中国计算机学会
China Computer Federation

生成函数及其应用

主讲人：中山纪念中学 宋新波

中国计算机学会
China Computer Federation

主要内容

- 一、普通生成函数
- 二、指数生成函数
- 三、生成函数应用

一、普通生成函数

掷色子问题一

- **问题描述：** 掷两个色子，数字之和等于6有多少种情况?
- **分析：** 一共有5种情况，分别是1+5,2+4,3+3,4+2,5+1。

掷色子问题二

- **问题描述：**掷n个色子，数字之和等于m有多少种情况?
- **分析：**m必须在n到6*n之间才有解，否则答案为0。
- **方法1：递推法**
- 用f[i][j]表示掷i个色子，形成的数字之和为j的方案数。考虑第i个色子的数字为x，得到以下递推关系式：

$$f[i][j]=\sum_{x=\max(1,j-6*(i-1))}^{\min(6,\ j-i+1)} f[i-1][j-x] \quad , \quad f[0][0]=1$$

掷色子问题二

- **问题描述**：掷n个色子，数字之和等于m有多少种情况?
- **小结**：方法1可以解决问题，但不能计算直接表达式，有没有方法可以计算直接表达式?
- 问题可以转化为求解方程$x_1+x_2+…+x_n=m$，其中$1<=x_i<=6(1<=i<=n)$，方程的解数就是答案。

掷色子问题二

- **问题描述：** 掷n个色子，数字之和等于m有多少种情况？
- **方法2：容斥原理**
- 先解决问题A:求解方程$x_1+x_2+...+x_n=m$，其中$x_i>=1(1<=i<=n)$。设问题Bi表示方程$x_1+x_2+...+x_n=m$,其中$x_j>=1(1<=j<=n$,且$j!=i)$且$x_i>=7$的解。则原问题的解Ans= $|A|-|B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_n|$
- 问题A就是把m分解为n个正整数之和，用挡板原理得 $|A|=C_{m-1}^{n-1}$
- 利用容斥原理得 $|B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_n| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} C_n^i C_{m-i*6-1}^{n-1}$

掷色子问题二

- **问题描述：**掷n个色子，数字之和等于m有多少种情况?
- **方法2：**综上得

$$Ans = |A| - |B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_n|$$

$$= C_{m-1}^{n-1} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_n^i C_{m-i*6-1}^{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} C_n^i C_{m-i*6-1}^{n-1}$$

- 还有别的做法吗?

中国计算机学会
China Computer Federation

生成函数

- **定义**：对于序列$h_0,h_1,h_2,\ldots h_n\ldots$构造一个多项式函数$G(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n\ldots$，称$G(x)$为序列$h_0,h_1,h_2,\ldots h_n\ldots$的**生成函数**，也称**母函数**。序列的长度可能是有限的，也可能是无限的。其中h_n称为x^n的系数，x^n充当h_n的“占位符”。
- 若序列$h_0,h_1,h_2,\ldots h_n\ldots$已知，则生成函数便确定，反之若求得生成函数，序列也就确定了，序列和对应的生成函数是一一对应的。
- 如序列0,1,1,1,1,1,1对应的生成函数为$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$。
- 如函数$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$是序列$C_n^0,C_n^1,C_n^2,\ldots,C_n^n$对应的生成函数。

China Computer Federation
中国计算机学会

生成函数

- 可以把生成函数看成是代数对象，可以通过代数手段计算一个问题的可能性的数目，如$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i=C_n^0+C_n^1 x+C_n^2 x^2+\ldots+C_n^n x^n$，$C_n^k$ 是 x^k 的系数，可以把 C_n^k 看做是某个跟k有关的解。
- 另一方面，生成函数G还可以是无限可微分函数的泰勒级数(幂级数展开式)，如果可以找到这样一个函数H，其对应的泰勒级数形式为G,则G与H等价，可以相互替代。如序列1,1,1,...,1,...对应的生成函数 $G(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$
- 根据泰勒级数: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\cdots$
- $\therefore \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=G(x)$

生成函数与函数的区别

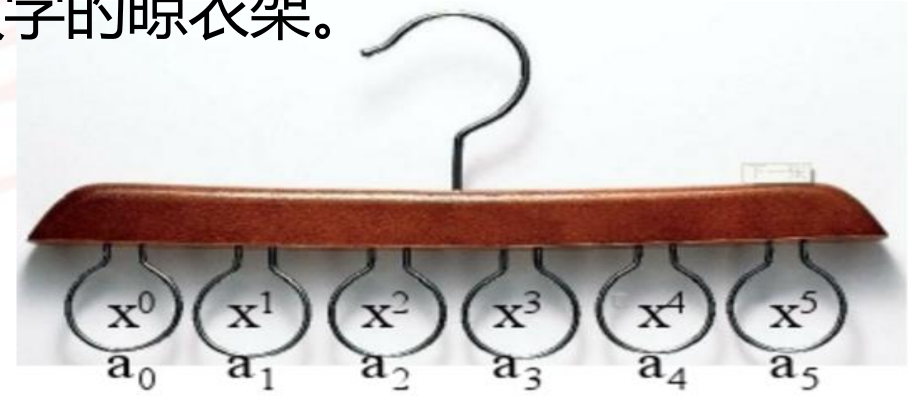
- **函数研究：**

  自变量x、函数值的取值范围、函数的极值、单调性、收敛性等。

- **生成函数：**

  计数工具、不关心x和函数的取值、**形式**幂级数，只关心x^n的系数，但运算过程又当作函数一样处理。像是一个用来展示一串数字的晾衣架。

- **生成函数似函数！非函数！**



普通生成函数的计数法则

- 普通生成函数即前面定义的生成函数。
- **回到问题1：** 考虑掷两个色子数字之和等于m有多少种情况?
- **分析：** 每一次掷色子，数字1到6都有可能会出现(**加法原理**)，但只会出现其中一个，为了区别用x^i来表示出现数字i这一情况，x^i的系数是掷一次色子出现数字i的方案数，这里当然都是1。
- 用多项式$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$表示一次投掷过程
- 掷两个色子可以分步完成(**乘法原理**)，第1步掷一个色子，第2步掷第2个色子，把两次的数字相加，掷两个色子可以用$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$来表示。

普通生成函数的计数法则

- 观察$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$，注意到三个要点:
- ①两式相乘，每个式子出一项参与乘法，跟一次投掷只会出现其中一个数字吻合。如x^2*x^4这一项代表第1次掷出数字2，第2次掷出数字4。
- ②展开式中每一项由左右两小项相乘得到，且左右两项x的指数进行相加，跟两次投掷把两次投掷的数字之和相加吻合。如$x^2*x^4=x^6$相当于第1次掷出2，第2次掷出4，和为6。
- ③x^m的每一个同类项对应着不同投掷使得数字之和等于m的方案，合并同类项后x^m的系数为两次投掷数字之和等于m的方案总数。如展开式中有$x*x^5,x^2*x^4,x^3*x^3,x^4*x^2,x^5*x$,这些对应数字之和6的不同方案，最后展开式中有$5x^6$这一项，其中5就是两次投掷数字之和为6的方案数。
- 以上生成函数计数方法利用了乘法原理和加法原理，与实际掷色子完全吻合，所以$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$就是该问题的生成函数，也可以写成 $\left(\frac{x(1-x^6)}{1-x}\right)^2$

实践

- 前面说了函数可以与其泰勒级数互相转换。如 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots$
- (1)展开$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$得
  $=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$
- (2)$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)=\left(\frac{x(1-x^6)}{1-x}\right)^2=x^2(1-x^6)^2*(1+x+x^2+\dots)*(1+x+x^2+\dots)$

  $=(x^{14}-2x^8+x^2)*(1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n+\dots)$
- 研究可得
- $x^i(2<=i<=7)$的系数是i+1，与展示(1)吻合。
- $x^i(8<=i<=13)$的系数分为①左边x2与右边xi-2相乘，系数为i-2+1=i-1，②左边-2x8与右边xi-8这一项相乘，系数为-2*(i-8+1)=14-2*i，相加得13-i，与展开(1)吻合。
- 同理$x^i(i>=14)$的系数分为三部分，分别是i-1,-2*(i-7),i-13，相加等于0，与展开(1)吻合。

例题1.物品选取

- **问题描述：** 有k个不同的物品，每个物品数量为无穷大，计算从中选取n个物品的方案数h_n。
- **方法1：**
- h_n的求解等价于求解方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=n$的非负整数解的数目，即求解把n分解为k个非负整数和的方案数。设$y_i=x_i+1$,原方程等价于$y_1+y_2+\ldots+\ldots+y_k=n+k$，两个方程的解一一对应，关于y的方程等价于把n+k分解成k个正整数的方案数，该问题用挡板法易知是 $h_n=C_{n+k-1}^{k-1}$
- 所以 $g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k-1}x^n$

例题1.物品选取

- **问题描述：**有k个不同的物品，每个物品数量为无穷大，计算从中选取n个物品的方案数h_n。
- **方法2：**
- 每个物品可以选择的个数是0,1,2....,每个物品对应的生成函数为$1+x+x^2+\ldots$
- $g(x)=(1+x+x^2+\ldots)*(1+x+x^2+\ldots)*\ldots(1+x+x^2+\ldots)=\frac{1}{(1-x)^k}$
- 所以有 $\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k-1} x^n$

中国计算机学会 China Computer Federation

回顾掷色子问题二

- **问题描述：**掷n个色子，数字之和等于m有多少种情况?
- **生成函数法：**
- 每个色子对应的生成函数为$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$
- 掷n个色子对应的生成函数为$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n =$

$$\left(\frac{x(1-x^6)}{1-x}\right)^n = x^n(1-x^6)^n(1+x+x^2+\cdots)^n = x^n * \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i x^{6i} * \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+n-1}^{n-1} x^j = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i C_{m-6i-1}^{n-1} x^m$$

- x^m的系数为 $\sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i C_{m-i*6-1}^{n-1}$ ，与前面容斥原理解法的结果一致。

例题2.小明旅游

- **问题描述：**小明出门旅游，需要带一些食物，包括薯片、巧克力、矿泉水、汉堡、牛奶和糖果。经过估计，他觉得带n(n<=10^{100})件食物比较合适，但他还有一些癖好：
- ①最多带一个汉堡②巧克力的块数是5的倍数③最多带4瓶矿泉水④薯片的包数是一个偶数⑤最多带3罐牛奶⑥糖果的个数是4的倍数
- 问小明有多少种方式来准备这次旅行所带的食物。
- **方法1：**

例题2.小明旅游

- **方法1：**
- 按照条件“①最多带一个汉堡③最多带4瓶矿泉水⑤最多带3罐牛奶”分别取多少个，其中汉堡可以取0或1，矿泉水可以取0,1,2,3,4，牛奶可以取0,1,2,3。先枚举汉堡、矿泉水、牛奶分别取多少个，假设此时剩下要在②④⑥这三种物品中选择m个物品。
- 条件②巧克力的块数是5的倍数，可以设巧克力是5x块，同理设薯片是2y包，设糖果是4z个。则得到方程5x+2y+4z=m
- 可以用递推法，也可以枚举x,然后用扩展Gcd来解2y+4z=m-5x来解决。
- 但由于n的值太大会超时。

例题2.小明旅游

- **方法2：生成函数法**
- ①最多带一个汉堡，对应生成函数为$1+x$
- ②巧克力的块数是5的倍数,对应的生成函数为$1+x^5+x^{10}+\ldots=\frac{1}{1-x^5}$
- ③最多带4瓶矿泉水,对应的生成函数为$1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{1-x^5}{1-x}$
- ④薯片的包数是一个偶数,对应的生成函数为$1+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$
- ⑤最多带3罐牛奶,对应的生成函数为$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$
- ⑥糖果的个数是4的倍数,对应的生成函数为$1+x^4+x^8+\ldots=\frac{1}{1-x^4}$
- $h_0,h_1,h_2,\ldots,h_n,\ldots$对应的生成函数可以表示为 $(1+x)*(1+x^5+x^{10}+\ldots)*(1+x+x^2+x^3+x^4)*(1+x+x^2+x^3)*(1+x^4+x^8+\ldots)=$

$$(1+x)*\frac{1}{1-x^5}*\frac{1-x^5}{1-x}*\frac{1}{1-x^2}*\frac{1-x^4}{1-x}*\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^{2}x^n$$

，C_{n+2}^{2}即是本问题的答案。

例题3.出栈序列

- **问题描述：**按照1,2,...,n-1,n的顺序入栈，问可以得到多少种出栈序列。如n=3时有1 2 3，1 3 2，2 1 3，2 3 1，3 2 1共5种出栈序列。
- **方法1：**

例题3.出栈序列

- **方法1：**每一种出栈序列都对应着n个“进”和n个“出”的排列，该排列满足任何位置i之前的“出”的个数<=“进”的个数。如n=3时的5种出栈序列对应的“进出”排列如下：
- ①1 2 3:进出进出进出 ②1 3 2:进出进进出出 ③2 1 3:进进出出进出
- ④2 3 1:进进出进出出 ⑤3 2 1:进进进出出出
- 而3个“进”3个“出”的其他15个排列都不满足“任何位置之前出的个数小于等于进的个数”条件。如：进进出出出进，进出出进进出，进出出进出进，进出出出进进等。

例题3.出栈序列

- **方法1：**根据上述分析利用减法原理:**合法方案=总方案-不合法方案**
- 总方案为不考虑限制条件的n个进和n个出的排列，答案为
- 不合法意味着存在一个位置，其前面(含其自身)的“出”个数>“进”的个数，这样的位置可能不止一个，为了避免重复计算，只考虑第一次出现不合法的位置，这个位置一定是一个奇数，假设为2*i+1(0<=i<=n-1)，则第2*i+1位一定是“出”并且前面2*i个数是由i个“进”和i个“出”构成并且是合法排列，后面是由n-i个“进”和n-i-1个“出”构成的任意序列，做一次等价变换，把后面的n-i个“进”全部改写成“出”，把后面的n-i-1个“出”全部改写成“进”，这样一来任何一个不合法方案都跟n+1个“出”和n-1个“进”的排列一一对应，所以不合法方案数= C_{2n}^{n-1}

例题3.出栈序列

- **方法1：**如n=2时，2个“进”和2个“出”形成的不合法方案与1个“进”和3个“出”的排列一一对应关系如下：
- 出进进出 ⟺ 出出出进
- 出进出进 ⟺ 出出进出
- 出出进进 ⟺ 出进出出
- 进出出进 ⟺ 进出出出
- 答案= $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=\frac{(2n)!}{n!*n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!*(n+1)!}=\frac{(2n)!(n+1-n)}{(n+1)!n!}=\frac{(2n)!}{(n+1)n!n!}=\frac{C_{2n}^{n}}{(n+1)}$
- 卡特兰数!

例题3.出栈序列

- **方法2：递推+生成函数法**
- 用f[n]表示n个元素的出栈序列的方案数。
- 假设最后一个出栈的数是x，则:
- ①在把x进行压栈之前，x前面的1到x-1已经完成进栈出栈操作，这x-1个元素的进栈出栈序列的方案数为f[x-1];
- ②把x压栈后，再把x后面的n-x个元素进行进栈出栈，最后再x出栈，这n-x的进栈出栈序列的方案数为f[n-x]。
- 利用加法原理和乘法原理有: $f[n]=\sum_{x=1}^{n} f[x-1]*f[n-x],\ f[0]=1$

例题3.出栈序列

- **方法2：递推+生成函数法**
- 考虑f[0],f[1],...,f[n],...对应的生成函数为 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]x^n$
- 观察f[n]的递推式中有f[x-1]*f[n-x]这样的卷积形式
- 研究g(x)*g(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} f[n]x^n * \sum_{n=0}^{\infty} f[n]x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{n} f[x]*f[n-x]x^n$
- x^n的系数为$\sum_{x=0}^{n} f[x]*f[n-x] = f[0]*f[n]+f[1]*f[n-1]+f[2]*f[n-2]+...+f[n]*f[0]=f[n+1]$

$$g(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty} f[n+1]x^n$$

$$xg(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty} f[n+1]x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]x^n-1=g(x)-1$$

$$xg(x)^2-g(x)+1=0$$

例题3.出栈序列

- **方法2：递推+生成函数法**

$g(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}f[n+1]x^n$ ，$xg(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}f[n+1]x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}f[n]x^n-1=g(x)-1$ ，$xg(x)^2-g(x)+1=0$

$g(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$，根据 $\lim_{x\to 0}g(x)=f[0]=1$，可得：$g(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

利用牛顿二项式展开得：$g(x)=\frac{1-\sum_{k=0}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{k}(-4x)^k}{2x}=\frac{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}*\left(\frac{1}{2}-1\right)*\ldots*\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-4x)^k}{2x}$

$=\frac{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1*(1-2)*(1-4)\ldots*(1-2k+2)}{2^k k!}(-4x)^k}{2x}=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}(4x)^k}{2x}=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!}{2^k k!*2^{k-1}(k-1)!}(4x)^k}{2x}$

$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{2k-2}^{k-1}}{k}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^{k}}{k+1}x^k$ 。与方法一答案一致！

二、指数生成函数

例题4.物品选取2

- **分析：** 例1物品选取只要求选出n个物品出来，是组合问题，可以用递推、组合公式或普通生成函数来解决。本题选出n个物品后还要求排成一排，属于排列问题。
- **方法1：递推法**
- 设f[k][n]表示从前k种物品中选出n个物品排成一排的方案数。考虑第k种物品选取的个数m以及这m个物品出现在排列中的位置，得到以下递推关系式：

$$f[k][n]=\sum_{m=0}^{\min\{n_k,n\}} C_n^m f[k-1][n-m]$$

例题4.物品选取2

- **方法2**
- 设每一种物品选择的数量分别是$m_1,m_2,\ldots,m_k$，则根据题目有：

$$m_1+m_2+\ldots+m_k=n,\text{其中}0<=m_i<=n_i(1<=i<=k)$$

- 对于上面方程的每一组解$(m_1,m_2,\ldots,m_k)$对应的不同排列数有

$$C_n^{m_1}*C_{n-m_1}^{m_2}*C_{n-m_1-m_2}^{m_3}*\ldots*C_{m_k}^{m_k}=\frac{n!}{m_1!*(n-m_1)!}*\frac{(n-m_1)!}{m_2!*(n-m_1-m_2)!}*\frac{(n-m_1-m_2)!}{m_3!*(n-m_1-m_2-m_3)!}*\ldots*\frac{m_k!}{m_k!*0!}$$

$$=\frac{n!}{m_1!*m_2!*m_3!*\ldots*m_k!}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}m_i!}$$

例题4.物品选取2

- **方法2**
- 如k=3,n_1=3,n_2=2,n_3=3,n=5。则有：

$$m_1+m_2+m_3=5,\text{其中}0<=m_1<=3,0<=m_2<=2,0<=m_3<=3$$

- 上面方程的解(m1,m2,m3)有9组解，分别是(0,2,3)、(1,1,3)、(1,2,2)、(2,0,3)、(2,1,2)、(2,2,1)、(3,0,2)、(3,1,1)、(3,2,0)，每一组解对应的排列数为：

$$\frac{5!}{0!*2!*3!}=10,\frac{5!}{1!*1!*3!}=20,\frac{5!}{1!*2!*2!}=30,\frac{5!}{2!*0!*3!}=10,\frac{5!}{2!*1!*2!}=30,\frac{5!}{2!*2!*1!}=30,\frac{5!}{3!*0!*2!}=10,\frac{5!}{3!*1!*1!}=20,\frac{5!}{3!*2!*0!}=10$$

- 答案为以上9个数之和170。

例题4.物品选取2

- **方法3**
- 方法2需要列举出每一组解，这个效率有点低。
- 能不能用生成函数的方法?
- 设f[n]表示选出n个物品排成一排的方案数。根据方法2的分析有：

$$f[n]=\sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=n}\frac{n!}{m_1!*m_2!*\dots m_k!}\xrightarrow[\text{配上}x^n\text{,找出通项的规律}]{}\frac{f[n]}{n!}x^n=\sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=n}\frac{x^{m_1}}{m_1!}*\frac{x^{m_2}}{m_2!}*\dots\frac{x^{m_k}}{m_k!}$$

$$\therefore f[0]+f[1]x+\frac{f[2]}{2!}x^2+\dots+\frac{f[n]}{n!}x^n+\dots=$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)*\dots*\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right)$$

例题4.物品选取2

- **方法3**

$$f[n]=n!*\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)*\ldots*\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right)$$ 展开式中 x^n 的系数

- 如计算从3个a_1,2个a_2,3个a_3中选出5个数排成一排的方案数f[5]，可以这样做：
- 展开

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)*\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)*\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{13}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\frac{1}{9}x^7+\frac{1}{72}x^8$$

则 $f[5]=5!*\frac{17}{12}=5!*\left(\frac{1}{0!2!3!}+\frac{1}{1!1!3!}+\frac{1}{1!2!2!}+\frac{1}{2!0!3!}+\frac{1}{2!1!2!}+\frac{1}{2!2!1!}+\frac{1}{3!0!2!}+\frac{1}{3!1!1!}+\frac{1}{3!2!0!}\right)=170$

分别对应选择"2个$a_2$3个a_3"、"1个$a_1$1个$a_2$3个a_3"、"1个$a_1$2个$a_2$2个a_3"、"2个$a_1$3个a_3"、"2个$a_1$1个$a_2$2个a_3"、"2个$a_1$2个$a_2$1个a_3"、"3个$a_1$2个a_3"、"3个$a_1$1个$a_2$1个a_3"、"3个$a_1$2个a_2"的排列情况。

指数生成函数

- **定义：** 对于序列$h_0,h_1,h_2,\dots h_n\dots$构造一函数$G_e(x)=h_0+\frac{h_1}{1!}x+\frac{h_2}{2!}x^2+\dots+\frac{h_n}{n!}x^n+\dots$，称$G_e(x)$为序列$h_0,h_1,h_2,\dots h_n\dots$的**指数生成函数**，也称**指数母函数。**
- 序列(1,1,1,...)对应的指数生成函数为 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$(泰勒公式)
- 序列(1,-1,1,-1,...)对应的指数生成函数为 $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\dots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=e^{-x}$
- 序列(1,0,1,0,...)对应的指数生成函数为 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- 序列(0,1,0,1,...)对应的指数生成函数为 $\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
- 序列$(P_n^0,P_n^1,P_n^2,\dots,P_n^n)$对应的指数生成函数为 $\sum_{i=0}^{n}\frac{P_n^i}{i!}x^i=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i=(1+x)^n$
- **普通生成函数常用于组合问题，指数生成函数常用于排列问题。**

例题5.棋盘着色

- **问题描述：**确定用红、白和蓝三色给1*n的棋盘着色方案数。要求红格数是偶数，且至少有一个蓝格。

例题5.棋盘着色

- **方法1：递推法**
- 设f[n]表示1*n的棋盘着色后红格数是偶数且至少有一个蓝格的方案数。考虑第n个格子的颜色，分成以下3种情况：
- ①白色：f[n-1]
- ②红色：g[n-1](表示1*(n-1)的棋盘着色后红格数是奇数且至少有一个蓝格的方案数)
- ③蓝色：h[n-1](表示1*(n-1)的棋盘着色后红格数是偶数的方案数)
- 综上：f[n]=f[n-1]+g[n-1]+h[n-1]

例题5.棋盘着色

- **方法1：递推法**
- 设g[n]表示1*n的棋盘着色后红格数是奇数且至少有一个蓝格的方案数。考虑第n个格子的颜色，分成以下3种情况：
- ①白色：g[n-1]
- ②红色：f[n-1]
- ③蓝色：t[n-1](表示1*(n-1)的棋盘着色后红格数是奇数的方案数)
- 研究发现$t[n-1]+h[n-1]=3^{n-1}$，所以有$t[n-1]=3^{n-1}-h[n-1]$
- 综上：$g[n]=g[n-1]+f[n-1]+3^{n-1}-h[n-1]$

例题5.棋盘着色

- **方法1：递推法**
- 设h[n]表示1*n的棋盘着色后红格数是偶数的方案数。考虑第n个格子的颜色，分成以下3种情况：
- ①白色：h[n-1]
- ②红色：等价于1*(n-1)的棋盘着色后红格数是奇数的方案数即3^{n-1}-h[n-1]
- ③蓝色：h[n-1]
- 综上：$h[n]=3^{n-1}+h[n-1]=3^{n-1}+3^{n-2}+h[n-2]=3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+3^{0}+h[0],h[0]=1$

$$h[n]=\frac{3^{n}+1}{2}$$

例题5.棋盘着色

- **方法1：递推法。**综合以上分析得：

$$\begin{cases} f[n]=f[n-1]+g[n-1]+\dfrac{3^{n-1}+1}{2} & ① \\ g[n]=f[n-1]+g[n-1]+\dfrac{3^{n-1}-1}{2} & ② \end{cases}$$

①+②得：$f[n]+g[n]=2*(f[n-1]+g[n-1])+3^{n-1}=2*(2*(f[n-2]+g[n-2])+3^{n-2})+3^{n-1}=2^2*(f[n-2]+g[n-2])+2*3^{n-2}+3^{n-1}$

$$=2^3*(f[n-3]+g[n-3])+2^2*3^{n-3}+2*3^{n-2}+3^{n-1}=2^3*(f[n-3]+g[n-3])+\left(\frac{2}{3}\right)^2*3^{n-1}+\frac{2}{3}*3^{n-1}+3^{n-1}$$

$$=2^n*(f[0]+g[0])+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}*3^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}*3^{n-1}+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^2*3^{n-1}+\frac{2}{3}*3^{n-1}+3^{n-1}=3^n-2^n \quad ③$$

①-②得：$f[n]-g[n]=1 \quad ④$

$\dfrac{③+④}{2}$得：$f[n]=\dfrac{3^n-2^n+1}{2} \quad (n>=1)$

例题5.棋盘着色

- **方法2：减法原理+数学。**设f[n]表示1*n的棋盘着色后红格数是偶数且至少有一个蓝格的方案数。g[n]表示红格数为偶数的方案数，h[n]表示红格数为偶数且没有蓝格的方案数。则有f[n]=g[n]-h[n]
- 计算g[n]可以考虑具体红格数的情况，假设红格数为x，则该情况的方案数为 $C_n^x * 2^{n-x}$ x可以取0,2,4,...。所以有：g[n]= $C_n^0 * 2^n + C_n^2 * 2^{n-2} + C_n^4 * 2^{n-4} + \ldots = \sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x 2^{n-x}$
- 又因为 $\sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x 2^{n-x} + \sum_{0\le x\le n\text{的奇数}} C_n^x 2^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x 2^{n-x} = (1+2)^n = 3^n$

$$\sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x 2^{n-x} - \sum_{0\le x\le n\text{的奇数}} C_n^x 2^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x 2^{n-x} (-1)^x = (2-1)^n = 1$$

两式相加除以2得：$g[n] = \sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x 2^{n-x} = \frac{3^n+1}{2}$

例题5.棋盘着色

- **方法2：减法原理+数学。**计算h[n]同样可以考虑具体红格数的情况，假设红格数为x，则该情况的方案数为 C_n^x，x可以取0,2,4,...。所以有：h[n]$=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=\sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x$
- 又因为 $\sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x+\sum_{0\le x\le n\text{的奇数}} C_n^x=\sum_{x=0}^{n} C_n^x=(1+1)^n=2^n$，$\sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x-\sum_{0\le x\le n\text{的奇数}} C_n^x=\sum_{x=0}^{n} C_n^x 1^{n-x}(-1)^x=(1-1)^n=0$

  两式相加除以2得：$h[n]=\sum_{0\le x\le n\text{的偶数}} C_n^x=2^{n-1}$

  $f[n]=g[n]-h[n]=\dfrac{3^n-2^n+1}{2}$。与方法1结果一致。

例题5.棋盘着色

- **方法3：指数生成函数**
- 方法1和方法2的解法都较为复杂，当限制条件再多一些时，处理起来更困难，以上两个方法的可扩展性较差。
- 该问题可以看做是选择n个颜色然后进行排列。可以用指数生成函数来做。用h_n表示1*n的着色方案数，则指数生成函数中:
- 对应于红色的因子是 $h_1(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- 对应于白色的因子是 $h_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x$
- 对应于蓝色的因子是 $h_3(x)=x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x-1$

例题5.棋盘着色

- **方法3：指数生成函数**
- 则序列h0,h1,h2,...hn,...对应的指数生成函数为：

$$G_e(x)=h_1(x)*h_2(x)*h_3(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}*e^x*\left(e^x-1\right)=\frac{e^{3x}-e^{2x}+e^x-1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}-\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}+\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{3^n-2^n+1}{n!}x^n$$

$$\therefore h_n=\frac{3^n-2^n+1}{2}$$

三、生成函数应用

中国计算机学会
China Computer Federation

例题6.骨牌覆盖

- **问题描述**：你有若干种颜色不同的骨牌，其中大小为1*i的骨牌有a_i种。每种骨牌都可以无限量使用。用骨牌不重叠地铺满一排1*n的方格，共有几种方法？
  ($1<=a_i,n<=10^5$)
- **方法1：递推**
- 用f_n表示铺满一排1*n的方格的方法数，考虑最后一个骨牌的大小得到以下递推：
  $f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i f_{n-i}, f_0 = 1$
- 时间复杂度为$O(n^2)$。超时。

例题6.骨牌覆盖

- **方法2：生成函数**
- 假设使用了k个骨牌，每一个骨牌的长度分别是$L_1,L_2,\dots L_k$，则有$L_1+L_2+\dots+L_k=n$，该情况对应的方案数为$a_{L1}*a_{L2}*\dots a_{Lk}$。该性质符合普通生成函数中的乘法原理和加法原理。
- 一个骨牌对应的生成函数因子为: $A(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$
- k个骨牌拼接得到的生成函数为: $A(x)^k$
- $f_0,f_1,f_2,\dots,f_n,\dots$对应的生成函数为: $\sum_{k\geq 0}A(x)^k=\frac{1}{1-A(x)}$
- 利用多项式求逆可以在O(nlgn)完成。

例题7.伯努利数

- **问题描述：**伯努利数$\{B_0,B_1,B_2,\dots,B_n,\dots\}$满足递推关系式:$\sum_{i=0}^{n} B_i C_{n+1}^{i} = 0(n>0)$，$B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$

要求对于所有的$0<=i<=n-1$，输出B_i的值。($n<=10^5$)

中国计算机学会
China Computer Federation

例题7.伯努利数

- **分析：**直接按照递推式做时间复杂度是O(n^2)。超时。

$$\sum_{i=0}^{n} B_i C_{n+1}^{i} = 0(n>0) \xrightarrow[\text{令}m=n+1]{\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow} \sum_{i=0}^{m-1} B_i C_m^{i} = 0(m>1) \xrightarrow[\text{增加一项}]{\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow} \sum_{i=0}^{m} B_i C_m^{i} = B_m (m>1) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} B_i C_n^{i} = B_n (n>1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i C_n^{i} = B_n (n>1) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} B_i \frac{n!}{i!(n-i)!} = B_n (n>1) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{B_i x^i}{i!} * \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{B_n}{n!} x^n (n>1)$$

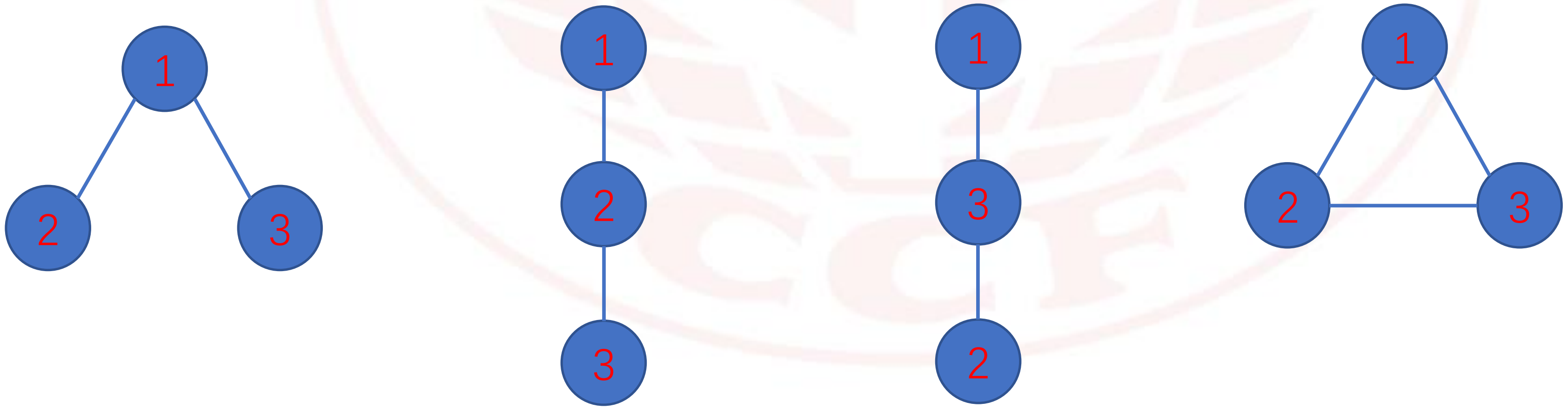
- 设B(x)为$B_0,B_1,B_2,\ldots,B_n,\ldots$对应的指数生成函数，则有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!} * \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \left(1 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{B_n x^n}{n!} + \ldots\right) * \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) = B(x)e^x = B(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1 + \frac{x}{2} = B(x) + x$$

$$B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i!}\right)^{-1}$$ 。用多项式求逆可以在$O(n\lg n)$内解决。

例题8.连通图计数

- **问题描述：** 求出n个有标号顶点的连通无向图的个数。不允许有重边和自环。($n<=10^5$)
- 如n=3时，答案为4:



例题8.连通图计数

- **方法1：减法原理+递推**
- 设f_n表示n个有标号顶点的连通无向图的个数。利用减法原理得:
- f_n=总方案-不合法=|A|-|B|
- 其中A是先不考虑“连通”这个限制条件，表示“n个有标号的无重边和自环的图”的数量,由于完全图的边数为 C_n^2 ,完全图中的每条边有选和不选两种选择，所以|A|= $2^{C_n^2}$
- B表示“n个有标号的无重边和自环的非连通图”的数量，考虑1号顶点所在的连通块中顶点个数为x，则这x个节点的连通无向图的个数为f(x),余下的n-x个顶点是无向图，个数为 $2^{C_{n-x}^2}$ 。所以|B|= $\sum_{x=1}^{n-1} C_{n-1}^{x-1} * f_x * 2^{C_{n-x}^2}$ $\therefore f_n = 2^{C_n^2} - \sum_{x=1}^{n-1} C_{n-1}^{x-1} * f_x * 2^{C_{n-x}^2}$，$f_1 = 1$。超时！

例题8.连通图计数

- **方法2：生成函数法**
- 用f_n表示n个有标号顶点无自环无重边的连通图的个数
- 用g_n表示n个有标号顶点无自环无重边的图的个数，根据前面已知g_n= $2^{C_n^2}$
- 计算g_n还可以根据图中连通分量的个数k(1<=k<=n)来进行分类。k个连通分量大小为$m_1,m_2,\dots,m_k$，满足$m_1+m_2+\dots+m_k=n$,每个连通分量连通图的个数为f_{mi}(1<=i<=k)。在考虑每个分量的节点时,不采用“最小表示法”去重，可以先分配最后整体除以k!去重。得:

$$g_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}*\sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=n}\frac{n!}{m_1!*m_2!*\dots*m_k!}f_{m_1}f_{m_2}*\dots*f_{m_k}$$

例题8.连通图计数

- **方法2：生成函数法**

$$g_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}*\sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=n}\frac{n!}{m_1!*m_2!*\dots*m_k!}f_{m_1}f_{m_2}*\dots*f_{m_k}$$

$\Downarrow$配上 x^n，配通项

$$\frac{g_n x^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}*\sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_k=n\\ m_1,m_2,\dots,m_k>=1}}\frac{f_{m_1}x^{m_1}}{m_1!}*\frac{f_{m_2}x^{m_2}}{m_2!}*\dots*\frac{f_{m_k}x^{m_k}}{m_k!}$$

令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{C_n^2}}{n!}x^n, f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n!}x^n$，则有：$g(x)=\sum_{k>=1}\frac{1}{k!}f(x)^k=e^{f(x)}-1$

例题8.连通图计数

- **方法2：生成函数法**

$$g(x)=\sum_{k>=1}\frac{1}{k!}f(x)^k=e^{f(x)}-1$$

$$f(x)=\ln(g(x)+1)$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)+1}$$

$$f(x)=\int\frac{g'(x)}{g(x)+1}dx$$

- 利用多项式求逆和多项式乘法FFT可以在O(nlgn)内完成。

例题8.连通图计数

- **方法2：生成函数法**
- 如要计算f_4的值
- 首先g(x)= $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{C_n^2}x^n}{n!}=x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{8}{3}x^4+\ldots$
- g'(x)= $1+2x+4x^2+\frac{32}{3}x^3+\ldots$
- 多项式求逆(g(x)+1)$^{-1}$= $1-x-\frac{1}{3}x^3-x^4+\ldots$

$$g(x)=\sum_{k>=1}\frac{1}{k!}f(x)^k=e^{f(x)}-1$$

$$f(x)=\ln(g(x)+1)$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)+1}$$

$$f(x)=\int\frac{g'(x)}{g(x)+1}dx$$

$$f'(x)\frac{g'(x)}{g(x)+1}=g'(x)*(g(x)+1)^{-1}=\left(1+2x+4x^2+\frac{32}{3}x^3+\ldots\right)\left(1-x-\frac{1}{3}x^3-x^4+\ldots\right)=1+x+2x^2+\frac{19}{3}x^3+\ldots$$

$$f(x)=\int\left(1+x+2x^2+\frac{19}{3}x^3+\ldots\right)dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{19x^4}{12}+\ldots$$

所以 $f_4=4!*\frac{19}{12}=38$

例题9.有限制的置换计数

- **问题描述：**给定集合S和正整数n，计算有多少个n阶置换p,满足p分解后的每一个轮换的大小都在S内。(n<=10^5)
- **置换:**n个元素1,2,...,n之间的一个置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 表示1被1到n中的某个数a_1取代,2被1到n中的某个数a_2取代，直到n被1到n中的某个数a_n取代,且$a_1,a_2,\dots,a_n$互不相同。如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个4阶置换。
- **轮换:**我们把 $(a_1\, a_2 \cdots a_{n-1}\, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ 称为n阶轮换也称n阶循环，轮换的大小为n。
- 每个置换可以看作是若干个互不相交的轮换的乘积。如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 可以看作是(1 3 6)(2 5)(4)这三个轮换的乘积。该置换的对应的3个轮换大小是1,2,3。

例题9.有限制的置换计数

- **分析：**我们先来分析一下对轮换大小没有限制的置换数，显然就是排列数n!。还有别的方法，对解决有限制的计数有启发。
- 设f_n表示n阶置换数。按照轮换的数量k进行分类,设k个轮换大小分别为$m_1,m_2,\ldots,m_k$,则有$m_1+m_2+\ldots+m_k=n$,每个轮换的数量跟圆排列一样，数量为$(m_i-1)!(1<=i<=k)$。同样先不去重最后整体除以k!去重。得：

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{m_1+m_2+\ldots+m_k=n\\ m_1,m_2,\ldots,m_k\ge 1}}\frac{n!(m_1-1)!(m_2-1)!*\ldots*(m_k-1)!}{m_1!*m_2!*\ldots m_k!}$$

例题9.有限制的置换计数

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_k=n\\ m_1,m_2,\dots,m_k\ge 1}}\frac{n!(m_1-1)!(m_2-1)!*\dots*(m_k-1)!}{m_1!*m_2!*\dots*m_k!}$$

- 配上x^n，配通项得：$\frac{f_n x^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_k=n\\ m_1,m_2,\dots,m_k\ge 1}}\frac{x^{m_1}}{m_1}*\frac{x^{m_2}}{m_2}*\dots*\frac{x^{m_k}}{m_k}$

- 令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n x^n}{n!},g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,则有:$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(x)^k}{k!}=e^{g(x)}$

$\because g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$(泰勒公式) $\therefore f(x)=e^{g(x)}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$\therefore f_n=n!$。答案正确!

例题9.有限制的置换计数

- 现在再来看有限制的，限制选择的m_i(1<=i<=k)要属于给定的集合S，其他一样。所以有：$$\frac{f_n x^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{m_1+m_2+\cdots+m_k=n\\ m_1,m_2,\cdots,m_k\in S且\geq 1}}\frac{x^{m_1}}{m_1}*\frac{x^{m_2}}{m_2}*\cdots*\frac{x^{m_k}}{m_k}$$
- 令 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n x^n}{n!},\ g(x)=\sum_{n\in S}^{\infty}\frac{x^n}{n},则有:f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(x)^k}{k!}=e^{g(x)}$$

例题9.有限制的置换计数

- 分析：考虑更一般的形式 $A(x)=\sum_{i>=1} a_i x^i$，要计算$B(x)=e^{A(x)}=\sum_{i>=0}\frac{A(x)^i}{i!}=\sum_{i>=0} b_i x^i$，$b_0=1$

例题9.有限制的置换计数

- **方法1：FFT**
- 考虑更一般的形式。给定 $A(x)=\sum_{i>=1} a_i x^i$，要计算$B(x)=e^{A(x)}=\sum_{i>=0}\frac{A(x)^i}{i!}=\sum_{i>=0} b_i x^i$，$b_0=1$

$$B(x)=e^{A(x)} => B'(x)=e^{A(x)}A'(x)=B(x)A'(x) ==> \sum_{i>=0}(i+1)b_{i+1}x^i=\sum_{j>=0} b_j x^j * \sum_{k>=0}(k+1)a_{k+1}x^k$$

$$\therefore (i+1)b_{i+1}=\sum_{k=0}^{i}(k+1)b_{i-k}a_{k+1}=\sum_{k=1}^{i+1} k\, a_k b_{i-k+1} => i*b_i=\sum_{k=1}^{i} k\, a_k b_{i-k}$$

$$b_i=\frac{\sum_{k=1}^{i} k\, a_k b_{i-k}}{i}$$

- 普通递推时间复杂度为$O(n^2)$。用分治法计算所有b_i,每次用FFT计算左半边的b_i对右半边所产生的贡献，时间复杂度为$T(n)=2*T(n/2)+n\lg n=O(n\lg^2 n)$。

例题9.有限制的置换计数

- **方法2:牛顿迭代法**

$B(x)=e^{A(x)} \Rightarrow \ln(B(x))=A(x), b_0=1,$ 设$f(B(x))=\ln(B(x))-A(x)=0$

设已求得$B(x)$的前n项$B_0(x)$,即$B(x)\equiv B_0(x)\pmod{x^n}$

对$f(B(x))$进行泰勒展开得:

$$f(B(x))=f(B_0(x))+f'(B_0(x))(B(x)-B_0(x))+\frac{f''(B_0(x))}{2}(B(x)-B_0(x))^2+\ldots$$

$$\equiv f(B_0(x))+f'(B_0(x))(B(x)-B_0(x))\pmod{x^{2n}}=0$$

$$B(x)\equiv B_0(x)-\frac{f(B_0(x))}{f'(B_0(x))}\pmod{x^{2n}}=B_0(x)-\frac{\ln(B_0(x))-A(x)}{\frac{1}{B_0(x)}}=B_0(x)(1-(\ln(B_0(x))-A(x)))\pmod{x^{2n}}$$

计算$\ln(B_0(x))$跟例8一样。按此迭代，复杂度$T(n)=T(n/2)+O(n\lg n)=O(n\lg n)$。

总结&参考文献

- 清华大学马昱春讲解的国家精品课程《组合数学》
- 机械工业出版社《组合数学》原书第5版。Richard A.Brualdi著 冯速等译
- 金策2015年信息学奥林匹克中国国家队候选队员论文《生成函数的运算与组合计数问题》
- 毛杰明2009年国家集训队论文《母函数的性质及应用》

- 谢谢大家的聆听！！