GCD？LCM! 解题报告

绍兴市第一中学 任之洲

1 试题来源

原创题 Hdu5382
2015 Multi-University Training Contest 8

2 试题大意

首先定义:

- $lcm(i, j)$表示i和j的最小公倍数
- $gcd(i, j)$表示i和j的最大公约数
- [ ]内的表达式为$true$则值为1，$false$则为0

设

$$\begin{aligned} F(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\, lcm(i, j) + gcd(i, j) \geq n \,] \\ S(n) &= \sum_{i=1}^{n} F(i) \end{aligned}$$

求$S(n) \bmod 258280327$，T组数据。

2.1 数据规模与约定

$n \leq 10^6$，$T \leq 10^5$
时间限制1s，空间限制128MB

3 算法介绍

设

$$
\begin{aligned}
G(n) &= \sum_{d|n}[\ gcd(d,\frac{n}{d})=1\ ] \\
T(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\ lcm(i,j)+gcd(i,j)=n\ ] \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[\ ijd+d=n\ ][\ gcd(i,j)=1\ ] \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[\ d(ij+1)=n\ ][\ gcd(i,j)=1\ ] \\
&= \sum_{d|n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[\ ij=\frac{n}{d}-1\ ][\ gcd(i,j)=1\ ] \\
&= \sum_{d|n}G\left(\frac{n}{d}-1\right)
\end{aligned}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\ lcm(i,j)+gcd(i,j)\ge n\ ] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\ lcm(i,j)+gcd(i,j)\ge n-1\ ]-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\ lcm(i,j)+gcd(i,j)=n-1\ ] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\ lcm(i,j)+gcd(i,j)\ge n-1\ ]-T(n-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}[\ lcm(i,j)+gcd(i,j)\ge n-1\ ]+(2n-1)-T(n-1) \\
&= F(n-1)+(2n-1)-T(n-1) \\
S(n) &= \sum_{i=1}^{n}F(i)
\end{aligned}
$$

容易发现$G(n)$是积性函数，且对于质数p，$G(p^k)=2$，所以可以利用线性筛$O(n)$计算$1\sim n$的$G(n)$。

考虑枚举最大公约数d，再枚举k，计算$G(k-1)$对$T(kd)$的贡献，复杂度$O(n\ln n)$。

得到$T(n)$后，再$O(n)$递推计算$F(n)$，最后$O(n)$计算$S(n)$即可。

时间复杂度$O(n \ln n)$，空间复杂度$O(n)$。