

# Allergy Testing 解题报告

东营市胜利第一中学 姜志豪

## 1 试题来源

Google Code Jam World Finals 2014

提交: <https://code.google.com/codejam/contest/7214486/dashboard#s=p4>

## 2 试题大意

Kelly对  $n$  种食物中的一种过敏，但她不确定是哪一种。所以她想通过一些实验来确定。

每次实验，Kelly可以选取几种不同的食物然后全吃了， $A$  天之后，她就可以知道是否有过敏反应，如果没有，就说明她对吃的那几种食物都不过敏。如果她有过敏反应，她就需要等过敏反应褪去，这个过程从刚开始吃算起需要  $B$  天。

任何一个实验必须等上一个实验完成（等  $A$  天或者  $B$  天）后开始，每次实验开始时，她可以根据前面的实验结果来选择这次要吃的食物集合。

求在最坏情况下，Kelly最少要多少天可以找到那个过敏食物。

$$1 \leq n \leq 10^{15}, 1 \leq A \leq B \leq 10^{12}$$

## 3 算法介绍

定义  $f_i$ ，表示用  $i$  天时间最多在  $f_i$  种食物中找出过敏食物。

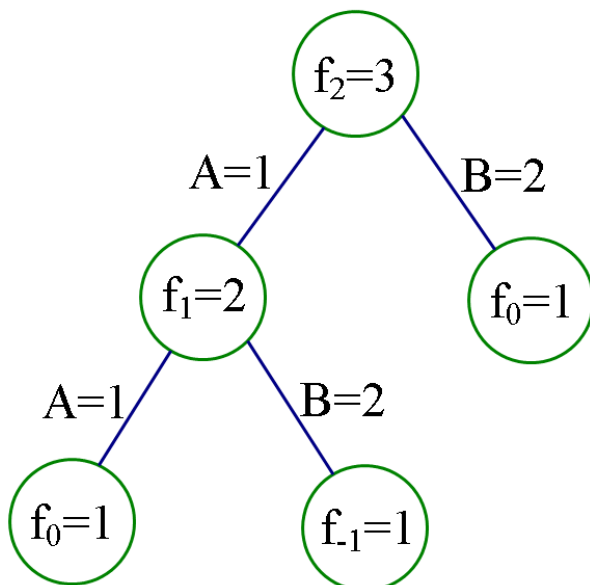
这  $i$  天刚开始时，Kelly选出一些食物吃，若过敏，则要在剩下的  $i - B$  天中从吃了的食物中找出过敏食物，所以最多选  $f_{i-B}$  种吃；若不过敏，则要在剩下的  $i - A$  天中从没吃食物中找出过敏食物，所以没吃的食物最多有  $f_{i-A}$  种。

所以， $f_i = f_{i-A} + f_{i-B}$ 。

若只吃了一种，即使过敏，也只需  $A$  天即可找到过敏食物，但在方程中却是需要  $B$  天。所以，我们使边界条件是：

$$f_i = 1(A - B \leq i \leq 0)$$

通过DP的过程，我们可以对应建一棵树。 $i$  对应的树，根结点值为  $f_i$ ，左子树是  $i - A$  对应的树，右子树是  $i - B$  对应的树。对于满足  $A - B \leq i \leq 0$  的  $i$ ， $i$  对应的树只有一个点，值为1。



我们发现， $f_i$  的值即为  $i$  对应树中叶结点的个数。

在树  $i$  中，叶结点  $t(A - B \leq t \leq 0)$  的个数就是： $i$  每次可以减  $A$ ，也可以减  $B$ ，减到  $t$  的方案数。

每次对半分，最坏情况下需要  $B \cdot \log n$  天。可以在0和  $B \cdot \log n$  之间二分，找到满足  $f_i \geq n$  的最小  $i$ ，这个最小  $i$  即为答案。

下面考虑计算  $f_i$  的值。因为当前二分到的  $i$  不超过  $B \cdot \log n$ ，所以可以枚举  $i$  减到  $t$  的过程中减了几次  $B$ ，进而确定减  $A$  的次数范围，使  $i$  减去这么多  $A$ 、 $B$  后在  $[A - B, 0]$  内。确定了减  $A$ 、减  $B$  的次数，用组合数就能求出方案数。

对于每一个枚举到的减  $B$  的次数  $s$ ，若对应的减  $A$  的次数范围为  $[x, y]$ ，则对答案的贡献是：

$$C_{s+x}^s + C_{s+x+1}^s + \dots + C_{s+y}^s$$

从杨辉三角上可知，上式等于：

$$C_{s+y+1}^{s+1} - C_{s+x}^{s+1}$$

每一个  $s$  计算出的值之和就是  $f_i$ 。

有了求  $f_i$  的方法后，就可以二分求出问题的答案了。

时间复杂度：  $O(\log^4 n)$