

# IOI2014 中国国家集训队作业 试题准备

周子凯

## 试题概览

1. [2010K Paperweight](#).....2
2. [2005J Zones](#).....4
3. [1998G Spatial Structure](#).....5

## ACM/ICPC World Finals 2010

## Problem K Paperweight

## 解题报告

## 题目大意

两个四面体拥有一个公共面,拼成一个六面体纸镇,纸镇内部有一块芯片,视为一个点。给出六面体顶点和芯片的坐标,求出当纸镇“平稳”地放在地面上时,芯片离地面的最近和最远距离。“平稳”指纸镇的重心从原位置向任意方向移动 0.2 个单位长度后,整个纸镇仍然保持静止。

## 算法讨论

因为至少有 3 个顶点接触地面,所以可以枚举哪 3 个点一定在地面上。此时判断是否有第 4 个点也在地面上,若没有,则需判断另外 2 个点是否在这 3 个点构成的平面的同侧。重心会在一个球面上任意移动,投影到地面上是一个半径为 0.2 的圆。判断一种放置方法是否“平稳”,需要判断整个圆是否都在地面上的顶点构成的凸包内,即:先判断圆心是否落在凸包内,再判断圆心到凸包每条边的距离是否都不小于 0.2。

纸镇是由两个四面体 DABC 和 EABC 拼成的,设点 A 的坐标表示为 $(A_x, A_y, A_z)$ ,则四面体 DABC 的重心的 x 坐标  $G_{1x} = \frac{A_x + B_x + C_x + D_x}{4}$ , y, z 坐标类似; 设四面体 EABC 的重心为  $G_2$ , 整个纸镇的重心的 x 坐标  $G_x = \frac{V_{DABC} \times G_{1x} + V_{EABC} \times G_{2x}}{V_{DABC} + V_{EABC}}$ , y, z 坐标类似。

本题中可以利用三维向量的混合积,判断点在平面的哪一侧,判断点是否在已知平面上,求四面体的体积等。

设  $OA=(x_1, y_1, z_1), OB=(x_2, y_2, z_2), OC=(x_3, y_3, z_3)$ ,  $OA, OB, OC$  的混合积 (记为  $[OA \ OB \ OC]$ ) 等于  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 。

四面体 OABC 的体积  $V_{OABC} = \frac{1}{6} \times |[OA \ OB \ OC]|$ 。

O, P 两点在平面 ABC 的异面等价于  $[OA \ OB \ OC]$  与  $[PA \ PB \ PC]$  异号。

求点 O 到平面 ABC 的垂足 H 的坐标, 可根据以下条件联立方程组求解:

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AC \\ V_{HABC} = 0 \end{cases}$$

点 O 到平面 ABC 的距离 =  $\frac{3 \times V_{OABC}}{S_{\triangle ABC}}$ , 其中  $S_{\triangle ABC}$  可用海伦公式求解。

点 O 到直线 AB 的距离 =  $\frac{2 \times S_{\triangle OAB}}{AB}$ 。

### 时空复杂度

时间复杂度:  $O(1)$

空间复杂度:  $O(1)$

## ACM/ICPC World Finals 2005

**Problem J Zones****解题报告****题目大意**

有  $n$  ( $n \leq 20$ ) 座服务塔,  $n+m$  ( $m \leq 10$ ) 个区域, 每座服务塔可以覆盖若干指定区域, 每个区域有各自的收益。要求选恰好  $k$  座塔, 使得被覆盖的区域收益和最大。

**算法讨论**

鉴于数据范围较小, 可以用搜索的算法解决此题。预处理每座服务塔控制哪几个区域, 搜索选择哪几座塔, 取最优方案即可。

**时空复杂度**

时间复杂度:  $O(2^n * m)$

空间复杂度:  $O(n+m)$

## ACM/ICPC World Finals 1998

## Problem G Spatial Structures

## 解题报告

## 题目大意

一张黑白图片可以用 01 矩阵表示也可以用一棵四分树表示，写一个程序实现图片表示的两种形式之间的转换。

四分树中，若一个节点对应区域是全黑或全白的，则这个节点标记上黑色或白色，且不再分割，否则将这个区域分成四个等大的子区域，对应这个节点的四个子节点，重复此过程。一棵四分树是用根节点到所有黑色叶子节点的路径的序列来表示的。若将一个区域分出的左上、右上、左下、右下四个区域依次记为 1 至 4，则一条根到叶子节点的路径用一个低位对应根、高位对应子节点的五进制数表示，但输入输出时仍采用十进制。

图片的边长  $n \leq 64$ ，且一定是 2 的幂。

## 算法讨论

对于 01 矩阵转四分树的情况，先预处理  $sum[i][j]$  表示 (1,1) 到 (i,j) 组成的矩阵的数字和，用于之后快速求出一个矩形区域内所有元素的和。处理一个区域时，若发现这个区域内的数字和等于区域内的元素个数，则说明这是一个全黑的区域，无需继续分割；若区域内数字和等于 0，说明这是一个全白的区域，也无需继续分割；否则递归处理四个子区域，最后将所有黑色子节点的路径用五进制表示后排序输出。

对于四分树转 01 矩阵的情况，我们把给出的十进制数转成五进制数，就可以知道这条路径对应的是哪个区域，将它全部染黑，最后就能得到整个 01 矩阵。

## 时空复杂度

时间复杂度:  $O(n^2 \log n)$

空间复杂度:  $O(n^2)$