Dissonant Numbers 解题报告

绍兴市第一中学 任之洲

1 试题来源

Project Euler 515

2 试题大意

设$d(p,n,0)$的值为n在模p域下的乘法逆元。
对于$k \geq 1$，设

$$d(p,n,k)=\sum_{i=1}^{n} d(p,i,k-1)$$

设

$$D(a,b,k)=\sum_{\substack{a \leq p < a+b \\ p\text{为质数}}} (d(p,p-1,k)\ mod\ p)$$

求$D(10^9,10^5,10^5)$。

3 算法介绍

为了方便说明，后文中所有“=”均表示在对应模域下同余。

3.1 算法一

考虑$d(p,n,k)$的递归计算过程，递归到$k=0$时贡献n^{p-2}的值，贡献次数为到达那个位置的方案数。

考虑n^{p-2}对$d(p, p-1, k)$的贡献次数，即选取递归k层的$d(p, n', k')$的方案数，可以用组合数计算，相当于把$k-1$个物品放置到$p-n$个位置中，即

$$\binom{p-n-2+k}{k-1} = \frac{(p-n-2+k)!}{(p-n-1)!(k-1)!}$$

那么，总贡献即为

$$\begin{aligned} n^{p-2}\binom{p-n-2+k}{k-1} &= \frac{(p-n-2+k)!}{(p-n-1)!(k-1)!n} \\ &= -\frac{(p-n-2+k)!}{(p-n-1)!(k-1)!(p-n)} \\ &= -\frac{(p-n-2+k)!}{(p-n)!(k-1)!} \\ &= -\frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=1}^{k-1}(p-n+i) \end{aligned}$$

那么，可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p-1} n^{p-2}\binom{p-n-2+k}{k-1} &= \sum_{n=1}^{p-1}\frac{(p-n-2+k)!}{(p-n-1)!(k-1)!n} \\ &= -\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{p-1}\prod_{i=1}^{k-2}(p-n+i) \end{aligned}$$

其中$\prod_{i=1}^{k-2}(p-n+i)$是一个关于n的$k-2$阶多项式，设这个多项式为$\sum_{i=0}^{k-2} a_i n^i$，那么

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p-1} n^{p-2}\binom{p-n-2+k}{k-1} &= -\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{p-1}\prod_{i=1}^{k-2}(p-n+i) \\ &= -\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{p-1}\sum_{i=0}^{k-2} a_i n^i \\ &= -\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-2} a_i \sum_{n=1}^{p-1} n^i \end{aligned}$$

其中$\sum_{n=1}^{m} n^i$是一个关于m的$i+1$阶多项式，所以这个式子是一个$k-1$阶多项式，即设

$$F(x) = -\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-2} a_i \sum_{n=1}^{x} n^i$$

需要求的就是$F(p-1)$，$F(x)$是一个$k-1$阶多项式。

可以利用Lagrange插值法进行计算，其中插值公式为

$$F(x)=\sum_{j=1}^{k}y_j\prod_{i=0,i\neq j}^{k}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

上式中的x_i,y_i对应的是已知的点值，为了计算计算方便，x_i可以取$1\sim k$，这样分母中的x_j-x_i可以转化为阶乘，分子也可以类似计算，完成$O(k)$插值。

不考虑质数判断部分的复杂度，时间复杂度$O(bk)$，空间复杂度$O(k)$，作为一道PE题已经能够在线下得到答案。

3.2 算法二

在算法一中，我们需要计算的式子为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p-1}n^{p-2}\binom{p-n-2+k}{k-1} &= -\sum_{n=1}^{p-1}\frac{(p-n-2+k)!}{(p-n)!(k-1)!}\\ &= -\frac{1}{k-1}\sum_{n=1}^{p-1}\binom{p-n-2+k}{k-2}\\ &= -\frac{1}{k-1}\sum_{n=1}^{p-1}\binom{n+k-2}{k-2}\end{aligned}$$

有组合恒等式

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i+m}{m}=\binom{n+m+1}{m+1}$$

这个恒等式的直观意义为：

- 等式左边：$0\sim n$个物品与m个另外物品排列组合的方案数。
- 等式右边：n个物品与$m+1$个另外物品排列组合的方案数。
- 在等式右边，$n+m+1$个位置中选出了$m+1$个，将最后一个被选出位置作为确定等式左侧i的值的分割线。

所以

$$\sum_{n=1}^{p-1}\binom{n+k-2}{k-2}=\binom{p+k-2}{k-1}-1$$

由Lucas定理得

$$\binom{p+k-2}{k-1} = \binom{p}{0}\binom{k-2}{k-1} = 0$$

所以

$$\begin{aligned} d(p, p-1, k) &= \sum_{n=1}^{p-1} n^{p-2}\binom{p-n-2+k}{k-1} \\ &= \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

同样不考虑质数判断部分的复杂度，时间复杂度$O(b\log(a+b))$，空间复杂度$O(1)$。