

Rally 解题报告

东营市胜利第一中学 姜志豪

1 试题来源

POI 2014

bzoj提交: <http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3832>

2 试题大意

给出一张有 n 个点 m 条边的有向无环图，每条边的长度都是1。

找出一个点，使得删掉这个点后剩余的图中的最长路径最短。

输出删除的点、删除这个点后图中的最长路径长度。

多解时输出任意一组。

$2 \leq n \leq 5 \times 10^5, 1 \leq m \leq 10^6$

3 算法介绍

3.1 算法一

先考虑如何求图中的最长路径长度。

可以先对图进行拓扑排序，求出点 i 在拓扑序中的位置 p_i 。按拓扑序进行dp，求以点 i 为终点的最长路径长度 f_i 。

也可以按拓扑序的逆序进行dp，求出以点 i 为起点的最长路径长度 g_i 。

枚举删除的点，每次都dp一遍求出最长路径长度。

时间复杂度: $O(nm)$

3.2 算法二

删除点 x 时，对于一条剩余图上的长度为 L 的路径，一定是前 $k(0 \leq k \leq L)$ 个点的拓扑序比 x 小，后 $L - k$ 个点的拓扑序比 x 大。可以将剩余图上的路径分为两类：

1. 路径上所有点的拓扑序都比 x 大或小。
2. 路径上存在一条边，连接了一个拓扑序比 x 小的点和一个拓扑序比 x 大的点。

按拓扑序枚举删除的点 x ，用权值线段树对这两类路径进行维护。具体过程如下：

最初，把所有点 i 的 g_i 加入线段树中。

当枚举到 x 时，依次进行：

1. 将 g_x 从线段树中删除。
2. 枚举所有终点为 x 的边 E ，将包含 E 的最长路径长度从线段树中删除。若 E 的起点为 a 终点为 b ，那么包含它的最长路径长度为 $f_a + g_b + 1$ 。

3. 现在线段树中的最大值就是不经过点 x 的最长路径长度。求出这个值，更新答案。

4. 将 f_x 加入线段树。

5. 枚举所有起点为 x 的边 E ，将包含 E 的最长路径长度加入线段树。

时间复杂度： $O(m \cdot \log n)$