简要题意:

给定一个整数 0 < N < 360 描述一个角度,你的任务是判断能否用尺规作图将其 N 等分成 $N \land 1$ 度的角,如果可能,你还得输出具体操作。

简要题解:

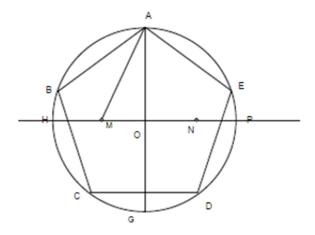
一开始,我们将先给出一个定理,即当 n 为 3 的倍数时,一定不能将其 n 等分。首先,仅仅用尺规来三等分一个角度,是数学界中的难题,这里我们默认无法三等分。假设能将一个角度 3k 等分,那么我们显然也求出了它的三等分点。因此当 n 为 3 的倍数时,它无法被 n 等分。

基于这个定理。

我们先构造出一个 60 度的角,一个显然的结论是,正三角形三个内角为 60 度。 于是我们的问题转换成了求一个正三角形。

具体做法可以这么做:

- 1、将 A 作为圆心,做半径为 AB 的圆。
- 2、将 B 作为圆心,做半径为 AB 的圆。
- 3、设两个圆的交点为 C,那么△ABC 即为正三角形。其中可以利用∠CAB=60°。接下来,我们构造一个 108 度的角,显然的,正五边形三个内角为 108 度。对于这个问题,仅仅通过文字可能不那么显然。



这里的操作步骤如下:

- 1、作两条互相垂直的线, AG 与 PH。在本题中可以通过原来已知的线 AB, 作一条中垂 线来得到这个互相垂直的线。
- 2、取 OH 的中点 M, 这里同样作中垂线可以得到。
- 3、以 M 为圆心, AM 为半径作弧交 OP 于点 N。
- 4、在圆上以 A 为起点,AN 为半径,作圆交于点 E,那么 AE 即为正五边形中的其中一边。
- 5、依次作 AE,ED,DC,CB,BA 即可。

注意的是作中垂线是一项十分重要的工具。

假如需要做 AB 的中垂线, 我们可以这么作:

- 1、以 A 为圆心, AB 为半径作圆。
- 2、以B为圆心,AB为半径作圆。
- 3、连接两个圆的交点,即为 AB 的中垂线。

这样之后,我们就得到了一个60度与一个108度的角。

将两个角相减,再作4次角平分线,即可获得3度的角。

作角平分线的过程应当在初中数学里出现过,这里不再阐述。

那么接下来的问题是, 当 n%3=1 与 n%3=2 时, 怎么 n 等分这个角呢。

根据这个 3 度角,每次复制,我们可以得到 3,6,9...的角,也可以获得 n-3,n-6,n-9...的角通过这两个操作,我们可以很明显的发现,对于两个相邻的已知角,它们的角度差至多为 2。因此我们可以通过再求一次角平分线,来得到 1 度角。

这样我们就完成了这个题目。

一个更加优美的解法是,当我们得到 n-1 度角时,仅仅需要将这个 1 度角拷贝 n 份,即可将这个 n 度角 n 等分。如果获得的是 n-2 度角,那么可以通过一次求角平分线,来得到 n-1 度角。