Homework 2

PB17000297 罗晏宸

September 13 2019

1 Exercise 3.1-4

$2^{n+1} = O(2^n)$ 成立吗？$2^{2n} = O(2^n)$ 成立吗？

解 前者成立，但后者不成立。

取 $c = 2$ 与 $n_0 = 1$，有

$$0 \leq 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n, \qquad \forall n \geq n_0 = 1$$

因此 $2^{n+1} = O(2^n)$。

假设存在常数 c 与 n_0 使得

$$0 \leq 2^{2n} \leq c \cdot 2^n, \qquad \forall n \geq n_0$$

成立，则有

$$\begin{aligned} & 0 \leq 2^{2n} \leq c \cdot 2^n, && \forall n \geq n_0 \\ \Rightarrow\ & 2^n \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n, && \forall n \geq n_0 \\ \Rightarrow\ & 2^n \leq c, && \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

这与 c 是常数矛盾！因此假设不成立，$2^{2n} \neq O(2^n)$。

2 Exercise 3.2-3

证明等式

$$\lg(n!) = \Theta(n \lg n) \tag{3.19}$$

并证明 $n! = \omega(2^n)$ 且 $n! = o(n^n)$。

解 取常数 $c_1 = 1 - \dfrac{\lg e}{2}$、$c_2 = 1$ 和 $n_0 = 4$，有

$$
\begin{aligned}
& n! \le n^n, && \forall n \ge 1 \\
\Rightarrow\quad & \lg n! \le \lg n^n, && \forall n \ge 1 \\
\Rightarrow\quad & \lg n! \le n \lg n = 1 \cdot n \lg n, && \forall n \ge 1 \\
\Rightarrow\quad & \lg n! \le c_2 \cdot n \lg n, && \forall n \ge n_0 > 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& c_1 = 1 - \frac{\lg e}{2} \le 1 - \frac{\lg e}{n}, && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & \frac{\lg e}{\lg n} \le 1 - c_1, && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & \lg e \le (1 - c_1) \lg n, && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & n \lg e \le n \lg n - c_1 \cdot n \lg n, && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & c_1 \cdot n \lg n \le n \lg n - n \lg e, && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & c_1 \cdot n \lg n \le \lg \left(\frac{n}{e}\right)^n, && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & c_1 \cdot n \lg n \le \lg \left[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right], && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & c_1 \cdot n \lg n \le \lg \left[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right], && \forall n \ge 4 \\
\Rightarrow\quad & c_1 \cdot n \lg n \le \lg n!, && \forall n \ge 4 = n_0
\end{aligned}
$$

故 $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$。

下证 $n! = \omega(2^n)$ 且 $n! = o(n^n)$：

证明.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\\=&\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\\=&0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}\\=&\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{2}\\=&\infty\end{aligned}$$

□

3 Exercise 4.3-2 (With the substitution method)

证明：$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ 的解为 $O(\lg n)$。

解

证明. 要证对某个常数 $c > 0$，$T(n) \leq c \cdot \lg n$ 成立。假设此上界对所有正数 $m < n$ 都成立，特别是对于 $m = \lceil n/2 \rceil$，有 $T(\lceil n/2 \rceil) \leq c \cdot \lg(\lceil n/2 \rceil)$，将其代入递归式，得到

$$\begin{aligned}T(n) \leq& c \cdot \lg\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1\\<& c \cdot \lg\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1\\=& c\lg(n+2) - c\lg 2 + 1\\=& c\lg(n+2) - c + 1\\\leq& c\lg n\end{aligned}$$

其中，为使最后一步成立，应有

$$
\begin{aligned}
& c\lg n \geq c\lg(n+2) - c + 1 \\
\Rightarrow \quad & -1 \geq c(\lg(n+2) - \lg n - 1) \\
\Rightarrow \quad & c \geq \frac{1}{1 - \lg\dfrac{n+2}{n}}, & n > 2 \\
\Rightarrow \quad & c \geq \frac{1}{1 - \lg\dfrac{5}{3}} = \frac{1}{\lg\dfrac{6}{5}}, & n > 2
\end{aligned}
$$

取 $c = \dfrac{1}{\lg\dfrac{6}{5}}$，假设 $T(1) = 1$，由递归式可得

$$
\begin{aligned}
T(2) = & T(\lceil 2/2 \rceil) + 1 \\
= & T(1) + 1 \\
= & 2 \\
< & \frac{1}{\lg\dfrac{6}{5}} \\
= & c\lg 2
\end{aligned}
$$

因此 c 的取值对于 $n \geq 2$ 都是合适的。 □

4 Exercise 4.4-8

对递归式 $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$。利用递归树给出一个渐进紧确解，其中 $a \geq 1$ 和 $c > 0$ 是常数。

解 递归树如图1所示，则整棵树的总代价为 $T(n) = 3c(n-a) = \Theta(n)$。

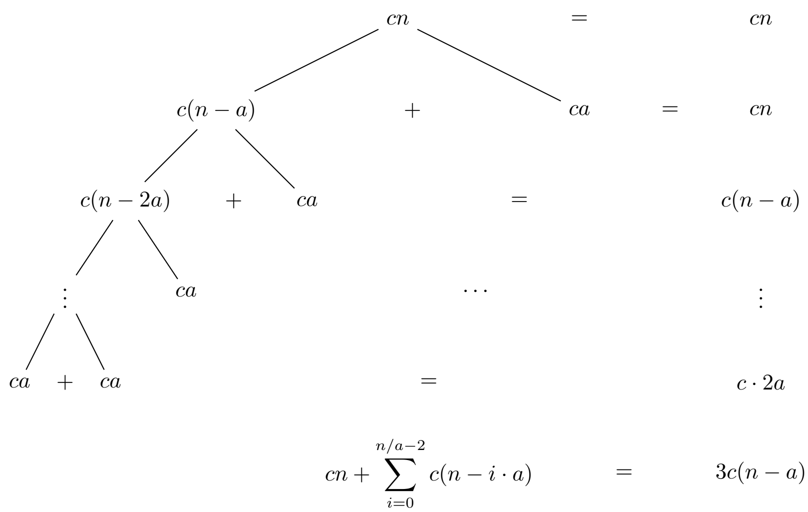

图 1: 为递归式 $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$ 构造递归树

5 Exercise 4.5-1

对下列递归式，使用主方法求出渐进紧确界。

b $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

d $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

解

b 对于这个递归式，我们有 $a = 2$，$b = 4$，$f(n) = \sqrt{n}$，因此 $n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = n^{1/2}$。由于 $f(n) = \sqrt{n} = \Theta\left(n^{1/2}\right)$，因此可以应用主定理的情况 2，从而得到解 $T(n) = \Theta\left(n^{1/2}\lg n\right)$。

d 对于这个递归式，我们有 $a = 2$，$b = 4$，$f(n) = n^2$，因此 $n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = n^{1/2}$。由于 $f(n) = n^2 = \Omega\left(n^{\log_4 2+\varepsilon}\right)$，其中 $\varepsilon = 3/2$，因此如果可以证明正则条件成立，即可应用主定理的情况 3。当 n 足够大时，对于 $c = 1/8$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 2\left(\frac{n}{4}\right)^2 \le \frac{1}{8}n^2 = cf(n)$$

因此，由情况 3，递归式的解为 $T(n) = \Theta\left(n^2\right)$。

6 Exercise 4.5-4

主方法能应用于递归式 $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$ 吗？请说明为什么可以或者为什么不可以。给出这个递归式的一个渐进上界。

解 不可以应用主定理。

对于这个递归式，有 $a = 4$，$b = 2$，$f(n) = n^2 \lg n$，因此 $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$。对任意常数 $\varepsilon > 0$

$$\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \frac{n^2 \lg n}{n^2} = \lg n = o(n^{\varepsilon})$$

因此主定理的三种情况都不成立。

下面用构造递归树（如图2所示）并用代入法证明的方法给出这个递归式的渐进上界。整棵递归树的代价为

$$\begin{aligned}
T(n) = & \sum_{i=0}^{\log_2 n} n^2(\lg n - i) \\
= & \sum_{i=0}^{\lg n - 1} n^2 \lg n - n^2 \sum_{i=1}^{\lg n} i \\
= & n^2 \lg^2 n - n^2 \frac{\lg n(\lg n + 1)}{2} \\
= & \frac{1}{2} n^2 \lg^2 n - \frac{1}{2} n^2 \lg n \\
= & O(n^2 \lg^2 n)
\end{aligned}$$

下证递归式 $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n = O(n^2 \lg^2 n)$，即证恰当选择常数 $c > 0$，可有 $T(n) \le cn^2 \lg^2 n$。首先假定此上界对所有正数 $m < n$ 都成立，特别是对于 $m = n/2$，有 $T(n/2) \le c(n/2)^2 \lg^2 (n/2)$。将其代入递归式，得

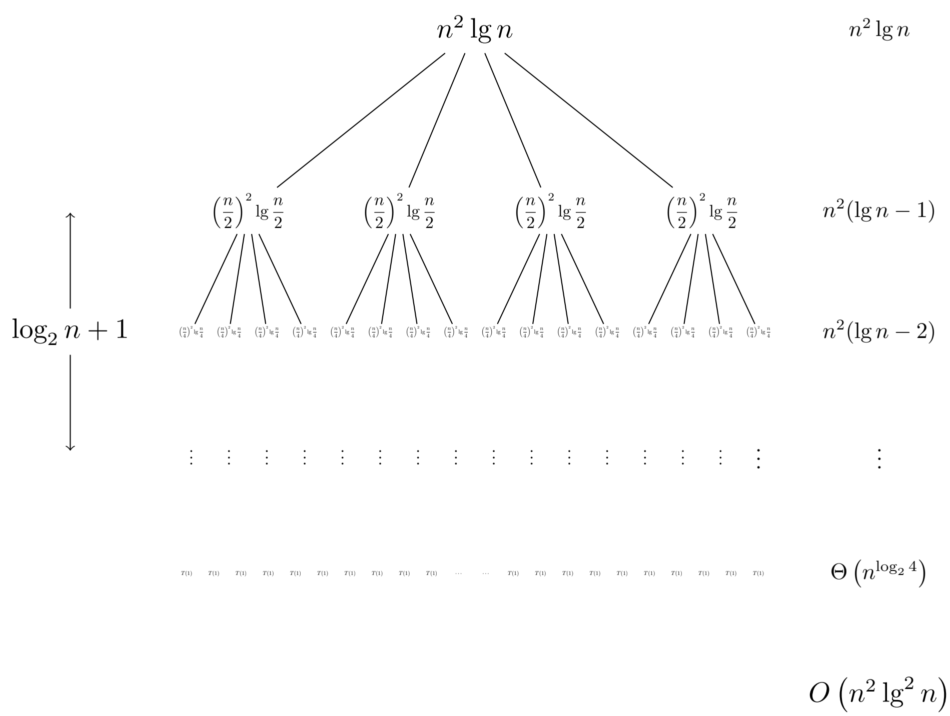

图 2: 为递归式 $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$ 构造递归树

到

$$\begin{aligned}
T(n) \leq & 4c\left(\frac{n}{2}\right)^2 \lg^2 \frac{n}{2} + n^2 \lg n \\
= & cn^2(\lg n - 1)^2 + n^2 \lg n \\
\leq & cn^2 \lg^2 n
\end{aligned}$$

其中，为使最后一步成立，应有

$$\begin{aligned}
& cn^2(\lg n - 1)^2 + n^2 \lg n \leq cn^2 \lg^2 n \\
\Rightarrow \quad & c(1 - 2\lg n) + n^2 \lg n \leq 0 \\
\Rightarrow \quad & c \geq \frac{\lg n}{2\lg n - 1}, \qquad n \geq 2 \\
\Rightarrow \quad & c \geq \frac{\lg 2}{2\lg 2 - 1} = 1, \qquad n \geq 2
\end{aligned}$$

即 $n \geq 2$ 时，只要 $c \geq 1$，前式的最后一步都会成立，猜测正确。