

Homework 10

PB17000297 罗晏宸

December 26 2019

1 Exercise 34.5-1

子图同构问题 取两个无向图 G_1 和 G_2 , 要回答 G_1 是否与 G_2 的一个子图同构这一问题。证明: 子图同构问题是 NP 完全的。

解 首先证明子图同构问题是属于 NP 的, 在多项式的时间内是可以对子图同构问题的答案给出验证, 即验证给定的 G_2 的子图是否与 G_1 同构。

下面证明子图同构问题是 NP 难度的, 如果能够在多项式的时间内解决子图同构问题, 取 G_1 是一个顶点数为 k 的完全图, 则能够在多项式的时间内解决**团问题**: 在 G_2 中是否存在一个给定规模为 k 的团。

综上, 子图同构问题是 NP 完全的。

2 Exercise 34.5-6

证明: 哈密顿路径问题是 NP 完全的。

解 首先一条从 u 到 v 的 Hamilton 路径即哈密顿路径问题的证书, 这说明哈密顿路径问题是属于 NP 的。

对于顶集覆盖问题中的输入 G 与 k , 下面通过证明 $\text{VERTEX-COVER} \leq_P \text{HAM-PATH}$ 来证明哈密顿路径问题是 NP 难度的。首先 $\forall v \in V(G)$, 将 v 分为 $2d(v)$ 个顶点: $v(1,1), v(1,2), \dots, v(2,d(v))$, 再添加 k 个新顶点: $u_0 = a_0, a_1, a_2, \dots, a_k = v_0$, 以上顶点构成 $V(G')$ 。在上述顶集中连边: $\forall v \in V(G)$, 连边 $v(1,i)v(2,i), i = 1, \dots, d(v), v(2,i)v(1,i+1), i = 1, \dots, d(v)-1, v(1,1)a_i, i = 1, \dots, k-1, v(2,d(v))a_i, i = 1, \dots, k; \forall uv \in E(G)$, 设 uv 是

G 中与 u 相关联的第 i 条边、与 v 相关联的第 j 条边, 则连边 $u(1, i)v(1, j)$ 与 $u(2, i)v(2, j)$ 。以上边构成 $E(G')$ 。

上述 G' 的构造是多项式时间内可以完成的。下面证明 G 中有 k 个顶组成的顶覆盖当且仅当 G' 中有哈密顿路径 $P(u_0, v_0)$ 。

事实上, 若 G 中有一个顶覆盖 $C = v_1, v_2, \dots, v_k$, 在 G' 中, 从 u_0 出发, 通过一条边到达 $v_1(1, 1)$, 继而沿路径 $v_1(1, 1)v_1(2, 1)v_1(1, 2)v_1(2, 2)v_1(1, 3)v_1(2, 3) \dots v_1(2, d(v_1))$, 再从 $v_1(2, d(v_1))$ 到达 a_1 ; 再从 a_1 出发, 通过一条边到达 $v_2(1, 1)$, 继而沿路径 $v_2(1, 1)v_2(2, 1)v_2(1, 2)v_2(2, 2)v_2(1, 3)v_2(2, 3) \dots v_2(2, d(v_2))$, 再从 $v_2(2, d(v_2))$ 到达 a_2 ; 依次前进 k 轮, 最终从 $v_k(2, d(v_k))$ 出发, 通过一条边到达 $a_k = v_0$, 得到了 G' 中的路径 $P_1(u_0, v_0)$ 。若 $P_1(u_0, v_0)$ 不是哈密顿路径, 任取 $v \notin v_1, v_2, \dots, v_k$, 且 $e = uv \in E(G)$, 设 $e = uv$ 是 G 中与 u 相关联的第 i 条边、与 v 相关联的第 j 条边, 则 $u \in v_1, v_2, \dots, v_k$, 用路径 $u(1, i)v(1, j)v(2, j)u(2, i)$ 代替 P_1 中的 $u(1, i)u(2, i)$, 得到 P_2 , 直到扩张得到哈密顿路径 $P(u_0, v_0)$ 。

若 $P(u_0, v_0)$ 是 G' 中的一条哈密顿路径, 仅当 $v(1, 1)$ 与 $v(2, d(v))$ 在 $P(u_0, v_0)$ 上均与 a_0, a_1, \dots, a_k 中的顶点相邻时, v 加入顶点覆盖 S , 故 $|S| = k$ 。

因此, 哈密顿路径问题是 NP 难度的。综上, 哈密顿路径问题是 NP 完全的。

3 Exercise 35.2-4

在瓶颈旅行商问题中, 目标是找出这样一条哈密顿回路, 使得回路中代价最大的边的代价相对于其他回路来说最小。假设代价函数满足三角不等式, 证明: 这个问题存在一个近似比为 3 的多项式时间近似算法。

解 对于图的最小生成树, 从某一顶点开始, 在图中依次取点完成一个哈密顿回路, 每次经过边的端点的最小生成树上的距离不超过 3, 设 C 是求出最小生成树的代价, 则前述过程的代价最多为 $3C$ 。设最优解的代价为 C^* , 对于同一个图, 设求出瓶颈哈密顿路径的代价为 C' , 显然从一条瓶颈哈密顿路径可以通过依次删除按代价排序的边得到最小生成树, 而 $C^* < C'$, 因此有 $C^* < C' < 3C$, 即前述算法是 3 近似的。

4 Problem 35-6 Approximating a maximum spanning tree

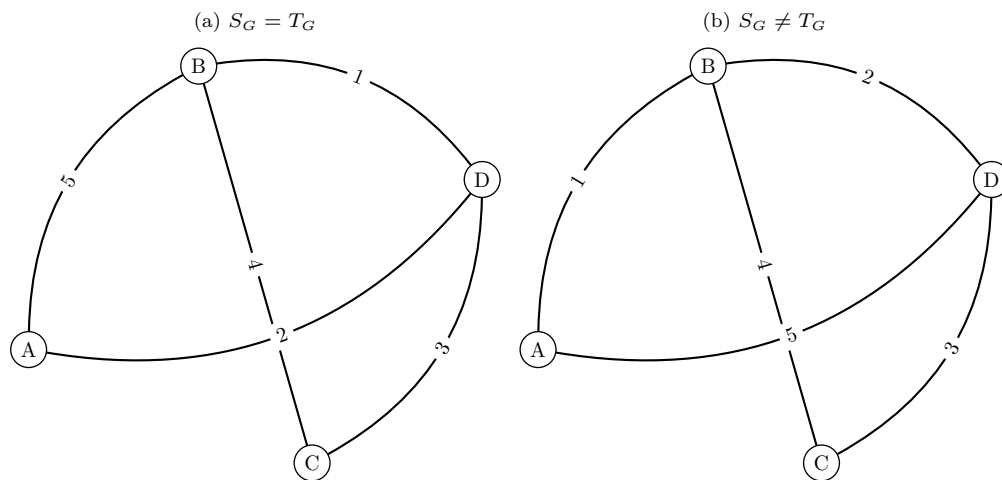
设 $G = (V, E)$ 是一个无向图，其中的每条边 $(u, v) \in E$ 具有不同的权值 $w(u, v)$ 。对每个顶点 $v \in V$ ，设 $\max(v) = \arg \max_{(u,v) \in E} \{w(u, v)\}$ 是与顶点 v 相关联的最大权值边。设 $S_G = \{\max(v) : v \in V\}$ 表示与各个顶点相关联的最大权值边的集合， T_G 表示图 G 的最大权值生成树。对任意的边集 $E' \subseteq E$ ，定义 $w(E') = \sum_{(u,v) \in E'} w(u, v)$ 。

- a 给出一个至少包含 4 个顶点的图，使其满足 $S_G = T_G$ 。
- b 给出一个至少包含 4 个顶点的图，使其满足 $S_G \neq T_G$ 。
- c 证明：对任意的图 G ， $S_G \subseteq T_G$ 。
- d 证明：对任意的图 G ， $w(T_G) \geq w(S_G)/2$ ， $w(S_G) \geq w(T_G)/2$ 。
- e 给出一个 $O(V + E)$ 时间算法，用于计算 2 近似的最大生成树。

解

- a 在下左图中， $S_G = T_G = \{AB, BC, CD\}$
- b 在下右图中， $S_G = \{AD, BC\} \neq T_G = \{AD, BC, CD\}$

c 在生成 T_G 的算法中，对于 G 中的边按权值从大到小排序，除非出现环，否则依次将其添加入最大权值生成树中，这显然满足贪心性质，可以得到正确的 T_G 。在这个过程中，某一条边没有被选取，意味着它的加入会产生环，进而其两个端点已都加入生成树中了，即这两个端点已经分别有与之相关联的边加入生成树中了，而那些边的边权不小于这条未被选入的边，因此 $S_G \subseteq T_G$ 。



d 由于 $S_G \subseteq T_G$, 因此 $w(T_G) \geq w(S_G) \geq w(S_G)/2$ 是显然的。

由 S_G 定义易知, 有 $|V|/2 \leq |S_G| \leq |V|$, 而 $|T_G| = |V| - 1$, 因此 $|T_G \setminus S_G| \leq |V|/2 - 1 \leq |S_G|$, 且对于 $T_G \setminus S_G$ 中任意一条边相关联的顶点, 这条边的权值一定不是以之为端点的边中的最大者, 因此 $w(T_G \setminus S_G) \leq w(S_G)$, 从而 $w(T_G)/2 \leq w(S_G)$ 。

e 算法如下:

APPROX-MAX-SPANNING-TREE($G(V, E)$)

```

1   $T = \emptyset$ 
2  for  $v \in V$ 
3       $max = -\infty$ 
4       $best = v$ 
5      for  $u \in \text{neighbors of } v$ 
6          if  $w(u, v) \geq max$ 
7               $v = u$ 
8               $max = w(u, v)$ 
9       $T = T \cup \{u, v\}$ 
10 return  $T$ 
```

由 **c** 与 **d** 可知, 这个算法得到最大权值生成树的子集, 且是 2 近似的。

5 Exercise 34.4-7

给出一种 2-SAT 问题的多项式解法

解 由于 2-SAT 问题只限制两个变量，对于给定的待满足布尔式，其合取范式的每个子句可以在线性时间内改写为只由 \rightarrow 与 \neg 组成，进而对于每一个子句，以各变量及其否定为点集，以蕴含关系 \rightarrow 为边集建立有向图，对于一个单独的变量组成的合取范式，那就将其否定连向它。

在这张有向图上，使用 *Tarjan* 算法在多项式时间内求出最大强连通分量，若这个分量不同时包含某个变量和其否定对应的顶点，则这是 2-SAT 问题的一组解，否则给定的输入是无解的。