林中路径 解题报告

长沙市一中 张天扬

1 试题来源

HEOI2014

http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3610

2 试题大意

给定一张n个点m条边的有向图，以及一个k。之后有Q个询问，每次询问从s到t所有路径长度不超过k的路径的长度平方和。

$n \leqslant 100, m \leqslant 10^5, k \leqslant 10^9, Q \leqslant 10000$

3 算法介绍

不妨考虑所有路径长度小于k的路径长度平方和。这样我们可以将k加一之后计算答案。不妨设a_i表示经过路径长度为$i-1$的路径，从s到t的方案数。

$$ans_k = \sum_{i=1}^{k} a_i(i-1)^2$$

那么容易看出：

$$\begin{aligned} ans_{2k} &= \sum_{i=1}^{2k} a_i(i-1)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i(i-1)^2 + \sum_{i=1}^{k} a_{i+k}(i+k-1)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i(i-1)^2 + \sum_{i=1}^{k} a_{i+k}(i-1)^2 + k^2 \sum_{i=1}^{k} a_{i+k} + 2k \sum_{i=1}^{k} a_{i+k} \end{aligned}$$

不妨设$f_k = \sum_{i=1}^{k} a_i(i-1)$，$g_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$。则：

$$\begin{aligned} f_{2k} &= \sum_{i=1}^{2k} a_i(i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i(i-1) + \sum_{i=1}^{k} a_{i+k}(i+k-1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i(i-1) + \sum_{i=1}^{k} a_{i+k}(i-1) + k\sum_{i=1}^{k} a_{i+k} \end{aligned}$$

不妨设D为邻接矩阵，I为单位矩阵。设G为所有点对间g的矩阵，设F为所有点对间f的矩阵，设A为所有点对间ans的矩阵。那么我们有：

$$\begin{aligned} G_1 &= I \\ G_{2k} &= G_k + G_k * D^k \\ G_{k+1} &= G_k + D^k \end{aligned}$$

这样就能够求出G矩阵。

$$\begin{aligned} F_1 &= 0 \\ F_{2k} &= F_k + F_kD^k + kG_kD^k \\ F_{k+1} &= F_k + kD^k \end{aligned}$$

这是对照上面f的计算方式得出来的。这样我们可以求出F矩阵。

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_{2k} &= A_k + A_kD^k + 2kF_kD^k + k^2G_kD^k \\ A_{k+1} &= A_k + k^2D^k \end{aligned}$$

我们可以使用递归的方式来计算以上三个矩阵。得到A_k之后，对于一个询问(s,t)，$A_{k_{i,j}}$就是所求的答案。

复杂度是$O(n^3 \log k + Q)$。