Cellular Automaton 解题报告

浙江省镇海中学 杜瑜皓

1 试题来源

Open Cup 2014-15 Grand Prix of Japan Problem E[1] by rng_58

2 试题大意

令w是一个正整数，p是一个长为2^{2w+1}的01串，那么(w, p)细胞自动机有如下的定义：

所有的细胞在一个无限长的一维空间上。每个细胞有两种状态0或1。在时间0，可以选择有限个格子，将其的状态设为1，其他都为0。

令$f(t, x)$表示细胞x在时间$t(t > 0)$的状态，那么$f(t, x)$由$f(t-1, x-w), \cdots, f(t-1, x+w)$决定，$f(t, x) = p[\sum_{i=-w}^{w} 2^{w+i} f(t-1, x+i)]$。

一个好的细胞自动机被定义为无论怎么设置初始状态，状态中1的个数都一直不会变。

给定w和s，求字典序最小的字符串p，其中$s \le p$，并且(w, p)细胞自动机是好的细胞自动机。

规定$1 \le w \le 3$。

3 算法介绍

首先当$w = 2$时，总共有2^{32}种不同的p串，所以可以枚举然后随机初始状态检测，并且打表。因为可行方案并不多，只有428种。

[1]据我所知这套题没有公布在网络上

同时可以考虑一些剪枝，比如自动机状态为5位一循环的串，假设为10101，那么对那个循环内的串有$p_{10101} + p_{01011} + p_{10110} + p_{01101} + p_{11010} = 3$，这样状态量就能减少很多。可以很快搜出来。

但对于$w = 3$的情况是不可行的，因为可行的答案实在太多。

首先考虑如何判断一个自动机是好的。不妨考虑$w = 2$，即5位的怎么判断，$w = 3$同理。容易发现对于每个状态1的个数一直都不变等价于所有状态经过一次变换后1的个数不变。构造一个2^5个结点的图。记S表示当前串末5位为S的状态，考虑后面接上1或者接上0，转移到$(S * 2 + 0) \bmod 32$和$(S * 2 + 1) \bmod 32$这两个状态。那么新的串中会增加p_S个1。如果转移到$(S * 2 + 0) \bmod 32$，那么原串中减少0个1，否则减少1个1。

考虑一个状态，因为1的个数有限，就是一个点从0号点开始，然后使用一个计数器，随着转移加上对应的点权和边权，最后回到0号点。其中1的变化次数为最后计数器的值。

为了方便，将每个点拆点，S向S'连一条p_S的边，然后S'向$(S * 2 + 0) \bmod 32$和$(S * 2 + 1) \bmod 32$分别连权值为0和1的边。

这样问题就转化成为了从0号点回到0号点任意一条路径上的边权和为0。

这就等价于每个点有个编号，并且满足$d_v = d_u + w_{u,v}$。这样只要遍历这个图，判断编号是否满足条件即可。

接下来就要解决字典序最小的问题，考虑dfs算法，只要判断一个前缀确定的情况下是否有一个可行的方案。

在这个图中，如果p_S确定，那么有$d_{S'} = d_S + p_S$，否则有$0 \le d_{S'} - d_S \le 1$。

所以可以使用差分约束解决，解一定是整数。

时间复杂度$O((2^{2w+1})^3)$。

4 总结

这是一个很难的题，从细胞自动机转化到一个有限自动机变成图论问题，再使用差分约束解决。

尤其是最后一步，看上去是个很简单的差分约束，但是在经过前面的大量思考后，往往这一步会被忽略。

当时在比赛中只有两个队伍做出了这个题，中国和俄罗斯各一个。我在比赛中花了很长的时间，最后还是解决了这个题。