

Homework 7

PB17000297 罗晏宸

November 12 2019

1 Problem 15-1 Longest simple path in a directed acyclic graph

给定一个有向无环图 $G = (V, E)$ ，边权重为实数，给定图中两个顶点 s 和 t 。设计动态规划算法，求从 s 到 t 的最长加权简单路径。

解 由于 G 是有向无环图，且算法要求的是一条简单路径。因此不需要考虑回路，记 $W(uv)$ 是边 uv 的权重，记 $L(G, p, q)$ 是在图 G 中从 p 到 q 的最长加权简单路径的长度，给出转移方程如下

$$L(G, p, q) = \begin{cases} \max_{pp' \in E} \{W(pp') + L(G \setminus \{p\}, p', q)\}, & p \neq q \\ 0, & p = q \end{cases} \quad (1)$$

记录算法中每一次最大值计算对应的路径，即可得到最长加权简单路径。

2 Exercise 16.2-2

设定动态规划算法求解 0-1 背包问题，要求运行时间为 $O(nW)$ ， n 为商品数量， W 是小偷能放进背包的最大商品总重量。

解 设 $F[i, w]$ 表示前 i 件物品恰放入一个容量为 w 的背包可以获得的最大价值，给出状态转移方程：

$$F[i, w] = \max \{F[i-1, w], F[i-1, w-w_i] + v_i\} \quad (2)$$

其中 w_i 与 v_i 分别是第 i 件物品的重量和价值。

据此给出算法伪代码如下：

```
0-1 KNAPSACK( $n, W, w, v$ )
1   $F[0, 0..W] = 0$ 
2  for  $i = 1$  to  $n$ 
3      for  $w = w_i$  to  $W$ 
4           $F[i, w] = \max \{F[i - 1, w], F[i - 1, w - w_i] + v_i\}$ 
5  return  $F[n, W]$ 
```

3 Problem 15-6 Planning a company party

一位公司主席正在向 Stewart 教授咨询公司聚会方案。公司的内部结构关系是层次化的，即员工按主管-下属关系构成一棵树，根结点为公司主席。人事部按“宴会交际能力”为每个员工打分，分值为实数。为了使所有参加聚会的员工都感到愉快，主席不希望员工及其直接主管同时出席。

公司主席向 Stewart 教授提供公司结构树，采用左孩子右兄弟表示法（参见课本 10.4 节）描述。每个节点除了保存指针外，还保存员工的姓名和宴会交际评分。设计算法，求宴会交际评分之和最大的宾客名单。分析算法复杂度。

解 由于主席不希望员工及其直接主管同时出席，对于结构树上的一个结点，若将其加入宾客名单，则不能将其左孩子及其左孩子的全部右兄弟加入名单。设 T 表示公司结构树，其属性 $root$ 对应公司主席、 $number$ 对应全公司人数。 $C[i]$ 表示结构树上以结点 i 为根的子树的最大宴会交际评分之和，其中 i 是结点在 T 中的后序遍历序号，记 $GuestList[i]$ 是 $C[i]$ 对应的宾客名单。

COMPANY PARTY PLAN(T)

```

1  for  $i = 1$  to  $T.number$ 
2      if  $i.left-child == \text{NIL}$ 
3           $C[i] = i.conviviality$ 
4           $GuestList[i] = \{i.name\}$ 
5      else
6           $C[i] = \max \left\{ \sum_{j.parent=i} C[j], \sum_{j.parent.parent=i} C[j] + i.conviviality \right\}$ 
7          add  $\arg \max \left\{ \{j | j.parent = i\}, \{j | j.parent.parent = i\} \right\}$  into
               $GuestList[i]$ 
8  return  $GuestList[T.root]$ 

```

由于在循环中需要向前寻找 i 的孩子和孙子，所以算法的时间复杂度是 $O(n^2)$ 的。

4 Exercise 16.2-5

设计一个高效的算法，对实数线上给定的一个点集 x_1, x_2, \dots, x_n ，求一个单位长度闭区间的集合，包含所有给定的点，并要求此集合最小。证明你的算法是正确的。

解 本题可以用贪心的思想解决，对于给定的点集，设其中最小的点是 x_{min} ，则在给出的单位长度闭区间集合 s_1, s_2, \dots, s_m （假设按左端点从小到大排列）中，在一个最优解中一定有 $x_{min} \in s_1$ ，且 $s_1 = [x_{min}, x_{min} + 1]$ ，因为若 $\nexists x \in (x_{min}, x_{min} + 1]$ ，则在 $[x_{min} - 1, x_{min} + 1]$ 中的任意单位长度闭区间或 s_1 对于最后的集合元素个数都没有影响，否则 s_1 包含的 $[x_{min}, x_{min} + 1]$ 中的点一定不少于任何单位长度闭区间。则问题可以递归的转化为逐点贪心的过程，得到的集合是最优的。设 $\mathcal{I}[X]$ 表示包含点集 X 中所有点的最小单位长度闭区间个数，则有：

$$\mathcal{I}[X] = \begin{cases} 1 + \mathcal{I}[X \setminus \{x_i | x_i \in [x_{min}, x_{min} + 1], i = 1, \dots, n\}], & X \neq \emptyset \\ 0, & X = \emptyset \end{cases} \quad (3)$$

据此给出算法伪代码如下：

UNIT-LENGTH CLOSED INTERVALS CONTAIN SET(X)

```
1  sort  $X$ 
2  while  $X \neq \emptyset$ 
3      add  $[X[0], X[0] + 1]$  to the set
4       $X = X \setminus \{x | x \in [X[0], X[0] + 1]\}$ 
5  return the set
```

5 Problem 16-1 a. Coin changing

考虑用最少的硬币找 n 美分零钱的问题。假定每种硬币的面额都是整数。设计贪心算法求解找零问题，假定有 25 美分、10 美分、5 美分和 1 美分四种面额的硬币。证明你的算法能找到最优解。

解 认为最优解即使得找零的硬币最少，为达到这一目的，每次寻找能找的最大面额的硬币，算法用伪代码可表述如下：

COIN CHANGING(n)

```
1   $quarter = 0$ 
2   $dime = 0$ 
3   $nickel = 0$ 
4   $penny = 0$ 
5  while  $n \geq 25$ 
6       $quarter = quarter + 1$ 
7       $n = n - 25$ 
8  while  $n \geq 10$ 
9       $dime = dime + 1$ 
10      $n = n - 10$ 
11  while  $n \geq 5$ 
12      $nickel = nickel + 1$ 
13      $n = n - 5$ 
14   $penny = n$ 
```

假设这不是最优解，即存在这样的解 $quarter', dime', nickel', penny'$ ，使得

$$\begin{aligned}
 & n \\
 &= 25quarter' + 10dime' + 5nickel' + penny' \\
 &= 25quarter + 10dime + 5nickel + penny \\
 & \quad quarter' + dime' + nickel' + penny' < quarter + dime + nickel + penny
 \end{aligned}$$

记 $\Delta q = quarter' - quarter$, $\Delta d = dime' - dime$, $\Delta n = nickel' - nickel$, $\Delta p = penny' - penny$ ，则有

$$\begin{cases} \Delta q + \Delta d + \Delta n + \Delta p < 0 \\ 25\Delta q + 10\Delta d + 5\Delta n + \Delta p = 0 \end{cases}$$

若 $\Delta q < 0$ 则必有 $10\Delta d + 5\Delta n + \Delta p > 25|\Delta q| > 0$ ，同理若 $\Delta d < 0$ 则必有 $5\Delta n + \Delta p > 10|\Delta d| > 0$ ，若 $\Delta n < 0$ 则必有 $\Delta p > 5|\Delta n| > 0$ ，因此 $\Delta q = \Delta d = \Delta n = \Delta p = 0$ ，即两解相同，矛盾，因此算法得到的是最优解。