

中国国家集训队第一次作业解题报告

杭州学军中学 罗干

试题概览：

1. [2002C Crossing the Desert](#)
2. [2007A Consanguine Calculations](#)
3. [2012E Infiltration](#)

ACM World Finals 2002

Problem C Crossing the Desert

【题目大意】

在平面直角坐标系上有一些点, 其中有一个起点一个终点, 只有在起点才可以购买食物, 而水在给出的所有点都可以获得, 同时所有给出的点也可以存储食物。你每走 x 单位距离就会消耗 x 单位水和 x 单位食物 (x 为实数), 同时你最多携带 $limit$ 单位的食物和水, 问从起点到终点消耗的最少食物量, 当需要食物量超过一百万时也视为无解。

【数据范围】

点的个数 $n \leq 20$, $limit \leq 1000000$ 。

【算法讨论】

这道题我们用到了数论和图论两方面的知识。

我们设点的个数是 n , 从终点出发做最短路, 在每个点记录下从该点出发去终点的最小食物花费, 由于我们的食物花费量在状态转移时是不断递增的, 我们只要每次选择未被选过的最小食物花费点进行转移就行了, 因此本题一个最短路问题。

关键是转移的操作, 在转移的时候, 我们设两点间距离为 len , 可以明确的一点是我们在实际操作中一定是不断往返地将食物从前一个点运送到后一个点, 其中最后一次可以运送 $limit - len * 2$ 的食物 (只要消耗单程的食物和水), 其他几次每次只能运 $limit - len * 3$ 的食物 (需要消耗往返的食物和水, 返回的水在绿洲处补给), 因此我们只要先假设最后一次全部送满, 就能确定之前还要往返送几次, 对于多送的那些食物, 再在最后一次运送中减掉就行了, 起点的花费便是答案。

由于都是实数运算, 细节上的处理也有些麻烦。

【时空复杂度】

时间复杂度 $O(n^2)$

空间复杂度 $O(n)$

ACM World Finals 2007

Problem A Consanguine Calculations

【题目大意】

每个人都有 ABO 血型系统和 Rh 血型系统，每种血型都有两个该血型的等位基因，对于 ABO 血型系统等位基因有 A、B、O 三类，Rh 血型系统有+、-两类，现给出父母和孩子三者其中两人的血型，求出剩下的那个人的血型。

ABO 血型包含 A、B、O、AB 四种血型，Rh 血型包含+、-两种血型。

【数据范围】

询问数 ≤ 10000 。

【算法讨论】

这道题我们用到了枚举和字符串处理两方面的知识。

由于血型的情况总数很少，我们只需要直接枚举每个人的 4 个等位基因，再判断孩子的基因是否是分别从父母那里各获得两个的基因即可，然后根据 4 个等位基因便可以求出那个未知的人的血型了。

其中 ABO 血型系统等位基因组合与血型的关系如下：

组合 ABO 血型

AA A

AB AB

AO A

BB B

BO B

OO O

Rh 血型系统等位基因与血型的关系如下：

组合 Rh 血型

++ +

+- +

-- -

再注意字符串处理的细节就行了。

【时空复杂度】

时间复杂度 $O((3^2 \cdot 2^2)^3)$

空间复杂度 $O(1)$

ACM World Finals 2012

Problem E Infiltration

【题目大意】

给定一个有向完全图，我们定义一个点所控制的点是它自己和它直接指向的点，求出选择至少多少个点才能控制所有点。

【数据范围】

点的个数 $n \leq 75$ 。

【算法讨论】

这道题我们用到了枚举和图论两方面的知识。

首先我们要先知道一个结论：对于一个点数为 n 的有向完全图，至少存在一个点其点的出度 $\geq n/2$ 。我们使用反证法可以证明：若所有点出度都小于 $n/2$ ，则总边数 $\leq n \cdot (n/2 - 1)$ ，而总边数对于一个完全图来说有 $n \cdot (n-1)/2$ ，显然不论 n 为奇数还是偶数前者都小于后者（这里的除法都取下整）。

因此我们每次都可以找到一个点其控制点个数至少为 $n/2 + 1$ ，而本题中 $n \leq 75$ ，我们每次删掉一个控制点最多的点其所有的控制点和有关的边，直到全部删光：第一次删 $75/2 + 1 = 38$ 个，还剩 $75 - 38 = 37$ 个；第二次删 19 个；第三次删 10 个；第四次删 5 个；第 5 次删 2 个；第 6 次删掉最后 1 个。由此得出答案不会超过 6。

我们可以先枚举至多选 5 个点的情况，有解就输出最优的，否则按上述步骤操作必然可以得到一个选 6 个点的方案，在判断答案是否合法的时候我们压位记录状态并用位运算处理即可省下一个 $O(n)$ 的循环了。

6 个点只是理论的上界，实际构造中极难构造出，我便没有出答案为 6 的数据。

【时空复杂度】

时间复杂度 $O(C(n, 5))$

空间复杂度 $O(n^2)$