FLYDIST解题报告

袁伟强

November 10, 2015

1 题目描述

给一个N个点M条边的带权无向图，每条边的边权为W_i。为了使每条边的边权为这条边两个端点的最短路长度，可以将每条边的权值改变（增加或减少）$D_i(D_i \in Q)$。求$\sum_{i=1}^{M} D_i$的最小值。结果用分数表示。

$N \le 10, M \le 45, 1 \le W_i \le 20, W_i \in Z$

2 算法讨论

2.1 线性规划

容易发现，一般的搜索、动态规划、网络流等算法是很难解决这一问题的。然而，我们对于题目所给的条件很容易列出一些不等式约束，并求一个式子的最值，这让我们想到建立线性规划模型。

对于每条边，我们建立两个变量d_i^+, d_i^-。设$g_{i,j}$为i和j之间的最短路，那么$\forall x_k = i$，有$g_{i,j} \le W_k + d_k^+ - d_k^- + g_{y_k,j}$，相似地，$\forall y_k = i$，有$g_{i,j} \le W_k + d_k^+ - d_k^- + g_{x_k,j}$。特别地，$g_{i,i} = 0$。另外，经过改变后，每条边的长度大于0，所以有$W_i + d_i^+ - d_i^- > 0$。最后，我们要最小化$\sum_{i=1}^{M} d_i^+ + d_i^-$。

2.2 初始可行解

解决线性规划问题的最常用算法是单纯形算法。

我们将构建的模型转化为松弛型，非基变量包括$d_k^+, d_k^-, g_{i,j}$。单纯形算法需要令所有非基变量初始均为0，但在我们刚刚构建的模型中，如果令所有非基变量等于0，显然是不满足不等式约束的。

解决方法也很简单，我们只需将每一个变量进行相应的代换。如果，令所有边的初始边长都相等，显然是一组可行解。另外，每个变量还需要满足原来的非负约束。设$h_{i,j}$ 为从i 到j 最少需要经过多少条边。那么，$g_{i,j} \le 20h_{i,j}$。 设$g'_{i,j} = 20h_{i,j} - g_{i,j}$，用$20h_{i,j} - g'_{i,j}$取代$g_{i,j}$，于是初始可行解满足所有的边长均为20。设$d_i'^+ = 19 - d_i^+, d_i'^- = W_i - 1 - d_i^-$，分别用$19 - d_i'^+, W_i - 1 - d_i'^-$取代$d_i^+, d_i^-$。因为对于最优解，必然有$d_i^+ \le 19, d_i^- \le W_i - 1$，所以这样代换也是满足非负约束的。另一方面，我们要增加约束，$d_i'^+ \le 19, d_i'^- \le W_i - 1$，这样，原来的约束$W_i + d_i^+ - d_i^- > 0$ 也就自然满足了。

2.3 具体实现

虽然最后结果需要用分数表示，但自定义分数类进行运算效率较低，所以在单纯形的过程中我们用实数进行运算，最后再将实数转成分数。

将实数转成分数也很简单，枚举分母，然后判断分子是不是整数，可以很快找到解。