

Separable Divisions 解题报告

绍兴市第一中学 任之洲

1 试题来源

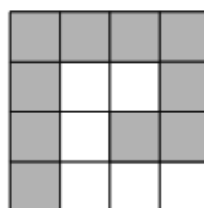
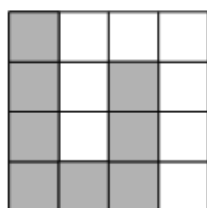
Andrew Stankevich Contest 27

Codeforces gym ASC27 J

2 试题大意

对于一个 $n \times m$ 的方格图，一种黑白染色方案被称为 $Separable Divisions$ ，当且仅当满足以下条件：

- 由一个黑色连通块和一个白色连通块组成。
- 这两个连通块是可分离的，即可以从某个方向抽开两个连通块。



(a) Separable division. (b) Nonseparable division.

求出 $Separable Divisions$ 染色方案数量。

数据范围： $n, m \leq 50$ 。

3 算法介绍

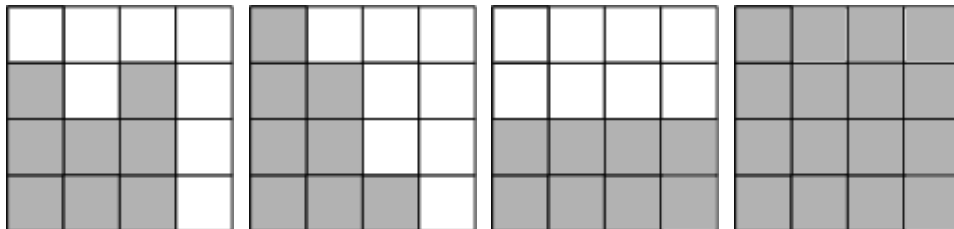
可以用容斥思想来简化这个问题。

方格图共有四条边，定义一条边合法为可以将黑色连通块从这条边抽出（首先要保证黑白连通），那么通过容斥易得

$$ans = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} f_i$$

其中 f_i 表示强制其中 i 条边一定合法的方案，考虑如下四种情况：

- 对于 f_1 的情况，可以直接枚举在那条边上黑色连通块所占的区间长度 l ，可选用的染色高度为 $1 \sim m-1$ 。
- 对于 f_2 的情况，一定是覆盖了某一个角，从边上说的话就是一个递减序列，用DP可以解决。
- 对于 f_3 的情况，很简单，一定是沿着某一条边不断扩展。
- 对于 f_4 的情况，只有全图染同一种颜色的可能，不需要考虑。



不考虑大整数高精度计算带来的时间和空间开销，时间复杂度 $O(nm)$ ，空间复杂度 $O(nm)$ 。