Distance on Triangulation 解题报告

福建省福州第一中学 董克凡

1 试题来源

题目链接：https://neerc.ifmo.ru/information/neerc-2015.pdf

测试数据：https://neerc.ifmo.ru/information/index.html

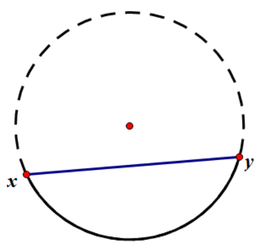
2 题目大意

给出一个正n边形以及这个n边形的一个三角剖分，需要处理q组询问，每组询问给出两个数s_i, t_i，询问s_i到t_i的最短路。

$n \leq 5 * 10^4, q \leq 10^5$

3 算法讨论

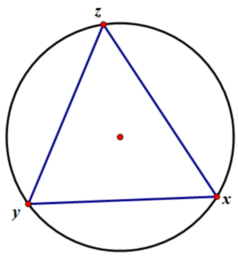
首先观察一下凸多边形三角剖分的性质。首先，如果有一条边(x, y)将这个多边形分为了两个部分（如下图的实线部分与虚线部分）



那么假设u, v属于不同的部分，那么由于三角剖分的对角线不会相交，所以u, v之间的路径必然需要经过x, y 之中的至少一个节点。所以$dist(u, v) =$

$\min\{dist(u,x)+dist(x,v), dist(u,y)+dist(y,v)\}$。这就启发我们此题可能可以使用分治的方法解决。

那么要使用分治，就需要找到一条对角线将整个多边形分为两个部分，而且要求这两个部分中较大的一个部分的大小不能太大。事实上，可以证明一定存在一条对角线，使得经过这条对角线的划分之后，分成的两个部分之中较小的一部分不小于原大小的三分之一。可以这样证明这个结论：由于三角剖分将这个多边形分为了很多个小的三角形，那么不妨考虑这个正多边形外接圆的圆心所在的那个三角形：



假设这个多边形的大小为n，那么由于这个三角形包含圆心，所以$(x,y),(y,z),(z,x)$的长度（指有向弧上的点的个数）都不会超过$\frac{n}{2}$，由于$(x,y)+(y,z)+(z,x)=n$，不妨假设$(x,y)\le(y,z)\le(z,x)$，那么$(z,x)\ge\frac{n}{3}$，结合上面的结论，$\frac{n}{3}\le(z,x)\le\frac{n}{2}$，故$zx$这条对角线将多边形分为两个部分，其中较大的一部分不会超过$\frac{n}{3}$。

所以我们选择zx这一条对角线，然后分别从z,x两点bfs求出这两点到所有点的最短路，然后处理跨越这条对角线的所有询问，再进行分治。故时间复杂度满足：

$$T(n)=T(\frac{2}{3}n)+T(\frac{1}{3}n)+O(n)$$

由主定理得，$T(n)=O(n\log n)$

需要注意的是，这个分治与树分治不同，这里选择的x,z两个点要同时分治给两边，所以分治的过程中需要把不属于这一侧的多边形的对角线删去，否则上式的最后一项就不止$O(n)$了，这就需要对边表做一定的修改。