

网络流的一些建模方法

姜志豪

东营市胜利第一中学

2016 年 5 月 3 日

论文内容

网络流在信息学竞赛中很常见。网络流问题的巧妙之处往往不在于算法实现过程，而在于网络流的建模方法。论文对一些比较常用的网络流建模方法进行了总结，分为以下四部分。

- 从最大流角度建模
- 从最小割角度建模
- 从费用流角度建模
- 流量平衡思想

论文内容

网络流在信息学竞赛中很常见。网络流问题的巧妙之处往往不在于算法实现过程，而在于网络流的建模方法。论文对一些比较常用的网络流建模方法进行了总结，分为以下四部分。

- 从最大流角度建模
- 从最小割角度建模
- 从费用流角度建模
- 流量平衡思想

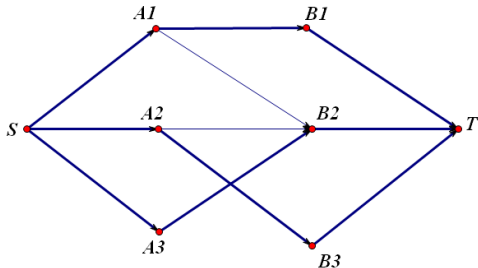
从最大流角度建模

一般来说，从最大流角度进行建模最直观。往往是用一条从源点 S 到汇点 T 的流来表示一种方案。

从最大流角度建模

一般来说，从最大流角度进行建模最直观。往往是用一条从源点 S 到汇点 T 的流来表示一种方案。

例如用最大流求二分图的最大匹配时，一条 $S \rightarrow T$ 的流就表示一个匹配。



Collector's Problem

Bob和他的朋友从糖果包装里收集贴纸。Bob和他的朋友总共 n 人。共有 m 种不同的贴纸。

每人手里都有一些（可能有重复的）贴纸，并且只跟别人交换他所没有的贴纸。贴纸总是一对一交换。

Bob比这些朋友更聪明，因为他意识到只跟别人交换自己没有的贴纸并不总是最优的。在某些情况下，换来一张重复贴纸更划算。

假设Bob的朋友只和Bob交换（他们之间不交换），并且这些朋友只会出让手里的重复贴纸来交换他们没有的不同贴纸。你的任务是帮助Bob算出他最终可以得到的不同贴纸的最大数量。

$$2 \leq n \leq 10, 5 \leq m \leq 25$$

Collector's Problem

Bob的朋友只会出让手里的重复贴纸来交换他们没有的不同贴纸。所以，对于Bob的某个朋友Friend，Bob只能把一种Friend没有的贴纸给他，并且一种最多给一次。Friend只会把他手里重复的贴纸给Bob，如果Friend有 i ($i \geq 2$) 张某种贴纸，他至多给Bob $(i - 1)$ 张。

Collector's Problem

Bob的朋友只会出让手里的重复贴纸来交换他们没有的不同贴纸。所以，对于Bob的某个朋友Friend，Bob只能把一种Friend没有的贴纸给他，并且一种最多给一次。Friend只会把他手里重复的贴纸给Bob，如果Friend有 i ($i \geq 2$) 张某种贴纸，他至多给Bob $(i - 1)$ 张。

那么，Bob的朋友的作用是，将Bob手中的贴纸 X 变成另一种贴纸 Y 。并且对每一种 X 有数量限制，对每一种 Y 也有数量限制。

Collector's Problem

可以这样来建图：

Collector's Problem

可以这样来建图：

对每种贴纸 i 建立点 A_i 。源点 S 向 A_i 连边，容量为Bob拥有的贴纸 i 的数量。 A_i 向汇点 T 连边，容量为1。

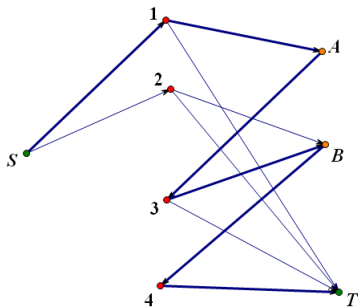
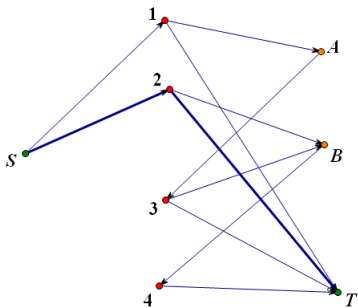
Collector's Problem

可以这样来建图：

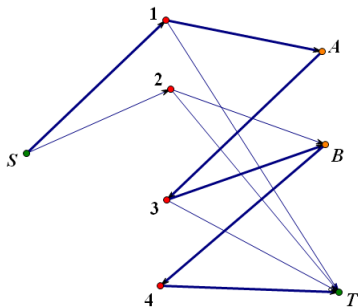
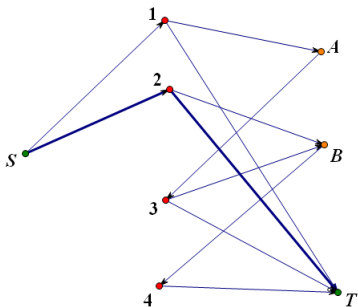
对每种贴纸 i 建立点 A_i 。源点 S 向 A_i 连边，容量为Bob拥有的贴纸 i 的数量。 A_i 向汇点 T 连边，容量为1。

对Bob的每个朋友 j 建立点 B_j 。若朋友 j 没有贴纸 i ，就从 A_i 向 B_j 连边，容量为1。若朋友 j 有 k ($k \geq 2$) 张贴纸 i ，就从 B_j 向 A_i 连边，容量为 $k - 1$ 。

Collector's Problem

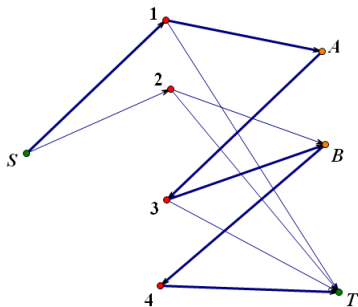
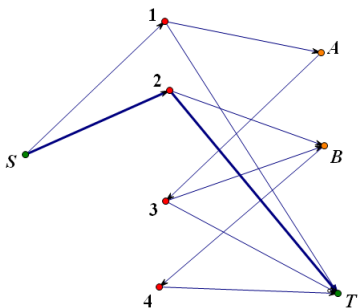


Collector's Problem



左图中，流从 S 出发，到2，再到 T 。表示Bob有第2种贴纸，并且不参与交换。

Collector's Problem



左图中，流从 S 出发，到2，再到 T 。表示Bob有第2种贴纸，并且不参与交换。

右图中，流从 S 出发，到1，再到 A ，再到3，再到 B ，再到4，最后到 T 。表示Bob有第1种贴纸，和 A 交换，换成第3种贴纸，再和 B 交换，换成第4种贴纸。

Collector's Problem

我们用 A 表示点 A_i 的集合，用 B 表示点 B_i 的集合。

Collector's Problem

我们用 A 表示点 A_i 的集合，用 B 表示点 B_i 的集合。

一条 $S \rightarrow T$ 的流，是先从 S 到 A ，表示Bob最初拥有的某种贴纸。然后经过若干次（可能是0次）到 B 再到 A 的过程，表示的是和朋友进行了交换。最后从 A 到 T ，表示交换结束后Bob手中的贴纸的种类。

Collector's Problem

我们用 A 表示点 A_i 的集合，用 B 表示点 B_i 的集合。

一条 $S \rightarrow T$ 的流，是先从 S 到 A ，表示Bob最初拥有的某种贴纸。然后经过若干次（可能是0次）到 B 再到 A 的过程，表示的是和朋友进行了交换。最后从 A 到 T ，表示交换结束后Bob手中的贴纸的种类。

求最大流，就是Bob最终可以得到的不同贴纸的最大数量。

从最大流角度建模

最大流构图的特点是直观容易理解。 $S \rightarrow T$ 的流，有着实际的意义，表示方案或操作方式。

从最大流角度建模

最大流构图的特点是直观容易理解。 $S \rightarrow T$ 的流，有着实际的意义，表示方案或操作方式。

不过，最大流问题的变化也非常多。有些时候，需要认真分析问题，发现问题的实质，将问题简化或转化，才能够得出网络流模型。

感谢

感谢父母养育之恩。

感谢CCF提供这个学习交流的平台。

感谢李云军老师、孔祥丽老师、刘雪老师给予的关心和指导。

感谢在学习生活中给予我帮助的老师同学们。

感谢你们。

参考文献

1. 刘汝佳、陈锋,《算法竞赛入门经典——训练指南》,清华大学出版社
2. 胡伯涛,《最小割模型在信息学竞赛中的应用》

Questions are welcome