Shortest Circuit Evaluation 解题报告

张坤

1、题目大意

布尔型表达式满足短路运算原理，及某个表达式已经得到结果，则不再计算。

现在给出布尔型表达式，和每个变量(只出现一次)为 true 的概率，调整布尔型表达式的顺序，使得期望的计算次数(使用变量的次数)最少，求期望概率。

本题数据规定将表达式化简后与原表达式相比无实质影响。

2、算法讨论

我们可以将表达式建成一颗树的结构。因为规定将表达式化简后与原表达式相比无实质影响,可以将 not (A and B and C)展开成 not A or not B or not C，将 not (A or B or C) 展开成 not A and not B and C,当然也可以选择不展开，并无影响。

实际上题目中的调换只能是...and...and...连接的对象或是...or...or...连接的对象。对于每一个变量或是表达式，我们记录其正确的概率 P 和期望计算次数 E。

我们先考虑 and 依次连接的对象 $A_1, A_2, A_3, A_4 ......, A_t$。

$P = \prod_{i=1}^{t} P[A_i]$，不受排列次序影响。

$E = \sum_{i=1}^{t} (E[A_i] \times \prod_{j=1}^{i-1} P[A_j])$。

令 x，y 为相邻的两项(x<y)，则交换顺序后的：

$$E' = \sum_{i=1}^{x-1} (E[A_i] \times \prod_{j=1}^{i-1} P[A_j]) + \sum_{i=y+1}^{t} (E[A_i] \times \prod_{j=1}^{i-1} P[A_j]) + (E[A_y] + E[A_x] \times P[A_y]) \times \prod_{j=1}^{x-1} P[A_j]$$

$$E \,?\, E'$$

$$\Leftrightarrow (E[A_x] + E[A_y] \times P[A_x]) \times \prod_{j=1}^{x-1} P[A_j] \,?\, (E[A_y] + E[A_x] \times P[A_y]) \times \prod_{j=1}^{x-1} P[A_j]$$

$$\Leftrightarrow E[A_x] + E[A_y] \times P[A_x] \,?\, E[A_y] + E[A_x] \times P[A_y]$$

$$\Leftrightarrow E[A_x] \times (1 - P[A_y]) \,?\, E[A_y] \times (1 - P[A_x])$$

$$\Leftrightarrow \frac{E[A_x]}{(1 - P[A_x])} \,?\, \frac{E[A_y]}{(1 - P[A_y])}$$

所以 and 连接各对象以 $\frac{E[A_x]}{(1 - P[A_x])}$ 从小到大排序即可，or 与之类似，遇到 not 仅将 P 变为 1-P 即可。变量名称可以用 Hash 处理。

时间复杂度为 $O(n)$。