

Ciel and Earthquake 解题报告

绍兴市第一中学 王文涛

试题来源

CodeChef MARCH12 CIELQUAK

试题大意

给定一张 $R \times C$ 的网格图，第 r 行第 c 列的点记为 (r, c) ， (r_1, c_1) 和 (r_2, c_2) 间有边相连当且仅当 $|r_1 - r_2| + |c_1 - c_2| = 1$ 。每条边有 p 的概率毁坏。求 $(1, 1)$ 与 (R, C) 连通的概率。你的答案绝对误差不能超过 10^{-6} 。

数据范围：

$$1 \leq T \leq 50$$

$$1 \leq R \leq 8$$

$$1 \leq C \leq 10^{18}$$

$$0.1 \leq p \leq 1$$

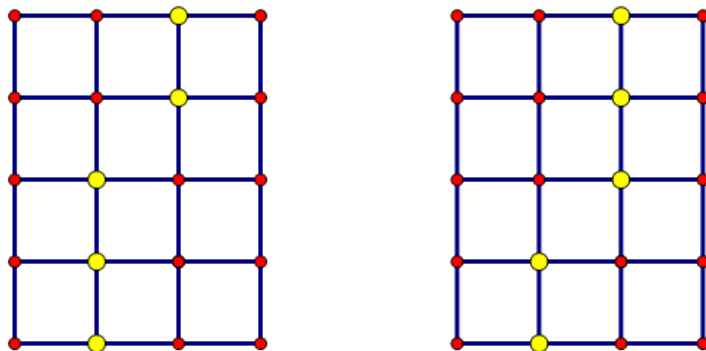
p 小数点后最多四位。

时间限制：CodeChef上的8s

算法介绍

算法1

首先我们考虑 C 较小的情况，比如我们假设 $C \leq 50$ 。然后就可以DP了。



我们可以用类似插头DP的方法。处理到某一点 (r, c) 时，DP 状态应记录点 $(1, c), (2, c), \dots, (r-2, c), (r-1, c), (r, c-1), (r+1, c-1), \dots, (R-1, c-1), (R, c-1)$ 以及点 $(1, 1)$ 之间的连通情况。记录连通性通常使用最小表示法。我们可以预处理从初始状态向外搜索出的所有可达的合法状态以及这些状态之间的转移。 $(1, 1)$ 与其他点都不连通的状态是非法的。经验证，当 $R = 8$ 时状态数（设为 S ）为3432。

算法2

当状态数较少时，我们还可以预处理每相邻两列之间的转移，用矩阵乘法加速这个转移。这样做的时间复杂度是 $O(T \times S^3 \log M)$ ，只能处理 $R \leq 5$ 的数据。

最终算法

设 $X(R, C, p)$ 为长为 R 、宽为 C 且概率为 p 时的答案。通过打表等手段可以发现，当 R 固定时，随着 C 趋向于无穷大， $\frac{X(R, C+1, p)}{X(R, C, p)}$ 趋向于一个常数。由此，我们可以采用这样的方法估计答案：取一个足够大的 C' ，DP计算到 C' 处，把 $X(R, C', p) \times (\frac{X(R, C'+1, p)}{X(R, C', p)})^{C-C'}$ 作为估计值。经过实验验证，当 C' 取40到50时精度就够了。这种做法的时间复杂度是 $O(T \times SRC')$ ，可以通过本题。

那么，为什么 $\frac{X(R, C+1, p)}{X(R, C, p)}$ 会收敛呢？考虑到这个问题与马尔可夫链十分相似，而满足某些特定条件的马尔可夫链是收敛的。严格证明要用到Perron-Frobenius定理。

参考[Markov chain – Wikipedia](#)和[Perron – Frobenius theorem – Wikipedia](#)。