Sereja and Equality解题报告

长郡中学 任瀚林

1s,1024MB

§1 题面

§1.1 问题描述

(注：这是codechef上的官方翻译)

佳佳称两个长度为n的数组A, B相似，如果对于所有$i(1 \le i \le n)$，满足$C(A, A_i) = C(B, B_i)$。其中$C(X, x)$等于满足$X[j] < x(1 \le j \le n)$的j的数目。

对于两个排列P_1, P_2，佳佳定义函数$F(P_1, P_2)$等于满足$P_1[l \dots r]$相似于$P_2[l \dots r](1 \le l \le r \le n)$并且$P_1[l \dots r]$包含不超过$E$个逆序对的数对$(l, r)$的数目。

现在佳佳对下面这个问题发生了兴趣：对P_1, P_2取遍所有n个元素的排列$F(P_1, P_2)$的总和是多少。

§1.2 输入格式

输入数据的第一行包含一个整数T——测试数据的组数。

对于每组测试数据，仅包含一行两个整数n, E。

§1.3 输出格式

对于每组测试数据，输出一行表示结果。答案对$10^9 + 7$取模。

§1.4 样例输入

```
4
2 2
2 1
2 0
1 1
```

§1.5 样例输出

```
10
10
9
1
```

§1.6 数据规模和约定

测试点比例	$T \le$	$n \le$	$E \le$
6%	25	5	10
4%	10^4	5	10
10%	10	10	50
10%	10	20	200
10%	10	100	5000
10%	10	500	2000
10%	10	500	10^6
10%	10^4	50	10^6
30%	10^4	500	10^6

§2 解题报告

§2.1 算法1

按照题面暴力模拟。

复杂度$O(T(n!)^2n^4)$，期望得分6分。见`source\SEAEQ1\SEAEQ.cpp`。

§2.2 算法2

令$Perm(n)$表示$1\dots n$的排列的全集，$inv(p)$表示排列p的逆序对数，$p[l\dots r]$表示序列p的第l项到第r项之间的元素依次组成的新序列。对于一个没有重复元素的序列p，$f(p)$表示一个$1\dots n$的排列满足$f(p)_i = C(p,p_i)+1$。

我们要求的便是

$$\begin{aligned}
\text{要求} &= \sum_{P_1\in Perm(n)}\sum_{P_2\in Perm(n)}\sum_{1\le l\le r\le n}[f(P_1[l\dots r]) = f(P_2[l\dots r])][inv(f(P_1[l\dots r]))\le E] \\
&= \sum_{1\le l\le r\le n}\sum_{p\in Perm(r-l+1)}[inv(p)\le E]\left(\sum_{P_1\in Perm(n)}[f(P_1[l\dots r]) = p]\right)^2 \\
&= \sum_{x=1}^{n}(n-x+1)\sum_{p\in Perm(x)}[inv(p)\le E]\left(\frac{n!}{x!}\right)^2 \\
&= \sum_{x=1}^{n}(n-x+1)\left(\sum_{i=0}^{E}cnt_{x,i}\right)\left(\frac{n!}{x!}\right)^2
\end{aligned}$$

其中$cnt_{x,E}$表示长度为x的排列中，逆序对数为E的排列个数。

这一部分暴力预处理，复杂度是$O(n^2n!+Tn^2)$的，期望得分20分。见`source\SEAEQ2\SEAEQ.cpp`。

§2.3 算法3

注意到$cnt_{x,E}$是可以dp的。考虑长度为x，逆序对数为E的排列p的个数，我们只要枚举$E_0 = C(x_{2\dots n},x_1)$。那么$f(p[2\dots n])$一定是一个$E-E_0$个逆序对的排列。我们得到了dp方程：

$$cnt_{x,E} = \sum_{E_0\le\min(n-1,E)}cnt_{x-1,E-E_0}$$

初始状态为$cnt_{1,0}=1$。

而dp的状态量为$O(n^3)$，转移复杂度$O(n)$，所以预处理复杂度为$O(n^4)$，总复杂度$O(n^4+Tn^2)$，期望得分$40\sim60$分，根据实现的优劣而定。见`source\SEAEQ3\SEAEQ.cpp`。

§2.4 算法4

这个dp显然可以用前缀和优化，具体地就是记$Scnt_{x,E} = \sum_{i=1}^{E} cnt_{x,i}$。在求完$cnt_{x-1}$之后，可以用$O(E)$的时间求得$Scnt_{x-1}$，而

$$cnt_{x,E} = \begin{cases} Scnt_{x-1,E} - Scnt_{x-1,E-n} & E \geq n \\ Scnt_{x-1,E} & E < n \end{cases}$$

这样就可以$O(1)$转移了。

求答案的时候，$\sum_{i=0}^{E} cnt_{x,i}$可以直接套用$Scnt$数组，复杂度变成了每次询问$O(n)$。

复杂度等于状态量$O(n^3)$。总复杂度$O(n^3 + Tn)$，由于隐藏的常数因子很小所以可以通过本题，期望得分100分。见`source\SEAEQ4\SEAEQ.cpp`。

§3 数据生成

本题的随机数据就已经比较强，可以检验一个程序的正确性。

此外也可以考虑一个测试点包含满足$n \leq N$的全部数据。