

Random Shooting 解题报告

长沙市雅礼中学 袁宇韬

1 题目大意

在正方形中有一个凸多边形。求出在正方形中随机选出两个点的连线与多边形有公共点的概率。

题目来源: <http://acm.sgu.ru/problem.php?problem=333>

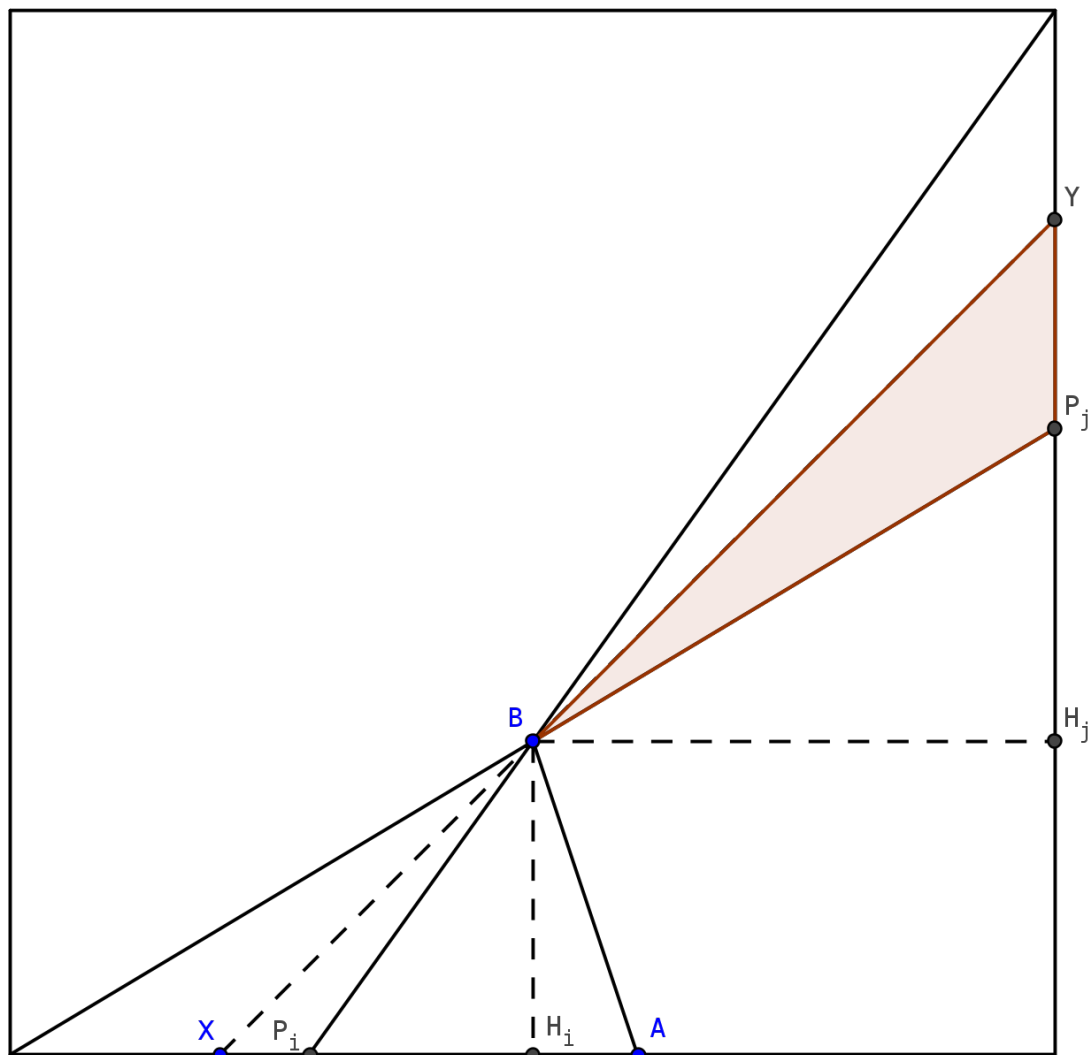
2 算法描述

不妨假设正方形为单位正方形, 令多边形的面积为 s 。由于给出的多边形为凸多边形, 选出的线段与多边形最多有两个交点。令 p 为选出的线段与多边形的交点的期望个数, 由于有一个交点的概率为 $s(1-s)$, 得到有交点的概率为 $\frac{p+s(1-s)}{2}$ 。由于线段在多边形内的概率为 s^2 , 可以得到线段与多边形有公共点的概率为 $\frac{p}{2} + s$ 。

由期望性质得到 p 为选出的线段与多边形的每条边相交的概率之和。这样只要求出随机选出一条线段与一条给定线段相交的概率。对于每条边, 将这条边延长, 得到与正方形的两个交点。这样两个交点之间的线段被分为三部分。由于随机选出的线段与两个交点之间的线段相交的概率为将正方形分为两部分的面积的乘积, 只需要减去选出的线段与剩余两部分相交的概率。由于这两部分的线段有一个端点在正方形边界上, 只要求出随机选出的线段与一条有一个端点在正方形边界上的给定线段相交的概率。

令这条给定线段为 AB , 其中 A 为在正方形边界上的点。将 AB 延长, 再将 B 与正方形的四个顶点连线, 与正方形相交于 10 个点。将这 10 个点按逆时针方向依次编号为 P_1, P_2, \dots, P_{10} , 且令 $P_{i+10} = P_i$, 则可以将正方形分为 10 部分 $P_i P_{i+1} B$ 。考虑第 i 部分点和第 j 部分点的连线与 AB 相交的概率。如果 $i \neq j+5$

(mod 10)，则这两部分点的连线要么一定与 AB 相交，要么一定不与 AB 相交。容易得到相交的概率。否则如果 $P_i P_{i+1}$ 与 $P_j P_{j+1}$ 在正方形相对的两条边上，则随机选出的线段与 AB 相交的概率为两个三角形面积的乘积的一半。



对于两条线段在正方形相邻的两条边上的情况，如图所示。在线段 BX 上的点可以与三角形 BYP_j 中的点组成合法的连线。由于三角形 BYP_j 的面积与 YP_j 成正比，而 $\frac{XH_i}{BH_i} = \frac{BH_j}{YH_j}$ ，可以得到 YP_j 与 XP_i 之间的关系。这样只要求一次积分就可以得到答案。