《叶落归根》解题报告

厦门双十中学 汪文潇

1 试题来源

这题是我出的一道训练题，思路来源于codechef aug15 CLOWAY。

2 试题大意

给定一个n个点的有向图G和一个正整数Q，对于每一个点s和整数$t \in [1, n]$，求出从s出发走t条边后恰好回到s的方案数。

$n \leq 100$，$Q \leq 10000$，图中可能有自环和重边。

3 算法介绍

不难想到，一个直接的做法就是使用递推的方法。

用$f_{k,i,j}$表示从i出发经过k步到j的方案数，然后按题意进行转移即可。

时间复杂度是$O(n^3Q)$

从另一个角度思考，设该图的邻接矩阵为G，那么我们真正要求的其实就是$G, G^2, G^3, \ldots, G^Q$这Q个矩阵的对角线。

不妨使用分块的思想，先暴力预处理出$G^0, G^1, G^2, \ldots, G^{\sqrt{Q}}$和$G^{\sqrt{Q}}, G^{2\sqrt{Q}}, G^{3\sqrt{Q}}, \ldots, G^Q$这$O(\sqrt{Q})$个矩阵。这一部分复杂度是$O(n^3\sqrt{Q})$的。

接着，对于所求Q个矩阵中的任意一个，都可以看作是某两个已知矩阵的积，而此时我们只需要求出对角线上的$O(n)$个位置，因此每次复杂度是$O(n^2)$的，这部分总复杂度为$O(n^2Q)$。

至此，此题得到解决，总复杂度为$O(n^3\sqrt{Q} + n^2Q)$。