IOI2014 国家集训队第一次作业试题准备部分题解

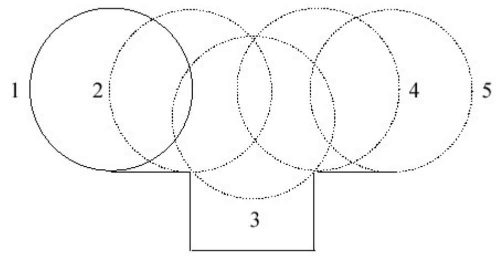
广东实验中学　黄施霖

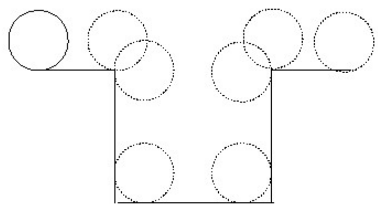
Contents

1 ACM/ICPC World Finals 2002 I: Merrily, We Roll Along!

1.1 题目大意

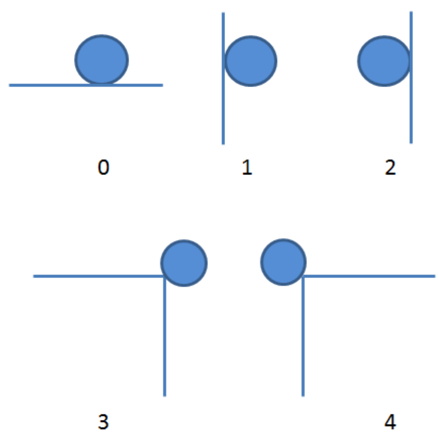
给定一条路径，路径由水平线段和垂直线段组成。现将一半径为R的滚轮沿路径上方滚动，滚轮滚动过程中必须始终与路径接触。求滚轮中心移动的距离。





1.2 算法分析

滚轮的运动状态可分为向右平动(0)，向下平动(1)，向上平动(2)，向下转动(3)，向上转动(4)，如下图所示。



运动过程中状态会出现转移，可能的转移有如下15种：

0→2　0→4　0→3

1→0　1→4　1→3

2→4

3→1　3→0　3→2　3→4　3→3

4→0　4→2　4→4

我们可以模拟滚轮行进的过程。当滚轮处在水平区间i，运动状态为s时，枚举滚轮下一个到达的水平区间i'及其运动状态s'，找到一组(i', s')使得滚轮以当前运动状态产生的水平（角）位移最小，将(i, s)转移至(i', s')。不断迭代直至滚轮到达终点。

时间复杂度$O(N^2)$。

2 ACM/ICPC World Finals 2007 G: Network

2.1 题目大意

现需要向某台终端传输$N(N \le 5)$条信息，每条信息被分割成若干个信息包以便多线程传输（信息包总数$M \le 1000$）。每个信息包除了信息片段之外，包含了三条属性：从属的信息编号，片段在原信息中的起始位置和终止位置。因为各种各样的原因，信息包到达终端的顺序被打乱，导致终端无法正确读取信息。为解决读取问题，需在终端前加入一个缓冲区，使过早到达的信息包可以寄存在缓冲区中。当某个信息包到达缓冲区时，该信息包可以直接越过缓冲区被终端读取（不占用缓冲区空间），亦可进入缓冲区储存。在缓冲区内的信息包可以在任意时刻离开缓冲区并被终端读取。一条信息被正确读取的条件是，该信息的所有信息包按照起始位置顺次并连续地被终端读取。N条信息被终端读取的顺序任意。给定信息包到达缓冲区的顺序，试求在上述条件下，缓冲区大小的最小值。

2.2 算法分析

如果只有一条信息（$N = 1$），我们可以模拟读取过程：当某个信息包到达缓冲区时，如果在其起始位置之前的信息片段已被完整读取，那么令其直接越过缓冲区，并在缓冲区中不断地查找可以被读取的信息包，将它们顺次移出缓冲区；否则将该信息包放入缓冲区中存储。将信息包按照起始位置从前到后编号，这样我们就可以用一个简单的线性表来维护缓冲区，一次模拟的时间复杂度为$O(M)$。超过一条信息$(N > 1)$ 时，我们可以暴力枚举信息被读取的顺序，将N 条信息拼接成一条信息，执行前面所述的模拟过程。

算法时间复杂度$O(N!M)$ 。

3 ACM/ICPC World Finals 2012 K: Stacking Plates

3.1 题目大意

有N摞盘子，第i摞有h_i个盘子。每摞盘子中处在下面的盘子的尺寸不小于其上方任意盘子的尺寸（我们称这样的一摞盘子满足堆序）。每次可进行以下两种操作：

(1)拆分：从一摞盘子的顶端取任意数目的盘子放在一边（不能全部取完），形成新的一摞。

(2)合并：移动一整摞盘子，将其放置在另一摞盘子的顶部，要求合并形成的盘堆满足堆序。

求出将N 摞盘子合并成一摞盘子需要的最少操作数。

3.2 算法分析

不难发现，存在一种最优方案由两个阶段构成：将初始的每摞盘子拆分成若干摞或者不拆分，最终形成M摞（共进行$M-N$次拆分）；将M摞经过$M-1$ 次操作合并成一摞（要求上阶段进行适当拆分，使得本阶段存在合并方案）。操作总数为$2M-N-1$。显然在最优方案中，大小相同且初始时在同一摞的盘子不会被拆分到不同的两摞，不失正确性，对于大小相同且初始时在同一摞的盘子，可以只保留其中一个。去除重复之后，对于每个盘子P_i，其初始所在堆编号为num_i，尺寸为$size_i$，P_i可用num_i和$size_i$唯一地表示，记作$P_i=(num_i, size_i)$。我们将P_i打上标记num_i，考虑按照最优方案操作最终形成的堆，将标记相同且位置连续的盘子视为一段，容易发现总段数等于M。那么问题可以做如下转化：将所有盘子打上标记后随意地摞成一摞，使得盘堆满足堆序且总段数最少。此问题可采用动态规划解决：

设$f[i,j]$表示将尺寸不大于i的所有盘子摞成一摞，且最底层的盘子为(i,j)时的最少总段数；$c(i)$表示大小为i的盘子中不同的标记数；$l(i)$表示尺寸小于i的最大盘子的尺寸；$e(i,j)$表示盘子(i,j)是否存在，如存在，值为1，否则为0。状态转移方程为

$$f[i,j]=\begin{cases}\infty & e(i,j)=0\\ \\ min\begin{cases}f[l(i),j]\\ min\left\{f[l(i),k]\mid j\neq k\right\}+1\end{cases} & e(i,j)=1\wedge c(i)=1\\ \\ min\begin{cases}f[l(i),j]+c(i)\\ min\left\{f[l(i),k]+c(i)-e(i,k)\mid j\neq k\right\}\end{cases} & e(i,j)=1\wedge c(i)>1\end{cases}$$

设最大尺寸为S，则原问题答案为$min\{f[S,k]\mid e(S,k)=1\}\times 2-N-1$.

设盘子总数为H，则合法的状态数为$O(H)$，单个状态转移复杂度$O(N)$，总时间复杂度为$O(NH)$。