MAGIC 解题报告

‹1› 题目大意

给定一个无向图。开始时，两个人分别在两个点上。他们每个人轮流对无向图进行加边，可以加任何一条原来不存在的边，但任意两点之间不能多于一条边且不能有自环，加完后如果操作者有法力值的话可以选择将自己移动到任意一个点并消耗 1 的法力值也可以什么也不做，这样之后如果他们两个人位于同一个联通块，则操作者输。问是否先手必胜。

‹2› 解题思路

分析发现，这道题有许多的情况，只要分析讨论清楚即可解决。

1. 两个人一开始就在一个联通块内，那么先手必胜

一下讨论均为一开始两个人不在一个联通块内的情况。

我们将上述情况，即回合结束后双方都在一个联通块内的情况称为结束状态。

我们将在双方都用最优策略时，结束状态前一步的状态叫做最终状态。当前玩家肯定不希望加一条使得自己所在的联通块与对方所在的相连，即使加了，他也会跳出这个联通块，不然他就输了。所以最终状态一定是，只有两个联通块，每一块内都是完全图且两个人分别在这两个联通块内，输的人不得不加一条连接两个联通块的边。可以发现先手是否必胜其实与最终状态的边数的奇偶性有关，不妨将这个边数设为 A。A 减去已有的边数，如果为奇数则先手胜，否则后手胜。

然后考虑从点数 n 的奇偶性出发分类。

2. 点数 n 是奇数

如果 n 是奇数那么显然，最后情况中的边数的奇偶性是固定的，可以直接计算出 A 得出答案，无论是否有法力值。

设 $n=2k+1$，k 为正整数，最终状态中有一个联通块内有 p 个点

则 $A=n*(n+1)/2-(n-p)*p=k*(2k+1)-(2k+1-p)*p$，可以发现 $2k+1$ 为奇数，$(2k+1-p)*p$ 为偶数。

因此 A 的奇偶性与 k 相同。A 的奇偶性可以通过 n 得到，所以胜负确定。

一下讨论均为 n 为偶数的情况

考虑 n 为偶数的情况。那么其实最终状态有两种，一种是两个联通块的点数都为奇数，一种是都为偶数。这两种所得到的 A 的奇偶性恰好相反。也就是说，一定有一方希望最终状态是第一种，另一方希望最终状态是第二种。

所谓希望最终状态是第 k 种，也就是，当最终状态是 k 时必胜。而哪一方希望什么是可以通过像情况 2 一样方法算出来的。

3. 法力 p 为 0

如果 p 为 0,也就说两个人都只能待在自己的联通块中。不妨设先手希望最终状态是第一种，考虑两个人一开始所在的联通块。如果这两个联通块中有至少一个点数为奇数，先手必胜。

因为每次对于先手，如果他们两个所在的联通块中有一个为偶，那么他就可以选某个点数为奇数的其他联通块(指除他们两个人所在的联通块以外的)C，将它们连起来，否则，就随便连一条(当然，不能连他们两个所在联通块之间的边)。这样的 C 一定是存在的,因为总共的奇数联通块的个数为偶数。对于后手通过操作无法使得他们两个所在的联通块的点的个数均为偶数，于是对于先手的情况不变。由于游戏一定会结束，而结束时一定是第一种情况，所以先手必胜。

相反，如果他们所在两个联通块一开始都是偶数那么先手就必败。

而如果先手希望的是第二种状态，那么整个情况是对偶的。即当两个人所在的联通块中至少有一个点数为偶数时，先手必胜，否则必败。

4. 法力 p 不为 0

那么其实在大多数情况中都是希望最终状态为第二种的人必胜。

因为对于希望最终状态是第二种的人来说，他可以在只剩两个点数为奇数的联通块的时候，将这两个联通块合并，并且跳到一个(有没有人的)偶数的块中，只要有一点法力，而且无论先手后手。所以只要抛掉一些特殊的情况即可。

一种情况是一开始就只有两个联通块，且都为奇数，那么最终状态就固定了，可以直接得出答案。

另一种当前总共的联通块为三个，且有两个为奇数，而先手希望最终状态为第一种情况，那么可以将其中一个奇数块与偶数块合并那么，先手仍然必胜。

对于其他情况，都是希望最终状态为第二种的人必胜。

‹3› 算法流程 & 复杂度分析

根据上述按 1234 的顺序判断即可。

1 中需要判断两个点是否处于同一联通块，可用 bfs，时间复杂度为 O(n)

2 可直接判断得到，效率 O(1)

34 需计算一个点所在联通块中有关多少点，可用 bfs，时间复杂度为 O(n)

另外 4 中还需计算有多少个联通块，仍然可以 bfs，时间复杂度为 O(n)

综上，时间复杂度为 O(n)，空间复杂度为 O(n)

题目链接 https://www.codechef.com/problems/MAGIC