元旦老人与丛林 解题报告

杭州学军中学 吉如一

1 试题来源

出题人：丁力煌。题目可以在这里找到：http://uoj.ac/problem/168

2 试题大意

对于一张n个点m条边的无向图，你可以选出若干条边（可以全选也可以不选），如果存在一种方案使得无论是只保留你选出来的边还是只保留你没有选的边，这张无向图都是一个森林（即没有环），那么这张无向图被称为丛林。

现在给出了一张无向图，你需要判断它是不是丛林。

<table>
<tr><th>子任务编号</th><th>分值</th><th>n的规模</th><th>m的规模</th><th>其他约定</th></tr>
<tr><td>1</td><td>20</td><td>$n \le 10$</td><td>$m \le 20$</td><td>无</td></tr>
<tr><td>2</td><td>20</td><td rowspan="3">$n \le 300$</td><td>$m \le n + 7$</td><td>保证图联通</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10</td><td rowspan="2">$n \le 600$</td><td>保证每一个点的度数都不超过4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>30</td><td rowspan="2">无</td></tr>
<tr><td>5</td><td>20</td><td>$n \le 2000$</td><td>$m \le 4000$</td></tr>
</table>

3 算法介绍

3.1 算法一

直接枚举每一个可能的边集进行判定。时间复杂度$O(2^m m)$，期望得分20分。

3.2 算法二

我们在一棵树上加了很少的边，于是我们可以考虑把这张图上无用的点和边给删掉。

可以发现度数小于等于2 的点是否存在是没有影响的，因为在删掉这个点以及它连出去的所有边之后，如果新图不是丛林，那么原图一定也不是丛林；反之如果新图是丛林，我们可以把新点分别加到两棵森林中：一条边就随便挑一颗森林连进去，两条边就分别连到两棵森林中，这样得到的就是原图拆分成两棵森林的方案，所以原图也是丛林。

于是我们可以每一次找一个度数小于等于2 的节点把它删掉，那么我们可以最后剩下的图的边数很少（显然是不超过$3(m-n+1)$ 的），直接暴力枚举就好了。期望得分40 分。

3.3 算法三

观察第三个subtask，因为每一个点的度数都不小于4，所以可以得到$m \geq 2n$，显然是无解的，只要输出No 就能得到这10 分啦。

3.4 算法四

实际上第三个subtask 是拿来提示标算的。我们可以发现如果原图存在一个非空子图满足$|E| > 2|V| - 2$，那么显然无解。实际上存在这样的一个结论：如果图G 的每一个非空子图都满足$|E| \leq 2|V| - 2$，那么它一定是丛林。接下来我们来考虑证明这一个结论：

尝试归纳法，当$n = 1$ 的时候，这张图一定是丛林。

假设所有点数小于n 的满足结论中条件的图都是丛林。现在，我们来考虑一张$n(n > 2)$ 个点的满足条件的图G，令它度数最小的节点为u，那么u 的度数只可能为$0, 1, 2, 3$（原因见算法三）。其中当u 的度数小于等于2 的时候，可以用算法二中的方法进行构造。所以我们只考虑u 的度数是3 的情况。

对于一个非空子图，如果满足有$|E| = 2|V| - 2$，那么我们就把它称作是满的子图。

引理一：对于图中任意两张相交（至少存在一个公共点）的满子图，那么它们的并也一定是满的。

证明：假设这两个子图分别是$(V1, E1), (V2, E2)$，令$V3 = V1 \cap V2, E3 = E1 \cap E2, V = V1 \cup V2, E = E1 \cup E2$，那么$(V3, E3), (V, E)$ 一定都是原图的子图，我们需要证明的是$|E| = 2|V| - 2$。

因为$|E| \le 2|V| - 2$，所以$|E1| + |E2| - |E3| \le 2(|V1| + |V2| - |V3|) - 2$，又有$|E1| = 2|V1| - 2, |E2| = 2|V2| - 2$，所以$-|E3| \le 2 - 2|V3|$。

又因为有$|E3| \le 2|V3| - 2$，所以可以得到$|E3| = 2|V3| - 2$，因此$|E| = 2|V| - 2$。

接着，设和u 相连的三个点分别为a, b, c。令G 在删掉u 以及那三条边之后的图是$G1$，由假设，$G1$ 是丛林。

引理二：a, b, c 中至少存在一对节点(x, y)，使得$G1$ 中不存在同时包含x 和y 的满子图。

证明：考虑反证法，假设存在分别包含$(a, b), (a, c), (b, c)$的满子图，由引理一，我们可以把这三个图并起来，这样就得到了$G1$ 的一个同时包含(a, b, c) 的满子图。我们把删掉的u 和那三条边加入这张子图中，这样就得到了G 的一个子图。此时这个子图满足$|E| = 2|V| - 1$，矛盾。因此引理二得证。

于是，我们可以在$G1$ 中加入一条连接(x, y) 的边得到$G2$，不难发现$G2$ 依然满足结论中的条件，所以$G2$ 也是丛林。我们可以构造出$G2$ 拆分成的两棵森林，其中一定有一颗包含了新加入的边(x, y)，我们删掉这条边，然后再这棵森林中加入边$(u, x), (u, y)$，再把最后剩下的一条边加入另一棵森林中，于是就得到了G 拆分而成的两棵森林。所以G 是丛林。

到此，我们就愉快的证明了这个结论辣。

于是问题就转化成了判断当前的图是否存在一张非空子图满足$|E| > 2|V| - 2$。这个问题可以转化成最大权非空闭合子图：

新建一张$n + m$ 个点的图$G3$，其中前n 个点的权值是-2，后m 个点的权值是1。如果在G 中第i 条边连接的点是u_i 和v_i，那么就分别连上$i + n$ 到u_i 和v_i 的边。我们只需要判断$G3$ 的最大权非空闭合子图的权值是否大于-2 就好啦。

当然直接当做最大权闭合子图来做是不行的，因为当最大权非空闭合子图的权值小于0 时，最大权闭合子图的权值就是0。

我们可以强制选取某一个点，即把某一个点的权值设为0。这样如果存在一个包含这个点的子图满足$|E| > 2|V| - 2$，那么这个子图的权值就变得大于0 了。我们可以枚举这个点，跑n 次网络流，这样就能检验辣。

如果你使用dinic 的话，因为这张图是二分图，所以时间复杂度$O(nm\sqrt{n})$，期望得分80 分。

3.5 算法五

其实优化起来很简单，我们发现相邻两次最大流之间只有两条流量为2 的边发生了变化。

如果我们可以在加入或者删除一条单位流量的边时，快速得到当前网络的最大流，那么就能对算法四进行优化了。

这是一个经典问题，可以用退流来解决。假设我们已经知道了原网络的最大流，在加入一条单位流量的边时，只需要对当前网络进行一次BFS增广就行了。

接下来考虑删除一条u 到v 的单位流量的边。如果在原网络的最大流中，这一条边没有流量，那么可以直接删除，最大流不变。否则我们可以从汇点到v 跑一次流量至多为1的增广，再从u 到源点跑一次流量至多为1的增广，那么这时我们相当于把这一条边在最大流中的贡献给消除了，所以可以直接删除这条边。

因为对流量每修改1需要一次BFS，即$O(n + m)$。因为在整个过程中流量变化量是$O(n)$ 的，所以总时间复杂度为$O(nm)$。

3.6 数据构造方法

可以先随机两棵树，然后以较小的概率删除若干条边（基本上只删除两倒三条）。

如果希望这一个点的答案是Yes，那么直接把随机出来两个森林输出即可。否则可以随机加上一到两条边，如果加入一条边的话有一定概率输出是Yes，加入两条边的话有很大的概率是No。

同时为了卡掉使用最大密度子图的做法，可以先在较小的数据范围内随机一些是No 的图，然后把剩下的点连到这一个子图上，这样构造出来的图答案是No，但是用最大密度子图的方法很容易判成Yes。

多次用上述方法构造数据，然后再进行捆绑测试，数据强度就基本够了。

3.7 总结

这是一道很难的题，在UR 的赛场上没有人拿到后两个subtask 的分数。

同时我觉得这也是一道很好的题，在题目中最大流这一算法被隐藏的很深，

但是又不是出题人刻意去隐藏起来的。做题时候必须先要发现一个并不是特别显然的结论，然后才能规约到最大流的问题，接着还必须要进行对最大流算法的优化，才能够AC———这从多方面考察了选手的能力。

从这些方面来说，我觉得这题的题目质量是要高于目前绝大部分的OI题的。