

Pork barrel 解题报告

宁波市镇海中学 邹逍遥

1 试题来源

CERC 2014 J

<http://codeforces.com/gym/100543/submit/J>

2 试题大意

给定一张 n 个点 m 条边的图， q 个询问，每次给出 l, r 求边权在 $[l, r]$ 范围内的导出子图的最小生成森林。强制在线。

3 数据范围

$n \leq 1000, m \leq 100000, q \leq 1000000$

4 算法介绍

4.1 算法一

对于每个询问暴力Kruskal。

时间复杂度 $O(q(m + n \log n))$

4.2 算法二

考虑离线做法。

把所有边按照边权从大到小一条一条加入并维护当前的最小生成森林。这样可以 $O(mn)$ 求出所有 $r = \max$ 的答案。

对于最大的一些边不能用了的情况，观察一下它在上界没有限制的时候的方案中有没有出现。

假如没有出现，那么在权值比它小的边中一定有一条边可以代替它；假如出现了，那么在权值比它小的边中一定没有可以重新使这两个连通块连通的边。

也就是说上界限定的情况下的答案一定是上界无限定的答案的子集！

那么要做的其实就是维护最小生成森林的同时支持查询权值小于某个值的所有边的权值和。

由于 n 只有1000，在维护最小生成森林的时候只要将当前的图DFS一遍找到变化的那条边，然后将新加入的那条边插入排序插进当前的权值序列中即可。

时间复杂度 $O(qn + mn)$

支持在线也非常容易，把所有 m 种情况下的按权值排序后的边集预处理出来存到数组里即可。

时间复杂度不变，空间增加到 $O(mn)$ 。

4.3 算法三

由于本题数据范围较小，上述算法在经过常数优化和空间优化之后是能卡线通过本题的。下面来考虑复杂度更优的算法。

时间复杂度为 $O(mn)$ 的地方有两处，一处是维护最小生成森林，另一处是维护 m 种情况下的边集。

最小生成森林可以使用Link-cut trees进行维护，这样每次加边的时候可以 $O(\log n)$ 找到应该被删掉的那条边。

维护边集则是一个单点修改和区间求和的问题，可以离散化后使用可持久化线段树进行维护。

那么时间复杂度就变成了 $O(m \log n + Q \log n)$ ，可以轻松AC本题。