

《Rectangle Query》解题报告

厦门双十中学 汪文潇

1 题目来源

Codechef September Challenge 2014

2 题目大意

在二维平面上，有 Q 次操作，操作有三种：插入一个矩形、删除一个矩形、询问当前有多少个矩形与询问矩形有公共点。

3 数据规模及约定

$$1 \leq Q \leq 10^5$$

$$1 \leq \text{矩形顶点的横纵坐标} \leq 10^9$$

4 关键字

数据结构 分治

5 解题思路

考虑一次询问，询问的矩形是 m ，当前所有矩形的集合是 S 。

我们设矩形 a 的左下角为 $(x1_a, y1_a)$ ，右上角为 $(x2_a, y2_a)$ 。

所求的是所有与矩形 m 有公共点的矩形个数，也就是下面这个式子：

$$\sum_{a \in S} [x1_a \leq x2_m][x2_a \geq x1_m][y1_a \leq y2_m][y2_a \geq y1_m]$$

其中 $[]$ 符号的意义是：在里面的 **bool** 表达式为真时，整个式子的值为 1，否则为 0。同时，我也会把这个东西称为表达式的值。例如， $[a = b]$ 表示在 $a = b$ 时值为 1， $a \neq b$ 时值为 0。

不难发现，我们关心的是 4 个偏序条件。到这一步其实已经可以通过数据结构尝试解决，但由于条件较多，不容易得到足够好的复杂度。

那么如何减少需要同时考虑的条件数呢？

考虑补集转化，求出与矩形 m 没有公共点的矩形个数。

一个矩形 a 与 m 没有公共点，等价于 a 在 2 维坐标中至少有 1 维与 m 不相交。

考虑容斥，用 x 坐标不相交的个数与 y 坐标不相交的个数减去 2 维都不相交的个数，就是矩形 m 没有公共点的矩形个数，即：

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in S} ([x1_a > x2_m] + [x2_a < x1_m]) + \sum_{a \in S} ([y1_a > y2_m] + [y2_a > y1_m]) \\ & - \sum_{a \in S} ([x1_a > x2_m] + [x2_a < x1_m])([y1_a > y2_m] + [y2_a > y1_m]) \end{aligned}$$

由于 $x1_a > x2_m$ 和 $x2_a < x1_m$ 不可能同时为真，因而可以把这 2 个表达式的值相加代表或（即不同为假）。其余同理。

将这个式子继续展开，得到：

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in S} [x1_a > x2_m] + \sum_{a \in S} [x2_a < x1_m] + \sum_{a \in S} [y1_a > y2_m] + \sum_{a \in S} [y2_a > y1_m] \\ & - \sum_{a \in S} [x1_a > x2_m][y1_a > y2_m] - \sum_{a \in S} [x1_a > x2_m][y2_a > y1_m] \\ & - \sum_{a \in S} [x2_a < x1_m][y1_a > y2_m] - \sum_{a \in S} [x2_a < x1_m][y2_a > y1_m] \end{aligned}$$

此时，最多只需要同时考虑 2 维的偏序(算上操作顺序则为 3 维)，可以通过嵌套数据结构或者经典的分治套数据结构来解决，另外，也有分块的做法。这是一个经典而普遍的问题，不再详细叙述。

我的代码里使用的是分治套树状数组。

而补集转化所需要的当前集合 S 的大小可以直接用一个长整型记录下来。

至此，此题得到解决。

时间复杂度 $O(Q(\log Q)^2)$ 。

6 数据制作

数据制作大致分为 2 个部分，即操作种类的分配、矩形的生成。

对应的，20 组数据中采用了不同的操作比例，矩形的 2 维坐标均在不同范围内随机，部分数据中插入、询问矩形也采用了不同的参数。

考虑到主要的做法应该绝大部分是基于偏序问题，也加入了一些边界情况。