$Jabby's\ newwork$解题报告

绍兴市第一中学洪华敦

1 试题来源

http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3913

2 试题大意

$$\sum_{x=L}^{R}\left\lfloor\frac{Ax+B}{C}\right\rfloor^{K}$$

输出答案对10^9+7取模后的答案

$L,R,A,B,C\le 10^9$，$K\le 50$

3 算法介绍

问题可以规约成

$$\sum_{x=0}^{N}\left\lfloor\frac{Ax+B}{C}\right\rfloor^{K}$$

设函数$f(A,B,C,N)$可以实现对于$U,V\le K$，求出

$$\sum_{x=0}^{N}\left\lfloor\frac{Ax+B}{C}\right\rfloor^{V}*x^{U}$$

首先，当A或B大于等于C时，我们可以用二项式定理将多余的容易计算的式子计算掉

这达到了令$A\%=C$，$B\%=C$的效果，于是现在满足$A<C,B<C$了

令

$$M=\left\lfloor\frac{A*N+B}{C}\right\rfloor$$

$$\sum_{x=0}^{n} x^U * \left(\left\lfloor \frac{A*x+B}{C} \right\rfloor\right)^V$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^U * sum_{y=0}^{M} \left[y < \left\lfloor \frac{A*x+B}{C} \right\rfloor\right]\left((y+1)^V - y^V\right)$$

$$= \sum_{y=0}^{M} \left((y+1)^V - y^V\right) \sum_{x=0}^{n} x^U * \left[x > \left\lfloor \frac{C*y+C-B-1}{A} \right\rfloor\right]$$

我们可以把$(y+1)^U - y^U$二项式展开

原式等于

$$\sum_{i=0}^{V-1} \binom{V}{i} \sum_{y=0}^{M} y^i * \sum_{x=0}^{n} x^U * \left[x > \left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor\right]$$

$$\sum_{i=0}^{V-1} \binom{V}{i} \sum_{y=0}^{M} y^i * \left(S_U(n) - S_U\left(\left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor\right)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{V-1} \binom{V}{i} \sum_{y=0}^{M} y^i * S_U(n) - \sum_{i=0}^{V-1} \binom{V}{i} \sum_{y=0}^{M} y^i * S_U\left(\left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor\right)$$

前者等于$\sum_{i=0}^{V-1} \binom{V}{i} S_i(M) * S_U(n)$，于是问题就变成了求后者

我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式

设

$$S_d(x) = \sum_{i=0}^{d+1} a[d][i] * x^i$$

数组a可以用高斯消元预处理，或者直接带伯努利数进去

原式等于

$$\sum_{i=0}^{V-1} \binom{V}{i} \sum_{y=0}^{M} y^i * \sum_{j=0}^{U+1} a[U][j] * \left(\left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor\right)^j$$

等于

$$\sum_{i=0}^{V-1} \sum_{j=0}^{U+1} a[U][j] * \binom{V}{i} \sum_{y=0}^{M} y^i * \left(\left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor\right)^j$$

于是我们再次完成了a, c的互换，这样递归下去只有$O(log(A))$层

我们可以对于每个(a, b, c, n)求出对于所有(i, j)的答案，具体方法就是递归下去，然后用返回的那些答案更新

用一些卷积优化可以把时间复杂度优化到$O(K^3 logn)$

如何优化呢？

设$h[i][j] = \sum_{y=0}^{M} y^i * \left(\left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor\right)^j$

我们设

$$p[V][j] = \sum_{i=0}^{V-1} * \binom{V}{i} * h[i][j]$$

显然p数组我们可以$O(K^3)$求得

于是答案就是

$$\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j] * p[V][j]$$

时间复杂度就是$O(k^3 logk)$了