Récurrence

Chapitre ①

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Sommaire

Introduction

Les capacités attendues de ce chapitre sont :

1. Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite ;
2. Etudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Raisonnement par récurrence

A Un exemple

Démontrer une égalité pour tout entier naturel n non nul

- On note la somme
$$S_n = 1+2+\cdots+n,$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- On souhaite démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Analyse du problème :

- Il s'agit de démontrer l'égalité :
$$S_n \overset{?}{=} \frac{n(n+1)}{2}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- **Vérifions que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour les premières valeurs de n**

n	S_n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\mathscr{P}(n)$ vraie ?
1	1	1	oui
2	3	3	oui
3	6	6	oui
4	10	10	oui
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

⚠ ***$\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$, $\mathscr{P}(3)$ et $\mathscr{P}(4)$ sont vraies mais rien ne prouve encore que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.***

B Raisonnement par récurrence

1 Axiome en général

Définition

Un **axiome** est une proposition considérée comme évidente, admise et sans démonstration.

Exemples :

Axiome n° 1 d'Euclide : Il existe toujours une droite qui passe par deux points du plan.

Axiome d'induction de Peano : Si une partie P de $\mathbb{N}$ contient 0, et si le successeur de tout élément de P appartient à P, alors $P = \mathbb{N}$.

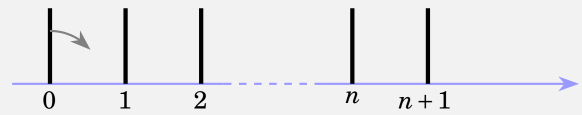
2 Axiome de la récurrence

Faire tomber une infinité dénombrable de dominos

Sur chaque abscisse entière d'une droite graduée, on dispose un domino.
Imaginons que :

- le domino n° 0 tombe ***(initialisation)***
- la chute du domino n° n entraîne toujours du domino suivant n° $n+1$ ***(Hérédité)***

Alors on conviendra que **tous les dominos** seront tombés.



Objectif : employons ce processus pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Axiome **Récurrence**

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$.
On suppose que l'on a les deux étapes réunies :

Initialisation : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie

Hérédité : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Alors par récurrence $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Pseudo explication :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ***(initialisation)***
- $\mathscr{P}(n_0+1)$ est vraie ***(Hérédité)***
- $\mathscr{P}(n_0+2)$ est vraie ***(Hérédité)***
- $\mathscr{P}(n_0+3)$ est vraie ***(Hérédité)***

  etc

« De proche en proche », $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Application du raisonnement par récurrence

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n) : S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : on a

- ▷ $S_1 = 1$
- ▷ $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = 1$

Donc on a bien l'égalité $S_1 = \dfrac{1 \times (1+1)}{2}$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Il s'agit donc de démontrer que :

$$\underbrace{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Hypothèse de récurrence } (\textbf{HR})} \quad \Longrightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Mais comment fait-on pour passer de S_n à S_{n+1} ?

- ▷ Nous disposons de la **relation** :

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + (n+1)}.$$

- ▷ Cette relation dit que S_{n+1} s'obtient à partir du terme précédent S_n.
  C'est la **relation de récurrence** [a].

a. **récurrence** du latin recurrens, dérivé du verbe **recurrere** : « marcher en arrière ».
L'adjectif qualifie « ce qui revient », « ce qui se reproduit ».

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) \\ &\underbrace{=}_{\textbf{HR}} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n=1$ et elle héréditaire, alors par **récurrence** elle vraie pour tout $n \geqslant 1$.

C Démontrer une propriété $\mathscr{P}(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$

1 Démonstration par récurrence

Il faut mener à bien les 3 étapes suivantes :

Initialisation : Justifier que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie

Hérédité : Justifier l'implication pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ vraie } \Rightarrow \mathscr{P}(n+1) \text{ vraie}}$.
Il s'agit d'identifier une relation de récurrence qui permet de passer de $\mathscr{P}(n)$ à $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion : Dire que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et que $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc **par récurrence** $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

2 Démonstration « directe »

Exemple n° 1

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Réponse :

$$\begin{array}{ccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2S_n &= n \times (n+1) \\ S_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Exemple n° 2

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.

Réponse :

- On ne voit pas comment passer du rang n au rang $n+1$: **il n'y a pas de relation de récurrence visible !**
  On ne peut pas faire de récurrence.
- Effectuons une preuve « directe » :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{n}-1\right)^2 &\geqslant 0 \\ n - 2\sqrt{n} + 1 &\geqslant 0 \\ \sqrt{n} &\leqslant \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

II Exemples d'Applications

A Inégalité de Bernoulli

Théorème — **Inégalité de Bernoulli**

Pour tout réel a **positif** et pour tout entier naturel n, on a :

$$(1+a)^n \geqslant 1+na.$$

Preuve :

Démontrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
On note $\mathscr{P}(n) : (1+a)^n \geqslant 1+na$.

Initialisation :
- ▷ $(1+a)^0 = 1$
- ▷ $1+0\times a = 1$

Ainsi $(1+a)^0 = 1+0\times a$ et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également :
Par hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\begin{array}{rrcl}
 & (1+a)^n & \geqslant & 1+na \quad \text{puisque } a \geqslant 0 \text{ donc } 1+a \geqslant 0 \\
\text{équivaut à} & (1+a)^{n+1} & \geqslant & (1+na)(1+a) \\
\text{équivaut à} & (1+a)^{n+1} & \geqslant & 1+(n+1)a+\underbrace{na^2}_{\geqslant 0} \\
\text{équivaut à} & (1+a)^{n+1} & \geqslant & 1+(n+1)a
\end{array}$$

Ainsi la propriété est bien vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n=0$ et elle héréditaire, alors par **récurrence** elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

B Suite majorée, minorée, bornée

Définition

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- **majorée** par un nombre réel M, si **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant M$.
- **minorée** par un nombre réel m, si **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, on a : $m \leqslant u_n$.
- **bornée**, s'il existe deux réels m et M tels que **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, on a : $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Exemples :

- La suite $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1, car :

$$1-\frac{1}{n} \leqslant 1, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}^*.$$

REMARQUE : 2 *est aussi un majorant ...*

- La suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 2, car :

$$2^n \geqslant 2, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}^*.$$

REMARQUE : 0 *est aussi un minorant ...*

Propriétés

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** alors elle est **minorée** par $\boldsymbol{u_0}$:

$$\text{car, } \boldsymbol{u_0} \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** alors elle est **majorée** par $\boldsymbol{u_0}$:

$$\text{car, } \dots \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dots \leqslant \boldsymbol{u_0}$$

Application

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

Démontrons que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n < 2$.

Réponse : démontrons par récurrence que : $0 < u_n < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathscr{P}(n)$: $0 < u_n < 2$.

Initialisation : Puisque $u_0 = 1$ alors on a : $0 < u_0 < 2$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également :
Par hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\begin{array}{lccccc} & 0 & < & u_n & < & 2 \\ \text{équivaut à} & 2 & < & 2+u_n & < & 4 \\ \text{équivaut à} & \underbrace{\sqrt{2}}_{0<} & < & \underbrace{\sqrt{2+u_n}}_{=u_{n+1}} & < & \sqrt{4} \\ \text{équivaut à} & 0 & < & u_{n+1} & < & 2 \end{array}$$

Par croissance de la racine carrée sur $[0;+\infty[$

Donc la propriété est bien vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et elle héréditaire, alors par **récurrence** elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C Démontrer qu'une suite est monotone

Définition **Rappels**

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque : **pour tout entier $\boldsymbol{n}$**, $\boldsymbol{u_n \leqslant u_{n+1}}$.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque : **pour tout entier $\boldsymbol{n}$**, $\boldsymbol{u_n \geqslant u_{n+1}}$.

Application

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Réponse : démontrons par récurrence que : $u_n \leqslant u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathscr{P}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Initialisation : Puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$ alors $u_0 \leqslant u_1$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également :
Par hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$u_n \leqslant u_{n+1}$$

Cela équivaut à :

$$\begin{array}{rcl} u_n+2 & \leqslant & u_{n+1}+2 \\ \sqrt{u_n+2} & \underbrace{\leqslant}_{\substack{\text{Par croissance de la} \\ \text{racine carré sur } [0\,;+\infty[}} & \sqrt{u_{n+1}+2} \\ u_{n+1} & \leqslant & u_{n+2} \end{array}$$

Donc la propriété est bien vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n=0$ et elle héréditaire, alors par **récurrence** elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété **Rappel 1^ière S**

La suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **croissante** si $q>1$.
- **décroissante** si $0<q<1$.
- *De signe alterné, lorsque $q<0$, on dit dans ce cas que la suite est* ***alternée***.