《松树林》解题报告

杭州学军中学 金策

1 试题来源

PA 2013 Round 6 Dziaka

提交地址：http://main.edu.pl/pl/archive/pa/2013/dzi

BZOJ：http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3839

2 试题大意

平面上有n个互不相同的整点(x_i, y_i)。

共有q次询问（允许离线），每次给出一个边平行坐标轴的矩形，你需要回答矩形内（包含边界）的点组成的凸包的面积。

数据规模：$3 \le n \le 3000, 1 \le q \le 10^6, 0 \le x_i, y_i \le 10^6$。

3 算法介绍

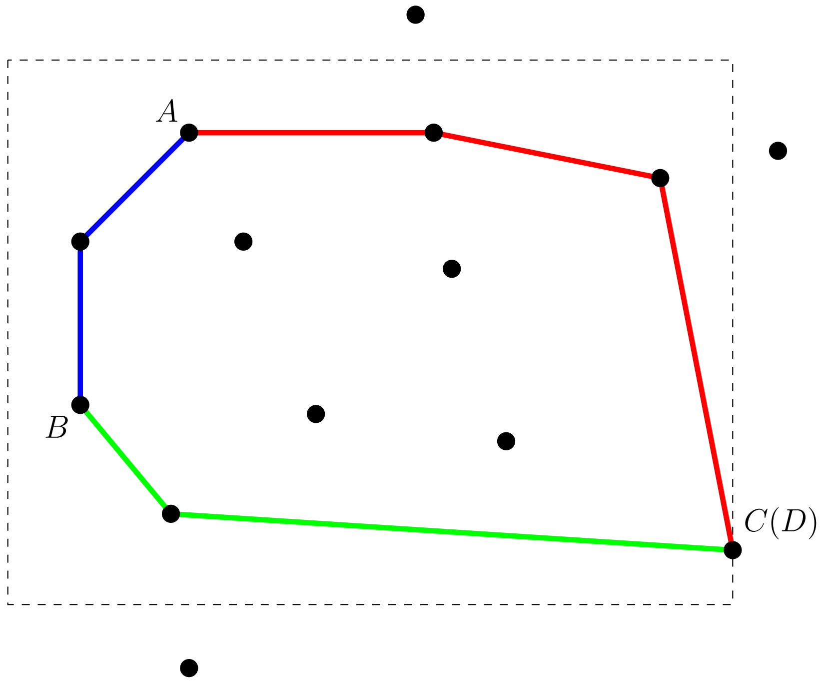
这题初看不太好做。

但注意到点数n很少，能撑过$O(n^2)$的复杂度。我们的算法需要利用这一点。

3.1 将凸包拆成四部分

对于一个边平行坐标轴的矩形，我们找出其中最上、最左、最下、最右的四个点A, B, C, D（可能出现重合）。若有多个满足条件的点就再按另一维坐标比较。

显然A, B, C, D都会出现在矩形内点的凸包上，且将凸包的周界分成了左上、左下、右下、右上四个部分。如图所示。



凸包的面积可以写成每条边的贡献之和，其中边PQ（按逆时针序）的贡献为$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|$。于是我们可以将四个部分的贡献相加以求出整个凸包的面积。

注意到，给定两个点P,Q和方向$d\in\{$左上,左下,右下,右上$\}$，其定义的周界是一段**唯一确定**的凸壳。若将其对面积的贡献记为$S_d(P,Q)$，那么答案即为$S_{左上}(A,B)+S_{左下}(B,C)+S_{右下}(C,D)+S_{右上}(D,A)$。

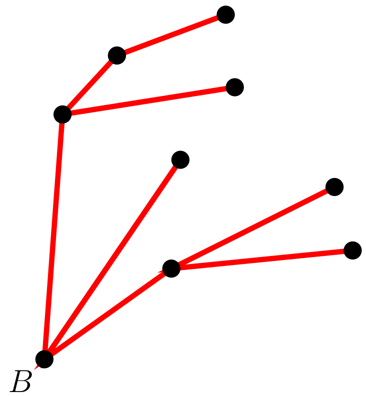
3.2 预处理面积

由于四个部分的计算方法相同，我们不妨只考虑$S_{左上}(A,B)$的处理。下面简记作$S(A,B)$。

3.2.1 树形结构

由于点数不多，我们可以考虑预处理出每一对点之间的$S(A,B)$值。注意到A,B点间的周界即为满足$x_b\le x\le x_A, y_b\le y\le y_A$的点$(x,y)$的上凸壳，用$\mathrm{pre}_B(A)$ 表示这一凸壳上A的前驱点。

假如我们固定点B，并将所有B右上方的点P与它的前驱$\mathrm{pre}_B(P)$用线段连接，则会形成一棵以B为根的树。如图所示。



容易看出，某个点P与B之间形成的凸壳即为这棵树上B, P两点之间的路径。我们从根节点B开始遍历这棵树，即可计算出所有$S(P, B)$的值。

3.2.2 维护树形态

给定B点，为了得到对应树的形态，我们需要知道每个点P的前驱$\text{pre}_B(P)$。容易看出，$\text{pre}_B(P)$即为满足$x_B \leq x \leq x_P, y_B \leq y \leq y_P$的点$(x, y)$中，与$P$点连线斜率最小的那个点。

于是我们可以枚举B点，并对其右上方的每一个点P用$O(n)$时间求出$\text{pre}_B(P)$，再对得到的树进行遍历。这样我们就有一个$O(n^3)$的算法预处理所有$S(A, B)$。

但这个做法并不优秀，需要优化。我们固定一个A点，考虑B点按x_B升序枚举时，$\text{pre}_B(A)$的变化情况。对A左下方的所有点B建立一个单调队列，满足x_B坐标递增，斜率k_{BA}递增。这样每次寻找$\text{pre}_B(A)$的时间就可以均摊$O(1)$了。

从而预处理的总时间为$O(n^2)$。

3.3 查询A, B, C, D点

查询矩形内某一维坐标值最大/最小的点是一个经典问题，可以离线排序后用线段树查询。若需要在线则可以用可持久化线段树。

3.4 时空复杂度

时间复杂度$O\big(n^2 + q(\log q + \log n)\big)$，空间复杂度$O(n^2 + q)$。

4 总结

本题的关键在于发现矩形内的凸包可以拆成四个独立的凸壳，并利用一些手段进行预处理，从而求得答案。