Homework 2

PB17000297 罗晏宸

September 9 2019

1 Exercise 2.3

叙述由下列正规式描述的语言。

(d) 0^* 10^* 10^* 10^*

(e) $(00 \mid 11)^*$ $((01 \mid 10)$ $(00 \mid 11)^*$ $(01 \mid 10)$ $(00 \mid 11)^*$ $)^*$

并针对 (e) 给出识别相同正规集的极小化 DFA。

解

(d) 正规式 0^* 10^* 10^* 10^* 所描述的语言是字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上 1 的数量为 3 的所有串。

(e) 正规式 $(00 \mid 11)^*$ $((01 \mid 10)$ $(00 \mid 11)^*$ $(01 \mid 10)$ $(00 \mid 11)^*$ $)^*$ 所描述的语言是字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上 0 和 1 的数量均为偶数的所有串。

对于 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上任意一个输入串，依据串中 0 和 1 数量的奇偶性，可分为 4 种状态，DFA 如图1所示，其中：

状态 0 表示串中 0 和 1 的个数都为偶数；

状态 1 表示串中 0 的个数为偶数，1 的个数为奇数；

状态 2 表示串中 0 和 1 的个数都为奇数；

状态 3 表示串中 0 的个数为奇数，1 的个数为偶数.

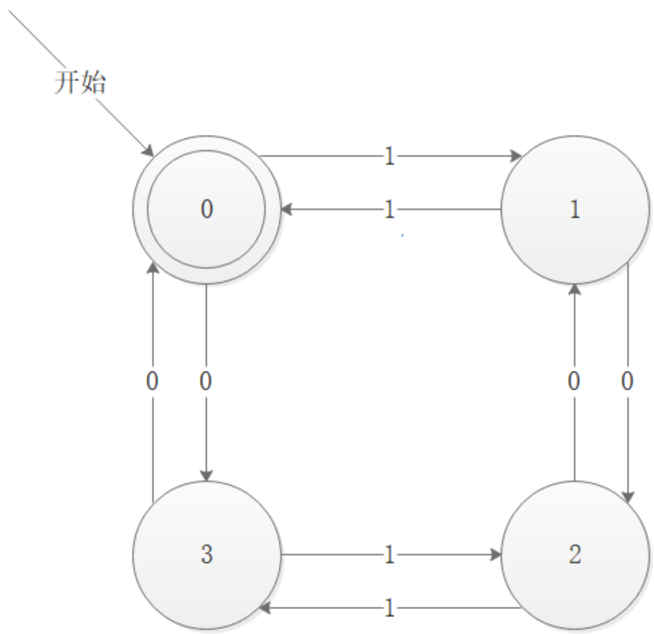

图 1: 接受 0 和 1 的数量均为偶数串的 DFA

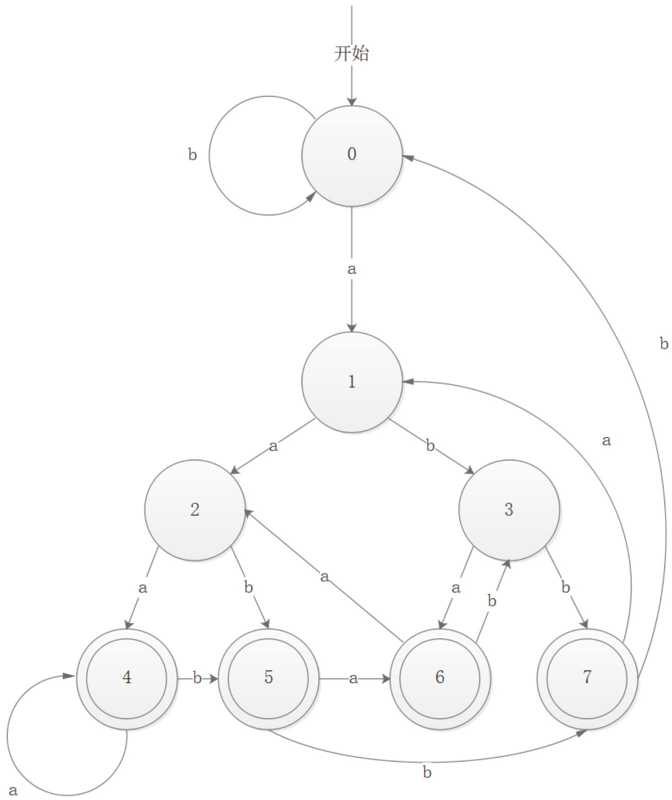

图 2: 接受倒数第 3 个字符是 a 的串的 DFA

2 Exercise 2.12

为下列正规式构造最简的 DFA。

(b) $(a \mid b)^* \, a \, (a \mid b) \, (a \mid b)$

解 此正规式表示字母表 $\Sigma = \{a, b\}$ 上倒数第 3 个字符是 a 的所有串。由于最后两个字符的任意性，状态图应有 4 个接受状态，且状态图应从起始状态经两次分支到达接受状态，再补全 a 或 b 的转换，得图2

下面进行简化。

1 初始划分 Π：接受状态子集 $F = \{4, 5, 6, 7\}$，非接受状态子集 $I = S - F = \{0, 1, 2, 3\}$；

2 考查 $I = \{0, 1, 2, 3\}$：$0 \xrightarrow{a} 1$，$1 \xrightarrow{a} 2$，$2 \xrightarrow{a} 4$，$3 \xrightarrow{a} 6$，故将 I 划分成 $I_1 = \{0, 1\}$ 和 $I_2 = \{2, 3\}$。考查 $I_1 = \{0, 1\}$：$0 \xrightarrow{b} 0$，$1 \xrightarrow{b} 3$；考查 $I_2 = \{2, 3\}$：$2 \xrightarrow{b} 5$，$3 \xrightarrow{b} 7$。

3 考查 $F = \{4, 5, 6, 7\}$：$4 \xrightarrow{a} 4$，$5 \xrightarrow{a} 6$，$6 \xrightarrow{a} 2$，$7 \xrightarrow{a} 1$，故将 F 划分成 $F_1 = \{4, 5\}$ 和 $F_2 = \{6, 7\}$。考查 $F_1 = \{4, 5\}$：$4 \xrightarrow{b} 5$，$5 \xrightarrow{b} 7$；考查 $F_2 = \{6, 7\}$：$6 \xrightarrow{b} 3$，$7 \xrightarrow{b} 5$，故将 F_2 划分成 $F_3 = \{6\}$ 和 $F_4 = \{7\}$。

4 此时划分为 I_1、I_2、F_1、F_3 和 F_4，即 $\{0, 1\}$、$\{2, 3\}$、$\{4, 5\}$、$\{6\}$ 和 $\{7\}$。考查 $I_1 = \{0, 1\}$：$0 \xrightarrow{a} 1$，$1 \xrightarrow{a} 2$，故将 I_1 划分为 $\{0\}$ 和 $\{1\}$；考查 $I_2 = \{2, 3\}$：$2 \xrightarrow{a} 4$，$3 \xrightarrow{a} 6$，故将 I_2 划分为 $\{2\}$ 和 $\{3\}$；考查 $F_1 = \{4, 5\}$：$4 \xrightarrow{a} 4$，$5 \xrightarrow{a} 6$，故将 F_1 划分为 $\{4\}$ 和 $\{5\}$；

综上，前述 DFA 已为极小。

3 Exercise 2.14

构造一个 DFA，它接受 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上能被 5 整除的二进制数。并针对所得到 DFA M，给出相应的正规式 R，使得 $L(R) = L(M)$。

解 对于字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上所有二进制数，根据其除 5 时的余数 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 设定 5 种状态，而在一个二进制串后增添 0 或者 1 都有明确的计算含义：增添 0 意味着整个串的值乘 2，增添 1 意味着整个串的值乘 2 再加 1，因此余数的变化也能直接的体现在状态转换上，DFA 如图3：

为了给出使得 $L(R) = L(M)$ 的正规式 R，向 DFA M 中引入新的开始

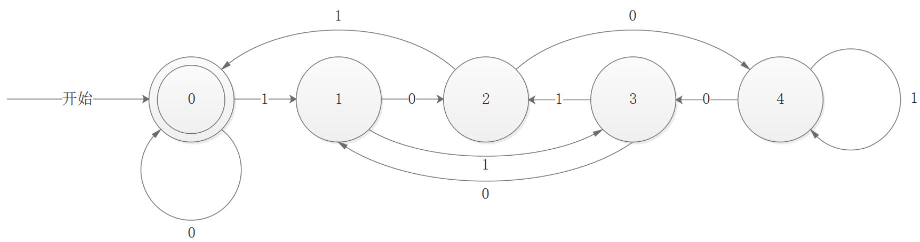

图 3: 接受能被 5 整除的二进制数的 DFA

状态 X 和新的接受状态 Y，再逐个删除 DFA 中的原有状态，得到

$$
\begin{aligned}
R = &\Big(0^* \mid \big(0^*10(10^*10)^*10^*\big)\Big) \Big| \\
&\Big(0^*10(10^*10)^*10^*11\Big(01 \Big| \big((1|00)(10^*10)^*10^*11\big)\Big)^*(1|00)(10^*10)^*10^*\Big) \Big| \\
&\Big(\Big(0^*10(10^*10)^*10^*11\Big(01 \mid \big((1|00)(10^*10)^*10^*11\big)\Big)^*(1|00)(10^*10)^*0\Big) \Big| \\
&\big(0^*10(10^*10)^*0\big)\Big(1\Big|\Big((1|00)(10^*10)^*0\Big(01\Big|\big((1|00)(10^*10)^*10^{8}11\big)\Big)^* \\
&(1|00)(10^*10)^*0\Big)\Big)^*0\Big(01\Big|\big((1|00)(10^*10)^*10^*11\big)\Big)^*(1|00)(10^*10)^*10^*\Big)
\end{aligned}
$$