

To Add or to Multiply 解题报告

试题来源

ACM/ICPC World Finals 2011 A

题目大意

给定两个操作:1、加上一个数 a 2、乘上一个数 m 。

求一个最短的操作序列,使得所有整数 $x \in [p,q]$,依次进行操作后得到的值 $y \in [r,s]$,若有多个最短找出字典序最小的一个。

所有的 $a,m,p,q,r,s \in [1,1000000000]$, 且 $p \leq q, r \leq s$ 。

考察算法

数学, 进制表示

算法详解

对于 15% 的数据, 所有数不大于 50 的情况, 可以直接搜索得解。

对于全部的数据, 设 $y=kx+b(k \geq 1)$, 由于 y 对于 x 单调递增, 所以 $k \cdot p + b \geq r, k \cdot q + b \leq s$ 。我们可以发现 $k=m^n, b=a \cdot w$ 。这个可以用归纳法证明:

1、先假设 $k=m^n, b=a \cdot w$, 然后开始时 $k=1=m^0, b=0=a \cdot 0$ 。

2、操作后 $(kx+b) \cdot m = m^{n+1}x + bm, kx+b+a = kx + (w+1)a$, 仍然符合假设, 所以得证。

所以我们可以枚举 n , 然后得到 w 的取值范围。对于每个 n , 可以使 $w = C_n \cdot m^n + C_{n-1} \cdot m^{n-1} + \dots + C_1 \cdot m + C_0$, 那么我们的操作序列就是: $C_n A \ 1M \ C_{n-1} A$

$1M \ \dots \ C_2 A \ 1M \ C_1 A \ 1M \ C_0 A$ 。那么序列长度 $l = n + \sum_{i=0}^n C_i$ 。由于 A 的字典序小

于 M , 所以当序列长度相同时, 越前面的 C 应该越大。若存在 $C_i \geq m (i < n)$, 那么使之减少 m , 然后使 C_{i+1} 增加 1, 这会使解变得更优。所以除 C_n 外, 其余每个都 C_i 小于 m 。

设解出的 w 的取值范围为 $u \leq w \leq v$, 若 $u=v$, 那么序列直接被确定。若 $u < v$ 则将 u, v 拆分, 从 n 到 1 枚举系数 C_i , 若系数相同, 那么这一位就已经确定。若第 i 项系数不同, 设其中的较小值为 t , 那么我们可以确定 $C_1 = C_2 = \dots = C_{i-1} = 0$, 因为如果其中有一项非 0, 由于 $C_i \geq t$ 那么这个解, 必定劣于解 $C_i = t+1, C_1 = C_2 = \dots = C_{i-1} = 0$ 。同时我们发现 C_i 必定等于 t 或 $t+1$ 。那么之后我们只需要判断 $C_i = t$ 是否符合要求就可以确定 C_i 的值。

枚举 n 求出每一个 n 的最优解, 然后直接比较得到最优解。由于原操作序列非常长, 所以我们要比较转化后的操作序列。注意当 $m=1$ 时只计算 $n=0$ 的情况。这样时间复杂度即为 $O(\log^2 s)$ 。