

# Museum 解题报告

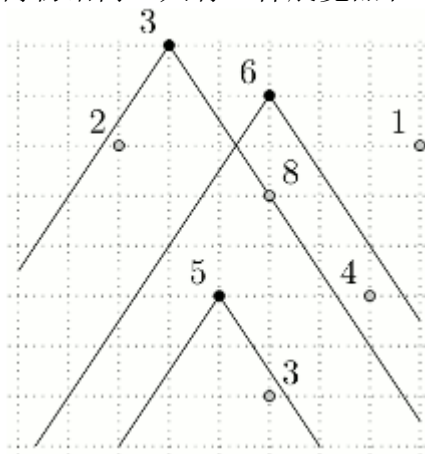
长郡中学 陈胤伯

## 1 试题来源

<http://main.edu.pl/en/archive/pa/2014/muz>

## 2 试题大意

你打算潜入一个博物馆盗窃里面的展览品。  
博物馆内一共有  $n$  件展览品和  $m$  个警卫。



第  $i$  件展览品坐标  $(ax_i, ay_i)$ ，价值  $av_i$ 。

第  $i$  个警卫坐标  $(bx_i, by_i)$ ，你可以花  $bv_i$  的价格收买他，让他放弃安保工作。

每个警卫都面朝  $Y$  轴负方向，左右视角都为  $\theta$ 。如果某个展览品被某个你未收买的警卫监视着，那将无法盗取该展览品。

问你该如何收买警卫，使得总收益（盗取的总价值-收买的总支出）最大。

$1 \leq n, m \leq 200000$ ， $-10^9 \leq \text{坐标范围} \leq 10^9$ 。

### 3 算法介绍

#### 3.1 最小割建模

把所有的展览品价值全部加进答案，考虑最小化失去的收益。

建立源汇  $S, T$ ，每个警卫建一个点  $b_i$ ，每个展览品建一个点  $a_i$ 。

$S$  向  $b_i$  连  $bv_i$  的边，割掉该边表示收买这个警卫。

$a_i$  向  $T$  连  $av_i$  的边，割掉该边表示放弃这个展览品。

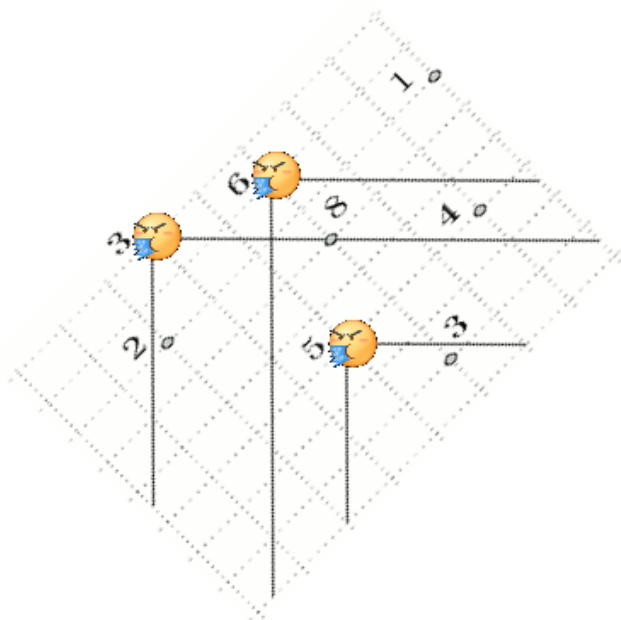
如果警卫  $i$  能监视到展览品  $j$ ，就从  $b_i$  向  $a_j$  连一条  $+\infty$  的边，表示要么收买警卫  $i$ ，要么得放弃展览品  $j$ 。

这样复杂度是  $O(\maxflow(n + m, nm))$  的。

#### 3.2 用贪心来解决

由于最小割等于最大流，我们可以把题面转化成另一个模型：警卫  $i$  存了  $bv_i$  的水，展览品  $i$  可以容纳  $av_i$  的水，每个警卫可以把水喷到自己视野范围内的展览品里，最大化喷的总水量。

方便起见，我们不妨把坐标系“左右拉伸一下”，使得每个警卫的视角成为一个直角，然后旋转坐标系45度，变成这个样子：



我们把这个问题“决策化”一下，即把所有警卫和物品按  $x$  从大到小依次加入，然后决策每个警卫该如何喷水。

于是有如下几种事件：

1. 来了一个有  $bv_i$  水的警卫，可以喷给  $Y$  坐标不超过  $by_i$  的所有展览品水。
2. 加入一个  $Y$  坐标为  $ay_i$  的容量为  $av_i$  的新展览品。

我们需要决策的是情况1该如何喷水。由于每个警卫是能喷给  $Y$  不超过某个值的展览品，这意味着  $Y$  坐标越小的展览品越有机会得到浇灌，所以一个贪心的做法是，当来了一个警卫时，他从自己能喷到的展览品里按  $Y$  从大到小依次喷满，直到自己没水了或者展览品都满了。

要实现这个贪心，只需要扫描时用以  $Y$  为关键字的平衡树维护当前所有展览品，来了警卫就找到他能喷到的  $Y$  最大的展览品然后一个个喷下去。每次插入展览品  $O(\log n)$ ；每次警卫喷水，要么水喷光了结束喷水，要么被喷的展览品水满了于是被从平衡树中删除。因此总时间复杂度  $O(n \log n + m \log n)$ 。

回到原问题，用展览品价值和减去“最大喷水量”即为答案。