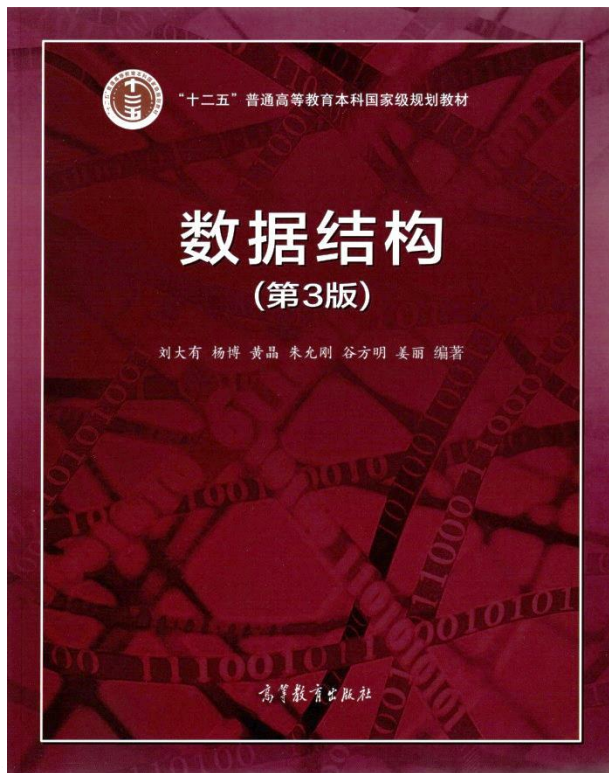




树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- 二叉树的性质



数据之法
结构之美
算法之道

zhuyungang@jlu.edu.cn





慕课自学内容（必看，计入期末成绩）

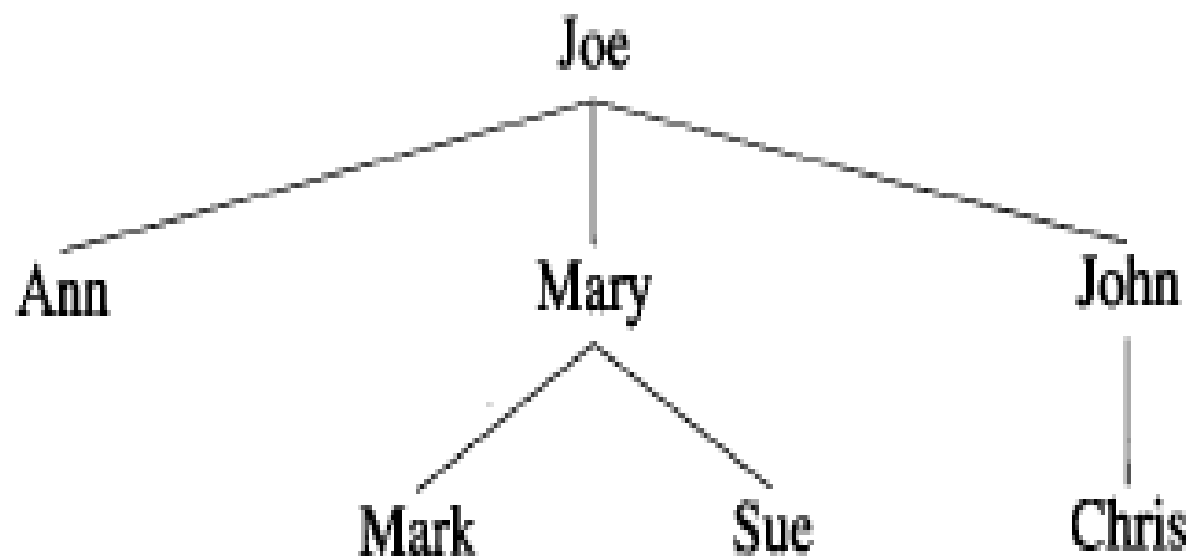
自学内容	视频时长
树的定义	6分58秒
树的相关术语	7分17秒



- ❖ 树结构在客观世界中是大量存在的，例如**家谱**、**行政组织机构**都可用树形象地表示。
- ❖ 树在计算机领域中也有着广泛的应用，例如在编译程序中，用树来表示**源程序的语法结构**；在数据库系统中，可用树来**组织信息**；在分析算法的行为时，可用树来**描述其执行过程**。

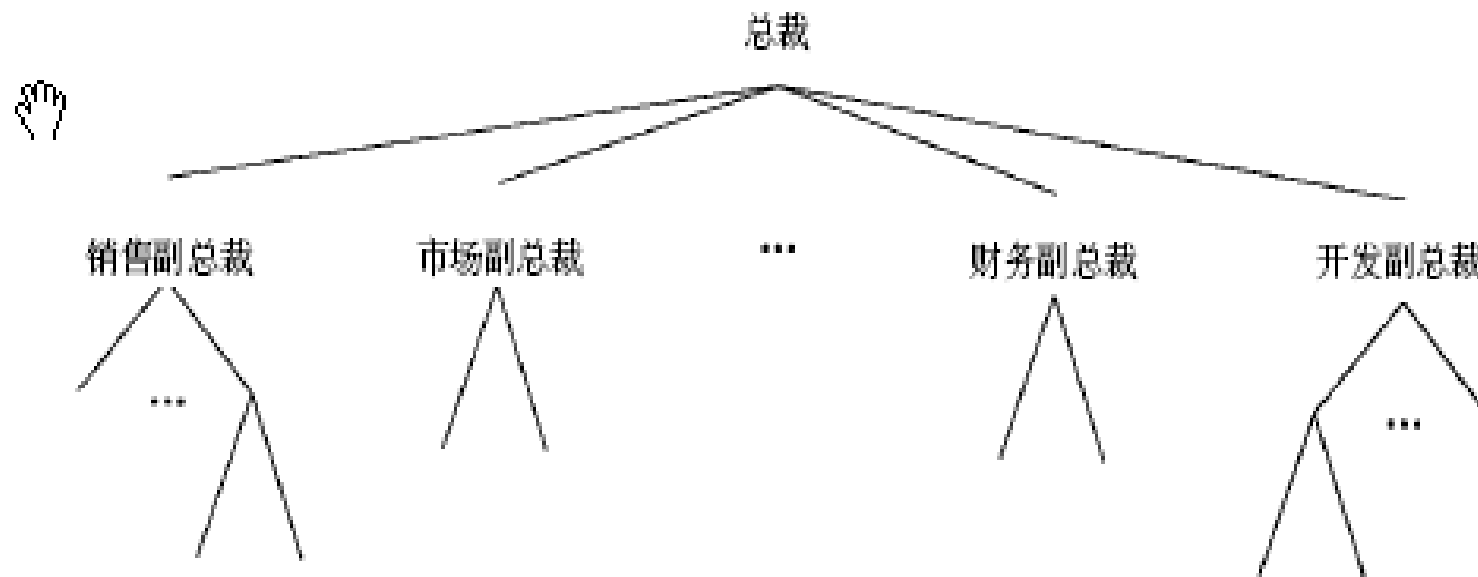
例 [父子关系]

下图给出了按层次方式组织的Joe的后代，其中Joe在最顶层。Joe的孩子（Ann，Mary和John）列在下一层，在父母和孩子间有一条边。在层次表示中，非常容易地找到Ann的兄弟姐妹，Joe的**后代**，Chris的祖先等。



例 [组织管理机构]

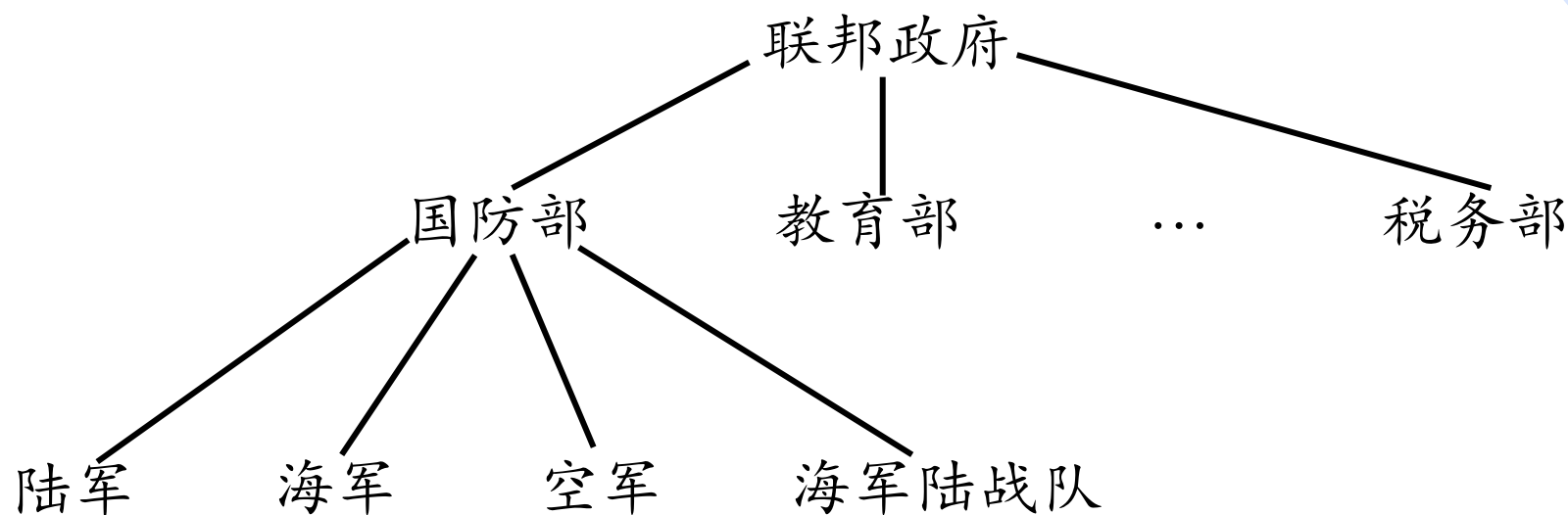
下图展现了一个**组织**管理机构. 此处层次地位最高的人为总裁, 在图中位置最高; 副总裁的地位次之, 在图中位于总裁之下. 副总裁为总裁的下属, 总裁是其上级。每个副总裁都有他自己的下属, 而其下属**可能**又有他们自己的下属。图中, 每个员工若有直接下属或直接上级, 则两者间都有一条边互连。



合作管理结构

例. [政府机构]

下图是联邦政府层次结构图。顶层元素(亦称机构)是联邦政府，下一级是其主要隶属单位，如不同的部。每个部可进一步划分，其分支在下一层示出。例如国防部包括陆军，海军，空军和海军陆战队。每个机构，若有分支机构，则两者间有一条边。下图展现了诸元素间的整体-部分关系。

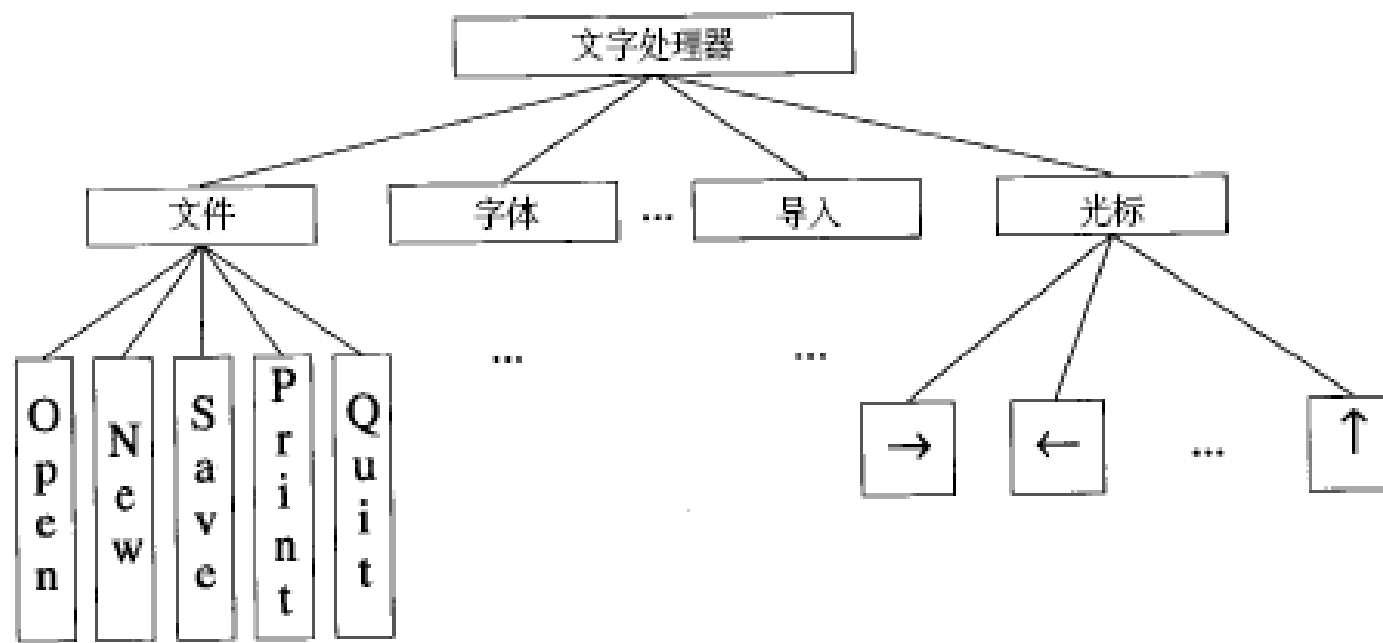


例 [整体-部分关系]



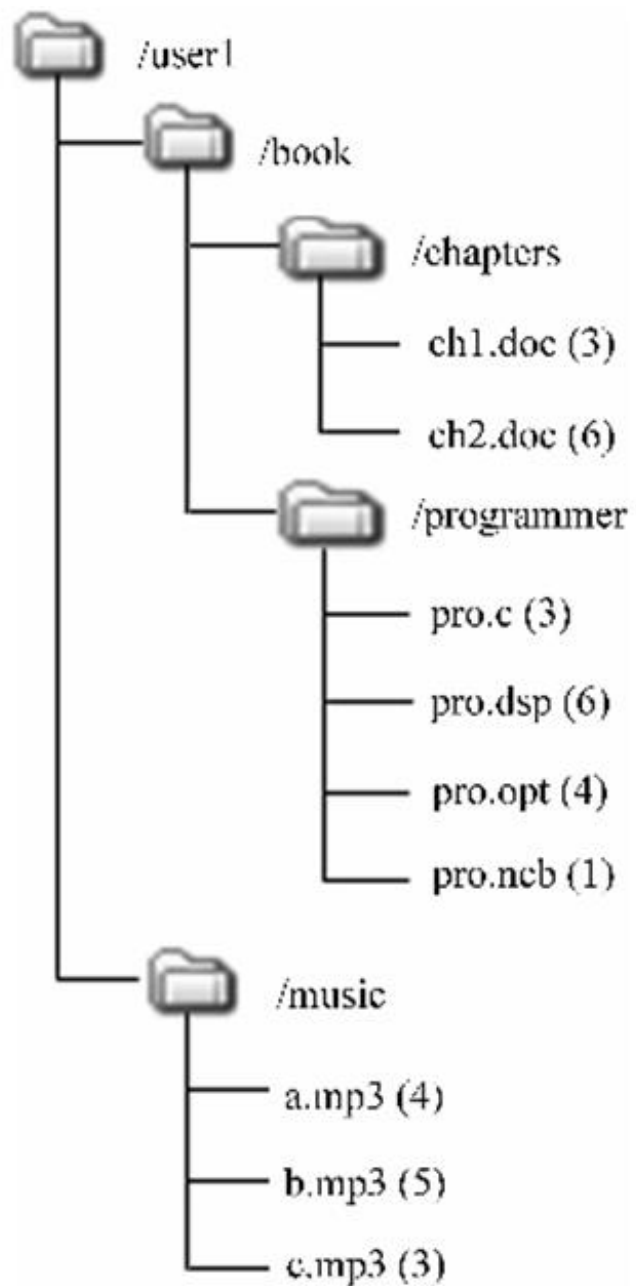
例 [模块化结构关系]

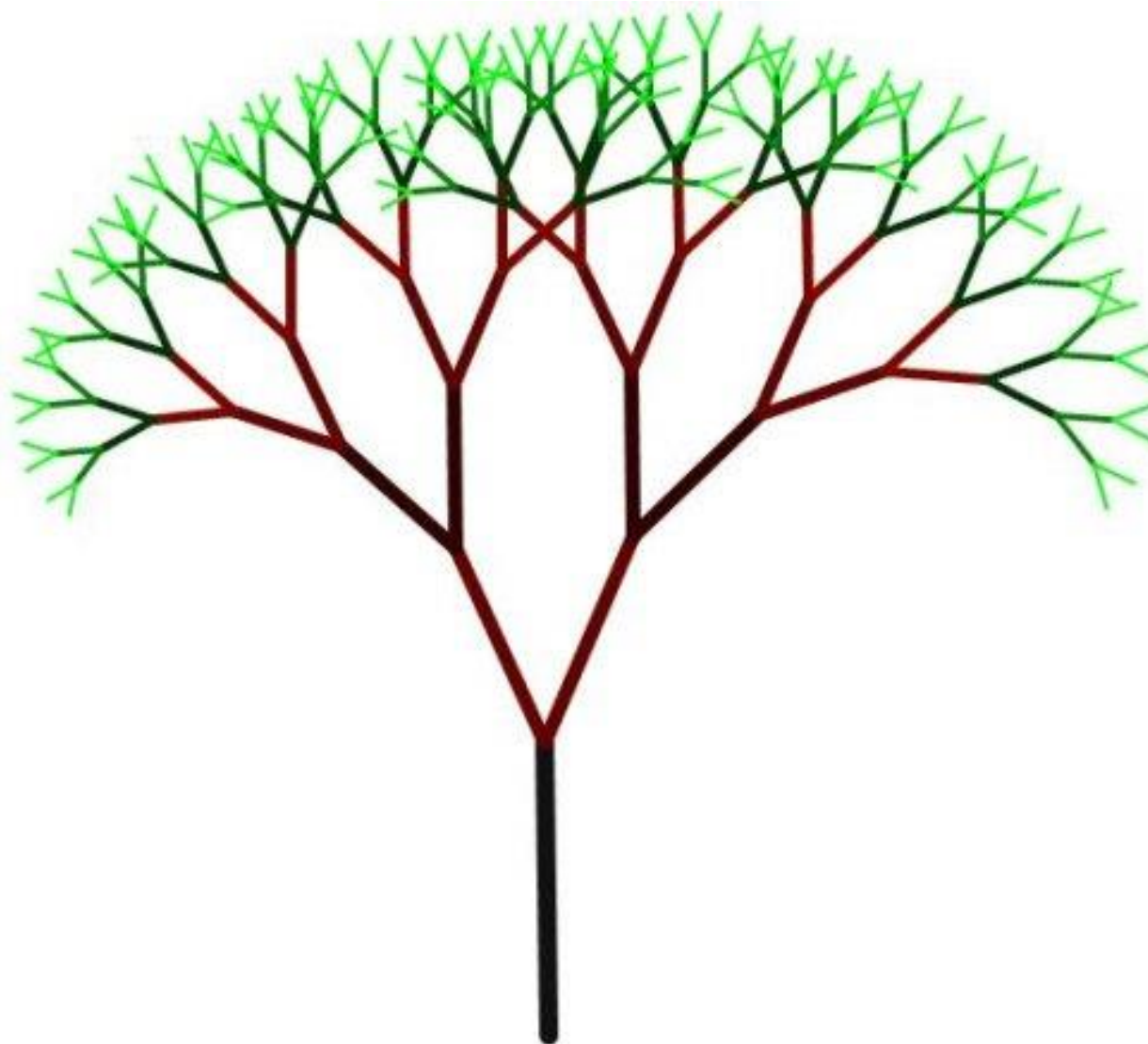
下面考察另一种层次数据——软件工程中的模块化技术。通过模块化，可以把大的复杂的任务分成一组小的不太复杂的任务。模块化的目标是将复杂的大软件系统，分成许多功能独立，较简单、较小的模块，以便多人同时对不同的模块进行开发，因此大大缩短整个软件的开发时间。下图给出了某文字处理器的一种模块分解图。

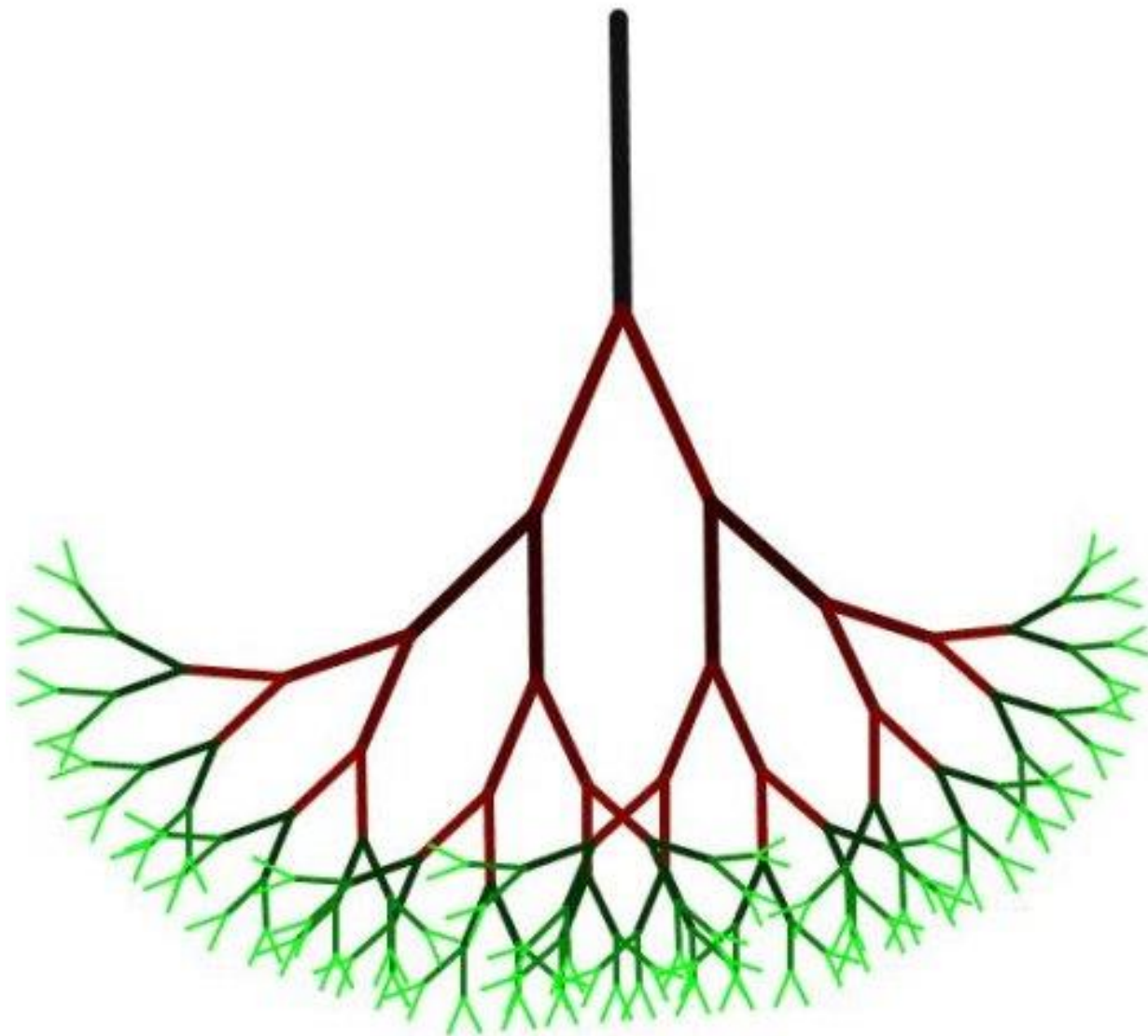


文字处理器的模块层次结构

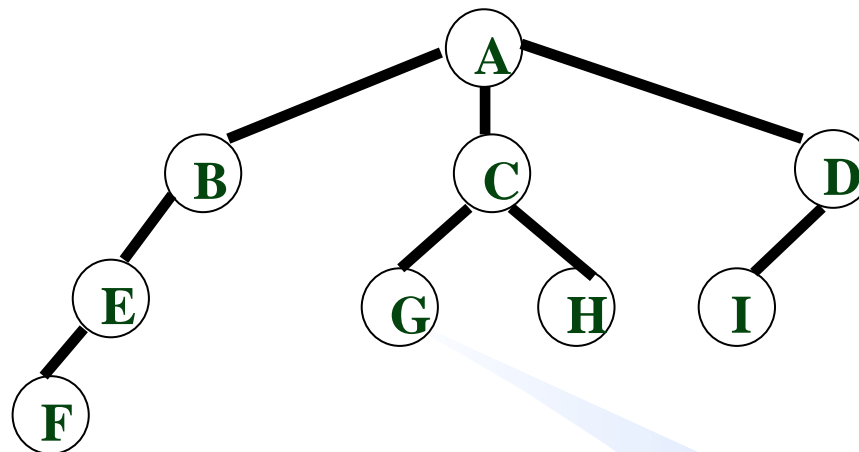
文件系统层次结构







一、树的定义



定义： 一棵树是一个有限的结点集合 T . 若 T 空，则称为空树。

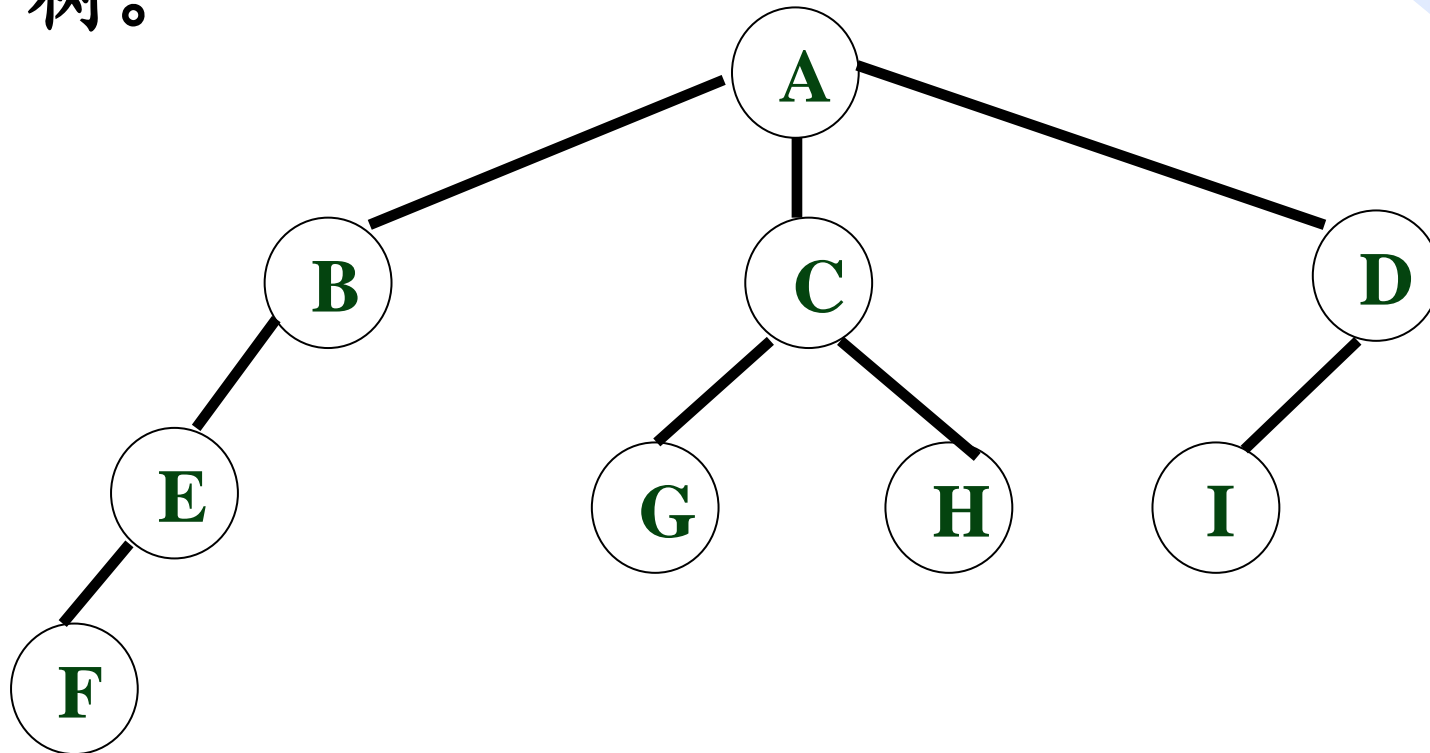
若 T 非空，则：

1. 有一个被称为根的结点，记为 $root(T)$ ；
2. 其余结点被分成 $m(m \geq 0)$ 个不相交的非空集合 T_1, T_2, \dots, T_m ，且 T_1, T_2, \dots, T_m 又都是树，称作 $root(T)$ 的子树。

例：A为**根结点**，有三个**子结点**B、C和D（换句话说，A是B、C和D的**父结点**）；

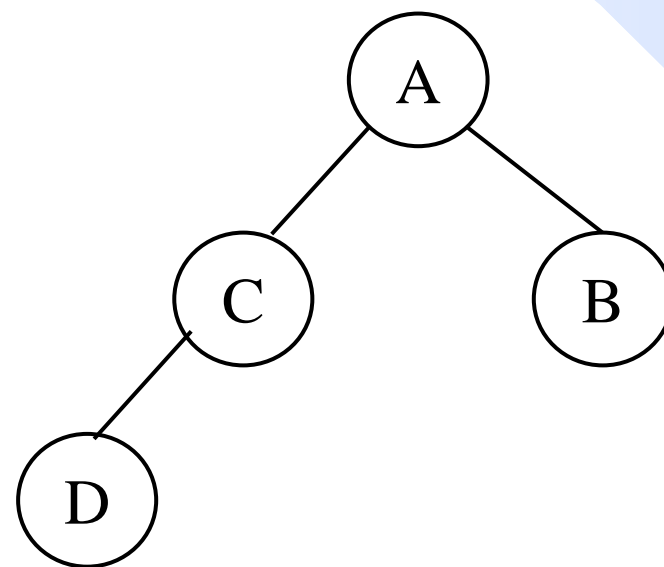
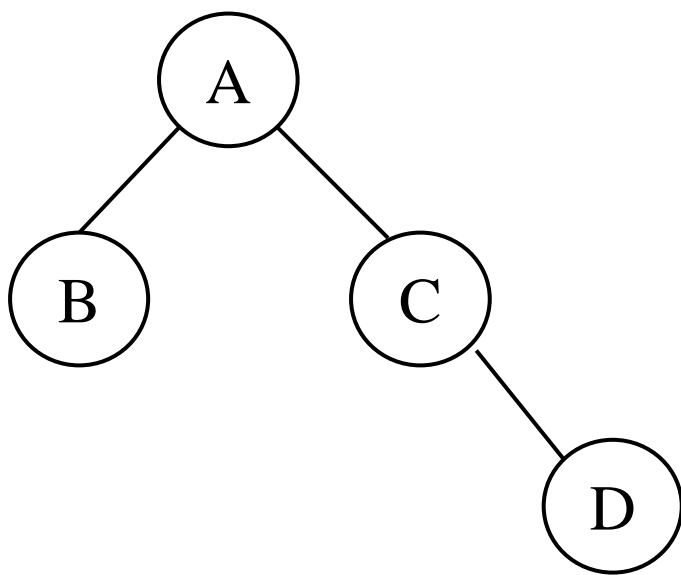
B有一个子结点E；E有一个子结点F；C有两个子结点G和H；F、G、H、I是**叶结点**，因为它们没有子结点。

A有三棵子树。



有序树

如果树的子树 T_1, T_2, \dots, T_m 的相对次序被指明，则称该树为有序树，否则称为无序树。在有序树中，把 T_i 称作根的第 i 个子树。



树与线性结构的比较

线性结构	树结构
首结点(无前驱)	根结点(无前驱)
最后1个数据元素 (无后继)	叶子结点可能多个 (无后继)
其它数据元素 (一个前驱、一个后继)	树中其它结点 (一个前驱、多个后继)



树的相关术语

1. 度

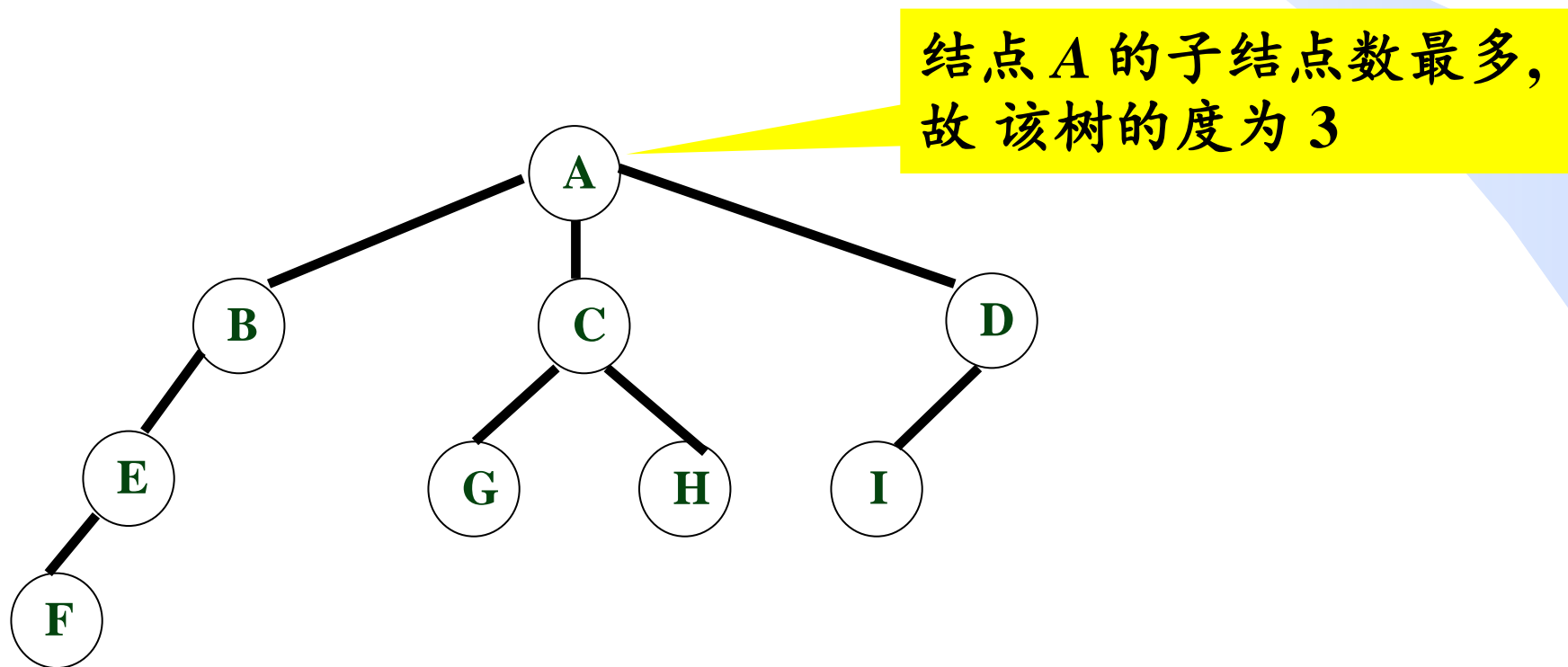
一个结点的子结点的数目，称为该结点的度或者次数。一棵树的度为 $\max_{i=1, \dots, n} D(i)$ ，其中 n 为树中结点总数， i 指树中的第 i 个结点， $D(i)$ 表结点 i 的度。

2. 叶结点、分支结点

度为0的结点（即没有孩子的结点）被称为叶结点；
度 > 0 的结点被称为分支结点（即非叶结点）。

树的相关术语

在图中： B 有一个子结点 E ，度为1； A 有三个子结点 B 、 C 和 D （换言之， A 是 B 、 C 和 D 的父结点），度为3。因为在这棵树中，结点 A 的子结点数最多，故这棵树的度为3。





3. 结点的层数/深度

树形 T 中结点的层数递归定义如下：

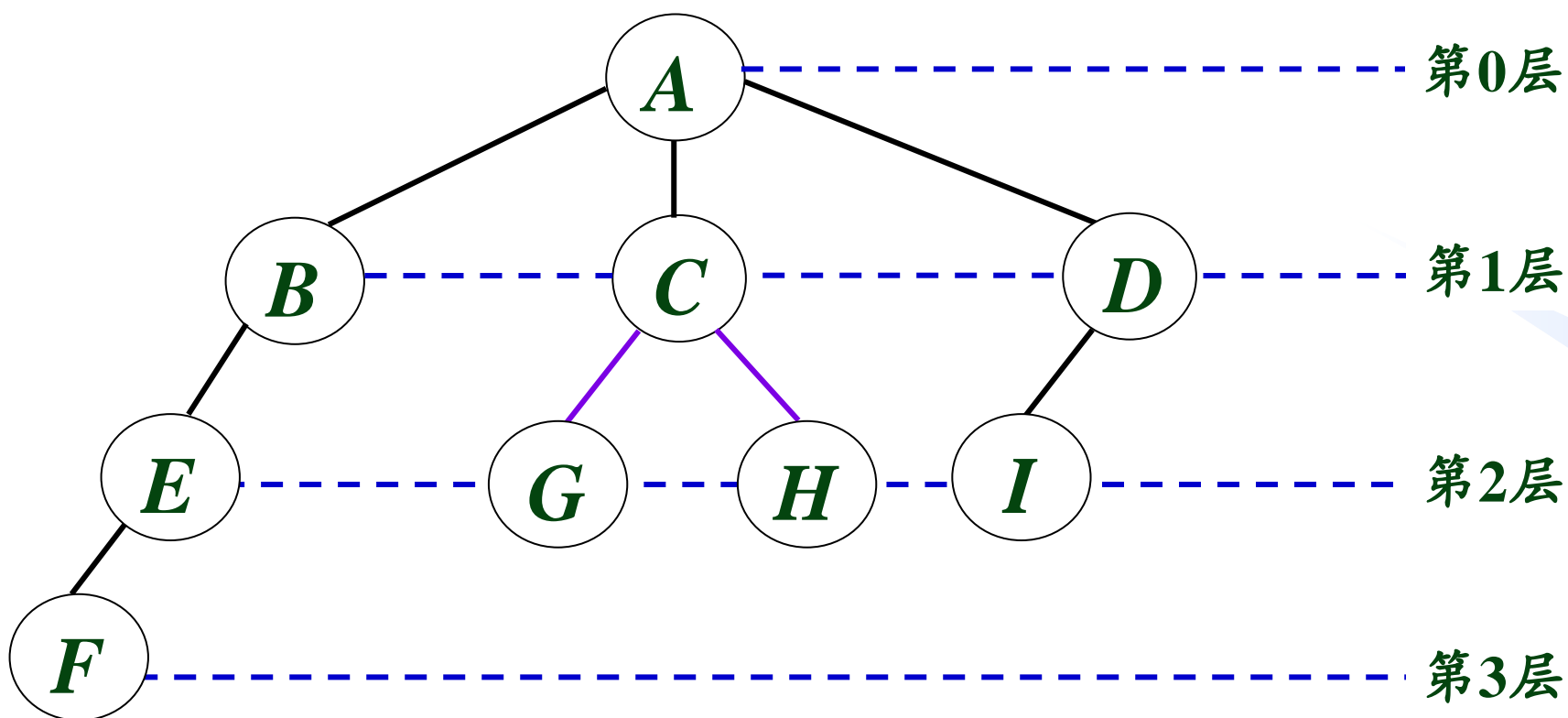
- (1) $root(T)$ 层数为0；
- (2) 其余结点的层数为其父结点的层数加1。

4. 树的高度/深度

树的高度为树中结点的最大层数。

5. 结点的高度

以该结点为根的子树的高度。



	高度	深度
结点	以该结点为根的子树的高度	结点所在层数
树	树中结点的最大层数	

树中 F 、 G 、 H 、 I 为叶结点，其余结点为分支结点。结点 A 为根，其层数/深度为 0；结点 F 的层数/深度为 3；该树高度/深度为 3。结点 B 的高度为 2，结点 C 的高度为 1。



5. 路径

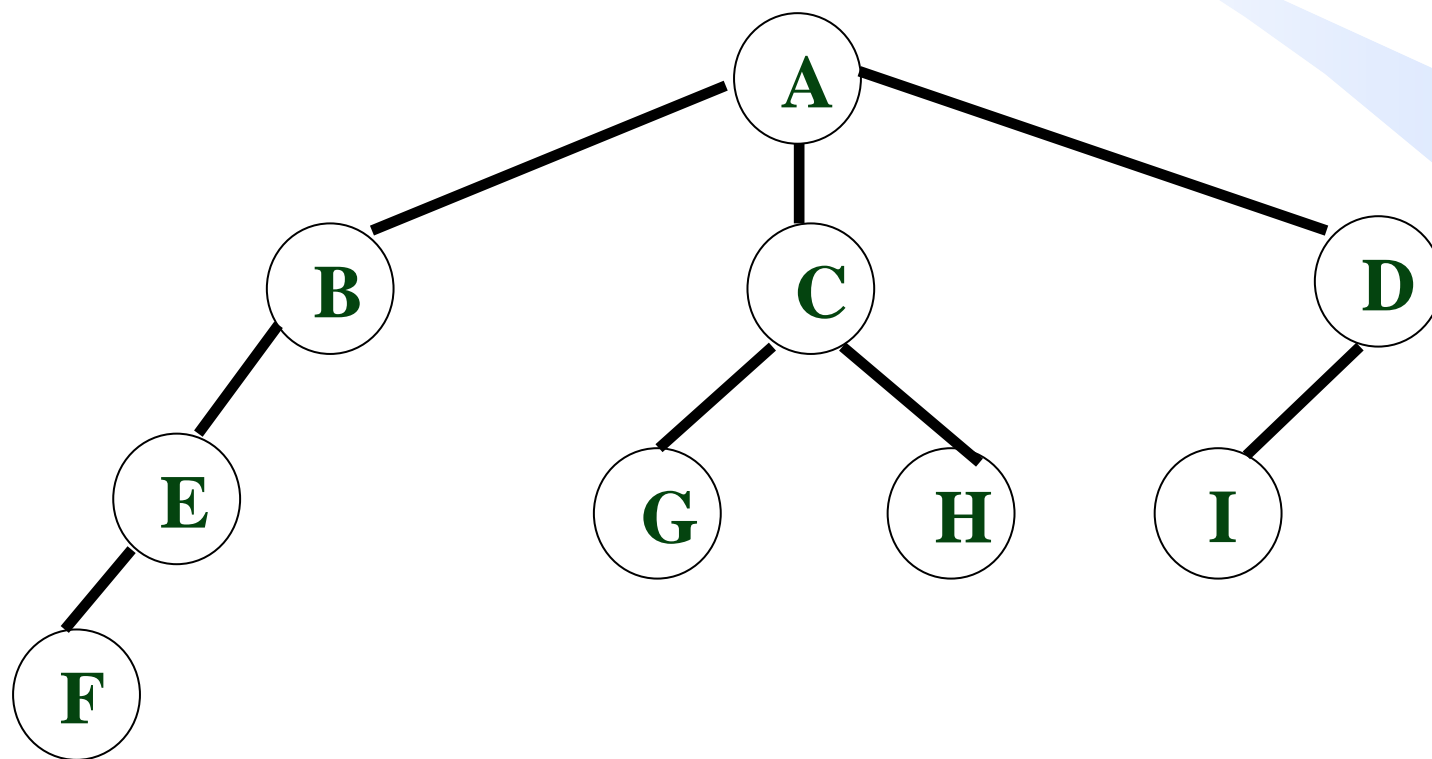
树形中结点间的连线被称为边。若树形 T 中存在结点序列 $v_m \rightarrow v_{m+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{m+k}$, $1 \leq k \leq T$ 的最大层数, 满足 v_{i+1} 是 v_i ($m \leq i \leq m+k-1$) 的子结点, 则称此结点序列为 v_m 到 v_{m+k} 的路径, 该路径所经历的边数 k 被称为路径长度。

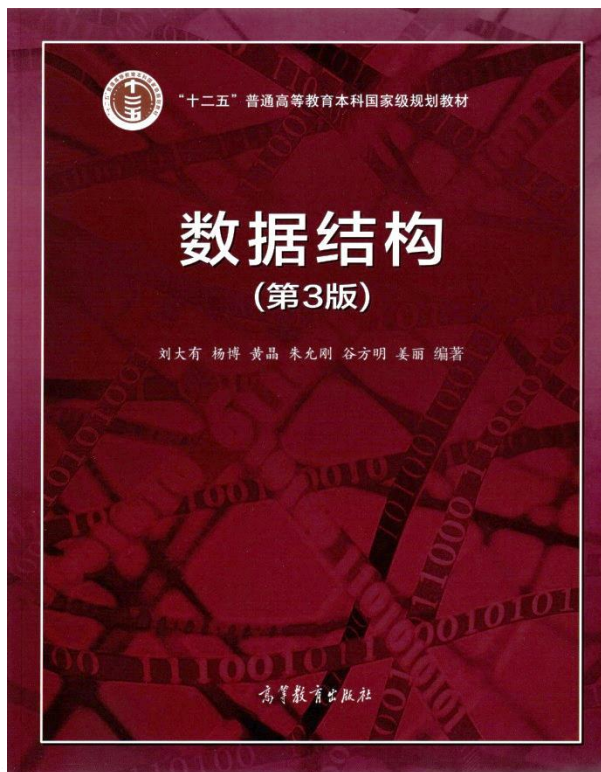
从根结点到某个结点的路径长度恰为该结点的层数。

6. 子孙结点、祖先结点

一棵树中若存在结点 v_m 到 v_n 的路径, 则称 v_n 为 v_m 的子孙结点, v_m 为 v_n 的祖先结点。

从A到F的路径为A-B-E-F，路径长度为3。结点F的层数也为3。
A是F的祖先结点，F是A的子孙结点。





树和二叉树定义和性质

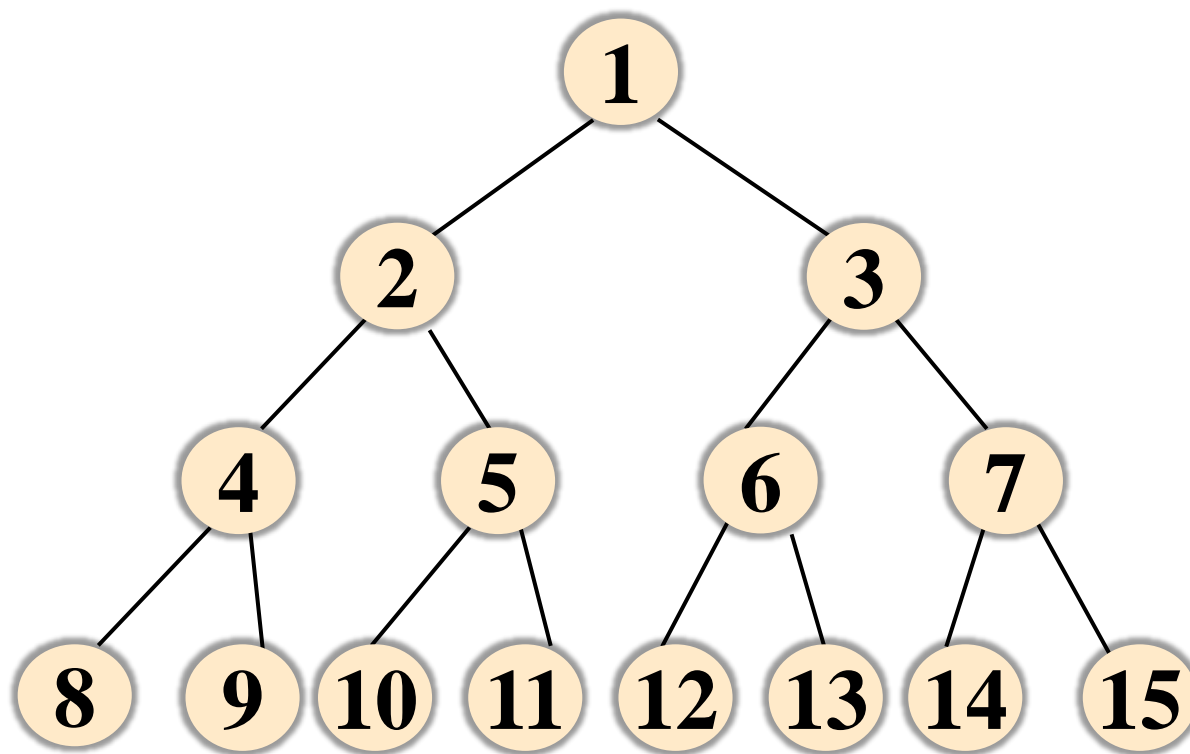
- 树的定义（慕课自学）
- **二叉树的定义**
- 二叉树的性质

数据之法
结构之美
算法之道

zhuyungang@jlu.edu.cn

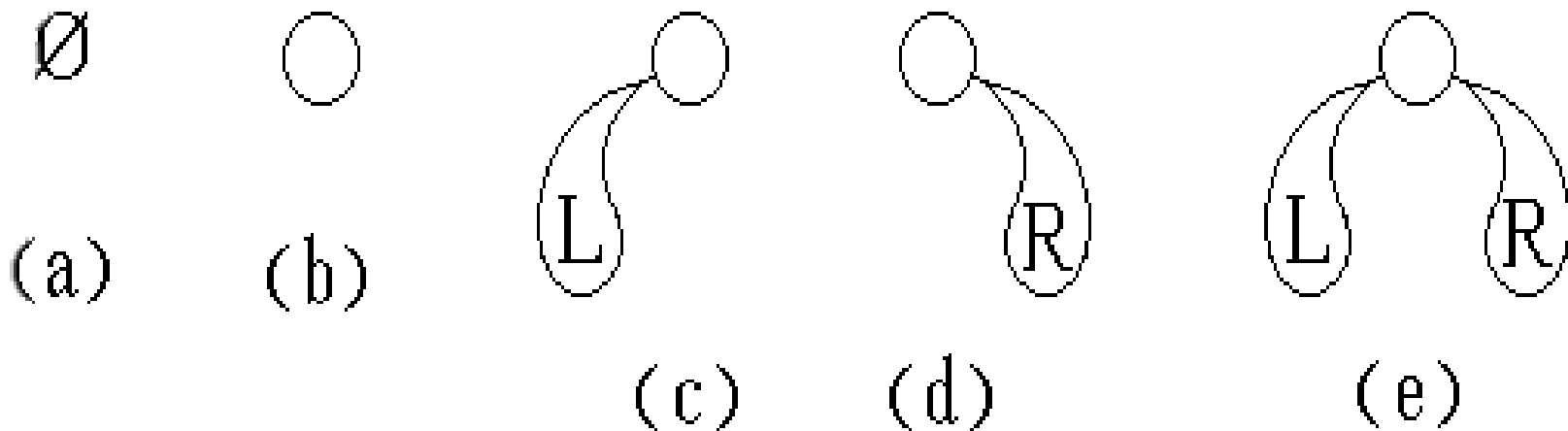
二叉树 (Binary Tree)

定义 二叉树是结点的有限集合，它或者是空集，或者由一个根结点及两棵不相交的称为该根的左、右子树的二叉树组成。



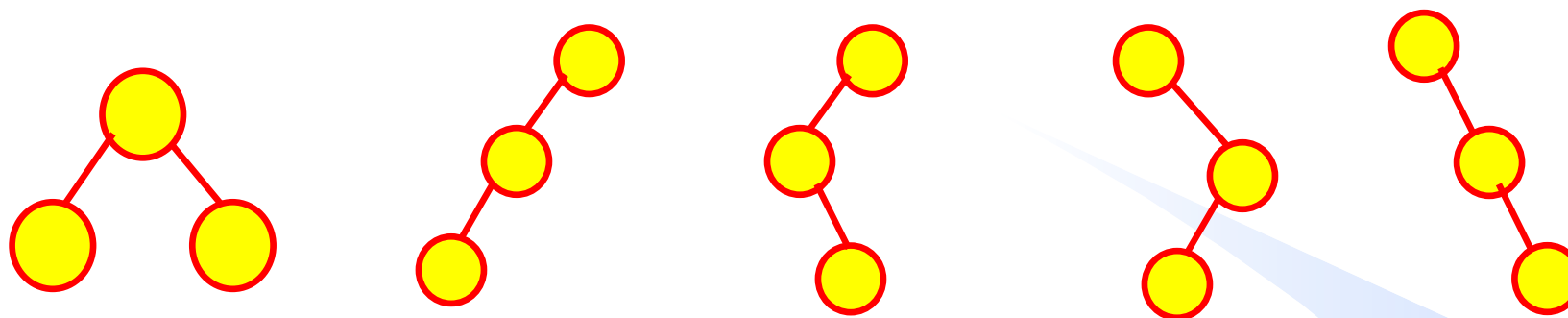
二叉树的特征

- ① 二叉树每个结点最多有2个子结点；
- ② 二叉树的子树有左右之分，即使某结点只有一棵子树，也要指明该子树是左子树，还是右子树；



二叉树的五种不同形态

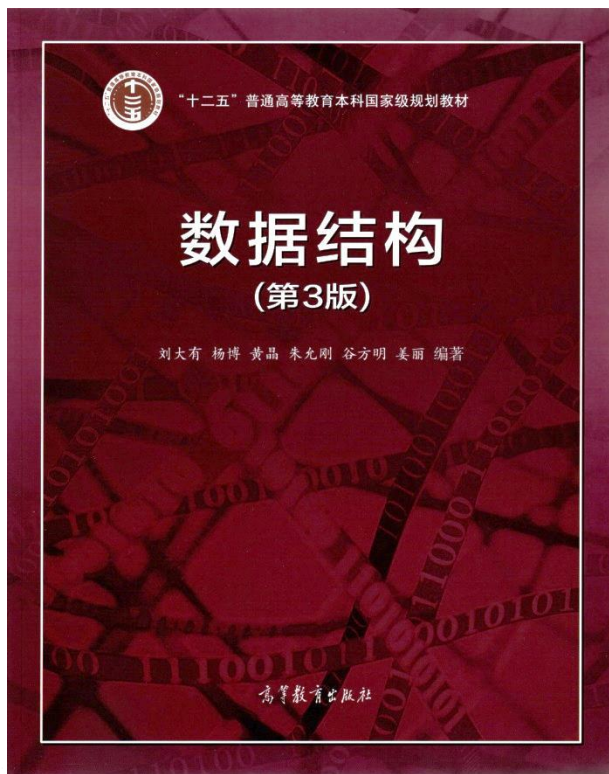
含有3个结点的不同的二叉树的形态



含有3个结点的不同的树的形态



问题：含有 n 个结点的二叉树有多少种的形态？



树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- **二叉树的性质**

数据之法
结构之美
算法之道

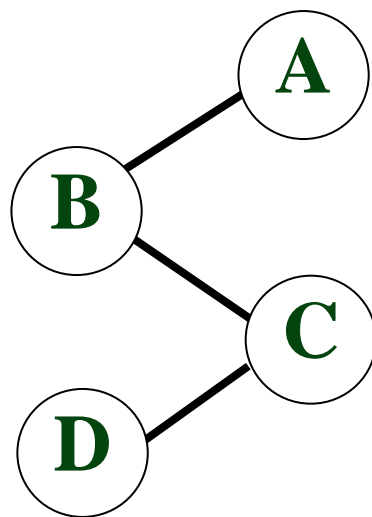
zhuyungang@jlu.edu.cn

引理 二叉树中第 i 层至多有 2^i 个结点, $i \geq 0$ 。

证明: 用数学归纳法。

- 当 $i=0$ 时, 仅有一个根结点, 其层数为0, 因此 $i=0$ 时引理成立。
- 假定当 $i=k$ ($k \geq 0$)时, 引理成立, 即第 k 层上至多有 2^k 个结点。
- 对于二叉树的任意结点, 其子结点个数最大为2, 故第 $k+1$ 层上至多有 $2^k \times 2 = 2^{k+1}$ 个结点, 因此当 $i=k+1$ 时, 引理成立。
- 证毕 ■

- 高度为 k ($k \geq 1$)的二叉树中至少有 $k+1$ 个结点。
- 含有 k ($k \geq 1$)个结点的二叉树高度至多为 $k-1$ 。
- 如下图是高度为3结点最少的二叉树之一。



有4个结点、高度为3的二叉树



引理 高度为 k 的二叉树中至多有 $2^{k+1}-1$ ($k \geq 0$)个结点。

根据之前引理：第 i 层至多有 2^i 个结点

第0层上至多有 2^0 个结点，

第1层上至多有 2^1 个结点，

.....

第 k 层上至多有 2^k 个结点，

因此，高度为 k 的二叉树中至多有

$2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ 个结点。证毕

引理 在 n 个结点构成的二叉树中，若叶结点个数为 n_0 ，度为2的结点个数为 n_2 ，则有： $n_0 = n_2 + 1$ 。

证明：设度为1的结点有 n_1 个，总结点个数为 n ，总边数为 e ，则 $n = n_0 + n_1 + n_2$

$$e = n - 1 \quad (\text{从下往上看})$$

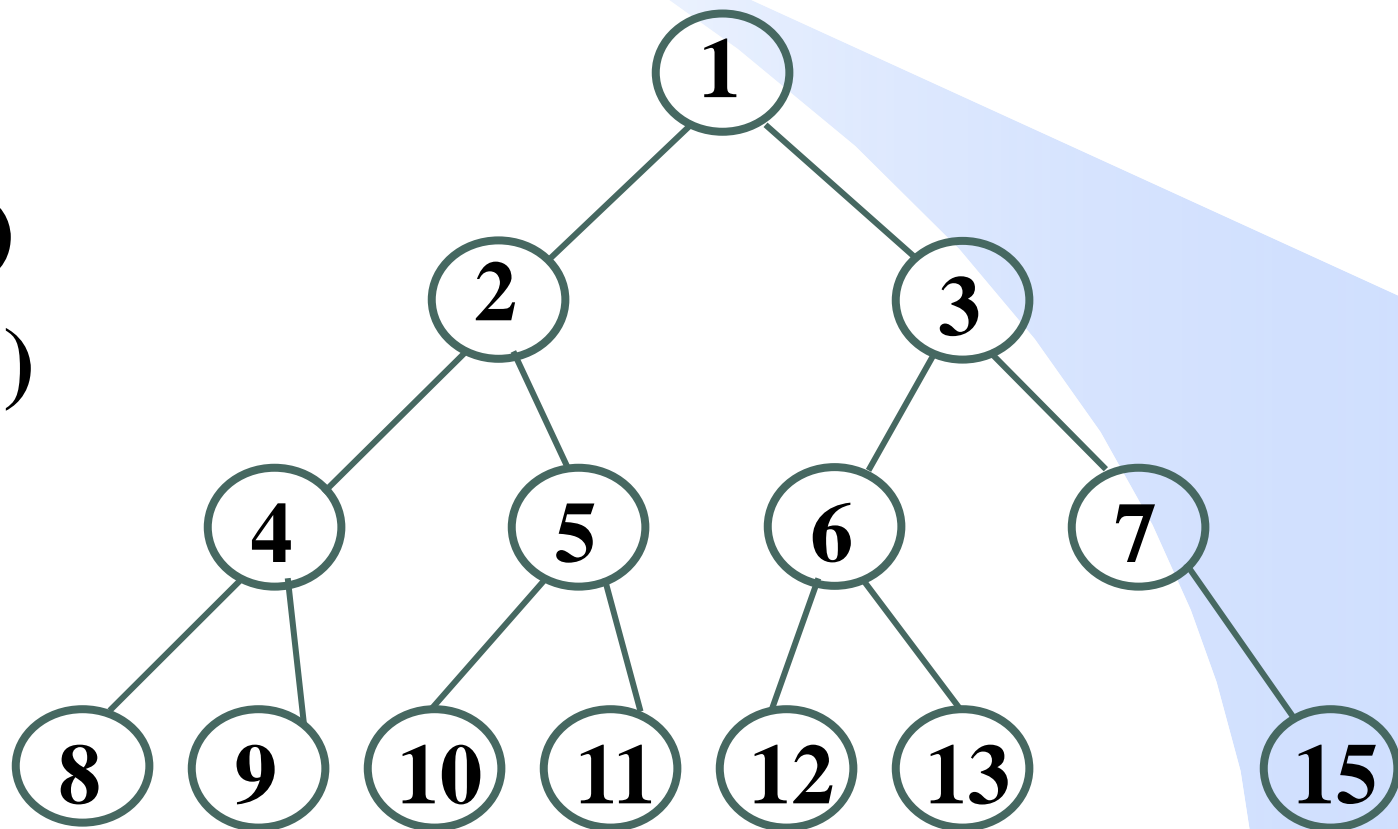
$$e = 2n_2 + n_1 \quad (\text{从上往下看})$$

因此，有

$$2n_2 + n_1 = n - 1$$

$$= n_0 + n_1 + n_2 - 1$$

$$\therefore n_0 = n_2 + 1. \text{ 证毕}$$





练习

若一棵二叉树具有10个度为2的结点，5个度为1的结点，则度为0的结点个数为_____。【腾讯校园招聘笔试题】

A. 9

B. 11

C. 15

D. 不确定

$$n_0 = n_2 + 1$$



练习

若二叉树有32个结点且度为1的结点有7个，则叶结点的个数为_____。【搜狗校园招聘笔试题】

A. 13

B. 14

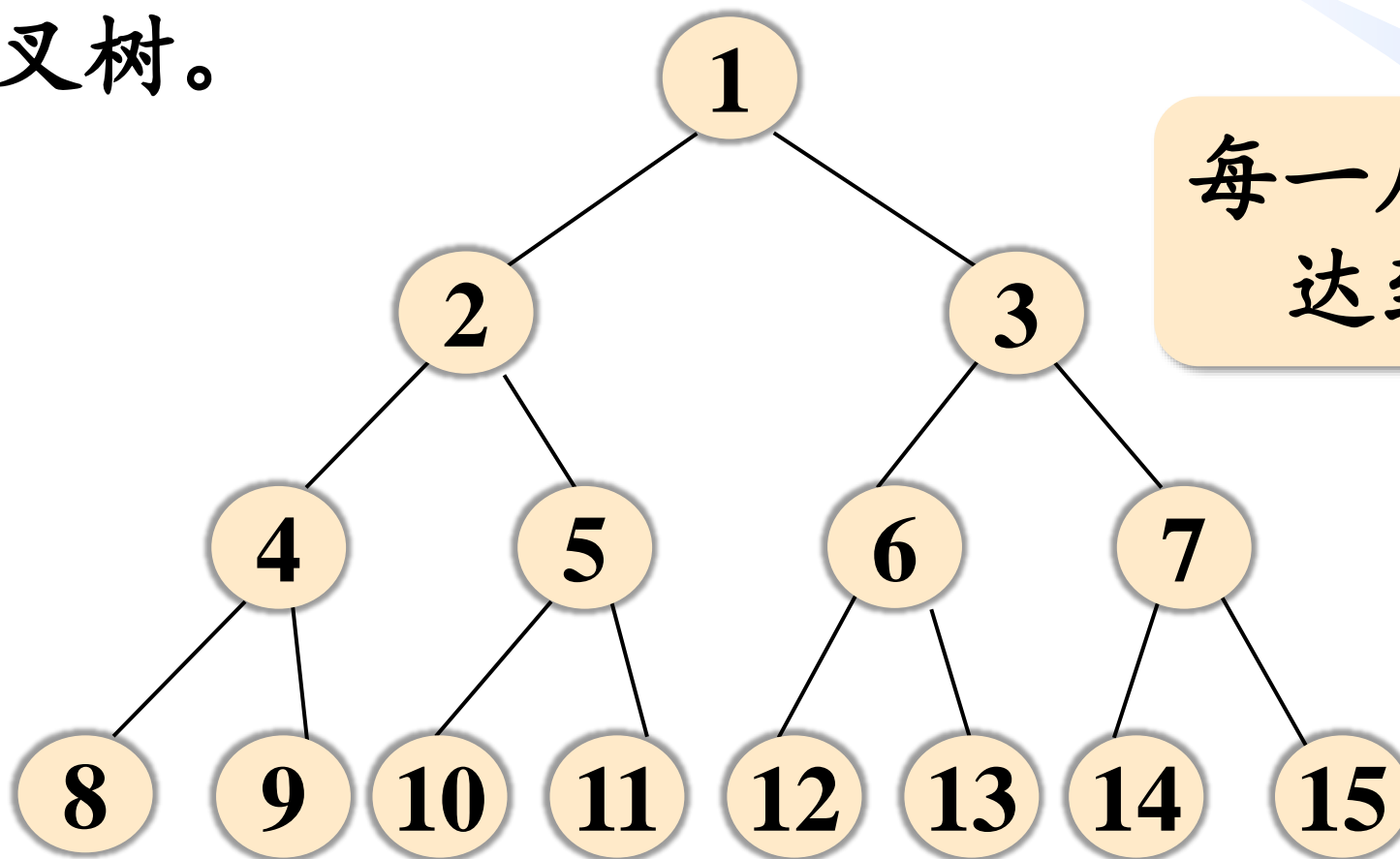
C. 12

D. 15

$$n_0 + n_2 = 25 \qquad n_0 = n_2 + 1$$

满二叉树的定义

一棵非空高度为 k ($k \geq 0$)的满二叉树，是有 $2^{k+1}-1$ 个结点的二叉树。

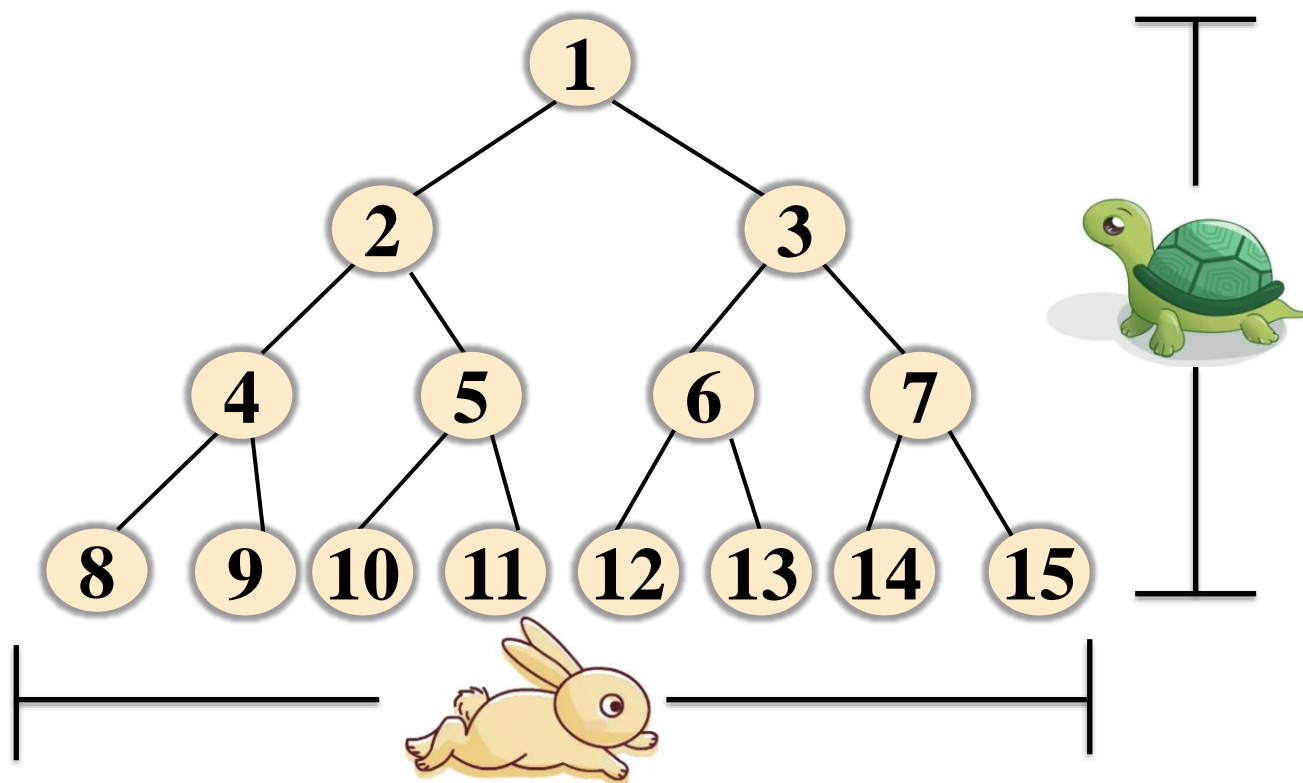


每一层都充满了结点
达到最大结点数

满二叉树的特点

- ① 叶结点都在最后一层;
- ② 每个非叶结点都有两个子结点;
- ③ 叶结点的个数等于非叶结点个数加1。

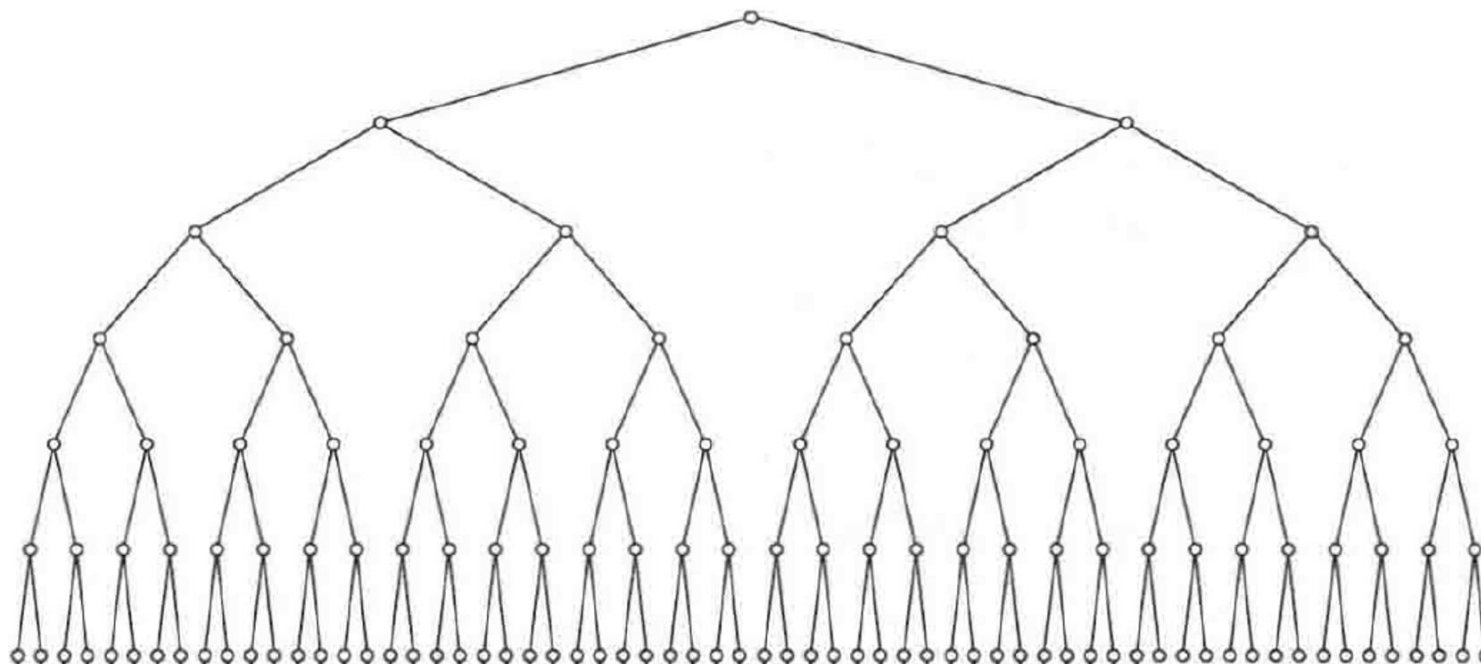
引理 $n_0 = n_2 + 1$.



练习

一棵满二叉树有 k 个叶结点，则其结点总数为 $2k-1$ 。

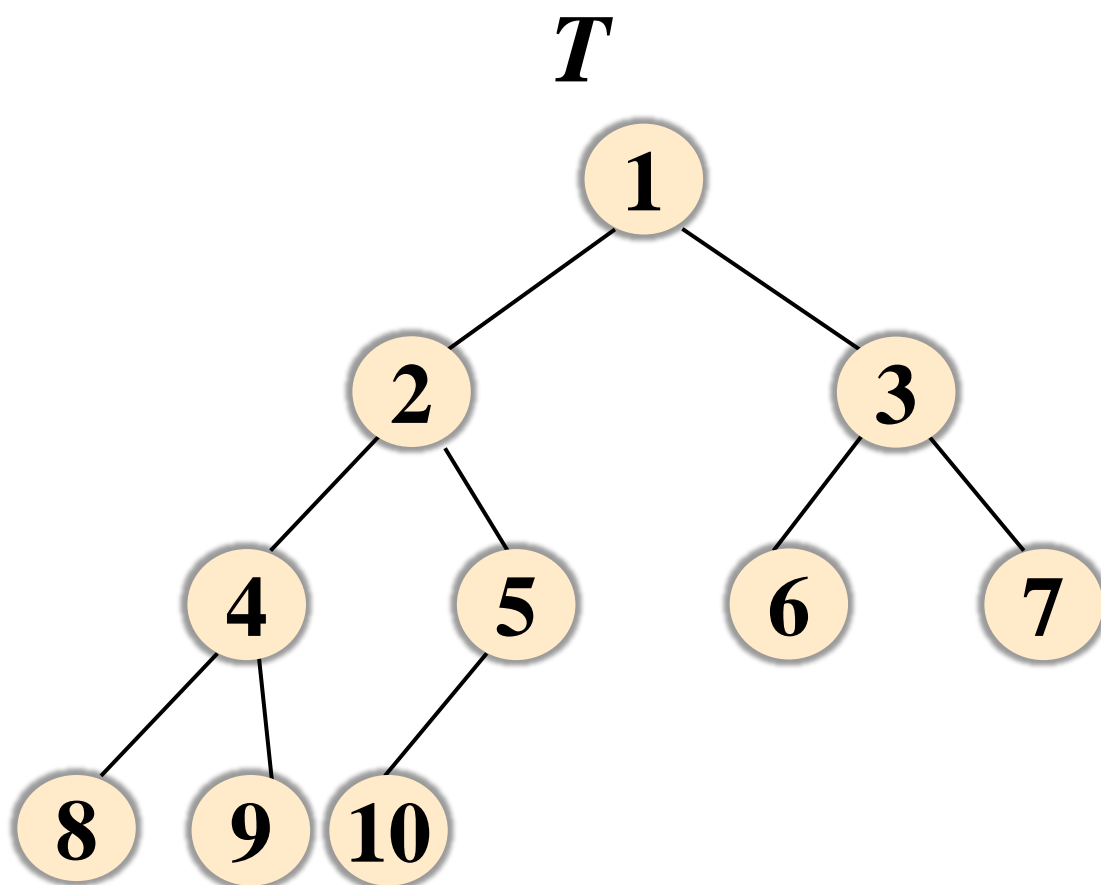
【2018年考研题全国卷】





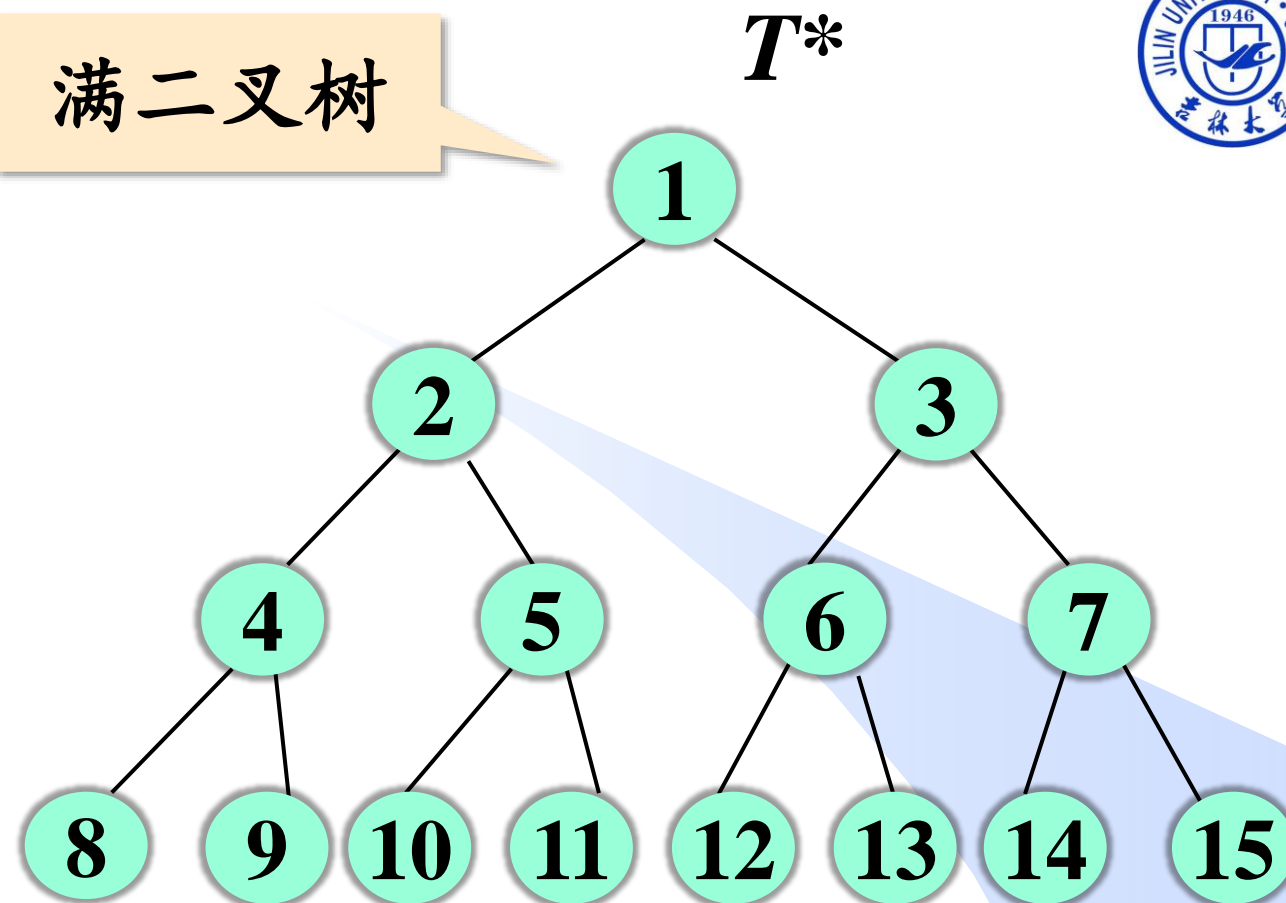
完全二叉树

- 给定一棵有 n 个结点、高为 k 的二叉树 T ，一棵高为 k 的**满二叉树** T^* ；
- 用正整数按**层次顺序**分别编号 T 和 T^* 的所有结点；
- 如果 T 之所有结点恰好对应于 T^* 的前 n 个结点，则称 T 为**完全二叉树**。
- **层次顺序**：按层数从上至下（即从第0至第 k 层），同层结点由左到右的次序。



完全二叉树

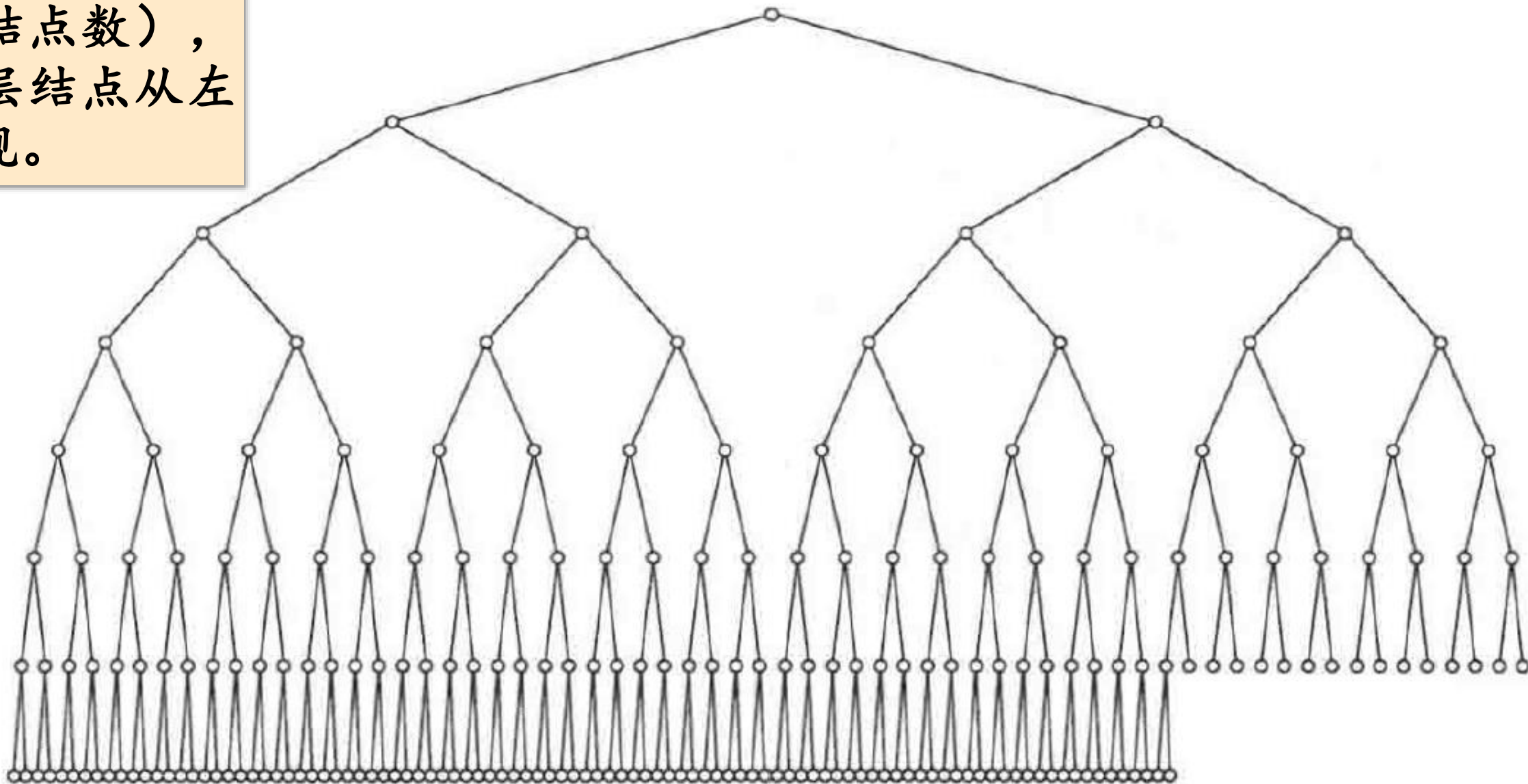
满二叉树



特点：除最下一层外，每一层都是满的（达到最大结点数），最后一层结点从左至右出现。

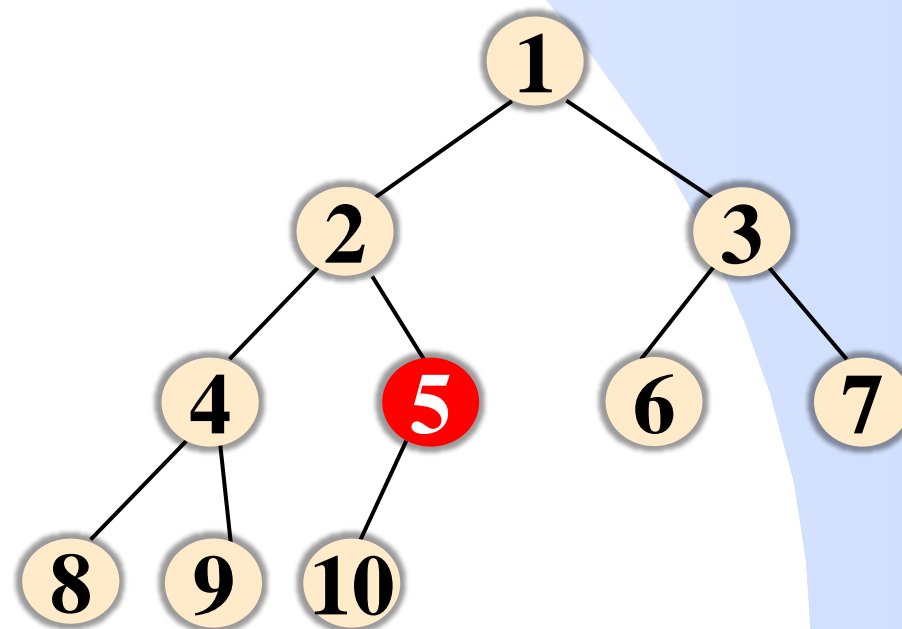
完全二叉树

除最下一层外，每一层都是满的（达到最大结点数），最后一层结点从左至右出现。



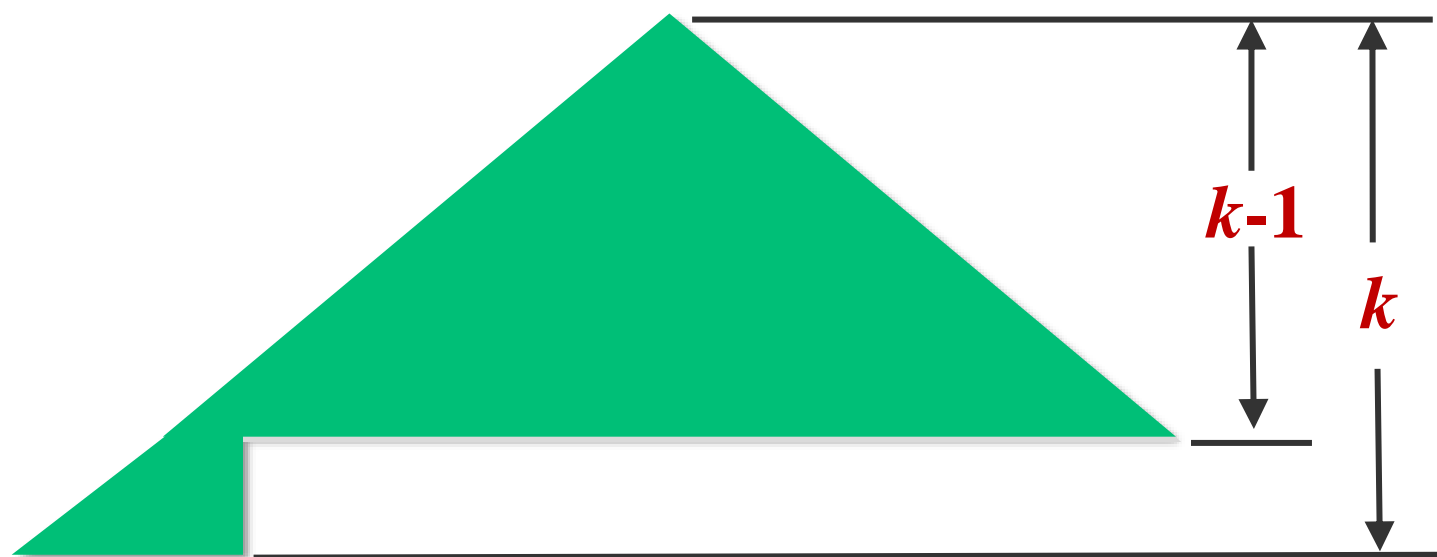
完全二叉树的特点

- 只有最下面两层结点的度可以小于2;
- 最下面一层的结点都集中在该层最左边的若干位置上;
- 叶结点只可能在最后两层出现;
- 对所有结点, 按层次顺序从1开始编号, 仅**编号最大的非叶结点**可以没有右孩子, 其余非叶结点都有两个子结点。



练习

高度为 k 的完全二叉树最少有 2^k 个结点。

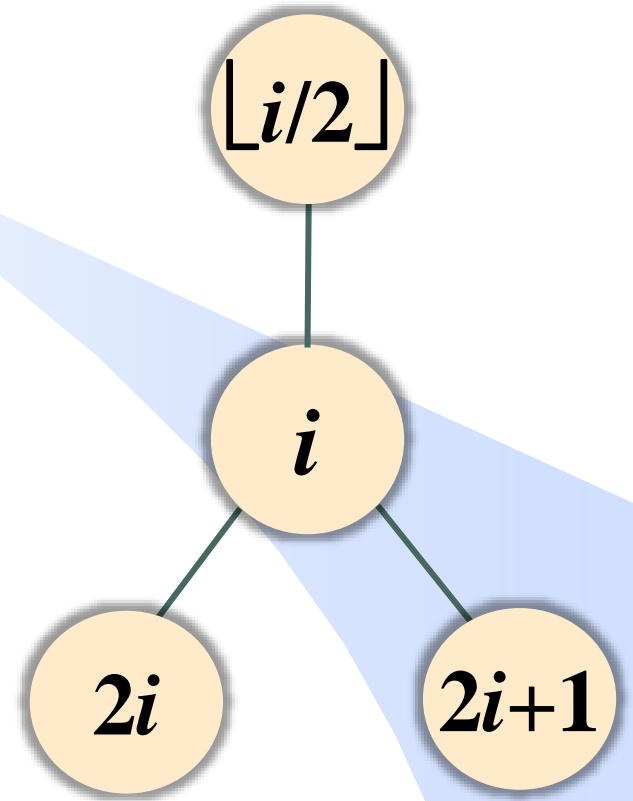


高度为 $k-1$ 的满二叉树再加1个结点

引理 高度为 k 的二叉树中至多有 $2^{k+1}-1$ 个结点

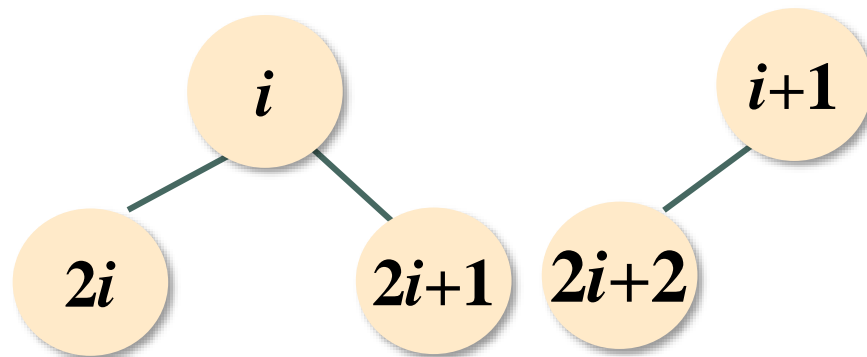
引理 若将一棵具有 n 个结点的完全二叉树按层次顺序从1开始编号，则对编号为 i ($1 \leq i \leq n$)的结点有：

- ① 若 $i \neq 1$ ，则编号为 i 的结点的父结点的编号为 $\lfloor i/2 \rfloor$ 。
- ② 若 $2i \leq n$ ，则编号为 i 的结点的左孩子的编号为 $2i$ ，否则 i 无左孩子。
- ③ 若 $2i+1 \leq n$ ，则 i 结点的右孩子结点编号为 $2i+1$ ，否则 i 无右孩子。



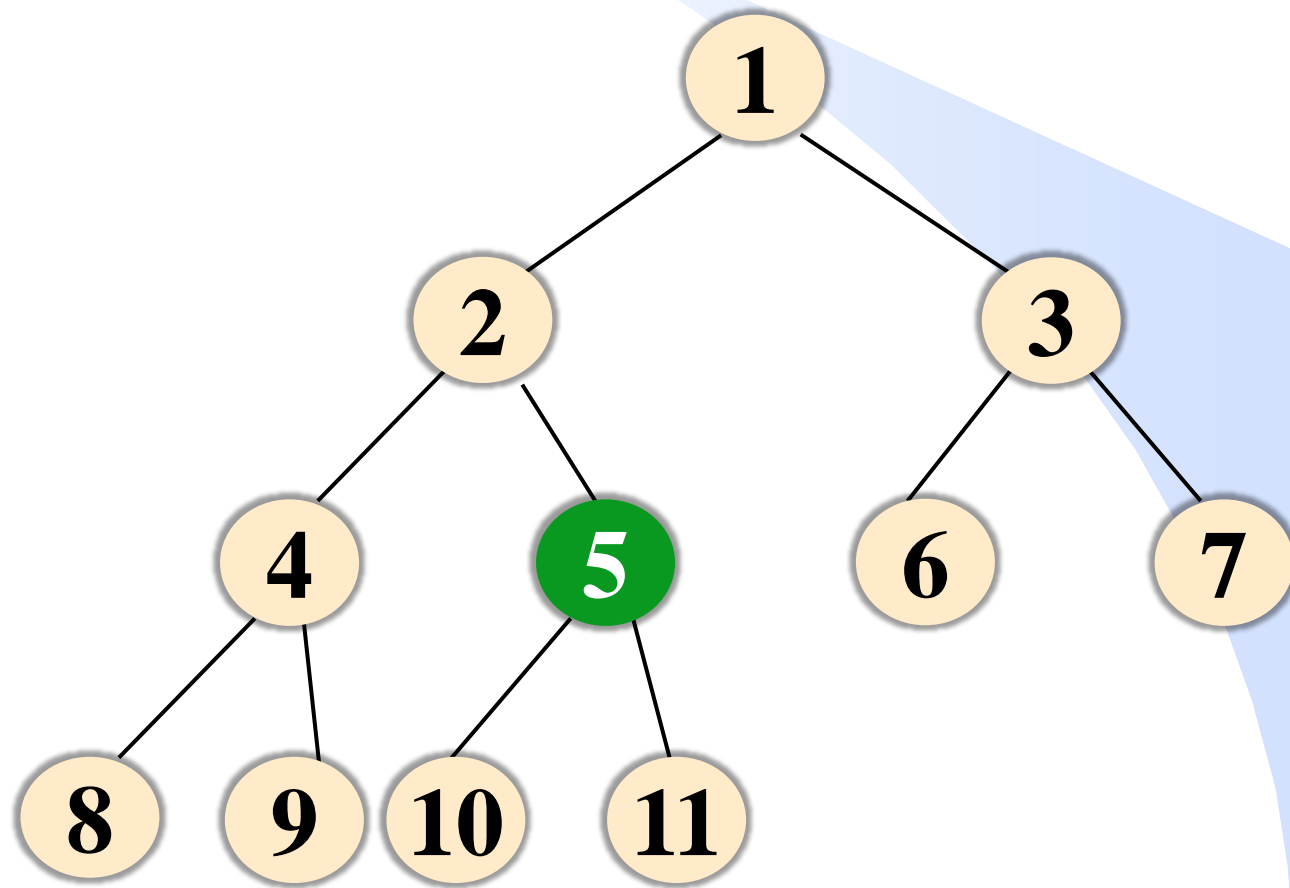
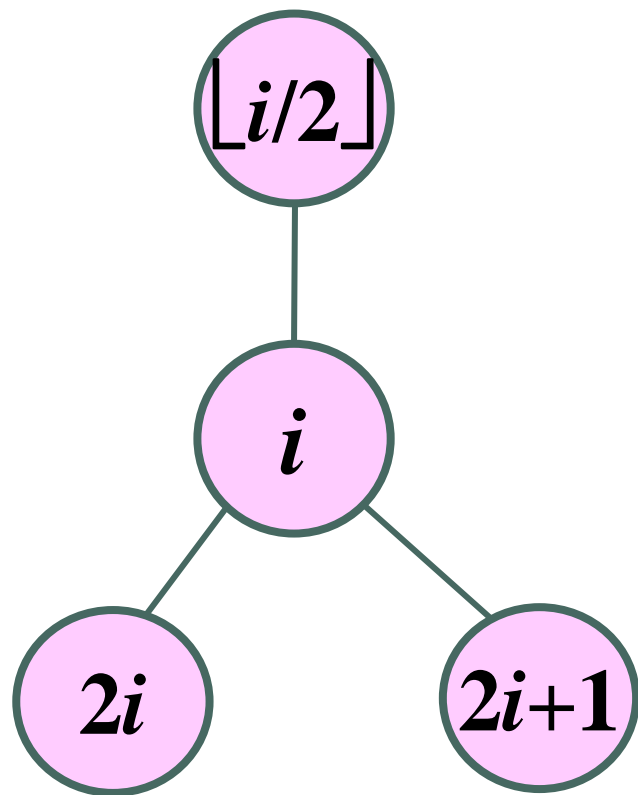
用归纳法证明②

- 若 $i=1$ ，如果 $n \geq 2$ ，则左孩子的编号显然为2。
- 假定对所有 j ($1 \leq j \leq i$, $2i \leq n$)，知 j 的左孩子编号为 $2j$ 。
- 往证结点 $i+1$ 的左孩子编号为 $2(i+1)$ 。
- 如果 $2(i+1) \leq n$ ，则由层次次序得知， $i+1$ 的左孩子之前的两个结点就是 i 的左孩子和右孩子，因为 i 的左孩子编号为 $2i$ （归纳假设），故 i 的右孩子编号为 $2i+1$ ，从而 $i+1$ 的左孩子编号为 $2i+2=2(i+1)$ 。
- 由②可直接推出③，由②和③又可得到①，证毕 ■



推论：一棵具有 n 个结点的完全二叉树，其非叶结点个数为 $\lfloor n/2 \rfloor$ ，叶结点个数为 $\lceil n/2 \rceil$

证明：最后一个结点编号为 n ，则最后一个非叶结点一定是其父结点，编号为 $\lfloor n/2 \rfloor$ ，故非叶结点 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个，叶结点 $n - \lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$ 个





练习

已知一棵完全二叉树有768个结点，则该完全二叉树的叶结点个数是_____。【考研题全国卷】

推论：一棵 n 个结点的完全二叉树，非叶结点个数为 $\lfloor n/2 \rfloor$ ，叶结点个数为 $\lceil n/2 \rceil$

$$\text{叶结点个数} \lceil 768/2 \rceil = 384$$

引理 $n (n>0)$ 个结点的完全二叉树的高度是 $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

证明:

设二叉树高度为 k , 由完全二叉树的定义知, 完全二叉树的结点数介于高度为 $k-1$ 和高度为 k 的满二叉树的结点数之间, 即有: $2^k - 1 < n \leq 2^{k+1} - 1$

故 $2^k \leq n < 2^{k+1}$, 即 $k \leq \log_2 n < k+1$,

有 $\log_2 n - 1 < k \leq \log_2 n$,

由于 k 为整数,

故有 $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

证毕 ■



练习

已知一棵完全二叉树的第5层有8个叶结点，则该完全二叉树的结点个数最少是39，最多是111。【考研题全国卷】



课下思考

已知一棵完全二叉树的第 n 层有 k 个叶结点，则该完全二叉树的结点个数最少是 2^n+k-1 ，最多是 $2^{n+2}-2k-1$ 。

