

由题设给出消费者 1 的效用函数可知，我们可直接得出其需求函数：

$$x_1^1 = x_2^1 = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

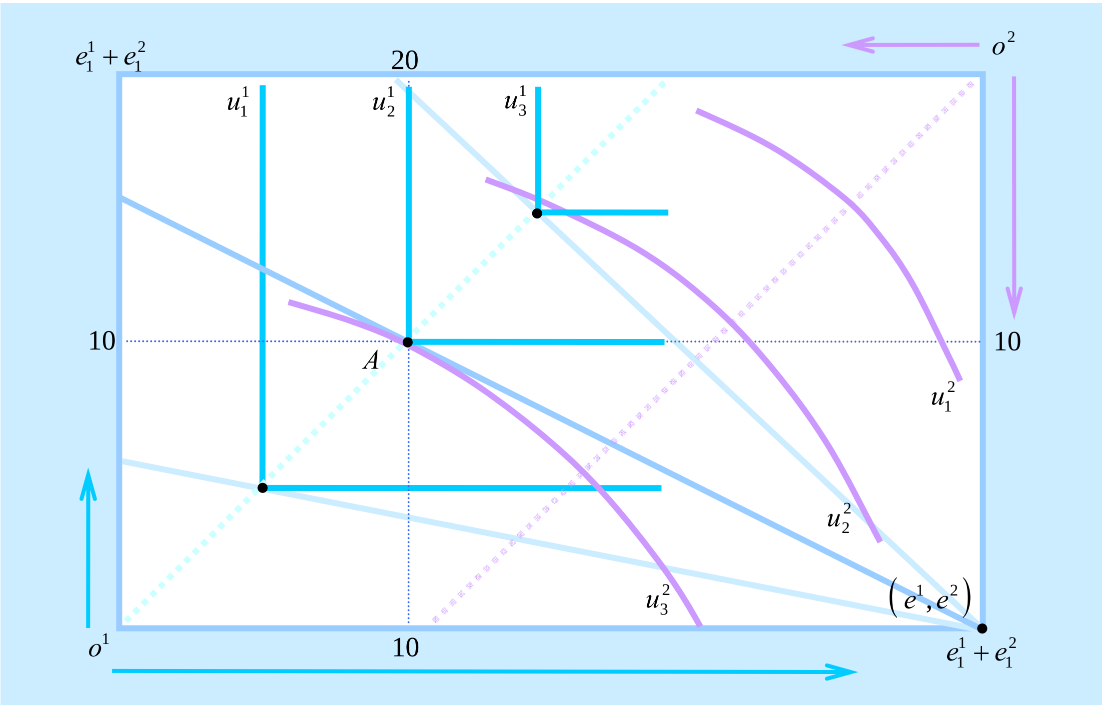
当消费者 1 达到效用最大化时，其商品 1、2 的消费量必定是相等的，而消费者 1 的初始效用水平为零，那么任何的经过交易后的消费束所达到的效用水平只要不小于初始效用水平的话，消费者 1 必定会接受；

而对于消费者 2 而言，根据罗尔恒等式：$x_i(p,m) = -\dfrac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial m}$ 会得出马歇尔需求函数：

$$x_i^2(p,m) = \frac{m}{2p_i}; \qquad (i = 1,2)$$

把上式变形为 $p_i = \dfrac{m}{2x_i}$ 代入间接效用函数得出直接效用函数：$u(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$；

由此我们可得出消费者 2 的初始效用水平为零；同样，任何的经过交易后的消费束所达到的效用水平只要不小于初始效用水平的话，消费者 2 也必定会接受；



综上所述，我们之罗列在一起：

$$x_1^1 = x_2^1 = \frac{30p_1}{p_1 + p_2}; \quad x_i^2(p,m) = \frac{20p_2}{2p_i}$$

假定商品 2 的市场出清，根据瓦尔拉斯均衡：

$$\frac{30p_1}{p_1+p_2}+\frac{20p_2}{2p_2}-20=0$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2};\quad x_1^1=x_2^1=10;\quad x_1^2=20;\quad x_2^2=10$$

由上，我们可知瓦尔拉斯均衡配置为：$x^1=(10{,}10)$；$x^2=(20{,}10)$

（2）我们可以直接利用上一问的各消费者的马歇尔需求函数：

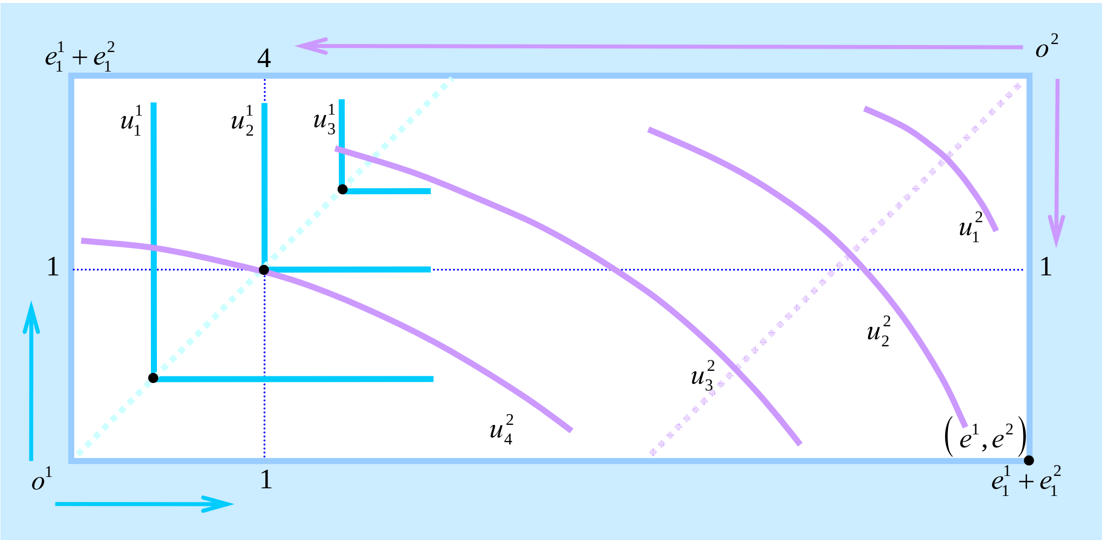
$$x_1^1=x_2^1=\frac{5p_1}{p_1+p_2};\quad x_i^2(p,m)=\frac{p_2}{p_i}$$

假定商品 2 的市场出清，根据瓦尔拉斯均衡：

$$\frac{5p_1}{p_1+p_2}+1-2=0$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{4};\quad x_1^1=x_2^1=1;\quad x_1^2=4;\quad x_2^2=1$$

由上，我们可知瓦尔拉斯均衡配置为：$x^1=(1{,}1)$；$x^2=(4{,}1)$



（杰弗瑞 ·A ·杰里 高级微观经济理论 第二版 上海财经大学出版社 p183 216）

4（1）零次齐次方程满足：$f(tx_1,tx_2,tx_3)=f(x_1,x_2,x_3)$ ；t 为正实数；

$$ED_2(tp)=-3\frac{tp_2}{tp_1}+2\frac{tp_3}{tp_1}-1=-3\frac{p_2}{p_1}+2\frac{p_3}{p_1}-1=ED_2(p)$$

$$ED_3(tp)=4\frac{tp_2}{tp_1}-2\frac{tp_3}{tp_1}-2=4\frac{p_2}{p_1}-2\frac{p_3}{p_1}-2=ED_3(p)$$

（2） 由瓦尔拉斯法则可知：$ED=0$（总的超额需求为零）；又知 $ED_2=ED_3=0$，而这个经济是由三种商品组成，所以，$ED_1=0$；根据瓦尔拉斯法则，我们可知：

$$ED_1=ED-ED_2-ED_3$$

$$ED_1=3\frac{p_2}{p_1}-2\frac{p_3}{p_1}+1-4\frac{p_2}{p_1}+2\frac{p_3}{p_1}+2=-\frac{p_2}{p_1}+3$$

（3） 当各个市场处于瓦尔拉斯均衡时，$ED=0$； $ED_1=ED_2=ED_3=0$；解方程组：

$$\begin{cases}3\frac{p_2}{p_1}-2\frac{p_3}{p_1}=-1\\ 4\frac{p_2}{p_1}-2\frac{p_3}{p_1}=2\end{cases}$$ ；通过计算，我们可得出 $$\begin{cases}\frac{p_2}{p_1}=3\\ \frac{p_3}{p_1}=5\end{cases}$$ ；而 $\frac{p_3}{p_2}=\frac{p_3/p_1}{p_2/p_1}=\frac{5}{3}$

5（1） 由题设所给的效用函数可得出各个消费者的马歇尔需求函数：

$$x_1^1(p_1,p_2)=\frac{5}{2}+21\cdot\frac{p_2}{p_1}；\quad x_2^1(p_1,p_2)=\frac{11}{2}\cdot\frac{p_1}{p_2}+9$$

$$x_1^2(p_1,p_2)=\frac{1}{2}+9\cdot\frac{p_2}{p_1}；\quad x_2^2(p_1,p_2)=\frac{19}{2}\cdot\frac{p_1}{p_2}+1$$

而两种商品的超额需求函数为：

$$ED_1=x_1^1+x_1^2-8-10=\frac{5}{2}+21\cdot\frac{p_2}{p_1}+\frac{1}{2}+9\cdot\frac{p_2}{p_1}-18=30\cdot\frac{p_2}{p_1}-15$$

$$ED_2=x_2^1+x_2^2-10-30=\frac{11}{2}\cdot\frac{p_1}{p_2}+9+\frac{19}{2}\cdot\frac{p_1}{p_2}+1-40=15\cdot\frac{p_1}{p_2}-30$$

（2） 当该经济处于均衡时，各市场的超额需求为零：即 $ED_1=ED_2=0$，则此时有：

$$30\cdot\frac{p_2}{p_1}-15=15\cdot\frac{p_1}{p_2}-30=0$$

$$\frac{p_1}{p_2}=2$$

6（1） 未必；因为由瓦尔拉斯均衡的概念可知，我们要知道消费者的禀赋、各自的效用曲线才有可能清楚消费者的交易结果。因为消费者的禀赋是决定了市场均衡时的最终预算线的位置；而各自的效用曲线是为了使得我们清楚消费者的最终的消费束；

（2） 应该可以说是正确的，这一点也直接可以由帕累托有效的概念得出；

进一步提问：这样行否？在契约线上，通过损害一些人的利益，使另外一些人的福

改进。

不可；因为当提到财富的重新分配时，这样就会涉及到以系统目标最大化的行为者（类似于政府）。之所以要重新分配，是因为这样会给系统带来帕累托改进（包括减去政府实施措施时的成本）。一旦系统达到均衡时，这就意味着已经达到帕累托最优，换句话说，至少这时政府是认为没有必要再改变了。

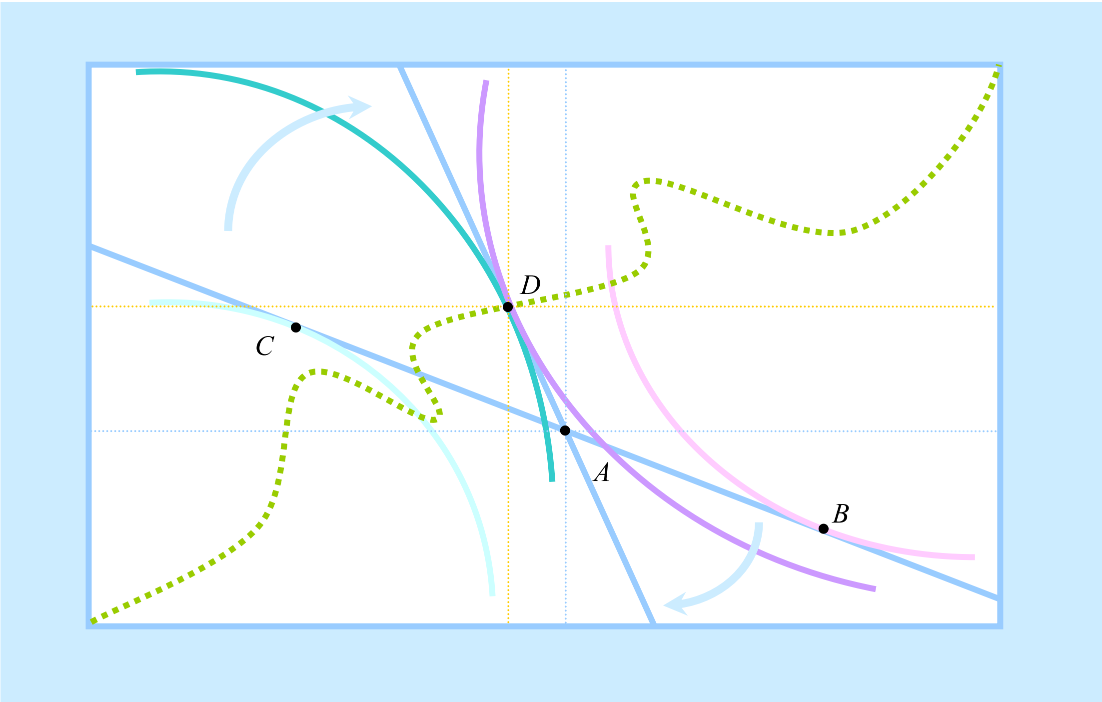
也就是说，不会出现这样的情况：想一想，这时政府认为还要“损害一些人的利益，使另外一些人得利”的话，那么这就与“帕累托最优”这个词所代表的状态相违背了。

所说的是没有把以系统目标最大化的行为者包括在内的系统的“局部均衡”。在除了政府之外，“系统”的确已经达到了所谓的“帕累托最优”，但这时不包括政府的话，谁会去作利益减少的人，而当系统包括政府时，所处的情况就并不是“帕累托最优”的状态。

7 题目所要证明的是帕累托有效时，两消费者的边际替代率是相等的；

当消费者达到效用最大化时，其效用曲线是与其预算线相切，即其边际替代率等于其预算线的斜率，而在一个只有两个消费者的经济中，各个消费者所面临的预算线的斜率是相等的（因为他们所面临的市场各商品的价格是一致的），所以说，当帕累托有效时，两消费者的边际替代率是相等的；

让我们值得注意的是，这个结论只是题设的必要条件而已，当我们反过来说时，则不一定成立，来看看下面的一个例子：



图中，禀赋为 A，消费者 2 的经过 C 点的效用曲线与消费者 1 的经过 B 点的效用曲线的边际替代率相等，但此时，并非是帕累托有效，但消费者通过某种方式（相互商量、竞拍等等）使得预算线旋转，而最终达到 D 点，在 D 点实现了帕累托有效。

8（1） $u^1 = \sqrt{100} = 10$； $u^2 = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$

（2）设水手 1 所分配到的粮食为 x，则：

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{200 - x}$$

$$F_1 = x = 40;\ F_2 = 200 - x = 160;\ u^1 = u^2 = \sqrt{40}$$

（3）设水手 1 所分配到的粮食为 x，则：

$$\underset{x}{Max} \quad u^1 + u^2$$

对 x 求导：

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{200-x}} = 0$$

$$F_1 = x = 160\,;\ F_2 = 200 - x = 40\,;\ u^1 = 4\sqrt{10}\,;\ u^2 = \sqrt{10}\,;\ u^1 + u^2 = 5\sqrt{10}$$

（4）设水手 1 所分配到的粮食为 x，则：

$$\underset{x}{Max} \quad u^1 + u^2$$

$$s \cdot t \cdot \quad x \le 100$$

对 x 求导，要使得其一阶导数大于零：$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{200-x}} \ge 0$，解得：$x \le 160$，

由此，我们可知，当 x 不大于 160 的时候，两者的效用之和是随着 x 的增大而增大的，所以，在此限制条件下，只有当水手 1 所分配到的粮食为 100 时，会有两者的效用之和才会达到最大；此时：

$$F_1 = x = 100\,;\ F_2 = 200 - x = 100\,;\ u^1 = 10\,;\ u^2 = 5\,;\ u^1 + u^2 = 15$$

（5）设水手 1 所分配到的粮食为 x，则：

$$\underset{x}{Max} \quad \frac{1}{4}\ln x \cdot + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(200-x)$$

对 x 求导：

$$\frac{1}{4x} = \frac{1}{4(200-x)}$$

$$F_1 = x = 100\,;\ F_2 = 200 - x = 100\,;\ u^1 = 10\,;\ u^2 = 5\,;\quad W = 5\sqrt{2}$$

9（1）让我们先计算出此系统中两种物品的总量：

$$e_1 = e_1^1 + e_1^2 = 6 + 1 = 7\,;\qquad e_2 = e_2^1 + e_2^2 = 1 + 4 = 5$$

我们在这引入计价物（瓦里安 微观经济学 现代观点 上海人民出版社 p32-33），我们以汽水（x_1）来衡量面包（x_2），即一块面包可以换来多少瓶汽水，也就是说，一块面包的价格为多少瓶汽水，理所当然，一瓶汽水的价格为 1 ，而一块面包的价格，我们则设为 p，当一块面包的价格为 3 时，意味着一块面包可以和三瓶汽水交换；由题设所给的效用函数可得出各个消费者的马歇尔需求函数：

$$x_1^1(p) = 3 + \frac{p}{2}\,;\ \ x_2^1(p) = \frac{3}{p} + \frac{1}{2}$$

$$x_1^2(p) = \frac{1}{2} + 2p\,;\ \ x_2^2(p) = \frac{1}{2p} + 2$$

假定汽水市场出清，根据瓦尔拉斯均衡：

$$\frac{3}{p}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}+2-5=0$$

$$\frac{1}{p}=\frac{5}{7}$$

当市场处于均衡时五块面包可以交换到七瓶汽水；

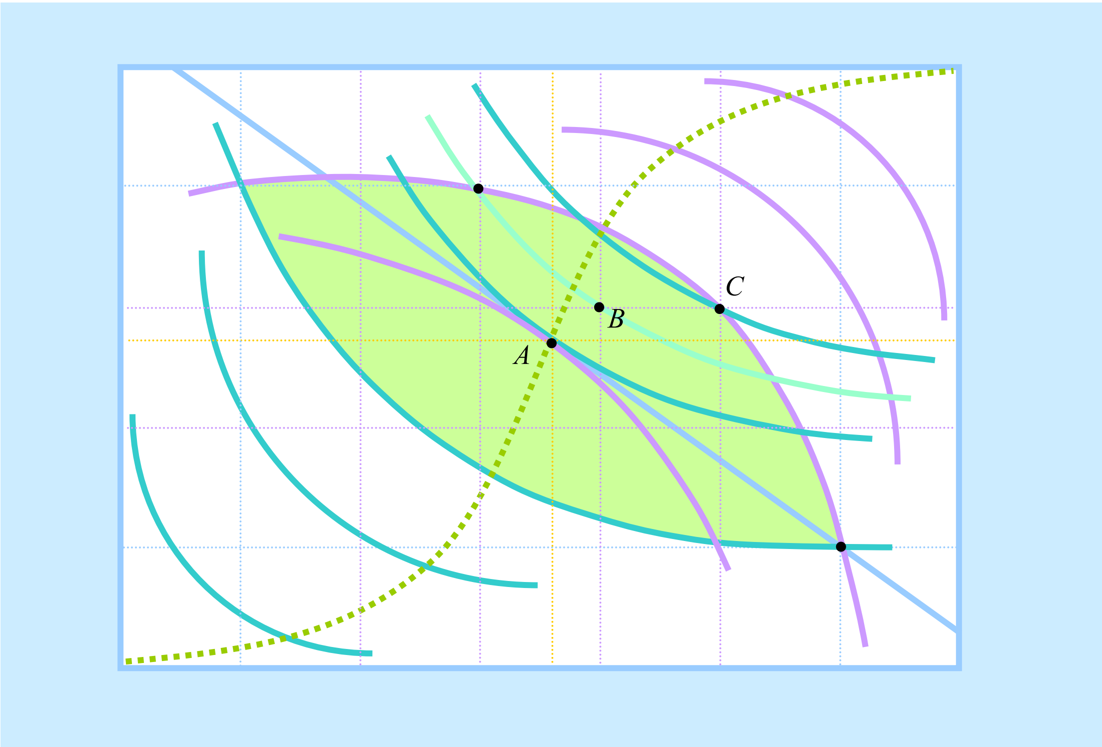
$$x_1^1=3.7\,;\quad x_2^1=\frac{37}{14}\approx 2.64\,;\quad x_1^2=3.3\,;\quad x_2^2=\frac{33}{14}\approx 2.36$$

此时的均衡的消费束为

$$x^1=(\ 3.7,2.64\ );\quad x^2=(\ 3.3,2.36\ );\quad u^1=9.768\,;\quad u^2=7.788$$

但汽水和面包都是要整个的交换的，即各消费者在均衡时的消费束均为整数；那么在一开始，消费者 1 会想：他的均衡消费束只可能有四种（他有可能也会在演算纸上涂涂抹抹得出我们的均衡消费束）：(3，2)、(3，3)、(4，2)、(4，3)，因为是消费者 1 先提议，根据他的效用函数，我们有理由相信，他会提议：我用两瓶汽水换你的两块面包，消费者 2 是有可能接受的，因为这样做会使得他的效用比初始时的增大。这时，均衡的消费束为：

$$x^1=(\ 4,3\ );\quad x^2=(\ 3,2\ );\quad u^1=12\,;\quad u^2=6$$



我们在这进一步提问：这样的交易会发生吗？

我们的回答是：这样的交易是不会发生的；因为理性的消费者是追求效用最大化的，以上的分析却违背了此初衷，所以对于这些贪心的家伙而言，他们会琢磨：既然我拥有主导权，那么我就在使得对方的效用不减少的情况下，来最

足我的欲望。

于是，他就会在盘算：我要使对方在交易完成后，他的效用根本没有改变，这样的话，我面临两种选择：在交换后，对方的均衡消费束为（2，2）或（4，1），如果我选择了第二种的话，我的最终的效用为$(7-4)(5-1)=12$，而如果我选择第一种时，我的效用水平会达到$(7-2)(5-2)=15$，所以，我的最优的提议就是：我要用一瓶汽水换你的两块面包。

这时，均衡的消费束便为：

$$x^1=(\ 5,3\ );\ x^2=(\ 2,2\ );\ u^1=15;\ u^2=4$$

（2）根据以上的思路，我们这次直奔主题：消费者 2 的初始效用为：$u^2=\frac{1}{a}\ln 4$

通过观察，我们可知：$\ln 4+\ln 1=\ln 2+\ln 2$，由此，我们可得出和第一问中一样的均衡配置：

$$x^1=(\ 5,3\ );\ x^2=(\ 2,2\ );\ u^1=\frac{1}{a}\ln 15;\ u^2=\frac{1}{a}\ln 4$$

10（1）为了使系统达到帕累托最优，则：

$$Max\quad U=u_1+u_2$$

$$s\cdot t\cdot\quad A+C=6\quad B+D=9$$

$$\psi=u_1+u_2+\lambda_1(6-A-C)+\lambda_2(9-B-D)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial A}=\frac{\partial u_1}{\partial A}-\lambda_1=0\quad(1);\qquad\frac{\partial\psi}{\partial C}=\frac{\partial u_2}{\partial C}-\lambda_1=0\quad(2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial B}=\frac{\partial u_1}{\partial B}-\lambda_2=0\quad(3);\qquad\frac{\partial\psi}{\partial D}=\frac{\partial u_2}{\partial D}-\lambda_2=0\quad(4)$$

我们分别用（1）与（3）；（2）与（4）相比得：

$$\frac{\partial u_1/\partial A}{\partial u_1/\partial B}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\quad(5);\qquad\frac{\partial u_2/\partial C}{\partial u_2/\partial D}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\quad(6)$$

现在，我们把（5）、（6）式合并得出：

$$\frac{\partial u_1/\partial A}{\partial u_1/\partial B}=\frac{\partial u_2/\partial C}{\partial u_2/\partial D}$$

事实上，我们是用上了第七题的结论；而就这一题而言：

$$\frac{\partial u_1}{\partial A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{u_1}{A};\qquad\frac{\partial u_2}{\partial C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{u_2}{C}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial B}=\frac{1}{3}\cdot\frac{u_1}{B};\qquad\frac{\partial u_2}{\partial D}=\frac{1}{4}\cdot\frac{u_2}{D}$$

则：

$$\frac{\partial u_1/\partial A}{\partial u_1/\partial B}=\frac{3}{2}\cdot\frac{B}{A};\qquad\frac{\partial u_2/\partial C}{\partial u_2/\partial D}=\frac{2}{1}\cdot\frac{D}{C}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{B}{A}=\frac{2}{1}\cdot\frac{D}{C}$$

又由 $A+C=6 \quad B+D=9$，我们最终可得出：

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{B}{A}=\frac{2}{1}\cdot\frac{9-B}{6-A}$$

通过捣鼓，得： $A=\frac{18B}{36-B}$

（2）重复以上的计算过程，当系统达到均衡时：

$$\frac{\partial u_1/\partial A}{\partial u_1/\partial B}=\frac{\partial u_2/\partial D}{\partial u_2/\partial E};\qquad \frac{\partial u_1/\partial A}{\partial u_1/\partial C}=\frac{\partial u_2/\partial D}{\partial u_2/\partial F};\qquad \frac{\partial u_1/\partial B}{\partial u_1/\partial C}=\frac{\partial u_2/\partial E}{\partial u_2/\partial F}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{u_1}{A};\qquad \frac{\partial u_2}{\partial D}=\frac{1}{2}\cdot\frac{u_2}{D} \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial B}=\frac{1}{3}\cdot\frac{u_1}{B};\qquad \frac{\partial u_2}{\partial E}=\frac{1}{4}\cdot\frac{u_2}{E} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial C}=\frac{1}{4}\cdot\frac{u_1}{C};\qquad \frac{\partial u_2}{\partial F}=\frac{1}{6}\cdot\frac{u_2}{F} \tag{9}$$

诸式相比并合并得：

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{B}{A}=\frac{2}{1}\cdot\frac{E}{D}\ \text{（10）};\qquad \frac{2}{1}\cdot\frac{C}{A}=\frac{3}{1}\cdot\frac{F}{D}\ \text{（11）};\qquad \frac{4}{3}\cdot\frac{C}{B}=\frac{3}{2}\cdot\frac{F}{E}\ \text{（12）}$$

在（10）有 $A+D=6 \quad B+E=9$，得：

$$A=\frac{18B}{36-B}$$

在（11）有 $A+D=6 \quad C+F=12$，得：

$$A=\frac{12C}{36-C}$$

在（12）有 $B+E=9 \quad C+F=12$，得：

$$B=\frac{72C}{108-C}$$

第十七讲

1 假定对于某种商品（钢材、火力发电厂所提供的电力等）而言，市场上只有一个供货商，设此垄断厂商所面临的需求曲线为：$D=p(q)$；成本曲线为：$C_p=C_p(q)$；但垄断厂商的生产会对社会上的消费者造成负的外部性（他们生产时所排放大量的废气，对于社会上的清洁的环境而言，会降低居民的生活质量），我们设其对消费者的损失为$C_c=C_c(q)$；其中$C_p(q)$、$C_c(q)$具有典型的成本函数性质：

（杰弗瑞·A·杰里　高级微观经济理论　第二版　上海财经大学出版社 p118）
（马斯·科莱尔 微观经济理论 上海财经大学出版社 p141）
（瓦里安 微观经济学 高级教程 经济科学出版社 p76-77）
（蒋殿春 高级微观经济学 经济管理出版社　p42）

社会总福利（*Welfare*）等于垄断利润加上消费者损失；

$$W=p(q)\cdot q-C_p(q)-C_c(q) \tag{1}$$

两边求导得：

$$\frac{dW}{dq}=MR-MC_p-MC_c \tag{2}$$

①当垄断厂商以自身的利润最大化为目标时：

垄断厂商的目标为：　$\underset{q}{Max}\quad \pi(q)=p(q)\cdot q-C_p(q)$

均衡产量q^O满足一阶条件：$\pi'(q)=p'(q)\cdot q+p(q)-MC_p=0$

$$MR^O=MC_p^O \tag{3}$$

此时的社会的总福利为：

$$W^O=p(q^O)\cdot q^O-C_p(q^O)-C_s(q^O) \tag{4}$$

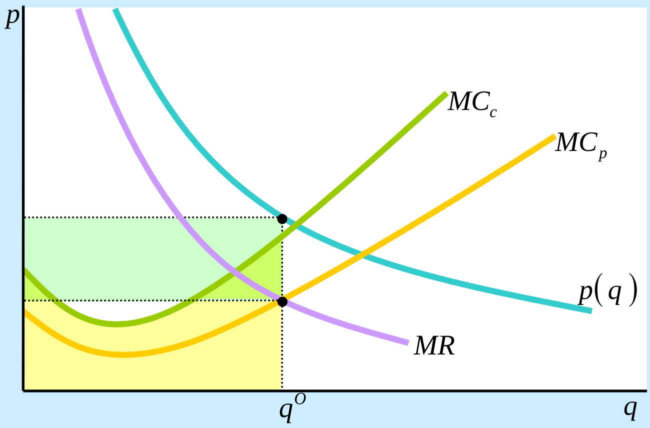
把代入社会总福利的一阶条件得：

$$\left.\frac{dW}{dq}\right|_{q=q^O}=MR^O-MC_p^O-MC_c^O$$

因为由（3）式可知，此时$MR^O=MC_p^O$，则

$$\left.\frac{dW}{dq}\right|_{q=q^O}=-MC_c^O$$

上式的$\frac{dW}{dq}<0$，这时如果垄断厂商减少产量将会使得总福利增加；



必须指出的是，MC_p 和 MC_c 的位置的确定是十分武断的，其具体位置应由它们的具体函数形式所决定；

此时的垄断利润为绿色矩形面积（有重叠的部分），消费者损失为黄色不规则区域面积（有重叠的部分）；而社会总福利为两者之和，左图显示，垄断厂商的利润最大化的产量 q^O 有可能不是垄断厂商还忽视了其负的外在性的存在，当垄断厂商改变产量时，很有可能会使得整个社会的福利增大；

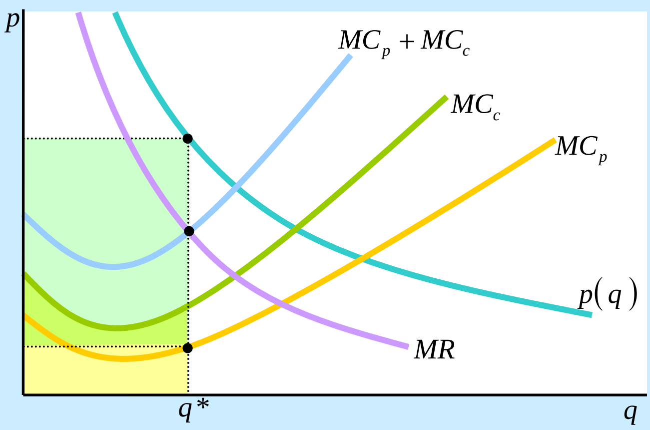
②当垄断厂商以社会总福利为目标时，其最优产量 $q*$ 的确定：

$$W* = p(q*)\cdot q* - C_p(q*) - C_c(q*) \tag{5}$$

而此时的社会总福利的一阶条件为：

$$\left.\frac{dW}{dq}\right|_{q=q*} = MR* - MC_p* - MC_c* = 0$$

这意味着 $MR* = MC_p* + MC_c*$，此时的社会总福利达到最大值；



而此时的垄断利润为绿色矩形面积（有重叠的部分），消费者损失为黄色不规则区域面积（有重叠的部分）；而社会总福利为两者之和；

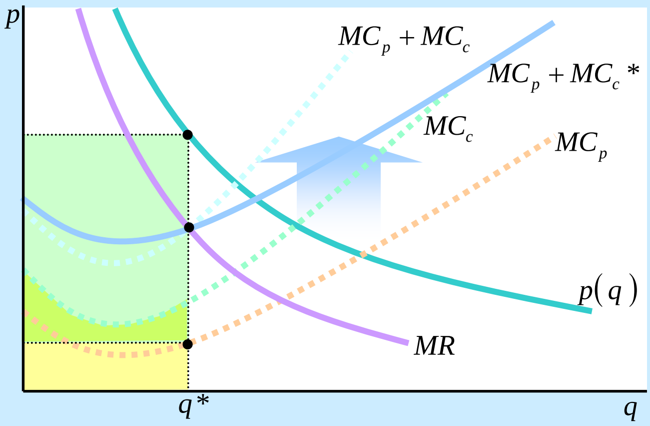
左图显示，垄断厂商以社会总福利最大化的产量 $q*$，会使得社会达到帕累托最优；

由以上垄断厂商的两种生产决策，我们可知，可以通过对垄断厂商进行征税，使得垄断厂商的成本增加，从而可以得到社会的帕累托最优；而其税率为：

$$MR* - MR^O = MC_c*$$

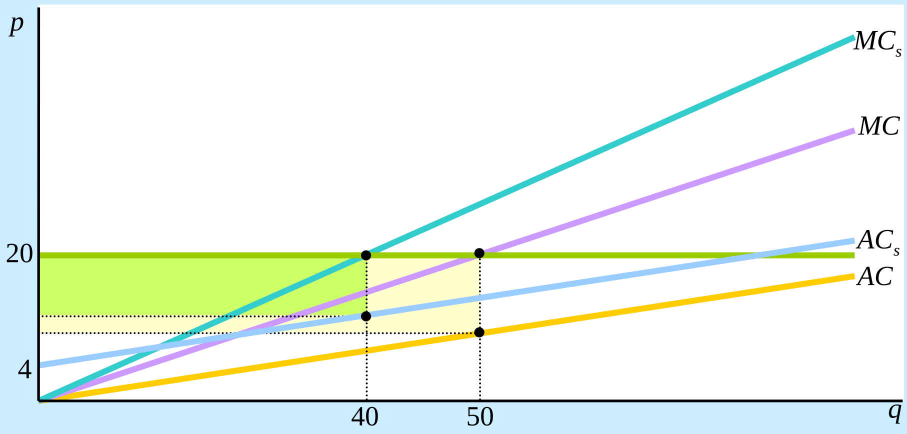
这就如同使垄断厂商的成本曲线向上移动 MC_c* 个单位；从而使得垄断厂商的生产

社会总福利最大化的目标一致；但通过政府的这种干预也不是很必要的，而只要创造有利于市场交易的必要条件使得外部效应内部化，比如明确界定财产所有权；同样可以达到社会总福利最大化的目标；



通过税收或外部效应内部化，同样可以达到社会总福利最大化的目标；

2（3）



（1）在完全竞争市场上，厂商所面临的需求曲线为一条水平线，即 $p = MR$，则这家厂商的最优的产量应选择在 $p = MR = MC$ 的水平上，此时的总成本为 $TC = \int 0.4qdq$，$TC = 0.2q^2$， $AC = 0.2q$，所以：

$$q = 50\;;\quad p = 20\quad;\quad \pi = 500$$

（2）当此厂商具有负的社会外部性时，其最优产量应选择在 $p = MC_s$ 的水平上（其关键在于假定税率为定值），此时，政府应设法把此厂商均衡产量水平（q*）上的边际成本控制在 $MC_s = 0.5q$ 的水平上，所以，其税率应为在均衡产量水平（q*）

会边际成本减去此厂商的生产的边际成本：$t=0.1q*$，对于政府征税后，垄断厂商的总成本应为：

$$TC=\int 0.4qdq+0.1q*\cdot q=(0.2q+0.1q*)\cdot q\text{；}\quad AC_s=(0.2q+0.1q*)$$

（注意，此时的总成本并不等于$TC=\int 0.5qdq=0.25q^2$）

$$q^*=40\text{；}\quad p=20\text{；}\quad t=4\text{；}\quad T=160\text{；}\quad \pi=320$$

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p742）

（磨磨蹭蹭了老半天，害得我差点犯了历史性错误，好险…）

3（1）福利经济学第一定理是说任何的竞争性均衡都是帕累托有效的，但此定理有至少三个暗含的假设条件：

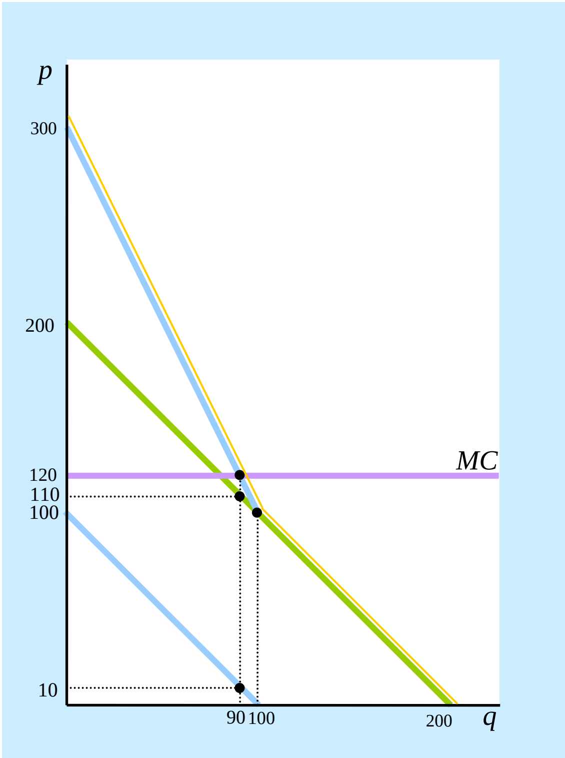
1、消费者只关心本人的商品消费，而不顾他人；既不存在外部效应；

2、每个交易者确实在进行竞争；

3、只有竞争均衡确实存在时，第一定理才有其意义；

由此，我们可看出当存在外部效应时，福利经济学第一定理是不一定成立的。

（2）如果由私人部门来提供公共物品的话，则有可能出现搭便车等的现象，这一点在课本上的 p339-351 的内容。



4（1）当蚊虫控制为纯公共品时，则所两消费者所面临的蚊虫控制数量是一致的，即两个消费者共通出资来购买一定数量的此公共品，而每人对于这一数量的公共品只是所出的资金不同而已；

所以，在图中所表现的总需求曲线是两消费者的需求曲线的垂直相加：

$$p=\begin{cases}300-2q,\ 0\le q<100\\ 200-q\ ,100\le q<200\end{cases}$$

由 $p=MR$ 得：$q^*=90$；$p^*=120$

（3）把之代入各消费者的需求曲线得：

$$p=100-q_a\text{；}\quad p_a=10\text{；}\quad p=200-q_b\text{；}\quad p_b=110$$

政府所提供的最优的蚊虫控制的规模所要的花费为：$q*\cdot p^*=90\times120=10800$；

如果政府的功能是用大伙的钱为大伙办事的话，则两消费者所要付的税额分别为：

$$T_a=p*\cdot q_a=90\times10=900\text{；}\qquad T_b=p*\cdot q_b=90\times110=9900$$

两消费者在总税收所负担为：$T_a:T_b=900:9900=1:11$

（2）当蚊虫控制是由私人来提供时，甲所能提供蚊虫控制的数量的范围为 $0 \le q_a \le 100$，

而乙所能提供的范围为 $0 \le q_b \le 200$，我们先来分析甲；

		乙的额外所获	
		购买	不购买
甲的额外所获	购买	y，　x	$-S$，　$x+h_b$
	不购买	$y+h_a$，　$-S$	0，　0

甲的策略选择有：购买一定数量的蚊虫控制或是不购买；

他的策略选择是根据推测乙的行动得出的，当乙提供的蚊虫控制数量为 y 时，如果甲也提供 x 的话，则甲就会享受 $y+x$ 数量的蚊虫控制，此时，他多余得到了 y 数量的蚊虫控制；如果这时甲选择不购买，他仍会额外的获得 y 数量的蚊虫控制，而且还可以因为占了这点小便宜而使得自己心情愉悦 h_a；我们可看出当乙提供的蚊虫控制时，甲的最优策略为不购买蚊虫控制；

而当乙不购买蚊虫控制时，无论甲怎么选择，他都不会获得额外的蚊虫控制，这时他会想：反正是吃力 $(\sin ew)$ 不讨好，还不如不购买；由此我们也可看出此时甲的最优策略为不购买蚊虫控制；

通过以上分析，我们可得出甲的占优策略为不购买蚊虫控制；我们也可通过类似的分析得出乙的占优策略仍为不购买蚊虫控制。

由此，我们可得出当公共品是由私人部门提供时，其公共品的数量为零。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p743）

（这么简单的题，竟也骚扰了我一天，原来我的基础真的很差……）

5 我们设两种公共品分别为 1、2，私人品为 3；

（1）为了实现资源的有效配置，必须满足：$\sum_{n=1}^{N} MRS_{1,3}^{n} = MRT_{1,3}$；$\sum_{n=1}^{N} MRS_{2,3}^{n} = MRT_{2,3}$

（2）为了在两种公共品之间有效配置资源，则要满足以上两式相比：

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} MRS_{1,3}^{n}}{\sum_{n=1}^{N} MRS_{2,3}^{n}} = \frac{MRT_{1,3}}{MRT_{2,3}}$$

为了证明以上的结论并不是简单的罗列、组合，我们来举个例子：

假定有两个波希米亚人共居一室，他们的效用来自于在他们陋室墙上悬挂的油画（X）的数量、室内的抽象雕塑（Y）与他们自己的小吃（Z）的数量；特定形式的效用函数由下式给出：$U^i = X^{\frac{1}{6}} Y^{\frac{2}{6}} Z_i^{\frac{3}{6}}$（其中 $i=1,2$）；

在本问题中，欣赏油画与抽象雕塑构成了两个公共品，如果我们假定每人要花 1800 美元；$p_X = 100$；$p_Y = 300$；$p_Z = 0.3$；则各自得边际效用替代率为：

$$MRS_{X,Z_i}^{i} = \frac{MU_X^i}{MU_{Z_i}^i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Z_i}{X}; \qquad MRS_{Y,Z_i}^{i} = \frac{MU_Y^i}{MU_{Z_i}^i} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Z_i}{Y}$$

根据萨缪尔逊法则：

$$MRS^1_{X,Z_1}+MRS^2_{X,Z_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{Z_1+Z_2}{X}=\frac{p_X}{p_Z}=\frac{100}{0.3}$$

$$MRS^1_{Y,Z_1}+MRS^2_{Y,Z_2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{Z_1+Z_2}{Y}=\frac{p_Y}{p_Z}=\frac{300}{0.3}$$

由以上两式，我们可得出：$Z_1+Z_2=1000X$；$Z_1+Z_2=1500Y$；再把之代入联合的预算式$100X+300Y+0.3(Z_1+Z_2)=3600$，有：

$$\begin{cases}400X+300Y=3600\\100X+750Y=3600\end{cases}；我们可解得\begin{cases}X=6\\Y=4\\Z_1+Z_2=6000\end{cases}$$

通过以上计算，我们可知当陋室中墙上悬挂上 6 幅油画、室内摆设了 4 个抽象雕塑（假设两人平分公共品的费用）和此时各自消费 3000 小吃，则每人的最终效用为：

$$U^i=X^{\frac{1}{6}}Y^{\frac{2}{6}}Z_i^{\frac{3}{6}}=6^{\frac{1}{6}}4^{\frac{2}{6}}3000^{\frac{3}{6}}$$

而根据我们以上的结论，两公共品的比例为：

$$\frac{MRS^1_{X,Z_1}+MRS^2_{X,Z_2}}{MRS^1_{Y,Z_1}+MRS^2_{Y,Z_2}}=\frac{p_X}{p_Y}=\frac{100}{300}\quad；我们可得出\frac{Y}{X}=\frac{2}{3}$$

这也正是我们通过计算得出的两公共品的比例。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p743）

6（1）当私人品和公共品市场为完全竞争市场时，厂商会根据市场的需求来决定自己的生产品种以及商品种类，这时的厂商会推测消费者的选择：

因为公共品是具有正的外部性，所以对于每个消费者而言，其最优选择是不购买公共品；而把自己的收入全消费在私人品上（这正如我们在第四题的第二问中所分析的一样，这也是所谓的搭便车行为），既然每个消费者都是这样选择，则公共品市场上的需求便为零，厂商就会把自己的全部的资源用于生产私人品；当私人品和公共品市场达到均衡时，社会上的消费者的效用为零。

（2）如果要确定公共品与私人品的最优产量，其意思为在社会的总资源一定时，来达到全社会的总效用最大的问题；而题目中的效用函数与资源限制都以给出，则：

社会的总效用为：　$u(G,P)=100\cdot u(G_i,P)$

$$u(G,P)=100\cdot\sqrt{\frac{G}{100}\cdot P}=10\sqrt{G\cdot P}$$

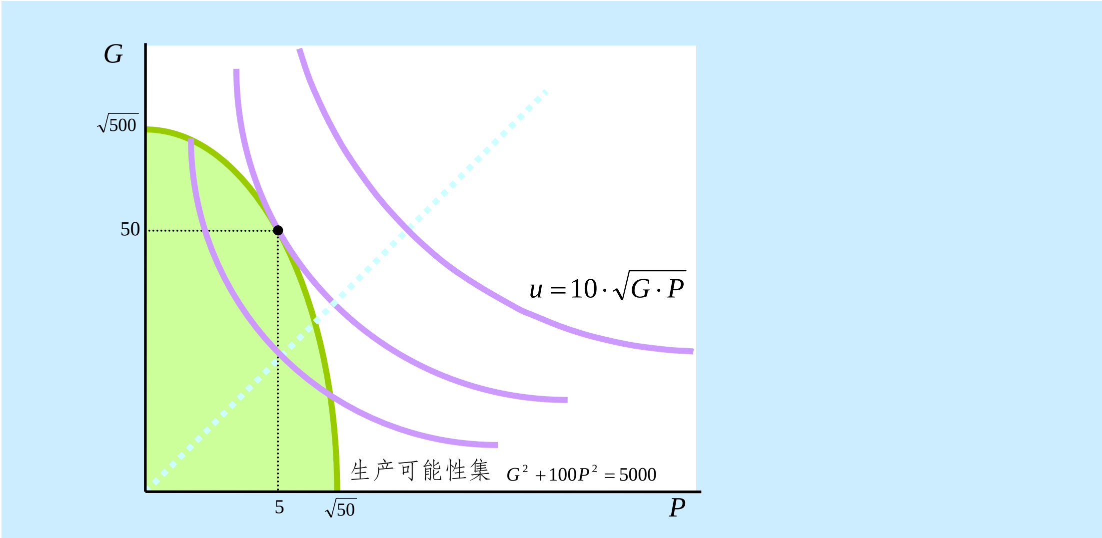
$$\underset{G,P}{Max}\quad u(G,P)$$

$$s\cdot t\cdot\quad G^2+100P^2=5000$$

通过求解拉氏函数，我们可得出：$G^2=100P^2$，则整个社会的最优配置为：G^*

$P^*=5$；每个消费者的效用水平为：$u_i^*=\sqrt{2.5}$ 而社会总效用为 $u^*=100\cdot\sqrt{2.5}$，

为了达到这一目标，政府应向每个消费者征收价值为 $\frac{1}{100}G^*$ 的税；



（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p744）

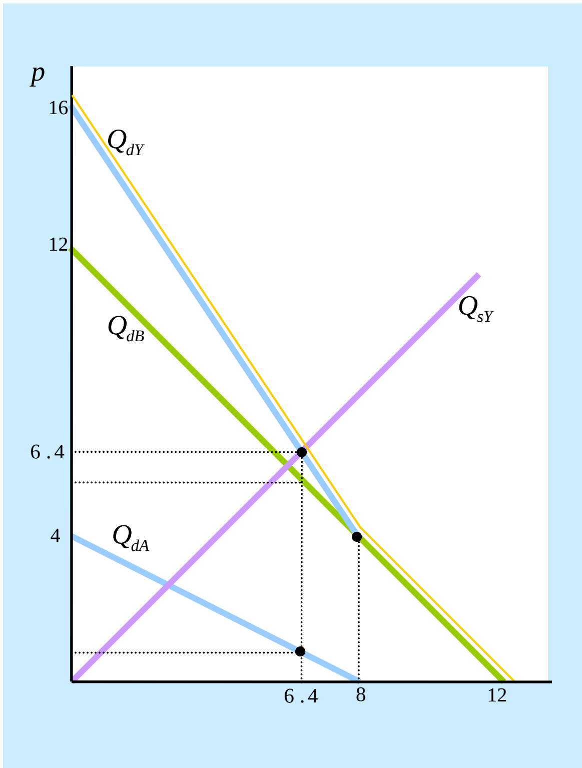
7（1）当 Y 为公共品时，则市场的总需求曲线是各个消费者的需求曲线的垂直加总：

$$p=\begin{cases}16-\frac{3}{2}Q, & 0\le Q<8\\ 12-Q, & 8\le Q<12\end{cases}$$

由 $p=Q$ 得：$Q^*=6.4$；$p^*=6.4$

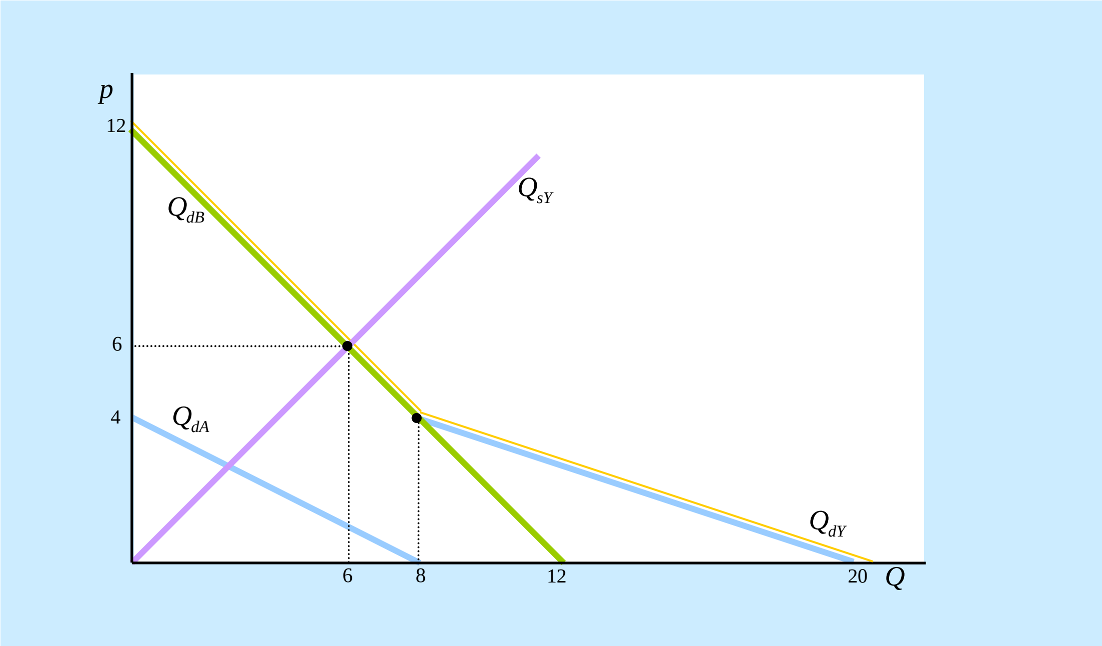
因为 Y 是公共品，所以两消费者对广告品的消费量是一致的，即：

$Q^*=Q_{dA}^*=Q_{dB}^*=6.4$



（2）公共品 Y 的市场价格为：$p^*=6.4$

（3）当 Y 为私人品时，各个消费者所面临的市场价格是一致的（而不是消费量），所以此时的市场总需求曲线为各消费者的需求曲线的水平加总：



由图中，我们可清楚地看到，A 是不会消费 Y 的，而 B 的消费量为 6，市场的均衡价格为 6：

$$Q_{dB}^* = 6;\quad Q_{dA}^* = 0;\quad p^* = 6$$

8（1）因为厂商的目标是追求自身的利润最大化，而环境污染具有负的外部性，对于厂商而言其成本为零，但对于被污染者或整个社会而言则是具有正的成本，所以对于厂商而言没有动力来解决环境污染问题，而对于污染企业与被污染企业之间没有达成外部效应内在化的其中一个解释为其所得小于其支出，这样的话，只有一个以整个社会的福利最大化为目标的机构（即政府等）才能解决此问题；

（2）从经济学的角度来分析：关闭工厂是帕累托无效的（因为它们对中国经济的高速发展有很大的贡献）；而制定排污标准并对超标者罚款，按照污染物排放量收费则是有可能达到社会的帕累托有效；但现实中要实施起来则是要困难得多。

10 为了分析此问题，我们先来回顾一下的概念：

排他性商品：一旦一种商品被生产出来，如果可以相对容易地把个人从商品的受益人群中排除出去，那么，这种商品就是排他性的；如果做不到这一点，或虽可做到，但成本高昂，那么，这种商品就是非排他性的。

非竞争商品：如果一种商品的消费增加，但随之而来的社会边际生产成本为零，那么，它就是非竞争商品。

公共品：一旦被生产出来，没有人能被排除在通过消费获益的范围之外的商品。

（瓦尔特·尼科尔森　微观经济理论　第六版　中国经济出版社　p732-734）

（1）自然环境保护区是非排他的、非竞争的，所以为纯公共品；

（2）道路是非竞争的，但在交通高峰期，由于车辆拥挤，这是排他的，此为准公共品；

（这与十八讲课本上 p353 的内容有所出入，但我坚持自己的观点）

（3）进入索马里以拯救饥荒的难民的商品是排他的、竞争的，所以为私人品；

（注意：私人品不等于私人

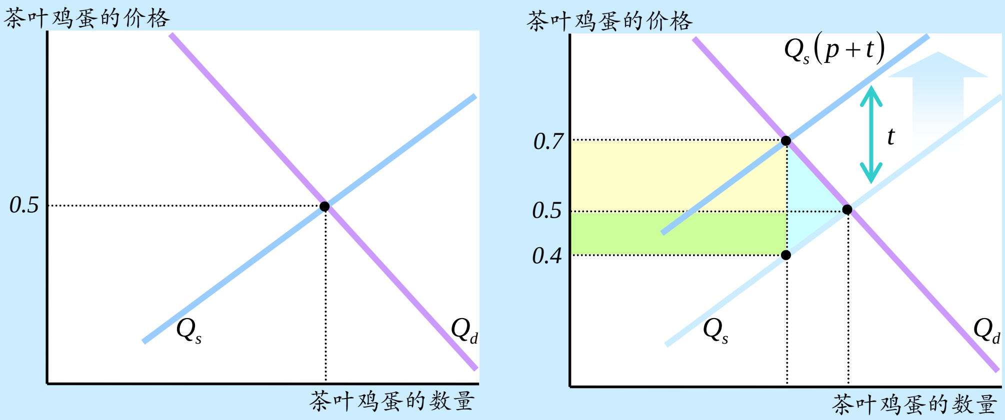
（4）公共电视节目是非排他的（因为我们感觉不到在“高峰期”与“非高峰期”

节目有何区别)、非竞争的，所以为纯公共品；

(5) 闭路电视节目是排他的（因为转播站通过收费的方式很容易的排除了非交费者），但其是非竞争的，此为准公共品。

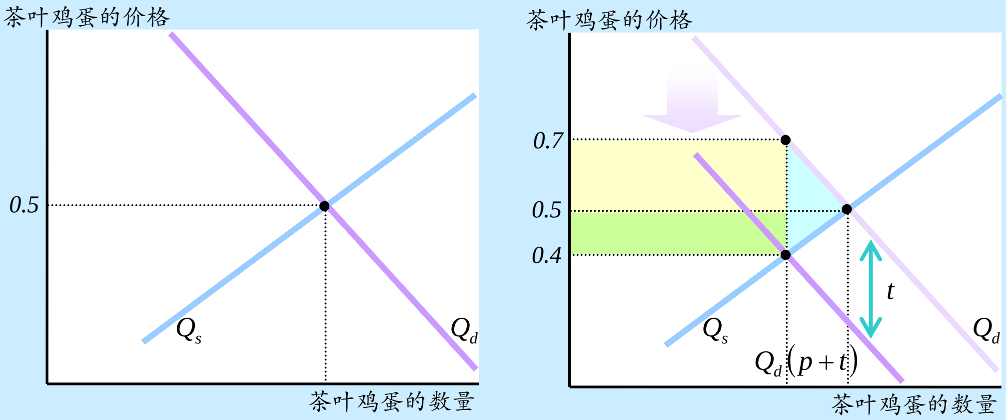
9 在完全竞争市场条件上（比如宿舍楼旁，各个小卖部所卖的茶叶鸡蛋）；在茶叶鸡蛋市场上拥有向上倾斜的供给曲线与向下倾斜的需求曲线，其均衡价格为五毛；而现在，学校的后勤部开始滋事；

(1) 后勤部要求小卖部每生产一个茶叶鸡蛋，就必须缴纳三毛的保护费，这就意味着，每个茶叶鸡蛋的成本上升了三毛（其供给曲线向上移动）；



在左图，是描述茶叶鸡蛋市场原有的供求关系，而在右图，后勤部的这一举动使得供给曲线上移了 0.5 个单位；最后达到均衡时，其均衡数量减少，价格会上升，其黄色区域为消费者所承担的部分（在图中每个鸡蛋，消费者有可能承担二毛），绿色区域为小卖部所承担的份额，蓝色三角区域为损失的部分；

(2) 后勤部有的是闲人，每个小卖部里都蹲着一个“鹰犬”，谁胆敢买茶叶鸡蛋，就必须缴纳三毛的保护费，对于消费者而言，每个茶叶鸡蛋的价格上升了三毛（价格上升，需求减少，其需求曲线向下移动）；



因为，无论是对小卖部还是对卖鸡蛋者收保护费，在图形中实则为供给曲线向上移动或需求曲线向下移动相同的单位，所以，消费者与小卖部所承担的份额是没有变化的；换句话说，消费者与小卖部所承担的份额只是取决于供求曲线的价格弹性；

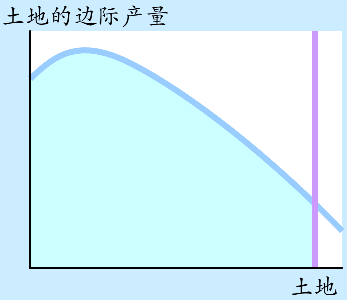
第十八讲

1 关于“分成制”：

分成制是指佃农与地主每一方都按某个固定的百分比来分取其总收成；

我们先假设签订合约的成本为零（即交易成本为零）；H 表示属于某一地主的土地总面积。h 表示某一佃农所承租的土地面积，q 表示产量；

边际产量与地主的所有土地；

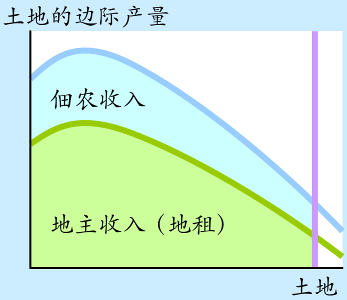


当佃农的数量一定时，土地的边际产量经历了递增、不变与递减的三阶段；

假设地主把土地租给一个佃农家庭，最终由于租给佃农土地数量的增加、佃农无法顾及种植在土地上的所有农作物而使得土地的边际产量递减；而当土地的边际产量为零时，这就意味着土地的数量已达到无穷大，所以地主的土地会在土地的边际产量为零之前的任何一点上；

土地的总收成便为蓝色区域的面积；

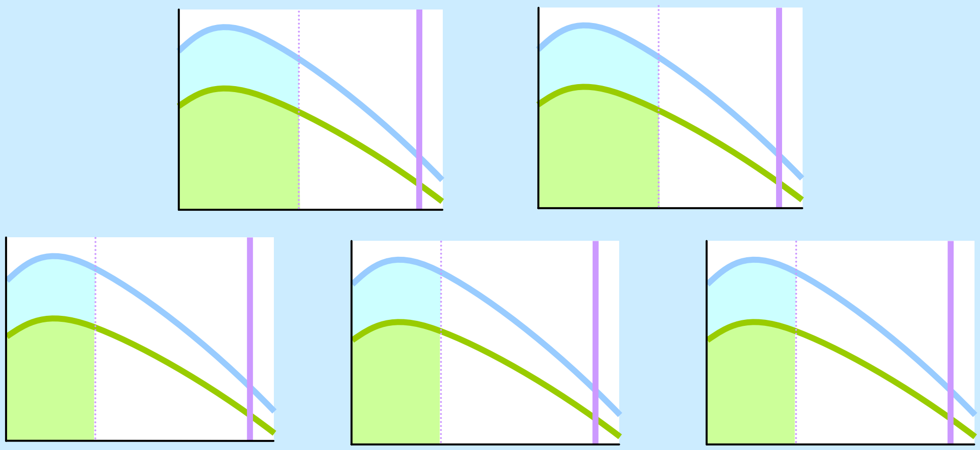
佃农与地主之间的分成；



假设地主征收的地租是年产量的 60%时，地主的边际地租线实际上就是土地的边际产量线在每一土地单位上的 60%；

图中的蓝色区域的收成为佃农所有，而绿色区域的收成则归地主所有；

“狡猾”的地主；



地主可能在想，如果把自己的土地分为两份租给两个佃农家庭的话，他的地租总额会上升吗？

由于土地的边际产量递减，所以我们敢肯定他的地租总额会上升的，既然分为两份会上升，那么地主肯定会继续下去，而从一开始其总额会上升，而土地的份数大于某一数额时，其地租总额就会下降，此时，这一份额就为地主的最优土地分块数；

简单的数学解；

假定 W 是佃农在市场可以获得的工资率；所有的佃农都相等，包括他们所租用的土地 h、所提供的劳动力 t 与生产函数 $q(h,t)$；

假定生产函数为规模报酬不变的技术 $q(\tau\cdot h,\tau\cdot t)=\tau\cdot q(h,t) \quad \tau>0$，对 τ 进行求导：

$$\frac{\partial q}{\partial \tau h}\cdot h+\frac{\partial q}{\partial \tau t}\cdot t=q(h,t)$$

当我们取 $\tau=1$ 时；

$$\frac{\partial q}{\partial h}\cdot h+\frac{\partial q}{\partial t}\cdot t=q(h,t)$$

这也被高手们称之为的欧拉方程；

通过方程，我们可得出 $\frac{\partial q}{\partial h}\cdot h=q(h,t)-\frac{\partial q}{\partial t}\cdot t$（待会儿要派上用场）；

每一佃户所承租的土地量 h 等于地主所拥有的土地总量 H 除以佃农的户数 m，即，$h=H/m$。

则问题简化为：在要保证佃农至少获得市场的工资总额的情况下追求地租最大化；

$$\underset{m,r,t}{Max} \quad R=m\cdot r\cdot q(h,t)$$

$$s\cdot t\cdot \quad W\cdot t=(1-r)\cdot q(h,t)$$

构造拉氏方程：

$$\psi(m,r,t)=m\cdot r\cdot q(h,t)+\lambda[W\cdot t-(1-r)\cdot q(h,t)]$$

一阶条件：

$$\frac{\partial \psi}{\partial m}=r\cdot q+m\cdot r\cdot\frac{\partial q}{\partial h}\cdot\frac{d\left(\frac{H}{m}\right)}{dm}-\lambda\cdot(1-r)\cdot\frac{\partial q}{\partial h}\cdot\frac{d\left(\frac{H}{m}\right)}{dm}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}=m\cdot q+\lambda\cdot q=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=m\cdot r\cdot\frac{\partial q}{\partial t}+\lambda\cdot\left[W-(1-r)\cdot\frac{\partial q}{\partial t}\right]=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}=W_t-(1-r)\cdot q=0 \qquad (4)$$

由（2）式，我们可得出：$m=-\lambda$ 并代入（1）式；

由（1）式，我们可得出：

$$r\cdot q+m\cdot r\cdot\frac{\partial q}{\partial h}\cdot\left(-\frac{H}{m^2}\right)+m\cdot(1-r)\cdot\frac{\partial q}{\partial h}\cdot\left(-\frac{H}{m^2}\right)=0$$

由于式中的 $h=\frac{H}{m}$，所以上式变为：

$$r \cdot q - \frac{\partial q}{\partial h} \cdot h = 0 \text{ 或 } r \cdot \frac{q}{h} = \frac{\partial q}{\partial h}$$

这表明在均衡条件下，每单位的地租应等于其土地的边际产量；

由（3）式，我们可得出： $W = \dfrac{\partial q}{\partial t}$；

最后，我们把欧拉方程 $\dfrac{\partial q}{\partial h} \cdot h = q(h,t) - \dfrac{\partial q}{\partial t} \cdot t$、$\dfrac{\partial q}{\partial t} \cdot t = W \cdot t$ 代入 $r \cdot \dfrac{q}{h} = \dfrac{\partial q}{\partial h}$，就会得出均衡时的分成率；

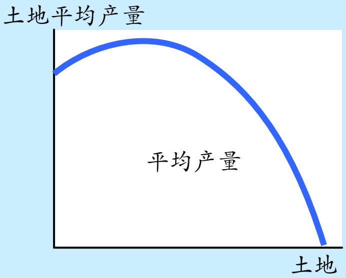
$$r = \frac{\partial q / \partial h}{q/h} = \frac{q - W \cdot t}{q}$$

结论：在均衡时，必须满足 $W^* = \dfrac{\partial q}{\partial t}$、$r^* = \dfrac{\partial q / \partial h}{q/h} = \dfrac{q - W \cdot t}{q}$ 这两个条件；换言之，在均衡状态下，土地的产出弹性等于总产量减去租佃的净成本（地租）除以总产量；

几何解

我们集中精力讨论只有一个佃农的情况；

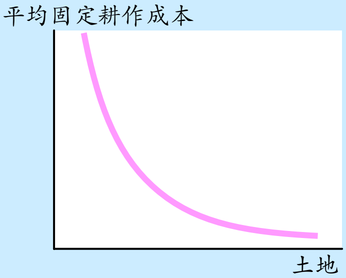
土地的平均产量；



从一开始，随着地主分割给佃农的土地 h 增大，其土地的边际产量大于其平均产量，所以土地的平均产量会上升，而最终，会由于土地的边际产量递减会使得其平均产量下降；

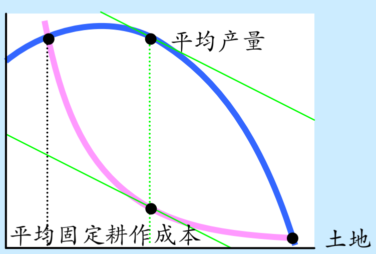
最终的土地边际产量递减会造就土地平均产量的图中的形状；

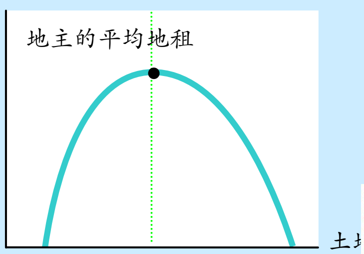
佃农的平均固定耕作成本



我们暂且假设，所有非土地的耕作投入 f 都由佃农来承担且其数值保持不变，曲线 f/h 是除土地之外的总成本除以各佃户的土地面积；总成本包括生产作业期间使用的劳力、种子、肥料和农具等成本；

地主的最优选择

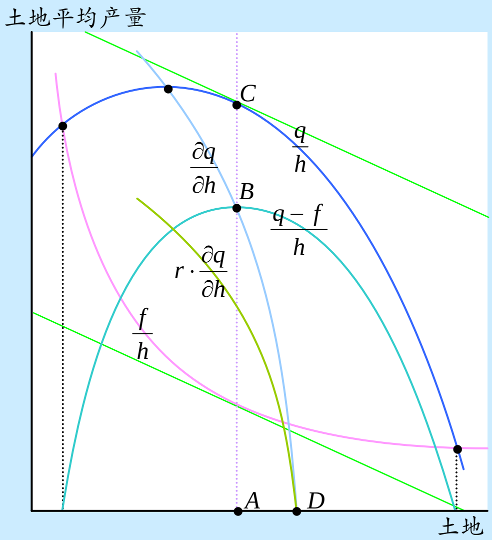




因为贪婪的地主会尽大可能榨取佃农，所以，我们大可认为图中的平均固定耕作成本便为佃农的平均总收入；

通过两曲线的垂直相减，我们可得出在不同的分割土地决策时，地主所获得的平均地租，而他会选择其最大值为他的最优解（我们上下移动其中的一条曲线，使得两曲线相切，从而得出最大值）；

我们把所有的都放在一起



当均衡时，其最优的地租与佃农边际产量的比率为图中的 AB 线段与 AC 线段之比；

再看佃农的平均耕作成本，图中意味着佃农耕作的边际成本为零（想一想成本曲线），就佃农本身而言，他更希望在 D 点进行耕作（因为边际成本等于边际产量 $r\cdot\frac{\partial q}{\partial h}$ 处，他会获得收入最大化），而地主也无法以均衡时的地租比例用于更小的土地规模上，因为这样会使得佃农在别处有可能获得更高的收入；

数学解与几何解冲突吗?

数学解为：
$$r^{*}=\frac{\partial q/\partial h}{q/h}=\frac{q-W\cdot t}{q};$$

而几何解为：图中的 AB 线段与 AC 线段之比，即
$$r^{*}=\frac{AB}{AC}=\frac{(q-f)/h}{q/h}=\frac{q-f}{q}$$

而事实上，$f=W\cdot t$，即 f 为生产要素的总成本，而在数学推导中我们也只是假设佃农只有一种生产投入；所以两个解是一致的；

定额地租、分成合约与劳动租之间有什么差别?

两者的区别在于：为了达到相同的目标而采取的不同资源配置方式；

定额地租是为了达到地主的最大地租的目标，规定好每单位土地的地租；由佃农决定其耕作的土地数量；

分成合约也是为了达到地主的最大地租的目标，以地主提供土地、佃农提供土地之外的所有其他生产要素，相互协商在新增的产量中的各自所得比例；

劳动租事实上也是分成合约，而两者的区别在于 “数内”分成与“数外”分成；

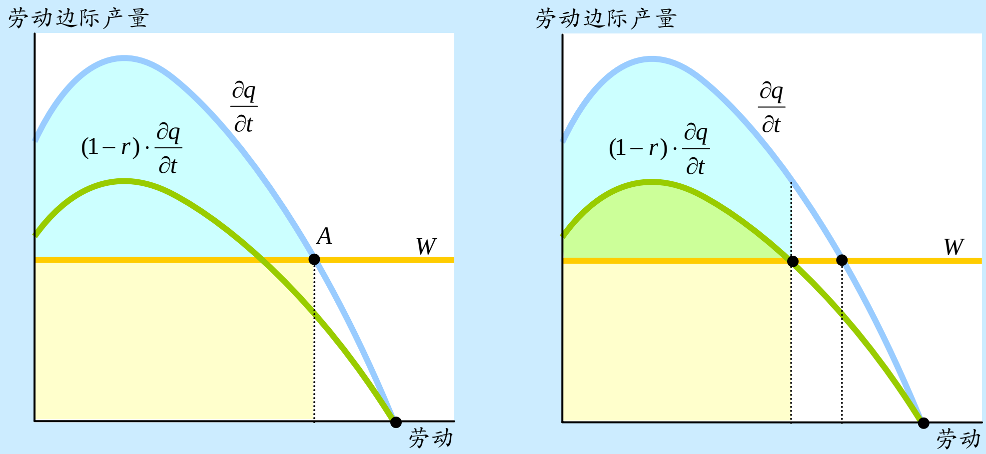
但，无论是以哪一种形式，在地主的土地市场与劳动市场都达到均衡时，同样的佃农最终只会得到其均衡边际产量的报酬（如果不等的话，低报酬的佃农将会竞争掉高 佃农），而另一方面土地市场的每一单位的土地将会获得同样的地租（如果不等的

地租的土地将会竞争掉高地租的土地)；

以上的几种形式，对决策的约束条件是相同的（佃农必须要获得至少等于均衡时劳动力市场上的工资率），因此，这也就意味着资源使用的效率是相同的。

（张五常 佃农理论 商务印书馆 第二章）

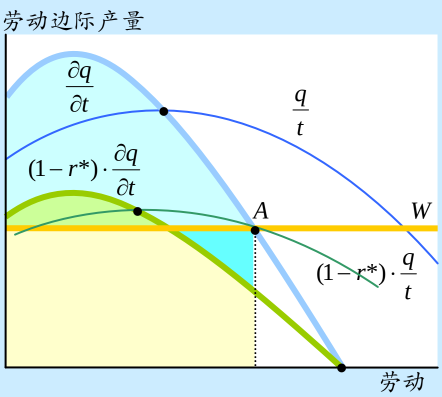
新古典经济学的错误观点



当地主实行定额地租时，佃农所得的工资总额为黄色区域；地主的地租总额为蓝色半凸区域；此时，无论地主是完全自己耕作还是完全给佃农耕作，或者两者结合，其结果都是会得到蓝色半凸区域的地租总额，这一地租额等于定额租约条件下的地租额；

而当地主实行分成合约时，佃农的工资总额为绿色半凸区域加上绿色矩形区域，而地主的地租总额为蓝色双凸区域，因为此时的佃农工资总额超过了他从事其他的经济活动的所得；在“均衡”时，佃农的边际产出大于其边际成本，因此，分成租佃制是无效率的（绿色半凸区域的面积是经济上的浪费）；

对错误观点的修正



图中的劳动边际产量曲线会经过其平均产量曲线的最高点（想一想产量曲线），地主会不断地改变其地租比例，使得$(1-r^*)\cdot\frac{q}{t}$曲线经过W与$\frac{q}{t}$曲线的交点A，这时，佃农所得收入就会等于他从事其他经济活动所得；既点A为均衡点；

换句话说，地主调整地租比例以达到绿色上凸区域面积等于明兰色三角形区域面积，在点A均衡点，地主的地租总额为蓝色双凸区域加上明兰色三角形区域的面积，而佃农的工资总额等于黄色与明兰色的矩形面积（或者绿色上凸区域加黄色缺角矩形区域面积）；

（张五常 佃农理论 商务印书馆 第三章）

而事实上，当以上的每项契约的达成都是需要交易成本的，比如商定和执行合约条款的费用、对条款中的数值标准的测定、以及双方在商定之前收集信息所需要的费用、在合约中的产权的全部或者是部分转让、以及在生产中各种投入要素的相互协调所要的成本等等；

定额租约与工资合约的交易成本的分类似乎是不确定的；土地的物理特性是较为确定的，因此，实施合约规定的投入量的费用要低于实施劳动投入量的费用；也就是说，在既不实施投入也不核查产出的工资合约（以及分成合约）中，可能存在劳动投入的“卸责（*shirking*）”行为，而要防止这种的卸责行为是要花成本的；

在定额租约之下，佃农要承担这种风险的大部分（如果不是全部的话）；在工资合约之下，地主要承担这种风险的大部分（如果不是全部的话）；因此，可以把分成合约看作是一种分担风险（或分散风险）的手段；

由于交易成本、风险的存在（虽然这不是经济因素，但它却是影响契约类型的主要因素）以及有关的法律制度的条文及其实施方式都会影响契约类型；

（张五常 佃农理论 商务印书馆 第四章）

2

关于 *Williamson* 的等级控制与厂商规模模型：

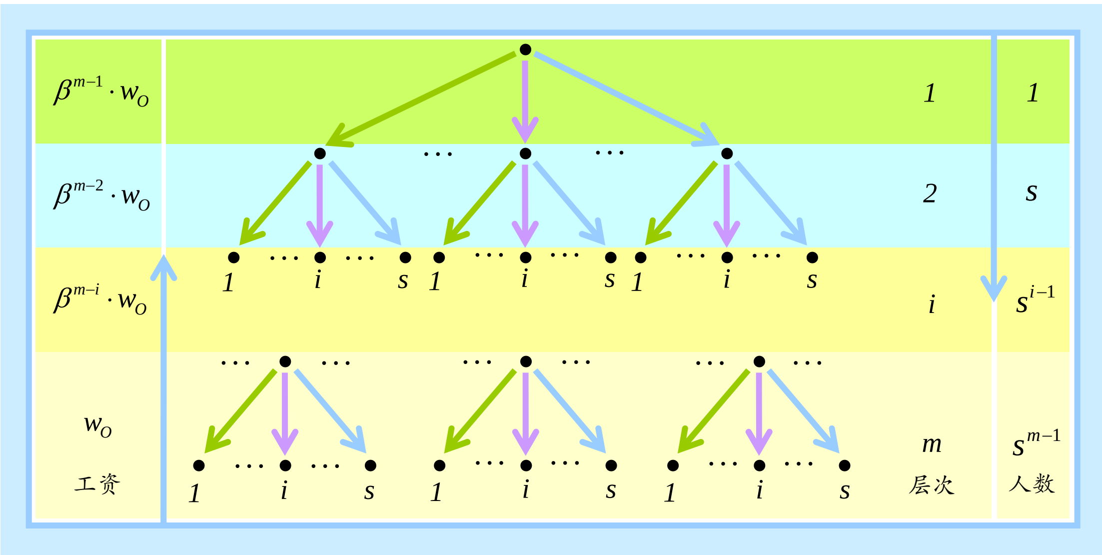
基本假定：

（1）为“价格接受者”；

（2）目标为利润最大化；

（3）典型企业有 m 个管理层；每个管理者管理 s 个不同的部下；则最底层的第一线工人人数为 s^{m-1}；

（4）第一线工人的工资水平为 w_O，则每一层工资水平用最低层的工资表示为 $\beta^{m-i} \cdot w_O$；其中（$\beta > 1$； $1 \le i \le m$）；



（5）“失控”参数为 α（$0 \le \alpha \le 1$），每一项指令的传达，下一级的行使事实上只有其中的 α 部分；

（6）除劳动—工资成本之外，每单位产量的平均成本为 γ；

2、生产函数为：$Q = \theta \cdot (\alpha \cdot s)^{m-1}$

3、生产总成本为企业所有员工（人数×每人工资）的工资与每单位产量的平均成本

$$C(Q)=\sum_{i=1}^{m} s^{i-1}\cdot(\beta^{m-i}w_O)+\gamma\cdot Q$$

$$C(Q)=w_O\cdot\sum_{i=1}^{m} s^{i-1}\cdot\beta^{m-i}+\gamma\cdot Q$$

我们把它变形为： $$C(Q)=w_O\cdot\frac{s^m-\beta^m}{s-\beta}+\gamma\cdot Q$$

进一步提问：关于变形？
首先让我们回想一下有关的公式：

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)\ ;\qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b^2+a^{m-3}b^3+\cdots+a^3b^{m-3}+a^2b^{m-2}+b^{m-1})$$

$$a^m-b^m=(a-b)\cdot\sum_{i=1}^{m}a^{m-i}b^{i-1}$$

于是，我们可得到： $$\sum_{i=1}^{m}a^{m-i}b^{i-1}=\frac{a^m-b^m}{a-b}=\frac{b^m-a^m}{b-a}$$

4、利润函数： $$\pi=p\cdot Q-w_O\cdot\frac{s^m-\beta^m}{s-\beta}-\gamma\cdot Q\ ,$$

$$\pi=(p-\gamma)\cdot Q-w_O\cdot\frac{s^m-\beta^m}{s-\beta}$$

$$\pi=(p-\gamma)\cdot\theta\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}-w_O\cdot\frac{s^m-\beta^m}{s-\beta}$$

5、最优等级**m***的确定：
把利润函数对**m** 求导得：

$$\frac{d\pi}{dm}=(p-\gamma)\cdot\theta\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-w_O\cdot\frac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}=0$$

$$\frac{d^2\pi}{dm^2}=(p-\gamma)\cdot\theta\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot[\ln(\alpha\cdot s)]^2-w_O\cdot\frac{s^m\cdot[\ln s]^2-\beta^m\cdot[\ln\beta]^2}{s-\beta}<0$$

从一阶条件，我们可得出：

$$(p-\gamma)\cdot\theta\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-w_O\cdot\frac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}=0$$

$$\frac{(p-\gamma)\cdot\theta}{w_O}\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-\frac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}=0$$

当我们令 $Z=\dfrac{(p-\gamma)\cdot\theta}{w_O}$，则一阶条件变为：

$$Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-\frac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}=0$$

关于 $Z=\dfrac{(p-\gamma)\cdot\theta}{w_O}$，$Z$ 是衡量第一线工人的劳动贡献与工资成本的比率；

2 题目的思路很有可能源于书上 p384 的表格中的部分数据；

设 $F(Z,m,\alpha,\beta,s)=Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-\dfrac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}$；（$\ln(\alpha\cdot s)>0$）

则：$\dfrac{\partial m}{\partial Z}=-\dfrac{F_Z'}{F_m'}$； $\dfrac{\partial m}{\partial\alpha}=-\dfrac{F_\alpha'}{F_m'}$； $\dfrac{\partial m}{\partial\beta}=-\dfrac{F_\beta'}{F_m'}$； $\dfrac{\partial m}{\partial s}=-\dfrac{F_s'}{F_m'}$

（1）由于 $\dfrac{\partial m}{\partial Z}=-\dfrac{F_Z'}{F_m'}$，则：

$$\frac{\partial m}{\partial Z}=-\frac{F_Z'}{F_m'}=-\frac{(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)}{Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-2}\cdot[\ln(\alpha\cdot s)]^2-\dfrac{s^m\cdot[\ln s]^2-\beta^m[\ln\beta]^2}{s-\beta}}$$

又上式的楼下正好是利润函数的二阶条件，我们可表示为（*Second Of Condition*）：

$$s\cdot o\cdot c=\frac{d^2\pi}{dm^2}=Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot[\ln(\alpha\cdot s)]^2-\frac{s^m\cdot[\ln s]^2-\beta^m\cdot[\ln\beta]^2}{s-\beta}<0$$

$$\frac{\partial m}{\partial Z}=-\frac{F_Z'}{F_m'}=-\frac{(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)}{s\cdot o\cdot c}$$

楼上为 $(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)>0$，所以 $\dfrac{\partial m}{\partial Z}=-\dfrac{(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)}{s\cdot o\cdot c}<0$，同理：

$$\frac{\partial m}{\partial\alpha}=-\frac{F_\alpha'}{F_m'}=-\frac{Z\cdot(m-1)\cdot\alpha^{m-2}\cdot s^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)+Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\dfrac{s}{\alpha\cdot s}}{s\cdot o\cdot c}$$

$$\frac{\partial m}{\partial\alpha}=-\frac{Z\cdot\alpha^{m-2}\cdot s^{m-1}\cdot[(m-1)\ln(\alpha\cdot s)+1]}{s\cdot o\cdot c}$$

楼上为 $Z\cdot\alpha^{m-2}\cdot s^{m-1}\cdot[(m-1)\ln(\alpha\cdot s)+1]>0$（$\ln(\alpha\cdot s)>-\dfrac{1}{m-1}$），所以

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha}=-\frac{Z\cdot\alpha^{m-2}\cdot s^{m-1}\cdot[(m-1)\ln(\alpha\cdot s)+1]}{s\cdot o\cdot c}>0$$

（2）因为 $F(Z,m,\alpha,\beta,s)=Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-\dfrac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}$

因为 $1<\beta<e<s$（其中 $e\approx 2.7182818$），所以 $0<\ln\beta<1<\ln s$；

先看上式的最后一项，我们设 $\psi(x)=x^m\cdot\ln x$，因为在 $[\beta,s]$ 上，函数连续，而且在 (β,s) 内可导，通过利用拉格朗日中值定律，在 (β,s) 内至少存在一个 ξ，使得：

$$\frac{\psi(s)-\psi(\beta)}{s-\beta}=\psi'(\xi)$$

我们可得到： $$\frac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}=m\cdot\xi^{m-1}\cdot\ln\xi+\xi^{m-1}$$

则原式等于： $$F=Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-(m\cdot\ln\xi+1)\xi^{m-1}$$

为了方便我们证明，我们把上式写为：（$\dfrac{\beta}{s}<\varphi<1$）

$$F=Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-[m\cdot\ln(\varphi\cdot s)+1](\varphi\cdot s)^{m-1}$$

$$F=Z\cdot\alpha^{m-1}\cdot s^{m-1}\cdot\ln\alpha+Z\cdot\alpha^{m-1}\cdot s^{m-1}\cdot\ln s$$
$$-m\cdot\varphi^{m-1}\cdot\ln\varphi\cdot s^{m-1}-m\cdot\varphi^{m-1}\cdot s^{m-1}\cdot\ln s-\varphi^{m-1}\cdot s^{m-1}$$

设： $A=Z\cdot\alpha^{m-1}\cdot\ln\alpha$

$B=Z\cdot\alpha^{m-1}$

$C=m\cdot\varphi^{m-1}\cdot\ln\varphi$

$D=m\cdot\varphi^{m-1}$

$E=\varphi^{m-1}$，则原式变为：

$$F=A\cdot s^{m-1}+B\cdot s^{m-1}\cdot\ln s-C\cdot s^{m-1}-D\cdot s^{m-1}\cdot\ln s-E\cdot s^{m-1}$$

$$F=(A-C-E)\cdot s^{m-1}+(B-D)\cdot s^{m-1}\cdot\ln s$$

又当企业处于均衡时，$F=0$，而事实上，我们是在讨论均衡时所发生的故事；

$$\psi=(A-C-E)+(B-D)\cdot\ln s$$

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{(B-D')}{s}$$

在求导后，φ , C, D, E 的值是有可能改变，φ' , C' , D' , E' 所以用来表示；

对于 B, D 的比较，我利用了 p384 中的表格，把不同的 m , s , α 取值以及 $\beta=1.3$ 代入 $\frac{d\psi}{ds}=\frac{(B-D')}{s}$ 进行比较，并且对 φ , φ' 进行了估计，得出 $B-D'>0$ 的结论是绰绰有余的（也许，这也是书上所说的试数法）；进而得出 $\frac{\partial m}{\partial s}>0$ ；

因为 $F(Z,m,\alpha,\beta,s)=Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-\frac{s^m\cdot\ln s-\beta^m\cdot\ln\beta}{s-\beta}$

$$F=Z\cdot(\alpha\cdot s)^{m-1}\cdot\ln(\alpha\cdot s)-(m\cdot\ln\xi+1)\xi^{m-1}$$

当后一项 β 的值增大会使得 ξ 增大；既 β 的变化可以通过 ξ 的变化来表示；

$$\frac{\partial F}{\partial\xi}=-[m+(m\cdot\ln\xi+1)(m-1)]\xi^{m-2}$$

因为 $\beta>1$，所以 $\xi>1$，即 $\frac{\partial F}{\partial\xi}<0$，进而 $\frac{\partial F}{\partial\beta}<0$ ；

由此，我们可断定 $\frac{\partial m}{\partial\beta}<0$ ；

（3） $\frac{\partial m}{\partial Z}>0$ 是指当企业处于均衡时，当第一线工人的劳动贡献与工资成本的比率提高时，企业的管理层也要相应的增加；

$\frac{\partial m}{\partial\alpha}>0$ 是指当企业处于均衡时，随着失控参数的上升（即当能够更好的传达与行使指令时），企业的管理层也要相应的增加；

$\frac{\partial m}{\partial s}>0$ 是指当企业处于均衡时，随着下层人员的人数增加，则企业的管理层也要相应的增加；

$\frac{\partial m}{\partial\beta}<0$ 是指当企业处于均衡时，当个层次的工资差距加大时，企业的管理层也要相应的减少；