



中国计算机学会  
China Computer Federation

# ICPC杂题选讲

福州第三中学 钟子谦 (fjzzq2002@163.com)



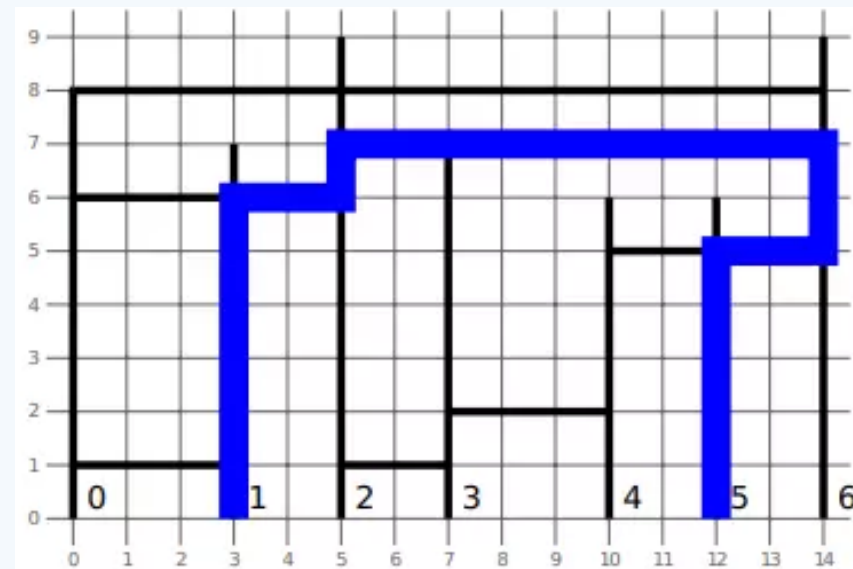
## Vision

- 你需要为一个机器人编程实现如下任务：有一个 $H$ 行 $W$ 列的01矩阵，其中恰有两个1，若这两个1的曼哈顿距离为 $K$ 输出1，否则输出0。
- 机器人有若干个内存单元，一开始01矩阵存在前 $HW$ 个寄存器中，你可以使用一些基本的指令：NOT、AND、OR、XOR，其中NOT是单目运算，AND、OR、XOR都可以接受多个输入，指令的逻辑与正常的逻辑运算相同。每条指令可以指定操作数，机器人会读取这些寄存器并执行逻辑运算，把结果存在下一个编号的寄存器中（即第 $i$ 条指令的输出存在寄存器 $HW+1$ ）。代码执行结束后最后一个寄存器中存储的即为输出。
- $H, W \leq 200$ ，你可以使用不超过 $10^4$ 个指令，操作数总共不超过 $10^6$ 。

\* Source: IOI2019

# Walk

- 在一个城市中有 $n$ 个建筑和 $m$ 座天桥。第 $i$ 个建筑坐落在位置 $x[i]$ ，高度为 $h[i]$ ，对应着平面上 $(x[i], 0)$ 到 $(x[i], h[i])$ 的线段。第 $i$ 座天桥连接建筑 $l[i]$ 和 $r[i]$ ，高度为 $y[i]$ ，对应着平面上 $(x[l[i]], y[i])$ 到 $(x[r[i]], y[i])$ 的线段。你不仅可以在端点处上下天桥，只要对应的线段有交你就可以上下天桥（即你相当于要在平面间有画线的区域内行走）。你也可以在天桥和建筑内任意行走。需要注意的是，你不能在地面上行走，只能在天桥和大楼间游走。你想要找到第 $s$ 座建筑的底部到第 $g$ 座建筑的底部的最短路径长度。



- $n, m \leq 10^5$

\* Source: IOI2019





# Mona Lisa

- 有四个给定种子和代码的随机数生成器，你可以用这四个随机数生成器生成  $[0, 2^N)$  的整数序列。你可以假定这四个随机数生成器是完全随机的。
- 你需要从这四个随机数生成器生成的序列中分别找到一个数，使得这四个数异或和为0。
- $N \leq 50$ ，时限2s。

\*Source: SWERC 2018



# Cactus Revisited

- 给出一个 $n$ 个点的仙人掌（每条边最多属于一个简单环的简单无向联通图）。我们希望每个点分配一个大小为 $b$ （需要满足 $b \leq 1000$ ）的 $\{1, 2 \dots a\}$ 的子集，并且每条边两端点的这个集合无交。你需要最小化 $\frac{a}{b}$ 的值，输出任何一个这样的解。
- $2 \leq n \leq 1000$ 。数据保证有解。

\*Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Moscow SU Red Panda Contest



## Game Relics

- 有 $n$ 个需要购买的物品。直接购买第 $i$ 个物品的价格为 $c[i]$ 元。除了直接购买以外，你可以花 $x$ 元来从 $n$ 个物品中等概率抽取一个物品。如果抽取到的是已经有的物品，你会返回 $x/2$ 元。（即如果抽到已有的就抽奖无效，返还价格的一半）求在最优策略下期望需要花的钱的最小值。
- $1 \leq n \leq 100, c_i \geq x, \sum_i c_i \leq 10000$ 。均为正整数。

\* Source: NEERC2019



# Find the Array

- 交互题。有一个包含两两不同的 $[1, 10^9]$ 的整数的序列 $a_1, a_2 \dots a_n$ 。你可以进行30次两种之一的询问：
  - 给出 $i$ ，询问 $a_i$ 。
  - 给出 $k$ 和 $i_1, i_2 \dots i_k$ ，交互库会求出所有 $|a_{i_c} - a_{i_d}|$ 组成的长度为 $\frac{k(k-1)}{2}$ 的序列，即 $a$ 对应位置的数两两差的绝对值，打乱后返回。
- 你需要还原原序列 $a$ 。
- $n \leq 250$ 。

\* Source: SEERC 2019



# Knapsack Cryptosystem

- 有一种如下的加密算法：Alice选择正整数序列 $\{a_1 \dots a_n\}$ 满足 $a_i > \sum_{j=1}^{i-1} a_j$ ，正整数 $q > \sum_i a_i$ 和一个与 $q$ 互质的正整数 $r$ 。这 $n+2$ 个数是Alice的私钥。Alice计算 $b_i = (a_i r) \bmod q$ 作为公钥。Bob需要传输一个01串 $s_1 s_2 \dots s_n$ ，于是他传输 $(\sum_i s_i b_i) \bmod q$ 给Alice。为了方便计算，Alice取 $q = 2^{64}$ 。
- 你是中间人Eve，你获得了Alice的公钥和Bob传输的值，求出Bob的原串。
- $n \leq 64, 1 \leq b_i < 2^{64}$ 。

\* Source: NEERC2017





# Bimatching

- 有 $n$ 个男生和 $m$ 个女生，由于一些原因，小组活动时需要一个男生和两个女生在一组。有若干形如“第 $a$ 个男生和第 $b$ 个女生关系不好，无法分在一组”的限制。求最多能有几个小组进行活动。
- $n + m \leq 150$ ，多组数据。

\* Source: NEERC2018



## Teams

- 有 $n$ 个人，你需要把他们划分成尽量多的连续段，每个人 $i$ 要求自己所在的段人数在  $[c_i, d_i]$  之间。求最多能分成的段数和方案数（或输出无解）。
- $n \leq 10^6$ , 5s。

\* Source: Petrozavodsk Summer-2014. Warsaw U Contest



# Guess the Answer

- 有 $n$ 个判断题，每道题的答案是“对”或“错”。
- 你有300次答题机会（每道题必须回答“对”或“错”），每次答题后你会知道你答对了几道题。
- 找到正确答案。
- $n \leq 1000$ 。

\* Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Taiwan NTU PECaveros Contest



# Quicksort

- 有一个1到n的排列 $a_1, a_2 \dots a_n$ , 你每次可以选择一个子序列, 把它保持原顺序不变提到开头。你需要把这个排列用最小的步数排序。输出方案。
- $n \leq 10^3$ 。

\*Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Lviv NU Contest





# Interesting Game

- 有一个 $n$ 个国家的地图，两个国家有可能是直接可达的或不直接可达的。每个国家中一开始有正整数个骑士，每个国家可能是好战的或和平的。
- 游戏由先后手轮流操作，每回合有两种可能的操作。不可操作者输。
  - 攻击：选择一个好战的国家 $A$ 和一个直接可达的和平国家 $M$ ，假设分别有 $T_A$ 和 $T_M$ 个骑士。攻击只能在 $T_M > 0$ 时进行。 $M$ 国会努力防御，最后剩下 $\max(T_M - T_A, 0)$ 个骑士。
  - 支援：选择两个直接可达的和平国家 $M$ 和 $O$ ，假设分别有 $T_A$ 和 $T_M$ 个骑士。求援只能在 $T_M > 0$ 时进行。如果 $T_M$ 是奇数， $M$ 国会先产生一个新骑士，即把 $T_M$ 加一。接下来 $M$ 国一半的骑士移动到 $O$ 国。
- 两人会对每种 ( $2^n$ 种) 可能的好战/和平状况玩一局，求每一个人会赢几局 (注意游戏可能是平局)。  $n \leq 40$ ，每个国家开始的骑士个数不超过40000。

\*Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Worldwide Selection



# Lysergic Acid Diethylamide

- 我们定义  $f(x) = 1 + 2 + \dots + x$ ,  $s_0(x) = x$ ,  $s_k(x) = s_{k-1}(f(x) + k)$ 。
- 有  $T$  个询问, 每个询问中给出  $x_i, k_i, p_i$ , 你需要回答一个  $-1 \leq m_i < p_i$  使得  $s_k(x_i) \bmod p_i \neq m_i$ 。
- 每个询问中的  $p$  两两不同, 你可以使用  $-1$  (即跳过询问) 不超过 20 次。
- $T \leq 5000$ ,  $1 \leq x_i \leq 10^9$ ,  $0 \leq k_i \leq 10^5$ ,  $1 \leq p_i \leq 10^4$ 。

\*Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Moscow SU Red Panda Contest



## More Things to Do

- 有 $n$ 个区间 $[l_i, r_i]$ ，你需要把区间划分成两个集合A和B。记 $intersect(A, B)$ 为区间A和B交的长度。你需要最大化

$$C = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} intersect(a, b)$$

- 输出最大值和任意一种方案。
- $n \leq 10^5, 0 \leq l_i < r_i \leq 10^9$ 。

\*Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Lviv NU Contest



# Paint the Tree

- 有一棵 $n$ 个点的树，每个点需要被染成 $k$ 种颜色之一。
- 我们希望同色的点距离最近的一对距离尽量大。你需要找到这个最大值并输出这样的染色方案数。
- $k < n \leq 2000$ 。

\*Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Lviv NU Contest





# Things

- 有 $n$ 个区间 $[l_i, r_i]$ ，每个区间长度均为偶数。你需要把每个区间只保留前一半或后一半，但是保持所有区间的并不变。判断是否可行。
- $n \leq 200, 0 \leq l_i < r_i \leq 10^9$ 。

\*Source: Moscow Pre-Finals ACM ICPC Workshop 2018, Lviv NU Contest



# Help BerLine

- 有 $n$ 个排成一行的通信基站和一个1到 $n$ 的排列 $p[1]...p[n]$ ，这些通信基站会按照这个排列的顺序依次开启。你需要给每个基站分配一个 $\{1, 2, \dots, 24\}$ 中的通信频率，保证任何一个时刻，一个非空的开启的基站区间内一定有至少一个基站频率是独特的（同一频率会互相干扰）。
- $1 \leq n \leq 8500$ 。多组数据。数据保证有解。

\* Source: NEERC2019



# Rikka with Geometric Sequence

- 求 $1, 2, 3, \dots, n$ 的等比子序列个数。
- $n \leq 5 \times 10^{17}$ , 三组数据, 7s。

\* Source: 2019 Multi-University Training Contest 9



# Nonsense Time

- 有一个长度为 $n$ 的排列 $p_1, p_2 \dots p_n$ ，一开始所有元素都被冻结了，接下来分为 $n$ 步，第 $i$ 步将 $p[k[i]]$ 解冻。每一步后，你需要求出解冻的元素的最长上升子序列。
- $n \leq 50000$ ， $p$ 与 $k$ 随机生成。

\* Source: 2019 Multi-University Training Contest 6





## Three Investigators

- 有一个长度为 $n$ 的序列。对于每一个前缀，你需要选出不超过5个互不相交的不降子序列，价值为这些数的和。你需要求出每个前缀的最大价值。
- $\sum n \leq 500000$ ，序列中的元素在 $[1, 10^9]$ 。

\* Source: 2019 Multi-University Training Contest 6