ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2025, № 2, с. 3–7

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6 + 517.55

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ОБЩЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

© 2025 г. А. П. Ляпин, Е. Н. Михалкин
Сибирский федеральный университет
660041 Красноярск, пр. Свободный, д. 79
E-mail: aplyapin@sfu-kras.ru, mikhalkin@bk.ru

Поступила в редакцию 28.06.2023

В данной работе предложен алгоритм вычисления параметризации Горна-Капранова A-дискриминантного множества и особых точек алгебраической гиперповерхности с использованием системы компьютерной алгебры Maple.

1. ВВЕДЕНИЕ, ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методы компьютерной алгебры показали свою эффективность в исследовании алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений и их систем (см., например, [1] – [7]). В данной работе предложен алгоритм вычисления параметризации Горна-Капранова A-дискриминантного множества [8, 9] и особых точек алгебраической гиперповерхности [10] с использованием системы компьютерной алгебры Maple.

Отметим, что в статье [11] были получены формулы для кратных корней уравнения от одной неизвестной в виде элементарных функций. Система из n алгебраических уравнений от n неизвестных, у которой в каждом уравнении фиксированы показатели мономов, а все коэффициенты являются переменными, рассмотрена в [12], где исследуется дискриминантное множество системы – замыкание совокупности всех коэффициентов, при которых система имеет кратные корни с ненулевыми координатами. В [13] рассмотрено понятие аналитической сложности, данное в [14], и предлагается алгоритм проверки принадлежности аналитической функции двух комплексных переменных второму классу аналитической сложности. В [15] исследовано пространство решений системы Меллина, построен базис в этом пространстве и доказана приводимость монодромии системы Меллина. При этом решения данной системы находится конструктивно, в замкнутой форме. Довольно подробное объяснение результатов, полученных в работах Меллина, приводится в [16].

Рассмотрим уравнение от k неизвестных $y = (y_1, \ldots, y_k)$:

$$F(y) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in A} a_\alpha y_1^{\alpha_1} \ldots y_k^{\alpha_k} = 0 \qquad (1.1)$$

с переменными коэффициентами $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Здесь $A \subset \mathbb{Z}^k$ – конечное подмножество, порождающее $\mathbb{Z}^k$ как группу. Критические точки рассматриваемого уравнения определяются формулами

$$F(y) = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0.$$

Отметим, что вместо уравнения (1.1) достаточно рассматривать приведенное уравнение

$$f(y) = 1 + \sum_{i=1}^{k} y_1^{\alpha_{i1}} \ldots y_k^{\alpha_{ik}} + \\ + \sum_{i=1}^{m} w_i y_1^{\alpha_{k+i,1}} \ldots y_k^{\alpha_{k+i,k}} = 0. \qquad (1.2)$$

В статье [10] была получена формула для особых точек гиперповерхности (1.2), т.е. таких точек $y = y(a_\alpha)$, в которых выполняются равенства

$$f(y) = \frac{\partial f(y)}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial f(y)}{\partial y_k} = 0. \qquad (1.3)$$

В данной статье приводится алгоритм нахождения особых точек уравнения (1.2).

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГОРНА-КАПРАНОВА ПРИВЕДЕННОГО A-ДИСКРИМИНАНТНОГО МНОЖЕСТВА И ЕГО ОСОБЫХ ТОЧЕК

В этом параграфе приводится основной результат, на основе которого разработан алгоритм нахождения A-дискриминантного множества многочлена (1.2) и его особых точек.

Приведем некоторые определения из теории A-дискриминантных множеств.

Определение 1 ([8]). *Пусть ∇° – множество всех $a_\alpha \in \mathbb{C}^A$, для которых уравнение (1.1) имеет критические корни $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$, т.е. корни, в которых градиент f равен нулю. Замыкание $\overline{\nabla^\circ}$ называется A-дискриминантным множеством и обозначается ∇_A. Если множество ∇_A есть гиперповерхность (т.е.* $\mathrm{codim}\nabla_A = 1$*), то определяющий многочлен называется A-дискриминантом.*

В статье [10] было доказано, что с помощью векторов $b_0, b_1, \ldots, b_k$ определяется A-дискриминантное множество приведенного уравнения (1.2). Для того, чтобы ввести эти векторы, рассмотрим матрицы

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix},$$

$$\overline{\Delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{k+m,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{k+m,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \ldots & \alpha_{k+m,k} \end{pmatrix},$$

причем матрица Δ является невырожденной. Через $\delta_\nu^j, \nu = 1, \ldots, k, j = k+1, \ldots, k+m$, обозначим минор, полученный из Δ, заменой ν-ого столбца на столбец $(\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jk})^T$ матрицы $\overline{\Delta}$. Тогда векторы $b_0, \ldots, b_k$ примут следующий вид:

$$b_0 = \left(-1 + \frac{1}{|\Delta|}\sum_{j=1}^{k}\left|\delta_j^{k+1}\right|, -1 + \frac{1}{|\Delta|}\sum_{j=1}^{k}\left|\delta_j^{k+2}\right|, \right. \tag{2.1}$$

$$\left. \ldots, -1 + \frac{1}{|\Delta|}\sum_{j=1}^{k}\left|\delta_j^{k+m}\right|\right), \tag{2.2}$$

$$b_1 = \left(-\frac{\left|\delta_1^{k+1}\right|}{|\Delta|}, -\frac{\left|\delta_1^{k+2}\right|}{|\Delta|}, \ldots, -\frac{\left|\delta_1^{k+m}\right|}{|\Delta|}\right), \tag{2.3}$$

$$\ldots, \tag{2.4}$$

$$b_k = \left(-\frac{\left|\delta_k^{k+1}\right|}{|\Delta|}, -\frac{\left|\delta_k^{k+2}\right|}{|\Delta|}, \ldots, -\frac{\left|\delta_k^{k+m}\right|}{|\Delta|}\right), \tag{2.5}$$

где $|\Delta|$ – определитель матрицы Δ.

Пусть $s = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{C}^m$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, тогда параметризация A-дискриминантного множества следующая:

$$w_i = s_i \langle b_0, s\rangle^{-1 + \frac{1}{|\Delta|}\sum\limits_{j=1}^{k}|\delta_j^{k+i}|} \times \langle b_1, s\rangle^{-\frac{|\delta_1^{k+i}|}{|\Delta|}} \times \ldots \times \langle b_k, s\rangle^{-\frac{|\delta_k^{k+i}|}{|\Delta|}},$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$.

В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 ([10]). *Вектор-функция*

$$y(s) = (y_1(s), \ldots y_k(s))$$

с координатами

$$y_j(s) = \prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{\langle b_\nu, s\rangle}{\langle b_0, s\rangle}\right)^{\chi_{j\nu}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

где $\chi_{j\nu}$ – (j,ν)-ый элемент обратной матрицы Δ^{-1}, удовлетворяет системе уравнений

$$f(y) = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0,$$

т.е. параметризует набор особых точек гиперповерхности $f(y) = 0$.

3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Входными данными для алгоритма являются матрицы

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1,1} & \alpha_{k+2,1} & \dots & \alpha_{k+m,1} \\ \alpha_{k+1,2} & \alpha_{k+2,2} & \dots & \alpha_{k+m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k+1,k} & \alpha_{k+2,k} & \dots & \alpha_{k+m,k} \end{pmatrix},$$

задающие многочлен (1.2).

Результатом работы алгоритма является параметризация A-дискриминантного множества

$$w_1 = w_1(s_1, \dots, s_m), \dots, w_m = w_1(s_1, \dots, s_m),$$

и формулы для особых точек гиперповерхности

$$y_1 = y_1(s_1, \dots, s_m), \dots, y_k = y_k(s_1, \dots, s_m).$$

Алгоритм состоит из трех процедур: `DeltaIJ`, `ANH` и `MAIN`.

Алгоритм был реализован в среде Maple 2024. Полный код программы и псевдокод доступны по ссылке https://github.com/lyapinap/LM2024. Вычисления производились на машине 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1240P, 1.70 GHz, 64bit, ОЗУ 16.00 Гб под управлением Windows 11 (version 23H2).

Процедура `DeltaIJ`

Процедура `DeltaIJ` принимает на вход две матрицы A и B, а также два индекса i и j. Она выполняет следующие шаги:

1. Создает копию матрицы A, обозначенную как $A1$.
2. Для каждой строки t в матрице $A1$ заменяет элемент в столбце i на элемент в столбце j матрицы B.
3. Вычисляет определитель матрицы $A1$ и возвращает его.

Процедура `ANH`

Процедура `ANH` принимает на вход две матрицы: Δ и L. Она выполняет следующие шаги:

1. Определяет размеры матриц Δ и L: число столбцов в Δ (k), число столбцов в L (m), число строк в Δ ($m1$) и число строк в L ($m2$).
2. Проверяет соответствие размеров: если $k \neq m1$ или $m1 \neq m2$, выводит сообщение об ошибке.
3. Проверяет, равен ли определитель матрицы Δ нулю. Если да, выводит сообщение об ошибке.
4. Создает новую матрицу A путем объединения матриц Δ и L, в которым слева добавляется столбец из нулей, а к полученной матрице сверху добавляется строка из единиц.
5. Создает аннулятор B размером $(k+1) \times m$ по формулам (2.1).
6. Создает копию матрицы B под названием $B1$ и объединяет B с единичной матрицей размера m.
7. Выводит окончательную матрицу B и возвращает $B1$.

Процедура `MAIN`

Процедура `MAIN` принимает на вход две матрицы: Δ и L. Она выполняет следующие шаги:

1. Инициализирует функцию f значением 1.
2. Обновляет f с учетом степенных произведений элементов матрицы Δ и векторов y:
   - Для каждого столбца i в Δ вычисляет term как произведение степеней элементов матрицы Δ, затем добавляет его к f.
3. Обновляет f с учетом степенных произведений элементов матрицы L и векторов y:
   - Для каждого столбца i в L вычисляет term как произведение степеней элементов матрицы L, затем добавляет его к f.
4. Выводит значение функции f.
5. Вызывает процедуру `ANH` для матриц Δ и L и сохраняет результат в матрице B.

6. Выводит матрицу B.
7. Проводит параметризацию множества А-дискриминантов:
   - Для каждого столбца i в B вычисляет элементы вектора w как произведение степеней и элементов матрицы B.
8. Выводит результаты параметризации.
9. Вычисляет и выводит особые точки гиперповерхности $f = 0$:
   - Для каждой строки i в L вычисляет $BS[i]$ как сумму произведений элементов матрицы B и векторов s.
   - Для каждого столбца j в Δ вычисляет $y[j]$ как степень отношения $BS[i]/BS[0]$, умноженную на соответствующий множитель.

4. ПРИМЕРЫ

Для многочлена

$$f = 1 + y_1 + w_1 y_1^2$$

входные данные имеют вид матриц из одной строки и одного столбца $\Delta = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$. В результате работы алгоритма формируется матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и ее правый аннулятор $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^\top$. A-дискриминантное множество имеет вид $w_1 = \frac{1}{4}$, а особая точка гиперповерхности $y_1 = -2$ является корнем второй степени соответствующего квадратного уравнения $y_1^2 + 4y_1 + 4 = 0$.

Для многочлена

$$f = 1 + y_1 y_2^3 + y_1^2 y_2 + w_2 y_1^6 y_2^3 + w_1 y_1^3 y_2 + w_3 y_1 y_2^2$$

входные данные имеют вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В результате работы алгоритма формируется матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

и ее правый аннулятор

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 2 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} & -3 & -\frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметризация A-дискриминантного множества определяется формулами

$$w_1 = \frac{s_1 \left(\frac{2s_1}{5} + 2s_2 - \frac{s_3}{5}\right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{s_1}{5} - \frac{3s_3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(-\frac{8s_1}{5} - 3s_2 - \frac{s_3}{5}\right)^{\frac{8}{5}}},$$

$$w_2 = \frac{s_2 \left(\frac{2s_1}{5} + 2s_2 - \frac{s_3}{5}\right)^2}{\left(-\frac{8s_1}{5} - 3s_2 - \frac{s_3}{5}\right)^3},$$

$$w_3 = \frac{s_3}{\left(\frac{2s_1}{5} + 2s_2 - \frac{s_3}{5}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{s_1}{5} - \frac{3s_3}{5}\right)^{\frac{3}{5}}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(-\frac{8s_1}{5} - 3s_2 - \frac{s_3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}},$$

где $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{C}$.

Особые точки гиперповерхности $f = 0$ имеют вид

$$y_1 = \frac{\left(\frac{-\frac{8s_1}{5} - 3s_2 - \frac{s_3}{5}}{\frac{2s_1}{5} + 2s_2 - \frac{s_3}{5}}\right)^{\frac{3}{5}}}{\left(\frac{\frac{s_1}{5} - \frac{3s_3}{5}}{\frac{2s_1}{5} + 2s_2 - \frac{s_3}{5}}\right)^{\frac{1}{5}}},$$

$$y_2 = \frac{\left(\frac{\frac{s_1}{5} - \frac{3s_3}{5}}{\frac{2s_1}{5} + 2s_2 - \frac{s_3}{5}}\right)^{\frac{2}{5}}}{\left(\frac{-\frac{8s_1}{5} - 3s_2 - \frac{s_3}{5}}{\frac{2s_1}{5} + 2s_2 - \frac{s_3}{5}}\right)^{\frac{1}{5}}},$$

где $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{C}$.

5. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2024-1429).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S.A., Petkovšek M., Ryabenko A.A.* Hypergeometric Solutions of First-order Linear Difference Dystems with Rational-function Coefficients // Lecture Notes in Computer Science. 2015. № 9301. P. 1–14.

2. *Abramov, S.A., Ryabenko, A.A., Khmelnov, D.E.* Regular Solutions of Linear Ordinary Differential Equations and Truncated Series // Comput. Math. Math. Phys. 2020. № 60(1). P. 1–14.

3. *Apanovich M.S., Lyapin A.P., Shadrin K.V.* Solving the Cauchy Problem for a Two-Dimensional Difference Equation at a Point Using Computer Algebra Methods // Programming and Computer Software. 2021. № 47(1). P. 1–5.

4. *Kytmanov A.A., Lyapin A.P., Sadykov T.M.* Evaluating the Rational Generating Function for the Solution of the Cauchy Problem for a Two-dimensional Difference Equation with Constant Coefficients // Programming and Computer Software. 2017. № 43(2). P. 105–111.

5. *Lyapin A.P., Mikhalkin E.N.* Algorithm of calculation of the truncation of the discriminant of a polynomial // Programming and Computer Software. 2023. № 49(1). P. 49–53.

6. *Barsan V.* An Improved Algorithm for Solving the Quintic Equation // Romanian Reports in Physics. 2022. № 74(4). P. 117.

7. *Лебедев А.В., Трубников Ю.В., Чернявский М.М.* Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов // Матем. заметки. 2024. № 116(1). P. 91–108.

8. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, Resultants and Multidimensional determinants, Birkhäuser: Boston, 1994.

9. *Passare M., Tsikh A.K.* Algebraic equations and hypergeometric series // The legacy of Niels Henrik Abel, Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 2004, pp. 653–672.

10. *Antipova I.A., Mikhalkin E.N., Tsikh A.K.* Singular points of complex algebraic hypersurfaces // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2018. № 11(6). P. 670–679.

11. *Antipova I.A., Mikhalkin E.N., Tsikh A.K.* Rational expressions for multiple roots of algebraic equations // Matem. sb. 2018. № 209(10). P. 1419–1444.

12. *Antipova I.A., Tsikh A.K.* The discriminant locus of a sistem of n Laurent polynomials in n variables // Izv. Math. 2012. № 76(5). P. 881–906.

13. *Krasikov V. A., Sadykov T. M.* On the analytic complexity of discriminants // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. № 279. P. 78–92.

14. *Beloshapka V.K.* Analytic complexity of functions of two variables // Russ. J. Math. Phys. 2007. № 14(3). P. 243–249.

15. *Dickenstein A., Sadykov T.M.* Algebraicity of solutions to the Mellin system and its monodromy // Doklady Mathematics. 2007. № 75(1). P. 80–82.

16. *Lawton W. M.* An Explanation of Mellin's 1921 Paper // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. № 46. P. 98–109.