Max Circumference 解题报告

绍兴市第一中学 任之洲

1 试题来源

Codechef OCT 12 MAXCIR

2 试题大意

给出一个三角形ABC，以及N个操作。第i个操作有两个参数x_i, y_i，使用这个操作可以使得点A的x坐标增加x_i，并且y坐标增加y_i。

你可以使用最多K个操作，这些操作的影响叠加，同一个操作不能重复使用，ABC三个点允许共线或重合。

最大化三角形ABC的周长，答案的**绝对误差**必须小于10^{-12}。

数据范围：$K \le N \le 500$，$|A_x|, |A_y|, |B_x|, |B_y|, |C_x|, |C_y| \le 10^9$，$|x_i|, |y_i| \le 10^6$

3 算法介绍

3.1 问题转化

由于$|BC|$是固定的，所以只需要考虑最大化$|AB| + |AC|$，但是这将涉及到平方根的运算，所以考虑从其他方向求解最大值。

引理1. 设点A的最终坐标为(X, Y)，可以找到两个实数u, v，使得在题设条件下，最大化函数$f(X, Y) = uX + vY$的同时，$|AB| + |AC|$ 也最大化。

Proof. 设可以达到的$|AB| + |AC|$的最大值为D，那么所有合法的操作方案都满足$|AB| + |AC| \le D$，这个图像可以表示为一个焦点为B, C的椭圆，最优解A'在这

个椭圆的圆周上。那么，只需要通过求解A'的切线方程就可以找到一组合适的u, v了。 □

分析至此，问题就转化为找到合适的u, v，并找到最大化线性函数$f(X, Y) = uX + vY$的方案。

3.2 算法思路

假设已经确定了u, v，那么每个操作对函数$f(X, Y)$的贡献是独立的，其值为$f(x_i, y_i)$，排序后取前K个正权操作即可。

考虑$f(x_i, y_i) = f(x_j, y_j)$的情况，可以解出两组$(u, v)$，把这两组$(u, v)$看作向量后，它们关于原点对称，分割出的两个半平面将确定$f(x_i, y_i)$和$f(x_j, y_j)$的大小关系。

那么，可以尝试对于每一对操作都求出其相等时的向量，把这些向量按极角排序后，在相邻两个向量夹角中随意选取一个向量作为(u, v)，排序计算，这样可以得到一个$O(N^3 \log N)$的算法。

容易发现，重新排序这一步实际上是不需要的，每转过一个向量，只需要将涉及到的操作进行修改，再二分出前K个正权操作，前缀和可以在交换相邻操作是$O(1)$更新。

由于是找前K个正权操作，所以$f(x_i, y_i)$的正负也会影响操作的选取。考虑$f(x_i, y_i) = 0$的情况，求出的两组向量也需要加入排序。

整个算法的瓶颈在于对$O(N^2)$个向量的排序，以及$O(N^2)$次二分。

时间复杂度$O(N^2 \log N)$，空间复杂度$O(N^2)$。

3.3 误差处理

由于坐标范围比较大，答案要求绝对误差小于10^{-12}，精度误差可能会出现在以下的几个子问题中。

在相邻两个向量夹角中随意选取一个向量：这个问题比较简单，将两个向量相加即能得到一个这样的向量，只要注意这两个向量共线的情况。

把向量按极角排序：$atan2$函数的精度并不能满足需求，可以将象限分开，

用叉积排序。

平方根运算：答案要求绝对误差小于10^{-12}，而点的坐标范围为10^9级别，需要特殊的开平方根算法来保证精度。

设$sqrt(S) = I + D$，其中I为整数部分，D为小数部分，将I和D分开计算，其中D的计算较为复杂：

$$
\begin{aligned}
I^2 + 2ID + D^2 &= S \\
D &= \frac{S - I^2}{2I + D} \\
D &= \frac{S - I^2}{I + \sqrt{S}}
\end{aligned}
$$

上式中的$\sqrt{S}$可以直接使用内置函数计算。