

Contest Hunter #39 解题报告

大连市第二十四中学 于纪平

目 录

0	概要	1
1	矿物运输	2
1.1	题目大意	2
1.2	算法	2
2	bug运输	2
2.1	题目大意	2
2.2	算法	2
3	货车运输	3
3.1	题目大意	3
3.2	算法	3
4	飞机运输	4
4.1	题目大意	4
4.2	算法	4

0 概要

这一场Contest Hunter的题目是我出的，在此来分享一下详细的中文解题报告。

所有的题目可以在<http://www.contesthunter.org/contest>找到。

1 矿物运输

1.1 题目大意

有 n 层的资源库和 W 的初始资金。解锁第 i 层资源库须先解锁前 $i - 1$ 层，花费 c_i 的金钱和 t_i 的时间。解锁了第 i 层后单位时间可以从中离散地获得 v_i 的收入。求在 T 单位时间内的最大获利。

$n \leq 2 \times 10^5$ ，答案不超过64位整形。

1.2 算法

假设最优策略开发到了第 k 层，那么策略显然是，一口气开发到 k 层，剩下的时间自有生产。

枚举 k 以后，用 $O(n)$ 时间算出此时的最大获利的方法是显然的，直接模拟一遍就可以了。这样总的复杂度是平方级的。

注意到每次枚举到一个新的 k 的时候，显然没必要从头重新模拟，只需要根据 $k - 1$ 时的结果 $O(1)$ 计算就可以了。

时间复杂度 $O(n)$ 。

2 bug运输

2.1 题目大意

给出一个 $n \times n$ 的01方阵 A ，要找一个边长最小的前提下字典序最小的方阵 B ，使得 B 无论如何旋转或翻转，都不会在 A 中出现过。

$n \leq 1000$ 。

2.2 算法

答案矩阵不会很大，因为规模为 $m \times m$ 的矩阵有 2^{m^2} 个，而矩阵 A 的所有 $m \times m$ 的矩阵在旋转和翻转以后也只有 $8(n + 1 - m)^2$ 个，所以 B 的边长不会超过 $O(\sqrt{\log n})$ ，具体地，不会超过5。

我们从1到5枚举 B 的边长 m ，对于每个 m 我们在 A 中能找到 $8(n+1-m)^2$ 个子矩阵。将这些子矩阵插入到字典树中，检查字典树是否包括了所有长度为 m^2 的字符串即可。如果没有，输出最靠左的叶子。

这种算法的时间复杂度是 $O(n^2 \log^{1.5} n)$ ，可以在时限内通过。

3 货车运输

3.1 题目大意

n 个城市用 n 条道路连通，每条道路有长度、限速和每小时收费。 q 辆车，每辆车有起点、终点和最大速度。问每辆车的最小过路费。

$n, q \leq 10^5$ 。

3.2 算法

环套树的问题不好分析，我们先找出任意一条环上的边成为特殊边并从图上删去，然后对树处理这个问题。对于每个询问，两点间的最小过路费有三种情况：不经过特殊边（需要在树上询问1次）、正着走特殊边（询问2次）、反着走特殊边（询问2次）。这样，我们就把每个询问拆成了5个树上询问，不影响复杂度。

下面考虑树上的算法。显然我们要维护的量是可加可减的，即：如果 A, B, C 依次是树上路径的某三个点，那么 $ans(A, C) = ans(A, B) + ans(B, C)$ ； $ans(A, B) = ans(A, C) - ans(B, C)$ 。

以任意点（例如点1）为根建立有根树，那么 $ans(P, Q) = ans(1, P) + ans(1, Q) - ans(1, LCA(P, Q))$ ，把每个询问拆成3个询问后，我们只需维护从1到每个点的答案。

设边 i 的长度为 l_i ，限速为 v_i ，每小时收费 w_i ；设当前的询问要从1走到 P ，最大速度为 u ，则我们的答案就是

$$\sum_{\text{边 } i \text{ 在 } 1 \text{ 到 } P \text{ 的路径上}} \frac{w_i l_i}{\min(v_i, u)}$$

这个式子等于

$$\sum_{v_i < u} \frac{w_i l_i}{v_i} + \frac{1}{u} \sum_{v_i > u} w_i l_i$$

假设在 P 点已经建立了以速度为下标的线段树，维护了 $\frac{w_i l_i}{v_i}$ 和 $w_i l_i$ 的区间和，我们就可以直接在这个线段树上查询就可以得到答案了。

我们无法在每个点上都开线段树，但注意到每个点的线段树与它的父亲相比只改动了一个值，我们可以用可持久化线段树完成这个任务。当然，按照 P 的dfs序离线处理所有询问 $(1, P, u)$ ，就可以避免可持久化，只在一棵线段树上反复修改。

时间复杂度为 $O((n+q)\log n)$ ，注意在 q 的上面有15的常数，这是比较大的。

4 飞机运输

4.1 题目大意

（简化版题面）

给出平面上 n 个点，每两点间有边，边权为两点间欧氏距离的平方。

这些点中有 m 个特殊点，要连若干条边，使得这 m 个点都连通。求所连的边权的最大值的最小值。

$n \leq 10^5$ ，坐标是等概率均匀随机生成的。

4.2 算法

首先考虑一个暴力算法：二分答案，之后将图遍历一遍，检查 m 个点是否连通。这个算法的时间复杂度是 $O(n^2 \log W)$ 。

由于坐标是随机生成的，可以判断，答案不是很大，在答案处每个点所连的度数也不是很多。

考虑将坐标平面分成 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 块（即把每个坐标轴都等分成 \sqrt{n} 段），每一块期望有1个点。

处理出每个块的信息以后，我们用它来加速二分的判定。对于一个点只考察它周围的若干个块连边就可以了。那么判定的时间复杂度与二分出的答案有关，答案越大判定越慢。

只套用这个加速进行二分的话显然还是会超时，因为判定二分出的第一个答案就会很费时。

我们尝试减小二分上界。这个上界有一个巧妙的确定方法：

```
upper_bound  $\Leftarrow$  1  
while 问题在 upper_bound 时无解 do  
    upper_bound  $\Leftarrow$  upper_bound  $\times$  2  
end while
```

我们先倍增二分的上界，然后在这个范围内二分，调用判定函数的次数依然是 $O(\log W)$ ，但是每次判定的速度大大加快了。可以证明，每次判定期望用时 $O(n)$ ，故总的时间复杂度为 $O(n \log W)$ 。