

《设置》解题报告

厦门双十中学 汪文潇

1 试题来源

这题是我的原创题，出题过程中受到了WC2015《k小割》的启发。

2 试题大意

有一个控制台由 n 个控制元件组成，每个元件有 m 种设置，一个原件同时只能使用一种设置，其中 i 号元件的第 j 种设置将会给整体带来 $a_{i,j}$ 的效果值。

最终的效果值是所有 n 个元件所选设置的效果值之和。

求效果值最小的那 k 种不同的方案。

$n \times m \leq 300000$ ， $k \leq 300000$ ，保证 $m^n \leq k$ ，任意一个控制元件的任意一种设置效果值均不超过 10^9 。

3 算法介绍

这其实使用了一个用堆求 k 优解的一般思路。

先对于每个 i ，将元件 i 的所有 $a_{i,j}$ 从小到大排序，再将所有元件按其所有设置中次小的效果值和最小的效果值的差从小到大排序。

此后，我们不妨将排在第 i 位的元件称为元件 i ，其第 j 小的设置称为元件 i 的设置 j 。

那么我们知道，最小的方案肯定是所有元件都设置为1。

同时，次小的方案显然是将元件1设为2，其余都设为1。我们以此为起点 s ，由较优的方案扩展出较劣的方案，对于每一个方案，我们记录其最后被扩展的位置（对于 s ，这个位置为1）。在已经得到前 t 优的方案时，我们取出当前所有方案中还未扩展的最好的方案 x （不妨设其最后扩展位置为 i ），就是第 $t+1$ 优。

接着从方案 x ，我们可以用以下的方法扩展出几个较劣解：

当 $i \neq n$ 时，将 $i+1$ 号元件设置为2，扩展位置改为 $i+1$ 可以得到一个较劣解。

当 x 的第 i 个元件设置为2且 $i=n$ 时，将 i 号元件设置为1， $i+1$ 号元件设置为2，扩展位置改为 $i+1$ 可以得到一个较劣解。

当 x 的第 i 个元件设置不为 m 时，可以将 i 号元件设置增加1并将扩展位置设为 i 来得到一个较劣解。

根据这种构造方法，每个解都可由唯一一个优于它的解扩展得来。

那么直接使用一个堆来维护当前所有解即可。

时间复杂度为 $O(n \log n + nm \log m + k \log k)$ 。