浅谈线性拟阵奇偶问题

华东师范大学第二附属中学 郭羽冲

2024.2

线性拟阵奇偶

定义

给定 m 个二元组 (a_i, b_i)，其中 a_i, b_i 均为 n 维向量。选出最多的二元组，使得所有被选出的二元组中包含的向量线性无关。

线性拟阵奇偶

稀疏型构造

令 v 为原问题的答案。

线性拟阵奇偶

稀疏型构造

令 v 为原问题的答案。
令 $x'_1 \ldots x'_m$ 为未定元。构造矩阵 A, X:

$$A = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m)$$

$$X = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & x'_1 \\ -x'_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x'_2 \\ -x'_2 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & x'_m \\ -x'_m & 0 \end{pmatrix} \right)$$

线性拟阵奇偶

稀疏型构造

令 v 为原问题的答案。
令 $x'_1 \dots x'_m$ 为未定元。构造矩阵 A, X：

$$A = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m)$$

$$X = \mathsf{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & x'_1 \\ -x'_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x'_2 \\ -x'_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & x'_m \\ -x'_m & 0 \end{pmatrix}\right)$$

将矩阵放在 $x'_1 \dots x'_m$ 的有理分式域下考虑，则有
$2v + 2m = \mathsf{rank}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}$。

线性拟阵奇偶

紧凑型构造

令 $x_1 \dots x_m$ 为未定元。构造矩阵 M:

$$M = \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i b_i^T - b_i a_i^T)$$

线性拟阵奇偶

紧凑型构造

令 $x_1 \ldots x_m$ 为未定元。构造矩阵 M:

$$M = \sum_{i=1}^{m} x_i(a_i b_i^T - b_i a_i^T)$$

将矩阵放在 $x_1 \ldots x_m$ 的有理分式域下考虑则有 $2v = \mathrm{rank}(M)$。

线性拟阵奇偶

紧凑型构造

令 $x_1 \dots x_m$ 为未定元。构造矩阵 M:

$$M = \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i b_i^T - b_i a_i^T)$$

将矩阵放在 $x_1 \dots x_m$ 的有理分式域下考虑则有 $2v = \text{rank}(M)$。
相比稀疏型构造，紧凑型构造得到的矩阵规模较小，在计算的时间复杂度上有优势。

线性拟阵奇偶

算法

为了得到较好的时间复杂度，我们需要对未定元 $x_1 \dots x_m$ 进行一些特殊处理。

线性拟阵奇偶

算法

为了得到较好的时间复杂度，我们需要对未定元 $x_1 \dots x_m$ 进行一些特殊处理。任取一个大质数 p 作为模数，$x_1 \dots x_m$ 随机选取。将它们的取值代入 M 得到 M'。

线性拟阵奇偶

算法

为了得到较好的时间复杂度，我们需要对未定元 $x_1 \dots x_m$ 进行一些特殊处理。任取一个大质数 p 作为模数，$x_1 \dots x_m$ 随机选取。将它们的取值代入 M 得到 M'。

$$\mathsf{rank}(M) = \mathsf{rank}(M')?$$

线性拟阵奇偶

正确率分析

有 $\text{rank}(M') \le \text{rank}(M)$，下证明两者有较大概率取等。

线性拟阵奇偶

正确率分析

有 $\text{rank}(M') \leq \text{rank}(M)$，下证明两者有较大概率取等。

令 $r = \text{rank}(M)$，则 M 一定有一个 r 阶可逆子矩阵 $M_{S,T}$。

线性拟阵奇偶

正确率分析

有 rank$(M') \le$ rank(M)，下证明两者有较大概率取等。
令 $r =$ rank(M)，则 M 一定有一个 r 阶可逆子矩阵 $M_{S,T}$。
det$(M_{S,T})$ 为关于 $x_1 \dots x_m$ 的非零多元多项式，而 $\det(M'_{S,T})$ 即为将 $x_1 \dots x_m$ 的值代入多项式得到的结果。因此考虑如下引理：
引理（Schwartz-Zippel）若 $f(x_1 \dots x_m)$ 为不超过 d 次的非零多元多项式，且 $x_1 \dots x_m$ 均从集合 S 中随机选取，则 $f(x_1 \dots x_m) = 0$ 的概率不超过 $\dfrac{d}{|S|}$。

线性拟阵奇偶

正确率分析

有 rank$(M') \le$ rank(M)，下证明两者有较大概率取等。
令 $r =$ rank(M)，则 M 一定有一个 r 阶可逆子矩阵 $M_{S,T}$。
det$(M_{S,T})$ 为关于 $x_1 \dots x_m$ 的非零多元多项式，而 $\det(M'_{S,T})$ 即为将 $x_1 \dots x_m$ 的值代入多项式得到的结果。因此考虑如下引理：
引理（Schwartz-Zippel）若 $f(x_1 \dots x_m)$ 为不超过 d 次的非零多元多项式，且 $x_1 \dots x_m$ 均从集合 S 中随机选取，则 $f(x_1 \dots x_m) = 0$ 的概率不超过 $\dfrac{d}{|S|}$。
$\det(M'_{S,T}) = 0$ 的概率不超过 $\dfrac{r}{p}$。正确率至少为 $1 - \dfrac{r}{p}$。

线性拟阵奇偶

构造方案——算法

依次尝试删除每个二元组。最终一定会剩下恰好 v 个二元组，它们即构成了一组解。

线性拟阵奇偶

构造方案——算法

依次尝试删除每个二元组。最终一定会剩下恰好 v 个二元组，它们即构成了一组解。
若使用暴力算法，则我们需要在删除每个二元组之后在 $O(n^3)$ 的时间复杂度内求 $\mathrm{rank}(M)$。则总时间复杂度为 $O(mn^3)$。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

$\mathrm{rank}(a_i b_i^T - b_i a_i^T) \leq 2$，考虑低秩扰动方法。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

rank$(a_ib_i^T - b_ia_i^T) \le 2$，考虑低秩扰动方法。

引理（Sherman-Morrison-Woodbury, SMW）对于可逆 n 阶矩阵 A, B，$n \times m$ 矩阵 U，$m \times n$ 矩阵 V，有：

$$(A - UB^{-1}V)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(B - VA^{-1}U)VA^{-1}$$

且 $(A - UB^{-1}V)$ 可逆等价于 $(B - VA^{-1}U)$ 可逆。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

M 未必可逆，无法直接利用上述引理。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

M 未必可逆，无法直接利用上述引理。
由 M 的反对称性，M 一定有一个 r 阶可逆主子矩阵 $M_{S,S}$。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

M 未必可逆，无法直接利用上述引理。
由 M 的反对称性，M 一定有一个 r 阶可逆主子矩阵 $M_{S,S}$。
将所有向量在 S 上截取，即只保留 S 所给出的 r 个分量。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

M 未必可逆，无法直接利用上述引理。
由 M 的反对称性，M 一定有一个 r 阶可逆主子矩阵 $M_{S,S}$。
将所有向量在 S 上截取，即只保留 S 所给出的 r 个分量。
任取 r 个线性无关的行作为 S，容易证明 $M_{S,S}$ 即为满足条件的主子矩阵。问题归约为 M 可逆的情况。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

下假设 M 可逆。实时维护 $N = M^{-1}$。

令 $U = (a_i, -b_i), V = (b_i, a_i)^T$，则 $a_i b_i^T - b_i a_i^T = UV$。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

下假设 M 可逆。实时维护 $N = M^{-1}$。

令 $U = (a_i, -b_i), V = (b_i, a_i)^T$，则 $a_i b_i^T - b_i a_i^T = UV$。

需要判断 $M - UV$ 是否可逆。由 SMW 引理可转化为判断 $I - VNU$ 是否可逆，可以在 $O(r^2)$ 的时间复杂度内计算出 $I - VNU$。而这是一个 2×2 的矩阵，可以 $O(1)$ 判断其可逆性。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

下假设 M 可逆。实时维护 $N = M^{-1}$。
令 $U = (a_i, -b_i), V = (b_i, a_i)^T$，则 $a_i b_i^T - b_i a_i^T = UV$。
需要判断 $M - UV$ 是否可逆。由 SMW 引理可转化为判断 $I - VNU$ 是否可逆，可以在 $O(r^2)$ 的时间复杂度内计算出 $I - VNU$。而这是一个 2×2 的矩阵，可以 $O(1)$ 判断其可逆性。
若可逆，则依然由 SMW 引理可计算出更新后的 N'，即 $(M - UV)^{-1}$。时间复杂度为 $O(r^2)$。
总时间复杂度降为 $O(mr^2)$。

线性拟阵奇偶

时间复杂度

上述算法时间复杂度组成如下：

- 求 $M=\sum_{i=1}^{m} x_i(a_ib_i^T-b_ia_i^T)$，$O(mn^2)$。
- 求 $\mathrm{rank}(M)$，$O(n^3)$。

线性拟阵奇偶

时间复杂度

上述算法时间复杂度组成如下：

- 求 $M = \sum_{i=1}^{m} x_i(a_i b_i^T - b_i a_i^T)$，$O(mn^2)$。
- 求 $\text{rank}(M)$，$O(n^3)$。

若构造方案，则需要增加：

- 求 M^{-1}，$O(n^3)$。
- 每次低秩扰动后判断是否可逆，更新 N，$O(mr^2)$。

线性拟阵奇偶

时间复杂度

上述算法时间复杂度组成如下:

- 求 $M=\sum_{i=1}^{m} x_i(a_i b_i^T - b_i a_i^T)$，$O(mn^2)$。
- 求 $\text{rank}(M)$，$O(n^3)$。

若构造方案，则需要增加:

- 求 M^{-1}，$O(n^3)$。
- 每次低秩扰动后判断是否可逆，更新 N，$O(mr^2)$。

实际情况中根据 a_i, b_i 的特殊性质可能可以进一步优化时间复杂度。

带权线性拟阵奇偶

定义

顾名思义，是线性拟阵奇偶问题的带权版本。

学术界已经提出了本问题的 $O(\text{poly}(n,m))$ 算法。但此算法非常复杂，难以落实到代码上。因此本节将介绍一个相对简单但时间复杂度较高（非多项式）的算法。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造

令 v 为原问题的答案。

令 w_i 的值域为 $[1,V]\bigcap\mathbb{Z}$。新引入一个未定元 z，利用它的次数来刻画权值和。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造

令 v 为原问题的答案。
令 w_i 的值域为 $[1, V]\bigcap\mathbb{Z}$。新引入一个未定元 z，利用它的次数来刻画权值和。
类似于不带权情况下的稀疏型构造，令：

$$A = (a_1 z^{w_1}, b_1, a_2 z^{w_2}, b_2, \ldots, a_m z^{w_m}, b_m)$$

$$X = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & x'_1 \\ -x'_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x'_2 \\ -x'_2 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & x'_m \\ -x'_m & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = \operatorname{diag}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造

则我们有如下定理：

定理

$$2v = \deg_z\left(\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}\right)$$

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

Y 为对角矩阵，因此将行列式展开得：

$$\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix} = \sum_S \det\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} \det(Y_{\bar{S},\bar{S}})$$

其中 $\bar{S} = ([1, n+2m] \bigcap \mathbb{Z}) \backslash S$。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

Y 为对角矩阵，因此将行列式展开得：

$$\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix} = \sum_S \det\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} \det(Y_{\bar{S},\bar{S}})$$

其中 $\bar{S} = ([1, n+2m] \bigcap \mathbb{Z}) \backslash S$。
而反对称矩阵中有 $\det(A) = \mathsf{pf}(A)^2$，因此：

$$\deg_z\left(\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}\right) = 2\deg_z\left(\sum_S \mathsf{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} \det(Y_{\bar{S},\bar{S}})\right)$$

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

由 Pfaffian 的定义展开可得：

$$\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} = \sum_{T\subseteq S} \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T} \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}_{S\setminus T,S\setminus T}$$

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

由 Pffafian 的定义展开可得：

$$\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} = \sum_{T\subseteq S} \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T} \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}_{S\setminus T,S\setminus T}$$

因为 X, Y 的非零主子式均互不相同，所以原式中 z 的最高次数一定是通过选择一组合适的 S, T 使得 $\det\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\bar{S},\bar{S}} \neq 0, \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}_{S\setminus T,S\setminus T} \neq 0$ 且 $\deg_z\left(\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T}\right)$ 最大所贡献而来。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

由等式中 0 的分布可得 $[n+1,n+2m]\bigcap\mathbb{Z}\subseteq S, S\bigcap[1,n]=T\bigcap[1,n]$。
同时 $\forall i\in[1,m]\bigcap\mathbb{Z}$，有 $n+2i,n+2i-1$ 同时在或同时不在 T 中。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

由等式中 0 的分布可得 $[n+1,n+2m]\bigcap\mathbb{Z}\subseteq S, S\bigcap[1,n]=T\bigcap[1,n]$。
同时 $\forall i\in[1,m]\bigcap\mathbb{Z}$，有 $n+2i,n+2i-1$ 同时在或同时不在 T 中。
而这与原问题的形式是高度吻合的。$T\bigcap[n+1,n+2m]$ 刻画了每个二元组是否被选择。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

固定 $T\bigcap[n+1,n+2m]$。为了使得 pf $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T}$ 确实能够贡献出它所对应的 $\deg_z$，还需要将 $[1,n]\bigcap\mathbb{Z}$ 的一个子集加入 T 中以确保其 Pfaffian 非零。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

固定 $T\bigcap[n+1,n+2m]$。为了使得 pf $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T}$ 确实能够贡献出它所对应的 $\deg_z$，还需要将 $[1,n]\bigcap\mathbb{Z}$ 的一个子集加入 T 中以确保其 Pfffaian 非零。若 Pffafian 非零则 z 的次数一定为 T 对应的权值和。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

固定 $T\bigcap[n+1,n+2m]$。为了使得 pf $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T}$ 确实能够贡献出它所对应的 $\deg_z$，还需要将 $[1,n]\bigcap\mathbb{Z}$ 的一个子集加入 T 中以确保其 Pfaffian 非零。若 Pfaffian 非零则 z 的次数一定为 T 对应的权值和。

能够找到这样的一个子集当且仅当所有被选择的向量线性无关，而这恰好是原题的要求。

带权线性拟阵奇偶

紧凑型构造

考虑将稀疏型构造化为紧凑型构造。我们有如下引理:

引理（Schur 补）若 D 可逆，则如下等式成立:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

带权线性拟阵奇偶

紧凑型构造

考虑将稀疏型构造化为紧凑型构造。我们有如下引理:

引理（Schur 补）若 D 可逆，则如下等式成立:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

由上述引理可得:

$$2v = \deg_z\left(\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}\right) = \deg_z(\det(Y + AX^{-1}A^T))$$

带权线性拟阵奇偶

紧凑型构造

令 $x_i = -\dfrac{1}{x_i'}$，展开可得：

$$Y + AX^{-1}A^T = Y + \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{x_i'}(a_i b_i^T - b_i a_i^T) z^{w_i} = Y + \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i b_i^T - b_i a_i^T) z^{w_i}$$

带权线性拟阵奇偶

紧凑型构造

令 $x_i = -\dfrac{1}{x_i'}$，展开可得:

$$Y + AX^{-1}A^T = Y + \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{x_i'}(a_i b_i^T - b_i a_i^T) z^{w_i} = Y + \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i b_i^T - b_i a_i^T) z^{w_i}$$

令此矩阵为 M，则得到了带权情况下的紧凑型构造，有 $2v = \deg_z(\det(M))$。

带权线性拟阵奇偶

算法

求 $\det(M)$。

未定元 x_i, y_i 均可使用随机取值的方式处理。

带权线性拟阵奇偶

算法

求 $\det(M)$。
未定元 x_i, y_i 均可使用随机取值的方式处理。
M 中每个元素均为关于 z 的不超过 V 次多项式，因此 $\det(M)$ 为关于 z 的不超过 Vn 次多项式。
任选 $Vn+1$ 个不同的 z 的取值 $z_1 \dots z_{Vn+1}$，求出点值后拉格朗日插值即可。

带权线性拟阵奇偶

构造方案

维护代入每个 z_i 时的矩阵 $M_1 \dots M_{Vn+1}$ 以及它们的逆 $N_1 \dots N_{Vn+1}$。

带权线性拟阵奇偶

构造方案

维护代入每个 z_i 时的矩阵 $M_1 \dots M_{Vn+1}$ 以及它们的逆 $N_1 \dots N_{Vn+1}$。
需要支持对矩阵低秩扰动，并维护其行列式。我们有如下引理：
引理（Matrix Determinant Lemma）若 A, B 可逆，则如下等式成立：

$$\det(A - UB^{-1}V) = \frac{\det(A)}{\det(B)} \det(B - VA^{-1}U)$$

带权线性拟阵奇偶

构造方案

维护代入每个 z_i 时的矩阵 $M_1 \dots M_{Vn+1}$ 以及它们的逆 $N_1 \dots N_{Vn+1}$。
需要支持对矩阵低秩扰动，并维护其行列式。我们有如下引理：
引理（Matrix Determinant Lemma）若 A, B 可逆，则如下等式成立：

$$\det(A - UB^{-1}V) = \frac{\det(A)}{\det(B)} \det(B - VA^{-1}U)$$

可能在某个时刻出现 M_i 不可逆的情况，即 $\det(M_i) = 0$。

带权线性拟阵奇偶

构造方案

由于 $det(M)$ 为关于 z 的不超过 Vn 次多项式，若我们从 $[0,p)\cap\mathbb{Z}$ 中随机选取 $z_1\dots z_{Vn+1}$，则由 Schwartz-Zippel 引理，$\det(M_i)=0$ 的情况期望会发生 $O\left(\frac{V^2mn^2}{p}\right)$ 次。

带权线性拟阵奇偶

构造方案

由于 $det(M)$ 为关于 z 的不超过 Vn 次多项式，若我们从 $[0,p)\cap\mathbb{Z}$ 中随机选取 $z_1 \dots z_{Vn+1}$，则由 Schwartz-Zippel 引理，$\det(M_i)=0$ 的情况期望会发生 $O\left(\frac{V^2mn^2}{p}\right)$ 次。

在发生 $\det(M_i)=0$ 时更换 z_i 的取值，不断地从 $[0,p)$ 中随机选取新的 z_i，直到 z_i 与其它的 z_j 均不同且 $\det(M_i)\neq 0$ 即可。

带权线性拟阵奇偶

构造方案

由于 $det(M)$ 为关于 z 的不超过 Vn 次多项式，若我们从 $[0,p)\cap\mathbb{Z}$ 中随机选取 $z_1\ldots z_{Vn+1}$，则由 Schwartz-Zippel 引理，$\det(M_i)=0$ 的情况期望会发生 $O\left(\frac{V^2mn^2}{p}\right)$ 次。

在发生 $\det(M_i)=0$ 时更换 z_i 的取值，不断地从 $[0,p)$ 中随机选取新的 z_i，直到 z_i 与其它的 z_j 均不同且 $\det(M_i)\neq 0$ 即可。

若取足够大的 p，则重构的时间复杂度可以忽略不计。

带权线性拟阵奇偶

时间复杂度

上述算法时间复杂度组成如下：

- 求矩阵中每个元素 $z_1 \dots z_{Vn+1}$ 处的值（多点求值），$O(Vn^3 \log^2(Vn))$。
- 求每个 z_i 处的行列式，$O(Vn^4)$。
- 插值还原 $\det(M)$，$O(Vn \log^2(Vn))$。

带权线性拟阵奇偶

时间复杂度

上述算法时间复杂度组成如下:

- 求矩阵中每个元素 $z_1 \dots z_{Vn+1}$ 处的值（多点求值），$O(Vn^3 \log^2(Vn))$。
- 求每个 z_i 处的行列式，$O(Vn^4)$。
- 插值还原 $\det(M)$，$O(Vn \log^2(Vn))$。

若构造方案，则需要增加:

- 求 $N_1 \dots N_{Vn+1}$，$O(Vn^4)$。
- 每次低秩扰动后插值还原 $\det(M)$，$O(Vmn \log^2(Vn))$。
- 更新 $\det(M_1) \dots \det(M_{Vn+1})$ 以及 $N_1 \dots N_{Vn+1}$，$O(Vmn^3)$。

例题

一般图最大匹配

给定一个无向图，要求选出最多的边满足任意两条选出的边均无公共点。

例题

一般图最大匹配——算法

解决此问题的经典方法为带花树。

若第 i 条边为 (u_i, v_i)，则令 $a_i = e_{u_i}, b_i = e_{v_i}$。

若选出的边有公共点 u，则 e_u 这个向量一定了出现了至少两次，一定线性相关。否则每个 e_u 至多出现一次，一定线性无关。

有趣的是，观察我们得到的矩阵 M，与一般图最大匹配的另一经典解法：Tutte 矩阵 完全一致。

令边数为 n，点数为 m。则直接使用通用算法构造方案的时间复杂度为 $O(mn^2)$。

例题

一般图最大匹配——优化

考虑利用 a_i, b_i 的性质进一步优化，我们有如下引理：

引理（Harvey）若 A 可逆，且 A 与 B 只有集合 S 对应的主子矩阵不同。令 $D = B - A$，则有：

$$(B^{-1})_{T,T} = (A^{-1})_{T,T} - (A^{-1})_{T,S}(I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S})^{-1}D_{S,S}(A^{-1})_{S,T}$$

且 B 可逆当且仅当 $I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S}$ 可逆。

例题

一般图最大匹配——优化

考虑利用 a_i, b_i 的性质进一步优化，我们有如下引理：

引理（Harvey）若 A 可逆，且 A 与 B 只有集合 S 对应的主子矩阵不同。令 $D = B - A$，则有：

$$(B^{-1})_{T,T} = (A^{-1})_{T,T} - (A^{-1})_{T,S}(I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S})^{-1} D_{S,S}(A^{-1})_{S,T}$$

且 B 可逆当且仅当 $I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S}$ 可逆。

Harvey 引理指出，只需要知道局部的信息即可处理对应的修改。

而在一般图最大匹配问题中，(a_i, b_i) 只会影响 M_{u_i,v_i}, M_{v_i,u_i} 这两个位置。

例题

一般图最大匹配——优化

考虑利用 a_i, b_i 的性质进一步优化，我们有如下引理：

引理（Harvey）若 A 可逆，且 A 与 B 只有集合 S 对应的主子矩阵不同。令 $D = B - A$，则有：

$$(B^{-1})_{T,T} = (A^{-1})_{T,T} - (A^{-1})_{T,S}(I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S})^{-1} D_{S,S}(A^{-1})_{S,T}$$

且 B 可逆当且仅当 $I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S}$ 可逆。

Harvey 引理指出，只需要知道局部的信息即可处理对应的修改。

而在一般图最大匹配问题中，(a_i, b_i) 只会影响 M_{u_i,v_i}, M_{v_i,u_i} 这两个位置。

考虑分治。

例题

一般图最大匹配——优化

定义过程 $solve(S,T)$ 表示处理所有满足 $u_i \in S, v_i \in T$ 的二元组，判断它们是否在答案中。

令 $X = S \bigcup T$，则只需要关注 $M_{X,X}$ 以及 $(M^{-1})_{X,X}$。

例题

一般图最大匹配——优化

定义过程 $solve(S,T)$ 表示处理所有满足 $u_i \in S, v_i \in T$ 的二元组，判断它们是否在答案中。

令 $X = S \bigcup T$，则只需要关注 $M_{X,X}$ 以及 $(M^{-1})_{X,X}$。

若 $|S| = |T| = 1$，则直接暴力，时间复杂度为 $O(1)$。

例题

一般图最大匹配——优化

定义过程 $solve(S,T)$ 表示处理所有满足 $u_i \in S, v_i \in T$ 的二元组，判断它们是否在答案中。

令 $X = S \bigcup T$，则只需要关注 $M_{X,X}$ 以及 $(M^{-1})_{X,X}$。

若 $|S| = |T| = 1$，则直接暴力，时间复杂度为 $O(1)$。

否则将 S 均分为 S_1, S_2，将 T 均分为 T_1, T_2。依次枚举每一对 $(i,j) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$，并进行如下过程：

例题

一般图最大匹配——优化

定义过程 $solve(S,T)$ 表示处理所有满足 $u_i \in S, v_i \in T$ 的二元组，判断它们是否在答案中。
令 $X = S \bigcup T$，则只需要关注 $M_{X,X}$ 以及 $(M^{-1})_{X,X}$。
若 $|S| = |T| = 1$，则直接暴力，时间复杂度为 $O(1)$。
否则将 S 均分为 S_1, S_2，将 T 均分为 T_1, T_2。依次枚举每一对 $(i,j) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$，并进行如下过程：

- 递归 $solve(S_i, T_j)$。
- 在上一步中我们求出了 S_i, T_j 对应的子问题中所有不在答案中的二元组。删除它们后会将 M 变为 $M + D$，显然 D 只可能在 X 对应的主子矩阵内有值。因此利用 Harvey 引理在 $O(|X|^3)$ 的时间复杂度内计算出 D 对 $(M^{-1})_{X,X}$ 的影响即可。

例题

一般图最大匹配——时间复杂度

为了方便分析时间复杂度，不妨令 $S = T$ 或 $S \bigcap T = \varnothing$，令两种情况的时间复杂度分别为 $T_1(|S|), T_2(|S| + |T|)$，则有：

$$T_2(n) = O(n^3) + 4T_2\left(\frac{n}{2}\right) = O(n^3)$$

$$T_1(n) = 2T_1\left(\frac{n}{2}\right) + 2T_2(n) + O(n^3) = O(n^3)$$

因此 $solve(\{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\})$ 的时间复杂度为 $T_1(n) = O(n^3)$。

总结

本研究主要内容为线性拟奇偶问题的通用算法及其扩展与应用，初步地探讨了代数方法在组合最优化问题中的应用。诸如带权线性拟阵奇偶问题的多项式算法、非线性拟阵奇偶问题这里并没有涉及，它们也是非常值得研究的方向。

总结

本研究主要内容为线性拟奇偶问题的通用算法及其扩展与应用，初步地探讨了代数方法在组合最优化问题中的应用。诸如带权线性拟阵奇偶问题的多项式算法、非线性拟阵奇偶问题这里并没有涉及，它们也是非常值得研究的方向。

线性拟阵奇偶这样的方法将许多看似不同的组合问题归约到了统一的代数模型上，得到通用的解法，仅用一个算法就解决了一大类问题。同时此模型也给出了许多以原有方法难以解决的问题的简洁高效算法。

- 谢谢大家！