

旅行 解题报告

杭州学军中学 金策

1 试题来源

原创题，用于2014年某次校内模拟赛。

2 试题大意

给定一个 n 个点， m 条边的无向图，第 i 条边连接 u_i, v_i ，长度为 t_i 。

共有 q 个询问，每次给出 x, y, K ，求出点 x 到点 y 的路径长度模 K 后的值的最小值，路径允许经过重复的边和点。如果不存在 x 到 y 的路径则输出NIE。

3 数据规模

各部分分的规模请参阅原题面。

对于所有数据， $n, m, q \leq 50000, 1 \leq t_i \leq 10^9, 2 \leq K \leq 10^9$ ，没有重边或自环。

4 算法介绍

4.1 算法一

当 K 为奇数时，如果 x 到 y 连通，我们可以任取一条从 x 到 y 的路径，总路程为 d ，我们沿着这条路来回走， $x \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow \dots$ ，可以看出每次到达 y 点时，已走过的路程是一个任意正奇数乘上 d 。所以我们可以走 Kd 的总路程后到达 y ，这时路径长度是 $Kd \bmod K = 0$ ，是最小值。

为了判断两点是否连通，可以使用并查集数据结构，也可以使用图遍历算法预处理。

时间复杂度是 $O(n + m + q)$ 。

可以解决测试点1 ~ 4，获得20分。

4.2 算法二

测试点5 ~ 9中 K 的值为2，且所有边的长度都是1。

我们首先对每个连通分量分开考虑。

如果这个连通分量不是二分图，那么存在一个奇数长度的环 C 。我们任取一个 x 到 y 的路径，并强制它经过 C 上的某个点 u 。如果路径长度为偶数，那么已经找到了一个答案为0的解；否则我们在路径中从 u 点开始绕 C 一圈，也能得到一个答案为0的解。

如果这个连通分量是二分图，则可以对顶点黑白染色。易知每走过一条边，当前的顶点颜色会改变一次。所以 x, y 同色时路径长度为偶数，答案为0；异色时路径长度为奇数，答案为1。

判断一个连通分量是否为二分图可以用简单的图遍历算法，或者并查集。

时间复杂度是 $O(n + m + q)$ 。

结合算法一，可以获得45分。

4.3 算法三

测试点10 ~ 14中 K 的值比较小。可以考虑动态规划算法。

对于每个询问 (x, y, K) ，用布尔数组 $f[i][j]$ 表示从 x 出发，到达了 i 点，当前走过的路径长度模 K 的余数为 j 是否可行。

转移的时候就是用 $f[u][j]$ 去更新 $f[v][(j + w(u, v)) \bmod K]$ 的值。这个DP可以使用一个简单的BFS实现。

总时间复杂度是 $O(q(n + m)K)$ ，结合算法一可以获得70分。

4.4 算法四

最后几个测试点并没有什么特殊性质。我们需要研究通用算法。

仍然对每个连通分量分别考虑。

设这个连通分量中的所有边的长度分别是 t_1, t_2, \dots, t_e 。

令 $d = \gcd(t_1, t_2, \dots, t_e, K)$ ，则容易看出最后的答案一定是 d 的倍数。因为我们可以把所有 t_i 和 K 值都除以 d ，最后答案再乘以 d 。所以现在不妨设 $d = \gcd(t_1, t_2, \dots, t_e, K) = 1$ 。

如果现在 K 是奇数，那么仿照算法一中的分析，可以证明答案是 0。

现在讨论 K 是偶数的情形。考虑利用 $\gcd(t_1, t_2, \dots, t_e, K) = 1$ 的性质，任找一条回路，使得它经过了所有边至少一次（于是也经过了所有点）。可以适当修改这条回路，任选一条边 t_i ，在回路中某一处来回走一遍 t_i ，于是总路程增加了 $2t_i$ 。

根据熟知的数论知识，存在非负整数 k_1, \dots, k_e ，使得 $k_1 t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_e t_e \bmod K = 1$ 。于是我们可以用上面的方法构造一条经过了所有边的回路 C ，使得它的总长度 $\bmod K = 2$ 。

这时候我们仿照算法二中的分析，如果此连通分量中存在一个奇数长度的环 D ，我们可以通过不断地将 C 接到 D 中，得到 D' ，且 D' 的长度 $\bmod K = 1$ 。这时任取一条 x 到 y 的路径，并不断往里面接入 D' ，一定能使答案为 0。

如果不存在奇数长度的环，那么我们也可以对顶点黑白染色，满足：如果边 (u, v) 的长度为奇数，则 u, v 异色；否则 u, v 同色。于是同色点间的路径长度是偶数，异色点间的路径长度是奇数，我们可以不断地把环 C 接入，使得最后的答案为 0（偶数）或者 1（奇数）。这显然是最小答案了，最后不要忘记乘上 d 再输出。

总时间复杂度是 $O(n + (m + q) \log K)$ ，可以获得 100 分。

5 总结

这道题的定位是一道 NOI 第二天第一题难度的题目。它考察了基本的图连通性判断、二分图判断，以及数论中最大公约数相关的小结论，同时需要选手对各种情况进行详尽的讨论和分析。虽然难度不大，但也能视作一个比较有营养的题。