高楼和棋子 解题报告

安徽师范大学附属中学 吴作凡

1 试题来源

51nod的320分题，链接：https://www.51nod.com/onlineJudge/questionCode.html#!problemId=1306

2 试题大意

有一个n层的高楼和m个棋子，存在一个$E(0 \le E \le n)$使得棋子从E楼或以下扔不会碎，超过E楼扔下就会碎。

现在给出n和m，问最坏情况下最少需要实验多少次才能计算出准确的E（如果棋子摔碎了，就不能继续用这个棋子进行测试了）。

数据范围：数据组数$T \le 50000, n \le 10^{18}, m \le 64$。

3 算法介绍

如果棋子数量是无限多的，最好的方法显然是直接二分，$O(\log n)$次就可以求出E，所以数据范围中才会有$m \le 64$。

3.1 算法一

这个题目显然可以dp，最暴力的方法就是令$f_{i,j}$表示i层楼j个棋子最坏情况至少要多少次实验，那么转移就枚举当前扔哪层楼就好了

$$f_{i,j} = 1 + \min_{k=1}^{i}\{\max(f_{k-1,j}, f_{i-k,j-1})\}$$

这样dp的复杂度是$O(n^2m)$，显然不能通过本题。

如果我们把f数组输出，很容易发现当j和k确定的时候，满足$f_{i,j} = k$的i是一个连续的区间，而且这也是一个很显然的结论——有j个棋子，如果k次实验能找出n层楼，肯定也能找出$n-1$层楼。于是我们可以换一种方式进行dp，设$g_{j,k}$表示有j个棋子，k次实验最多能找出多少层楼。

考虑如何转移，我们第一次随便在某层楼实验一下，如果棋子碎了我们就需要在这层楼以下实验，那么还剩$j-1$个棋子和$k-1$次实验，所以这层楼以下最多还有$g_{j-1,k-1}$层楼。类似的，如果棋子没碎就要在这层楼以上实验，还剩j个棋子和$k-1$次实验，所以最多有$g_{j,k-1}$层楼。于是有

$$g_{j,k} = 1 + g_{j-1,k-1} + g_{j,k-1}$$

g的转移方式类似组合数，所以增长速度还是相当快的，可以发现当$m = 3$的时候最多只有几百万，之后会越来越小，于是$m \geq 3$的可以预处理dp数组，用二分求解答案。

观察式子可以发现有

$$g_{1,k} = k$$
$$g_{2,k} = \frac{k(k+1)}{2}$$

于是可以特判掉$m = 1$或2的情况。

因为要二分，所以时间复杂度$O(T \log n)$。

3.2 算法二

题目中说的最坏情况就是要求我们的方法能够区分出所有E（E的意义同题意），同样我们可以考虑使用j枚棋子和k次实验最多能区分多少个E。

我们首先将我们的决策构造成一棵树，这是一棵二叉树，每个节点都表示一次实验，如果碎了就向左孩子走，没碎就向右孩子走。

显然最后的每个叶子都会表示一个不同的E，于是就是统计叶子节点数。而k次实验要求我们的树深度不能超过k，只有j枚棋子要求我们从根到任意一个叶子只能经过至多j次向左孩子走的边。

如果给每个叶子一个k位编号表示根到它的路径，第i位为1就表示向左走，为0就是向右走，显然叶子和编号是一一对应的，我们只需要关心编号数就好了。

有j个1的编号显然有$\binom{k}{j}$种，因为最多有k个1，那么能区分的E的个数就是

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}$$

因为$0 \le E \le n$，所以n的最大值就是$g_{j,k} = \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}$，可以用数学归纳法证明这个式子满足算法一的dp方程。

于是我们就可以二分答案然后用这个公式快速计算$g_{m,k}$了，直接二分的复杂度是$O(Tm\log n)$的，这个复杂度不如算法一优秀。

我们发现这个式子是一个关于k的m次多项式，而且最高次项的系数为1，那么答案是$O(n^{\frac{1}{m}})$级别的，用这个来限制二分的范围，复杂度就是$O(Tm\log n^{\frac{1}{m}}) = O(T\log n)$。