

Fairy 解题报告

东营市胜利第一中学 姜志豪

1 试题来源

Codeforces Beta Round #19

提交: <http://codeforces.com/problemset/problem/19/E>

2 试题大意

给出一张 n 个点, m 条边的无向图。现在要删除一条边, 使这张图变成一个二分图。

求所有方案。

$$1 \leq n \leq 10^4, 0 \leq m \leq 10^4$$

3 算法介绍

3.1 问题分析

一个图是二分图, 当它没有奇环。

构造一个原图的生成森林, 并对森林中的点黑白染色, 使森林中有边直接相连的点颜色不同。

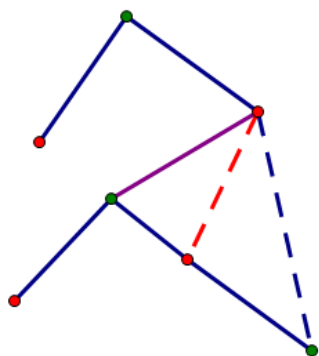
可以将边分为两类, 在森林中的边是树边, 不在森林中的边是非树边。

非树边可以分为两类, 若边连接了两个相同颜色的点, 我们称之为奇环边, 否则称之为偶环边。

若不存在奇环边, 那么这个图就是一个二分图, 删去任何一条边后仍然是二分图。下面只考虑有奇环边的情况。

一条非树边 E 删除后图能够变成二分图, 当且仅当 E 是奇环边, 并且没有其他奇环边。

一条树边 E 删除后图能够变成二分图，那么 E 必须被所有奇环边覆盖。树边 A 被非树边 B 覆盖是指，若 B 的两个端点是 c 和 d ，那么在森林中， A 在 c 到 d 的路径上。仅仅满足这个条件还不够，还要求 E 不被任何偶环边覆盖。因为如果 E 既被奇环边覆盖，又被偶环边覆盖，那么奇环和偶环叠加后，会得到一个不包含 E 的奇环（如下图）。



图中紫色实边表示将要删除的边 E ，蓝色实边表示其他树边，红色虚边是一条奇环边，蓝色虚边是一条偶环边。虽然 E 被唯一的奇环边覆盖了，但由于它也被偶环边覆盖了，在删除 E 后，图中仍然存在一个奇环。

3.2 具体实现

非树边删除后，剩余图是否是二分图，这比较容易判断。只需求出哪些非树边是奇环边就可以了。

判断树边删除后剩余图是否是二分图，要求出这条边是否被所有奇环边覆盖、是否被任一偶环边覆盖。我们可以直接求一条边被多少条奇环边覆盖、被多少条偶环边覆盖。

枚举每一条非树边，它覆盖的边是一条路径，更新这条路径上所有边的信息。

构造生成森林时，可以按照dfs树的构造方式进行构造。这样，非树边都是连接了一个点和这个点的某一个祖先结点。那么非树边覆盖的路径，就是从一点出发，一直向祖先方向延伸的路径。在树上进行差分，枚举到一条非树边时，就只需要修改两个点的信息。最后进行一次前缀和，得到每条树边被奇环边、偶环边覆盖的次数，进而求出问题的解。

时间复杂度： $O(n + m)$