

DEVLOCK解题报告

绍兴一中 洪华敦

DEVLOCK

【简要题意】

求有多少 N 位十进制数，满足每位之和小于等于 M ，这个数是 P 的倍数，允许前导0

【解题思路】

我们可以设 $f[x][y]$ 为当前数 $\bmod P$ 等于 x ，位数和为 y 的方案数

我们可以每位分开算，对于 $10^i \bmod P$ 相等的每一位，我们一起算

假设当前计算的是 $10^i \bmod P = w$ 的，这样的位数有 k 位

我们先算出生成函数 $g(x)$ ，其中 x^i 的系数表示位数和为 y 的方案数

$g(x) = (\sum_{i=0}^9 x^i)^k$ ，这个可以通过经典的倍增FFT计算

然后可以推出 $f[i * w \bmod P][i] = [x^i]g(x)$

然后得到了 P 个这样的 f 数组，现在开始合并他们

设 $h[x][y]$ 为当前答案，现在合并 h 与 f ，得到新的答案 v

显然有

$$v[x][y] = \sum_{i+j \bmod P=x, z+c=y} h[i][z] * f[j][c]$$

我们可以发现这是个二维卷积，第一维是循环的，而第二维却不循环

而且我们可以发现第一维比较小，做FFT的意义不大

我们可以先把 $h[x]$ 和 $f[x]$ 这两个数组FFT成点值表达式

这样就有

$$v[x][y] = \sum_{i+j \bmod P=x} h[i][y] * f[j][y]$$

我们可以用 $O(P^2 * M)$ 的时间计算出 v ，然后用 $O(M * P * \log M)$ 的时间 DFT 回去

于是问题就解决了

时间复杂度 $O(M * P^3 + M * P^2 * \log M)$