Attack of the Clones解题报告

吴作凡

October 23, 2015

1 题意

我们称一个形为f:A→B的函数叫做布尔函数，其中A是所有长度为n且仅由0和1组成的数列的集合，B={0,1}，我们称n为布尔函数的项数。

现在有四个元素是n项布尔函数的集合：

- Z集合是所有满足f(0,0,...,0)=0的函数的集合；
- P集合是所有满足f(1,1,...,1)=1的函数的集合；
- D集合是所有满足!f(x1,x2,...,xn)=f(!x1,!x2,...,!xn)的函数的集合，其中x1,x2,...,xn为任意0或1的数，!符号表示取反，也就是!0=1，!1=0；
- A集合是所有满足如下条件的函数的集合：

  如果$f(x1,...,x_{i-1},a,x_{i+1},...,xn) = f(x1,...,x_{i-1},b,x_{i+1},...,xn)$

  则$f(y1,...,y_{i-1},a,y_{i+1},...,yn) = f(y1,...,y_{i-1},b,y_{i+1},...,yn)$。

  a和b都在位置i，这个对于任意i,x1,...,xn,y1,...yn,a,b都成立。

现在给你一个由Z,P,D,A,v,^,!,(,),\组成的合法表达式，其中ZPDA表示如上所述的集合，v^!\表示运算，下面给出每个运算的含义。其中用A和B表示两个集合。

- v：AvB表示A和B的并集。
- ^：A^B表示A和B的交集。
- !：!A表示以所有n项布尔函数的集合为全集时的A集合的补集。
- \：A\B表示A和B的差集。

其中!优先级最高而其余三个运算优先级相同，()的优先级高于!。显然这个表达式的结果是一个以函数为元素的集合，求出这个集合的元素个数。

多组询问，最多100组，表达式最多含100个字符，所有的询问的n($n \leq 100$)相同，时限1s。

2 题解

2.1 分析

容易发现可以把全集分成16个不重不漏的部分，分别是不属于Z不属于p不属于D不属于A的函数、属于Z不属于P不属于D不属于A的函数、不属于Z属于P不属于D不属于A的函数等等（即对于ZPDA每一个集合都分成属于或不属于两个部分，总共是$2^4 = 16$个部分）。而对于一个部分的两个函数，要么同时满足表达式，要么同时不满足，所以可以先求出每一个部分的大小，再处理表达式，求出哪些部分满足表达式。

2.2 求出每一个部分的大小

可以给每一部分一个4位二进制的编号，分别表示是否属于ZPDA，属于则这一位为1，不属于为0，于是可以记F_i表示i部分大小。

直接求出每一个部分大小可能有些困难，我们可以考虑一个更加简单的问题：把原来16个部分的条件改一改，将必须不属于这个集合改成可以属于也可以不属于这个集合，那么我们就可以求出这些部分的大小，记为G_i(i是一个4位二进制的编号，分别表示是否必须属于ZPDA，如果必须属于则为1，为0则不要求必须不属于该集合)，可以通过G_i解出F_i。

如果我们求出了G_i，可以知道$G_i = \sum_{i \subseteq j} F_j$(其中$i \subseteq j$的含义是i的二进制位中为1的位在j中也必须为1)。容易发现$F_i = G_i - \sum_{i \subseteq j, i \neq j} F_j$，因为$j > i$，可以从后向前推出所有$F_i$。

现在的问题就是如何求出G_i，这里没有很好的办法，只能手算出来。下面给出每一部分的答案和原因。

- 0000：答案2^{2^n}，原因：任意n项布尔函数都满足条件，而一个布尔函数有2^n个函数值，对于每一个函数值都有0或1两种取法。
- 1000：答案2^{2^n-1}，原因：这里必须属于Z，那么f(0,0,...,0)的函数值被确定下来了，剩下的$2^n - 1$个函数值可以任意选取。
- 0100：答案2^{2^n-1}，原因：这里必须属于P，同理于1000。
- 1100：答案2^{2^n-2}，原因：这里必须属于Z和P，同理于1000，有两个函数值被固定。
- 0010：答案$2^{2^{n-1}}$，原因：这里必须属于D，可以把2^n个函数值分为两两一对，也就是f(x1,x2,...,xn)和f(!x1,!x2,...,!xn)，任意一对有两种选择。
- 1010：答案$2^{2^{n-1}-1}$，原因：这里必须属于Z和D，同理于0010，但是有一对被确定。
- 0110：答案$2^{2^{n-1}-1}$，原因：这里必须属于P和D，同理于1010。
- 1110：答案$2^{2^{n-1}-1}$，原因：这里必须属于ZPD，同理于1010，注意还是只有一对被确定。

- 0001：答案2^{n+1}，原因：这里必须属于A，A是最复杂的一个集合，但是我们可以把在A内的函数都表示成f(x1,...,xn)=a0+x1*a1+x2*a2+...+xn*an mod 2的形式，这里a0,a1...an都是0或1，mod表示取余。首先这种形式的函数肯定属于A集合。

  对于函数f的一个位置i，由A集合的条件可以知道对于任意的$x1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., xn$，要么$f(x1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., xn) = f(x1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., xn)$ 都成立，要么都不成立。如果都成立，那么可以令ai=0，因为函数值和第i位没有任何关系，而都不成立的话，可以令ai=1，然后再调整一下常数项。所以所有的函数都可以表示成这种形式。

  而a0,a1...an有n+1个数，每个数可以为0或1，因此答案是2^{n+1}。

- 1001：答案2^n，原因：这里必须属于Z和A，由Z的条件可知a0=0。
- 0101：答案2^n，原因：这里必须属于P和A，由P的条件可知a0=!(a1+a2+...+an mod 2)。
- 1101：答案2^{n-1}，原因：这里必须属于ZPA，必须满足a0=0,a1+a2+...+an mod 2=1。
- 0011：答案2^n，原因：这里必须属于D和A，必须满足$f(x1, x2, ..., xn) + f(!x1, !x2, ..., !xn) \bmod 2 = 2a0 + a1(x1+!x1) + a2(x2+!x2) + ... + an(xn+!xn) \bmod 2 = a1 + a2 + ... + an \bmod 2 = 1$。
- 1011：答案2^{n-1}，原因：这里必须属于ZDA，必须满足a1+a2+...+an=1，a0=0。
- 0111：答案2^{n-1}，原因：这里必须属于PDA，同理于1011。
- 1111：答案2^{n-1}，原因：这里必须属于ZPDA，同理于1011。

2.3 表达式的处理

我们可以用一个16位的二进制表示这16个部分是否属于一个集合，第i位为1表示第i部分属于，否则不属于。

下面我们分析一下原来的几个集合运算所对应的二进制运算。A和B表示两个集合，对应的16位二进制为a和b。

- v：AvB可以表示成a or b。这里的or表示按位或。
- ^：A^B可以表示成a and b。这里的and表示按位与。
- !：!A可以表示成65535-a。实质上是将a的16位二进制按位取反。
- \：A\B可以表示成a-(a and b)。这里的and表示按位与。

然后我们就可以用栈来处理这个表达式，因为是经典问题这里不再赘述。最后再将属于答案集合的部分大小累加起来即可。

2.4 时空复杂度

时间复杂度$O\left(logn+S\right)$，其中S指的是所有询问串的长度之和，$O(logn)$的部分指的是求16个部分大小里的快速幂时间，注意这里需要计算2^{2^n}，要用到费马小定理。

空间复杂度$O\left(MaxLen\right)$，其中MaxLen指的是最大可能串长，为100。