DEG3MAXT 解题报告

福州一中 董克凡

Contents

1 题目大意

给定一张n个点，m条边的带权联通无向图，保证其中每个点双连通分量大小小于10，求张图的一个3点度限制最大生成树，即每个点点度不超过3，生成树可以不包括所有顶点，在保证边权和最大的情况下，输出方案数对2^{32}取模的结果。

2 数据范围

$1 \le n \le 100$，$n-1 \le m \le \binom{n}{2}$, $-1000 \le w \le 1000$，其中w表示边权，保证数据无重边，自环。

3 题解

首先，注意到对于两个点双连通分量，我们可以分开来考虑它们的3点度限制生成树，并且只需要记录下每个生成树中割点的度数就可以很容易地合并这两棵树，接下来我们考虑如何求出一个点双连通分量的3点度限制最大生成树。

由于题目限制这个分量中包含的点只有9个，那么就可以使用状态压缩动态规划来解决。记$F[s]$为所有点的度数压缩以后的结果为s时的最大生成树（此处应该要求所有度数不为0的点联通），由于每个点度数只能取$\{0,1,2,3\}$，所以s应该为一个不超过18位的二进制数，转移过程中为了避免重复计数，我们应该每次在s中选择一个度数不为0的编号最小的点来考虑，记这个点为x，若$deg_x = 1$，那么直接枚举与它相邻的点即可：

$$F[s] = \max_i \{F[s \setminus \{x:1, i:1\}] \mid deg_i > 1 \; or \; s = \{x:1, i:1\}\}$$

当$deg_x \neq 1$的时候，可以枚举与x联通的一个联通分量：

$$F[s] = \max_{a,b} \{F[a + \{x:1\}] + F[b + \{x:deg_x - 1\} \mid s = a + b + \{x:deg\}\}$$

此处应注意处理计数时重复统计的问题。

接下来，考虑多个双联通分量的情况。我们可以对于每一个联通分量单独考虑，然后对于不同的联通分量，需要记录的仅仅是它们的割点的

度数。由于整个图是联通图，所以所有的点双连通分量组成了一个树形结构，这一部分用树DP来处理即可。

4 复杂度分析

对于每个大小为k的双联通分量，我们要枚举的是每一个合法的点度集合以及它的某一个子集。考虑到避免重复统计，所以枚举一个大小为k的集合的子集的复杂度是$\mathcal{O}\left(3^{k-1}\right)$，对于每一个大小为$k$的点的集合，对应的点度集合应该是$\mathcal{O}\left(3^{k}\right)$个，所以总复杂度应该是$\mathcal{O}\left(9^{k-1}\right)$，考虑到度数集合的合法性，此处枚举个数为百万级别。

第二部分树DP复杂度为$\mathcal{O}\left(m\right)$

所以总复杂度上界为$\mathcal{O}\left(n * 9^{k-1}\right)$，其中$k$为最大的双联通分量的大小，此处$k = 9$