

# Homework 1

PB17000297 罗晏宸

September 5 2019

## 1 Exercise 2.1-1

以图 2-2 为模型,说明 INSERTION-SORT 在数组  $A = \langle 31, 41, 59, 26, 41, 58 \rangle$  上的执行过程。

解 如图1

## 2 Exercise 2.1-3

考虑以下查找问题:

输入:  $n$  个数的一个序列  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  和一个值  $v$ 。

输出: 下标  $i$  使得  $v = A[i]$  或者当  $v$  不在  $A$  中出现时,  $v$  为特殊值 NIL。

写出线性查找的伪代码,它扫描整个序列来查找  $v$ 。使用一个循环不变式来证明你的算法是正确的,确保你的循环不变式满足三条必要的性质。

解

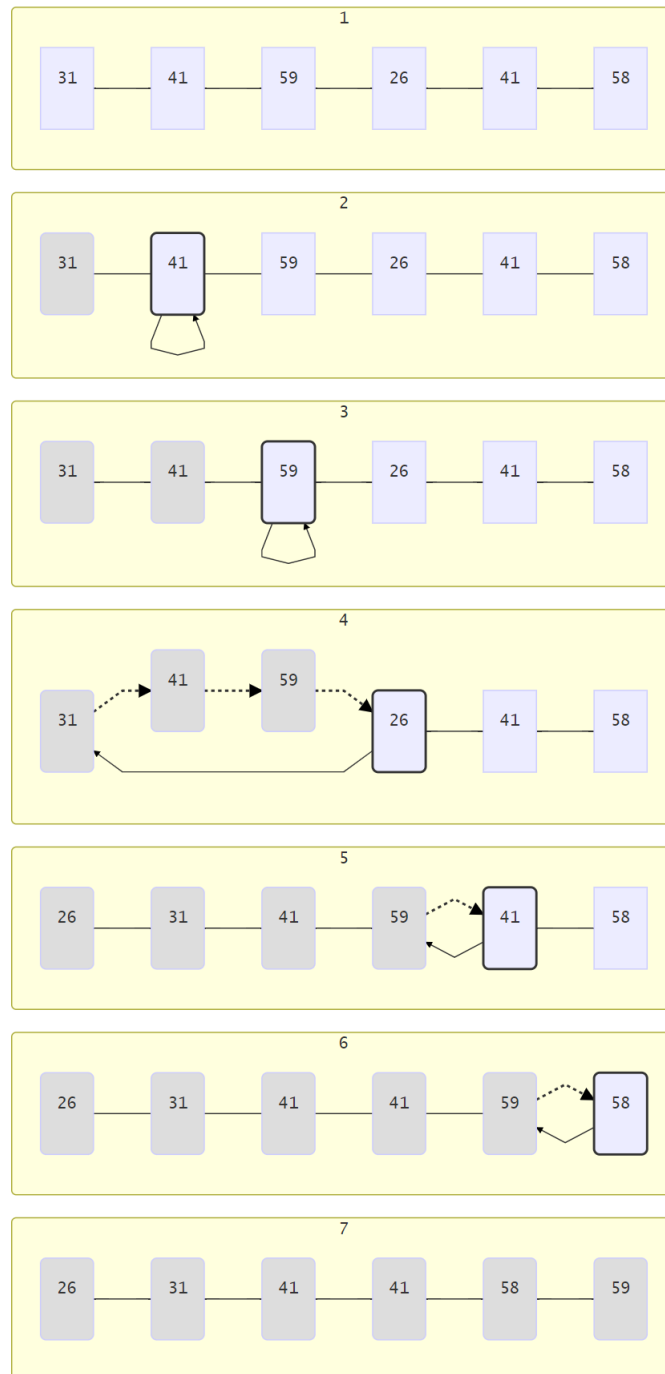


图 1: 在数组  $A = \langle 31, 41, 59, 26, 41, 58 \rangle$  上执行 INSERTION-SORT 的操作。图 1 6 表示 `for` 循环的迭代, 每次迭代中, 黑框的矩形保存取自  $A[j]$  的关键字, 它与其左边的矩形中的值作比较, 黑色箭头指出它被移到的地方, 虚线箭头指出数组值向右移动一个位置。图 7 表示最终排序好的数组  $A = \langle 26, 31, 41, 41, 58, 59 \rangle$ 。

---

**Algorithm 1** Linear Search

---

**Require:**  $n \geq 1$ **Ensure:**  $(A[i] = v) \text{ or } (i = \text{NIL})$  $i \leftarrow 1$ **while**  $(i \leq n) \text{ and } (a_i \neq v)$  **do** $i \leftarrow i + 1$ **end while****if**  $i > n$  **then** $i \leftarrow \text{NIL}$ **end if**

---

**循环不变式:** each  $a_j \in A[1..i-1], a_j \neq v$

**初始化:** 在循环的第一次迭代之前,  $i = 1, A[1..0] = \emptyset$ , 循环不变式成立。

**保持:** 若在循环的第  $m$  次迭代之前, 循环不变式为真, 在第  $m+1$  次迭代之前, 其仍为真, 否则说明  $a_i = v$  即条件  $(i \leq n) \text{ and } (a_i \neq v)$  不再满足, 循环不会进入下一次迭代。

**终止:** 在循环终止时, 不变式说明在  $A[1..i-1]$  不存在与  $v$  相同的元素, 则得到的  $i$  满足算法的输出要求或  $i > n$  输出相应的结果NIL。

### 3 Exercise 2.2-3

再次考虑线性查找问题 (参见练习2)。假定要查找的元素等可能地为数组中的任意元素, 平均需要检查输入序列的多少元素? 最坏情况又如何呢? 用  $\Theta$  记号给出线性查找的平均情况和最坏情况运行时间。证明你的答案。

解 设  $X(i)$  为要查找的元素  $v$  为  $a_i$  时检查的元素数,  $P(i)$  为要查找的元素  $v$  为  $a_i$  的概率, 则  $X(i) = i, P(i) = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$ , 有

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^n X(i)P(i) \\ &= \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

即平均需要检查输入序列的元素数为  $\frac{n+1}{2}$ 。

在最坏的情况下, 每次都需要检查输入序列中的所有元素, 即  $X_{worst}(i) \equiv n$ , 有

$$\begin{aligned} E_{worst}[X] &= \sum_{i=1}^n X_{worst}(i)P(i) \\ &= \sum_{i=1}^n n \cdot \frac{1}{n} \\ &= n \end{aligned}$$

即最坏情况下, 平均需要检查输入序列的元素数为  $n$ 。

在平均情况下, 线性查找的运行时间为

$$\begin{aligned} T(n) &= E[X] + 2 \\ &= \frac{n+1}{2} + 2 \\ &= \Theta(n) \end{aligned}$$

证明. 事实上, 当  $n \geq 5$  时, 对于常数 1 和 2, 恒有

$$1 \cdot \left(\frac{n+1}{2} + 2\right) = \frac{n+1}{2} + 2 \leq n \leq n+5 = 2 \cdot \left(\frac{n+1}{2} + 2\right)$$

□

在最坏情况下，线性查找的运行时间为

$$\begin{aligned}T(n) &= E_{worst}[X] + 2 \\&= n + 2 \\&= \Theta(n)\end{aligned}$$

证明. 事实上，当  $n \geq 2$  时，对于常数  $\frac{1}{2}$  和 1，恒有

$$0.5 \cdot (n + 2) = \frac{1}{2} \cdot n + 1 \leq n \leq n + 2 = 1 \cdot (n + 2)$$

□