OI 中的精度近似算法

中国人民大学附属中学 许庭强

2022.1

前言

在 OI 中有一些输出实数的题目，与答案相对误差在 ϵ 内即可通过，其中 ϵ 有 $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-9}$ 等取值。大部分时候这是为了容许 C++ 中 double 容器的精度问题，但有时在直接求解答案所需复杂度过高时，我们可以用一些方法来近似答案的精确值。一种方法是用数值积分的方式近似，另外一种方法是泰勒展开。

数值积分

在很多题目中，题目所求的内容可以经过某些过程转化为求一次数值积分。即存在一个可积函数 $f(x)$ 与区间 $[A, B]$，题目需要求出以下积分式的值：

$$\int_A^B f(x)\mathrm{d}x$$

- 大部分题目中的 $f(x)$ 多为线段长度或图形面积等信息，我们在这里默认 $f(x)$ 连续，在除有限个位置外任意阶可导，且在 $[A, B]$ 内大于等于 0 。

- 大部分题目中的 $f(x)$ 多为线段长度或图形面积等信息，我们在这里默认 $f(x)$ 连续，在除有限个位置外任意阶可导，且在 $[A, B]$ 内大于等于 0 。
- 有时 f 函数会比较复杂，难以直接求出其积分值，那么就需要近似求解。

- 大部分题目中的 $f(x)$ 多为线段长度或图形面积等信息，我们在这里默认 $f(x)$ 连续，在除有限个位置外任意阶可导，且在 $[A, B]$ 内大于等于 0 。
- 有时 f 函数会比较复杂，难以直接求出其积分值，那么就需要近似求解。
- 本文给出以下方法来近似求出对应的积分值。

黎曼和近似

我们根据定积分的定义，直接取一正整数 N，将区间等分成 N 份，并在每个区间中点处求出对应 f 的取值来近似整个区间 f 的平均值，从而近似出整个区间的积分值。形式化地说，对固定正整数 N 求出：

$$I_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{B-A}{N} f(A + \frac{i(B-A)}{N} + \frac{1}{2N})$$

黎曼和近似

我们根据定积分的定义，直接取一正整数 N，将区间等分成 N 份，并在每个区间中点处求出对应 f 的取值来近似整个区间 f 的平均值，从而近似出整个区间的积分值。形式化地说，对固定正整数 N 求出：

$$I_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{B-A}{N} f(A + \frac{i(B-A)}{N} + \frac{1}{2N})$$

根据定积分定义，在 N 趋于无穷大时，求出来的值无限接近于真实积分值。相应的，算法要支付 $O(N)$ 次求值的代价，这时估计每个 N 对应的误差就变得更加重要。

部分常见函数的误差

1. 一次函数：$f(x) = ax + b$，没有误差。

部分常见函数的误差

1. 一次函数：$f(x)=ax+b$，没有误差。
2. 二次函数：$f(x)=ax^2$，相对误差为

$$\frac{|I_N-\frac{1}{3}a(B^3-A^3)|}{\frac{1}{3}a(B^3-A^3)}=\frac{(B-A)^2}{4(B^2+AB+A^2)}\cdot\frac{1}{N^2}=O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

部分常见函数的误差

1. 一次函数：$f(x)=ax+b$，没有误差。
2. 二次函数：$f(x)=ax^2$，相对误差为

$$\frac{\left|I_N-\frac{1}{3}a(B^3-A^3)\right|}{\frac{1}{3}a(B^3-A^3)}=\frac{(B-A)^2}{4(B^2+AB+A^2)}\cdot\frac{1}{N^2}=O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

3. 三角函数：$f(x)=\cos x$，相对误差为

$$\frac{\left|I_N-(\sin B-\sin A)\right|}{\sin B-\sin A}=\frac{\frac{B-A}{N}-2\sin\frac{B-A}{2N}}{2\sin\frac{B-A}{2N}}=O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

另外，我们有以下定理：

定理

如果 f 在 $[A,B]$ 内均任意阶可导，黎曼和近似的绝对误差最坏情况下不超过 $\frac{K(B-A)^3}{24n^2}$，其中 K 为 $\left|f^{(2)}(x)\right|$ 在 $[A,B]$ 中的最大值。

辛普森积分

我们尝试用二次函数来近似被积函数 $f(x)$。当 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 时，有

$$\int_A^B f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a(B^3 - A^3) + \frac{1}{2}b(B^2 - A^2) + c(B - A)$$

$$= \frac{B-A}{6}(2a(A^2 + AB + B^2) + 3b(A + B) + 6c)$$

$$= \frac{B-A}{6}\left(f(A) + 4f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(B)\right)$$

这样，辛普森积分用 $(A, f(A)), \left(\frac{A+B}{2}, f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right), (B, f(B))$ 三个点决定的二次函数来估计 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上的积分值，如下：

定义

函数 $f(x)$ 在区间 $[A, B]$ 中的辛普森积分为

$$\frac{B-A}{6}\left(f(A)+4f\left(\frac{A+B}{2}\right)+f(B)\right)$$

辛普森积分的近似效果比中点更好，具体来说：

定理

将区间 $[A,B]$ n 等分，用辛普森积分近似每一段区间，如果 f 在 $[A,B]$ 内均任意阶可导，其近似绝对误差不超过 $\frac{M(B-A)^5}{2880n^4}$，其中 M 为 $\left|f^{(4)}(x)\right|$ 在 $[A,B]$ 中的最大值。

自适应辛普森积分

- 在 $f(x)$ 存在与二次函数相差过多的区间（如不可导点）时，在其附近近似产生的误差会极大增加，这导致我们需要进一步缩小辛普森积分的区间长度。但在所有位置上均缩小区间长度的代价太大，这时我们可以用自适应辛普森积分解决这一问题。

自适应辛普森积分

- 在 $f(x)$ 存在与二次函数相差过多的区间（如不可导点）时，在其附近近似产生的误差会极大增加，这导致我们需要进一步缩小辛普森积分的区间长度。但在所有位置上均缩小区间长度的代价太大，这时我们可以用自适应辛普森积分解决这一问题。
- 在自适应辛普森中，如果可以大致判断辛普森积分误差很小，那么直接返回辛普森积分的值，否则递归到两个区间中继续运算。

自适应辛普森积分

- 在 $f(x)$ 存在与二次函数相差过多的区间（如不可导点）时，在其附近近似产生的误差会极大增加，这导致我们需要进一步缩小辛普森积分的区间长度。但在所有位置上均缩小区间长度的代价太大，这时我们可以用自适应辛普森积分解决这一问题。
- 在自适应辛普森中，如果可以大致判断辛普森积分误差很小，那么直接返回辛普森积分的值，否则递归到两个区间中继续运算。
- 相信大家对此已经很熟悉了。

泰勒展开

对于一个实解析的函数 f，我们观察 $f(x)$ 在 x_0 展开的泰勒级数：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

其中 ξ 为 x 与 x_0 之间的某个位置。

引理

如果 $\exists M > 0, \forall n \geq 0, \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| < M \cdot 2^{-n}$，那么只需计算泰勒展开的前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项，即可使绝对误差不超过 ϵ。

引理

如果 $\exists M > 0, \forall n \geq 0, \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| < M \cdot 2^{-n}$，那么只需计算泰勒展开的前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项，即可使绝对误差不超过 ϵ。

证明.

由于函数实解析，泰勒级数一定收敛到 $f(x)$。考虑 $N_0 = \lceil \log \epsilon^{-1} + \log M \rceil + 1$ 之后的项，其绝对值总和 $< M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$。所以计算前 $N_0 = \Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项即可。 $\square$

容易得到以下直接推论：

引理

如果 $\exists M > 0, \forall n \geq 0, \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| < M$ 且 $|x - x_0| < \frac{1}{2}$，则只需计算泰勒展开的前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项，即可使绝对误差不超过 ϵ。

容易得到以下直接推论：

引理

如果 $\exists M>0, \forall n \geq 0, \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| < M$ 且 $|x-x_0| < \frac{1}{2}$，则只需计算泰勒展开的前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项，即可使绝对误差不超过 ϵ。

- 由于大部分常见函数均为实解析的初等函数，并且常常满足导数有界，我们下面会经常使用该引理。

容易得到以下直接推论:

引理

如果 $\exists M > 0, \forall n \geq 0, \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| < M$ 且 $|x - x_0| < \frac{1}{2}$，则只需计算泰勒展开的前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项，即可使绝对误差不超过 ϵ。

- 由于大部分常见函数均为实解析的初等函数，并且常常满足导数有界，我们下面会经常使用该引理。
- 将函数用泰勒展开的好处是我们把一个相对复杂的函数变成了一个简单的多项式，而多项式的性质是很好的。

部分 $f(x)$ 的展开式

$$\ln(1-x) \approx \sum_{n=1}^{N} -\frac{x^n}{n}$$

部分 $f(x)$ 的展开式

$$\ln(1-x) \approx \sum_{n=1}^{N} -\frac{x^n}{n}$$

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

部分 $f(x)$ 的展开式

$$\ln(1-x) \approx \sum_{n=1}^{N} -\frac{x^n}{n}$$

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1+x} \approx \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

部分 $f(x)$ 的展开式

$$\ln(1-x) \approx \sum_{n=1}^{N} -\frac{x^n}{n}$$

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1+x} \approx \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sin x \approx \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

注意

- 注意我们在用某个函数的泰勒展开式近似时，一定要保证 $|x - x_0|$ 较小，即收敛速度快于公比是常数的等比数列，否则不能保证展开式带入后的误差。

注意

- 注意我们在用某个函数的泰勒展开式近似时，一定要保证 $|x - x_0|$ 较小，即收敛速度快于公比是常数的等比数列，否则不能保证展开式带入后的误差。
- 如上页中对于 $\frac{1}{1+x}$ 的展开，如果 $x \in [0, 1]$，可以让 N 取 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 时就能有不超过 ϵ 的误差。

例题

- 我们接下来展示几道精度近似的例题。

例 (差不多得了)

给定 n 个二维平面上的整点，对每个点求到所有其他点的直线距离之和，允许误差范围 $\epsilon = 10^{-4}$，保证 $n \le 2 \times 10^5$，坐标绝对值不超过 10^9 (dmy, 2021.7)。

解

- 将两个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 之间的距离 $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 看做

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |l \cos x| \,\mathrm{d}x$$

解

- 将两个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 之间的距离 $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 看做

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |l \cos x| \, \mathrm{d}x$$

- 即为对所有角度的线段投影长度求积分。

- 这时就可以交换求和顺序，取 N 个均匀角度 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$。考虑某一条线段，对每个 $1 \le i \le N$，取出该线段投影到 $y = \tan\alpha_i \cdot x$ 这条直线上后的长度，求和算出的值即为上述积分式的黎曼和近似。

- 这时就可以交换求和顺序，取 N 个均匀角度 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$。考虑某一条线段，对每个 $1 \le i \le N$，取出该线段投影到 $y = \tan\alpha_i \cdot x$ 这条直线上后的长度，求和算出的值即为上述积分式的黎曼和近似。
- 这样，就可以对每个 $1 \le i \le N$，将所有点投影到直线上，算出和每个点相连的线段投影长度之和。这是一维的问题，排序后容易做到线性。

- 根据上文的分析，我们可以知道所有不包含 $|\cos x|$ 的不可导点误差为 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$。

- 根据上文的分析，我们可以知道所有不包含 $|\cos x|$ 的不可导点误差为 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$。
- 对于 $\cos x = 0$ 附近的位置，由于有 $\sin x < x$，周围 $\frac{B-A}{N}$ 长度的区间中积分为 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 量级。同时取出的中点值域也在 $[0, \frac{B-A}{N}]$ 之间，所以这一段中近似出的值也为 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 量级。因此，造成的绝对误差不超过 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 量级，从而对总体相对误差的影响不超过 $O(\frac{1}{N^2})$。

差不多得了

- 根据上文的分析，我们可以知道所有不包含 $|\cos x|$ 的不可导点误差为 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$。
- 对于 $\cos x = 0$ 附近的位置，由于有 $\sin x < x$，周围 $\frac{B-A}{N}$ 长度的区间中积分为 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 量级。同时取出的中点值域也在 $[0, \frac{B-A}{N}]$ 之间，所以这一段中近似出的值也为 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 量级。因此，造成的绝对误差不超过 $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ 量级，从而对总体相对误差的影响不超过 $O(\frac{1}{N^2})$。
- 取 $N = \Theta(\epsilon^{-\frac{1}{2}})$ 即能获得满足题目要求的精度。时间复杂度为 $O(n\epsilon^{-\frac{1}{2}} \log n)$。

例（在美妙的数学王国中畅游）

有 n 个点，每个点上有一个函数，m 次操作，每次操作为加边、删边、单点修改函数或查询 u, v, x，求出从 u 走到 v 经过所有点 $f(x)$ 之和。保证过程中这 n 个点始终形成一个森林，允许误差范围 $\epsilon = 10^{-7}$，保证每个点上的函数均为以下三种之一：

1. $f(x) = \sin(ax + b)(a \in [0,1], b \in [0,\pi], a + b \in [0,\pi])$
2. $f(x) = e^{ax+b}(a \in [-1,1], b \in [-2,0], a + b \in [-2,0])$
3. $f(x) = ax + b(a \in [-1,1], b \in [0,1], a + b \in [0,1])$

保证 $n \le 10^5, m \le 2 \times 10^5, x \in [0,1]$ （THUWC2017，loj2289）。

解

- 由于保证了 $0 \le x \le 1$，直接把那三种函数在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开，这样就保证了 $|x - x_0| \le \frac{1}{2}$，截取前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项，用 *LCT* 维护链上每一项系数的和即可。

解

- 由于保证了 $0 \le x \le 1$，直接把那三种函数在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开，这样就保证了 $|x - x_0| \le \frac{1}{2}$，截取前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项，用 *LCT* 维护链上每一项系数的和即可。
- 时间复杂度 $O(n \log n \log \epsilon^{-1})$。

获取名额

例 (获取名额)

给定正整数序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$， q 次查询 $\prod_{i=l}^{r}\left(1-\frac{a_i}{x}\right)$，允许绝对误差范围 $\epsilon = 10^{-6}$，保证 $n, q \le 6\times 10^5, a_i < x \le 10^9$ (dmy, 2018.5)。

解

- 注意到如果在区间 $[l, r]$ 内有至少 $\log \epsilon^{-1}$ 个 a_i 满足 $\frac{a_i}{x} \geq \frac{1}{2}$，那么所求一定不超过 ϵ，输出 0 即可。

解

- 注意到如果在区间 $[l, r]$ 内有至少 $\log \epsilon^{-1}$ 个 a_i 满足 $\frac{a_i}{x} \geq \frac{1}{2}$，那么所求一定不超过 ϵ，输出 0 即可。
- 可以暴力求出区间大于等于于 $\frac{1}{2}$ 这部分的贡献。

解

- 注意到如果在区间 $[l,r]$ 内有至少 $\log \epsilon^{-1}$ 个 a_i 满足 $\frac{a_i}{x} \geq \frac{1}{2}$，那么所求一定不超过 ϵ，输出 0 即可。
- 可以暴力求出区间大于等于 $\frac{1}{2}$ 这部分的贡献。
- 不妨只考虑所有 $\frac{a_i}{x} < \frac{1}{2}$ 的 a_i。

获取名额

- 将所求式子改写为

$$\exp\left(\sum_{i=l}^{r}\ln\left(1-\frac{a_i}{x}\right)\right)$$

- 将所求式子改写为

$$\exp\left(\sum_{i=l}^{r}\ln\left(1-\frac{a_i}{x}\right)\right)$$

- 将 $\ln(1-x)$ 在 $x_0=0$ 处展开，得到泰勒级数

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

- 将所求式子改写为

$$\exp\left(\sum_{i=l}^{r}\ln\left(1-\frac{a_i}{x}\right)\right)$$

- 将 $\ln(1-x)$ 在 $x_0=0$ 处展开，得到泰勒级数

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

- 由于 $\left|\frac{a_i}{x}\right|<\frac{1}{2}$，想求出 $\ln\left(1-\frac{a_i}{x}\right)$，只需展开到 $\Theta(\log\epsilon^{-1})$ 项即可。那么每个 $\ln\left(1-\frac{a_i}{x}\right)$ 均可近似成一个关于 $\frac{a_i}{x}$ 的不超过 $\Theta(\log\epsilon^{-1})$ 次的多项式。

- 此时区间 $[l,r]$ 的多项式就可以按次数合并了。求答案时可简单预处理出所有 $\frac{a_i^k}{k}$ 的前缀和，最后分别求出区间和再乘上 x^{-k} 叠加即可。

- 此时区间 $[l, r]$ 的多项式就可以按次数合并了。求答案时可简单预处理出所有 $\frac{a_i^k}{k}$ 的前缀和，最后分别求出区间和再乘上 x^{-k} 叠加即可。
- 时间复杂度 $O(n \log^2 \epsilon^{-1} + n \log n)$。

- 此题对 $> \frac{1}{2}$ 做特殊处理，对 $\leq \frac{1}{2}$ 使用泰勒展开优化，做到了直接求值难以做到的复杂度。

- 此题对 $> \frac{1}{2}$ 做特殊处理，对 $\leq \frac{1}{2}$ 使用泰勒展开优化，做到了直接求值难以做到的复杂度。
- 但在省掉一个 n 的同时，付出了 $\log^2 \epsilon^{-1}$ 的额外代价。

例 (Game of Chance)

给定正整数序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，对每个 j 求 $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_j}{b_j+a_i}$，允许误差范围 10^{-9}，保证 $n \le 3 \times 10^5, a, b \le 10^9$（经过部分转化）（WF Invitational Contest，CF1578G）。

解

- 设函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，查询即为求所有 $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{a_i}{b_j}\right)$ 的值。将 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 处展开，若 $\frac{a_i}{b_j}\le 1$，则可用以下展开式的前 $\Theta(\log\epsilon^{-1})$ 项来估计 $f\left(\frac{a_i}{b_j}\right)$ 的值。

$$\frac{1}{1+x}\approx\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

解

- 设函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，查询即为求所有 $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{a_i}{b_j}\right)$ 的值。将 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 处展开，若 $\frac{a_i}{b_j}\le 1$，则可用以下展开式的前 $\Theta(\log\epsilon^{-1})$ 项来估计 $f\left(\frac{a_i}{b_j}\right)$ 的值。

$$\frac{1}{1+x}\approx\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

- 截取前 $\Theta(\log\epsilon^{-1})$ 项，将 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ 用二项式定理展开，可以得到一个关于 x，次数不超过 $\Theta(\log\epsilon^{-1})$ 的多项式。

- 我们要一次性对所有满足 $\frac{a_i}{b_j} \leq 1$ 的 a_i 求和。把 $\frac{1}{b_j}$ 次数相同的项合并，只需要求出所有 $a_i \leq b_j$ 中 $a_i^k(k \leq \Theta(\log \epsilon^{-1}))$ 之和即可。

- 我们要一次性对所有满足 $\frac{a_i}{b_j} \le 1$ 的 a_i 求和。把 $\frac{1}{b_j}$ 次数相同的项合并，只需要求出所有 $a_i \le b_j$ 中 $a_i^k (k \le \Theta(\log \epsilon^{-1}))$ 之和即可。
- 用 $O(n \log \epsilon^{-1})$ 的复杂度预处理出所有 a_i^k，求答案时求出每项系数乘上对应的 b_j^{-k}，就能求出答案。

- 我们要一次性对所有满足 $\frac{a_i}{b_j} \le 1$ 的 a_i 求和。把 $\frac{1}{b_j}$ 次数相同的项合并，只需要求出所有 $a_i \le b_j$ 中 $a_i^k (k \le \Theta(\log \epsilon^{-1}))$ 之和即可。
- 用 $O(n \log \epsilon^{-1})$ 的复杂度预处理出所有 a_i^k，求答案时求出每项系数乘上对应的 b_j^{-k}，就能求出答案。
- 我们至此解决了 $a_i \le b_j$ 的这部分，但另一部分还仍未解决。在 $\frac{a_i}{b_j}$ 远大于 1 时，泰勒展开出的式子并不收敛。

- 我们要一次性对所有满足 $\frac{a_i}{b_j} \leq 1$ 的 a_i 求和。把 $\frac{1}{b_j}$ 次数相同的项合并，只需要求出所有 $a_i \leq b_j$ 中 $a_i^k(k \leq \Theta(\log \epsilon^{-1}))$ 之和即可。
- 用 $O(n \log \epsilon^{-1})$ 的复杂度预处理出所有 a_i^k，求答案时求出每项系数乘上对应的 b_j^{-k}，就能求出答案。
- 我们至此解决了 $a_i \leq b_j$ 的这部分，但另一部分还仍未解决。在 $\frac{a_i}{b_j}$ 远大于 1 时，泰勒展开出的式子并不收敛。
- 所以我们需要另辟蹊径。

- 我们换一种角度看 $\frac{b_j}{b_j+a_i}$。

- 我们换一种角度看 $\frac{b_j}{b_j+a_i}$。
- $\frac{b_j}{b_j+a_i}$ 可以写成

$$\frac{\frac{b_j}{a_i}}{1+\frac{b_j}{a_i}}$$

- 我们换一种角度看 $\frac{b_j}{b_j+a_i}$。
- $\frac{b_j}{b_j+a_i}$ 可以写成

$$\frac{\frac{b_j}{a_i}}{1+\frac{b_j}{a_i}}$$

- 此时注意到有 $0 \le \frac{b_j}{a_i} \le 1$，这启示我们对 $\frac{x}{1+x}$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开。

- 将 $\frac{x}{1+x}$ 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 展开得到:

$$\frac{x}{1+x} \approx \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

- 将 $\frac{x}{1+x}$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 展开得到:

$$\frac{x}{1+x} \approx \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

- 与刚才类似，我们截取前 $\Theta(\log \epsilon^{-1})$ 项后二项式展开得到一个多项式。需要对 $a_i > b_j$ 的所有 a_i 在 $\frac{b_j}{a_i}$ 位置求和。预处理出所有的 a_i^{-k}，求出每项系数乘上对应的 b_j^k 即可。

- 在最开始对 a 和 b 排序需要 $O(n \log n)$。

- 在最开始对 a 和 b 排序需要 $O(n\log n)$。
- 总时间复杂度 $O(n\log n + n\log\epsilon^{-1})$。

- 此题以 a_i 和 b_j 的大小关系分了两部分，分别用不同的函数泰勒展开求解。这是为了解决泰勒级数的收敛问题，本质是将 $f(x)$ 分成了 $0 \leq x \leq 1$ 与 $x > 1$ 两部分。

- 此题以 a_i 和 b_j 的大小关系分了两部分，分别用不同的函数泰勒展开求解。这是为了解决泰勒级数的收敛问题，本质是将 $f(x)$ 分成了 $0 \leq x \leq 1$ 与 $x > 1$ 两部分。
- 对于 $0 \leq x \leq 1$ 的部分可以直接用 $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开的多项式求解。
- 对于 $x > 1$ 的部分用 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开的多项式求解。

- 此题以 a_i 和 b_j 的大小关系分了两部分，分别用不同的函数泰勒展开求解。这是为了解决泰勒级数的收敛问题，本质是将 $f(x)$ 分成了 $0 \le x \le 1$ 与 $x > 1$ 两部分。
- 对于 $0 \le x \le 1$ 的部分可以直接用 $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开的多项式求解。
- 对于 $x > 1$ 的部分用 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处展开的多项式求解。
- 这能解决绝大部分对 $f(x)$ 求和的求值类问题，只需要额外花费 $O(\log \epsilon^{-1})$ 的代价（有时为分出两部分需要加上 $O(\log n)$ 的代价）。

谢谢大家！