Polygon & Circles 解题报告

福州一中 董克凡

1 试题来源

codechef MARCH16 CHEFPC

提交地址：https://www.codechef.com/problems/CHEFPC

2 试题大意

给出n个圆以及一个点数为m的凸多边形，求凸多边形中，至少被一个圆包含的面积。

$n, m \leq 50$，答案精确到两位小数。

3 算法介绍

3.1 算法一：自适应辛普森

对于所有要求求出某个二维区域面积的题目，都可以用自适应辛普森积分暴力求解，不过在这个算法在运行时间较小的时候会损失部分精度。

我们可以把要求的区域看做某个函数$f(x)$在区间$[l, r]$上的积分，其中l, r分别表示这个区域的最左边的点和最右边的点的横坐标。由积分的定义，$f(t)$就应该表示直线$x = t$与这个区域的交的线段长度。在此问题中，$f(t)$是容易求出的：每个圆覆盖了直线$x = t$上的一条线段，那么可以枚举每一个圆，求出线段的左右端点，凸多边形同样覆盖了直线上的一条线段，也要求出线段端点。然后将所有圆覆盖的线段的端点排序，这些端点将直线分为了一些线段（或者射线，但射线显然不在任意一个圆内），扫描这些线段，同时维护一个变量表示当前的一段线段被多少圆覆盖，让这一段线段同时包含在多边形和至少一个圆内时，将这段线段贡献答案。

用以上方法可以求出对于每一个点x_0的函数值$f(x_0)$，接下来考虑如何求出积分。

对于区间$[l,r]$，如果在这段区间中将$f(x)$当做一个二次函数，那么很容易得到如下的近似：

$$F(l,r)=\int_l^r f(x)\mathrm{d}x=\frac{r-l}{6}\left(f(l)+f(r)+4f(mid)\right),mid=\frac{l+r}{2}$$

用这个公式计算区间$[l,r],[l,mid],[mid,r]$的值，若

$$|F(l,r)-F(l,mid)+F(mid,r)|>\epsilon$$

那么递归计算$[l,mid],[mid,r]$，否则可以认为这次模拟足够精确，直接用模拟值作为返回值即可。

ϵ越小，程序运行时间越长，得到的结果就越精确。如果ϵ设得合理，那么这个算法是可以通过此题的。

3.2 算法二：扫描线

类似圆的面积并这一题，可以先预处理出所有关键点，包括圆与圆，圆与多边形的交点，多边形的顶点，圆的最上最下两个端点，然后将这些关键点按照纵坐标排序。考虑两个关键点之间的区域，这块区域中不会出现曲线相交的情况，那么合法的区域是一些梯形加上一些弓形，这两种规则图形的面积可以直接计算，所以可以使用类似算法一的做法从左到右扫描整个结构，将合法的区域求出来，然后把合法区域的面积相加。

这个算法的时间复杂度为$O\left((n+m)^3\right)$

3.3 算法三：格林公式

一个封闭区域D的面积可以看为一个二重积分：

$$\iint_{\mathrm{D}} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据格林公式：

$$\iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\oint_{\mathrm{L}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中L为区域D的边界，方向满足区域始终在L左侧，若令$Q = x, P = -y$，得：

$$\iint_{\mathrm{D}} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\mathrm{L}} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$$

等式左侧为区域D面积S_D的两倍，所以

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_{\mathrm{L}} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$$

对于本题来说，区域D的边界由一些圆弧与一些线段构成。线段的部分处理同算法一，考虑那些在边界上的圆弧，它们一定被多边形包含，且不被其他的圆包含。那么枚举每一个圆，处理出其他圆覆盖这个圆的端点，以及多边形覆盖的端点，排序后扫描一遍，得到的边界上的每一段弧可以用一个五元组$(a, b, r, \theta_l, \theta_r)$ 表示，其中(a, b)为圆心，r为半径，θ_l, θ_r为这段弧在圆上的极角区间。那么这段弧满足如下关系：

$$x = a + \cos\theta$$
$$y = b + \sin\theta$$

那么对于这一段弧的路径积分为：

$$\begin{aligned}
\int_L x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x &= \int_{\theta_l}^{\theta_r} (a + r\cos\theta)\mathrm{d}(b + r\sin\theta) - (b + r\sin\theta)\mathrm{d}(a + r\cos\theta) \\
&= \int_{\theta_l}^{\theta_r} ar\cos\theta + br\sin\theta + r^2 \\
&= r^2(\theta_r - \theta_l) + ar(\sin\theta_r - \theta_l) + br(\cos\theta_l - \cos\theta_r)
\end{aligned}$$

可以$O(1)$计算，对于线段的积分更加简单，经过推导发现，对于线段A, B的积分公式与$\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{OB}$是等价的。故至此整题即可完美解决。

时间复杂度：$O\left((n + m)^2 log_2(n + m)\right)$