

Colored Domino Tilings and Cuts 解题报告

中山市第一中学 梁景涛

1 简要题意

构造一个 $N \times M$ ($N, M \leq 500$) 的棋盘覆盖，使得棋盘的割尽量少，此前提下让染色数尽量少。

2 解题思路

首先，排除 NM 是奇数的情况——这种情况一定无解，否则一定有解。

接下来的讨论中我们都假定 $N \leq M$ 。

我们先分情况讨论：

$N=1, M=2k$

这种情况很明显只能有一种方案。

割数= $k-1$ 。

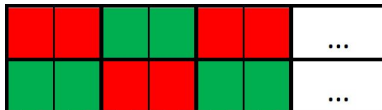
当 $M=2$ 是染色数=1，否则染色数=2。



$N=2, M=2k$

割数= k

染色数=2



$N=2, M=2k+1$

割数= k

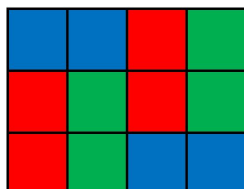
染色数=3



$N=3, M=4$

割数=1

染色数=3



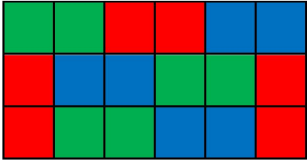
$N=3, M=2k(k>2)$

割数=1

染色数=3

我们这样放牌：

对于第一列，如果三行都横着放，那么肯定会有一条割线。所以必须要有一个竖着放。为了防止产生割线，第二列也必须再放两个横着的，以此类推。最后产生一条不可避免的割线。

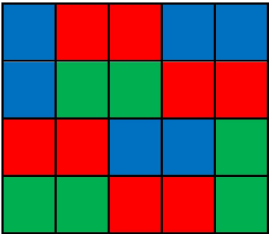


N=4,M=2k+1

割数=1.

染色数=3

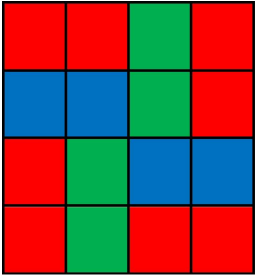
和上面的类似，第一列，为了防止出现割线，我们不能全放横的，也不能全放竖的，所以就只放一个竖的，这里举的是放上面的例子，其实放中间也是可以的。依次放下去，出现了一个无可避免的割线。



N=4,M=4

割数=2

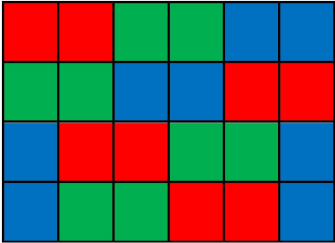
染色数=3



N=4,M=2k(k>=3)

割数=1

染色数=3

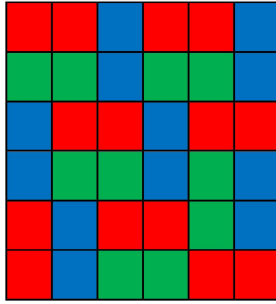


N=6,M=6

割数=1

染色数=3

这是一个特殊的情形。



那么除了以上的情况其他情况都是不存在割线的。

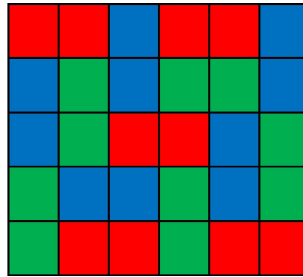
为什么呢？

我们先找到两个特殊的棋盘。

N=5,M=6

割数=0

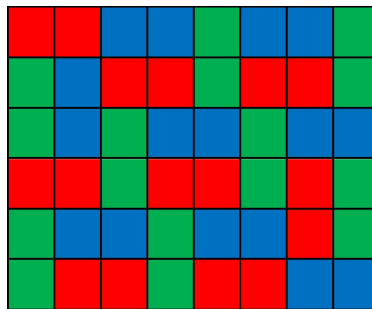
染色数=3



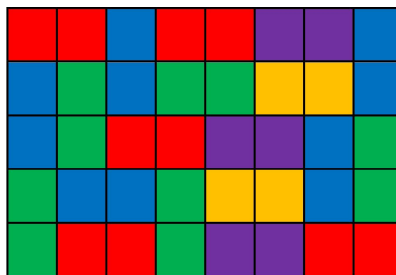
N=6,M=8

割数=0

染色数=3



我们可以通过一种方法轻松地将一个没有割的棋盘覆盖拓展成更大尺寸的没有割的棋盘覆盖。如下图



其中紫色和黄色的部分是新插入的。

这样子我们就可以得到所有 $n \geq 5$ 且 $m \geq 6$ ($n=6$ 且 $m=6$ 除外) 的棋盘的没有割的覆盖。

但是还有一个问题没有解决：就是染色数的问题。我们发现上面的例子中最多也用了 3 种颜色，那是不是对于大数据也成立呢？是的。但我也不知道为什么。而且可怕的是，并不是任意无割的棋盘覆盖都能做到只用三种颜色，有的要用 4 种，也就是说，你构造的棋盘还得满足一定性质，使得他能被三颜色染色，更可怕的是，我不知道要满足什么样的性质，才存在方案。幸运的是，按照上面的方法扩增，是可以三染色的。至于染色的构造，直接 dfs 即可。当然，要注意剪枝优化。