

# Test for Rikka 解题报告

杭州学军中学 吉如一

## 1 试题来源

原创。题目可以在这里找到：<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5332>

## 2 试题大意

给出一个整数 $K$ ，你需要构造两个整数 $n, m$ 以及一个 $n \times n$ 的01矩阵 $A$ ，令 $B = A^m$ ，你必须要让 $B_{1,n} = K$ 。

数据范围： $0 \leq K \leq 10^{18}$ ，你的构造的答案必须满足 $n, m \leq 30$ 。

## 3 算法介绍

### 3.1 问题转化

如果我们把这个矩阵给看成邻接矩阵的话，那么问题就变成了构造一张 $n$ 个点的无重边（ $u$ 到 $v$ 的边和 $v$ 到 $u$ 的边可以同时存在）的无向图，使得这张无向图编号为1的节点到编号为 $n$ 的节点长度为 $m$ 的路径条数恰好为 $K$ 。

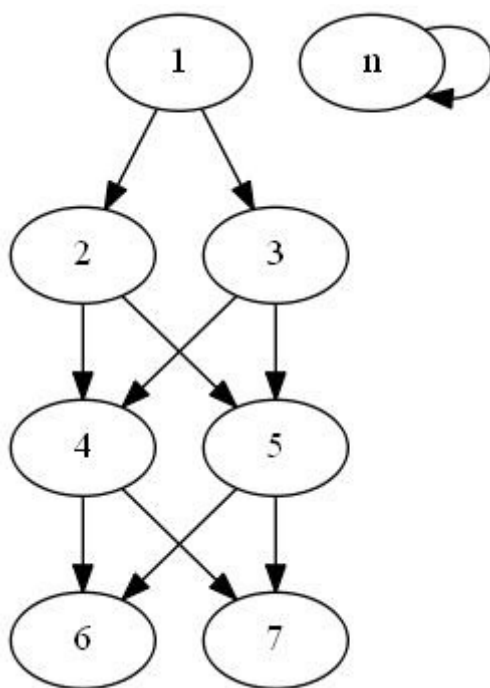
### 3.2 算法一

一个非常简单的思路就是把 $K$ 进行二进制拆分，所以第一步必须要把2的幂次用图中的点来表示。

考虑下面这张图，对于左边这个DAG，显然到达第 $i$ 层的每一个节点都有两种方案走到下一层，所以在DAG中长度为 $i$ 的路径条数是长度为 $i - 1$ 的路径条数的两倍，又长度为0的路径显然只有一条，所以这样就简单的构造出了一个产生2的幂次的方案。

接着考虑把路径条数累加到 $n$ 号节点，因为到达每一处的路径长度不相同，为了让它们在累计进入答案的时候长度相同，我们可以在 $n$ 号节点处加一个自环，这样只要是在 $m$ 步以内到达 $n$ 的所有路径对答案的贡献都是1。

我们对 $K$ 进行二进制拆分，如果第 $i$ 位是1，那么就在第 $i$ 层的某一个节点向终点连一条边，这样就得到了一个构造方案了。这时需要的点数是 $2\lfloor \log_2 K \rfloor + 4$ ，路径长度是 $\lfloor \log_2 K \rfloor$ ，都远远超出了限制。



### 3.3 算法二

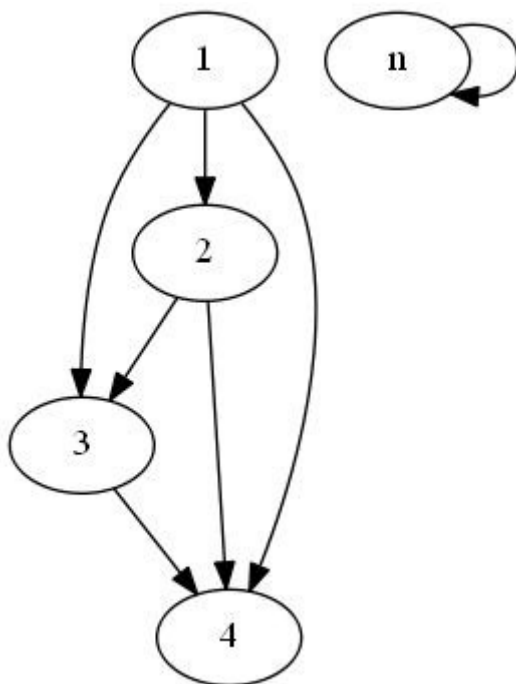
考虑在上述方法的基础上优化点数，很显然我们只能优化产生2的幂次的部分。

在算法一中，我们使用了一个DAG来构造2的幂次，在这个DAG中为了避免重边，我们每一层放置了两个节点，显然这样是有些多余的，考虑缩减DAG中的节点数。

考虑下面这张图，这张图的左边是一个拓扑序为编号的满DAG。现在考虑1号节点到 $i$ 号节点的路径条数，显然每一条路径经过的节点的顺序都是编号递增的，我们只需要统计能够经过的节点集合就行了，显然除了1号节点和 $i$ 号节点，编号为2到 $i-1$ 的所有节点都有可能被经过，所以路径条数是 $2^{i-2}$ 。

因为在这个方法中，到达每一个节点的路径的长度不是完全相同的，所以必须用算法一的方法来累加答案，即在终止节点处加一个自环。

在这个算法中，我们需要的点数是 $\lfloor \log_2 K \rfloor + 3$ ，路径长度是 $\lfloor \log_2 K \rfloor$ ，还是超出限制了许多。



### 3.4 算法三

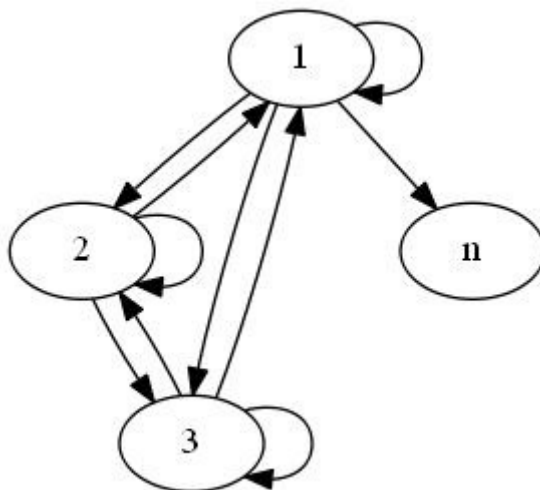
在算法二中，我们已经使用了满的DAG来构造，但是点数还是远远超出了，所以使用DAG来构造的方法显然是行不通了，我们必须在左边的部分里面加环。

但是有一个问题就是，图中两个环不能存在到达关系，因为如果一条路径经过了多个环，那么在统计路径条数的时候就会产生一个非常复杂难以化简的组合数求和问题。

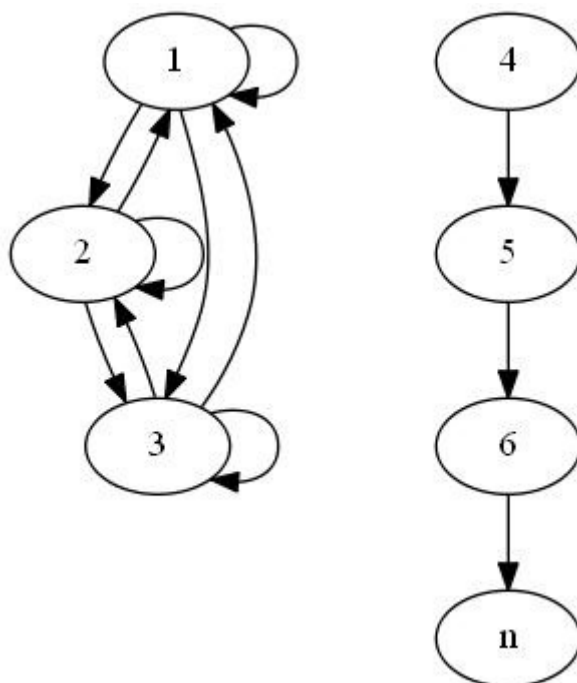
因此，为了在DAG部分加环，我们必须要把终点的环给去掉。在算法一和算法二的时候我们通过终点加环消除了路径长度 $m$ 的影响，而现在我们必须要在分析的时候考虑到 $m$ 的影响。

沿用算法二的想法：既然我们要加环，那就索性直接把环加满！所以我们可以直接把左边部分变成一张完全图。

考虑下面这张图，如果环中有 $d$ 个节点，不难发现在这时1到 $n$ 的路径条数是 $d^{m-1}$ ，而且如果我们在进制拆分的时候需要 $i \times d^{m-1}$ ，可以直接从环中选出 $i$ 个节点连到终点，这对于我们的进制拆分，是非常有利的。



最后留下的问题是把 $d$ 的不同幂次在 $m$ 步的时候恰好汇集到终点上，这一点其实很简单，只需要额外加一条链消耗步数就行了，所以最后的方案如下图所示：



在这个方案中，我们最后需要的点数是 $d + \lfloor \log_d K \rfloor + 1$ ，当 $d$ 在8左右的时候，点数就能满足要求啦。

### 3.5 数据构造方法

可以对每一个进制 $d$ ，放一个尽可能大的 $d^i$ 以及 $d^i - 1$ ，然后再放一些大质数以及一些由很多小质数的乘积得到的数。剩下的数据组数可以直接随机。

### 3.6 总结

这是一道较难的题目，在多校赛场上仅有天津大学一支队伍通过了这题。

解决这个问题，首先要把难以处理的矩阵相关的问题转化成图论模型，接着再从传统的进制拆分入手，一步一步优化点数和边数，最终获得一个满足要求的方案。这题的难点在于第一步的转化以及对路径长度这一条件的利用，同时在这个问题中大部分的构造方案在统计步数的时候会遇到一些比较复杂度的组合数求和问题，在化简这些式子的时候会消耗大量的时间。

作为构造性问题，这种一步步构思、优化、分析现有的方案的过程本身是非常有趣的，这也是我选择这道题的原因。