WINDOW 解题报告

绍兴一中 张恒捷

1 试题来源

codechef WINDOW

2 试题大意

二维平面上有一个三角形，三个点分别为 $(0,0),(N,0),(N,N*A/B)$ ，现在你现在可以选择 $L+1$ 个整数 $0 \le x[0] < x[1] < \cdots < x[L] \le N$ 与 $K+1$ 个整数 $0 \le y[0] < y[1] < \cdots < y[K] \le N*A/B$ 。使得所有 $(x[i], y[j])$ 都在三角形中。

求有多少选法，答案模900000011输出。

数据范围：

数据组数 ≤ 50

$N, A, B \le 10^{18}$

$K, L \le 10$

3 算法介绍

枚举 $x[0]$，方案可以马上算出。

$$ans = \sum_{i=0}^{N} \binom{N-i}{L} \times \binom{\lfloor \frac{iA}{B} \rfloor + 1}{K+1}$$

把组合数看成多项式，不妨设：

$$\binom{N-i}{L} = \sum_{j=0}^{L} a_j \cdot i^j$$

$$\binom{\lfloor \frac{iA}{B} \rfloor + 1}{K+1} = \sum_{j=0}^{K+1} b_j \cdot \left\lfloor \frac{iA}{B} \right\rfloor^j$$

可得：

$$ans = \sum_{j=0}^{L} a_j \sum_{k=0}^{K+1} b_k \cdot \sum_{x=0}^{N} x^j \cdot \left\lfloor \frac{xA}{B} \right\rfloor^k$$

不妨设

$$f(N, A, B, C, j, k) = \sum_{x=0}^{N} x^j \cdot \left\lfloor \frac{xA+C}{B} \right\rfloor^k$$

接下来介绍怎么求 f

我们尝试不停迭代缩小问题规模。

当 $A \geq B$ 或 $C \geq B$ 时，有：

$$\begin{aligned}
& f(N, A, B, C, j, k) \\
= & \sum_{x=0}^{N} x^j \left(\left\lfloor \frac{x \cdot (A \bmod B) + (C \bmod B)}{B} \right\rfloor + x \left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{B} \right\rfloor \right)^k \\
= & \sum_{p1+p2 \leq k} x^{p1} \left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor^{p1} \left\lfloor \frac{C}{B} \right\rfloor^{p2} \binom{k}{p1} \binom{k-p1}{p2} \sum_{x=0}^{N} x^j \left\lfloor \frac{x \cdot (A \bmod B) + (C \bmod B)}{B} \right\rfloor^{k-p1-p2} \\
= & \sum_{p1 \leq k} \left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor^{p1} \binom{k}{p1} \sum_{p2 \leq k-p1} \left\lfloor \frac{C}{B} \right\rfloor^{p2} \binom{k-p1}{p2} \cdot f(N, A \bmod B, B, C \bmod B, j+p1, k-p1-p2)
\end{aligned}$$

这里只需要将 $k - p1$ 看成一个整体将后者预处理就可以做到 $O(k)$。

当 $A = 0$ 时，用伯努利数或者预处理多项式的系数就可以算了。

当 $A < B$ 时：

另 $M = \left\lfloor \frac{NA+C}{B} \right\rfloor$

$[x]$ 的意思是 x 为真值为1，否则为0。

$$
\begin{aligned}
f(N,A,B,C,j,k) &= \sum_{x=0}^{N} x^j \cdot \left\lfloor \frac{xA+C}{B} \right\rfloor^k && (1)\\
&= \sum_{x=0}^{N} x^j \cdot \sum_{y=0}^{M-1} \left((y+1)^k - y^k\right) \cdot \left[y+1 \le \left\lfloor \frac{xA+C}{B} \right\rfloor\right] && (2)\\
&= \sum_{y=0}^{M-1} \left((y+1)^k - y^k\right) \cdot \sum_{x=0}^{N} x^j \left[x \ge \left\lfloor \frac{By+B+A-C-1}{A} \right\rfloor\right] && (3)
\end{aligned}
$$

在 (1) 到 (2) 的推导中，只有 $k > 0$ 时成立，故若 $k = 0$ 则单独计算。

后者 $\sum_{x=0}^{N} x^j \cdot [x \ge t]$ 在 N, j 已知的情况下是一个关于 y 的 $j+1$ 次多项式，假设第 i 次的系数为 $S(N, j)_i$。那么原式

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y=0}^{M-1} \left((y+1)^k - y^k\right) \cdot \sum_{i=0}^{j+1} S(N,j)_i \left\lfloor \frac{By+B+A-C-1}{A} \right\rfloor^i\\
&= \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{u=0}^{k-1} \binom{k}{u} \cdot y^u \sum_{i=0}^{j+1} S(N,j)_i \left\lfloor \frac{By+B+A-C-1}{A} \right\rfloor^i\\
&= \sum_{u=0}^{k-1} \binom{k}{u} \sum_{i=0}^{j+1} S(N,j)_i \sum_{y=0}^{M-1} y^u \left\lfloor \frac{By+B+A-C-1}{A} \right\rfloor^i\\
&= \sum_{u=0}^{k-1} \binom{k}{u} \sum_{i=0}^{j+1} S(N,j)_i \cdot f(M-1, B, A, B+A-C-1, u, i)
\end{aligned}
$$

递归求出 f 即可。如果预处理后者可以做到 $O(k)$。

由于每迭代两次，(A, B) 就会变成 $(B, A \bmod B)$，复杂度与求 gcd 相同。

故总复杂度为：

$$O((k+l)^3 log\ n)$$