Counting Pairwise Coprime Triples 解题报告

浙江省镇海中学 杜瑜皓

1 试题来源

SPOJ PCOPTRIP

2 试题大意

求两两互质三元组(a, b, c)个数满足$1 \le a, b, c \le n$。
数据限制$n \le 10^5$。

3 算法介绍

如果n很小可以使用bitset之类的做法优化，时间复杂度为$O(n^3)$。

还有一个显然的做法，枚举a, b，然后可以使用容斥算出c的个数。时间复杂度为$O(n^2 \log n)$。

当然第二个做法比第一个做法更有推广价值，能解决更一般的问题。比如给每个数一个权值P_i，对所有两两互质三元组(a, b, c)求$P_a * P_b * P_c$然后求和。具体做法在容斥中稍微改动一下就行了。

当然在$n = 10^5$的条件下这是不可能过得去的。

考虑这类数论题的一般做法反演。

$$\sum[(a,b)=1][(b,c)=1][(c,a)=1] = \sum_{d|a,d|b,e|b,e|c,f|c,f|a} \mu(d)\mu(e)\mu(f) = \sum_{[d,f]|a,[d,e]|b,[e,f]|c} \mu(d)\mu(e)\mu(f)$$

记$f(x)$表示$[\frac{n}{x}]$，那么上式相当于$\sum \mu(d)\mu(e)\mu(f) f([d,f]) f([d,e]) f([e,f])$。

因为这有三个变量，如果再只用数论手段做式子将会变得越来越复杂。

注意到一个事实，当$x > n$是$f(x) = 0$，所以只要枚举$[d, e], [d, f], [e, f] \le n$的三元组就行了。

首先对$[d, e] \le n$的数对个数一个估价，假设(d, e)公约数为$g, d' = d/g, e' = e/g$，那么$[d, e] = gd'e'$。所以这样数对个数不会超过$abc \le n$的对数。

假设$g(x)$为$ab \le x$的对数，$g(x) = \sum_{1 \le i \le x} [\frac{x}{y}] = x \log x + O(x)$。

那么$abc \le n$的对数为$\sum_{1 \le i \le n} g([\frac{n}{i}]) = O(n \log^2 n)$。

所以$[d, e] \le n$的对数是$O(n \log^2 n)$的。

将每个数看成一个点，两个数x, y之间连条权值为$f([x, y])$的边，那么问题就变成了枚举所有三元环，然后计数。

首先一个E条边的图中三元环个数为$O(E\sqrt{E})$，并且可以在这个复杂度内枚举出所有的三元环。这个结论过于经典所以不证了。

于是就在$O(n^{1.5} \log^3 n)$的时间复杂度内解决了。

由于这个题的图是根据特殊条件建的，所以远远达不到上界，可以在时限内跑出来。

如果每个数加一个权值P_i，是要讲$f(x)$变成$\sum_{x|d} P_d$就行了。

4 总结

这个题在SPOJ上目前只有2个人A，所以看上去还是个有难度的题。

事实上，我选这个题因为这个题处理的手段很独特，用一个反演然后用图论的手段解决。

不过我不知道作者的参考做法。