

# 集训队泛做题解

中山纪念中学 周铭洵

2015 年 10 月 16 日

## 1 Codechef Martarts

### 1.1 题意

一个完全二分图，边有两个权值  $A_{i,j}$  和  $B_{i,j}$ ，要进行匹配。令匹配边的  $A$  值总和为  $H$ ， $B$  值总和为  $G$ 。

对手的目的是最大化  $G - H$ ，其次最大化  $G$ ，他会在知道了匹配之后选择是否去掉一条匹配边，使得该边的权值不算入  $H$  和  $G$ 。

任务是找一个完全匹配，最大化  $H - G$ ，其次最大化  $H$ 。

点数在 100 以内。权值在  $10^{12}$  以内。

### 1.2 关键词

二分图匹配，匈牙利算法，KM 算法

### 1.3 题解

为了方便，我们定义每条边的价值  $W_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$

这样我们的任务是最大化价值和，其次最大化  $H$ 。对手的任务是最小化价值和，其次最大化  $H$ （当价值和一定之后要最大化  $G$  与最大化  $H$  实际上等价）。

只考虑最大化价值和：对方会删掉一条边，当且仅当这条边是匹配边中最大的而且价值为正值。直接用 KM 算法似乎不好做。考虑枚举对手会删掉哪一条边。将边按关键字从小到大排序一条一条加入图中。这样这条边对于对手来说删掉它会优于删掉之前加入的所有边。如果我们强制匹配了

这条边，那么我们最终获得的价值和就是除去这条边所连的两个点后剩下的点的最大匹配。

所以我们的任务就是高效地实现“加入一条边”并且“强制匹配这条边”。

可以这样实现：首先我们令图中所有边的价值均为负无穷。然后要加入一条边时首先令该边价值为正无穷（使它一定被匹配上），维护出整幅图的最大匹配，这样就可以算出该边作为被删边时的最优答案。然后我们再令该边的价值为它原来的价值，再次维护图的最大匹配。这样就为接下来的操作做好了准备。

问题在于我们怎么处理“更改一条边权”后维护最大匹配呢？

我们使用 KM 算法中的每个点的  $Label$  值。设改变的边所连的点分别是  $i, j$ 。我们先将  $i$  和它之前的匹配点  $mate(i)$  在匹配集中删掉，然后维护  $Label_i$ ，令  $Label_i = \max_j (W_{i,j} - Label_j)$ ，再从  $i$  点出发找一条增广路使匹配完全。这样就可以实现改变边权之后无须整幅图重构而能高效地维护最大匹配了。

再考虑两个关键字的情况。由于边变成了双关键字，我们可以用个 pair 之类的来进行加减法和大小比较。这样就解决了双关键字的情况。对边排序时应注意，对手同样希望最大化  $H$ ，对于对手来说如果有两条价值相同的边，他会删掉  $A_{i,j}$  更小的那条。

最后就是常数问题了。我自己的方案是倒过来做可以最优性剪枝。

## 1.4 算法流程

- 初始化  $Label$  和边权
- 枚举被对方删掉的边，强制匹配上，维护  $Label$ ，计算当前的答案
- 将这条边正常地加入图中，维护  $Label$
- 重复这个过程

注意这个流程是正着做。也可以反过来做。

## 1.5 复杂度

$$O(N^4)$$