

# 胡策的数列 解题报告

长沙市一中 张天扬

## 1 试题大意

令  $s_0 = T$ ，对于  $i > 1$ ，有  $25s_i + 20s_{i-1} = 12s_{i-2}$ 。且对  $i \geq 0$  有  $s_i > 0$ 。

维护一个数列  $a_i$ ，支持：

1. 考虑当  $T = t$  时，对  $l \leq i \leq r$ ，执行  $a_i = s_{i-l+p}$ 。

2. 询问  $\sum_{i=l}^r a_i$ 。答案对  $10^9 + 9$  取模。

强制在线。空间限制  $64MB$ 。

## 2 输入格式

第一行两个整数  $n, m$ 。分别表示  $a$  的长度和操作个数。

接下来  $m$  行，每行描述一个操作。每行的第一个整数  $type$  描述了操作的类型， $type = 1$  表示是修改操作， $type = 2$  表示是询问操作。

如果是修改操作，接下来有四个整数  $l, r, t, p$ ，意义如上所述。

如果是询问操作，接下来有两个整数  $l, r$ ，意义如上所述。

为了体现实在线，实际的  $l, r$  为输入的  $l, r$  对  $lastans$  取异或后的答案。 $lastans$  表示上一次询问操作的答案，初始为 0。

## 3 输出格式

对每个询问操作输出一行，表示询问的答案。

## 4 数据范围

对于 20% 的数据， $n, m \leq 1000$ 。

对于50%的数据,  $n, m \leq 30000$ 。

对于100%的数据,  $1 \leq n \leq 10^9$ ,  $1 \leq m \leq 10^5$ ,  $1 \leq t \leq 10^9$ ,  $1 \leq p \leq 10^9$ ,  $1 \leq l \leq r \leq n$ 。

## 5 算法介绍

### 5.1 $s$ 数列是什么

题目中所给的 $s$ 数列缺失了 $s_1$ , 无法直接推出后面的项。但是给出了另一个条件:  $s_i > 0$ 。我们考虑如何用这个条件得出 $s$ 数列。

考虑 $s$ 数列递推式 $25s_i + 20s_{i-1} = 12s_{i-2}$ 的特征方程:  $25x^2 + 20x - 12 = 0$ 。

容易解得 $x_1 = \frac{2}{5}$ ,  $x_2 = -\frac{6}{5}$ 。那么设:

$$s_i = T(A(\frac{2}{5})^i + B(-\frac{6}{5})^i)$$

注意到 $s_i > 0$ 。那么有:

$$A(\frac{2}{5})^i + B(-\frac{6}{5})^i > 0$$

分情况讨论。当 $i$ 是偶数时: 有:

$$A(\frac{1}{3})^i + B > 0$$

令 $i \rightarrow \infty$ , 易知 $B \geq 0$ 。

当 $i$ 是奇数时, 有:

$$-A(\frac{1}{3})^i + B < 0$$

令 $i \rightarrow \infty$ , 易知 $B \leq 0$ 。

那么就有 $B = 0$ 。又 $s_0 = T$ , 那么 $s_i = T(\frac{2}{5})^i$ 。

也就是说,  $s_i$ 是一个等比数列。

### 5.2 算法一

直接暴力模拟操作。

复杂度 $O(nm)$ , 期望得分20分。

### 5.3 算法二

考虑使用线段树维护。

线段树上每个节点维护区间内等比数列的初项与和即可。

因为求一个节点的和的复杂度为 $O(\log v)$ ，整体复杂度为 $O(m \log n \log v)$ 。

因为要打标记和要取模的原因常数很大，我写的代码只能跑出 $n, m \leq 30000$ 的数据。

期望得分50分。

### 5.4 算法三

考虑优化线段树。

我们将 $n$ 变为比它大的第一个2的幂次。那么线段树上每个节点的长度都是2的幂次。

于是我们只需要预先算出 $(\frac{2}{3})^{2^k}$ ，再使用一些技巧就可以做到 $O(1)$ 的计算一个节点。

复杂度 $O(m(\log n + \log v))$ ，但是空间是 $O(m \log n)$ 的，仍然只能通过50分的数据。

### 5.5 算法四

考虑使用平衡树维护。

平衡树上每一个节点维护一个区间，区间内是一个等比数列。

那么当我们插入一个区间的时候，有可能出现以下两种情况：

1. 新区间被一个原区间包含。那么我们将原区间分裂，然后插入新区间。
2. 新区间没有被包含，那么至多有两个原来的区间和新区间有交，将它们的信息修改一下。有的原区间被新区间包含，它们可以直接删掉。然后插入新区间。

那么每次插入计算的区间个数是 $O(1)$ 的，总复杂度是 $O(m(\log n + \log v))$ 。空间是 $O(m)$ 的。

期望得分100分。

## 6 得分预测

本题是一道NOI中难度较低的题目。

集训队中，预计会有6 – 7人获得100分，5 – 6人获得50分。