中国计算机学会
China Computer Federation

网络流在最优化问题中的应用

戴江齐

南京外国语学校

2023 年 1 月

中国计算机学会
China Computer Federation

- 讲网络流。
- 讲课的重点会在于网络流模型在最优化问题中的作用而非网络流算法本身。包括：
  - 将看似困难的问题建模为网络流，从而以多项式复杂度求解
  - 将问题转化为特殊图网络流，从而以较低复杂度求解
  - 从线性规划的视角理解网络流
- 由于时间有限，对于 OI 中常见的网络流算法（如 Dinic）我们只会简要提及。有少量例题可能需要有关这些算法的预备知识，但在大部分例题中，你可以将最大流或费用流的一般算法看作黑盒。
- 例题大都不是很难且风格比较 educational。

中国计算机学会
China Computer Federation

我们先给出网络流模型的定义，并概述几个简单算法。
我们一般不关心空间复杂度；论述时间复杂度时认为 $|V| \leq |E|$。

定义 (流)

给定带权有向图 $G = (V, E)$，每条边有流量 $c_e \geq 0$。
考虑给每条边赋一个权 $f_e \in [0, c_e]$。对每个点 v，记 $d_v = \sum_{e \in v_{in}} f_e - \sum_{e \in v_{out}} f_e$。
若 d_v 全为 0，就称 f 是 G 的一个循环流。
在 V 中取源点 s 和汇点 t。若 $-d_s = d_t = F \geq 0$ 且其它点的 d 全为 0，就称 f 是一个 $s - t$ 流，其流量为 F。

容易发现，循环流是若干个环的叠加；无环的 $s - t$ 流是若干条从 s 到 t 的路径叠加，而一般意义下的 $s - t$ 流可以通过删去若干个环变得无环。

中国计算机学会
China Computer Federation

定义 (最大流)

给定带权有向图 $G = (V, E)$、源 s 和汇 t，每条边有流量 $c_e \geq 0$。求流量最大的 $s - t$ 流。

定义 (最小费用最大流)

给定带权有向图 $G = (V, E)$、源 s 和汇 t，每条边有流量 $c_e \geq 0$ 和费用 t_e。
定义流 f 的费用为 $\sum_{e \in E} t_e f_e$。求流量最大的 $s - t$ 流中费用最小的。

一般要求 t_e 没有负环，这意味着存在无环的最小费用最大流。

中国计算机学会
China Computer Federation

这里我们只介绍基于增广路的流算法。

定义 (增广路和残量网络)

对于网络（即带流量的图）G，称任何从 s 到 t 且只经过流量为正的边的路径 P 为一条增广路。若网络带费用，则增广路的费用为途经所有边的费用之和。
令 P 的重数 x 为它经过的边的最小流量。
记残量网络 G' 为：对 P 经过的每条边 $e = (u, v, c)$，将 e 的流量 c 减小 x，并增加一条反向边 $e' = (v, u, x)$。若网络带费用，则反向边的费用是原图的相反数。

我们的想法是不断把新的增广路加入答案，而反向边的意义在于反悔，因为贪心找的增广路不一定被最终答案包含。

中国计算机学会
China Computer Federation

定理 (最大流算法)

对于网络 G 和 s, t，每次找到一条从 s 到 t 的增广路加入答案，并用残量网络更新 G，所得即 G 的一个最大流。

定理 (Dinic 算法)

上述过程可在 $O(|V|^2|E|)$ 时间解决。

Dinic 算法的思路是每轮 BFS 出 G 的分层图：若 s 到 t 的距离为 l，则可以 $O(l|E|)$ 找到并更新所有长度为 l 的增广路，此后 s 到 t 的距离至少为 $l+1$。
一些 Dinic 优化可能具有形如 $O(|V|^3)$ 或 $O(|V||E|\log|V|)$ 的复杂度。但朴素实现的 Dinic 在绝大多数题目中已足够优秀。

中国计算机学会
China Computer Federation

定理 (费用流算法)

对于网络 G 和 s, t，每次找到从 s 到 t 的费用最小的增广路加入答案，并用残量网络更新 G，所得即 G 的一个最小费用最大流。

实践中，用队列优化的 Bellman-Ford（即 SPFA）求最短路复杂度为 $O(F|V||E|)$ 且常数极小。
另外，若初始图没有负权边，可以每次用 Dijkstra 算法求最短路，再用类似 Johnson 的方法更新残量网络中的 t_e（记 s 到 v 的最短路为 d_v，令 $t'_e = t_e + d_u - d_v$ 其中 $e = (u, v, c)$），这样整张图始终没有负权边（这也说明了为什么始终没有负环），复杂度为 $O(F|E| \log |V|)$ 或 $O(F|V|^2)$。

中国计算机学会
China Computer Federation

容易发现，Dinic 具有多项式复杂度，但直接基于增广的费用流复杂度和 F 有关。

事实上，弱多项式（即关于 $|V|$, $|E|$ 和 $\log \max\{c_i, t_i\}$ 的多项式）复杂度的费用流并不难。偶尔有题目真正需要时，可以考虑 capacity scaling，即先将所有边流量除以 2 下取整求最小费用最大流，再回到原图跑复杂度带 F 的算法。

中国计算机学会
China Computer Federation

下面用例题的方式展示一些常见模型。
事实上，在算法竞赛中，对于常规方法很难在多项式时间解决的问题，考虑网络流是必要的。

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Saving the Jelly)

[Google Code Jam 2022 Round 2] Saving the Jelly
给定平面上 n 个红点和 $n+1$ 个黑点，黑点编号为 1 到 $n+1$。
每次，你可以选择一个红点，并同时删去它和离它最近的黑点(如果并列，你可以决定删哪一个)。
试构造一种进行 n 次操作的方案，使得剩下的黑点编号为 1，或报告无解。
$n \leq 1000$，坐标范围 10^9

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Snuke the Phantom Thief)

Snuke the Phantom Thief (Source: AGC031E)

给定平面上 n 个点，第 i 个点 (x_i, y_i) 有权值 v_i。

你需要选若干个点，满足 m 条约束，每一条为以下的一种：

1. 至多选 t_j 个满足 $x \leq x_j$ 的点
2. 至多选 t_j 个满足 $x \geq x_j$ 的点
3. 至多选 t_j 个满足 $y \leq y_j$ 的点
4. 至多选 t_j 个满足 $y \geq y_j$ 的点

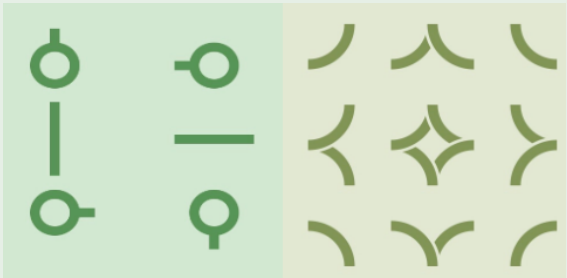
求选的点权值和的最大值。

$n \leq 80, m \leq 320, 1 \leq v_i \leq 10^{15}$，坐标范围 100

中国计算机学会 China Computer Federation

例 (无限之环)

【清华集训 2017】无限之环 (Source: UOJ336)
给定 $n \times m$ 的网格状棋盘，每个方格可能为空或包含以下 15 种形状的水管之一（即 4 条侧边中点分别可以有或没有水管接口）：



你每次可以选择一个含有非直线型水管（即右半边的 9 种）的方格，将其中的水管顺时针或逆时针旋转 90 度。
求最小的操作次数，使得所得的管道系统没有一处接口漏水。

中国计算机学会
China Computer Federation

例

给定带费用的网络 G，每条边的流量有上下界 $[b_i, c_i]$，费用 t_i 可能出现负环。判断是否可行，若可行则求出最小费用。

一个典型的应用是【AHOI2014】支线剧情 (Source: LOJ2226)。

解

超级源汇 s, t
正权边 $(u, v, [b, c], t)$：$(u, v, c-b, t) + (s, v, b, 0) + (u, t, b, 0)$
负权边 $(u, v, [b, c], -t)$：$(v, u, c-b, t) + (s, v, c, 0) + (u, t, c, 0)$
最小费用最大流

容易发现最小费用和最大费用的循环流等价。

中国计算机学会
China Computer Federation

除了直接应用，最大流模型还有一些基于最小割的应用。

中国计算机学会 China Computer Federation

定义 (割)

对于网络 G 和源汇 s, t，称边集 $D \subseteq E$ 为 G 的割当且仅当删去 D 中所有边后 G 中不存在 s 到 t 的路径。
记 D 的大小为 $\sum_{e \in D} c_e$。

定理 (最大流最小割定理)

G 最大流的流量 F 等于最小割的大小 F'。

显然 $F \leq F'$；考虑增广结束后的残量网络中 s 能抵达的点集 S，则 S 到 $V - S$ 是 G 大小为 F 的割，因此 $F' \leq F$。这同时给出了最小割的构造方法。

中国计算机学会
China Computer Federation

定理 (Hall 定理)

二分图 G 存在一个匹配包含左侧所有点，当且仅当对任意左侧点集 S，$|\bigcup_{v\in S} adj_v| \geq |S|$。

这是最大流最小割定理的直接推论。
类似地，二分图最小顶点覆盖（选尽量少的点使得每条边至少有一个端点被选）等于最大匹配，最大独立集等于 $|V(G)|$ 减去最大匹配。

定理 (Hall 定理的一个推论)

正则二分图（所有点度均相等的二分图）有完美匹配。

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (最小链覆盖)

给定一个偏序 G（偏序是一张 DAG 满足若存在边 $(a,b)(b,c)$ 则存在边 (a,c)），用尽量少的链覆盖 G 的所有结点。

解

考虑答案的边集，等价于二分图最大匹配

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (最长反链)

给定一个偏序 G，求一个尽量大的点集满足两两之间没有边。

解

等价于二分图最大独立集，所求即满足 v_L 和 v_R 都在独立集里的 v

进一步地，偏序的最小链覆盖和最长反链大小相等。

中国计算机学会
China Computer Federation

例

有 n 个整数变量 x_i。x_i 可以取 $[1, m]$，取 j 需要 $a_{i,j}$ 的代价。
有若干个约束，形如 $x_{u_i} - x_{v_i} \leq w_i$。
给变量赋值，最小化总代价。

这个模型的出处有可能是【HNOI2013】切糕 (Source: LOJ2384)，并有着较为广泛的应用。另外，最长反链是切糕的特殊情形。

解

n 条链 $s = p_{i,0} \to p_{i,1} \to \cdots \to p_{i,m} = t$
$p_{i,j} \to p_{i,j+1}$ 代价为 $a_{i,j} + \infty$，表示令 x_i 取 j
$p_{u_i,j+w_i} \to p_{v_i,j}$
最小割

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Making It Bipartite)

Making It Bipartite (Source: CF1630F)

给定 n 个两两不同的数 a_i。你需要删去 a 的一些元素得到序列 b_i，使得：

将 b_i 看作点，b_i 和 b_j 连边当且仅当 $b_i|b_j$ 或 $b_j|b_i$，所得的图是二分图。

求删去元素个数的最小值。

$n, a_i \leq 5 \times 10^4$

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Construction of a tree)

Construction of a tree (Source: AGC029F)
给定 n 和 $n-1$ 个 $[1,n]$ 上的集合 S_i ($|S_i| \geq 2$)。
将 $[1,n]$ 看作点集，你需要在每个集合中选择两个元素，在它们之间连一条边，使得形成一棵树。
试构造方案或报告无解。
$n \leq 10^5, \sum |S_i| \leq 2 \times 10^5$

中国计算机学会
China Computer Federation

上述题目的数据规模很大，仅凭 $O(|V|^2|E|)$ 难以通过。

定理

对于网络 G 使用 *Dinic* 算法，所得最大流的 $\sum_e f_e$ 记作 S。则算法时间复杂度不超过 $O(|E|\sqrt{|S|})$。

这是因为 s 到 t 在残量网络的距离达到 B 后，最多只会再增广 $\frac{S}{B}$ 次。
这意味着若流量 c_e 全为 $O(1)$，则 Dinic 复杂度为 $O(|E|^{1.5})$；特别地，求二分图最大匹配复杂度为 $O(|E|\sqrt{|V|})$。

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Draw in Straight Lines)

[38th Petrozavodsk Programming Camp, Winter 2020] Draw in Straight Lines (Source: QOJ1197)

有一张初始全白的 $n \times m$ 网格。你可以任意进行以下两种操作：

1. 将一条长度为 l 的横向或纵向的线段染为某种颜色（黑或白）。代价为 $al + b$。
2. 将某个格子染为某种颜色（黑或白）。代价为 c。

过程中，你必须满足以下要求：

1. 一个格子最多被染色两次。
2. 一个格子不能在被染白后再被染黑。

给定目标网格中每个格子的颜色，最小化总代价。

$n, m, a, b, c \leq 40$

中国计算机学会
China Computer Federation

上述题目已经体现了残量网络的一些用途。事实上，当网络形态或增广过程较为特殊时，可以用各种数据结构维护残量网络。

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (序列)

【NOI2019】序列 (Source: UOJ480)
给定序列 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$。
你需要对两个序列分别指定恰好 K 个下标，使得至少有 L 个下标在两个序列中都被指定。
最大化指定的 $2K$ 个下标对应的元素总和。
$n, K, L \leq 2 \times 10^5$，值域 $[1, 10^9]$，5 组数据

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (RPG Pro League)

RPG Pro League (Source: Gym104090H)

有 n 个人和三种职业 D/S/B，第 i 个人可以担任集合 S_i 中的职业，请他需要 p_i 的代价。

一支队伍由 4 个人组成，其职业分布可以是 DDSB 或 DSSB。你需要请一些人，组成尽量多两两不交的队伍，在其基础上最小化总代价。

有 q 次修改，第 i 次为将 p_{x_i} 改为 y_i，每次修改后输出组队需要的最小代价。

$n, q \leq 10^5, 1 \leq p_i, y_i \leq 10^9$

中国计算机学会
China Computer Federation

有些时候，网络的主要结构是一条链或一棵树，此时可以用线段树、树链剖分等数据结构方法强行维护残量网络，并按合适的顺序增广使得总复杂度正确。

不过，多数能这样做的题目都有实现更简单、常数更小的 dp 做法。后文中就有这样的例题。

中国计算机学会
China Computer Federation

定义 (线性规划)

有若干个实数变量 $x_i \geq 0 \forall i \in [1, n]$。
有若干个约束 $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq B_i \forall i \in [1, m]$。
目标是最大化 $S = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$。

线性规划问题也可以在弱多项式复杂度解决，但与讲课主题无关。
容易发现，网络流是一类特殊的线性规划。

中国计算机学会
China Computer Federation

注意到有些问题的网络流建模要求所有边流量均为整数。但线性规划是实数上的；如果增加 x_i 全为整数的限制，那么线性规划将变为 NP-Hard 的整数规划。
不过这个问题在网络流中不存在：

定理（网络流整数性）

当流量上限全为整数时，网络流对应的线性规划一定存在一组最优解，其中 x_i 全为整数。

这一点是增广路算法正确性的直接推论。

中国计算机学会
China Computer Federation

我们来看一道和网络流整数性有关的例题。

例 (Hope of Rowing)

Hopes of Rowing (Source: URAL1833)
有 n 个变量 $x_i \in [0,1]$ 和 m 个形如 $x_{u_i} + x_{v_i} \geq 1 (u_i \neq v_i)$ 的约束。
最小化 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 并输出方案。
$n \leq 500, m \leq 10^5$

中国计算机学会
China Computer Federation

定理 (凸性)

对任意向量 D_i，固定 $\sum_{i=1}^{n} D_i x_i = X$，则最优化目标 $S(X)$ 关于 X 上凸。这里的上凸指 $\alpha S(X) + \beta S(Y) \leq (\alpha + \beta) S(\frac{\alpha X + \beta Y}{\alpha + \beta})$。

上述结论只需将 X 和 Y 对应的方案取平均即可证明。
这意味着，如果一个最优化问题在某种思路下不符合凸性，那么沿着这个思路不可能得出网络流模型。特别地，能从（大小不是 $O(1)$ 的）一般的背包规约而来的问题很难是网络流。
由于网络流线性规划在加入其它约束后不一定具有整数性，上一条经验不能滥用。

中国计算机学会
China Computer Federation

有时，我们可以借助费用流的整数性和凸性，用非费用流算法解决一些问题。

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (雪灾与外卖)

雪灾与外卖 (Source: UOJ455)
数轴上有 n 个老鼠和 m 个洞，第 i 个洞最多容纳 c_i 只老鼠。求让所有老鼠都进洞的最小代价。每只老鼠每移动 1 的距离会产生 1 的代价，而第 i 个洞每容纳一只老鼠会产生 w_i 的代价。
$n, m \leq 10^5, c_i, w_i \leq 10^9$，坐标范围 10^9

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Mateusz and Escape Room)

Mateusz and Escape Room (Source: CF1229F)
环上有 n 个位置 $1 \cdots n$，位置 i 初始时有 a_i 个球。
每次操作你可以把一个球移到它左边或右边相邻的位置上。
试求最小的操作次数，使得最终对每个 i，第 i 个位置球的个数在 l_i 和 r_i 之间。
$n, a_i, l_i, r_i \leq 35000$

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Honorable Mention)

Honorable Mention (Source: Gym102331H)
给定序列 $a_1, a_2 \cdots, a_n$。
你需要回答 q 次形如“选择 $[l_i, r_i]$ 的 k_i 个不交非空子区间，它们在 a 上的和最大是多少”的查询。
$n, q, |a_i|, k_i \leq 35000$

中国计算机学会
China Computer Federation

这几道题目的方法不难推广到树上。
树上的例题包括 Conquer the World (Source: Gym102482C) 和 Jiry Matchings (Source: Gym102331J)，因时间有限，且与链上并无本质区别，此处不再赘述。
另外，前一部分提及的数据结构维护残量网络也可用于部分例题(如雪灾与外卖可用线段树维护)，但实现较为复杂。

定义

对于线性规划 $x_i \geq 0 \forall i \in [1,n]$，
$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \leq B_i \forall i \in [1,m]$，
目标 $\max S = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$。
定义其对偶为 $y_i \geq 0 \forall i \in [1,m]$，
$\sum_{i=1}^{m} A_{ij}x_i \geq C_i \forall j \in [1,n]$，
目标 $\min T = \sum_{i=1}^{m} B_i x_i$。

可以将对偶感性理解成把所有方程线性组合出一个尽量紧的界。
进而有 $\max S \leq \min T$。
容易发现一个问题的对偶的对偶是它自身。

中国计算机学会
China Computer Federation

定理 (强对偶定理)

对于线性规划，$\max S = \min T$。

强对偶定理可以理解为切平面的存在性。
特别地，最大流和最小割对应的线性规划（其整数性不难证明）互为对偶。
下面，我们将给出费用流的对偶形式。

中国计算机学会
China Computer Federation

方便起见，考虑由 G 和超级源 s 构成的最大费用循环流，i 到 s 恰好有 $d_i \in (-\infty, \infty)$ 的流量。

例 (费用流线性规划)

$f_e \geq 0 \forall e$

$f_e \leq c_e$； $\sum_{e \in v_{in}} f_e - \sum_{e \in v_{out}} f_e = d_i$

目标 $\max \sum_e t_e f_e$

其对偶整理后为:

例 (费用流对偶线性规划)

$p_v \in \mathbb{R} \forall v$

$\min \sum_v d_i p_i + \sum_e c_e \max(p_{e_u} - p_{e_v} + t_e, 0)$

中国计算机学会
China Computer Federation

注意到费用流对偶有着类似差分约束或切糕的形式。事实上，最短路和差分约束可以看成一对特殊的费用流对偶。

定理 (费用流对偶的整数性)

若 t_e 全为整数，则费用流对偶一定存在一组最优解，使得 p_v 全为整数。

对 p_v 的小数部分使用调整法容易证明。
事实上，Dijkstra + Johnson 的费用流算法可以同时求出对偶线性规划的最优解，但应用较少，此处不再赘述。

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (Cow and Exercise)

Cow and Exercise (Source: CF1307G)
给定一张 n 个点 m 条边的简单有向图，边上带权。
有 q 个独立的计划，第 i 个计划中，你可以将每条边的边权增加任意非负实数，但所有边权的总增量不能超过 x_i，目标是最大化新图上 1 到 n 的最短路。
对每个计划，求出 1 到 n 最短路的最大值。
$n \leq 50, q, x_i \leq 10^5$，边权 $[1, 10^6]$

中国计算机学会
China Computer Federation

例 (序列)

【ZJOI2020】序列 (Source: UOJ586)

给定序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。

每次你可以进行以下三种操作之一：

1. 将一个区间内的所有 a_i 减少 1；
2. 将一个区间内所有下标为奇数的 a_i 减少 1；
3. 将一个区间内所有下标为偶数的 a_i 减少 1；

求最少操作次数，使得最终 a_i 全为 0。

$n \leq 10^5, 0 \leq a_i \leq 10^9$，$10$ 组数据

中国计算机学会
China Computer Federation

这节课介绍了网络流在最优化问题上的各种应用，包括切糕等传统网络流模型，也涵盖了一些涉及数据结构和线性规划的思路。当然，受篇幅和讲者知识水平的限制，仍有不少网络流的趣味应用我们并未提及（如一些网络流题其实有拟阵的背景），也欢迎感兴趣的听者深入探索。

我的讲课到此结束，感谢大家的参与！