

Rectangle Query解题报告

宁波市镇海中学 邹逍遥

1 试题来源

Codechef September Challenge 2014

<http://www.codechef.com/SEPT14/problems/QRECT>

2 试题大意

要求维护一个结构支持以下三种操作：

- 插入一个矩形 $(x1, y1) - (x2, y2)$ 。
 - 删除某个以前插入的矩形。
 - 给出一个矩形 $(x1, y1) - (x2, y2)$ 询问有多少个矩形和这个矩形有交点。（不一定要有边相交，有一部分相交就行，所以包含在内部也算相交）
- 一共有 m 个操作。

3 数据范围

$$1 \leq m \leq 10^5$$

$$1 \leq x1, x2, y1, y2 \leq 10^9$$

4 算法介绍

4.1 算法一

相交矩形数量=矩形内部的左下角或右上角点数-完全在询问矩形内部的矩形个数+完全包围询问矩形的矩形个数

假如可以统计出后两个信息，那么就可以通过数矩形内部的点来轻松回答询问。不过这两个信息都比较难以统计。

4.2 算法二

相交矩形数量=四条边与其他矩形的边的相交数量/2+完全在询问矩形内部的矩形个数+完全包围询问矩形的矩形个数

同理，需要统计后两种信息，无法处理。

4.3 算法三

那么考虑正难则反，统计所有不相交的矩形数量。即一左一右分离的情况。

由于这几种情况都是两个矩形完全分离，那么就比较容易统计。以左右分离为例：

在加入矩形的时候增加一条矩形右边界，在查询的时候查询当前区间左边界以左有多少个当前存在的右边界。

这个询问可以使用树状数组比较容易地完成，或是任何一个支持单点+1/-1修改前缀查询的数据结构。

但是注意到这样会产生一些重复情况，比如说有一个矩形既在它上方也在它右边。所以需要减掉这些情况。

那么处理的情况类似，每次插入时就将这个矩形的右上角那个点加入，查询时需要统计所有在左下角那个点的左下方的点的数量。

而这是一个经典的二维数点问题，可以使用二维线段树解决。但是题目并没有要求强制在线，所以可以使用排序+扫描线+树状数组解决。

时间复杂度 $O(m \log^2 m)$ 。