

《Pyramids》解题报告

南京外国语学校 王悦同

【题目描述】

如果你有足够的石块，那么建一座金字塔绝不算难事。举个例子，在一块平地上，我们铺一个 10×10 的矩形，然后在 10×10 的矩形上面铺一个 9×9 的，然后 8×8 的……以此类推，直到顶上 1×1 。这个金字塔有 10 层，我们称这类金字塔为“高金字塔”。

如果你认为这样的金字塔太陡了，那么我们有办法让他看上去坡度平缓一些。比如，在 10×10 的矩形上，我们铺一个 8×8 的矩形，然后是 6×6 的……这样的金字塔只有 5 层了，大约为底座边长的一半。我们称之为“矮金字塔”。

很久以前，一位法老从父亲那儿继承了一大堆用于搭建金字塔的石块。他决定用这些石块搭建一座金字塔——每个石块都必须用上。建筑师告诉他，这样的要求不一定能实现。例如，如果你有 10 块石头，那么可以搭一个底座为 3 的矮金字塔；如果有 5 块石头，那么就搭一个底座为 2 的高金字塔。如果你有 7 块石头呢？不幸的是，确实找不出一一种搭金字塔的方案了。

思考再三后，法老决定放低要求——搭不止一座金字塔。但是仍然要满足如下几个条件：

1. 所有石块都必须用上；
2. 金字塔数要尽可能少；
3. 所有金字塔两两不同；
4. 金字塔至少包含两层，即底座为 1 的金字塔和底座为 2 的矮金字塔是不允许的；
5. 满足以上 4 点的基础上，最大的金字塔要尽可能大（大定义为用的石块数多）；
6. 满足以上 5 点的基础上，次大的金字塔要尽可能大；
7. 以此类推。

你能求出最好的搭金字塔方案么？或者告诉法老这是做不到的。

你拥有的石块数量 $\leq 10^6$

【题目大意】

有若干个金字塔，每个有一个特定的大小。你需要从中选出若干个，使得它们大小之和为 N ($\leq 10^6$)。每个金字塔有一个被选择的优先级，如果有多种可能的方案，你需要尽可能选的金字塔少，然后在此基础上你需要尽可能让优先级大的金字塔被选择。给出这个方案。

【算法分析】

首先我们需要知道，根据题目描述，可以搭建出多少不同的金字塔呢？显然，这些金字塔大小应该 $\leq 10^6$ 。

写一个代码可以很容易的实现这个问题。通过枚举我们知道，只有 320 个左右不同的金字塔可以待选择！因此，设 K 为物品数、 N 为大小之和，那么一个 $O(NK)$ 的 01 背包就可以解决第一问：如何让物品数尽可能少。

这个 01 背包是十分基础的问题，大概代码如下：

```
For (int i=1;i<=K;i++)  
    For (int j=N;j>=size[i];j--)  
        If (f[j-size[i]]+1<f[j]) f[j]=f[j-size[i]]+1;
```

接下来要处理如何给出方案。我们知道，如果要给出方案，则可能需要 $O(NK)$ 的空间，无法接受。不过，如果我们观察第一问，我们将发现一个有用的性质：对于所有 N （暴力枚举 $1 \sim 10^6$ ），答案都不超过 6！

因此考虑设计一个空间和答案有关的算法。我们这样表示状态： $f[i][j]$ 表示用 i 个物品拼

出 j 是否可能。这样，转移仍然很简单：

```
for (int i=1;i<=N;i++)
    for (int k=6;k>=1;k--)
        for (int j=1000000;j>=a[i];j--)
            f[k][j]=f[k-1][j-a[i]];
```

而最后构造方案的时候，只要尽可能先试大的能不能放，通过 $f[][]$ 可以很容易的判断如果放了一个金字塔后剩下的情况是否可行。从大到小枚举输出就行了。

整个算法复杂度是 $O(N*K*Ans)$ ，空间是 $O(N*Ans)$ 。时间上比较紧。其实由于 $f[][]$ 是布尔数组，而整个 dp 只有 or 操作，所以可以压位，这样就很快了。不过鉴于原题时间给的比较松，这里不需要压位也能过了。