联通？联通！ 解题报告

安徽师范大学附属中学 吴作凡

1 试题来源

51nod算法马拉松10的E题，链接：https://www.51nod.com/onlineJudge/questionCode.html#!problemId=1620

2 试题大意

有n个点在x轴上，坐标为$(i, 0)(1 \le i \le n)$。x轴上方有$n1$个点，x轴下方有$n2$个点。其中x轴和x轴上方这$n + n1$个点形成了树,下方也同样形成了树。x轴上的点之间互相没有边，x轴上方的点和x轴下方的点之间也没有边。

现在随机从$n1$个点和$n2$个点中各选择1个点记为(Pa, Pb)，删掉纵坐标$\ge Y_{Pa}$的所有点和$\le Y_{Pb}$的所有点，求剩下的图联通的概率。

保证图是平面图。

数据范围：$n, n1, n2 \le 10^5$。

3 算法介绍

3.1 算法一

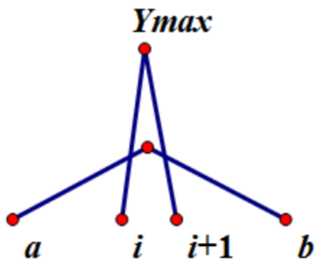
我们把在x轴上方的点称为A部分，下方称为B部分，x轴称为C部分，那么图中的边只有$AC/BC/AA/BB$四种，图联通的充要条件就是

- 只保留AA/AC部分的边后，每个A中的点都和C中的至少一个点联通。
- 只保留BB/BC部分的边后，每个B中的点都和C中的至少一个点联通。
- C中的点$(i, 0)$和$(i + 1, 0)$联通。

判定第一个条件非常容易，不需要考虑B中的点，按照纵坐标从小向大扫描，用并查集维护图联通性，只要记录每个联通块是否存在C中的点就好了。于是我们可以预处理哪些Pa点是合法的。第二个条件同理，可以预处理哪些Pb点是合法的。

考虑如何维护第三个条件，如果我们枚举Pa，那么一定存在一个$MaxPb$使得纵坐标小于等于它的点都合法，其余都不合法。如果我们能求出这个$MaxPb$，我们就可以用前缀和查询有多少满足第二个条件的Pb，计算有多少组合法的(Pa, Pb)，然后计算概率。

我们考虑C中两个点仅靠A部分而联通的时候纵坐标至少是多少（也就是这两个点的路径中纵坐标的最大值），假设$(i, 0)$和$(i+1, 0)$的路径中纵坐标最大是$Ymax$，那么对于任意的$a \le i, i+1 \le b$，$(a, 0)$到$(b, 0)$的最大值都不会小于$Ymax$，否则如下图路径将会相交而不满足平面图和树的性质：



于是我们考虑$(i, 0)$和$(i+1, 0)$时不需要管C中的其他点，可以预处理在A部分需要的纵坐标和B中的纵坐标（可以用树上倍增求Lca来完成），然后按纵坐标从大向小枚举Pa，每次都会断开一些$(i, 0)$和$(i+1, 0)$，它们需要在B部分中联通，那么我们更新当前的$MaxPb$就好了。

时间复杂度$O(n \log n)$，如果用tarjan求Lca可以将复杂度降为$O(n\alpha(n))$。

3.2 算法二

在上一个问题中，我们利用了树和平面图的性质，那么如果现在不保证是树和平面图，仅仅告诉你图中的边只有$AC/BC/AA/BB$四种（当然边数m不会很多，比如$m \le 3 \times 10^5$），该如何处理呢？

还是分三个条件考虑，前两个条件做法并没有用到树和平面图的性质，依然可以那样处理，于是只需要考虑第三个条件怎么做。

我们按纵坐标从大向小枚举Pa，显然$MaxPb$的纵坐标是递减的，也就是说A部分中的边会不断减少而B部分边将会增加，这是一个经典的动态图联通性问题！

一般的动态图问题我们都可以用LCT维护一棵最小生成树来解决。对于这道题，一条边的权值就是连接的两个点的纵坐标的较大值，我们加边的时候用LCT维护最小生成树，如果删边的时候这条边还在最小生成树上，就多了一个联通块，需要从B中加边来使其联通（当然如果一个联通块不存在C中的点我们就不需要管它了），于是用一个指针扫描$MaxPb$ 就好了。

时间复杂度$O(m \log n)$，参考程序`connect.cpp`就是该算法。