

Fibonacci Numbers on Tree解题报告

宁波市镇海中学 邹逍遥

1 试题来源

Codechef September Challenge 2014

<http://www.codechef.com/SEPT14/problems/FIBTREE>

2 试题大意

给定一个 n 个点的带点权树和 m 个操作，每个操作可以：

- 将第 x 个结点到第 y 个结点路径上的第 k 个结点增加 $F(k)$ （ $F(k)$ 表示第 k 个fibonacci数）
- 当 x 为根时询问以 y 为根的子树中所有点的点权和
- 询问 x 和 y 之间路径上的点权和
- 将树的形态还原到第 x 个询问后的状态

询问答案模 $10^9 + 9$

3 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5$$

$$1 \leq m \leq 10^5$$

4 算法介绍

4.1 将加fibonacci数列转化为加等比数列

注意到 $F(n) = ax^n + (1 - a)y^n$ ，其中

- $a = (3 + \sqrt{5})/(5 + \sqrt{5})$
- $x = (1 + \sqrt{5})/2$
- $y = (1 - \sqrt{5})/2$

由于模数是质数，而 $\sqrt{5}$ 的值可以预处理，不需要非常低的复杂度，那么可以利用原根将方程转化为线性模方程，就可以比较方便地解出模意义下的 $\sqrt{5}$ 。同理也可以求出 a, x, y 。

那么只需要每个点维护两个等比数列的值即可（ x^n 和 y^n ）

4.2 树链剖分

首先我们对整棵树进行DFS，算出每个点的DFS序。在DFS时优先选择大小最大的子树进行DFS，并把这一条到底的链记成一条完整的链，就能保证树上的每条链都能被分成 $O(\log n)$ 个线段上区间，同时每个子树是一个完整的线段上的区间。

但是注意到询问里的根是不固定的，这个该怎么解决呢？

其实也很简单，一开始随便确定一个根，假如询问中的根在子树的上面就没有关系可以直接查询；假如根在子树内部，那么查询的就是那个子树的补，也就是两个区间的并。

4.3 序列操作

那么接下来只需要解决序列上的操作就行了。即支持区间加等比数列，查询区间和和回到某次操作之前。

区间加等比数列可以通过在线段树上打标记来实现，即利用线段树把区间分裂成 $O(\log n)$ 个区间，然后在对应节点上打上标记，在查询的时候一并计算即可。

回到某次操作以前就需要可持久化。不过由于载体是线段树，所以实现可持久化非常方便，只需要每次重建这个点到根的路径就行了。而每次影响到的节点仍然是 $O(\log n)$ 个，不影响复杂度。

总的时间复杂度 $O(n \log n)$ 。