Short II 解题报告

1 题目大意

给定p(一个质数),问有多少对$(a,b)(a>p,b>p)$满足ab被$(a-p)(b-p)$整除.

每个测试点最多5组数据,$1<p<10^{12}$.

2 解法

题目的整除条件可以变为$ab|p(a+b+p)$而不改变答案.考虑三种情况.

(1)$p|a \vee p|b$.这时候$\frac{ab}{p^2}|\frac{a+b+p}{p}$.可以证明满足这个条件的$\frac{a}{p}$与$\frac{b}{p}$只有5对:$(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$.

(2)$p\nmid a \vee p\nmid b$.这时候$ab|(a+b+p)$,而且$p+1\geq(a-1)(b-1)$.如果$a=b$,显然只有$(1,1)$满足要求.如$a\neq b$,不妨设$a<b$.这时候满足$a<w=1+\sqrt{p+1}$.如果能够找出一个合适的a,则可以推断出$b=\frac{a+p}{ak-1}$.令$d=ak-1$.此时需要寻找满足以下条件的(a,d):

a)$p\nmid a$

b)$d|(a+p)$

c)$a|(d+1)$

d)$b>a$

可以通过以下两种情况考虑.

i)遍历所有的d满足$d\leq\sqrt{p+w}$.此时根据条件b)和c)只可能有两个a可能满足要求.

ii)遍历所有的b满足$b\leq d$即$b\leq\sqrt{p+w}$.此时根据条件c)和d)只可能有一个a可能满足要求.

综上所述,可以以$O(\sqrt{p})$的时间复杂度找出相应的所有(a,b).

(3)$p\nmid a\oplus p\nmid b$.在这个条件下的每一对(a,b)可以由(2)中的(a,b)转换而来,即$(a,b)\rightarrow(a,\frac{p(a+p)}{b})(p|b)$和$(a,b)\rightarrow(\frac{p(b+p)}{a},b)(p|a)$.故满足(3)的$(a,b)$对数是(2)的2倍.

将三种情况相加即答案.