

CodeChef JULY11 YALOP 解题报告

宁波市镇海蛟川书院周诚驰

October 6,2015

1 题目大意

给出一个 $N * M$ 的全白方格图, 你需要在某些方格中填入黑色, 并满足如下条件: 1. 黑色方格是四连通的。2. 不存在回路, 即不存在这样的一组黑色方格 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, n > 3$, 满足 $X_1 = X_n$, 且对于任意 $k, 1 \leq k < n$, X_k 和 X_{k+1} 相邻。

数据规模:

$$T \leq 30$$

$$N, M \leq 100$$

2 算法讨论

问题就是在方格图种放入一棵树, 使得树的节点最小。

首先可以得到一个比较暴力的做法, 随机一个点, 以这个点为根向外延伸从而生成这棵树。可以多次随机取最优值, 但这样的做法无法得到很好的据结果。

考虑构造, 用 V 表示树的节点数, E 表示树的边数。如果把方格全染黑, 那么

$$V = N * M$$

$$E = N * (M - 1) + M * (N - 1)$$

而这显然是不合法的。我们需要让其中 K 个格子回到白色。用简单的容斥可以得到

$$V = N * M - K$$

$$E = N * (M - 1) + M * (N - 1) - 4K + Border + 2Corner + Neigh$$

其中 $Border$ 表示在边界上的白格个数, $Corner$ 表示在角落的白格个数, $Neigh$ 表示相邻白格对数。而对于树而言, $V = E + 1$, 可以得到

$$K = \frac{(N - 1) * (M - 1) + Border + 2Corner + Neigh}{3}$$

为了让白格最多, 也就是 K 最少, 就需要让 $Border + 2Corner + Neigh$ 最小。那么基本的想法就是构造出一组较为优的解, 并根据 N 、 M 的情况在局部进行微调。

这里给出一个基本解:

```
#####  
#.#.#.#.  
##.#.#.#  
#####  
##.#.#.#  
#.#.#.#.  
#####  
#.#.#.#.  
##.#.#.#  
#####
```

可以发现遵循这种填充方式在一些情况会出现不连通，需要进行调整使其连通。

3 时空复杂度

时间复杂度在各种做法中是不同的。对于构造而言,时间复杂度为 $O(N \times M)$ 。