胡策的数列 解题报告

杭州第二中学 陈思禹

1 试题来源

2015年集训队互测

2 试题大意

胡策正在研究一个远古传下来的数列：$a_0 = ..., a_1 = ...$，对$i > 1$，有$25a_i + 20a_{i-1} = 12a_{i-2}$。因为流传的时间太过久远，$a_0$和$a_1$的值都已经看不清了。但是在最后还记载着，这个数列有一个特别的性质：对于任意的$i \geq 0$，都有$a_i \geq 0$。这样，对于任意一个正数a_0，这个数列都是唯一的。

胡大爷打算以此来考考你。他会给你一个长度为n（$n \leq 10^9$）的表格，一开始每个格子都写着0。有时他会让你将$a_0 = t$时数列从a_p开始的一段写入表格中第l到第r格（覆盖原有的值），有时他会询问表格中某一段连续的格子中的数的和，答案对$10^9 + 9$取模。保证总操作数$m \leq 10^5$。

当然，作为胡大爷的弟子，你必须在胡大爷提出一个询问的时候马上作出回应，即强制在线。因为这是一个远古的问题，胡大爷只给了你一台远古的计算机，它只有$64MB$的内存，但问题的时限却有$2s$。

3 分析

根据特征根方程解得：$a_n = A(\frac{2}{5})^n + B(-\frac{6}{5})^n$。为使$a_n$为正项数列，令$B = 0$，$A = a_0 = t$即可，即$a_n$为等比数列。

这样我们就有一个较为暴力的做法，即用线段树维护区间赋值等差数列、区间求和。但区间赋值等差数列时涉及到求$(\frac{2}{5})^n$ 以及$\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{2}{5})^i$，需要用到快速幂，因此复杂度为$O(mlog^2n)$，空间复杂度为$O(mlogn)$，只能通过50%的数据。

首先时间方面的问题出在线段树同一层中节点的区间长度不统一。因此我们可以将n变成一个2的幂次，这样区间长度也会统一为2的幂次，预处理$\frac{2}{5}$的幂及幂的前缀和即可。时间复杂度降为$O(mlogn)$。

最后就是空间的问题。其实线段树的空间可以卡过。但是另一种做法就是换用平衡树来维护区间，新插入的区间至多增加两个端点，这样空间是$O(m)$的。具体如何维护不是很复杂，就不详述了。每次修改的区间数是$O(1)$的，时间复杂度依旧为$O(mlogn)$。