

Pirate Chest题解

浙江省镇海中学 岑若虚

1 题目大意

已知矩形池塘每个点的水深，用一个矩阵给出。要在矩阵中选择一个尺寸不超过 $a \times b$ （或不超过 $b \times a$ ）的子矩形作为底面，放下一个箱子，箱子底面的深度是子矩形中的最小值，高度是任意整数。但是，箱子表面必须严格低于水面，且箱子排开的水会上升到池塘表面。求箱子的最大体积。

2 算法分析

设池塘总面积为 S ，选取的子矩形尺寸为 $w \times l$ ，其中最小深度为 d 。则箱子高度 h 需满足 $Sh < Sd + wlh$ ，由于 h 为整数且越大越好，得到 $h = \lfloor \frac{Sd-1}{S-wl} \rfloor$ 。于是

$$V = \left\lfloor \frac{Sd-1}{S-wl} \right\rfloor wl$$

从上式可以看出，如果 w 和 d 一定， V 随着 l 的增大而增大。为使 V 最大，需要在符合 $a \times b$ 限制的范围内找到最大的 l 。

先枚举子矩形的上下边界 u 和 $u+w$ ，求出每一列在上下边界之间的数的最小值，这可以利用边界为 u 和 $u+w-1$ 时的结果在 $O(N)$ 的时间内做到。设第 i 列的最小值是 x_i ，问题转化为选择一个区间。枚举区间的最小值 x_i ，由于需要使区间长度尽可能大，只需找到 x_i 左侧和右侧第一个比它小的数即可。这些结果可以利用单调栈在 $O(N)$ 的时间求出。具体做法是：将 x_1 到 x_n 依次压入栈，若压入时比栈顶元素小则先弹栈，这样保证栈中元素单调不降。当一个元素被弹栈时，当前要加的数即为右侧比它小的第一个数，栈中前一个数即为左侧比它小的第一个数。这样就在枚举 w, d 的情况下求出了最大的 l ，从而可以求出 V 的最大值。

时间复杂度： $O(N^3)$

空间复杂度： $O(N^2)$