

IOI2014国家集训队试题泛做

长沙市雅礼中学 黄志翱

2014 年 1 月 24 日

目录

第一部分	ACM World Finals 2013	6
1	2013A Self-Assembly	6
2	2013B Hey, Better Bettor	7
3	2013C Surely You Congest	8
4	2013D Factors	9
5	2013E Harvard	10
6	2013F Low Power	11
7	2013G Map Tiles	11
8	2013H М а т р ё ш к а	13
9	2013I Pirate Chest	14
10	2013J Pollution Solution	15
11	2013K Up a Tree	15
第二部分	ACM World Finals 2012	17

12	2012A Asteroid Rangers	17
13	2012B Curvy Little Bottles	17
14	2012C Bus Tour	18
15	2012D Fibonacci Words	19
16	2012E infiltration	20
17	2012F Keys	20
18	2012G Minimum Cost Flow	21
19	2012H Room Service	22
20	2012I A Safe Bet	23
21	2012J Shortest Flight Path	24
22	2012K Stacking Plates	25
23	2012L Takeover Wars	26
第三部分 ACM World Finals 2011		27
24	2011A To Add or to Multiply	27
25	2011B Affine Mess	27
26	2011C Ancient Messages	28
27	2011D Chips Challenge	29
28	2011E Coffee Central	30
29	2011F MachineWorks	30
30	2011G magicsticks	31

31	2011H Mining Your Own Business	32
32	2011I Mummy Madness	33
33	2011J Pyramids	33
34	2011K Trash Removal	34
第四部分 ACM World Finals 2010		35
35	2010A APL Lives!	35
36	2010B Barcodes	36
37	2010C Tracking Bio-bots	37
38	2010D Castles	37
39	2010E Channel	38
40	2010F Contour Mapping	39
41	2010G The Islands	40
42	2010H Rain	40
43	2010I Robots on Ice	41
44	2010J Sharing Chocolate	42
45	2010K Paperweight	43
第五部分 ACM World Finals 2009		44
46	2009A Careful Approach	44
47	2009B My Bad	44
48	2009C The return of Carl	45

49	2009D Conduit Packing	45
50	2009E Fare and Balanced	46
51	2009F Deer-Proof Fence	47
52	2009G House of Cards	47
53	2009H The Ministers' Major Mess	49
54	2009I Struts and Springs	50
55	2009J Subway Timing	50
56	2009K Suffix-Replacement Grammars	52
第六部分 ACM World Finals 2008		54
57	2008A Air Conditioning Machinery	54
58	2008B Always an Integer	54
59	2008C Conveyor Belt	55
60	2008D The Hare and the Hounds	56
61	2008E Huffman Codes	57
62	2008F Glenbow Museum	58
63	2008G Net Loss	58
64	2008H Painter	59
65	2008I Password Suspects	60
66	2008J The Sky is the Limit	60
67	2008K Steam Roller	61

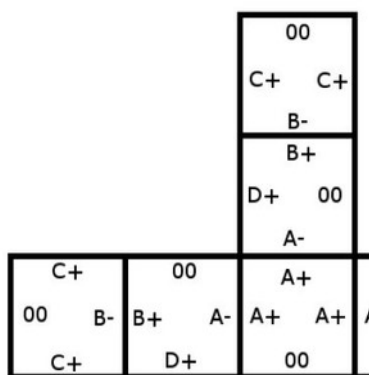
第七部分 ACM World Finals 2007	62
68 2007A Consanguine Calculations	62
69 2007C Grand Prix	62
70 2007E Collecting Luggage	63
71 2007F Marble Game	64
72 2007G Network	64
73 2007H Raising the Roof	65
74 2007I Water Tanks	66
75 2007J Tunnels	67
第八部分 其余题目	68
76 1998 A Crystal clear	68
77 1998 B Flight Planning	68
78 1998 D Page Selection by Keyword Matching	69
79 1998 E Petri Net Simulation	70
80 2001 A Airport Configuration	70
81 2002 A Balloons in a Box	71
82 2004 C Image is everything	71
83 2004 J Air Traffic Control	72

第一部分 ACM World Finals 2013

1 2013A Self-Assembly

1.1 题目大意

一个方格有四条边，边用字母加“+/-”来表示。若两个方格的两个边的字母相同且一正一负，即可拼成一起。问是否可以利用这些方格拼出一个无限的结构。其中方格允许旋转和翻转，如图所示：



方格总数 ≤ 40000 。

1.2 算法讨论

将方格看成边，而将字母+“+/-”的组合看成点。一个无限的结构一定会包括一条无限长的链，对应到图中，即存在一条无限长的路径，也就是原图中存在环。同时，若图中存在环，则必定可以以此组合出相应的结构（注意方格可以翻转和旋转）。问题转化为求问这个图中是否存在一个环，使用拓扑排序即可。

1.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(\text{方格数})$

空间复杂度： $O(\text{方格数})$

1.4 备注

World Finals 中少有的要想问题的题，较为可嘉，不过过为简单，当初围观比赛时，此题是少有的几道看懂题意了的题，很快就做出来了。

2 2013B Hey, Better Bettor

2.1 题目大意

一种赌博游戏，你可以进行无限轮，你赢了得到一块钱，你输了即丢一块钱。有 p 的概率赢，然后最后当你终止游戏时，如果你是输钱的，赌场会补偿你输的钱数的 $x\%$ ，给定 x ， p ，求最后的期望收益。

$0 \leq x < 100, 0 \leq p < 50$, x 和 p 最多只包含两位小数

2.2 算法讨论

游戏规则过于简单。以至于策略只可能是这种形式：如果我赢了 A 元或输了 B 元就不玩了。

所以我们要计算无限玩下去赢了 A 元的概率，设当前钱数为 W ，无限玩下去赢得 A 元的概率为 $P(W)$ ，那么 $P(W) = pP(W+1) + (1-p)P(W-1)$ 。由 $P(A) = 1, P(B) = 0$ ，即可解出当前钱数为 0 时的概率，计算出相应的期望收益。

经打表发现，由于未知原因，期望收益和 A, B 的取值存在某种单调关系，利用二分答案即可通过此题了。（不过本题 x, p 这么小本来就可以打表吧！）

2.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(\log^2 S)$

空间复杂度： $O(1)$

2.4 备注

好神好神的题呀，不看题解完全不会做。

只能膜拜rng_58和tourist了。

做了80道题，这题应该是最难的之一了。

3 2013C Surely You Congest

3.1 题目大意

给定一个 n 个点， m 条边的带权无向图和在该无向图上的 c 个人。现在问最多能有多少人，同时从各自位置出发沿最短路按照相同速度前往点1而不会在任意时刻在边上相遇（顶点可以相遇）。

$$n, m \leq 25000, c \leq 1000$$

3.2 算法讨论

引理 3.1 只有当到点1的最短路长度相同的两人才可能相遇。

因为，若两个人在某一点相遇，说明从两人出发位置到该点的最短路长度相同，而两人到达点1的最短路长度等于从出发位置走到该点的长度加上该点到点1的长度，那么也就说明了两人到达点1的最短路长度必然相同。

由此，我们用单源最短路算法（例如Dijkstra），求得点1到达每个点 i 的最短路长度 $dist_i$ ，删去不在最短路上的边（若 $dist_a - dist_b \neq len_{ab}$ ，那么这条边不具有存在的价值），得到一个带权的有向图（由于边权都是正数，最短路径不可能存在环）。然后对于 $dist$ 相同的人分开处理。

以下讨论都只针对 $dist$ 相同的一组人。

引理 3.2 若两人在最短路径上都经过了点 P ，则在点 P 必定相遇。

因为点 P 到点1的最短路长度相同，而两人走过的路径长度相同，所以其到达点 P 的长度也是相同的。

由此，我们可以抛开对边权的考虑，而只关注每个人走过了哪些点。问题转化为如下形式：

给定一个有向图，求问最多能有多少条从给定点到点1的路径，从而使每条边最多属于一条路径。

这个问题很明显是一道经典的最大流问题，我们可以构造一个等价的网络流模型将其解决：

1. 将点1视为汇点 T ，设置一个超级源点 S 。
2. 若某人在点 c ，则从点 S 往点 c 连一条边容量为1的边。

3. 若图中有点a到点b的边，则从a往点b连一条边容量为1的边。

然后运行最大流算法即可得到答案。

3.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(1000 \times \text{网络流时间复杂度})$

空间复杂度: $O(n+m)$

3.4 备注

其实WF中网络流的题目真的少得可怜，既然如此的话，这么水也就可以谅解了，也亏我能写这么长的题解。

这题是我翻译的，不过我想吐槽的是：为什么我的标程被卡常数了啊！

4 2013D Factors

4.1 题目大意

求最小的n，使得将n质因数分解之后所有质因数可重排列的方案数为k。保证n,k小于 2^{63} 。

4.2 算法讨论

暴搜。

设该数为 $a = \prod p_i^{b_i}$ ，则质因数可重排列数为： $\frac{(\sum b_i)!}{\prod b_i!}$ 。

可见 p_i 的值与方案数无关，也与 b_i 的顺序无关，由于要求n最小，自然，我们会使得 p_i 升序排列， b_i 降序排列，且 p_i 的取值为素数表的前若干项。

在此基础上暴力枚举 p_i, b_i 的值，加上若干小剪枝即可通过此题。

4.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(?)$ ，视搜索剪枝而定，总之很小的。

空间复杂度: $O(1)$

4.4 备注

似乎题解太简略了也不太好，那就详细点吧。

5 2013E Harvard

5.1 题目大意

$n * S$ 个存储器， S 个一组。现在有两种读取存储器的方法，首先第一组的存储器可以直接花费一单位时间读取。至于其它的，存在一个访问标记，只有当标记在该组时才能花费一单位时间读取，如果要切换标记，运行时间为一。给定一段程序，程序里有循环，以及对若干(≤ 13)变量的访问。指令数 $len \leq 1000$ 。希望你为每个变量分配一个存储器，使得运行时间最少。

$$n * S \leq 13$$

5.2 算法讨论

依旧是一道暴搜题。

如果确定了变量所属的存储器，即可很方便地进行计算代价——标记只会在必要时切换。所以，当第一组的变量确定之后，我们可以这么计算运行时间：

从访问序列中删除第一组变量之后不在同一组的相邻变量对数+访问变量的总次数。

我们暴枚第一组的变量有哪些（显然越多越好），跑一遍程序，求出每对变量之间有多少次相邻，这样，暴枚变量分组之后，即可很快计算运行时间了。

一些细节部分：处理给定的程序建议使用递归下降，顺便记录下该程序段循环的次数。枚举变量分组的时候可以加点剪枝，比如说分组的顺序无关，如果两组变量可以合并，那么该分组不合法。这样程序就可以跑得很快了。

5.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(2^S * (len + T * S^2))$ ， T 为搜索到的状态数。

空间复杂度： $O(len + b^2)$

5.4 备注

记得在超市里想这题想了好久，没有得到任何可行的多项式复杂度的算法，于是只能搜索了。

6 2013F Low Power

6.1 题目大意

$2nk$ 个数，你要将其分成 n 组。每组 $2k$ 个数再分成大小为 k 的两组，其power值为这两组的最小值之差。要求最小化最大的power。

6.2 算法讨论

首先二分答案转化为判定问题。将数排序，经过调整法可知两组的最小值一定对应于排序好的数中相邻的数对。接下来贪心选择最前面的 $2*n$ 个可行数对即可。因为越靠前越有利于对于每个数对分配之后的 $2*(k-1)$ 个数。

6.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n \log n)$

空间复杂度: $O(n)$

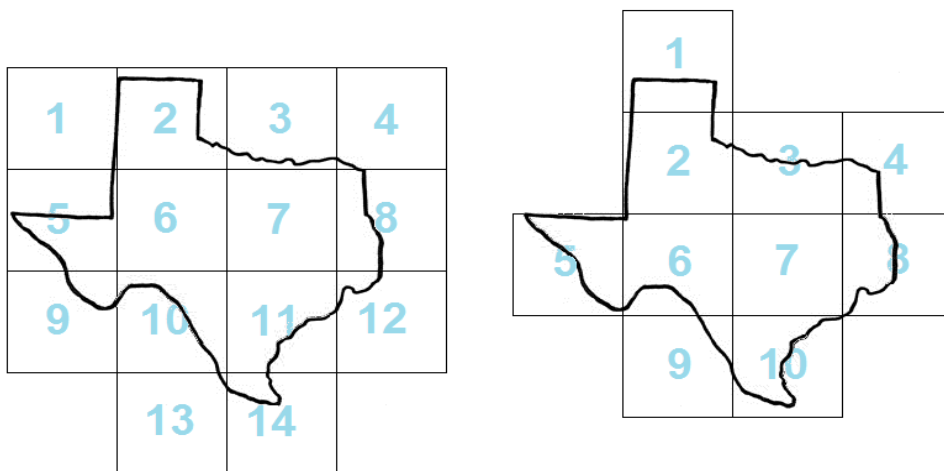
6.4 备注

传统题一道！当时台大拿到了全场的1A，后面又有许多人刷刷刷过了这题。其实我觉得这题还是蛮难的。

7 2013G Map Tiles

7.1 题目大意

给定一个简单多边形，要求用网格覆盖该多边形，使得覆盖该多边形的矩形格子个数最小。矩形网格必须与X轴和Y轴平行。如图：



矩形格子的长 x_s 和宽 y_s 给定。

多边形点数 $m \leq 100$ 。

保证用 $10 * 10$ 个矩形格子即可覆盖该多边形，令 $n = 10$ 。

7.2 算法讨论

本题的算法比较简单，基本思路就是枚举所有矩形放置方案，并求出在此方案下所需的矩形个数，所以算法也就分成了两部分。

考虑网格的一种放置方案：我们一定可以向左或向上平移网格而不改变覆盖多边形的网格数，除非网格和多边形相交。

反之，一种有意义的放置方案，必有网格与多边形相交，而且一定存在两个交点。

每个交点有两种形式：网格的格点或多边形的顶点在网格的边上。从而总计 $2 * 2 = 4$ 中情况，如下。

1. 若多边形的顶点在网格上，我们即可立即确定网格的横坐标或纵坐标的一个。故而至多枚举另一个多边形的顶点或多边形的一条边以及交点与自己在确定的那个维度的距离。这样的方案数是在 $\max(n, m)^3$ 以内的。
2. 只有两个格点位于多边形上。我们需要枚举格点所在的边以及两个格点之间的位置关系，方案数 $m^2 n^2$ 。

虽然看起来方案数很多，但是WF的数据很弱，剔除重复状态后留下的可行状态在数万以内。

第二步就是要利用较低的复杂度，求出覆盖该矩形所需要的网格个数。下面介绍一个 $O(nm)$ 的算法：

每次处理在同一个水平线上的网格，枚举多边形的所有与这些网格有交的边，首先这些边所在的格子是要计算在内的，而剩余的网格，则通过做一条水平的射线，利用该射线与多边形的相交次数计算在多边形内的格子个数。

一定要注意细节啊注意细节，虽然我不记得要注意什么细节来了。

7.3 时空复杂度

时间复杂度： $O((nm)^3)$

空间复杂度： $O((nm)^2)$

7.4 备注

WF 2013唯一没人AC的题目，tourist都没做出来哟！。

当初做2013年的题时跳过了此题。不过后来看着空了一道题实在不爽就做了。其实这题的代码和思维难度都不是很高。大伙都是被通过人数吓着了就没看题了。

8 2013H М а т р ё ш к а

8.1 题目大意

一排的俄罗斯套娃，你只能将相邻的两个套娃合并。合并的代价就是你所需要打开的套娃的个数。求最小代价，使得最终只留下若干个完整的套娃。一个套娃为完整的，是指它刚好由大小为1-m的套娃组成(m为任意自然数)。 $n \leq 500$ 。

8.2 算法讨论

经典的区间动态规划：

令 $f_{i,j}$ 为将第i个和第j个套娃合并的的最小代价。

那么 $f_{i,j} = f_{i,k} + f_{k+1,j} + w(i, j, k)$ 。

为了降低复杂度，我们可以通过枚举 $w(i, j, k)$ 的值求出对应的k进行转移，将时间复杂度优化到 $O(n^3)$ 。

8.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^3)$

空间复杂度: $O(n^2)$

8.4 备注

很简单的题，给刚学OI的高一小朋友做被秒了。不过我也想了一会儿，思路似乎复杂了，现在懒得管了。

9 2013I Pirate Chest

9.1 题目大意

$n*m$ 的水箱，灌满了水，你想放一个底面积在 $a*b$ 以内的长方体进去，要求长方体严格在水面下（放入长方体水位会因此提高）。给定 $n*m$ 的每个地方的水深，求能放进去的体积最大的长方体的体积。

$$n, m, a, b \leq 500$$

9.2 算法讨论

考虑暴力，枚举放的位置和再枚举长和宽，求出最浅的那个地方在哪儿，就可以利用公式计算出体积了，不过效率太低。

所以先枚举宽，再枚举位置，可以计算出这个位置往左那么宽的位置中最浅的深度。依次枚举每一列，再枚举最浅的行，可以用栈求出往左往右最多能够衍生多远使得该行依旧是最浅的，以此计算出体积。

9.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^3)$

空间复杂度: $O(n^2)$

9.4 备注

同上，我想了挺久，但还是被高一小朋友秒了。

做这题时在uva上很快过了，但是在tsinsen上交的时候被卡了许久的常数。

10 2013J Pollution Solution

10.1 题目大意

求一个多边形与半圆的交。

多边形的点数 $n \leq 100$ 。

10.2 算法讨论

首先从原点进行三角剖分将多边形拆成若干三角形，计算有向面积决定加减。由于三角形的一个顶点是原点，所以只需要分若干情况讨论就可以很方便计算出半圆与它的交。剩下的只有简单的计算几何知识了。

10.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n)$

空间复杂度： $O(n)$

10.4 备注

我没有分类讨论，而是计算三角形与半圆的交并依此处理的，麻烦死了。

当我听说暴力simpson可以过时更是一口老血喷出来。

11 2013K Up a Tree

11.1 题目大意

某，b写先序前序后序遍历二叉树，结果在函数内部随意调用。

比如说先序遍历，接下来应该是对左子树先序，然后对右子树先序，但是，b可能对左子树后序然后对右子树中序什么的。

那么已知这，b运行三个函数之后遍历得到的结果，求问，这家伙的三个函数是啥。

输出所有可能结果，以及对于每种可能结果输出按照先序遍历-中序遍历-后序遍历字典序最小的那棵树。

点数 ≤ 26

11.2 算法讨论

暴力枚举这家伙的三个函数进行检验。

最初的观察就是一颗子树无论在先序中序还是后序中都是连续的一段。

于是我们就得到状态 $f(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3)$ 表示，表示是否存在一颗树使得 x_i 这个函数遍历该树的结果是 t_i ，若存在，则存下字典序最小的解。

暴力枚举子树的根进行转移。

11.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(3^3 * 26^5)$

空间复杂度： $O(3^3 * 26^5)$

11.4 备注

任子禹神这题写了32.95KB，无法直视啊。

不过这题代码写起来确实有点麻烦的说。

第二部分 ACM World Finals 2012

12 2012A Asteroid Rangers

12.1 题目大意

三维空间中点的最小生成树，但是点会沿直线匀速运动。

求问最小生成树改变了多少次。

$$n \leq 50$$

12.2 算法讨论

根据最小生成树的环切性质，最小生成树的改变只会在某条树外的边所连接的树上两点的路径上出现比它边权要大的边时才会发生。

所以我们可以暴力枚举 n^2 条边两两之间边权大小变化的时刻。从小到大枚举，一旦可以用树外的边替换树上的边，最小生成树发生改变，答案加一，可以用动态树或暴力重建进行维护。

12.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n^5)$

空间复杂度： $O(n^4)$

12.4 备注

强力推荐写动态树！

13 2012B Curvy Little Bottles

13.1 题目大意

给定一条曲线（多项式），计算其从 l 到 r 绕 x 轴旋转的体积，并且从 l 到 r 找到前8个位置，使得两两位置之间的体积为 inc 。

$$n \leq 10$$

13.2 算法讨论

可以用 $\int_a^b f^2(x)dx$ 暴力计算出a到b之间的体积。
二分查找下一个位置。

13.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^2 + 8 \log n)$

空间复杂度: $O(n)$

13.4 备注

微积分就不应该出现在OI中嘛!

不过simpson应该可过吧。

14 2012C Bus Tour

14.1 题目大意

n 个点的图, 要求从点0出发, 遍历所有 n 个点到 $n-1$, 然后再从 $n-1$ 号点返回到点0, 同样遍历所有的点。要求, 从0到 $n-1$ 访问的前 h 个点和从 $n-1$ 到0访问的前 h 个点是一样的, $h=n/2-1$ (取下整)。可以经过点而不访问, 但是只能访问一次, 输出最小耗时。

$$n \leq 20$$

14.2 算法讨论

使用floyd进行预处理出两两之间的最短路。

从0和 $n-1$ 分别出发进行状压dp, 处理出访问 S 集合中的点, 且此时位于点 a 的最小耗时, 用这个来计算答案。

14.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^2 2^n)$

空间复杂度: $O(n 2^n)$

14.4 备注

应该有更好的做法。

15 2012D Fibonacci Words

15.1 题目大意

斐波那契01字符串的定义如下

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

这里+的定义是字符串的连接。

给定一个模式串p和一个数n，求p在F(n)中的出现次数。

字符串长度小于100，答案小于long long。

15.2 算法讨论

计算F(k)直到其大于p。

用kmp算法求出F(k)中p的个数，以及F(k)+F(k+1)新增的p的个数。

以此通过递推求出F(n)中p的个数。

15.3 时空复杂度

时间复杂度：O(L + log 10¹⁸)

空间复杂度：O(L * log L + log 10¹⁸)

15.4 备注

本题其实有个非常神的做法。

只可惜搞了半天最终没搞出来T.T。

16 2012E infiltration

16.1 题目大意

n 个点($n \leq 75$), 任意点对 a, b , 要么 a 控制 b , 要么 b 控制 a 。

选择点 a 会控制 a 和其所控制的点。请选择最少的点, 使得所有的点都被控制。

16.2 算法讨论

可以证明一个竞赛图中必有一个点连出去 $\frac{n}{2}$ 个点, 选择这个点可以使得问题规模减少一半。

所以答案范围在 $\log n$ 以内, 也就是说答案不会超过6, 故此可以搜索。

16.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(?)$, 视搜索剪枝而定。

空间复杂度: $O(n)$

16.4 备注

可以用各种方法和剪枝加速。

而且事实上答案小于等于5。原因未知。

17 2012F Keys

17.1 题目大意

钥匙套在钥匙环上, 钥匙环组成森林。

可以将钥匙取下安上, 也可以断开钥匙环的连接。

首先最小化对钥匙的操作, 然后最小化对钥匙环的操作, 使得一种钥匙在一个钥匙环的联通块上, 其余在另一个联通块上。

钥匙和钥匙环分别用大写小写英文字母标号。

17.2 算法讨论

显然同一个钥匙环上只有一种钥匙的，这些钥匙不会动。否则，必定是取下其中一种钥匙。由于这样的钥匙环只有13个，暴力枚举 2^{13} 。

然后暴力枚举取下的安在哪儿（显然同一种钥匙可以放到同一个钥匙环上）， $26 * 26$ 。

最后树形dp求断开钥匙环与链接钥匙环的方案数。

17.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(2^{13} * 26^3)$

空间复杂度： $O(26)$

17.4 备注

嗯，此题看似傻逼，其实内部暗藏玄机。。

鱼丸你还我这题的AC。

18 2012G Minimum Cost Flow

18.1 题目大意

n 个三维空间的房子，房子有管道连向其它房子，以及若干空洞。不同房子的空洞之间可以接管道，代价为房子的距离（必定大于等于1），也可以花费0.5的代价将一个空洞补上。

有源点S和源点T，你可以在源点S的房子施加任意多的水和水压，要使得T充满水且不漏水，注意，水往低处流和连通性原理等物理学知识。

$n \leq 400$ 。

18.2 算法讨论

要使得S和T连通，那么就是要找条S到T的路径，但是由于有些地方可能没水。得枚举水压——也就是水最高为多少，得到可能充水的房子。

接下来显然考虑连通性。同一连通块就是连进一条边连出一条边，然后剩下的都得堵住，找到连通块之间的连边，求最短路即可。

有些细节需要注意。

18.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^3)$

空间复杂度: $O(n^2)$

18.4 备注

本题还是很有难度的,我想了好久。写题解的时候已经不记得有哪些细节了。

19 2012H Room Service

19.1 题目大意

不记得了囧。嘛,找到原题了:

QDC被NSK关在了一个凸多边形的小黑屋里。为了逃离这个小黑屋,他希望能够搞清房间的结构。但是由于QDC什么都看不见,所以唯一的方法就是用手摸。善良的ryz看不下去了,他想知道QDC从当前位置P开始,摸完所有的墙,再回到P所需要走过的路程最少是多少。有以下这些约定:

1. P保证严格在多边形内(不在某一条边上或与某一个顶点重合)。
2. QDC被认为是一个点,当且仅当QDC位于某一条边上时,他摸到了这堵墙。
3. 当QDC在多边形的顶点上时,认为他同时摸到了这两堵墙。

$n \leq 100$ 。

19.2 算法讨论

不记得了囧,翻了一下以前的代码:

大概就是将这个房间不断沿边进行对称。然后求最短路。

主要就是计算几何和动态规划相关的算法吧。

19.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^3)$

空间复杂度: $O(n)$

19.4 备注

我很久以前在考场上直接切了这题。

我觉得我以前实在是太厉害了。

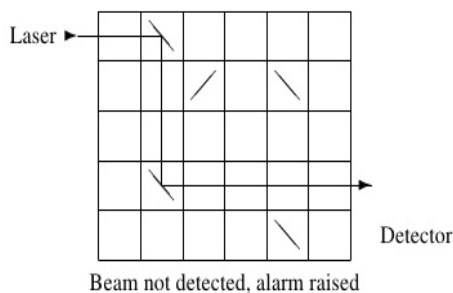
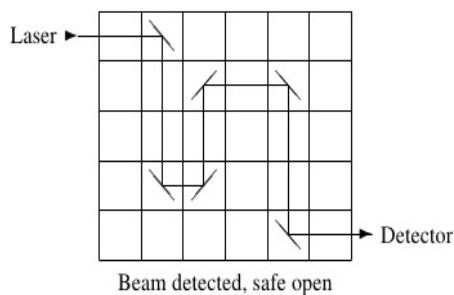
不过为什么tsinsen上连这题都找不到啊!!!!

20 2012I A Safe Bet

20.1 题目大意

网格，里面有镜子，询问从左上角进入的光线是否能够到达右下角，或者添加一个镜子之后是否能到达右下角？

具体如图：



网格大小： $R, C \leq 10000000$

镜子数： $M, N \leq 200000$

20.2 算法讨论

第一问是否能够到达右下角，只需要将镜子拿出来模拟。

对于第二问，考虑从左上角出发和右下角出发的光线，在其路径相交处添加镜子则必定可以使得左上角和右下角相连通。

所以我们只需求出这些路径的交点即可，而寻找水平和垂直线段交点是个经典的利用扫描线解决的问题。

20.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n \log n)$

空间复杂度： $O(n)$

20.4 备注

很简单的题，不过代码量有点小大。

21 2012J Shortest Flight Path

21.1 题目大意

飞机飞，不能远离最近的基地距离超过K。

飞机飞，飞了C米就得到基地补汽油。

问飞机从点a飞到b最少飞多少才能到达。基地个数 ≤ 25 。

——真简单题吧！

但是飞机是在地球上飞的。

而地球是个球体。

21.2 算法讨论

暴力求出以基地为圆心的圆两两之间的交点。

求最短路即可。

要求使用三维计算几何。

21.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n^4)$

空间复杂度： $O(n^4)$

21.4 备注

我已经无力吐槽这题了。

tsinsen上同样没有，所以基本上是白写了。

我求圆交算法有点逗比，所以时间好慢——将一个圆投影到平面上之后是一个椭圆，所以我用二分来解决交点问题了。

果然人傻没办法啊，其实解方程方便多了。

22 2012K Stacking Plates

22.1 题目大意

n 个单调栈，栈中元素从小到大，类似于汉诺塔。

在一次操作中，你可以将栈从中分开，或者将一个栈拼到另一个栈上（当然得继续保证单调性）。

求将这 n 个栈合并的最小操作次数。

$n, h \leq 50$ 。

22.2 算法讨论

显然会先将这 n 个栈分裂，然后再拼到一起，设分成了 ans 块，答案就是 $2 * ans - n - 1$ 。

那么怎么分割呢？考虑最后的栈，如果确定每个元素属于哪个栈，那么 ans 就是属于不同栈的相邻对数+1。

又显然对于相同大小的元素前属于相同的栈的元素可以等价为一个，那么我们可以dp了。

考虑得到大小为 i 的元素，最后一个元素属于哪个栈，设为 $f[i][j]$ 。

枚举大小为 $i+1$ 的元素所属的栈的顺序（只有第一个和最后一个有关系）进行转移。。

22.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n^3)$

空间复杂度： $O(n^2)$

22.4 备注

12年最水的题目，相当简单。

看我题解多详细！

23 2012L Takeover Wars

23.1 题目大意

两个人游戏，分别有 n 和 m 个数。。两个人轮流操作。

每次操作可以合并己方的两个数（即变成两个数的和），或者删除对方一个比自己最大的那个数小的那个数。

求第一个人是否胜利。

$$n, m \leq 10^5。$$

23.2 算法讨论

首先，得到几个结论：

1. 只会删除对方最大的数。
2. 如果自己最大的数小于对方最大的数，且自己加上自己第二大的数还是小于对方最大的数的话，自己必败。

枚举第一人第一次操作是合并还是吃掉。那么就轮到第二人了。接下来的游戏一定是固定的。

如果自己最大的已经被吃掉了，那么只能合并。否则只会一直被吃下去，然后轮到第一人，如果他能吃，那么他获胜，否则合并，一直这样下去。

然后如果自己最大的没被吃掉，如果自己可以吃掉对方最大的，那么自己就已经必胜了。否则也只能合并。然后轮到对方。一直这样下去。

所以策略其实是非常简单的。模拟即可。

23.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n \log n)$

空间复杂度： $O(n)$

23.4 备注

该死的uva一直给我submission error，害得我自己写了个程序来测试。挺好的一道题。

第三部分 ACM World Finals 2011

24 2011A To Add or to Multiply

24.1 题目大意

你每次可以加一个数A，或者乘上M。

要求一种操作步骤，使得操作次数最少，且字典序最小（加A为'A'，乘M为'M'），使得对于所有p, q之中的数进行这些操作之后的结果大于等于r 小于等于s。

24.2 算法讨论

操作步骤对应于（设该数为d）：

$$d * M^i + Ac = (p + x) * M^i + Ac = x * M^i + (p * M^i + Ac)。$$

枚举i。然后可以计算出c的范围，用数位dp找出那个表示成M进制最小的数（注意 $c > M^i$ 的情况，不过不麻烦）。

24.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(\log^2 S)$

空间： $O(\log S)$

24.4 备注

我代码好长。估计有什么好办法吧。

25 2011B Affine Mess

25.1 题目大意

可以旋转平移和缩放，但是这些操作的个数都有所限定。问是否有，或有多组操作使得给定的三个点变到对应的三个点。

25.2 算法讨论

暴枚三个点的对应方式和旋转方式（旋转只有40种可能，题意给定）
然后剩下两个分别是对应于x坐标和y坐标的方程组，判断解的个数。

25.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(3! * 100)$

空间复杂度： $O(1)$

25.4 备注

很无聊的题，还容易写错。

26 2011C Ancient Messages

26.1 题目大意







					
Ankh	Wedjat	Djed	Scarab	Was	Akeht

图1：六个象形文字

请识别如上图形。

$H \leq 200, W \leq 50$ 。

26.2 算法讨论

注意到这些图形的连通块的个数都不同。所以用这些来做区分即可。

26.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(HW)$

空间复杂度： $O(HW)$

26.4 备注

挺有意思的，不过在图像识别题中过于水了。

27 2011D Chips Challenge

27.1 题目大意

$n \times n$ 的网格，有些格子放了东西，或还没放，或不能放，一格最多只能放一个东西。

要求放些东西使得：

1. 放的东西最多
2. 第 i 行放的和第 i 列放的一样多
3. 每行每列的个数小于等于总个数的 A/B 。

$$N \leq 40, B \leq 1000$$

27.2 算法讨论

暴枚每行每列最多放的东东个数： $O(n)$

可以建出最大费用可行流模型： x 部的点往 y 部的点连边，表示 (x,y) 处放了个东西。再从 y 部第 i 个点往 x 部第 i 个点连边，表示这两个变量相同。由于某些点必须放，会导致出现正权环，个人采用的是上下界网络流的算法。

27.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n \times \text{网络流复杂度})$

空间复杂度： $O(n^2)$

27.4 备注

消圈慢死人，写这题的时候我还特意去学了，结果直接TLE。

曹钦翔在冬令营上讲过这题。

网络流方面可以参考：<http://www.artofproblemsolving.com/blog/54262>。

28 2011E Coffee Central

28.1 题目大意

1000*1000的地图，上面有些点。

回答20个询问：求点P，使得离其曼哈顿距离小于r的点数最多。

28.2 算法讨论

坐标旋转45度：即经典技巧 $|x1 - x2| + |y1 - y2| = \max(|(x1 + y1) - (x2 + y2)|, |(x1 - y1) - (x2 - y2)|)$ 。

枚举位置，然后用前缀和数组算出里面的点数即可。

28.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(qn^2)$

空间复杂度： $O(n^2)$

28.4 备注

我貌似最开始写的是没有旋转然后分类讨论的版本，被卡常数了。

29 2011F MachineWorks

29.1 题目大意

在第 D_i 天你可以用 P_i 的价格买入每天收益为 G_i 的物品i，然后你可以在任意天花 $R_i < P_i$ 卖掉。

你每次只能拥有一个物品。第一天有K元，问D天的最大收益。

$n \leq 10^5$

29.2 算法讨论

状态转移方程为 $f_i = f_j - P_j + R_j + (D_i - D_j) * G_j$

1D/1D动态规划，使用cdq分治即可。

29.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n \log n)$

空间复杂度: $O(n)$

29.4 备注

一遍AC, 现在想来代码似乎写长了。

30 2011G magicsticks

30.1 题目大意

很多木棍有序放置, 你可以将若干连续的木棍拼成一个多边形。使得最终的若干多边形面积和最大。

30.2 算法讨论

有一个结论: 多边形上的点一定共圆。故此, 给定一些木棍, 能够得到的最大面积为:

1. 要么我们可以通过二分圆的半径, 求出只使用这些木棍能够拼出的最大的面积。
2. 否则, 去掉长度最大的那根木棍, 答案为其左边的木棍和右边的木棍组成的多边形面积的和。

对于第二点我们可以这么考虑:

为何会存在多个多边形?

那一定是存在一个特别长的木棍使得拼成的多边形很小或不存在。所以说删掉这根递归下去即可。

30.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^2 \log n)$

空间复杂度: $O(n)$

30.4 备注

由于以前做过类似的题目，所以对于结论和做法没太深入思考，也没有严谨证明。

31 2011H Mining Your Own Business

31.1 题目大意

贴上原题吧：

煤矿工地可以看成是由隧道连接挖煤点组成的无向图。为安全起见，希望在工地发生事故时所有挖煤点的工人都能有一条出路逃到救援出口处。于是矿主决定在某些挖煤点设立救援出口，使得无论哪一个挖煤点坍塌之后，其他挖煤点的工人都有一条道路通向救援出口。请写一个程序，用来计算至少需要设置几个救援出口，以及不同最少救援出口的设置方案总数。

$$n, m \leq 50000$$

31.2 算法讨论

只需要考虑塌陷的是图的割点，其余情况没有影响。

考虑一个连通图，删去所有割点，图会被分成若干个双连通块，由于是无向图，所以会组成一棵树的形式。

显然所有的叶子中必须有个出口，而其余连通块则不需要。这样我们只需要在每个叶子中选择一个就行了。

但是有个例外，如果这个图中不存在割点，则我们必须，且可以任意选择两个点——不然刚好出口塌陷就悲剧了。

31.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n + m)$

空间复杂度： $O(n + m)$

31.4 备注

HNOI2012原题。哦不，准确来讲这题是HNOI2012的原题来源。问题是开始看到这题时，我这个大傻叉还不会。

32 2011I Mummy Madness

32.1 题目大意

呃。。。僵尸要吃掉你的脑袋

于是僵尸会来追捕你，每回合你和僵尸都可以朝着八个方向移动（八连通）

问你最多可以撑多少个回合。

僵尸个数： $n \leq 10^5$ 。

32.2 算法讨论

二分答案，判断是否存在一个点，该时间内你能到达，而僵尸不能到达。

由于一个点可以到达的位置是个矩形，用扫描线即可。

32.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n \log^2 n)$

空间复杂度： $O(n)$

32.4 备注

总之很简单的题嘛。感觉WF好喜欢出扫描线呀。

33 2011J Pyramids

33.1 题目大意

用最少数，且字典序最大的方式使用 $\sum i^2$ 和 $\sum (2i+1)^2$ 来表示出数 $N(n \leq 10^6)$ ，且一个数不能使用两次。

$n \leq 10^6$

33.2 算法讨论

将所有可能用到的数处理出来，那么就是一个01背包问题。

问题是要求字典序最小，所以我们必须记录下已经选择的数有哪些。
为了卡长数，可以用long long来存下一种表示方式。

33.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n\sqrt[3]{n})$

空间复杂度: $O(n)$

33.4 备注

由于答案很小，听说暴搜能过。我卡了很久常数，但看起来还是很慢的样子。

34 2011K Trash Removal

34.1 题目大意

给定一个多边形，问多宽的管道允许该多边形通过。多边形允许旋转。

$$n \leq 100.$$

34.2 算法讨论

就是要你暴力求最远点对。

34.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n \log n)$

空间复杂度: $O(n)$

34.4 备注

集训队有看了题解不会的么？拖出去斩了。

第四部分 ACM World Finals 2010

35 2010A APL Lives!

35.1 题目大意

给定一种语言，请实现其编译器，这种语言包含了如下操作：

<code>var = 1 2 3</code>	将向量1 2 3存储于变量var中，取代它之前的值。这个表示式的值是1 2 3。等于号运算符的左操作数必须是一个变量
<code>var + 4</code>	显示var中的每个元素加4之后的值(结果是5 6 7)；原先存储在var中的值不变。
<code>- / var</code>	显示var中每一行相邻两个元素之间加上减号之后得到的表达式的值(结果是2)。如果var有两个维度，那么会得到一个向量。如果var有三个维度，那么结果会是一个二维数组。* 和+ 的结果与之类似。
<code>iota 5</code>	构造一个向量1 2 3 4 5
<code>2 2 rho 1 2 3 4</code>	将向量1 2 3 4重新排列成一个2*2的数组；其中1,2位于第一行，3,4位于第二行。
<code>2 2 rho 1 2 3 4 5 6</code>	得到和上面相同的结果。
<code>2 3 rho 1 2 3 4</code>	进行另一种重新排列，将第一行设为1 2 3,第二行设为4 1 2,也就是说，如果右操作数中没有足够的元素进行重排，我们就将右操作数中的元素按照行优先的顺序从头开始重新使用。
<code>2 drop iota 5</code>	结果: 3 4 5.从iota 5的结果中删除前两个
<code>1 2 * 3 4</code>	结果: 3 8.将对应位置上的元素进行乘法运算。注意两个操作数必须是相容的，要么两个数组的形态一致，要么两个操作数中有至少一个是单个元素的向量。(见第二个例子，注意+, -, *的运算规则都是类似的。)
<code>((a = 1) drop 1 2 3) - 5</code>	结果: -3 -2.这解释了括号用法
<code>a + (a = 5) + a + (a = 6)</code>	结果: 22.这解释了运算顺序

操作非常良心，所有运算都是从右向左。

35.2 算法讨论

模拟题。

说下我个人的做法吧，我是实现了一个struct用来表示变量，用一个值记录下了它的维度。并如上表实现了它的所有操作。

接下来就是编译器传统流程了，对于括号预处理匹配，递归下降即可。

35.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n)$

空间复杂度: $O(n)$

n为输入中程序所有基本操作次数。

35.4 备注

写编译器类型的题向来都是简单无脑，调试方便的。

不过我在tsinsen上目前处于代码最短，时间最慢的状态，好尴尬，呜呜呜，偷懒用了太多的vector和map。

36 2010B Barcodes

36.1 题目大意

给定一串编码，求验证是否正确以及解码。

一个编码是长度为5的01串，与数字（0-9）和'-'对应，用0隔开。最开始和最后是开始/结束编码。

其中0表示的是窄区间，1表示的是宽区间。宽区间的长度是窄区间的两倍。

最后两个编码CK用做验证，具体验证方式请参考原题。

输入给定扫描进来的每个区域的宽度，求问该编码是否合法。由于扫描原因，长度有可能达到一个5%的误差。

36.2 算法讨论

依旧是一道模拟题，如果我们能够确定哪些区域是宽区域哪些区域是窄区域，就只要直接比对题目给定的表格就行了，而验证也只是简单的实现问题。确定宽窄则只需要找出最大最小值即可。

本题在uva上有个很trick的地方，宽区域的长度是窄区域的两倍——这是严格而且不存在任何误差的。所以宽区域的长度是窄区域长度的2.00001倍这种情况都是非法的。

36.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n)$

空间复杂度： $O(n)$

36.4 备注

我都不记得这题交了多少回了。

uva上的数据实在是太强了，到网上找到标程才发现是哪儿出bug了。

37 2010C Tracking Bio-bots

37.1 题目大意

$n*m$ 的网格。有 $w(w \leq 1000)$ 个水平的墙。

你只能往右或往上走。

问有多少个格子无法到达 (m, n) 这个点。

$n, m \leq 10^6$

37.2 算法讨论

将坐标离散化后就是个BFS问题了。

注意 (m, n) 这个点被占据的情况。

37.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(w^2)$

空间复杂度: $O(w^2)$

37.4 备注

其实我犹豫了好久，担心这么做会被卡常数，结果跑得飞快的。

38 2010D Castles

38.1 题目大意

一棵树，你要占据每个节点。你可以派军队从任意点出发访问所有点，每条边在同一方向只能被军队访问一次。

每个点需要 a_i 人攻占，然后消耗 b_i 人。

问最少需要的人数。

$n \leq 100$ 。

38.2 算法讨论

首先可以设状态 $f(u)$ 表示访问以 u 为根的子树最少需要的人数，转移就是按照一定顺序访问所有子树。

至于顺序，考虑两棵子树： a_1, b_1, a_2, b_2 。 a 为所需人数， b 为消耗人数。

若前者必须在后者前面

$$\begin{cases} before > a_1 \\ before > a_2 \\ before - b_1 \geq a_2 \\ before - b_2 < a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 + b_2 > before \geq a_2 + b_1$$

$$\Rightarrow a_1 - b_1 > a_2 - b_2$$

以此为序转移。

38.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n^2 \log n)$

空间复杂度： $O(n)$

38.4 备注

开始我还搞错了一次，以为只要按照 a 排序就行了囧。

39 2010E Channel

39.1 题目大意

给定一个 $r * c$ 的矩阵，求从左上角到右下角的最长的路径。矩阵中有障碍，路径不能和自身有交点。

$$r \leq 20, c \leq 9$$

39.2 算法讨论

很普通的插头dp而已，慢慢写就行了。

我共记录了左插头，右插头，空插头，独立插头，和单独一个点总计5种状态。

不过本题中独立插头任意时刻都只会有一个，所以可以特殊处理。

39.3 时空复杂度

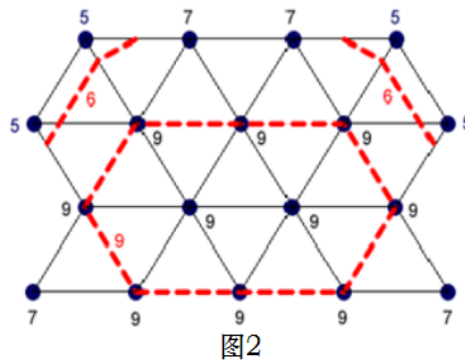
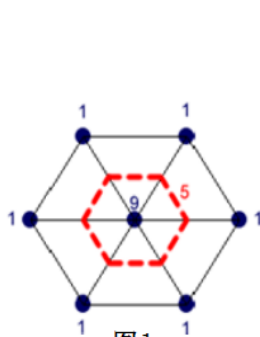
时间复杂度: $O(10000rc)$

空间复杂度: $O(10000rc)$

10000为估计的状态数量。

40 2010F Contour Mapping

40.1 题目大意



这样的图，给定黑点的高度。

然后要求绘制等高线，求最后等高线的长度和。

s 为扫描线的条数。 p 为每行的点数。 d 为三角形边长。 h 代表等高线的海拔间隔。

$$s \leq 100, p \leq 100, d \leq 10, h \leq 1000.$$

40.2 算法讨论

暴力枚举每个三角形，计算在该三角形中的等高线的长度和。

由于在三角形中的等高线是和高度有关的一次函数，且至多分成两部分，可以直接计算求和。

边界上的等高线要特殊处理。

40.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(ps)$

空间复杂度: $O(1)$

40.4 备注

当时我做这题的时候还没什么人过——为何现在却烂大街了啊!

41 2010G The Islands

41.1 题目大意

给定平面上从左到右的 n 个点，你要从点1往右达点 n ，再往左返回点1，共两趟，除点1，每个点只被访问一次，而且其中一趟经过点A，而另一趟经过点B，要求经过的路径长度最小。

$$n \leq 100.$$

41.2 算法讨论

很经典的动态规划问题，将问题看成求两条不相交的路径。

记 $f_{i,j}$ 表示通过点A的路径到达点 i ，通过点B的路径到达点 j ，且所有小于等于 $\max(i, j)$ 的点都被访问过了的路径和。

由于要输出方案，所以得记下转移。

41.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^2)$

空间复杂度: $O(n^2)$

41.4 备注

卡了我好久，因为没注意输出。而且我强行将我的程序写成了 $O(n^3)$ 的。

42 2010H Rain

42.1 题目大意

给定一个区域的地形，求问能够形成多少湖泊，以及其面积。

地形用三角形面来表示，给定每个点的坐标。

点数小于等于200。

42.2 算法讨论

首先找出所有的域，建立其相邻关系，如果域a的最低点有水能够使得域b的最低点有水，则连边。

删去所有和最外面的域连通的块。

然后输出所有剩下连通块的面积即可。

42.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n)$

空间复杂度: $O(n)$

42.4 备注

看了半天题没看懂。

43 2010I Robots on Ice

43.1 题目大意

在一个 $n * m$ 的网格中，要求机器人从点 $(n, 1)$ 到达点 $(n, 2)$ 的哈密尔顿路径的个数。其中第 $\lfloor \frac{im}{4} \rfloor (i \leq 4)$ 步所到达的点给定。

43.2 算法讨论

就是搜索而已。

我加入了以下剪枝：

1. 若图不连通，剪枝。
2. 若不能在指定时间到达指定点，剪枝。
3. 出现不合法的度数为1的点，剪枝。

这样就可以很慢地AC了。

43.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(3^{nm})$, 视剪枝而定。

时间复杂度: $O(nm)$

43.4 备注

剪了半个小时的枝, 1.9s跑过去了。

44 2010J Sharing Chocolate

44.1 题目大意

$r * c$ 的巧克力, 你每次可以将巧克力从中间某处水平或垂直切开。

第 n 个小伙伴想要大小为 k_i 的巧克力, 问是否能够满足各位小伙伴的要求。

$r, c \leq 100, n \leq 15$ 。

44.2 算法讨论

注意到 n 很小, 我们可以集合dp。

令 $f(S, x)$ 表示长度为 x 的巧克力是否可以分给 S 集合中的小伙伴。由于 S 确定, 巧克力的面积确定, 那么宽也就可以确定了。

这样总状态数是 $O(2^{15} * 100)$, 转移时采用枚举子集。

44.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(3^n * \min(r, c))$

空间复杂度: $O(2^n * \min(r, c))$

44.4 备注

我卡了下常数, 大概写法不是很好吧。

45 2010K Paperweight

45.1 题目大意

两个共面但不相交的四面体，内部有探测点。

要求在稳定摆放该六面体的前提下，探测点距离摆放面的最低和最高距离。

45.2 算法讨论

六面体总共只有5个点，所以我们完全可以 $\binom{5}{3}$ 枚举摆放面是哪个，将六面体坐标旋转，判断重心是否在摆放平面内，若是，则取出探测点的y坐标更新答案。

本题有个重要trick，摆放面不一定是个三角形——有可能四个点都在摆放平面上，那么判断重心的时候只要该重心在那个四边形的凸包内部即可。

所涉及到的三维计算几何都可以通过简单的叉积与点积实现。

45.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(1)$

空间复杂度: $O(1)$

45.4 备注

记得当初写完这题时完全就不想调试，所以交都没交，而是停止写作业长达一个月时间。

WF的题做起来真心不爽。

第五部分 ACM World Finals 2009

46 2009A Careful Approach

46.1 题目大意

N 架飞机，每架飞机只会在时间 $[a_i, b_i]$ 的时间降落。

要求你安排飞机下落的时间，使得飞机降落的最小时间间隔尽量大。

$N \leq 8$ 。

46.2 算法讨论

首先最小值最大问题，可以通过二分答案转化为检验问题。

接下来的判断则很简单了：枚举 N 的全排列，确定飞机进入的顺序，显然前面的飞机降落的时间早，越有利于之后的飞机降落，所以不断求出新的飞机降落的最小值，直到全部安排完，或找到不合法的。

46.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(N! * N * \log S)$

空间复杂度： $O(N)$

46.4 备注

可以用状压dp优化时间复杂度，不过在此数据规模下意义不大。

47 2009B My Bad

47.1 题目大意

给定一个逻辑电路以及若干的输入与对应的输出，至多有一个门出错。

判断逻辑电路是否出错，若出错，请找到出错的门以及出错方式。

逻辑电路的规模 $N \leq 40$ ，实验次数 $B \leq 2^8$

47.2 算法讨论

枚举出错的门，模拟即可。

47.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(N^2B)$

空间复杂度: $O(N)$

48 2009C The return of Carl

48.1 题目大意

给定正八面体表面上的两点，询问最短距离（只能在表面上移动）。

48.2 算法讨论

暴搜依次经过了哪些面，将其展开到平面上，求出对应两点之间的连线，其距离即为答案。注意连线可能不在展开的面上的情况，此时方案不合法。

48.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(2^8 * 8)$

空间复杂度: $O(8^3)$

48.4 备注

暴搜是需要剪枝的，因为数据组数达到了 10^5 。
这题分类讨论是可行的，不过我嫌麻烦没管了。

49 2009D Conduit Packing

49.1 题目大意

求最小的圆能够覆盖指定的四个圆，内部四个圆可以自由安放。

49.2 算法讨论

二分答案，判断是否能够放进指定的四个圆。

接下来依旧是暴搜，放好第一个圆后，剩下放入的圆一定至少与之前放的两个圆相交（包括最外面的圆），这样就可以唯一确定圆的位置了。

49.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(3! * 1 * 3 * 6 * \log S)$ 。

空间复杂度： $O(4)$

49.4 备注

应该有其它方法，不过我没看懂。

WF连续两道暴搜（或分类讨论）+几何题，出题人你累不累啊。

50 2009E Fare and Balanced

50.1 题目大意

给定一个有向无环图，要求增加若干边的边权，使得从S到T的所有路径的长度相等，且长度最小，每条路径上只能修改一条边的边权。

$N, M \leq 50000$ 。

50.2 算法讨论

自然而然的，最小长度即为S到T的最长路，由于是有向无环图，拓扑排序之后可以直接dp出来。

最开始会想到设立一个状态 $f(i)$ 表示要使得从S到点i的路径长度都相等， $dist(S, i)$ 至少要为多少，因为在最终答案中，S到达每个点的距离一定是个定值（除去不在S到T的路径上的点）。

但这样是不行的，因为这样会导致重复修改，所以必须转化思路。

每条路径上至多只有一处被修改（将最长路看成修改为0），实质上等价于一个割，而割的左右两边分别是到达S的路径长度都相等的点，和除此之外的点。将点分类，拿出它们之间的边即可。

50.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(M)$

空间复杂度: $O(M)$

50.4 备注

本题是道很好的题! 我因为算法错误纠结了好久。

51 2009F Deer-Proof Fence

51.1 题目大意

给定平面上 N 个点, 求用圆弧和直线将其围住的最小长度。点不一定都围在同一个围栏内部。围栏和树苗必须相隔一定距离。

$N \leq 9$ 。

51.2 算法讨论

如果只能用一个围栏, 那么答案就是点集的凸包周长加上一个圆的周长。

多个围栏, 需要使用集合dp。

51.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(3^N + 2^N * N \log N)$

空间复杂度: $O(2^N)$

52 2009G House of Cards

52.1 题目大意

只有两个花色和1-M个数字的扑克牌, 扑克牌没有重复, 叠成了一个牌堆。

两个人轮流游戏。

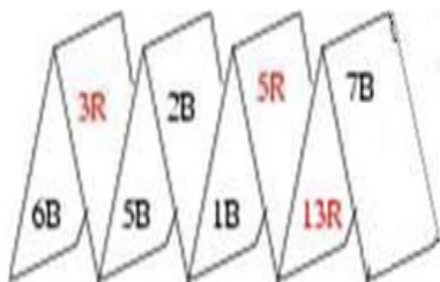


图 7: 由牌堆的最上面 8 张牌组成的山峰和山谷

取出牌堆上前 8 张牌叠成如上模样。接下来两人依次抽牌，每个人可以进行如下操作：

1. 如果手中没有牌，则持有该牌。
2. 若手中持有牌，可以和抽取的牌一同放在一个水平放置的牌上形成向上的三角形。
3. 可以将手中持有的牌（若持有）或者刚抽取的牌水平放置在两个相邻的三角形山峰中形成一个向下的三角形。

最终，两人持有的牌和形成的所有三角形的权值都会累进其花色所对应的玩家（三角形的花色为三张牌中牌数较多的花色，权值为三张牌的权值之和）。

注意：任意时刻一个人最多持有一张牌，且两张牌不能放在同一位置。

两个人都知道牌堆的顺序，求问先手能赢后手最多多少分？

$$5 \leq M \leq 13.$$

52.2 算法讨论

每个人的操作只和如下内容有关：

1. 剩余牌数。
2. 两人持有的牌。
3. 当前叠放的三角形轮廓线（轮廓线为对接下来放牌有影响的牌的集合，至多六张）上的牌。

将这个记为状态，进行记忆化搜索，记录下玩家之间的分数差。

52.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(S * M^3 \log M)$

空间复杂度: $O(S * M)$

S 为剩余牌数固定时的状态数，经程序实验，大致在3000以内。

52.4 备注

这是一道博弈相关的问题，据说可以使用alpha-beta剪枝进行搜索，不过我不知道那个有啥用，所以写了dp。

53 2009H The Ministers' Major Mess

53.1 题目大意

有 n 个议题和 m 个大臣。每个大臣会对至多四个议题投赞同或反对票，视作意见。

你要决定每个议题是否通过，使得每个大臣至少有超过半数的意见被采纳。更进一步，你要确定某些议题的属性：是否必须通过或不通过。

$$n \leq 100, m \leq 500.$$

53.2 算法讨论

要使得被采纳意见超过半数，那么只有1或2个议题的大臣的意见必须被采纳，而3,4个议题的大臣最多只能有一个意见不被采纳。

这样可以建立出一个逻辑关系：某些议题必须采纳，某些不能被采纳，若有些议题不被采纳，则某些议题必须采纳。

这是个2-sat经典问题。

而为了决定单独一个议题是否必须通过或不通过，可以假定其通过或不通过，运行2-sat算法，检查是否存在矛盾。

53.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(nm)$

空间复杂度: $O(m + n)$

53.4 备注

由于 n 很小, 没必要使用tarjan等算法, 直接floyd暴力搞就行了。

54 2009I Struts and Springs

54.1 题目大意

平面上有窗户, 窗户边界和窗户与其内部的窗户之间用直杆或弹簧连接。

每次改变最外层的窗户的大小, 询问其内部所有窗户的变化。

弹簧按比例伸缩, 窗户的边界不会相交。

$NQ \leq 500$ 。

54.2 算法讨论

处理出每个窗户直接包含的窗户有哪些, 从外层开始模拟。

建议 x 坐标和 y 坐标分开处理, 这样写起来很方便。

54.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(NQ)$

空间复杂度: $O(N)$

54.4 备注

难点在读题。

55 2009J Subway Timing

55.1 题目大意

给定一棵树。每条树边上都有一个以秒为单位的权, 要求将每个边权舍入成以分钟为单位的整数, 你需要决定每条边是向上取整还是向下取整,

从而使得所有点对的误差最大值最小。误差是指的是点对取整前的距离和取整后的距离的差的绝对值。距离即为两点之间的简单路径上的边权和。

$$n \leq 100.$$

55.2 算法讨论

这题是一道树形动态规划问题。

首先将边权对60取模不影响答案，取整可以视为选择边的一个权值。由于是求最大误差的最小值，先二分答案，判断是否存在一种安排使得误差小于等于该值。设该值为S。

直观上S的大小不会很大（大部分情况下都在100以内），而实际上 $118 = 59 * 2$ 是一个比较严格的界。

为什么？考虑链上的情况，我们可以得到一个前缀和数组 sum_i ，表示点1到点i的权值和。若 $sum_{i-1} + a < 60$ ，则令 $sum_i = sum_{i-1} + a$ ，否则令 $sum_i = sum_{i-1} + a - 60$ ，则必然有 $-60 \leq sum_i < 60$ 。故任意两点之间的差小于等于 $59 - (-59) = 118$ 。树上可以进行相同的分析，任意选择一个点为根，得到相同的前缀数组即可。

那么我们只需要用动态规划进行判断。动态规划，是利用规模更小的子问题解决原问题的方法。

考虑当前以点u为根的树。若其儿子所对应的子树都已经处理完毕，我们所需考虑的就只有通过u的路径，这样的路径必由两条从点u出发的边加上从对应儿子出发的路径组成。那么，我们需要在动态规划的状态中，记录从儿子出发的路径的信息（注意，我们只关心每条路径的权值）。考虑以下事实：

一 对于所有权值大于等于0的路径，我们只关心最大的权值。

二 对于所有权值小于0的路径，我们只关心最小的权值。

为什么呢？首先，动态规划会从小到大考虑所有路径，所以可以假定子树中的路径全部合法。设a, b为拼接的两条路径，若： $S \geq a \geq 0, 0 \geq b \geq -S$ ，则必有 $S \geq a + b \geq -S$ 。

其次，若 $a > 0, b > 0, a + b > S$ ，则将a或b替换成对应子树中权值最大的路径依旧大于S，小于亦然。

综上所述，我们可以得到我们所希望的状态 (u, l_1, l_2) ，表示是否有种配置使得以 u 为根的子树中，不存在长度绝对值大于 S 的路径，且从点 u 出发的路径中长度的最大值为 l_1 ，最小值为 $-l_2$ 。

考虑状态转移，最开始 u 只是一个单独的节点，状态为 $(u, 0, 0)$ 。依次枚举儿子 v ，加入子树 u 。设之前的状态是 (u, l_1, l_2) ， v 的状态为 (v, L_1, L_2) ，我们对于边 uv 的权值 $w(uv)$ 有向上或向下取整两种选择。分别枚举之，判断 $l_1 + L_2 + w(u, v)$ 之流是否符合题意，并计算出一个新的状态 $(u, \max(l_1, L_1 + w(uv)), \max(l_2, L_2 + w(uv)))$ ，注意该状态中对应的以 u 为根的子树是包括了子树 v 的。

这样做的时间复杂度是对于 n 条边，每次枚举了 $S^2 * S^2$ 个状态进行合并，时间复杂度 $O(nS^4)$ 。注意到，若确定了 u 和 l_1 的话， l_2 的值是越小越好，直观上可以认识到，当前路径是负数，加上小于等于 S 的数不可能大于 S ，而若加上的值是负数，则自己本身越大和也就越大，也就越有可能合法。这样只保留 l_1 的最小值，可以在复杂度中除掉一个 S^2 的因子，得到一个时间复杂度为 $O(nS^2)$ 的算法。加上之前的二分总复杂度为 $O(nS^2 \log S)$ 。（存在复杂度为 $O(nS \log S)$ 的算法，利用单调性进行更多的优化。）

这样，问题圆满解决。

55.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(nS \log S)$

空间复杂度： $O(nS)$

其中 S 为108

55.4 备注

复制粘贴了自己写的题解，应该没啥大不了的吧。

56 2009K Suffix-Replacement Grammars

56.1 题目大意

给定 M ($M \leq 100$)个规则：你能将一个特定的后缀替换成另一个长度相等的后缀。

给定一个长度为 len ($len \leq 20$)的串 A ，问将其变成 B 的最小步数。

56.2 算法讨论

由于只能替换成指定的串，所以替换后的串的后缀的集合是有限的（至多 $2M + 2$ 个），而且一旦进行了一次替换，则可以确定相应的后缀。

基于如上思路可以设计状态 $f(i, s, t)$ ，表示将长度为 i 的后缀 s 变成 t 所需要的最小步数。假设比 i 小的后缀都已经考虑过了则：

1. 若 $s[0] = t[0]$ ，其值为 $f(i - 1, s[1..(i - 1)], t[1..(i - 1)])$ 。
2. 若存在长度为 i 的规则，则 $f(i, s, t) = 1$ 。

接下来只需要使用floyd算法求出任意两个后缀转移的最短路即可，答案就是 $f(len, A, B)$ 。

56.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(len * M^3)$

空间复杂度： $O(len * M^2)$

第六部分 ACM World Finals 2008

57 2008A Air Conditioning Machinery

57.1 题目大意

在一个 $X * Y * Z (X, Y, Z \leq 20)$ 的立方体中，你有6根由四个正方体构成的L型导管，要求用最少的导管连接指定的两点。

57.2 算法讨论

从一个指定的点连出导管的方案数只有8种，可以直接dfs。

57.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(8^6)$

空间复杂度： $O(XYZ)$

57.4 备注

写法上就不要区分 x, y, z 坐标，开数组就行了，虽然看起来傻乎乎的，但有助于简短代码。

58 2008B Always an Integer

58.1 题目大意

给定变量为 n 的 $E (E \leq 100)$ 次多项式，问当 n 取任意正整数时这个多项式的值是否恒为整数？

多项式为 $f(x)/D$ 的形式， $f(x)$ 为整系数多项式。

58.2 算法讨论

随机若干 n 的值，检验。

58.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(\text{随机检验次数} * E)$

空间复杂度: $O(E)$

58.4 备注

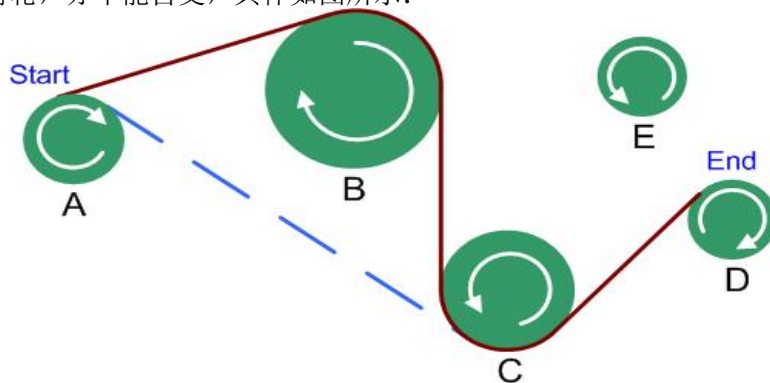
为什么随机可行呢? 考虑在模 D 意义下的方程: $f(x) = 0$, 若其并非恒等, 则其解的个数必然小于等于 E ——根据代数基本定理。无论在 D 很大还是 D 很小的时候检验不出来的概率都是很小的, 换言之, 我们只要试验 $[1, E + 1]$ 中的每个数即可。

uva上这题有点坑, 貌似输入的行末有空格, 浪费了我大量时间。

59 2008C Conveyor Belt

59.1 题目大意

平面上有 $N(N \leq 20)$ 个滑轮 (顺逆时钟给定), 求最短的传送带, 使其连接 S 和 T , 且没有连续两个滑轮之间的传送带长度超过 d 。传送带不能穿过滑轮, 亦不能自交, 具体如图所示:



59.2 算法讨论

其实是一道相当简单的题目。

由于顺逆时钟给定, 所以任意两个点之间的传送带是确定的: 若两个滑轮选择方向相同, 则为其外公切线, 否则为内公切线。

将公切线看成边，就可以开始dfs了，唯一要注意的就是公切线不能相交。

59.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(N!)$ ，但事实上远小于。

空间复杂度： $O(N^2)$

59.4 备注

这题真的非常非常简单，不过做的人好少啊。

60 2008D The Hare and the Hounds

60.1 题目大意

给定图，每条边都有一个从起点出发的角度和进入目标点的角度。

A和B从同一起点出发，A在追寻B的路径。

本来B的路径是确定的：到达任意一个点，都会选择偏转角度最小（若相同，靠右的优先）的路径继续前行直到到达终点。但是B会在某些特定的选择点随机选择一条边进入。为此，当A到达选择点时，会依次尝试出去的每条边（依旧按照最小偏转原理）直到确定B的路径——B的路径满足：
1.存在确定标记；2.确定标记和选择点的距离小于 $limit$ ；3.距离标记和选择点之间不存在选择点。当得知当前出去的边的路径不合法，A就得原路返回。保证A这样做能够找到B的路径。

请分别求出B的路径长度和A为了确定B的行程而走的路径长度。

$n, m \leq 200$ ，角度都是0到359中的整数。

60.2 算法讨论

模拟题而已。

写法上可以用 $e[a][b]$ 记下点a偏离b角度的边是哪条。

接下来就是细致的实现了。

60.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(360m^2)$

空间复杂度: $O(360n)$

60.4 备注

时间复杂度只是粗略估计, 得视数据而定, 没有仔细思考。

tsinsen的数据相比uva有所加强, 其区别在于: 存在只连出一条边的点, 那么就只能返回了。

因为我在uva上一遍A了, 所以深感郁闷。

61 2008E Huffman Codes

61.1 题目大意

给定一个huffman树, 问存在多少种频率分布满足该huffman树。

huffman树的叶子个数 $n \leq 20$ 。

频率用百分数表示, 且是整数。

61.2 算法讨论

huffman树的特点是第 i 层的权值一定大于第 $i+1$ 的权值。

所以可以一层一层, 同一层从左往右搜索每个点的权值, 严格维护huffman树的性质。

61.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(\binom{100}{n})$

空间复杂度: $O(n)$

61.4 备注

我整整想了一下午的多项式算法啊!

写了个搜索结果一遍A了。对得起人么?

62 2008F Glenbow Museum

62.1 题目大意

求问有多少个长度为 L 的角序列。

角序列是01序列，满足如果从一个点出发每次走1单位，0则左转90度，1则右转90度，其路径会形成一个星形多边形。

$L \leq 1000$ 。

62.2 算法讨论

当 L 为偶数，答案就是 $\binom{(L+4)/2}{4} + \binom{(L+2)/2}{4}$ ，否则为0。

要为星形多边形，即存在4对相邻的1，且不存在相邻的0，以此计算。

62.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(1)$

空间复杂度： $O(1)$

63 2008G Net Loss

63.1 题目大意

两个函数之间的距离定义为：

$$d(p, g) = \int_a^b (p(x) - g(x))^2 dx$$

对于一个定义在 $[-1, 1]$ 的函数 $f(x)$ ，要求用一个分段函数拟合，其由交点的横坐标为 c 的两个一次函数 $g_1(x), g_2(x)$ 组成，其相应的定义域分别为 $[-1, c), [c, 1]$ 。

多项式次数 $n \leq 10$ 。

63.2 算法讨论

假设交点的纵坐标为 x ，经积分发现 $d(p, g)$ 是关于两个一次函数斜率 k_1, k_2 的二次式。而其极值点亦是与 x 有关的二次式。

既然两个都是二次式，那么使用三分套三分解决问题。

63.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^2 \log^2 S)$

空间复杂度: $O(n)$

63.4 备注

推式子推的我头都晕了。

所以放弃数学，直接三分，虽然时间复杂度不优美，但是可以大大减少思考复杂度。

好像要注意精度来着。

64 2008H Painter

64.1 题目大意

平面上有不相交的 $n(n \leq 10^5)$ 个三角形，内部三角形的颜色要比外部三角形颜色深，问最多多少层。

但是三角形有可能相交，若相交请输出：“ERROR”。

64.2 算法讨论

若不用判断数据是否合法，则是很裸的扫描线处理拓扑关系的题。

但是这儿需要判断给定的线段是否存在交点，所以考虑如下算法：在扫描线时，若加入线段，则判断其上方的线段和其下方的线段是否与其相交。这可能漏掉与其相交的线段被其它线段遮蔽的情况，所以需要在删除一条线段时将其上方和其下方的线段拿出来判交。

为了避免垂直的直线，建议将线段偏移一下。

64.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n \log n)$

空间复杂度: $O(n)$

64.4 备注

卡了我好久。结果一遍A了。

后面才得知判断线段相交的算法叫做Shamos - Hoey algorithm什么的，挺高大上。

听说可以采用选择一条gcd很大的直线，从而避免垂直的情况，也是很高端的做法。

65 2008I Password Suspects

65.1 题目大意

已知长度为 N ($N \leq 25$)的字符串的 M ($M \leq 10$)个子串，字符串都是小写字母。

求合乎条件的字符串个数，若答案小于等于42，按字典序输出所有可能字符串。

65.2 算法讨论

建立AC自动机进行集合dp，挺经典的题目。

65.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(26N^2M2^M)$

空间复杂度: $O(2^M N^2 M + 26NM)$

65.4 备注

我代码好长，写残了T.T。

66 2008J The Sky is the Limit

66.1 题目大意

给定 N ($N \leq 100$)个山峰，求轮廓线长度，山峰是平面上的等腰三角形，且等腰三角形的底在同一条水平线上。

66.2 算法讨论

求出所有山峰之间的交点，对于每个区域找到其上的线段，计算长度。

66.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(n^3)$

空间复杂度: $O(n^2)$

67 2008K Steam Roller

67.1 题目大意

网格图上的最短路，但是若连续两条经过的边的方向不同则两者边权变为其原本边权的两倍。

$R, C \leq 100$ 。

67.2 算法讨论

以边为点，记录其是否翻倍。

依旧跑最短路算法即可。

67.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(8RC \log \max(R, C))$

空间复杂度: $O(8RC)$

67.4 备注

984ms过的，感觉压力很大。

我的程序状态冗余很多，这样做其实是有很多优化空间的。

第七部分 ACM World Finals 2007

68 2007A Consanguine Calculations

68.1 题目大意

给定父母儿子中两人的血型，求问另一人的血型。

68.2 算法讨论

暴枚。需要使用给定的生物学知识。

68.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(1)$

空间复杂度: $O(1)$

69 2007C Grand Prix

69.1 题目大意

平面上有折线段。旋转最小的角度，使得相邻的两点的x坐标递增。

若输入中某个值为0，则答案为0。

$N \leq 10000$ 。旋转角度用角度制，保留两位小数。

69.2 算法讨论

暴枚角度，旋转，判断。

69.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(360/S * N)$ ，S为精度。

空间复杂度: $O(N)$

69.4 备注

纠结了好久线性复杂度算法。看到有人暴力过了就写了暴力，感觉对不起人啊。

70 2007E Collecting Luggage

70.1 题目大意

一个简单多边形的传送带，人要与传送带上的货物汇合。传送带速度 v ，人的速度 w ，满足 $v \leq w$ 。求最短汇合时间，人不能进入多边形内部。

70.2 算法讨论

由于人的速度比货物快，所以能在时间 T_1 汇合，则必能在时间 $T_2(T_2 > T_1)$ 汇合，因此可以二分答案。

假设二分的当前时间为 T ，求出货物此时的位置，以及求出人与该位置之间的最短路——注意到人的路线与传送带只可能多边形的端点或者物品所在的线段上重合，所以可以预先floyd求出多边形上任意两点的最短路。判断路径中的一段线段是否合法，可以先用该线段与多边形判交，再判断线段中点是否多边形之内。

70.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(n^3)$

空间复杂度： $O(n^2)$

70.4 备注

由于Tsinsen那天不能评测，所以在uva上卡了好久精度，Wrong Answer都几乎屠版了。最终发现是一个函数内部手残了，郁闷。

71 2007F Marble Game

71.1 题目大意

$n * n (n \leq 4)$ 的方形棋盘中的某些格子上有带标号的小球，而在另一些格子上则是带标记的空洞，棋盘上有挡板。你可以抬起棋盘的某个方向（上下左右），使得所有小球朝反方向运动，直到遇到阻碍，比如棋盘边界、挡板、另一个小球，或者掉入洞中（此时小球和洞都消失）。

要求用最小步数使得所有小球都进入和其相同标记的空洞。

71.2 算法讨论

考虑总状态数，设小球个数为 $m (m \leq \frac{n^2}{2})$ ，则状态数为 $S = \frac{(n^2 - m + 1)!}{(n^2 - 2m)!}$ ，由于 n 很小， S 范围有限，可以 BFS+模拟。

71.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(S * n^2)$

空间复杂度： $O(S)$

72 2007G Network

72.1 题目大意

若干条信息 ($N \leq 5$) 被拆成了有序的 $M (M \leq 1000)$ 份信息段，依次进入。在任意时刻，你可以将当前进入的信息存入缓存区，亦可以输出当前信息或缓存区中的任意信息（该信息从缓存区中删除），唯一的要求是，属于同一条信息的信息段必须连续输出。请求出缓存区至少要多大。

72.2 算法讨论

枚举 N 条信息的输出顺序，接下来就可以使用简单的贪心算法：能输出信息就输出，否则存入缓存区。因为个人喜好，采用了 set 维护信息。

72.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(N! M \log M)$

空间复杂度: $O(M)$

72.4 备注

因为莫名原因, 这题我在Tsinsen上Wa了很多次, 个人才识短浅, 不知道为何错误, 只是改了改就对了, 但也不知道为何正确。

73 2007H Raising the Roof

73.1 题目大意

给定空间中不相交的若干三角形, 求从正上方能够看到的三角形的面积和。

$T \leq 1000, N \leq 100$ 。

N为输入中出现的顶点总数。

73.2 算法讨论

将三角形投影到平面, 求出所有边的交点。处理出所有的域, 并选择该域中的一个点作为基准, 枚举所有包含了该点的三角形, 选择高度最高的统计面积。

这应该比较正常的做法, 但我为了避免洞的情况采用了如下做法:

处理出所有交点的横坐标, 考察相邻两个横坐标之间的区域, 枚举所有和该坐标区域有交的三角形, 计算该三角形覆盖该区域的初始y坐标和结束y坐标, 枚举y坐标进行三角形的添加删除操作, 用set维护, 这样可以用 $O(\log n)$ 时间对于每个小区域查找到高度最高的三角形。

这样的做法通过了Tsinsen上的数据, 但是却因为未知原因无法通过uva。

为了解决问题, 我将用set维护改成用暴力枚举才AC。

73.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(T^4)$

空间复杂度: $O(T^2)$

73.4 备注

辛辛苦苦调了一天程序，最后暴力A了，我究竟该喜悦呢？还是该悲伤？——这时候只要微笑就可以了。

74 2007I Water Tanks

74.1 题目大意

给定 $N(N \leq 10)$ 个相邻的水箱，除了第一个开口其余皆封闭。其两两之间用高度依次递增的细导管连接。

从第一个水箱倒水，求问最多能倒多少水？一切符合物理学原理。

74.2 算法讨论

仔细考虑物理学原理，往第一个箱子内部注水，直到水到达第一根导管高度就会流入第二根管子。此时第一个水箱和第二个水箱依旧保持连通，维持在第一大气压，直到第二个水箱的水的高度达到该导管高度。此时第二个箱子中的水是否继续上涨就得看水压和大气压是否平衡。

若水能够上涨抵达第二根导管高度，则会重复第一个水箱和第二个水箱发生的事情，唯一的区别是：大气被分成了两部分，第一部分是位于从第三个水箱开始的所有水箱，第二部分留在第二个水箱中。第二个水箱和第三个水箱的水都会在其各自的大气压下上涨。

这种事情一再重复直到：1.到达最后一个水箱，2.水压不足以到达导管。

74.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(N)$

空间复杂度： $O(N)$

74.4 备注

“做了80道题，终于碰上完全不会做的了。”——我家的小狗。

75 2007J Tunnels

75.1 题目大意

$N(N \leq 50)$ 个点， $M(M \leq 1000)$ 条边的图，有间谍从点1出发，你可以监控到间谍，要求炸毁尽可能少的边，使得间谍无法到达点0。若间谍在边上的话，你不能炸毁间谍所在的边。

75.2 算法讨论

本题一个相当大的难点在于理解为什么答案不是最小割：一个5个点的图，连边：1-2,1-3,1-4,4-0,3-0,2-0。

但其实本题和最小割还是有一定的关系的。考虑划分点集S和点集T的最小割，点集T中任意两点之间的最小割和S集合没有关系（根据最小割树或聯集交集性質）。

最终的方案一定是这样的：不断割掉一些边，限定间谍可以到达的点集。点集中的点的特点是，阻止这些点到达点0所需炸毁的边+要炸毁的边（由于如上原因，两者的最小割不会相交，除非其中一个包含另一个，但是这都无法满足之后的条件）小于等于答案（当然点集中被包括当前点），这类似于最短路。

所以可以从小到大求出阻止点x到达点0的最小花费直到得到答案。

75.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(N * \text{网络流复杂度})$

空间复杂度： $O(M)$

75.4 备注

我不知道我的证明是否严谨，最小割树的结论也不知道用得对不对。

这题其实很有难度，木有lxy的提醒的话我应该是做不出这题的（不过如果没有他的误导的话我说不定能秒这题吧。。）

第八部分 其余题目

76 1998 A Crystal clear

76.1 题目大意

以平面上任意整点作半径为0.5的圆。给定一个多边形，求问这个多边形内部的圆面积（只计算多边形的内部部分）。圆在多边形内部，当前仅当：1. 要么圆内所有点刚好在多边形内部；2.或者多边形与圆相交的边一定通过圆心。

坐标范围 $P \leq 250$ ，多边形点数 $N \leq 25$ 。

76.2 算法讨论

枚举范围内每个圆，直接判断。

76.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(P^2N)$

空间复杂度： $O(N)$

77 1998 B Flight Planning

77.1 题目大意

飞机有 N 段飞行，每段飞行的耗费与该段和其之前的高度有关，求最小耗费。

$N \leq 100$ ，高度取值个数 $T \leq 20$ 。

77.2 算法讨论

$f_{i,j}$ 表示第 i 段飞行，高度为 j 的最小耗费。

枚举第 $i+1$ 段的高度进行转移。

77.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(NT^2)$

空间复杂度: $O(NT)$

78 1998 D Page Selection by Keyword Matching

78.1 题目大意

网页检索算法, 网页和搜索都用关键字描述, 关键字有序。

搜索和网页之间的相关度用 $f(A, B) = \sum (8 - i) * (8 - j) * [A_i = B_j]$ 表示。

操作会插入网页, 并查询, 对于查询请输出相关度最前面的5个网页。

关键字数 $N \leq 8$ 。

关键字长度 $len \leq 20$ 。

网页个数 $P \leq 25$ 。

78.2 算法讨论

模拟+排序。

78.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(QN^2 * len * P \log P)$

空间复杂度: $O(len * P)$

78.4 备注

我还错了几次, 真心神奇。

79 1998 E Petri Net Simulation

79.1 题目大意

一个简易的神经网络，点分为库($NT \leq 100$)和变迁($NP \leq 100$)，若指向某个变迁的库中都有值时，则这些库的值减1，变迁指向的库中的值加1。若同时存在多个满足条件的变迁，随机选一个即可。

请模拟最多 T ($T \leq 1000$)次操作，输出最终每个库中的值，以及进行了多少次操作。保证答案唯一。

79.2 算法讨论

模拟。

79.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(TN^2)$

空间复杂度: $O(T^2)$

80 2001 A Airport Configuration

80.1 题目大意

记 $w(i, j) = |i - j| + 1$ ，以及给定函数 $f(i, j)$ 。

给定若干组 x_i, y_i ，请求出 $\sum f(x_i, y_i) * w(i, j)$ 。

$n \leq 25, Q \leq 20$

80.2 算法讨论

模拟。

80.3 时空复杂度

时间复杂度: $O(Qn^2)$

空间复杂度: $O(n^2)$

81 2002 A Balloons in a Box

81.1 题目大意

箱子里有气球，按照任意顺序使气球膨胀直到碰到障碍。问最终气球最大能占据多大的体积。

$$N \leq 6。$$

81.2 算法讨论

参见各种OI入门书籍第一章第一节。

81.3 时空复杂度

时间复杂度: $O((N + 1)!)$

空间复杂度: $O(1)$

81.4 备注

其实这题好坑好坑。要注意气球在箱子外的情况，毕竟只说了箱子里有气球，没说箱子外没有啊。

82 2004 C Image is everything

82.1 题目大意

$N * N * N (N \leq 10)$ 的立方体，但有些地方有空缺，每个 $1*1*1$ 的小立方体都有涂有'R','G','B'中的一种颜色。

给定六个面的视图，求问立方体中最多由多少小立方体组成。

82.2 算法讨论

若当前有物体引发矛盾，则这个点不存在。（题目保证有解存在）

具体证明：

将所有可以透视的地方的点全部删除，一个点会引发矛盾，则其在至少两个方向上没有其它物体——因为某种原因删除了，而从这两个方向看到的情况与事实不符合，所以这个点必须不存在。如果这个点符合条件是

否就一定存在呢？使得，这样一定是最优的——题目相当于要满足很多个约束条件：从某个方向看到的第一个物体的颜色是什么。当前点确定不会引发矛盾而会使得条件减少，必然是好的。

一旦找不到矛盾点了就可以停止了，因为没有矛盾那就做出来了，不是吗？

82.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(N^4)$

空间复杂度： $O(N^3)$

82.4 备注

这题其实挺难的。

83 2004 J Air Traffic Control

83.1 题目大意

给定平面上 n 个，这 n 个点按照 y 坐标大的优先级高， y 坐标相同时 x 坐标大的优先级高的顺序排序。

一个控制范围是指的一个圆心 P 和其所能控制的点的个数 val ，控制范围控制的点集是按照到 P 的距离从小到大，距离相同按照以上优先级选择 val 个点。控制范围的半径是 P 到控制的点的最远距离。控制范围的边界是以 P 为圆心， r 为半径的圆。

给定 m 个控制范围所能控制的点数和控制范围边界上的两个点。请确定其所控制的点集。若有多个点集满足题意，依照优先级考虑所有点，若某点属于某控制范围而不属于另一个，那么包含该点的控制范围较优。

请对于所有 i ，计算出被 i 个控制范围控制的点的个数。

$n \leq 100, m \leq 10$

83.2 算法讨论

这本来是一道非常简单的模拟题，由于uva上的数据和题意问题将此题的难度提高了好几个档次。

只需要注意到控制范围的边界上一定会存在点集中的某个点即可。枚举那个点就可以三点确定控制范围，按照题意求得控制的点集，然后进行简单的统计。

为子凑字数下面给出具体的算法流程

A 读入 n 个点，将其按照优先级排序。

B 依次处理 m 个控制范围。具体方法如下：

(a) 枚举边界上的点 i

(b) 根据点 i 和给定的两个点计算出圆心和半径，求得在该圆内的点集。

(c) 将该点集与目前点集比较，若更优则取代

(d) 将最后得到的点集的点的计数器加1

C 枚举 i ，统计有多少个点的计数器为 i ，输出。

至于给定三点求外接圆的方法是非常简单的，直接列出圆的方程解之即可，在此就不赘述了。

83.3 时空复杂度

时间复杂度： $O(mn^2)$

空间复杂度： $O(n)$