题目选讲

清华大学 张隽恺

2023 年 1 月 14 日

温馨提示

- 根据规律，题目难度正比于讲题人水平。因此本次讲课非常良心。
- 所有题目默认为合理时限空限。
- 所有题目几乎不需要任何前置知识。
- 预祝大家听课愉快。

Problem 1

给定一棵有根树，其有 n 个非叶子节点以及 m 个叶子节点，1 为根。叶子节点编号为 $n+1,\cdots,n+m$。

叶子节点有一个 $\{0,1\}$ 中的权值，非叶子节点的权值使用如下两步确定：

1. 对于每一个非叶子节点 x，设其儿子节点数量为 c_x，对该节点选择一个 $\{1,2,\cdots,c_x\}$ 中的参数，令参数为 l_x。
2. 按照从深到浅的顺序确定非叶子节点的权值，对于非叶子节点 x，如果它的儿子节点中至少有 l_x 个权值为 1，则其权值确定为 1，否则其权值确定为 0。

有 q 次修改，每次给定一段区间 $[l,r]$，翻转编号在 $[n+l,n+r]$ 中的叶子节点的权值。

在每次修改后，求出有多少种确定每个非叶子节点参数的方式，使得根节点的权值为 1。答案对 10^9+2022（不是质数）取模。

$n,m,q\le 10^5$

Source: IOI 2022 D2T1 | uoj760

Problem 2

给一个 $n \times m$ 的字符矩阵 A，同时给定 k 个字符矩阵作为模板。可以进行如下两种操作：

1. 交换两个相邻字符。
2. 选择一个模板矩阵，在 A 中选择一个与模板矩阵形状相同的矩形，将该矩形内的内容替换为模板中的内容。

给定目标状态，判断是否可以达到目标状态。如果可以同时构造方案。

$n, m, k \leq 20$

操作次数限制：第一种操作 4×10^5 次 ($O(n^4)$)，第二种操作 400 次。

Source: 2022 ICPC Nanjing C | 可能很快就会有提交方式

Problem 3

给定 n。一个房间内有两个 $[1,n]$ 间的不同正整数 A,B 以及一个白板。白板上可以记录一个自然数 x，初始 $x=0$。

500 个人依次经过房间，他们需要判断 A,B 的大小关系。每个人进入房间后只能从 A,B 中选择一个并观察这个数的值，随后更改白板上的 x 或者给出正确的大小关系并结束整个过程。

每个人不知道所有人进入房间的顺序，因此所有人策略必须相同且确定性。即必须由当前的 x 决定选择 A,B 中的哪一个，由当前 x 以及观察到的值决定下一步的操作（更新 x 或得到结果）。

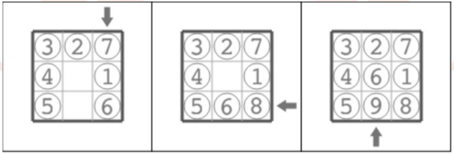
构造能确保正确的策略，策略中使用的最大 x 不能超过 lim。

$n\le 5000, lim=20(38,26,24)$（括号中为一些部分分的限制，之后部分类似）

Source: IOI 2022 D1T2 | uoj758

Problem 4

有一个 $n \times n$ 的网格，可以进行如下操作：
选择 $4n$ 个边界中的一个，从这个边界向内部推入一个方块。方块可以推动其它方块，但不能将方块推出网格。
给出从每一个边界上推入的次数要求 $a_{1,\cdots,4n}$，保证 $\sum a_i = n^2$。构造一组满足所有推入次数要求的方案使得操作合法（即操作后网格上正好放满方块），或输出无解。
$n \le 300(40)$

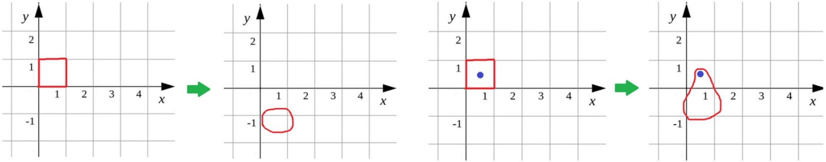


Source: CODE FESTIVAL 2016 Final J | AtCoder

Problem 5

给定 n，二维平面上 n 个点排成一条直线，编号为 i 的点为 $(i+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$。
考虑一条闭合曲线 C。$\forall S \subset \{1, 2, \cdots, n\}$，定义 $f_C(S) \in \{0, 1\}$ 为：
只保留 n 个点中下标在 S 内的点。如果 C 能在不经过这些点的情况下移动（连续形变）到半平面 $y < 0$ 内，则 $f_C(S) = 1$，否则 $f_C(S) = 0$。
给定一组 $g(S)$，构造一条封闭曲线 C 使得 $f_C = g$ 或判断无解。
$n \leq 8$

When $S = \emptyset$, we can move this curve so that every point on it has a negative y-coordinate. When $S = \{0\}$, we cannot do so.



Source: AGC043 E

Problem 6

给定二维平面上 n 个点。保证不存在三点共线。
给定一棵 n 个点的树，找到一个树的顶点到平面上点的一一对应，使得按照点的对应方式将树边画在平面上后不存在两条树边在非端点相交。
$n \leq 2 \times 10^5 (10^4)$

Source: CEOI 2022 D2T1 | qoj4402

Problem 7

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，进行如下二人博弈：
图上有两枚棋子，棋子不能在同一顶点上。每轮操作，第一个人选择一枚棋子，第二个人选择将（第一个人选择的）棋子沿着其所在点的一条出边移动（但不能使得两枚棋子重合）。
如果第二个人无法操作，则第一个人获胜。如果游戏无限进行下去则第二个人获胜。
q 次询问，每次给出棋子的初始位置，求双方最优操作下谁获胜。
$n, m, q \leq 2 \times 10^5$

Source: USACO Open 2022 T2 | loj3698

转化后得到如下题意：
给一个 n 个点 m 条边的 DAG，给定两点 s, t，保证 DAG 中 s 没有入边，t 没有出边。
现在去除边的定向变为无向图，询问是否存在一条 s 到 t 的简单路径（无重复点），使得路径上至少有一条边经过方向与原 DAG 定向不同。
$n, m \leq 2 \times 10^5$

Source: JOI Open 2022 T3 | loj3806

Oops, It’s Yesterday Twice More

给一个 n 个点 m 条边的有向图。一个人从 s 出发在图上沿着边的方向游走，有如下限制：

- 在经过一条边后，它的定向会改变。
- 不能连续两次沿着同一条边走。
- 结束时必须回到起点，且每条边必须经过偶数次。

询问是否存在一条经过至少一条边的合法游走路线。如果存在同时构造一条不超过 2×10^6 条边的方案。

$n, m \leq 2 \times 10^5$

Source: IOI 2022 D2T3 | uoj762