



CCPC & ICPC 趣题选讲

周雨扬

北京大学

2021 年 1 月 22 日



- 1 IOI2020 试题选讲
- 2 CCPC 试题选讲
- 3 ICPC 试题选讲
- 4 Opentrain 试题选讲
- 5 撒花

题目选自近几年的 CCPC & ICPC 题目

如果觉得很简单，请不要剧透答案，给其他同学一些思考的时间，说不定你做法假子。



题目选自近几年的 CCPC & ICPC 题目

如果觉得很简单，请不要剧透答案，给其他同学一些思考的时间，说不定你做法假子。



[不保留] 300iqTSDY | little_waxberry 的狂热粉丝

你们这个压轴不就是搞个 ***, 然后 *** 就没了

Figure: 当然这种形式的没啥问题

给定一颗包含有 n 个节点的树，下标依次为 0 至 $n-1$ 。

你需要实现两个过程：

- 过程 1：你需要给每一个节点分配一个 0 至 k 的互不相同的编号。在结束过程 1 后，交互库调用 Q 次过程 2。
- 过程 2：交互库会给你 Q 次询问，每次询问会给出起点 S 的编号，终点 T 的编号和所有与 S 相邻的节点的编号。你需要找到与 S 相邻的节点 x ，使得以 S 为根时， T 位于以 x 为根的子树中。你需要返回 x 的编号。

注意在执行过程 2 你不能利用过程 1 中的信息。换言之，过程 2 的程序不知道树的结构，也不知道每一个标号具体对应到哪一个点。

子任务 1(5 分): $k = 10^3$, 不存在度数大于 2 的节点。

子任务 2(8 分): $k = 10^3$, 第 i 条边连接 $i+1$ 和 $\lfloor i/2 \rfloor$

子任务 3(16 分): $k = 10^6$, 至多有一个度数大于 2 的节点。

子任务 4(10 分): $n \leq 8, k = 10^9$ 。

子任务 5(61 分): $k = 10^9$ 。假设所有测试点中编号最大值为 m , 你的得分如下:

$m > 10^9$	0
$2000 < m \leq 10^9$	$50 \log_{5 \times 10^5}(10^9/m)$
$1000 < m \leq 2000$	50
$m \leq 1000$	61

给定 n 个元素，下标为 0 至 $n-1$ 。每个元素属于 A 或者 B，已知编号为 0 的元素属于 A。

每一次你可以选定若干个互不相同元素，将其排成一行后向交互器询问，交互器会返回这个序列中有多少对相邻的元素，使得他们的种类互不相同。

你需要使用不超过 20000 次操作询问出属于 A 的元素的个数，同时你在交互器中询问的元素个数和不能超过 100000。

如果询问调用不合法会得到 0 分，否则假设你询问次数最大值为 m ，你的得分如下表：

$20000 < m$	0
$10010 < m \leq 20000$	10
$904 < m \leq 10010$	25
$226 < m \leq 904$	$22600/m$
$226 \leq m$	100

J. Abstract Painting



给定 n 个圆，第 i 个圆心为 $(0, x_i)$ ，半径为 r_i ，且 $0 \leq x_i \leq K$ ， $1 \leq r_i \leq 5$ 。
你需要插入若干个圆，第 i 个圆心为 $(0, X_i)$ ，半径为 R_i ，且

$0 \leq X_i \leq K$ ， $1 \leq R_i \leq 5$ 。注意你可以不插入任何圆。

有多少种方案，使得插入结束后，图中任意两个不同的圆之间交点个数不超过 1。答案对 998244353 取模。

$1 \leq K \leq 1000$ ， $1 \leq n \leq 5000$

I. Invaluable Assets



给定常数 C ，对于任意正整数 i ，你都有无穷多个大小为 i 的物品。每一个大小为 i 物品的质量为 $i^2 + C$ 。

有 n 个无穷大的背包，第 i 个背包已有了体积为 a_i 的物品。

Q 次询问，第 i 次询问给出一个 k ，询问如果填充物品使得每一个背包的物品体积不小于 a_i ，新增物品质量和最小为多少。

$n, Q \leq 10^5, C \leq 10^4, a_i, k$ 在 $[0, 10^9]$ 等概率随机生成。



F. Skeleton Dynamization

给定一张 n 个点 m 条边的无向简单图 $G = \{V, E\}$ 。

你需要将其划分成 $k(k \geq 2)$ 张子图，满足如下条件：

- 每张子图节点数相同，均为 n' ，且 n 个点都恰好属于某一张子图。这里假设第 i 张子图的第 j 个节点为 (i, j) 。
- $\forall 1 \leq i < j \leq k, 1 \leq x < y \leq n', (i, x)$ 和 (j, y) 有边当且仅当 $j = i + 1$ 且 $x = y$ 。
- $\forall 1 \leq i < j \leq k, 1 \leq x < y \leq n', (i, x)$ 和 (i, y) 有边当且仅当 (j, x) 和 (j, y) 有边。

题目大意

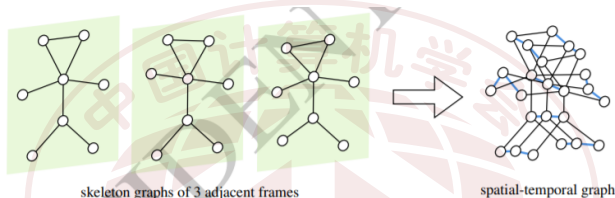


Figure: 一个简单的例子

你要求出 G 的划分，如果有多个划分，输出 k 最大的方案。如果有多个 k 最大的方案，输出任意一个即可。

$$1 \leq n \leq 100000, 1 \leq m \leq 200000.$$

L. Lost Temple



给定一个 $10^9 \times 10^9$ 的网格图，左上角坐标为 $(0, 0)$ 。

初始时有 n 组石柱，第 i 组石柱包含了坐标为 $(i, l_i), (i, r_i)$ 的石柱，除此之外没有认可石柱。

由于风雨侵袭，每一年，如果一个石柱存在一个存在相邻边的空格子，则他会在这一年结束的时候崩塌，石柱所在的这个格子也会变为空格子。

对于每一组石柱，询问在哪一年，这一组石柱全部崩塌。

$\sum n \leq 1.2 \times 10^7, 1 \leq l_i \leq r_i \leq 5 \times 10^8$ 。

L. Lost Temple

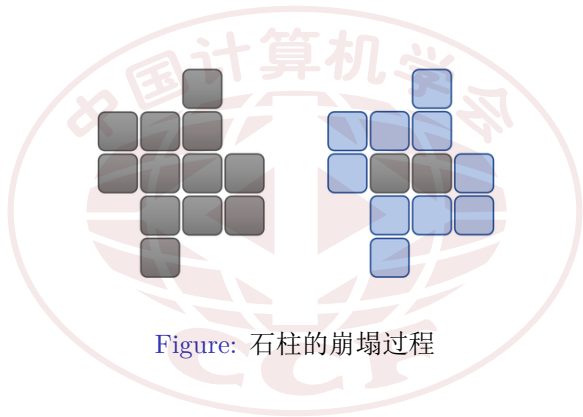


Figure: 石柱的崩塌过程



H. Rice Arrangement

有一个可以作 n 个人的圆形餐桌，桌上有 k 个人， k 碗饭。第 i 个人坐在 a_i 个位置，第 i 盘菜正对着 b_i 个位置。

你是服务员，每一次可以化一单位的时间将桌子顺时针或逆时针旋转 1 单位，使得原来面对第 i 个位置的菜面对第 $(i+1) \bmod n / (i+n-1) \bmod n$ 个人。

在每一次旋转前和旋转结束后，如果一个人面对一碗饭，它可以不花时间取走这盘饭。每个人需要恰好一碗饭。

假设在场所有人都想要最小化旋转花费的时间，输出最小花费时间。

$$n \leq 10^9, k \leq 2000$$

K. Traveling Merchant



给定一张 n 个点 m 条边的无向无重边自环的简单图，每一个点有颜色 0/1。保证 1 号点初始颜色为 0。

你现在在 1 号点，每当你离开节点 x ，节点颜色会改变。

希望你经过节点颜色依次为 01010101...

判断是否存在一条从 1 出发的无限长的满足你要求的路径。

$n, m \leq 200000$ 。

给定一颗包含 $2^n - 1$ 个节点的满二叉树，节点编号为 $1 \sim 2^n - 1$ 。

$\forall 2 \leq i < 2^n - 1$, 第 i 个节点父节点为 $\lceil \frac{i}{2} \rceil$ 。

所有叶子节点有一个固定的权值 v_i , 其余权值未定。

你需要确定所有非叶子节点的权值 v_i , 使得 $\sum (v_i - v_{\lfloor i/2 \rfloor})^2$ 最小, 输出答案对 998244353 取模的结果。

同时会有 Q 次单点修改, 你也要求出修改后上式最小值对 998244353 取模的结果。

$n \leq 18, Q \leq 200000$

H. Harmonious Rectangle



给定一个 $n \times m$ 的棋盘 A , 你可以给棋盘染三种颜色种的任意一种。假设给第 i 行第 j 列的格子染的颜色数为 $A_{i,j}$, 行列均从 1 开始编号。

定义一种染色方案是好的, 当且仅当: 存在 $1 \leq p < q \leq n, 1 \leq r < s \leq m$, 使得以下两个条件中至少满足一个:

- $A_{p,r} = A_{p,s}$ 且 $A_{q,r} = A_{q,s}$
- $A_{p,r} = A_{q,r}$ 且 $A_{p,s} = A_{q,s}$

求好的染色方案数, 对 998244353 取模。

给定一个 $n \times n$ 的围棋棋盘，棋盘上有若干个黑子和白子。

定义一个白子连通块为一个极大的仅仅包含白子的四连通块。这个连通块的气为与这个联通块联通的没有棋子的点个数。

对于棋盘上的所有棋子，如果将其颜色反色，有多少个白子所在的白子连通块气为 0。

$$2 \leq n \leq 1000$$

给定一个 $n \times n$ 的围棋棋盘，棋盘上有若干个黑子和白子。

定义一个白子连通块为一个极大的仅仅包含白子的四连通块。这个连通块的气为与这个联通块联通的没有棋子的点个数。

对于棋盘上的所有棋子，如果将其颜色反色，有多少个白子所在的白子连通块气为 0。

$$2 \leq n \leq 1000$$

$O(n^2 \log^2 n)$ 无法通过。

E. Tree Paths



给定一个 n 个节点的树。
询问有多少条树链，使得其编号重排后，为一个 $[a, b]$ 的重排列。
 $n \leq 50000$, 15 秒。

E. Tree Paths



给定一个 n 个节点的树。

询问有多少条树链，使得其编号重排后，为一个 $[a, b]$ 的重排列。

$n \leq 50000$, 15 秒。

其实完全可以出成 $n \leq 10^6$ 的。

你有 n 只羊坐落在一个数轴上。第 i 只羊时刻 t 在数轴上的位置为 $f_i(t) = a_i t + b_i$ 。你是羊倌，你的移动方式与羊类似，时刻 t 在数轴上的位置为 $g(t) = At + B$ 。

第 i 只羊的孤单度为

$$\left[\min_{t \in [0, T]} (f_i(t) - g(t)) \right]^2 + \left[\max_{t \in [0, T]} (f_i(t) - g(t)) \right]^2$$

找到任意 A, B ，使得所有羊孤单度最大值最小。

$n, |a_i|, |b_i| \leq 10^5, T \leq 100$ 。

A. Arithmetic



给定 a, b, p, k 。保证 p 是质数。
询问最小的 x ，使得 $a^x + b^x$ 是 p^k 的倍数。
 $1 \leq a, b, p \leq 10^4, p^k \leq 10^{18}$

I. Ranks



给定一个 $n \times n$ 的 01 矩阵 $A_{i,j}$ 。

询问对于矩阵的每一个元素 $A_{i,j}$ 翻转后，模二意义下的线性基大小是否改变，若改变，变大还是变小
 $n \leq 1500$ 。

H. Four-Coloring



给定一张包含 n 个点 m 条边的平面图。

这张图非常特殊，第 i 个点在平面直角坐标系下的坐标为 (x_i, y_i) 。

如果节点 i, j 之间有连边，则至少满足如下三个条件中的一个：

- $x_i = x_j$
- $y_i = y_j$
- $|x_i - x_j| = |y_i - y_j|$

你需要给每个节点染上四种颜色中的任意一种，使得对于任意一条边，其连接两个端点异色，由于四色定理，其显然有解，输出任一合法方案即可。

$n \leq 10000$ 。

提示



中国计算机学会
China Computer Federation

考虑解决五色染色。



有一张 $n \times k$ 个节点的图，节点总共分为 n 层，每层 k 个。为了方便描述，之后我们称第 i 层的第 j 个点为 (i, j) 。

这张图非常特殊， $\forall i \in [1, n-1]$ ，有且仅有连接从第 i 层出发，终止于第 $i+1$ 层的单向的流量为 1 的边。

假设 $f(i, j)$ 为将 $(i, 1), \dots, (i, k)$ 设为网络流中的源点， $(j, 1), \dots, (j, k)$ 设为网络流中的汇点，且每个节点入流量和出流量均不超过 1 的情况下的最大流。

询问 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n f(i, j)$ 。

$n \leq 40000, k \leq 9$ 。

老师，这题我很眼熟!



中国计算机学会
China Computer Federation

这题去年 wxh010910 的确讲过!



老师，这题我很眼熟!



这题去年 wxh010910 的确讲过!

他去年讲的是一个非多项式做法。

这里讲一个多项式算法。

如果有好兄弟讲一下基于 Hall 定理的非多项式算法如果时间有多的话讲完多项式算法可以来讲一下。

祝各位选手在冬令营中取得理想的成绩！