Something About Divisors解题报告

张坤

1、题目大意

给定正整数B,X，求存在D(N<D≤B,且D|N*X)的正整数N的个数。

2、算法讨论

本题的关键是去除重复计算。

令正整数$K=\dfrac{N\times X}{D}$,因为$\begin{cases}\mathrm{N}<\mathrm{D}\le\mathrm{B}\\ \mathrm{D}\mid\mathrm{N}\times\mathrm{X}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{K}<\mathrm{X}\\ \mathrm{N}\le\dfrac{\mathrm{B}*\mathrm{K}}{\mathrm{X}}\\ \mathrm{K}\mid\mathrm{N}\times\mathrm{X}\end{cases}$。显然N会被不同的K重复计算,所以我们需要统计的是对于K满足$\mathrm{K}\mid\mathrm{N}\times\mathrm{X}$但不存在$\mathrm{J}\mid\mathrm{N}\times\mathrm{X}(\mathrm{K}<\mathrm{J}<\mathrm{X})$的N的个数$\mathrm{S(K)}$,即K是最大的能整除$\mathrm{N}\times\mathrm{X}$的N的个数，答案为$\sum_{K=1}^{X-1}S(K)$。

下面我们要在确定B和X，当前枚举K的情况下求$\mathrm{S(K)}$。

$\because \mathrm{K}\mid\mathrm{N}\times\mathrm{X}\Leftrightarrow\dfrac{K}{Gcd(K,X)}\mid\mathrm{N}$，记$C[K]=\dfrac{K}{Gcd(K,X)}$，令$\mathrm{N}=\mathrm{C[K]}\times\mathrm{M},\mathrm{M}\in\mathrm{N}^*$。

$\mathrm{K}\mid\mathrm{N}\times\mathrm{X}\Leftrightarrow\dfrac{K}{Gcd(K,X)}\mid\mathrm{N}\Leftrightarrow C[K]\mid N\Leftrightarrow \mathrm{N}=\mathrm{C[K]}\times\mathrm{M},\mathrm{M}\in\mathrm{N}^*$。

$\therefore \mathrm{K}\mid\mathrm{N}\times\mathrm{X}\Leftrightarrow N=C[K]\times M, M\in N^*$。

$\therefore N\le\dfrac{B\times K}{X}\Leftrightarrow M\le\dfrac{B\times K}{X\times C[K]}$，记$\dfrac{B*K}{X*C[K]}$为Limit。

$$\because\begin{cases}K\mid N\times X\\ J\mid N\times X\\ K<J<X\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}J\mid C[K]\times M\times X\\ M\in N^*\\ K<J<X\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{J}{Gcd(J,C[K]\times X)}\mid M\\ M\in N^*\\ K<J<X\end{cases}$$

，记$D[J]=\dfrac{J}{Gcd(J,C[K]\times X)}$。

$$\therefore \begin{cases} K \mid N\times X \\ J \mid N\times X \\ K<J<X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D[J] \mid M \\ K<J<X \end{cases}$$

现在我们可以把对 N 的统计转换成对 M 的统计：

$$S(K)=Limit-|\{N \mid \begin{cases} K \mid N\times X \\ \text{存在} J>K, J \mid N\times X\} \\ N \le \dfrac{B\times K}{X} \end{cases}|=Limit-|\{M \mid \begin{cases} \text{存在} J>K, D[J] \mid M \\ M\le Limit \end{cases}\}|$$

$$S(K)=Limit-|B_{K+1}\cup B_{K+2}\cup\ldots B_{X-1}|, B_J=\{M \mid M\in N^*, M\le Limit, D[J]\mid M\}$$

我们可以用容斥原理统计，并且将对 N 的统计转化成对 m 的统计：

$$S[K]=\sum_{\{J1,J2,\ldots\ldots,Jt\}\subseteq\{K+1,K+2,\ldots\ldots,X-1\}}(-1)^t[\frac{Limit}{Lcm(D[J1],D[J2],\ldots\ldots,D[Jt])}]$$

3、算法优化

上面的公式直接计算的时间复杂度近似于 $O(X2^X)$，远远无法满足时限的。以下是一些优化技巧：

①对于选定的 K，我们要去除所有是 $D[J](K<J<X)$ 倍数的 M 值。若存在 $D[J1]\mid D[J2]$，则舍去 $D[J2]$。

②我们设定状态 (lcm,sum) 为当前已经加入若干 $D[J]$，他们的最小公倍数为 lcm，数量为 sum。因为我们知道对于集合 $\{D[K+1],D[K+2],D[K+3],\ldots\ldots,D[X-1]\}$，很多子集的 lcm 的值是相同的，所以每次加入一个数后，我们可以将 lcm 相同的状态合并。若某个状态的 sum 在某时刻等于零，则该状态之后永远为零，废弃。

③若当前的 lcm 的值大于 $Limit$，则当前的 lcm 及之后再加上若干 $D[J]$ 的 lcm 均无意义。

但是如果只是用上面的技巧，还是会超时，下面有些更加有效优化：

①我们的大多数时间都在计算 $LCM(D[J_1],D[J_2],\ldots\ldots,D[J_t])$，数据组数（T<=40）较多，而往往在 X=58 或 X=59 等一些特定的数字时速度较慢，所以我们可以将 X 相同的放到一起，按 B 最大的求出所有的 (lcm,sum) 状态，分别统计。

②当前状态表示为 (lcm,sum)，每次加入一个数 $D[J]$，由每个状态 (lcm,sum) 扩展出 (lcm,sum) 和 $(LCM(lcm,D[J]),sum)$

$$Lcm' = LCM(lcm, D[J]) = \frac{lcm * D[J]}{Gcd(lcm, D[J])} = lcm * \frac{D[J]}{Gcd(lcm, D[J])}$$
$$= lcm * \frac{D[J]}{Gcd(lcm\%D[J], D[J])}$$
。

因为新加入的 $D[J] < 60$，所以 D[J] 的因数个数小于等于 10，lcm 所乘的 $\frac{D[J]}{Gcd(lcm\%D[J], D[J])}$ 最多有 10 种可能。原本所有的状态 (lcm,sum) 按 lcm 的从小到大排序，现在我们为不同的 $\frac{D[J]}{Gcd(lcm\%D[J], D[J])}$ 值建立若干队列，将 (lcm,sum) 所扩展出的 (LCM(lcm,D[J]) ,sum) 按 $\frac{D[J]}{Gcd(lcm\%D[J], D[J])}$ 放入对应的队列中，其 lcm 依然是从小到大排序的。最后将不超过 10 个有序的队列合并即可。而且 $\frac{D[J]}{Gcd(lcm\%D[J], D[J])}$ 的值也可以预处理，以节省计算时间。

还有其他的优化方法，但使用以上方法便已经可以将时间控制在在时限内。

3、时间复杂度分析

本题时间复杂度很难计算。$\{1,2,3,\ldots\ldots，X-1\}$ 不重复的 lcm（$lcm \le 10^{12}$）的个数大概在 10^6 级别，但实际上 $LCM(D[J_1], D[J_2], \ldots\ldots, D[J_t])$ 的状态远远达不到这一复杂度，正常情况下只有 10^4 级别。