Lucky Days 解题报告

中山市第一中学 梁景涛

1 简要题意

定义一个序列 S:

S[1]=A

S[2]=B

S[i]=(X*S[i-1]+Y*S[i-2]+Z)mod P(i>=3)

给定 C 和 Q 个询问[L,R]，回答有多少个 L<=k<=R，满足 S[k]=C。

2 数据约束

P 是一个质数。

P<=10007

Q<=20000

1<=L<=R<=10^18

3 解题思路

因为是线性转移。我们定义一个初始向量 Init=(A,B,1)，转移矩阵 Trans 就不用说了。也就是说问题转化成了有多少个 L-1<=k<=R-1，使得 $Init*Trans^k=(C,q,1)$其中 q 是 0~P-1 的任意整数。假设我们能求出对于 q=0~P-1，矩阵(C,q,1)第一次出现的位置，以及整个序列的周期 T，问题就好办了。下面是这个算法的主要框架。

(1)求序列的周期 T

也就是我们要求最小的 $k(k<=P^2)$使得 $Init*Trans^k=Init$。这个类似于离散对数，于是我们可以用 baby-step-giant-step 的方法。

(2)求对于 q=0~P-1,(C,q,1)最早出现位置

也就是求最小的 k 使得 $Init*Trans^k=(C,q,1)$，方法同上。

(3)关于 baby-step-giant-step

我们取一个 L，令 $k=a*L+b(0<=b<L,0<=a<=P^2/L)$

于是 $I(T^L)^a=I(T^{-1})^b$

枚举 a，将结果用哈希表记录下来，再枚举 b，在哈希表中查询即可。

但是这里要求矩阵 Trans 是可逆的，这里 Trans 不可逆当且仅当 Y=0，幸好对于这种情况题目会变得特别简单，于是特判掉即可。

时间复杂度是：$O(P^2/L+(P+1)L)$很明显，L 取 $P^{0.5}$ 是最好。这一部分时间复杂度是 $O(P^{1.5})$。

(4)处理每个询问

关于这个，将所有(C,q,1)出现的位置 K[i]从小到大排序，将区间拆成两个前缀区间相减。对于一个前缀区间[1,R]，假设 R>=T，则

ANS

$$=\sum\left\lfloor\frac{R-K[i]}{T}\right\rfloor+1$$

$$=\sum\frac{(R-K[i])-(R-K[i]) \bmod T}{T}+1$$

$$=\frac{\sum(R-K[i])-\sum(R-K[i]) \bmod T}{T}+Num$$

其中 Num 表示有多少个 q 满足(C,q,1)会出现。

对于(R-K[i])mod T 的那部分，二分处理就可以了。

对于 R<T 的，由于对于每个 q，(C,q,1)只会出现一次，所以判断有多少个 K[i]<=R 即可，也是二分查找。

这一部分时间复杂度是 O(QlogP)

4 时间复杂度

$O(P^{1.5}+Q\log P)$