BICKER 解题报告

江苏省常州高级中学 张志俊

题目大意

给定一张 n 个点的无向完全图，图中任意一条边 (i,j) 有两个非负权值属性 $d(i,j)$ 和 $q(i,j)$，要求将所有 n 个点分为两个非空集合 S 和 T。对于某种划分方案 (S,T)，记 $q(S,T)=\sum_{(i,j)}q(i,j)$ 和 $d(S,T)=\sum_{(i,j)}d(i,j)$ 分别为总损失和总收益，其中 (i,j) 是任意一条跨集合的边。求一种可能的划分方案使得比值 $\frac{q(S,T)}{d(S,T)}$ 尽量小。

时间限制：5 s

数据规模

- $1\le t\le 30$，$2\le n\le 500$，$1\le d,q\le 10^4$，$1\le v,w\le 10^4$。

算法分析

由于这一模型本身是 $NP-hard$ 问题，且在评分时并不要求每个测试点都给出最优解，于是本题只能从随机化算法等方面进行考虑。鉴于现场表现较好的代码均是卡时结合随机化，因此接下来仅讨论部分实践证明较为有效的随机策略及技巧。

首先，由于给定的评分方式是基于每个数据中所有测试点的综合表现给分，而且允许与参考值有一定的相对误差，因此对于每个测试点我们只需找到某个较为接近最优解的近似解即可。其次，当数据中边权的随机程度较高时，因为不同大小的损失和收益相对交错分布，所以 $|S|$ 的不同取值对比值的影响微乎其微，于是我们可以首先暴力枚举所有 $|S|\le 2$ 的情形，此时便可得到一个较优解，这部分代价为 $\Theta(n^2)$。同时，实践也表明在纯随机的前提下，上述解与最优解都极其接近。

接下来，我们考虑什么样的数据可以使得上述解与最优解存在较大差异。显然，上述解之所以能极其逼近最优解，原因在于损失与收益的分布过于接近，因此接下来我们尝试构造一些极端情形。首先，我们在保证 $|S|$ 与 $|T|$ 差距不是很大的前提下，将所有 n 个点随意分成两个部分作为期望的 S 和 T。为保证最优解的比值较小，任取一个 $(0,\frac{1}{2})$ 内的实数 c，然后对整张图随意连边，其中边权满足：

- 当边 (i,j) 的两个端点同属 S 或 T 时：若连边表示损失 $q(i,j)$，则控制其权值下限为 $(1-c)\cdot MaxValue$；若连边表示收益 $d(i,j)$，则控制其权值上限为 $c\cdot MaxValue$；
- 当边 (i,j) 的两个端点分属不同部分时：若连边表示损失 $q(i,j)$，则控制其权值上限为 $c\cdot MaxValue$；若连边表示收益 $d(i,j)$，则控制其权值下限为 $(1-c)\cdot MaxValue$。

易知，按上述方法构造的初始图的理论最优解与期望由 (S,T) 给出的解几乎不会有太大差距。因此，在这种情形下，我们尝试利用爬山法来进行适当调整。在选取初始解时，

为了在之后的随机调整中能遍及尽量多的情形，我们可以适当选取多种有一定差异的 $|S|$。同时，由于一般的随机调整每次仅变动极少的对象，为了加快逼近最优解的速度，我们不妨每次随机一个 $1 \sim n$ 的排列，然后按此顺序依次尝试改变单个对象，并在此过程中立即执行那些使得状态变优的改变。

另外，若对随机函数要求较高，可以尝试诸如梅森旋转等方法生成随机数。（C++11 中有现成的实现可以使用）

时间复杂度：$\Theta(n^2 + CountRandom \cdot n)$

空间复杂度：$\Theta(n^2)$