Homework 1

PB17000297 罗晏宸

September 5 2019

1 Exercise 1

证明:包含 n 个元素的堆的 Max-Heapify 函数的时间复杂度是 $O(logn)$，Build-Max-Heap 函数的时间复杂度是 $O(n)$。

解 Max-Heapify 的时间复杂度由递归式

$$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$$

给出，要证对某个常数 $c > 0$，$T(n) \leq c \cdot \lg n$ 成立。

证明. 假设此上界对所有正数 $m < n$ 都成立，特别是对于 $m = 2n/3$，有 $T(2n/3) \leq c \cdot \lg(2n/3)$，将其代入递归式，得到

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c \cdot \lg\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(1) \\ &\leq c \cdot \lg n \end{aligned}$$

其中，为使最后一步成立，应有

$$
\begin{aligned}
& & c\lg\left(\frac{2n}{3}\right)+\Theta(1) &\le c\lg n \\
&\Rightarrow & c\lg\left(\frac{2}{3}\right)+\Theta(1) &\le 0 \\
&\Rightarrow & c\lg\left(\frac{3}{2}\right) &\ge \Theta(1) \\
&\Rightarrow & c &\ge \frac{\Theta(1)}{\lg\left(\frac{3}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

因此对于充分大的 n，存在常数 $c>0$，使得 $T(n)\le c\cdot\lg n$ 成立，因此 $T(n)=O(\lg n)$。 □

一个共有 n 各元素的堆高度为 $\lfloor \lg n \rfloor$，并且高度为 h 的结点有至多 $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$ 个，而对于一个高度为 h 的结点，MAX-HEAPIFY 函数的时间复杂度是 $O(logn)=O(h)$，因此 BUILD-MAX-HEAP 的时间复杂度可以由以下证明给出

证明.

$$
\begin{aligned}
\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor}\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil\cdot O(h) &= O\left(n\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor}\frac{h}{2^h}\right) \\
&= O\left(n\sum_{h=0}^{\infty}\frac{h}{2^h}\right) \\
&= O\left(n\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\right) \\
&= O(n\cdot 2) \\
&= O(n)
\end{aligned}
$$

□

2 Exercise 7.2-6 & 7.2-5

(a) 试证明：在一个随机输入数组上，对于任何常数 $0 < \alpha \leq 1/2$，PARTITION 产生比 $1{-}\alpha : \alpha$ 更平衡的划分的概率约为 $1{-}2\alpha$。

(b) 假设快速排序的每一层所做的划分比例都是 $1{-}\alpha : \alpha$，其中 $0 < \alpha \leq 1/2$ 且是一个常数. 试证明：在相应的递归树中，叶结点的最小深度大约是 $-\lg n/\lg \alpha$，最大深度大约是 $-\lg n/\lg(1{-}\alpha)$(无需考虑舍入问题)。
(注: 堆中结点的**高度**为该结点**到叶结点最长简单路径上边的数目**；结点的**深度**为该结点**到根结点的简单路径上结点的数目**)

解

(a) 设随机输入数组 A 有 n 个数 $A_0, A_1, \cdots, A_{\alpha n}, \cdots, A_{(1-\alpha)n}, \cdots, A_n$。

证明. 设新的划分为 $1{-}\beta : \beta$，要使得划分更平衡，应有 $|(1-\beta)-\beta| < 1-2\alpha = |(1-\alpha)-\alpha|$

- 当 $\beta \leq \alpha$ 时，$|(1-\beta)-\beta| = 1-2\beta \geq 1-2\alpha$
- 当 $\beta \geq 1-\alpha$ 时，$1-\beta \geq \alpha$, $|(1-\beta)-\beta| = 2\beta-1 \geq 1-2\alpha$
- 当 $\alpha < \beta < 1-\alpha$ 时，$\alpha < 1-\beta < 1-\alpha$，$0 < |(1-\beta)-\beta| < 1-2\alpha$

其中最后一种情况满足要求，假设 β 是 $[0, 1]$ 上的均匀分布，则有

$$P = P\{\alpha < \beta < 1-\alpha\} = \frac{(1-\alpha)-\alpha}{1-0} = 1-2\alpha$$

□

(b) 对递归式 $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + cn$ 构造递归树如图1所示。

证明. 从递归树的根到叶结点最右和最左的简单路径长度分别为 $-\log_{1-\alpha} n$

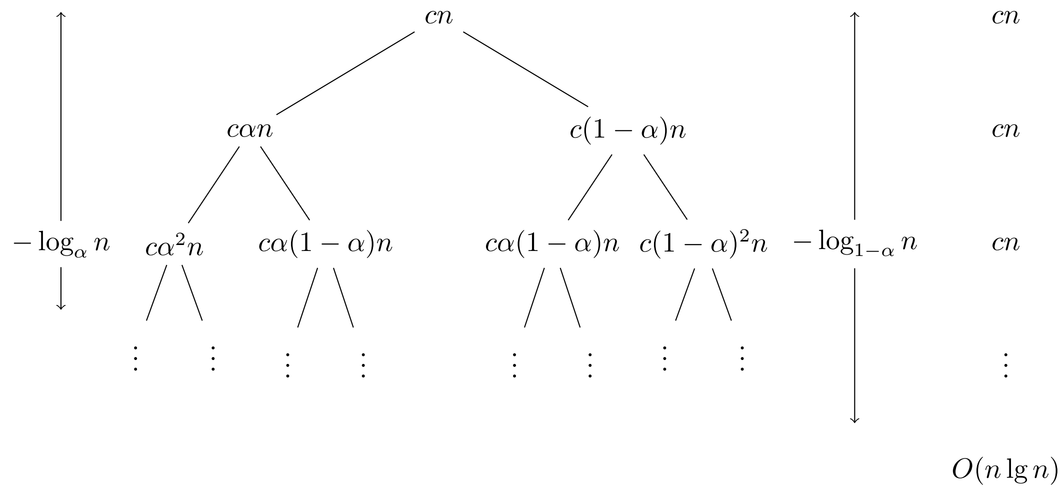

图 1: 为表达式式 $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + cn$ 构造递归树

与 $-\log_\alpha n$，

$$\begin{aligned}
& 0 < \alpha \leq 1/2 \\
\Rightarrow \quad & \alpha \leq 1-\alpha \\
\Rightarrow \quad & \lg\alpha \leq \lg(1-\alpha) \\
\Rightarrow \quad & -\frac{1}{\lg\alpha} \leq -\frac{1}{\lg(1-\alpha)} \\
\Rightarrow \quad & -\frac{\lg n}{\lg\alpha} \leq -\frac{\lg n}{\lg(1-\alpha)} \\
\Rightarrow \quad & -\log_\alpha n \leq -\log_{1-\alpha} n
\end{aligned}$$

对于两者之间其他任何一个叶结点的深度 l，有

$$\begin{aligned}
& \alpha^k(1-\alpha)^{l-k} n \leq 1, && 0 < k \leq l \\
\Rightarrow \quad & k + (l-k)\log_\alpha(1-\alpha) + \log_\alpha n \leq 0, && 0 < k \leq l \\
\Rightarrow \quad & l \geq -\frac{\log_\alpha n + k}{\log_\alpha(1-\alpha)} + k, && 0 < k \leq l \\
\Rightarrow \quad & l \geq -(\log_\alpha n + k) - k, && 0 < k \leq l \\
\Rightarrow \quad & l \geq -\log_\alpha n
\end{aligned}$$

同理可证 $l \leq -\log_{1-\alpha} n$。因此叶结点的最小深度大约是 $-\log_{\alpha} n = -\lg n/\lg \alpha$，最大深度大约是 $-\log_{1-\alpha} n = -\lg n/\lg (1-\alpha)$ $\square$

3 OnlineJudge Problem H3-1 数字统计

解 Accepted

4 OnlineJudge Problem H3-2 考试排名

解 Accepted