PCOPTRIP 解题报告

杭州学军中学 金策

1 试题来源

SPOJ PCOPTRIP

2 试题大意

求整数三元组个数(i,j,k)，满足$1 \le i,j,k \le n$，且$\gcd(i,j) = \gcd(j,k) = \gcd(k,i) = 1$。

3 数据规模

$n \le 10^5$。

4 算法介绍

这个题是我去年一月份搞出来，本来准备投给UOJ做C题的，当时的版本还是$1 \le i \le a, 1 \le j \le b, 1 \le k \le c$，不过没有太大区别。比较巧合的是当时杜瑜皓也在做这个题，然后我才得知这个题在SPOJ上已经有人出过了。看了下杜老师的做法（去年集训队作业），大概是转化成一个图的三元环的计数。建出来的图的大小是多两个log的，但实际跑出来效果比较好，原因是那个图离最坏形状差的很远，但是具体复杂度是多少又不太容易分析。我这里介绍一个只用到数论手段的做法，复杂度是严格的$O(n\sqrt{n})$。

令

$$f(i) = \sum_{1 \le j \le n} \sum_{1 \le k \le n} [\gcd(j,k) = 1][\gcd(i,j) = 1][\gcd(i,k) = 1],$$

那么所求的答案就是

$$\sum_{1\le i\le n} f(i).$$

对$f(i)$的式子进行一下化简，

$$\begin{aligned}
f(i) &= \sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le n}[\gcd(j,k)=1][\gcd(i,j)=1][\gcd(i,k)=1]\\
&= \sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le n}\sum_{d|j,d|k}\mu(d)[\gcd(i,j)=1][\gcd(i,k)=1]\\
&= \sum_{d}\mu(d)\sum_{1\le j\le n/d}\sum_{1\le k\le n/d}[\gcd(i,jd)=1][\gcd(i,kd)=1]\\
&= \sum_{d}\mu(d)[\gcd(i,d)=1]\sum_{1\le j\le n/d}\sum_{1\le k\le n/d}[\gcd(i,j)=1][\gcd(i,k)=1].
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
A(i,m) &= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(i,j)=1],\\
B(i,m) &= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(i,j)=1]\mu(j),
\end{aligned}$$

那么

$$f(i)=\sum_{d}\mu(d)[\gcd(i,d)=1]A(i,\lfloor n/d\rfloor)^2,$$

接下来使用常用技巧，$\lfloor n/d\rfloor$能分成$O(\sqrt{n})$段，每段取值相同。所以除了要快速求出$A(i,\lfloor n/d\rfloor)$之外，还要快速求出前面系数的前缀和，也就是$B(i,m)$。值得注意的是并不需要对所有m都能求出$B(i,m)$，只需要求出那些根据$\lfloor n/d\rfloor$分段时段边界上对应的d的值$B(i,d)$。所以这样的d一定可以写成$\lfloor n/t\rfloor$，其中$t=\lfloor n/d\rfloor$。

所以现在只需要预处理出所有$A(i,\lfloor n/t\rfloor)$和$B(i,\lfloor n/t\rfloor)$的值就可以了。这样子共有$O(n^{1.5})$的状态数，所以需要找到一个$O(1)$的转移式子。当$i=1$时，都是很容易预处理的；现在考虑$i\ge 2$，不妨设i是square-free数，p是i的某个质因

子，

$$\begin{aligned}
A(i,m) &= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(i,j)=1] \\
&= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(p,j)=1][\gcd(i/p,j)=1] \\
&= \sum_{1\le j\le m}(1-[p|j])[\gcd(i/p,j)=1] \\
&= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(i/p,j)=1] - \sum_{1\le j\le m/p}[\gcd(i/p,pj)=1] \\
&= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(i/p,j)=1] - \sum_{1\le j\le m/p}[\gcd(i/p,j)=1] \\
&= A(i/p,m) - A(i/p,\lfloor m/p\rfloor),
\end{aligned}$$

$B(i,m)$也类似处理，

$$\begin{aligned}
B(i,m) &= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(i,j)=1]\mu(j) \\
&= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(p,j)=1][\gcd(i/p,j)=1]\mu(j) \\
&= \sum_{1\le j\le m}(1-[p|j])[\gcd(i/p,j)=1]\mu(j) \\
&= \sum_{1\le j\le m}[\gcd(i/p,j)=1]\mu(j) - \sum_{1\le j\le m/p}[\gcd(i/p,j)=1]\mu(pj) \\
&= B(i/p,m) - \sum_{1\le j\le m/p}[\gcd(i/p,j)=1][\gcd(p,j)=1]\mu(p)\mu(j) \\
&= B(i/p,m) - \mu(p)B(i,\lfloor m/p\rfloor) \\
&= B(i/p,m) + B(i,\lfloor m/p\rfloor)
\end{aligned}$$

用这两个递推式预处理，于是这个题就在$O(n\sqrt{n})$时间做完了。

5 总结

这个做法所用到的都是这类题目的常用技巧，先反演，然后根号分段，建立递推式。但这个求和式一开始的约束比较多，有三条互质的限制，所以需要一个合理的顺序去逐步拆解这个东西并进行化简。

如果推广到4个变量的话，感觉会更加困难，因为两两互质是平方级别的约束个数，搞起来比较复杂，不知道有没有更简单的做法。