

## Conveyor Belt 解题报告

合肥一中 梁泽宇

### 【题目大意】

给出平面上的若干个两两相离的圆，每个圆有一个旋转方向（顺时针或逆时针）。用传送带连接两个给定的圆（起始  $s$  和终止  $t$ ），使得传送带的总长度尽可能小。传送带不能自交、成环或从任何一个圆内部穿过，连接两个相邻的圆之间的传送带长度都要小于给定的值  $d$ 。

### 【考察算法】

计算几何（求圆的公切线、判线段相交、判线段和圆相交）、搜索优化。

### 【分析】

先根据每个圆的旋转方向，求出任意两个圆之间的传送带的连接情况（是一条线段，这里需要求出两圆的公切线，两圆的公切线可以用连心线向量旋转的方法得到），注意如果某条公切线的长度大于等于  $d$  或者穿过了某个圆，则不合法，舍弃。

然后，求出上面得到的所有公切线（线段）两两之间的相交情况（因为两条相交的线段不能都选上）。将这些公切线抽象成图中的点，如果公切线  $i$  的终止圆与公切线  $j$  的起始圆（以下称为中转圆）相同，且  $i$  和  $j$  不相交，则连边  $\langle i, j \rangle$ ，边权为若选这两条公切线，在中转圆上绕着的长度。设立源  $S$  和汇  $T$ ， $S$  向每个起始圆为  $s$  的公切线代表的点连一条有向边，边权为 0，每个终止圆为  $t$  的公切线代表的点向  $T$  连一条有向边，边权为 0。

这个图的满足路径上除了  $S$ 、 $T$  外的任何两个点对应的公切线都不相交的  $S$ - $T$  最短路长度即为结果。注意路径长度为边权与点权（该点对应的公切线的长度）之和。

由于有了“不相交”这个限制，不能用一般求最短路的算法来求解，所以能够使用的算法只有搜索了。暴力搜索无法在时限内出解，因此需要加入优化。有两个显然的优化，一是可行性剪枝（每个圆只能绕一次），二是启发式优化（将每个点忽略“不相交”限制的到  $T$  最短路长度作为乐观估计，即启发值，预处理中建好图后求出）。加入这两个优化就可以很快出解了。

时间复杂度：预处理部分为  $O(N^4)$ ，搜索部分由搜索量而定。

### 【编程注意事项】

本题在编程时有许多容易搞错的细节：

- （1）求圆的公切线时，要根据起始圆和终止圆的旋转方向分为四种情况处理（其中旋转方向相同为外公切线，旋转方向不同为内公切线）；
- （2）在求绕在一个圆上的传送带长度（图中的边权）时，也要根据该圆的旋转方向决定选哪一段弧，此外，要注意临界情况：传送带刚好与这个圆相切，弧长为 0；
- （3）判线段和圆相交时，不能用判直线和圆相交的方法，需要列一个一元二次方程；
- （4）在计算路径长度时不能漏了点权；
- （5）由于本题是多组数据，一定不能忘了初始化！特别是，设当前数据规模为  $n$ ，则对于数组中  $n$  以后的部分也要初始化，因为它们是上一组数据的残余值，在接下来的搜索中可能引用到它们，从而造成错误。