

sequence 解题报告

绍兴市第一中学 任之洲

1 试题来源

Baltic Olympiad in Informatics 2014

[BZOJ 3917](#) [GitHub boi-2014](#)

2 试题大意

设数列 A 为一个从 N 开始的连续 K 个数按顺序构成的数列。

设数列 B 为将 A 中每个数只保留一个数字后得到的数列。

给定 K 和 B ，求可能的最小的 N 使得 N 确定的数列 A 能得到数列 B 。

数据范围： $K \leq 10^5$ ， $0 \leq B_i \leq 9$

3 算法介绍

对于 N 的粗糙上界，可以构造得出，当 $N = 1023456789000000$ 时，数据范围内的 B 数列都可以得到。

在解决这个问题之前，可以先把这个问题一般化，求解数列 A 满足：

- 数列 A 为连续的整数，即 $A_i = A_{i-1} + 1$ 。
- 构成 A_i 的数字集合中必须包含集合 B_i 。

原问题中需要求解的即为集合 B_i 等于输入序列的情况。

设 $A_0 = N = (X)y$ ，其中 $y = N \bmod 10$ ， $X = \lfloor \frac{N}{10} \rfloor$ ，那么数列 A 就可以这样表示：

$$(X)y \dots (X)_8 (X)_9 (X+1)_0 (X+1)_1 \dots (X+1)_9 (X+2)_0 \dots$$

这里 y 的值可以通过枚举来确定，当确定 y 后，可以定义新数列 $A' = \{X, X+1, X+2, \dots\}$ ，每个 A'_i 对应数字集合 B'_i 。

考虑 X 对应的必须数字集合 B_X ，易得

$$B_X = \bigcup_{i=0}^{9-y} (B_i - \{y_i\})$$

对于其它位的必须数字集合也可以类似得出。

设数列 A 的长度为 K ，枚举 y 后得到的数列 A' 的长度 K' 不会超过 $\lceil \frac{K}{10} \rceil + 1$ ，问题规模缩小到原先的 $\frac{1}{10}$ 。由于枚举了末位 y ，所以整层状态的数列长度和仍为 $O(K)$ 。

当 y 枚举 $O(\lg K)$ 次后，数列长度 K' 将会不超过 2，接下来的问题可以通过讨论构造得到：

- 当 $K' = 2$ 时，再枚举一次末位 y 。
 - 当 $y < 9$ 时，子问题缩减到 $K' = 1$ 。
 - 当 $y = 9$ 时，子问题中 K' 仍等于 2，但下一次枚举 9 就变得没有意义，可以直接强制下一次枚举中 $y < 9$ 。
- 当 $K' = 1$ 时，考虑直接构造
 - 当数字 0 不需要存在时，贪心将较小的数字放高位。
 - 当数字 0 必须存在时，0 一定放第 2 高位。
- 当构造出现前导 0 时，用 10 代替。

递归层数为 $O(\lg K)$ ，每层数列长度和为 $O(K)$ ，时间复杂度 $O(K \lg K)$ 。

具体实现时，需要记录数列每位数字集合，空间复杂度 $O(K \lg K)$ ，实际使用仅为 $O(K)$ 。