

IOI2016国家集训队第一次作业 泛做表格

福建省长乐第一中学 高闻远

January 20, 2016

传统题部分：

题1

试题编号：	试题名称：
Codechef July13 RIVPILE	Across the River
题目大意：	算法讨论：
<p>给定二维平面上n个点的坐标，以及m种圆盘的价格与半径。我们可以买任意多的圆盘把它放到点上(圆心坐标与点坐标一致)。我们只能在直线$y = 0$或$y = W$或圆盘上移动，问想从直线$y = 0$走到$y = W$，需要用来购买圆盘的最少价格是多少。有T组数据。</p> <p>$T \leq 10, n, m \leq 250, 2 \leq W \leq 10^9$</p>	<p>我们定义(x, u)为点x上放上第u种圆盘时的状态，若点x上放第u个圆盘，点y上放第v个圆盘，且此时能从x点走到y点，那么我们连一条连接(x, u)和(y, v)的双向边，边上权值为对应的购买价值。加上直线$y = 0$和$y = W$时的状态，对这张图做最短路即是所求答案。</p> <p>注意到我们将圆盘按半径排序后，若(x, u)到(y, v)有边，那么对于之后的v'，(x, u)到(y, v')也肯定有边，因此我们改为让每个(z, w)向$(z, w + 1)$连边。这样处理后对于一个三元组(x, u, y)，(x, u)最多只和一个(y, v')连边，这样我们将边的数目降为$O(n^2 * m)$，可以通过此题。</p>
时间复杂度： $O(nm \log(nm))$	空间复杂度： $O(n^2 * m)$

题2

试题编号:	试题名称:
Codechef November13 QPOINT	Queries With Points
题目大意:	算法讨论:
<p>给定二维平面上n个互不相交的简单多边形，多边形总点数为K，有Q次询问，每次询问一个点在哪个多边形内部。强制在线</p> <p>$n \leq 10^5, K \leq 3 * 10^5, Q \leq 10^5$</p>	<p>将坐标离散化后，注意到相邻两个x坐标之间的区域中，存在许多只在端点处相交的线段，且这些线段有严格的上下序关系。因此若可以离线处理，只需利用扫描线扫一遍x轴，用平衡树维护穿过当前x的所有线段，并将询问排序，每次询问时找到当前点上方最近的线段，这个点所在的区域便是这条线段下方的区域。强制在线的话只需预处理出可持久化平衡树即可。</p>
时间复杂度: $O(K \log K + Q \log K)$	空间复杂度: $O(K \log K)$

试题编号：	试题名称：
Codechef November13 MONOPOLY	Gangsters of Treeland
题目大意：	算法讨论：
<p>给定一棵n个点的树，每个节点有一个颜色，初始时所有节点颜色都不相同。在相邻节点移动时，若两个点颜色不一样则会产生一点代价。一共有Q次操作，每次操作会将一个节点到根的路径上所有点颜色改为一个从未出现过的颜色。或是询问以一个点u为根的子树中所有点移动到根节点的代价的平均值。</p> <p>$n, Q \leq 10^5$</p>	<p>我们重新构出一棵树，在新树中两个点有边，当且仅当两个点颜色相同。那么可以发现原树的一次修改操作相当于对新树进行一次LCT算法中的<code>access(expose)</code>操作，所以我们利用LCT模拟修改操作，并且每次更改父子关系时，对应的子树代价都会加一或减一，这步用线段树或BIT对原树的dfs序进行区间修改即可。询问就直接用线段树或BIT进行区间询问。</p>
时间复杂度： $O(n \log^2 n)$	空间复杂度： $O(n)$

试题编号:	试题名称:
Codechef May13 QTREE	Queries on tree again
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个包含n个点n条边的简单无向联通图，保证图中仅有一个环且环长度为奇数。每条边上有一个权值，定义点u到点v的最短路为连接u, v的路径中边数最少的路径。有Q次操作，每次操作给出两个点u, v，操作会将u, v最短路上的边的权值全部取反，或是将u, v最短路上的边的权值按顺序取出看做一个序列，并询问这个序列的最大连续子序列和。</p> <p>$n, Q \leq 10^5$</p>	<p>做出原图的一棵BFS树，那么唯一的一条非树边一定连接两个在BFS树中深度相同的点。那么对于两个点的最短路，可以拆成三个部分，分别是u到环，环上边数少的一条路径，和环到v。环上边数少的路径可以通过预处理一些信息简单得出。剩下的问题可以用树链剖分和经典的线段树维护最大连续子序列和做法简单解决。</p>
时间复杂度: $O(n + Q \log^2 n)$	空间复杂度: $O(n)$

题5

试题编号:	试题名称:
Codechef December14 RIN	Course Selection
题目大意:	算法讨论:
<p>有n个课程和m个学期，每个课程都需要在某个学期完成。不同课程在不同学期完成会有不同分数，用数组$x_{i,j}$来描述。同时还有K组前置课程关系，表示要先学完课程a_i才能学课程b_i (每个课程可能有多个前置课程)。要求安排学习计划，并求分数平均值的最大值。</p> <p>$n, m, K, x_{i,j} \leq 100$</p>	<p>考虑用网络流最小割解决这题。将每个点拆为$m + 1$个点记为$p_{i,j}$，S为源，T为汇，$(S, p_{i,0}), (p_{i,m+1}, T)$容量为无穷大，$(p_{i,j}, p_{i,j+1})$容量为$100 - x_{i,j+1}$。若有一组前置关系$(a_i, b_i)$，则对于每个$p_{a_i,j}$，让它向$p_{b_i,j+1}$连一条容量无穷大的边。$100 * n - \text{Mincut}$便是答案。</p>
<p>时 间 复 杂 度:$O(\text{MaxFlow}(nm, nm + Km))$</p>	空间复杂度: $O(nm + Km)$

试题编号:	试题名称:
Codechef April12 CONNECT	Find a special connected block
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个$n \times m$的矩阵，每个格子上填着-1到$n * m$中的一个整数。任务是找出一个连通块(四联通)，这个连通块要包含至少K个不同的正数，且不能有-1.每个格子有选取代价。求选取出符合要求的联通块的最小代价。</p> <p>$n, m \leq 15, 1 \leq K \leq 7$</p>	<p>假设只有K种不同的数，那么用斯坦纳树即可解决问题。所以数字多的情况下，我们对所有数随机一个$[1, K]$内的数进行重标号。然后进行斯坦纳树。显然这种操作只会让答案变劣，因此我们重复进行这个操作，以保证正确性。经过计算，进行700次随机就可以保证99%的正确性。</p>
时间复杂度: $O(\text{随机次数} * 2^K nm)$	空间复杂度: $O(2^K nm)$

题7

试题编号:	试题名称:
Codechef February14 DAGCH	Graph Challenge
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一张n个节点m条边的有向图，节点编号为这张图的一个dfs序，所有点从1号点开始可达。若一条从x到y的有向路径满足所有中间节点编号均大于x和y且$x < y$，那么称x是y的supreme vertex，如果v是点w所有的supreme vertex中编号最小的，称v是w的superior vertex。现在有Q个询问，每次询问给出一个点v，问有多少点将v视为其superior vertex。</p> <p>$n \leq 10^5, m \leq 2 * 10^5, Q \leq 10^5$</p>	<p>根据题目定义，可以发现一个节点的superior vertex就是dominator tree算法中的半必经点。所以对图按dfs序做dominator tree即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log n + Q)$	空间复杂度: $O(n)$

试题编号:	试题名称:
Codechef April12 TSUBSTR	Substrings on a Tree
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵以1为根的树，每个节点上有个小写字母。一个字符串是这棵树的子串，当且仅当它能够通过一个点到其子孙的一条路径上所依次构成的字符串来获得。求这棵树有多少不同的子串。同时还有Q次询问，每次给出一个定义26个小写字母大小关系的排列P和一个数K。求将所有不同子串按新的大小关系按字典序排序后，第K小的字符串。</p> <p>$n \leq 250000, Q \leq 50000$, 输出大小不超过800KB</p>	<p>将给出的树看做一棵Trie树，在这个Trie树上做后缀自动机即可。</p>
时间复杂度: $O(n + Q)$	空间复杂度: $O(n \times 26)$

试题编号:	试题名称:
Codechef February14 COT5	Count on a Treap
题目大意:	算法讨论:
<p>题目要求维护一棵大根堆Treap，要求支持三个操作：</p> <p>1. 插入一个关键字为k权值为w的点。2. 删除一个关键字为k的点。3. 询问关键字为ku和k_v的两个节点在Treap中的距离。保证任意时刻树中节点关键字和权值都两两不同。</p> <p>$n \leq 2 * 10^5, 0 < k, w, ku, kv < 2^{32}$</p>	<p>treap的中序遍历序列是关键字大小顺序，两个节点在Treap中的LCA就是他们中序遍历序列所在区间中权值最大的点。所以我们可以用线段树求出两个点的LCA。接下来只要能计算出任意点的深度即可用$dep_u + dep_v - dep_{LCA} * 2$来计算答案。注意到$x$是$y$的祖先($x \leq y$)，当且仅当在中序遍历序列中区间$[x, y]$里不存在权值大于$x$的点。$x \geq y$的情况也类似。所以我们考虑将祖先按照中序遍历中的位置分为左右两侧，分开统计。我们用线段树记录一个区间中最左节点左侧的祖先个数，询问时记录当前区间左侧的最大权值，再维护出区间权值最大值后每次查询都只会递归到一侧子树，另一侧子树可以利用一次递归直接算出答案。右侧的情况类似。插入删除的话由于允许离线，所以提前预处理出位置(预留位置)即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log^2 n)$	空间复杂度: $O(n)$

试题编号：	试题名称：
Codechef December12 HYPER	Hypertrees
题目大意：	算法讨论：
<p>一个3-超图类似于一个普通图，但其中每条边都连接三个点。</p> <p>一个3-超树是一个去掉任意一条边以后都不连通的3-超图。</p> <p>给定n，问有几种含有n个带标号点的本质不同的3-超树。</p> <p>$n \leq 17$</p>	<p>在本地搜索出答案后打表提交即可。</p>
时间复杂度： $O(T)$	空间复杂度： $O(n)$

题11

试题编号：	试题名称：
Codechef April15 BWGAME	Black-white Board Game
题目大意：	算法讨论：
<p>给定一个$n \times n$的矩阵，第i行中的第L_i到第R_i列的格子被涂黑，其余格子为白色。两个人轮流给出一个排列，要求第一个人给出的排列逆序对数为偶数，第二个人给出的排列逆序对数为奇数。且两个人给出的排列p，要满足格子(i, p_i)为黑色。不能重复给出已给出的排列，问第一个人先手的情况下游戏最后的结果。</p> <p>$n \leq 10^5$</p>	<p>我们将这个矩阵白色格子视为0，黑色格子视为1，则这个矩阵的行列式的值，实际上就是第一个人能给出的排列数-第二个人能给出的排列数。因此求出这个矩阵的行列式就能知道答案。这个矩阵十分特殊，在一行中1的列是连续的，所以我们可以利用可并堆进行消元，并利用拉普拉斯展开来快速计算行列式。</p>
时间复杂度： $O(n \log n)$	空间复杂度： $O(n)$

题12

试题编号:	试题名称:
Codechef April15 LPARTY	Little Party
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个由m个元素组成的集合，每个元素由n个布尔变量组成，每个变量可以为真或假。要求找出一个总长度最小的基集合，使得以这个基集合中元素为子集的元素集合恰好为给出的集合。基集合中元素由n个变量中某些变量组成，每个变量也仍然可以为真或假。给出的m个元素一定包含所有n个变量。共有T组数据。$n \leq 5, m \leq 1000, T \leq 120$</p>	<p>我们可以找出所有3^n种元素，并枚举所有可能的集合进行判断。考虑到所有的元素中有很多是不合法或没有必要的，所以可以先用一个集合DP来求出所有有用的元素，称为基元素。可以发现最坏情况下基元素的个数最多32个。具体DP时，若一个元素的某一变量取真假两值时其都暂时为基元素，那么这两个元素便都是没有必要的元素。问题转化为用这些基元素去覆盖给定的所有元素。接下来我们只需要用记忆化搜索以及最优性剪枝、可行性剪枝等搜索技巧来解决这题。</p>
时间复杂度: $O(3^n + \text{状态数})$	空间复杂度: $O(4^n + \text{状态数})$

题13

试题编号:	试题名称:
Codechef March15 TREECNT2	Counting on a Tree
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵包含n个节点的有标号边带权无根树。要求计算有多少个无序点对(S, T)满足S到T的路径上所有边的边权的最大公约数为1. 同时有Q组询问, 每组询问会将某条边的权值进行修改, 要求回答每次修改后的答案。</p> <p>$n \leq 10^5$, 权值 $\leq 10^6$, $Q \leq 100$</p>	<p>对于单组询问, 设f_i表示路径Gcd为i倍数的点对个数, 那么答案即为$\sum f_i * \mu(i)$。我们只需处理$\mu(i)$不为0的i即可, 设$\mu(i)$不为0的i个数为x。求一次 f_i只需用并查集即可。</p> <p>现在有修改操作, 由于修改操作数比较少, 所以我们考虑将所有没有修改的边先加入并查集中。每次询问将剩余的Q条边加入, 询问完再复原回去。为了保证复杂度, 需要对并查集进行启发式合并或按秩合并。</p>
时间复杂度: $O(x \times (n + Q^2) \log n)$	空间复杂度: $O(x * n)$

题14

试题编号：	试题名称：
Codechef November14 SEAORD	Sereja and Order
题目大意：	算法讨论：
<p>给定n个程序，每个程序都需要在两台电脑上分别运行，每个程序在两台电脑上运行时间分别是a_i和b_i秒，一台电脑不能同时运行两个程序，一个程序也不能在两台电脑上同时运行，求运行完所有程序的最短时间并输出方案。有多组数据。</p> <p>$\sum n \leq 2 * 10^5, a_i, b_i \leq 10^5$</p>	<p>可以发现答案下界为$\max(\sum a_i, \sum b_i, a_i + b_i)$，且这个下界一定会被取到。若下界为$a_i + b_i$，则其他程序对应填进去即可。否则有台电脑在不间断运行。由于最优解的情况非常多，所以直接随机两台电脑运行程序的顺序，知道顺序后可以贪心求当前的最短运行时间，若达到下界则说明得到了一个解。</p>
时间复杂度： $O(\text{随机次数} \times n)$	空间复杂度： $O(n)$

题15

试题编号:	试题名称:
Codechef November14 FNCS	Chef and Churu
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个含有n个元素的序列，同时有n个函数，每个函数返回序列中的一个区间和。现在在m次操作，每次操作会修改一个序列中的元素，或是询问一段编号连续的函数值的和。 $n, m \leq 10^5$</p>	<p>问题就是维护一个序列支持单点修改以及区间和的区间和。考虑对n个函数分块，设块的大小为b，预处理出每个点在每个块中的出现次数，这样修改可以在$O(\frac{n}{b})$时间内完成。对于询问，整块的答案用块的和直接回答，单独元素用BIT查询即可。</p>
时间复杂度: $O(n * \frac{n}{b} + m * (\frac{n}{b} + b \log n))$	空间复杂度: $O(n * \frac{n}{b})$

题16

试题编号:	试题名称:
Codechef December12 DIFTRIP	Different Trips
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵n个点的树，1号点为根。一条可行的路径为一个点到这个点的某个祖先的路径。两条路径被认为是相似的，当且仅当他们长度相等且按顺序所经过的城市的度数一一相等。问一共有多少种不相似的可行路径。 $n \leq 10^5$</p>	<p>将度数看做一个字符，那么这棵树相当于一个Trie树，问题就是求这个Trie树有多少不同子串。在Trie上构SAM或者做树上SA即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log n)$	空间复杂度: $O(n \log n)$

题17

试题编号：	试题名称：
Codechef February15 DE-VLOCK	Devu and Locks
题目大意：	算法讨论：
<p>求有多少n位十进制数是P的倍数且每位之和小于等于m，允许前导0，答案对998244353取模。要求回答m分别为$[0, MM]$时的答案</p> <p>两种数据范围：1. $n \leq 10^9, P \leq 50, MM \leq 500$</p> <p>2. $n \leq 10^9, P \leq 16, MM \leq 15000$</p>	<p>设$f_{i,j,k}$表示一共有i位，数模P为j，每位之和为k的数的个数。$f_{i*2,j,k} = \sum f_{i,p,q} * f_{i,(j-p) \bmod P, k-q}$，这是个卷积式子，因此我们可以用倍增FFT来计算答案。由于第二维比较小，所以我们考虑暴力枚举平方转移，只对第三维做FFT。因此为了保证复杂度，我们先对所有$f_{i,j}(x)$做DFT，然后暴力相乘，最后再全部IDFT回去。</p>
时间复杂度： $O(\log n \times (P * MM \log(MM) + P^2 * MM))$	空间复杂度： $O(P * MM)$

题18

试题编号:	试题名称:
Codechef December13 QTREE6	Query on a tree VI
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵n个节点的树，每个节点有一个颜色(黑/白)，初始都为黑。有m次操作，每次会切换一个点的颜色(黑变白，白变黑)，或者询问有多少个点到点u的路径上所有点颜色都相同。</p> <p>$n, m \leq 10^5$</p>	<p>我们对这棵树进行树链剖分，维护每个节点是黑色时它子树中的答案。修改询问时找到这个点最远的同色点祖先进行操作即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log^2 n)$	空间复杂度: $O(n)$

题19

试题编号:	试题名称:
Codechef February12 FIND-SEQ	Find a Subsequence
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个含有n个元素的序列，要求找到其中的一个长度为5的子序列，使得这五个元素按顺序的大小关系与一个$1 \sim 5$的排列一致。有T组数据。</p> <p>$n \leq 1000, T \leq 20$</p>	<p>我们枚举序列的第二个数与第四个数，这样剩下三个数的位置互不影响。且第一个数或是第五个数的要求会是尽量大或是尽量小(贪心，给其他数更大的选择空间)，如果这个数被确定下来，剩下的两个位置也可以通过类似的贪心得到。(一个尽量大，一个尽量小)。这个确定是否存在的步骤可以通过二维前缀和$O(1)$判断。同样我们可以预处理出一个二维前缀最大值等，来$O(1)$找到第一个数或第五个数，剩下的两个位置暴力寻找来得到方案。</p>
时间复杂度: $O(n^2)$	空间复杂度: $O(n^2)$

试题编号：	试题名称：
Codechef May12 TICKETS	Selling Tickets
题目大意：	算法讨论：
<p>给定n道菜，有m个人，每个人喜欢两道菜，一道菜只能给一个人吃。问最多能选出多少人，使得不管是哪几个人，这几个人都能吃到喜欢的菜。</p> <p>$n \leq 200, m \leq 500$</p>	<p>将菜看做一个点，一个人看做一条边，连接两个他喜欢的菜所代表的顶点。那么能请K个人的条件可以证明为：对于任意大小为K的边集E，与其邻接的顶点集V，必定满足$E \leq V$ (假设边集联通，不连通可以分开考虑，并不影响)。因此我们的任务变为找到最小边集满足$E > V$，答案即为$E - 1$。可以发现最小边集E满足$E = V + 1$，而且点集中不存在度数为1的点。由于有E条边，度数和为$2 E$，所以点集V只有两种可能：1. 两个点度数为3，其余度数为2。2. 一个点度数为4，其余点度数为2。那么这个图只有三种形态：1. 两个度数为3的点间有三条不相交的路径。2. 两个不相交的环中有一条简单路径相连。3. 两个环在一个点相交。结构1可以平方枚举两个度数为3的点并用BFS求出三条不相交路径。结构2枚举连接环的路径上的一个点，然后做出图的一棵BFS树，一条非树边对应一个环，找出两个不相交的环使它们和最大即可。结构三枚举交点类似处理即可。</p>
时间复杂度： $O(n^3 + n^2m)$	空间复杂度： $O(n + m)$

题21

试题编号：	试题名称：
Codechef May12 LEBXES	Little Elephant and Boxes
题目大意：	算法讨论：
<p>有n个盒子，第i个盒子有P_i概率打开获得V_i的金币，有$1 - P_i$的概率打开获得一个钻石。有m个物品，第j个物品要花费C_j的金币和D_j个钻石，打开所有盒子后，我们会尽可能多的购买物品，每个物品只能买一次。问打开所有盒子后，期望买到的物品个数。</p> <p>$n, m \leq 30, V_i, C_j \leq 10^7, D_j \leq 30$</p>	<p>先用DP求出$f_{i,j}$表示有i个钻石，买到j个物品所需要的最少钱数。然后做meet in the middle，利用二分找到前半部分一个状态能恰好买到k个物品所需要的的后半部分状态概率和。</p>
时间复杂度： $\frac{n}{2} * 2^{\frac{n}{2}} + m * (\frac{n}{2})^2 * 2^{\frac{n}{2}}$	空间复杂度： $O(2^{\frac{n}{2}})$

题22

试题编号:	试题名称:
Codechef August15 DISTNUM	Simple Queries
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个长度为n的数列和m个操作: 1. 定义S为区间$[l, r]$中出现过的数字的集合, 求$(\sum_{1 \leq i < j < k \leq S } S_i S_j S_k) \bmod 10^9 + 7$ 2. 插入一个数。3. 删除一个数。4. 修改一个位置的值。5. 询问一个区间内出现过的数字种类数。</p> <p>$n, Q \leq 10^5$</p>	<p>对于每个位置, 求出上一个拥有当且位置的数的位置。那么一次询问相当于在二维平面上询问一个矩形, 第一种询问可以通过容斥来算出。由于可以离线, 所以插入删除操作我们可以预处理出他们的位置(预留位置), 并且对于每次操作预处理出它在最终序列的操作位置。然后用CDQ分治解决即可。</p>
时间复杂度: $O(m \log^2 n)$	空间复杂度: $O(m \log n)$

题23

试题编号:	试题名称:
Codechef May14 SEINC	Sereja and Subsegment Increasings
题目大意:	算法讨论:
<p>给定两个含有n个元素的序列A和B, 每次可以将A中一个区间内的元素加1模4, 求最少多少次操作能让A变为B。</p> <p>$n \leq 10^5$</p>	<p>设$C_i = B_i - A_i$, 对于没有模的操作, 答案即为$\sum \max(0, C_i - C_{i-1})$, 有模以后相等于他可以选择一对$i, j$, 使得$c_i + 4, c_{j+1} - 4$, 因此我们贪心, 使得差分后$C$数组正数和最小。显然此时只有操作2, 3, -2, -3能使得答案更优, 贪心匹配即可。</p>
时间复杂度: $O(n)$	空间复杂度: $O(n)$

题24

试题编号：	试题名称：
Codechef November12 MAR-TARTS	Martial Arts
题目大意：	算法讨论：
<p>一个完全二分图，边有两个权值$A_{i,j}$和$B_{i,j}$，要进行匹配。令匹配边的A值总和为H，B值总和为G。对手的目的是最大化$G - H$，其次最大化G，他会在知道了匹配之后选择是否去掉一条匹配边，使得该边的权值不算入H和G。任务是找一个完全匹配，最大化$H - G$，其次最大化H。</p> <p>$n \leq 100, A_{i,j}, B_{i,j} \leq 10^{12}$</p>	<p>定义每条边价值为$C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$，我们任务便是最大价值和，其次最大化$H$，对手是最小化价值和，其次最大化$H$(最大化$G$与最大化$H$等价)。考虑枚举对手删掉的边，这样把边按权值从小到大排序并加入图中，这样对手如果删边一定删当前边，如果我们强制匹配当前这条边，那么就能算出答案。我们的任务便是加入一条边和强制匹配一条边，这用KM算法实现。强制匹配时只需要将当前边价值置为无穷大即可。更改价值后，修改图中KM算法的label数组然后重新匹配即可。</p>
时间复杂度： $O(n^4)$	空间复杂度： $O(n^2)$

题25

试题编号:	试题名称:
Codechef November12 COUN-TARI	Arithmetic Progressions
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个含有n个元素的整数序列a_i，求有多少个三元组(i, j, k)满足$1 \leq i < j < k \leq n$且$a_k - a_j = a_j - a_i$。</p> <p>$n \leq 10^5, a_i \leq 30000$</p>	<p>我们对序列分块，设块的大小为b，序列中数的最大值为V，那么中间点在块内，其他点在两侧的三元组数目可以用FFT计算出来(利用$a_m id = a_i + a_k$)，两个点在块内，一个点在一侧的三元组数目和三个点都在块内的数目可以通过枚举直接统计出来。</p>
时间复杂度: $O(\frac{n^2}{b} + \frac{n}{b} * V \log V)$	空间复杂度: $O(n * \frac{n}{b})$

题26

试题编号:	试题名称:
Codechef January15 XRQRS	Xor Queries
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个初始为空的整数序列，以及一些询问：1.在序列后插入一个数。2.询问一个区间内的数x，最大化$x \text{ xor } y$，xor表示异或操作。3.删除序列中最后的k个数。4.询问一个区间内小等于x的元素数。5.询问区间内第k小的数。</p> <p>$m \leq 5 * 10^5$</p>	<p>类似主席树那样维护一个Trie树的前缀和结构即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log n)$	空间复杂度: $O(n \log n)$

题27

试题编号:	试题名称:
Codechef October14 BTREE	Union on Tree
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵含有n个节点的树, 现在在Q天, 每天有k_i个警卫分布在树中, 第j个警卫在点a_j处, 能保护距离a_j不超过r_j的点。求每天有多少个点被保护到。 $n, Q \leq 5 * 10^4, \sum k_i \leq 5 * 10^5$</p>	<p>首先对于每一天我们做出关于警卫的虚树, 假设一个点被距离自己最近的守卫管辖。那么对于虚树中的一条边, 可以找到这条边所代表的原图中的路径中的一个点为分界点, 上下部分分属不同的管辖。这样就将问题转化为求距离一个点某个值的点的个数, 这步用点分治即可解决。对于重复统计的部分, 相当于询问某个点子树中深度小于一个值的个数, 这可以用主席树解决。</p>
时 间 复 杂 度: $O(\sum k_i \log(\sum k_i) + n \log^2 n)$	空间复杂度: $O(\sum k_i + n \log n)$

题28

试题编号:	试题名称:
Codechef October14 TRIPS	Children Trips
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个含有n个点的树，每条边长度为1或2，有m次询问，问要从u走到v，每天最多走D的距离，最少几天能走完。 $n, m \leq 10^5$</p>	<p>将路径拆为u到LCA和v到LCA，剩余一小段可以暴力判断。同时按询问的D的大小分别处理，对于D大于\sqrt{n}的询问，答案小于\sqrt{n}，所以利用二分暴力走。而小于\sqrt{n}的询问我们将D相同的一起处理，倍增预处理出这个点向上走2^i天能走到哪里，然后类似二分向上走即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log n \sqrt{n})$	空间复杂度: $O(n \log n)$

题29

试题编号:	试题名称:
Codechef August13 LYRC	Music & Lyrics
题目大意:	算法讨论:
<p>给定m个字符串S_i，以及n个字符串T_i，求出每个T_i在所有S_i中的出现次数和。字符串包含二十六个大写英文字母、二十六个小写英文字母、十个阿拉伯数字和减号。 $n \leq 500, T_i \leq 5000, m \leq 100, S_i \leq 50000$</p>	<p>对所有T_i建出一个AC自动机，然后让S_i在自动机中匹配。匹配到的点，以及这个点fail树中的祖先出现次数均加一，所以我们匹配到一个点就在这个点上打个加一标记，处理完所有串最后沿着fail树累计即可。</p>
时间复杂度: $O(\sum T_i + \sum S_i)$	空间复杂度: $O(\sum T_i \times 63)$

题30

试题编号:	试题名称:
Codechef August13 PRIMEDST	Prime Distance On Tree
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵有n个点的树，树上每条边长度均为1.若等概率从树中挑选两个点，问这两个点间距离值是质数的概率是多大。</p> <p>$n \leq 50000$</p>	<p>我们考虑求出所有点对间的距离值。那么这只需要用点分治+FFT统计即可。注意每层做FFT时要按照子树大小从小到大合并来保证复杂度。</p>
时间复杂度: $O(n \log^2 n)$	空间复杂度: $O(n)$

题31

试题编号:	试题名称:
Codechef June14 TWOCOMP	Two Companies
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵n个点的树，以及$M1$条A路径和$M2$条B路径，每条路径都有一定权值。要求从两种路径中提取出一个子集，使得两种路径互不相交(同种路径可以相交)且价值和最大。</p> <p>$n \leq 10^5, M1, M2 \leq 700$</p>	<p>首先用$M1 * M2$的时间判断哪些路径不能同时被选中，这可以通过LCA来判断。剩下的问题就是一个最大权独立集问题，用最小割解决即可。</p>
时间复杂度: $O(M1 * M2 + MaxFlow(M1 + M2, M1 * M2))$	空间复杂度: $O(M1 * M2)$

题32

试题编号:	试题名称:
Codechef June13 TKCONVEX	Two k-Convex Polygons
题目大意:	算法讨论:
<p>给定n个棍子的长度和整数k, 求能否在其中选出$2 * k$个棍子拼成两个凸多边形。使得两个凸多边形都恰好有k根棍子组成, 且任意相邻的边都不共线。 $n \leq 1000, 3 \leq k \leq 10$</p>	<p>k根棍子能组成一个凸多边形的条件是最长边长度小于其他$k - 1$条边长度和。那么将所有棍子排序后, 选取k根组成一个凸多边形时, 最优方案肯定会挑选连续的k根棍子。现在选取 $2 * k$ 个组成两个凸多边形也类似, 假如两组棍子选取的区间没有交集, 这个可以直接$O(n)$判断。否则它们也一定是一个长度为$2 * k$的连续区间, 我们搜索这个区间内选取的所有方案判断即可。</p>
时间复杂度: $O(n + n \times C_{2*k-1}^{k-1})$	空间复杂度: $O(n)$

题33

试题编号:	试题名称:
Codechef March12 EVILBOOK	Evil Book
题目大意:	算法讨论:
<p>有n个人，你打败第i个人可以获得m_i点魔法但要花费c_i点力量。你可以花费X点魔法寻求帮助，将一个人的魔法和力量都乘以三分之一，但你至少要有X点魔法才能寻求帮助。每个人只能被打败一次。初始时你没有魔法，问至少需要多少力量才能收集到666点魔法。有T组数据。</p> <p>$T \leq 5, 10 \leq X \leq 666, c_i, m_i \leq 10^9$</p>	<p>可以发现对一个人最多只有4种使用帮助的可能，因此我们可以考虑搜索。同时可以发现一定存在一种最优方案使得打败每个人，使用帮助的次数单调不减。于是利用这个定义状态(当前至少使用多少次帮助，没被战胜的人，剩余魔法，已经付出的力量)，加最优性剪枝和可行性剪枝后即可通过此题。</p>
时间复杂度: $O(T \times n^4)$	空间复杂度: $O(n)$

题34

试题编号:	试题名称:
Codechef July12 DGCD	Dynamic GCD
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵有n个节点的树，每个点上有个正权值，接下来有m次操作，每次操作会将一条路径上点的权值都加上一个数，或是询问路径上点权值的最大公约数。</p> <p>$n, m \leq 50000$</p>	<p>首先考虑数列上的情况，因为$\gcd(a, b, c, d) = \gcd(a, b - a, c - a, d - a)$，所以我们可以维护$\gcd(a, S = \gcd(b - a, c - a, d - a))$，这样修改时只会影响$a$，所以暴力修改然后重新计算即可。对于树上的情况我们只要进行树链剖分转化为链上的操作，同时发现这个操作是可以合并和下传更新的，那么就可以利用线段树处理了。</p>
时间复杂度: $O(n \log^2 n)$	空间复杂度: $O(n)$

试题编号:	试题名称:
Codechef January14 TAPAIR	Counting The Important Pairs
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一张有n个点m条边的简单无向连通图。求有多少种边的选择使得删掉两条边后图不连通。</p> <p>$n \leq 10^5, m \leq 3 * 10^5$</p>	<p>求出这张图的任意一个生成树，然后对于每个非树边随机一个权值，树边的权值是所有覆盖它的非树边的权值异或和。如果一个边集删掉后图不连通，那么一定可以找到一个边的子集使得它们的异或和为0。如果随机范围足够大，错误概率可以忽略不计。因为只删两条边，所以排序后扫一遍即可。</p>
时间复杂度: $O(m \log m)$	空间复杂度: $O(m)$

题36

试题编号:	试题名称:
Codechef January14 CNTD-SETS	Counting D-sets
题目大意:	算法讨论:
<p>问有多少组n维点集的等价类使得点集的直径等于D，点集的直径指的是点集中两两点之间切比雪夫距离的最大值。两个点集算作等价的当且仅当他们可以通过平移互相得到。</p> <p>$n \leq 1000, D \leq 10^9$</p>	<p>考虑统计点集直径小等于D的数目，那么$ans_D - ans_{D-1}$便是答案。为了避免统计重复，我们强制让点集中每一维都至少有一个点，它的这一维为θ。这样我们的坐标取值范围就为$[0, D]$。剩下的答案可以通过经典的容斥原理来计算得到。（设f_i表示至少有i维坐标不存在一个θ的点集数）。</p>
时间复杂度: $O(n^2)$	空间复杂度: $O(n^2)$

题37

试题编号:	试题名称:
Codechef June12 MATCH	Expected Maximum Matching
题目大意:	算法讨论:
<p>按以下方式随机生成一个二分图: 左边第i个点和右边第j个点之间有边的概率为$p_{i,j}$。求这样生成的二分图的最大匹配的期望值。</p> <p>$n \leq 5, m \leq 100$</p>	<p>根据Hall定理, 一个二分图有完备匹配当且仅当, 左边的S个点每个点都至少与右边S个点相连。那么我们可以依次作为状态进行状压DP。</p> <p>$f_{i,j}$表示考虑右边前i个点, 左边的n个点满足 Hall定理条件的子集情况为j。我们发现合法的j的数目很少, 所以可以提前搜索出来并预处理转移。</p>
时间复杂度: $O(m \times \text{状态数})$	空间复杂度: $O(m \times \text{状态数})$

题38

试题编号:	试题名称:
Codechef May15 CBAL	Chef and Balanced Strings
题目大意:	算法讨论:
<p>一个字符串是平衡的当且仅当它的每一个字符都出现了偶数次, 一个字符串的type权值是它的所有平衡子串长度的type次方和。现在给定一个长度为n的由小写字符构成的字符串, 有 Q组询问, 每次询问由一个区间组成的子串的type权值大小。强制在线。</p> <p>$n, Q \leq 10^5, type = \{0, 1, 2\}$</p>	<p>考虑用一个二进制数a_i来表示前i个位置中所有字母的出现次数奇偶性, 那么一个子串的是平衡的当且仅当$a_r \text{ xor } a_{l-1}$等于, xor是异或操作。接着剩下的问题就是找出所有这样的点对使得异或值为0。这个步骤用分块就可以解决。</p>
时间复杂度: $O(n\sqrt{n})$	空间复杂度: $O(n\sqrt{n})$

题39

试题编号:	试题名称:
Codechef May15 GRAPHCNT	Counting on a directed graph
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个n个点m条边的有向图。请你统计无序对(x, y)的个数，其中(x, y)满足存在一条从点1到点x的路径，和一条从点1到点y的路径，且两条路径除了点1以外没有公共点。</p> <p>$n \leq 10^5, m \leq 5 * 10^5$</p>	<p>一个合法的(x, y)点对说明x和y不存在除了1以外的公共必经点。所以我们求出这张图的dominator tree，两个点LCA为1号点则它们就是一个合法的点对。这样我们dfs一遍求出子树大小，然后扫一遍点1的儿子进行统计即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log n)$	空间复杂度: $O(n)$

题40

试题编号:	试题名称:
Codechef March14 STREETTA	The Street
题目大意:	算法讨论:
<p>维护一个有n个元素的数列，每个元素有两个值a_i, b_i，有m次操作，每次操作会对一个区间的a_i依次加上一个等差数列，或是用一个等差数列依次对一个区间内的b_i取最大值。或是询问一个位置的$a_i + b_i$。</p> <p>$n \leq 10^9, m \leq 3 * 10^5$</p>	<p>线段树可以很容易维护a_i的值，b_i值我们同样可以用线段树维护，我们对每个节点维护覆盖这个节点的“最优”的一个等差数列，每次修改时我们总是可以找到某个数列的优势区间，使得它只会影响到一侧的子树，这样修改和询问都可以在$O(\log n)$的时间内完成。</p>
时间复杂度: $O(m \log n)$	空间复杂度: $O(m \log n)$

题41

试题编号:	试题名称:
Codechef March14 GERALD07	Chef and Graph Queries
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一个n个点m条边的无向图, 有Q次询问, 每次询问保留编号为$[l, r]$间的边时, 图中有多少联通块。</p> <p>$n, m, Q \leq 2 * 10^5$</p>	<p>考虑离线, 我们用LCT维护关于边编号的最大生成树, 并用BIT维护当且生成树中边的编号是哪些, 这样有区间中有一条边连通块个数就减一。所以询问用BIT查询即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log n)$	空间复杂度: $O(n)$

题42

试题编号:	试题名称:
Codechef February13 QUERY	Observing the Tree
题目大意:	算法讨论:
<p>给定一棵n个点的树, 树上每个点有权值。有m次操作, 每次操作会对一条链上的点的权值依次加一个等差数列, 或是询问一条链上点的权值和, 或是将树的状态改为某次操作后的状态。要求强制在线。</p> <p>$n, m \leq 10^5$</p>	<p>题目就是要求支持链上加等差数列, 以及查询链和。我们用树链剖分维护这棵树dfs序的权值, 为了支持返回历史版本和强制在线的操作, 我们将线段树可持久化即可。</p>
时间复杂度: $O(n \log^2 n)$	空间复杂度: $O(n \log^2 n)$

题43

试题编号：	试题名称：
Codechef September14 QRECT	Rectangle Query
题目大意：	算法讨论：
<p>给定一个二维平面，Q次操作。要求支持插入一个矩形，删除一个矩形，以及询问当前平面上有多少个矩形与给出的矩形相交。矩形包括这个矩形的内部。</p> <p>$Q \leq 10^5$</p>	<p>我们可以将矩形相交的条件写成许多偏序条件，那么这题就可以使用CDQ分治+容斥原理解决。</p>
时间复杂度： $O(Q \log^2 Q)$	空间复杂度： $Q \log Q$

题44

试题编号:	试题名称:
Codechef September11 CN-THEx	Counting Hexagons
题目大意:	算法讨论:
<p>长度为$[1, n]$的木棍都有无限根, 要求从中挑出6根组成一个六边形。需要满足以下条件: 最长的木棍长度不小于L, 其余木棍长度不超过X, 相同长度木棍最多不超过K根, 木棍的选取顺序不同仍视作同一种选法。问有多少种满足条件的选法。 $n \leq 10^9, 0 \leq n - L \leq 100, 1 \leq K \leq 5$</p>	<p>由于$n - L$很小所以考虑枚举L, 然后问题就变成找出5根木棍, 长度和大于L, 每根木棍长度不超过X, 相同长度木棍不超过K根, 这可以用数位dp解决。 $f_{i,j,k,0/1,0/1}$表示处理到第i位, 上一位对当前位进位为j, 5根木棍大小关系为k, 和与L的关系, 最长的木棍与X的关系。为了优化转移复杂度, 需要将木棍长度转为二进制来进行计算。</p>
时间复杂度: $O(\log n \times 5 \times 3^4 \times 2^2 \times 2^5)$	空间复杂度: $O(\log n \times 5 \times 3^4 \times 2^2)$

题45

试题编号：	试题名称：
Codechef September11 SHORT	Short
题目大意：	算法讨论：
给你两个数 n, k ，你需要找出所有的数对 (a, b) ，满足 $n < a < k, n < b < k$ ，并且 $ab - n$ 可以被 $(a - n)(b - n)$ 整除。 $n \leq 10^5, k \leq 10^{18}$	设 $c = a - n, d = b - n$ ，然后将原式化为 $d = \frac{cn + n^2 - n}{kc - c - n}$ ，然后可以发现 $c(c < d)$ 的值很小最大只有 $2.12n$ ，所以我们枚举 c ，当 c 大于4000时我们可以转为枚举 k 。
时间复杂度： $O(n)$	空间复杂度： $O(n \log n)$

题46

试题编号：	试题名称：
Codechef September12 KNGHTMOV	
题目大意：	算法讨论：
给定两种移动方式 (A_x, A_y) ， (B_x, B_y) ，求从 $(0, 0)$ 移动到 (X, Y) 的不经过 k 个障碍点的方案数。 $K \leq 15, 坐标值 \leq 500$	当 $A_x * B_y - A_y * B_x$ 等于0时两种移动方案是二维平面的一组基，所有点可以被这两种移动方案唯一表示，那么问题转化为每次只能向右或向上移动一格，且不经过障碍点到目标点的方案数，这可以通过容斥原理+组合数计算出来。不等于0时相当于在一条直线上进行移动，如果答案不是无穷解，那么可以通过拓扑排序计算答案。
时间复杂度： $O(k^2 \text{或坐标值}^2)$	空间复杂度： $O(\text{坐标值}^2)$

题47

试题编号：	试题名称：
Codechef September12 PA-RADE	Annual Parade
题目大意：	算法讨论：
<p>给定一张n个点m条边的有向图。若干英雄(可能0个)会在一条s_i到t_i的路径上游行，费用是经过边的权值和。若$s_i \neq t_i$则要额外支付C的代价。若一个点没有被任何英雄经过也要额外C的代价。请你安排英雄的游行路线使得代价最小。</p> <p>有K组询问，每组只有C不同。 $n \leq 250, m \leq 30000, K \leq 10000$</p>	<p>一个点显然只会作为一条路径的端点。那么我们可以求出原图两两点之间的最短路并重新构图，将问题转化为每个点只能经过一次，并让费用最小，这很像最小路径覆盖的模型。我们考虑像最小路径覆盖那样拆点，然后做费用流。假设我们流了x条路径，可以发现我们需要额外支付$(n - x) * C$的代价。由于有K组询问，所以我们将每次流量为1的流的费用记下来，然后用二分求出每一组询问，用流或是用C来填充的分界点，并计算答案。</p>
时间复杂度： $O(n^3 + CostFlow(n * 2 \log n^2))$	空间复杂度： $O(n^2 + K)$