IOI2014 中国国家集训队第一轮作业 解题报告

长沙市雅礼中学黄志翱

2013 年 11 月 10 日

1 Surely You Congest

1.1 题目来源

ACM/ICPC World Finals 2013 C

1.2 题目大意

给定一个n个点，m条边的带权无向图和在该无向图上的c个人。现在问最多能有多少人，同时从各自位置出发沿最短路按照相同速度前往点1而不会在任意时刻在边上相遇（顶点可以相遇）。

1.3 数据范围

$n, m \leq 25000, c \leq 1000$

1.4 试题分析

引理 1.1 只有到点*1*的最短路长度相同的两人才可能相遇。

因为，若两个人在某一点相遇，说明从两人出发位置到该点的最短路长度相同，而两人到达点1的最短路长度等于从出发位置走到该点的长度加上该点到点1的长度，那么也就说明了两人到达点1的最短路长度必然相同。

由此，我们用单源最短路算法（例如Dijkstra），求得点1到达每个点i的最短路长度$dist_i$，删去不在最短路上的边（若$dist_a - dist_b \neq len_{ab}$，那么这条边不具有存在的价值），会得到一个带权的有向图（由于边权都是正数，最短路径不可能存在环）。接着对$dist$相同的人分开处理。

以下讨论都只针对$dist$相同的一组人。

引理 1.2 若两人的最短路径都经过了点P，则在点P必定相遇。

因为点P到点1的最短路长度相同，而两人走过的路径长度相同，所以其到达点P的长度也是相同的。

由此，我们可以抛开对边权的考虑，而只考虑每个人走过了哪些点，而且，若某人经过了某边上的某点，则必定经过这条边上的所有点。问题转化为如下形式：

给定一个有向图，求问最多能有多少条从给定点到点1的路径，从而使得每条边最多属于一条路径。

这个问题很明显是一道经典的最大流问题，我们可以构造一个等价的网络流模型将其解决：

1. 将点1视为汇点T,设置一个超级源点S。
2. 若某人在点c，则从点S往点c连一条边容量为1的边。
3. 若图中有点a到点b的边，则从点a往点b连一条边容量为1的边。

然后运行最大流算法即可得到答案。

1.5 关键字与参考资料

最大流：`http://en.wikipedia.org/wiki/Maxflow`

最短路：`http://en.wikipedia.org/wiki/SSSP`

详细题目：`http://icpc.baylor.edu/download/worldfinals/problems/icpc2013.pdf`

2 Subway Timing

2.1 题目来源

ACM/ICPC World Finals 2009 J

2.2 题目大意

给定一棵树。每条树边上都有一个以秒为单位的权，要求将每个边权舍入成以分钟为单位的整数，你需要决定每条边是向上取整还是向下取整，从而使得所有点对的误差最大值最小。误差是指的是点对取整前的距离和取整后的距离的差的绝对值。距离即为两点之间的简单路径上的边权和。

2.3 数据范围

$n \le 100$

2.4 试题分析

这题是一道树形动态规划问题。

首先将边权对60取模不影响答案，取整可以视为选择边的一个权值。由于是求最大误差的最小值，先二分答案，判断是否存在一种安排使得误差小于等于該值。设該值为S。

直观上S的大小不会很大（大部分情况下都在100以内），而实际上$118 = 59 * 2$是一个比较严格的界。

为什么？考虑链上的情况，我们可以得到一个前缀和数组sum_i，表示点1到点i的权值和。若$sum_{i-1} + a < 60$，则令$sum_i = sum_{i-1} + a$，否则令$sum_i = sum_{i-1} + a - 60$，则必然有$-60 <= sum_i < 60$。故任意两点之间的差小于等于$59 - (-59) = 118$。树上可以进行相同的分析，任意选择一个点为根，得到相同的前缀数组即可。

那么我们只需要用动态规划进行判断。动态规划，是利用规模更小的子问题解决原问题的方法。

考虑当前以点u为根的树。若其儿子所对应的子树都已经处理完毕，我们所需考虑的就只有通过u的路径，这样的路径必由两条从点u出发的边加上从对应儿子出发的路径组成。那么，我们需要在动态规划的状态中，记

录从儿子出发的路径的信息（注意，我们只关心每条路径的权值）。考虑以下事实：

一 对于所有权值大于等于0的路径，我们只关心最大的权值。

二 对于所有权值小于0的路径，我们只关心最小的权值。

为什么呢？首先，动态规划会从小到大考虑所有路径，所以可以假定子树中的路径全部合法。设a，b为拼接的两条路径，若：$S \geq a \geq 0, 0 \geq b \geq -S$，则必有$S \geq a+b \geq -S$。

其次，若$a > 0, b > 0, a+b > S$，则将a或b替换成对应子树中权值最大的路径依旧大于S，小于亦然。

综上所述，我们可以得到我们所希望的状态(u, l_1, l_2)，表示是否有种配置使得以u为根的子树中，不存在长度绝对值大于S的路径，且从点u出发的路径中长度的最大值为l_1, 最小值为$-l_2$。

考虑状态转移，最开始u只是一个单独的节点，状态为$(u, 0, 0)$。依次枚举儿子v，加入子树u。设之前的状态是(u, l_1, l_2)，v的状态为(v, L_1, L_2)，我们对于边uv的权值$w(uv)$ 有向上或向下取整两种选择。分别枚举之，判断$l_1+L_2+w(u,v)$之流是否符合题意，并计算出一个新的状态$(u, max(l_1, L_1+w(uv)), max(l_2, L_2+w(uv)))$，注意该状态中对应的以u为根的子树是包括了子树v 的。

这样做的时间复杂度是对于n条边，每次枚举了$S^2 * S^2$个状态进行合并，时间复杂度$O(nS^4)$。注意到，若确定了u和l_1的话，l_2的值是越小越好，直观上可以认识到，当前路径是负数，加上小于等于S的数不可能大于S，而若加上的值是负数，则自己本身越大和也就越大，也就越有可能合法。这样只保留l_1的最小值，可以在复杂度中除掉一个S^2 的因子，得到一个时间复杂度为$O(nS^2)$ 的算法。加上之前的二分总复杂度为$O(nS^2 logS)$。（存在复杂度为O($nSlogS$) 的算法，利用单调性进行更多的优化。）

这样，问题圆满解决。

2.5 关键字与参考资料

二分 树形动态规划

详细题面：`http://icpc.baylor.edu/download/worldfinals/problems/2009WorldFinalProblemSet.pdf`

3 Air Traffic Control

3.1 题目来源

ACM/ICPC World Finals 2004 J

3.2 题目大意

给定平面上n个，这n个点按照y坐标大的优先级高，y坐标相同时x坐标大的优先级高的顺序排序。

一个控制范围是指的一个圆心P和其所能控制的点的个数val，控制范围控制的点集是按照到P的距离从小到大，距离相同按照以上优先级选择val个点。控制范围的半径是P到控制的点的最远距离。控制范围的边界是以P为圆心，r为半径的圆。

给定m个控制范围所能控制的点数和控制范围边界上的两个点。请确定其所控制的点集。若有多个点集满足题意，依照优先级考虑所有点，若某点属于某控制范围而不属于另一个，那么包含该点的控制范围较优。

请对于所有i，计算出被i个控制范围控制的点的个数。

3.3 数据范围

$n \leq 100, m \leq 10$

3.4 试题分析

这本来是一道非常简单的模拟题，由于uva上的数据和题意问题将此题的难度提高了好几个档次。

只需要注意到控制范围的边界上一定会存在点集中的某个点即可。枚举那个点就可以三点确定控制范围，按照题意求得控制的点集，然后进行简单的统计。

~~为了凑字数~~下面给出具体的算法流程

第一步 读入n个点，将其按照优先级排序。

第二步 依次处理m个控制范围。具体方法如下：

(a) 枚举边界上的点i

(b) 根据点i和给定的两个点计算出圆心和半径，求得在该圆内的点集。

(c) 将该点集与目前点集比较，若更优则取代

(d) 将最后得到的点集的点的计数器加1

第三步 枚举i，统计有多少个点的计数器为i，输出。

至于给定三点求外接圆的方法是非常简单的，直接列出圆的方程解之即可，在此就不赘述了。

3.5 关键字与参考资料

模拟 计算几何

详细题面：`http://icpc.baylor.edu/download/worldfinals/problems/2004WorldFinalProblemSet.pdf`