

Social Cluster(**SCLUSTER**)

解题报告

CODECHEF
August Challenge 2015

杨乐（中山纪念中学）

1 题目描述与优化目标

这道题研究社区中小团体的形成。一个社区可以用一个 $N \times N$ 的网格表示，每个人都抽象为网格中的某一个点。每个人的社交倾向用一个正整数来评估，称为社交指数。两个人之间的相似度用他们的社交指数的差的绝对值来定义。差值越小，他们就越可能玩到一起。现在你的任务是通过移动一些人在网格中的位置来让所有人构成一个小团体。正式地说，一个小团体表示一个联通分量。假设有一个在点 (x_i, y_i) 的人，和一个在点 (x_j, y_j) 的人，我们称他们相邻，当且仅当 $|x_i - x_j| \geq 1$ 且 $|y_i - y_j| \geq 1$ 。一个小团体的代价定义为 $Score = 1000 \times A + 10 \times B$ ，其中 A 和 B 为两个参数。你的任务是最小化代价。

我们首先定义 A ：

假设 P 为网格中的人的集合，且 $|P| = K$ 。为了创造小团体，我们需要移动某些人在网格中的位置。

假设第 i 个人 p_i 为了加入小团体被移动了距离 d_i ，这里， $d_i = |x_{i(\text{最终})} - x_{i(\text{初始})}| + |y_{i(\text{最终})} - y_{i(\text{初始})}|$ ，其中 $(x_{i(\text{初始})}, y_{i(\text{初始})})$ 是初始位置， $(x_{i(\text{最终})}, y_{i(\text{最终})})$ 是移动后的位置。

定义 $A = \sum_{i=1}^K (d_i / l_i)$ ，其中 l_i 是 p_i 的社交指数。

在小团体形成之后，我们定义 B ：

$$B = \sum_{i=1}^K (s_i / n_i)$$

$s_i = \sum_{\{p_j \in P | p_j \text{ 与 } p_i \text{ 相邻}\}} (|l_j - l_i|)$ ，其中 n_i 为与 p_i 相邻的人数。

2 数据范围

- $1 \leq T \leq 50$
- $2 \leq N \leq 60$
- $2 \leq K \leq 2000$
- $1 \leq l \leq 25$

3 题目分析

题目简述：若干个人散落在平面上的各处，你需要将人们都聚集起来，成为一个联通块；同时要求给出的方案的评估值 E 尽量小。

观察评估值 E 的组成： $E = 1000 \times A + 10 \times B$ ，可以得出 A 占较为重要的地位（得出这个结论的原因是 A 与 B 的大小相当；而若 B 在某些情况下远大于 A ，那么则需要进一步讨论它们的关系）。而根据题目的定义， A 为每人移动的曼哈顿距离除以自身权值的总和。所以我们优先考虑如何最小化这部分权值。

3.1 方法一

由于题目数据随机生成，我们可以猜想这个联通块的中心应该大致位于平面的中央。我们可以贪心地将每个人依次往中央靠拢，得到一个联通块，具体步骤为：

1. 标记联通块的中央方格为一个可行位置。
2. 找到一个与整个联通块距离最近，而且尚未加入的人。一个人的距离为他与所有可行位置的距离中的最小值。
3. 将这个人移动到相应位置，并标记与他相邻的方格为可行位置。
4. 重复步骤 2，3 直到所有人都加入联通块。

3.2 方法二

我们可以在方法一的基础上进行微调：一开始可以将中央联通块设置为原图中最大的一个联通块。这样做，初始的可行位置会分布较广，达到的方案较优。

而方法一的缺点则是时间复杂度过高。在后半部分的加入过程中可行位置与待加入的人数之积很大，从而浪费了大量的时间。我们可以通过进一步贪心来解决这个问题：

- 在前半部分的加入中，遍历所有的人，扩大联通块的大小；
- 在后半部分的加入中，由于联通块的大小已经足够，所以按照 l 值从大到小依次加入联通块（因为这时主要的限制条件是自身权值）。

3.3 方法三

在题解中还提到了启发式搜索与模拟退火等搜索方法，但由于本题的时间限制较紧，不能发挥出这些算法的优势，而采用稳定的算法则可以保证时间的消耗。若本题是提交答案题，采用上述的两种算法可以逐渐逼近最优解，随时间推移可以得到更优的解。