

Homework 5

PB17000297 罗晏宸

October 19 2019

Exercise 1

考虑一个大小为 $m = 1000$ 的散列表和一个对应的散列函数 $h(k) = \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor$ ，其中 $A = (\sqrt{5}-1)/2$ ，试计算关键字 61, 62, 63, 64 和 65 被映射到的位置。

解 由散列函数，代入关键字计算如下：

$$\begin{aligned} h(61) &= \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor \\ &= \left\lfloor 1000 \times \left(61 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \bmod 1 \right) \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 1000 \times \left(61 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} - 37 \right) \right\rfloor \\ &= \lfloor 30500\sqrt{5} - 67500 \rfloor \\ &= 700 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(62) &= \left\lfloor 1000 \times \left(62 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \bmod 1 \right) \right\rfloor \\ &= \lfloor 31000\sqrt{5} - 69000 \rfloor \\ &= 318 \end{aligned}$$

$$h(63) = \left\lfloor 1000 \times \left(63 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \bmod 1 \right) \right\rfloor$$

$$\begin{aligned}
&= \lfloor 31500\sqrt{5} - 69500 \rfloor \\
&= 936
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(64) &= \left\lfloor 1000 \times \left(64 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \bmod 1 \right) \right\rfloor \\
&= \lfloor 32000\sqrt{5} - 71000 \rfloor \\
&= 554
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(65) &= \left\lfloor 1000 \times \left(65 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \bmod 1 \right) \right\rfloor \\
&= \lfloor 32500\sqrt{5} - 72500 \rfloor \\
&= 172
\end{aligned}$$

因此，关键字 61, 62, 63, 64 和 65 分别被映射到表中地址为 700, 318, 936, 554, 172 的位置

Exercise 2

考虑用开放寻址法将关键字 10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59 插入到一长度为 $m = 11$ 的散列表中，辅助散列函数为 $(k) + 0 = k$ 。试说明分别用线性探查、二次探查 ($c_1 = 1, c_2 = 3$) 和双重散列 ($h_1(k) = k, h_2(k) = 1 + (k \bmod (m-1))$) 将这些关键字插入散列表的过程。

解 使用三种方式插入关键字的过程与结果如下

线性探查

$$h(10) = (10 + 0) \bmod 11 = 10$$

$$h(22) = (22 + 0) \bmod 11 = 0$$

$$h(31) = (31 + 0) \bmod 11 = 9$$

$$h(4) = (4 + 0) \bmod 11 = 4$$

$$\begin{aligned} & (15 + 0) \bmod 11 = \mathbf{4} \\ h(15) &= (15 + 1) \bmod 11 = 5 \end{aligned}$$

$$h(28) = (28 + 0) \bmod 11 = 6$$

$$\begin{aligned} & (17 + 0) \bmod 11 = \mathbf{6} \\ h(17) &= (17 + 1) \bmod 11 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (88 + 0) \bmod 11 = \mathbf{0} \\ h(88) &= (88 + 1) \bmod 11 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (59 + 0) \bmod 11 = \mathbf{4} \\ & (59 + 1) \bmod 11 = \mathbf{5} \\ & (59 + 2) \bmod 11 = \mathbf{6} \\ & (59 + 3) \bmod 11 = \mathbf{7} \\ h(59) &= (59 + 4) \bmod 11 = 8 \end{aligned}$$

最终散列表如表所示

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 地址 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 关键字 | 22 | 88 | | | 4 | 15 | 28 | 17 | 59 | 31 | 10 |

表 1: 使用线性探查将关键字插入散列表

二次探查

$$h(10) = (10 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = 10$$

$$h(22) = (22 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = 0$$

$$h(31) = (31 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = 9$$

$$h(4) = (4 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = 4$$

$$(15 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = \mathbf{4}$$

$$h(15) = (15 + 1 \times 1 + 3 \times 1^2) \bmod 11 = 8$$

$$h(28) = (28 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = 6$$

$$(17 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = \mathbf{6}$$

$$= (17 + 1 \times 1 + 3 \times 1^2) \bmod 11 = \mathbf{7}$$

$$= (17 + 1 \times 2 + 3 \times 2^2) \bmod 11 = \mathbf{8}$$

$$h(17) = (17 + 1 \times 3 + 3 \times 3^2) \bmod 11 = 3$$

$$(88 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = \mathbf{0}$$

$$= (88 + 1 \times 1 + 3 \times 1^2) \bmod 11 = \mathbf{4}$$

$$= (88 + 1 \times 2 + 3 \times 2^2) \bmod 11 = \mathbf{3}$$

$$= (88 + 1 \times 3 + 3 \times 3^2) \bmod 11 = \mathbf{8}$$

$$= (88 + 1 \times 4 + 3 \times 4^2) \bmod 11 = \mathbf{8}$$

$$= (88 + 1 \times 5 + 3 \times 5^2) \bmod 11 = \mathbf{3}$$

$$= (88 + 1 \times 6 + 3 \times 6^2) \bmod 11 = \mathbf{4}$$

$$= (88 + 1 \times 7 + 3 \times 7^2) \bmod 11 = \mathbf{0}$$

$$h(88) = (88 + 1 \times 8 + 3 \times 8^2) \bmod 11 = 2$$

$$(59 + 1 \times 0 + 3 \times 0^2) \bmod 11 = \mathbf{4}$$

$$= (59 + 1 \times 1 + 3 \times 1^2) \bmod 11 = \mathbf{8}$$

$$h(59) = (59 + 1 \times 2 + 3 \times 2^2) \bmod 11 = 7$$

最终散列表如表所示

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----|---|----|----|---|---|----|----|----|----|----|
| 地址 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 关键字 | 22 | | 88 | 17 | 4 | | 28 | 59 | 15 | 31 | 10 |

表 2: 使用二次探查将关键字插入散列表

双重散列

$$h(10) = [10 + 0 \times (1 + (10 \bmod 10))] \bmod 11 = 10$$

$$h(22) = [22 + 0 \times (1 + (22 \bmod 10))] \bmod 11 = 0$$

$$h(31) = [31 + 0 \times (1 + (31 \bmod 10))] \bmod 11 = 9$$

$$h(4) = [4 + 0 \times (1 + (4 \bmod 10))] \bmod 11 = 4$$

$$[15 + 0 \times (1 + (15 \bmod 10))] \bmod 11 = \mathbf{4}$$

$$[15 + 1 \times (1 + (15 \bmod 10))] \bmod 11 = \mathbf{10}$$

$$h(15) = [15 + 2 \times (1 + (15 \bmod 10))] \bmod 11 = 5$$

$$h(28) = [28 + 0 \times (1 + (28 \bmod 10))] \bmod 11 = 6$$

$$[17 + 0 \times (1 + (17 \bmod 10))] \bmod 11 = \mathbf{6}$$

$$h(17) = [17 + 1 \times (1 + (17 \bmod 10))] \bmod 11 = 3$$

$$[88 + 0 \times (1 + (88 \bmod 10))] \bmod 11 = \mathbf{0}$$

$$[88 + 1 \times (1 + (88 \bmod 10))] \bmod 11 = \mathbf{9}$$

$$h(88) = [88 + 2 \times (1 + (88 \bmod 10))] \bmod 11 = 7$$

$$\begin{aligned}
& [59 + 0 \times (1 + (59 \bmod 10))] \bmod 11 = 4 \\
& [59 + 1 \times (1 + (59 \bmod 10))] \bmod 11 = 3 \\
h(59) &= [59 + 2 \times (1 + (59 \bmod 10))] \bmod 11 = 2
\end{aligned}$$

最终散列表如表所示

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----|---|----|----|---|----|----|----|---|----|----|
| 地址 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 关键字 | 22 | | 59 | 17 | 4 | 15 | 28 | 88 | | 31 | 10 |

表 3: 使用双重散列将关键字插入散列表

Exercise 3

因为在基于比较的排序模型中，完成 n 个元素的排序，其最坏情况下需要 $\Omega(n \lg n)$ 时间。试证明：任何基于比较的算法从 n 个元素的任意序列中构造一棵二叉搜索树，其最坏情况下需要 $\Omega(n \lg n)$ 的时间。

解

Exercise 4

(a)

将关键字 41, 38, 31, 12, 19, 8 连续地插入一棵初始为空的红黑树之后，试画出该结果树。

(b)

对于 (a) 中得到的红黑树，依次删除 8, 12, 19，试画出每次删除操作后的红黑树。

解