IOI2014中国国家集训队作业1解题报告

杭州学军中学 徐寅展

Contents

1 Suspense!

ACM/ICPC World Finals 2004 I

1.1 题目大意

有两幢距离为d的公寓，要在之间建造一座水平的桥。每层楼有一只猫或一只鸟或什么也没有。若一只猫在高度为h窗口,那么它可以跳到高度为$(h-3,\ h+0.5)$的桥面；反之，也可以从高度为h的桥面，跳到高度为$(h-3,\ h+0.5)$的窗口。桥上有一根桥缆，两端的高度已知，要求桥缆的最低端比桥面高1 米，且猫不能通过桥抓到鸟，求桥缆最长是多少。每层楼高度为3 米，窗户高度为1.5米，窗户离每层楼的地面1米，公寓的层数$n \leqslant 50$。

1.2 关键字

枚举，数学

1.3 解题分析

由于桥面可以在的高度有无穷多个，对问题的解决带来了很多麻烦。我们以层为单位讨论一些情况，这样可以排除掉不优的解。表格中的H_i表示第i层的窗台的高度

高度范围	能跳到这个高度的层数	这个高度能跳上的层数
$H_i-0.5$	i	$i-1$
$(H_i-0.5,\ H_i)$	i	$i-1,\ i$
H_i	i	i
$(H_i,\ H_i+0.5)$	$i,\ i+1$	i
$H_i+0.5$	$i+1$	i
$(H_i+0.5,\ H_i+2.5)$	$i+1$	i

有一个比较明显的结论：桥面越低，缆绳越长。那么$H_i-0.5$比$(H_i-0.5,\ H_i)$优，H_i比$(H_i,\ H_i+0.5)$优，$H_i+0.5$ 比$(H_i+0.5,\ H_i+2.5)$优。我们已经把桥面可能的高度缩小到了有限个。那么原问题可以转化为如下问题：有一条过原点的抛物线，经过两个点(x_1, y_1), (x_2, y_2),其中y_1, y_2是已知的，$x_2-x_1=d$，要求该抛物线横坐标在(x_1, x_2)那一段的长度。

令抛物线的解析式为$y=ax^2$

$$\begin{cases} ax_1^2 = y_1 \\ ax_2^2 = y_2 \\ x_2 - x_1 = d \\ x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

解得

$$a = \left(\frac{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}{d}\right)^2$$

接下来要求的是$y=ax^2$在x1到x2上的长度，亦即

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x'^2+y'^2}dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+4a^2x^2}dx$$

由公式可知

$$\int \sqrt{1+4a^2x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{4a^2x^2+1} + \frac{1}{4a}ln(2ax+\sqrt{4a^2x^2+1})$$

这样就可以在$O(1)$的时间内求一条抛物线的长度了。

回归本题，只要判断所有可能作为桥面的高度是否可行，若可行再求缆绳长度即可。

1.4 时空复杂度

时间复杂度：$O(n)$
空间复杂度：$O(n)$

2 Struts and Springs

ACM/ICPC World Finals 2009 I

2.1 题目大意

有n个矩形，它们只有包含与分离的关系，并且最外面一个矩形包含所有矩形。每个矩形与最小的包含它的矩形由木板或弹簧连接，矩形内部相对的两边之间也会由木板或弹簧连接。同一方向上，弹簧的压缩比例相等。矩形由外向内变化。现在m次改变最外面一个矩形的形状，问你每个矩形的位置和形状。$n, m \leqslant 500$。

2.2 关键字

模拟

2.3 解题分析

注意到每个矩形新的位置只与原来各条支架长度的比值、当前外围的矩形的位置和大小有关。因此我们只需先预处理出每个矩形外围的矩形是哪一个，每次从大的矩形到小的矩形求出每个矩形的位置和大小即可。需要注意的是，x轴正方向是右边，y轴正方向是下边。

2.4 时空复杂度

时间复杂度：$O(n^2 + nm)$
空间复杂度：$O(n)$

3 Hey, Better Bettor

ACM/ICPC World Finals 2013 B

3.1 题目大意

有一个赌场给出如下的优惠政策：亏损k元后可以申请补偿亏损的$x\%$，但只能使用一次，注意这个k是指总支出-总收益，且大于0。每一场赌局开始将付1块钱，如果赌赢了将得到2块钱。现在给出每一场赢的概率$p\%$，问你在最优策略下期望能赚多少钱。

3.2 关键字

数学，三分

3.3 解题分析

稍加分析可知只有在亏损a元或赢得b元后才会停止赌局。令$f(x)$为在当前已经赢得x元的情况下的最大期望收益，容易得到

$$f(-a) = -a(1-x\%),\ f(b) = b$$

又有

$$f(x) = p\%f(x+1) + (1-p\%)f(x-1)$$

移项得

$$f(x) = \frac{f(x-1)}{p\%-1} - \frac{f(x-2)(1-p\%)}{p\%}$$

令$g(x) = f(x+a)$可以列出特征根方程

$$x^2 = \frac{x}{p\%} - \frac{1-p\%}{p\%}$$

解得$x_1 = \frac{1-p\%}{p\%}$，$x_2 = 1$,所以

$$g(x) = c_1x_1^x + c_2x_2^x$$

将$g(0) = -a(1-x\%)$，$g(a+b) = b$代入得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -a(1-x\%) \\ c_1x_1^{a+b} + c2 = b \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{b+a(1-x\%)}{(\frac{1-p\%}{p\%})^{a+b}-1} \\ c_2 = -a(1-x\%) - \dfrac{b+a(1-x\%)}{(\frac{1-p\%}{p\%})^{a+b}-1} \end{cases}$$

于是

$$g(a) = \frac{(b+a\left(1-x\%\right))\left(\left(\frac{1-p\%}{p\%}\right)^a-1\right)}{\left(\frac{1-p\%}{p\%}\right)^{a+b}-1} - a\left(1-x\%\right)$$

求导可得$g(a)$关于a,b都是单峰的，因此可以用三分套三分来解决。

3.4 时空复杂度

时间复杂度：$O(\log^2 \frac{1}{eps})$
空间复杂度：$O(1)$