集训队作业 -做题表格

毛晗扬

Short

题意

给定 n,l, 求 $n < a < l$,$n < b < l$,$(a-n)(b-n)|ab-n$

题解

为了叙述方便, 我们令 c=a-n,d=b-n, 原题改为

原式可改为求 c,d 使得 $cd|(c+n)(d+n)-n$ 且 $1 \le c, d < l-n$

$$kcd = cd + cn + dn + n^2 - n \tag{1}$$
$$(kc - c - n)d = cn + n^2 - n \tag{2}$$
$$d = \frac{cn + n^2 - n}{kc - c - n} \tag{3}$$

由于 n 的范围很小, 所以我们可以简单的枚举 c. 然后倘若我们枚举了 c 的值, 那么我们可以算出 $cn + n^2 - n$, 枚举其约数, 判断之.

但是 c 的值是比较大的. 我们可以不失正确性的设 c<d, 那么可以证明的是 $c \le n * 3$

具体细节如下

$$c \le \frac{cn + n^2 - n}{kc - c - n} \tag{4}$$

由式 (3) 可得 $kc - c - n \ge 1$

$$kc^2 - c^2 - cn \le cn + n^2 - n \tag{5}$$
$$(k-1)c^2 - 2nc - n^2 + n \le 0 \tag{6}$$

$$c \in \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 4 * (k-1) * (n^2 - n)}}{2(k-1)}, \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 4 * (k-1) * (n^2 - n)}}{2(k-1)}] \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

$$c \le \frac{2n + \sqrt{(4k-3)n^2 - n * (4k-4)}}{2k-2} \tag{9}$$

当 k=2 时

$$c \le \frac{(2n + \sqrt{5n^2 - 4n})}{2} \tag{10}$$

于是 c 只需要枚举到 $2.12n$ 即可

最后, 当 c 较大时, 算出来的 k 值较小, 所以对于 c 大于 4000 的数据, 我们将枚举因数改为枚举 k

Counting Hexagons

题意

求满足最长边大于等于 L，其他边小于等于 X，相同长度边至多出现 K 次的六边形个数。

题解

首先容易想到枚举最大的一条边 M. 那么问题转化为了求 5 个单调不减的数, 使得和大于 M, 最大的数小于 M, 且相同数的个数小于 K.

通过这道题数据范围可以猜出用数位 DP 解决, 及从上到下枚举数列的第 i 位, 维护当前哪些数已经可以区分大小, 下面需要向上进位, 还有一些其他细节.

dp 方程可描述为:

dp[i][s][c][p1][p2][p3] 表示当前枚举到第 i(i<=10) 位, 从大到小两两间是否可能相等的二进制表示 s(s<2^4), 当前和是否已经小于 S(0/1), 数列最大值是否小于 M(0/1), 最小值是否每一位都是 0(0/1)

同样, 这里存在一些优化的可能. 例如数位 dp 时, 如果进制比较大, 我们将 dp 数组中小于 num[i], 等于 num[i], 大于 num[i] 的状态一起讨论. 这道题也如此, 我们需要维护一下一些数组 (与之前不同, 这里为了简便, 我们设数列是单调不增的):

- cnt1[a][b][c1][S][c2][T][z] 表示从期望下面进位 c1 的状态 S 到期望下方进位 c2 的状态 T, 序列最后一位是否为 0, 序列第一个数字 =a, 序列的和 =b 的转移方案总数
- cnt2[a][b][c1][S][c2][T][z] 表示从期望下面进位 c1 的状态 S 到期望下方进位 c2 的状态 T, 序列最后一位是否为 0, 序列第一个数字 <=a, 序列的和 =b 的转移方案总数
- cnt3[a][b][c1][S][c2][T][z] 表示从期望下面进位 c1 的状态 S 到期望下方进位 c2 的状态 T, 序列最后一位是否为 0, 序列第一个数字 =a, 序列的和 <=b 的转移方案总数
- cnt4[a][b][c1][S][c2][T][z] 表示从期望下面进位 c1 的状态 S 到期望下方进位 c2 的状态 T, 序列最后一位是否为 0, 序列第一个数字 <=a, 序列的和 <=b 的转移方案总数

cnt1,cnt2,cnt3,cnt4 数组同样可以有 dp 预处理得到. 具体来说

cnt[i][S1][S2][v][s][z] 表示处理到第 i 个数, 初始压位 (相等关系) 为 S1, 当前压位为 S2, 当前选的数为 v, 和为 s, 第一个数是否非 0

Tilt Table

题意

Chef 发明了一个叫做斜桌子的游戏。

首先需要在一个 N×M 的桌子上挖几个洞

然后在桌子上每个不是洞的地方放小球。可以猜出，游戏的目标就是通过上下左右方向的倾斜桌面让“所有”小球滑入洞中。

首先，由于桌面摩擦系数比较大，所以每倾斜一次，小球只会向倾斜方向滑动一格。但是倘若滑动后会与另外的小球重合或者滑出桌面，那么该小球就会保持在当前位置一动不动。

Chef 秒钟倾斜桌面一次，而每次倾斜都会让桌面的球“同时”移动，移到小洞上的球掉入洞中。

当然，Chef 认为这样太过 Easy.

于是每个球有了如下四种类型。

‘+’号球：进洞加 5 分

‘-’号球：进洞扣 5 分

‘=’号球：进洞不得分

‘%’号球：进洞后所有‘-’号球变成‘+’号球，‘+’号球变成‘-’号球。

对于每个‘%’号球，进洞操作在其他进洞球分数计算完毕，才产生作用，比如一个‘-’球和‘%’球同时进洞，首先分数 -5，然后其他球正负交换，两个‘%’球同时进洞效果重合，导致所有球编号不变。

最后，每一次倾斜都要消耗 1 的得分。

游戏的得分就是将所有小球滑入洞中最后的得分。

当然，你的目标就是输出一个游戏方案，是的游戏的分为正

题解

这道题一眼就能看出是启发式搜索题.

但是难点在于如何求估价函数, 以及搜索策略如何.

估价函数为正求个数 *alpha+ 负球个数 *alpha*(当前存在转换球?1:-1)-为进洞球个数/洞个数, 及期望最好情况得分.

搜索策略为随机枚举 1-4 的值作为上式中的 alpha, 并且随机 1-2 的深度 d, 遍历该深度下所有合法序列 (4^d), 将改序列操作后的棋盘估价函数取 max 值, 最后按照每个方向对应序列的估价函数最值选取最优方向. 前进一格

No.1
题目名称
LECOINS
算法
最短路
时间复杂度
$O(N*VlogV)$

题目大意
一些硬币，每种硬币无限多，且有面额和颜色颜色。
多组询问组成面额 S 的方案中颜色最多为多少。
$n \le 30, V \le 10^5$
题解
设面额最小的那个硬币为 M，那么计算出其他硬币可以组成 $T \bmod M = t$ 的最小使用 T，对于每一个 t 计算答案 $MinV_t$，容易发现最短路模型，在不考虑颜色的情况下我们可以做到询问 $O(1)$。
考虑颜色特判 M 是否在答案中，然后将最短路改为分层图，表示用了 k 个颜色的图。

No.2
题目名称
PUSHFLOW
算法
仙人掌，树链剖分
时间复杂度
$O(Q*log^2n)$

题目大意
给你一个仙人掌，每个点属于一个简单环，支持求两点间最大流，修改边权。
$n \le 10^5 q \le 2*10^5$
题解
缩环，并将每一个点连向所在环代表的虚拟节点。构成一颗树结构。
两个点之间的最大流就是两点同时向上走直到在 lca 处汇合，路径经过环取较短边的路径边权最小值。
将该树链剖，注意到路径虚边条数为 log 级别的，实边每次边权修改时暴力更新，虚边每次询问时更新，线段树什么的维护一下。

No.3
题目名称
BWGAME
算法
并查集，堆
时间复杂度
$O(???)$

题目大意
一个 0/1 矩阵，每行 1 为一段连续区间，在 $(i, p_i) = 1$ 的排列 P 中判断拥有奇数逆序对的多还是偶数逆序对多。
$n \le 10^5$
题解
考虑行列式的 $O(N!)$ 求法，可以很容易发现本题要求的就是行列式的正负
如果任意一个行向量可被其他行线性表达，则行列式为 0
否则考虑优化高斯消元，假设当前行 i 之前都已消成倒三角，第 i 行开始的第 i 列为 1 的行的 1 区间分别为 (s_k, t_k)，其中 $s_k = i$
我们考虑这些行按照 t_k 顺序排列，每一行减去前一行，则变成了 $(s_0, t_0), (t_0+1, t_1), (t_1+1, t_2), \ldots, (t_{k-1}, t_k)$
用堆暴力维护，发现没有构造出数据能卡掉这个做法

No.4
题目名称
GNUM
算法
网络流
时间复杂度
$O(N^3)$

题目大意
给你两个数组 A，B，若 $gcd(A_i, B_j) \neq 1, i < j$，则集合 S1 包含 (i,j), 若 $gcd(A_p, B_q) \neq 1, p > q$, 则集合 S2 包含 (p,q)
求 S1，S2 的一个最大匹配，((i,j),(p,q))，满足 $gcd(A_i, A_p, B_j, B_q) \neq 1$.
$n \le 400$
题解
网络流，对于集合中每个合法数对建点，若两点间代表数对 gcd 非 1 连边。这样可能会导致 TLE。
考虑 S1 中每个数对向他的约数代表的虚拟节点连边，S2 有约数代表的虚拟节点向它连边。优化一下枚举约数的方式，即可过本题。

No.5
题目名称
SEAEQ
算法
组合数学
时间复杂度
$O(N^3)$

题目大意
两个数列视为相似当且仅当序列中每个位置的数的排名对应相同。
设 F(P1,P2) 表示数对 (l,r) 的个数满足 P1[l-r] 与 P2[l-r] 相似，并且 P1[l-r] 包含少于等于 E 个逆序对。
对于所有排列组合 (P1,P2) 求 F(P1,P2) 的和
题解
假设我们已经枚举出了所有小于等于 E 个逆序对，且长度为 t 的排列总数，唯一需要的就是算出当前排列在多少对排列中出现。
答案是 $C_n^t * (n-t+1) * fact_{n-d}^2$，及在 n 个数中选出 t 个作为公共区间所代表的序列，当前序列的可能起始位置，剩余数可完全自由排列。

No.6
题目名称
TWOCOMP
算法
网络流
时间复杂度
$O(M^3)$

题目大意
给你树上的 M 条路径，请选出尽量多的路径，使他们能够分成两个不相交的集合。
题解
枚举两两路径，lca 判断是否有交。
转换成最短路，拆点后源点连一个集合，汇点连一个集合，若有相交连边 inf。

No.7
题目名称
PARADE
算法
费用流
时间复杂度
$O(N^3)$

题目大意
给你一个有向图，然后在多次询问一个常数 C，希望每次找到若干路径满足花费最小，花费计算公式：
a. 每个路径边权为代价
b. 如果一个路径守卫不相接则花费代价 C
c. 如果一个点没被路径经过花费代价 C
题解
考虑一个非常巧妙的费用流建边模型：每个地点拆点 (x,y)，源点连向每个点 Ax 边 (flow=1,cost=0)，每个点 Bx 连向汇点 Bx 边 (flow=1,cost=0)，若两点 x，y 间有边，则连边 (flow=1,cost=V(x,y))。
在我们某一次增广后，一些边已经被流过，总费用恰好是路径经过的代价。
我们观察那些源点没有流流量到的 Ax 的点，分两种情况：

- Bx 向汇点连了边，那么表示有一条路径在 x 处终结，且没有路径在 x 处开始，代价 C。
- Bx 没有向汇点连边，则该城市没有被访问，代价 C。

于是我们可以很容易看出，预处理每次路径代价和 (n-流量)*C 产生的流量，二分可得最优增广步骤。

No.8
题目名称
CBAL
算法
分块，容斥
时间复杂度
$O(N\sqrt{N})$

题目大意
给你一个字符串 S，求字符串的子串 $S_{l,r}$ 中有多少个子串满足每个字母出现了偶数次，并统计出这样子串的总长度和长度平方和。
题解
容易将问题转化为求区间相同数值的数对个数，距离和，距离平方和。
分块，处理左端点为一块开头，右端点为每个数的值，同理处理右端点为一块结尾，左端点为每个位置的三个答案。
容斥可以将他转化为求最外面零碎部分的答案。$O(\sqrt{N})$ 可过。

No.9

题目名称

QRECT

算法

CDQ 分治，容斥

时间复杂度

$O(NlogN)$

题目大意

支持插入矩形，删除矩形，询问矩形和之前多少个矩形有交。

题解

相交矩形数 = 总矩形数 -X 轴投影不相交矩形数 -Y 轴投影不相交矩形数 +XY 轴都不相交矩形数。

最有一部分可用 CDQ 分治解决。

No.10

题目名称

LYRC

算法

AC 自动机

时间复杂度

$O(N)$

题目大意

询问一个字符串中一个每个字符串出现次数

题解

AC 自动机裸题

No.11

题目名称

CLOSEST

算法

随机化，分块，ANN

时间复杂度

$O(N\sqrt{N})$

题目大意

首先给你 N 个三维点，Q 次询问距离询问点最近的点是哪一个。

目标是比标程拥有更高的正确率。

题解

k-d 树：会被球形数据卡掉。

pv 树：常数巨大

直接随机 C 个关键点，然后把每个点归为最近关键点那一块。

询问时先找到最近关键点，然后在对应块中搜索。

No.12

题目名称

FIBTREE

算法

数学，树链剖分

时间复杂度

$O(NlogN)$

题目大意

维护树的子树和，链和，链加斐波那契数列。

题解

由于斐波那契通项公式为

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

我们只要算出其中的 $\sqrt{5}$ 在同余系下的值。

剩下直接通过普通树链剖分维护等比数列加解决即可。

No.13

题目名称

CARDSHUF

算法

平衡树

时间复杂度

$O(NlogN)$

题目大意

维护数列的 split 和 reverse

题解

平衡树裸题

No.14
题目名称
QTREE6
算法
树链剖分
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
一棵树，节点有黑白颜色，支持询问一个同色联通快大小，翻转颜色。
题解
树链剖分，记录每个点下方白色/黑色的联通快大小分别为多少。查询是找到当前连通块最上面那个点，查询之。
修改操作则一位反转影响的只会是它到根节点一条连续的链上同时加一个数。
树链剖分可维护上述操作。

No.15
题目名称
KNGHTMOV
算法
数学，dp，容斥
时间复杂度
$O(N * 2^K)$

题目大意
从原点开始，每次可以移动 (x_1, y_1) 或 (x_2, y_2)。并且存在 K 个点是不能走的。
求到达 (X, Y) 位置的方案总数。
题解
对于两个移动向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 分类讨论：
若 $\vec{a}\vec{b} = 0$:
可提取出两向量 x 坐标，首先判是否存在环，然后不存在则进行无环图 DP
若 $\vec{a}\vec{b} \neq 0$:
对于原图中每一个整点 (x, y), 都能表示成 $\alpha * \vec{a} + \beta * \vec{b}$
则将原图的 (x, y) 映射成新图的 (α, β)，原题转化为只能走 $(0, 1)$ 或 $(1, 0)$，求方案总数，容斥原理解决。

No.16
题目名称
SEAARC
算法
数学，容斥
时间复杂度
$O(N\sqrt{N})$

题目大意
给你一个序列，求形如 ABAB 的长度 4 子序列个数。
$N \leq 10^5$
题解
将所有数据按照个数分为 Big 和 Small。
$C(ABAB) = C(A_sB_sA_sB_s) + C(A_bB_bA_bB_b) + C(A_bB_sA_bB_s) + C(A_sB_bA_sB_b)$
于是我们首先求形如 $C(A_bB_bA_bB_b)$ 情况，枚举两个颜色，将所有这两个颜色提取出来，DP 求解.
然后处理形如 $C(A_sB_sA_sB_s)$ 情况，枚举每个颜色和每个区间，然后按照左端点排序，树状数组统计.
最后处理形如 $C(A_sB_bA_sB_b) + C(A_bB_sA_bB_s)$ 情况，
$C(ABAB) = C(????) - C(AABB) - C(ABBA)$，其中 $C(????)$ 和 $C(AABB)$ 很容易求出.
$C(ABBA)$ 又分为 $C(A_sB_bB_bA_s)$ 和 $C(A_bB_sB_sA_b)$ 两种情况.
首先处理 $C(A_bB_sB_sA_b)$.
首先我们在外层套一个枚举大数并计算前缀和 $psum$，那么现在我们就可以 $O(1)$ 求出 A 数的区间个数。

$$\begin{aligned}Answer &= \sum_{i<j} psum_i * (psum_n - psum_j) \\ &= \sum_{i} psum_i * \sum_{j>i} (psum_n - psum_j)\end{aligned}$$

预处理出前缀和可 $O(size(small))$ 内求出.
然后处理 $C(B_sA_bA_bB_s)$
设 B 数中间的 $size(A) - 1$ 个空间中分别有 T_i 个 A 数.

$$\begin{aligned}Answer &= \sum_{i<j} T_i * T_j * i * (n - j + 1) \\ &= \sum_{i} T_i * i * \sum_{j>i} T_j * (n - j + 1)\end{aligned}$$

同样前缀和 $O(size(small))$ 内可求出

No.17
题目名称
XRQRS
算法
可持久化 trie
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
给定一个初始时为空的整数序列 (元素由 1 开始标号) 以及一些询问：

- 类型 0：在数组最后加入数字 x。
- 类型 1：在区间 L..R 中找到数字 y，最大化 (x xor y),xor 表示按位异或。
- 类型 2：删除数组最后 k 个元素。
- 类型 3：在区间 L..R 中，统计小于等于 x 的元素个数。
- 类型 4：在区间 L..R 中，找到第 k 小的数 (第 k 个顺序统计量)。

$n \leq 10^5$
题解
维护一个可持久化 trie

No.18
题目名称
RANKA
算法
构造，围棋，格雷码
时间复杂度
$O(N)$

题目大意
$9*9$ 棋盘，构造一个步数大于 10000 的走法，保证每一步后棋盘状态不同. 每个人可以弃权不走.
题解
在期盘中构造 8 个“劫”，可用格雷码遍历 0 2^8-1 整数可以使这 8 个劫出现所有状态。剩下有 30 个位置，每个位置放一个棋然后遍历，即可，方案数 $30*2^8$

No.19
题目名称
DYGCD
算法
欧几里得算法，树链剖分
时间复杂度
$O(Nlog^2N)$

题目大意
给你一棵树，维护链加，链上 gcd
题解
由于 gcd 的性质

$$gcd(a,b) = gcd(a-b,a)$$

我们可以对这棵树做一次差分，这样链加就不会影响差分数组，通过树链剖分维护重链的差分数组，轻链暴力计算（一条路径最多经过 log 条轻链）

No.20
题目名称
TKCONVEX
算法
随机化，贪心
时间复杂度
$O(???)$

题目大意
给定 n 个棍子的长度和整数 k, 求能否在其中选出 2k 个棍子拼成两个凸多边形。使得两个凸多边形都恰好有 k 跟棍子组成, 且任意相邻的边都不共线。
$n \le 1000$
$k \le 10$
$v \le 10^9$
题解

A 容易想到若保证不存在解，N 一定不会太大。在有解的情况下，一定存在一组解满足下列任意条件
  - 两段独立的 K 个连续的数
  - 一段连续 2K 个数中的特定分配

  枚举之即可，然而我 Wa 了。。。

B 随机集合，在每个集合中跑贪心

No.21
题目名称
PRIMEDST
算法
FFT，树分治
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
给你一个树，每次随机选择一条路径，问路径长度为质数概率。
题解
通过点分治和 FFT 我们可以处理出每个长度的路径条数，即可解决此题。
本题卡常数，在执行 FFT 之前，首先按照子树深度从小到大排序候一次计算即可通过

No.22
题目名称
CONNECT
算法
随机化，斯坦纳树
时间复杂度
$O(700*(2^n*2^n*n+2^n*n*m))$

题目大意
给你一个 N*M 矩阵（含有 -1,0, 以及一些正数），希望选择一个连通块，使得连通块不含 -1，且不同正数个数大于等于 K。
每选择一个格子都会有一定代价，求最小化代价。
$N, M \leq 15, K \leq 7$
题解
每次将每个值随机一个 $0 \ldots (T-1)$ 的标号。则在新矩阵上做原问题一定不比最优解要优，并且存在概率得出最优解。
新矩阵由于值域小于等于 7，所以可以用斯坦纳树解决。
斯坦纳树：dp[x][s] 表示根节点为 x，联通状态为 s 的最小花费
当最优解包含的 K 种颜色的编号恰好在新图上不同时，该算法能得出最优解。概率为

$$\frac{7!}{7^7} \approx 0.0061$$

当随机 700 次时，出解概率 99%

No.23
题目名称
COT5
算法
线段树
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
维护一个 Treap，支持加点，删点，询问两点距离
题解
首先，两个节点在 treap 上的 lca 为权值在他们权值中间，键值同时小于他们键值的节点。
可以通过一个线段树维护出 lca.
然后，从一个点到根节点的路径正好是这个点分别向左向右每次选择键值大于当前点的所有点的前驱（后继）
线段树维护即可

No.24
题目名称
COUNTARI
算法
FFT，分块
时间复杂度
$O(max(\frac{N}{S}*S*S, \frac{N}{S}MlogM))$

题目大意
给你一个长为 N，至于 [1,m] 的序列，问其中有多少个三元组 (i,j,k) 满足 (i < j < k) 且 A_i, A_j, A_k 为等差数列
$N \leq 10^5, M \leq 30000$
题解
分块，讨论三元组的分布情况：

1. 位于同一块：直接通过两层 for 语句解决
2. 两个位于同一块：与第一种情况相似
3. 位于不同块：枚举中间那一块，两边分别 FFT 做卷积即可.

块大小 D=N/40

No.25
题目名称
MONOPOLY
算法
Link-Cut Tree
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
给你一棵树，每个节点有一个独特的颜色，支持一下操作：

- 将一颗子树到根节点的路径染成同一种新的颜色
- 询问一颗子树中所有点到根节点的路径上颜色总数的平均值

$T \leq 15, N \leq 10^5, Q \leq 10^5$
题解
染成同一个颜色这个操作可以用 Link-Cut Tree 中的 Access 操作 O($logN$) 完成
每次我们在 access 中可以发现某个点和他的父亲节点颜色相同的关系发生了变化，直接通过树的子树修改方式维护答案即可。
同理，询问就是个单纯的子树求和

No.26
题目名称
SEAORD
算法
随机化
时间复杂度
$O(???)$

题目大意
有 N 个程序和两台电脑, 第 i 个程序在第一台电脑上要运行 A_i 秒, 在第二台电脑上运行 B_i 秒, 现在要在最少的时间内完成所有程序在两台电脑上的运行任务, 求出最少时间并输出一个方案。
$N \leq 10_5$
题解
答案等于 $\max(A_i + B_i, \sum A_i, \sum B_i)$
对于第一个情况很容易处理
对于后两个情况，可以肯定大的那个值对应的电脑是满的，分别随机运行程序顺序，判断即可。
迷之证明合法解对应情况非常多。

No.27
题目名称
DEVLOCK
算法
fft,dp
时间复杂度
$O(max(MlogMlogN, P^2MlogM))$

题目大意
求有多少 N 位十进制数是 P 的倍数且每位之和小于等于 M，允许前导 0，答案对 998244353 取模
task1:$1 \leq N \leq 10^9, 1 \leq P \leq 50, 1 \leq MM \leq 500$
task2:$1 \leq N \leq 10^9, 1 \leq P \leq 16, 1 \leq MM \leq 15000$
题解

- dp[i][j][k] 表示 i 个数字组成的数，模 P 余 j，和为 k 的方案总数
  转移：
  $dp[a+b][c+10^b*d][e+f]+=dp[a][c][e]*dp[b][d][f]$
  FFT 优化，复杂度 $O(P^2MlogMlogN)$ 常数较大
- 存在第 i 位和第 j 位满足
  $$10^i \equiv 10^j \pmod P$$
  两位实际等效，可合并在一起处理
  首先 FFT 预处理数组 A，固定当前模意义下的值为 fixed，其生成函数为
  $$(\sum_{i=0}^{9} x_i)^k$$
  其中 k 为满足 $10^i == fixed$ 的 i 的取值个数
  令 $dp[fixed][fixed*i][i]+=a[i]$
  对于 $fixed \in \{0, P-1\}$，fft 合并 dp[fixed] 即可

No.28
题目名称
SPMATRIX
算法
OEIS
时间复杂度
$O(N)$

题目大意
`https://www.codechef.com/problems/SPMATRIX`
题解
`https://discuss.codechef.com/questions/13633/spmatrix-editorial`
发现本题公式是

$$\frac{n! \times (n-1)!}{3 \times 2^{n-1}} \left(\frac{3n}{2} - 2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right)$$

线性筛一遍即可

No.29
题目名称
FN
算法
BSGS, 二次剩余
时间复杂度
$O(T * \sqrt{P})$

题目大意
给定一个素数 P，和非负整数 C，找到最小的非负整数 n，满足

$$Fib_n = C \pmod P$$

满足 $P \bmod 10 = 1$ 或 $P \bmod 10 = 9$
题解
已知斐波那契通项:

$$fib_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

且在模 P 意义下存在整数 X 使得

$$X \equiv \sqrt{5} \pmod P$$

于是令

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

那么

$$\sqrt{5}C = \phi^n - (-\phi)^{-n}$$

讨论 n 奇偶性，化为一元二次方程解出 ϕ^n
再用 BSGS
本题卡常，需要用手写 hashmap

No.30
题目名称
GRAPHCNT
算法
Lengauer-Tarjan algorithm
时间复杂度
$O(N * \alpha)$

题目大意
给你一个图，问有多少组 (x,y)，满足 1 到 x 的路径和 1 到 y 的路径公共点只有点 1
题解
对于该图建立一个支配树 (Dominator Tree)，算法为 Lengauer-Tarjan algorithm
大体思路为定义最近支配点 idom[]，即我们需要求得的量
再定义半必经点 semi[]，semi[x] 表示在 dfs 树中 dfn[t]>dfn[x] 的所有点导出子图中的最近支配点。
并查集乱维护就可以了

No.31
题目名称
PARSIN
算法
矩阵乘法
时间复杂度
$O(M^3logN)$

题目大意
已知 N,M,X 计算

$$f(N,M,X)=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_M=N} sin(k_1X)sin(k_2X)\dots sin(k_MX)$$

题解
暴力解法

$$dp[i][j]=\sum_{k_m=0}^{j} dp[i-1][j-k_m]sin(k_mX)$$

复杂度 O(N^2M)
分类讨论 k_m 可以得出递推式

$$dp[i][j]=dp[i-1][j-1]sin(X)+dp[i][j-1]2cos(X)-dp[i][j-2]$$

矩阵快速幂可计算

No.32
题目名称
QTREE
算法
树链剖分
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
给你一个环长为奇数的基环内向树，维护一下操作：

- 两点间最短路求最大连续子段和
- 两点间最短路所有边权取反

$N,M\le 10^5$
题解
随便砍掉环上一条边，剩下的链剖维护，特殊处理砍掉的边

No.33
题目名称
QPOINT
算法
可持久化 Treap
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
给你平面上一堆不相交简单多边形，询问点在哪一个多边形内部。强制在线
$N\le 10^5,Q\le 3*10^5$
题解
若为离线，用扫面线维护线段，可发现在一段 X 轴区间内，线段 Y 坐标相对关系是不会发生变化的
我们可以用平衡树维护这种相对关系
然而本题为强制在线，将平衡树用 SMT 实现即可通过可持久化来访问在某一时刻当前平衡树的形态，从而解决本题

No.34
题目名称
TSUBSTR
算法
后缀自动机
时间复杂度
$O(max(N\times 26, Output\times 26))$

题目大意
给你一个 trie 树，求 trie 树不同子串个数以及在给定字母大小关系后字典序第 K 大的子串是哪一个
题解
建立后缀自动机，然后统计路径条数为答案。

No.35
题目名称
DIFTRIP
算法
后缀自动机
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
给你一棵树，定义路径为从上到下（非 v 字形）的路径，路径相似定义为两条路径长度相同，且对应位置点的度数相同，求本质不同的路径条数
题解
发现这道题本质就是 trie 树上的不同子串个数，用 trie 树 sam 解决即可。这里字符集大小比较大，直接改为用 map 存即可

No.36
题目名称
SHORT2
算法
枚举
时间复杂度
$O(\sqrt{N})$

题目大意
给定质数 p，求数对 (a,b) 个数，满足 $ab|(a+p)(b+p)$
题解

$$ab + ap + bp + p^2 = dab$$
$$(1-d)ab + p(a+b+p) = 0$$

- 考虑 $p \mid a$ or $p \mid b$，可以证明此时合法 $(\frac{a}{p}, \frac{b}{p})$ 只有 (1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)
- 考虑 $p \nmid a$ and $p \nmid b$，此时 $p \mid (1-d)$ and $ab \mid (a+b+p)$ 当 $a = b$, 显然只有 (1,1), 否则我们假设 $a < b$, 此时 $a \leq w = 1 + \sqrt{p+1}$ 设 $kab = (a+b+p)$

$$kab - b = a + p$$
$$b = \frac{a+p}{ka-1}$$

则 $ka-1$ 与 b 分别再 $\sqrt{p+\sqrt{p}}$ 以内

No.37
题目名称
STEPAVG
算法
构造
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
考虑以下的方法求出 N 个数的“迭代平均数”。每次拿出其中任意两个数，并用他们的平均数取代他们，重复 N-1 次直到最后只剩一个数。我们叫这个剩下的数叫“迭代平均数”。值得注意的是，不同的合并顺序最后会导出不同的“迭代平均数”。
你要做的是：给你 N 个数。找到一个合并的顺序使得“迭代平均数”尽量接近给定的数 K。注意这是一题 challenge 题：你不用找到最优的解，你的方案越优，最终的得分越高。
$N \leq 1000, 0 \leq A_i \leq 10^9$
保证 K，A_i 均随机生成
题解
每次提取出最大，最小两个数 (min,max)，求出他们的平均数 mid，倘若 mid 接近 aim，则将他们两个取平均值，否则若 aim 偏小，则将 min 作为最后一个加入的数字，aim 修改为 aim*2-min；aim 偏大同理
可证明这样做对于随机数据是非常有效的

No.38
题目名称
CNTDSETS
算法
容斥
时间复杂度
$O(T*(N^2+NlogP))$

题目大意
点集的直径定义为选取两点求切比雪夫距离 $(max(x_i-x_j,y_i-y_j))$ 的最大值。求 N 维空间中切比雪夫距离为 D 的不同点集个数。
两个点集相似当且仅当他们可通过平移重合
题解
首先解决两点集相似的问题，我们可以直接通过平移“卡”到坐标轴解决
容斥原理，我们求恰好为 D 等同于分别求小于等于 D，小于等于 (D-1)，两次答案相减
于是我们只用求小于等于 D，每一维都取到 0 值的方案总数，直接枚举有多少个维度没有取到 0，容斥解决即可

No.39
题目名称
SEINC
算法
贪心
时间复杂度
$O(N)$

题目大意
给你两个数列 A，B，值域 [0,3]，每次选择 A 中的一个区间 [l,r]，讲里面所有数都加 1 模 4，问 A 至少进行多少次操作才能够变成 B
题解
设数列 C 为 B 和 A 的差数列的差分数列，则操作变成选择 (i,j)[i<j]，C[i]–,C[j]++;
首先考虑一个不太正确的贪心，我们运用均摊复杂度证明中的一个 trick，考虑我们有一个叫做硬币的东西，将 C[i]–看成是挣一个硬币，C[j]++ 看做消费一个硬币，则操作数可看做流通过的硬币总量（流通量）
每次遇到一个 $C[t]\neq 0$，若选择花费 (4-C[t]) 硬币则不会产生代价，选择挣 C[t] 硬币则会产生 C[t] 代价.
可以看出我们每次应该优先选择花费硬币
这样的贪心思路是有 bug 的，考虑 C=3,1,2,2 则刚才那个思路的挣 3(3), 消费 1(0), 消费 2(0), 挣 2(2) 总代价为 3
考虑在最后一个 2 是我们发现倘若将 1 改为挣 1，则在那里多了 1 的代价，但在这里少了 2 的代价。
所以我们就可以讲刚才每次消费记录次数，遇到类似需要挣钱时优先考虑能否通过撤销之间消费达到更优

No.40
题目名称
FNCS
算法
分块
时间复杂度
$O(N\sqrt{N}logN)$

题目大意
给你一个 n 个数的数列 A 和 n 个函数 $f_i(A)$, 定义

$$f_i(A) = \sum A_k[L_i \le k \le R_i]$$

支持两个操作：

- 修改 A 数列的第 x 项为 y
- 询问第 l 个函数到第 r 个函数的所有函数值的和

题解

- 方法一：

  一个询问 [l,r] 可以拆成两个询问 [0,l-1][0,r] 的差。

  所以将新询问 (pos,time) 表示一个询问区间为 [0,pos] 的时间为 time 的原询问。

  考虑一个数 a, 位置 P 存在时间 [tl,tr], 存在的贡献，是 $time \in \{tl, tr\}$,$P < pos$ 的所有询问

  改为三维空间中的矩形点加。

  卡常

- 方法二：

  将上面的询问 (pos,time) 模队算法解决，树状数组 O(logN) 维护每次变化, 卡常

- 方法三：

  改为对连续的函数区间分块，预处理每一块中每个位置数的出现次数。常数较小

No.41
题目名称
ROC
算法
模拟
时间复杂度
$O(NT)$

题目大意
`https://www.codechef.com/problems/ROC`
题解
time(i,j)=min((max(dist(i, k), dist(j, k+1)) + 1/2 len(k, k+1)));
通过靠右遍历形成一个环，将环展开成链，在链上暴力计算上面的式子

No.42
题目名称
DAGCH
算法
Lengauer-Tarjan Algorihtm
时间复杂度
$O(N\alpha)$

题目大意
一张图，点编号为 dfs 序。
一个节点 x 被称为是另一个节点 y 的 Supreme Vertex，如果存在一条有向路 $v_0 = x, v_1, \ldots, v_k = y$，满足 $x < y < w$，对于所有 $0 < i < k$。也就是说，一条从 x 出发到 y 有 0 个或更多个中间节点的有向路，满足所有中间节点的编号都大于 x 和 y 的编号，并且 x 的编号小于 y。如果 v 是另一个节点 w 所有的 Supreme Vertex 中编号最小的，v 被称为是 w 的 Superior Vertex。你将得到 Q 个询问。每个询问，将会给定一个节点 v，你需要找出有多少节点，将 v 视为其 Superior Vertex。
题解
发现要求的那个东西就是 Lengauer-Tarjan 中对于 semi 数组的定义
直接跑 Lengauer-Tarjan 算法，答案中的 semi 数组就是答案

No.43
题目名称
STREETTA
算法
线段树
时间复杂度
$O(Nlog^2N)$

题目大意
两个独立子任务：
维护区间加等差数列和区间 max 等差数列
题解
线段树裸题

No.44
题目名称
RIVPILE
算法
最短路
时间复杂度
$O(N^2M+NMlogNM)$

题目大意
一条河，范围为坐标轴上 $0 \le Yp \le w$ 的所有点 P，上面有若干的木桩，同时有若干种类圆盘无穷多个，每个圆盘有一个价值和半径，在适当木桩上放适当圆盘，使得这条河两岸连通，求最优方案
题解
拆点，点 (i,j) 表示第 i 个木桩上放 j 号盘子的情况，跑 dijkstra 即可

No.45
题目名称
CKROACH
算法
随机化
时间复杂度
$O(???)$

题目大意
给你一个矩阵 $P_{i,j}$ 表示杀虫剂 i 杀掉昆虫 j 的概率，每个杀虫剂有购买价值，就一种购买方案使得所有的害虫死亡率大于 90%
题解
贪心求出一组较优解，策略为设

$$w[i][j] = -log_{10}(1-\frac{p[i][j]}{100}) = 2 - log_{10}(100-p[i][j])$$

则存活率

$$\prod(1-\frac{p[i][j]}{100}) \le \frac{1}{10}$$

等价于

$$\sum w[i][j] \ge 1$$

我们可以以此为估价函数，每次选择任没有被杀的昆虫，计算所有未使用杀虫剂对其贡献 w 之和。选取性价比 (贡献/费用)最大的杀虫剂
贪心之后可以通过模拟退火调整，当然，此题模拟退火意义不大，直接改为随机 1-3 个位置交换判断是否可行即可

No.46
题目名称
CIELQUAK
算法
插头 DP，马尔科夫链
时间复杂度
$O(T * min(40,N) * M * 6435)$

题目大意
一个 N*M 方格图，每条边存在的概率为 p，问 (0,0)，(n,m) 联通概率
$N \le 10^{18}, M \le 8, T \le 50$
题解
对于 N 较小的情况，可用插头 DP 解决
其中状态记录的是分界线处 M 个方格与 (0,0) 的联通状态以及相互的联通状态，状态总数最多3432
对于 N 较大的情况，我们设 N=k 答案为 P(k)，存在

$$\lim_{k\to\infty}\frac{P_k}{P_{k-1}} = C$$

在 N 到达 40 时，后面的解都可以通过快速幂估算出
证明与 Markov chain.Perron–Frobenius theorem 有关

No.47
题目名称
EVILBOOK
算法
搜索
时间复杂度
$O(???)$

题目大意
`https://www.codechef.com/problems/EVILBOOK`
题解
直接搜索即可

No.48
题目名称
ANUDTQ
算法
splay
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
一棵树，树有点权，支持操作

- 加儿子
- 子树加
- 子树和
- 删除子树

$N \leq 50000$
题解
平衡树维护树的欧拉序

No.49
题目名称
HYPER
算法
打表
时间复杂度
$O(1)$

题目大意
一个 3-超图类似与一个普通的图, 只不过其中的边都连接三个点.
一个 3-超树是一个去掉任意一条边都以后都不连通的 3-超图.
给定 N, 问有几种含有 N 个带标号的点的本质不同的 3-超树.
$N \leq 17$
题解
打表

No.50
题目名称
ANDOOR
算法
计算几何
时间复杂度
$O(N^2)$

题目大意
给你一堆圆，求被圆覆盖区域的周长 $N \leq 1000$
题解
对于每一个圆，处理出被覆盖周长区间交，则可解决此题

No.51
题目名称
GERALD07
算法
Link-Cut Tree
时间复杂度
$O(NlogN)$

题目大意
给你一个图，询问只保留编号在 (L_i, R_i) 之间的边，连通块个数
题解
按照边编号加边，处理出每条边最初被后面的哪一条边“踢出去”（即由于出现环而对生成树没有贡献）
lct 维护最小生成树
主席树解决询问

No.52

题目名称

QUERY

算法

可持久化线段树，

链剖分

时间复杂度

$O(NlogN)$

题目大意

给你一棵树，要求区间加等差数列，历史回滚

树 $N \leq 10^5$

题解

将链剖中的线段树改成可持久化线段树