

# CodeChef JULY11 Billboards 解题报告

宁波市镇海蛟川书院周诚驰

October 6,2015

## 1 题目大意

在公路上有  $N$  个广告牌，大厨会选择一部分广告牌放广告。为了加深路人的影响，大厨希望任意连续的  $M$  个广告牌中至少有  $K$  个餐馆广告。由于之前一直在亏钱，大厨希望在满足条件的同时使用最少的广告牌。现在大厨想知道有多少种使用广告牌的方案。

数据规模： $1 \leq K \leq M \leq 50, M \leq N \leq 10^9$ 。

## 2 算法讨论

### 2.1 特殊情况

首先考虑  $M$  整除  $N$  的情况，可以把串分成  $N/M$  段，每段长度为  $M$ 。那么每一段中至少有  $K$  个 1，整个串至少有  $K * (N/M)$  个 1。在每一段的最后  $K$  个位置放 1 所得到的串是符合条件的，那么可以证明 1 最少的个数是  $K * (N/M)$ 。

#### 2.1.1 简单的例子

观察下面这个例子：

$$N = 16 \quad M = 4 \quad K = 2$$

0011 0101 1010 1100

可以发现对应 1 在段中的位置在逐渐减小。段中第一个 1 的位置从 3 到 2 到 1，第二个 1 的位置从 4 到 4 到 2。

记第  $i$  块中的第  $j$  个 1 在块中的位置为  $block_{i,j}$ ，在整个串中的位置为  $whole_{i,j}$ 。可以得到对于任意  $x < y$ ，满足  $block_{x,z} \geq block_{y,z}$ 。证明如下：

若存在  $u, v$ ，满足  $block_{u,v} < block_{u+1,v}$ ，那么从  $whole_{u,v}+1$  到  $whole_{u,v}+M$  这个长为  $M$  的区间中 1 的个数小于  $K$ ，不满足条件。

### 2.2 套用模型

把上面这个例子写成矩阵：

3 2 1 1

4 4 3 2

可以发现这就是一个半标准杨氏矩阵，方案数计算公式如下：

$$dim = \prod_{(i,j)} \frac{r+j-i}{hook(i,j)}$$

其中  $hook(i,j)$  表示矩阵中同一行或同一列，纵坐标或横坐标大于等于  $(i,j)$  的个数。 $r$  表示候选数集合大小。

## 2.3 简化计算

同样对于上面这个例子，分子部分：

4 5 6 7

3 4 5 6

分母部分：

5 4 3 2

4 3 2 1

可以发现上下形式相同，而  $r \leq M$ ，当  $N$  很大的时候除最大和最小的数以外都可以约分。有效数个数是  $O(K * M)$ 。

## 2.4 非特殊情况

考虑  $M$  不整除  $N$  的情况，如果  $N \% M \leq M - K$ ，那么每一组的前  $N \% M$  个位置都应该是 0。如果  $N \% M > M - K$ ，那么每一组最后  $M - N \% M$  的位置都应该是 1。同样可以使用杨氏矩阵解决。

## 3 时空复杂度

需要枚举有效数，计算逆元。复杂度为  $O(K * M * \log(Mod))$