《Jabby's newwork》解题报告

佛山石中李子豪

1 试题来源

可在BZOJ3913找到。

2 试题大意

给定L, R, A, B, C, K,求$\sum_{X=L}^{R}\left[\frac{AX+B}{C}\right]^K$.
$K \le 50, L, R, A, B, C \le 10^9$

3 算法介绍

3.1 一些需要用到的小知识

3.1.1

$\sum_{X=L}^{R}\left[\frac{AX+B}{C}\right]^K$
我们可以转换为$\sum_{X=0}^{R}\left[\frac{AX+B}{C}\right]^K - \sum_{X=0}^{L-1}\left[\frac{AX+B}{C}\right]^K$.
从而问题就变成求解$\sum_{X=0}^{N}\left[\frac{AX+B}{C}\right]^K$.

3.1.2

二项式定理：$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$.

3.1.3

$\sum_{i=1}^{n} i^m$,我们可以用一个关于n的$m+1$次多项式表示。
并且我们可以用$O(m^3)$的方法预处理出所有$i \le m$的对应多项式表示。

这一点，我们可以通过$(b+1)^m - b^m$的值，通过二项式定理展开和累加得到这个多项式表示。

3.2 算法

因此，我们可以采用类欧几里得算法解决。（之所以称为类欧几里得算法，后面就知道了）

这道题，我们可以去求解一个通式情况：$\sum_{X=0}^{N} X^a \left[\frac{AX+B}{C}\right]^b$.

最初的情况中,$a=0, b=K$.

我们针对各种情况进行分类讨论：

1.若$b=0$,那么原式化简为$\sum_{X=0}^{N} X^a$,于是我们可以通过预处理好的多项式表示求解。

2.若$A \ge C$,那么原式可变成$\sum_{X=0}^{N} X^a(\left[\frac{A}{C}\right]X + \left[\frac{(AmodC)X+B}{C}\right])^b$ 对于这个我们通过二项式定理进行拆项，又可以转化为子问题了。

3.若$B \ge C$,那么原式可变成$\sum_{X=0}^{N} X^a(\left[\frac{B}{C}\right] + \left[\frac{AX+(BmodC)}{C}\right])^b$ 继续进行二项式定理拆项，转化为子问题。

4.若$A=0$或$\left[\frac{AN+B}{C}\right]=0$,那么可知结果为0,可直接结束；

5.若$a=0$,可以通过一系列变换：

$$\sum_{X=0}^{N} \left[\frac{AX+B}{C}\right]^b$$
$$= \sum_{X=0}^{N} \sum_{Y=0}^{\left[\frac{AX+B}{C}\right]-1} [(Y+1)^b - Y^b]$$
$$= \sum_{Y=0}^{\left[\frac{AN+B}{C}\right]-1} [(y+1)^b - y^b] \sum_{X=\left[\frac{CY+C-B-1}{A}\right]+1}^{N} 1$$
$$= N\sum_{Y=0}^{\left[\frac{AN+B}{C}\right]-1} [(y+1)^b - y^b] - \sum_{Y=0}^{\left[\frac{AN+B}{C}\right]-1} [(y+1)^b - y^b] \left[\frac{CY+C-B-1}{A}\right]$$

对于前半部分，我们可以通过预处理得到的东西求解，而对于后半部分，继续通过二项式定理拆项转换为子问题。

我们可以观察到，此时A到了分母地方，C则到了分子地方，交换了位置!!

因此，通过欧几里得算法的证明，我们可以得到最多只会递归$O(log_2 N)$层。

6.对于其余的情况，同样是通过类似的变换：

$$\sum_{X=0}^{N} X^a \left[\frac{AX+B}{C}\right]^b$$
$$=...= S - \sum_{Y=0}^{\left[\frac{AN+B}{C}\right]-1} [(y+1)^b - y^b] \sum_{X=0}^{\left[\frac{CY+C-B-1}{A}\right]} X^a,$$

此处，$S = \sum_{Y=0}^{\left[\frac{AN+B}{C}\right]-1} [(y+1)^b - y^b] \sum_{X=0}^{N} X^a$.

那么，S可以通过预处理得到的东西求解，然后后半部分则通过前N项M次幂和的多项式表示化简开，然后变成子问题处理。

综合以上的部分，我们就可以解决这道题。

然后，这里需要用一个hash记录所有算过的值，以免重复，从而保证时间复杂度。

4 时空复杂度

空间复杂度$O(K^2log_2N)$,时间复杂度$O(K^4log_2N)$.

5 总结

通过数学推导，采用类欧几里得算法解决。