

多变的多边形

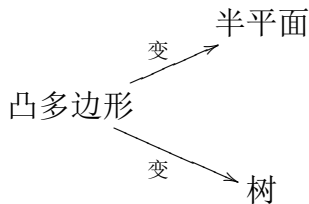
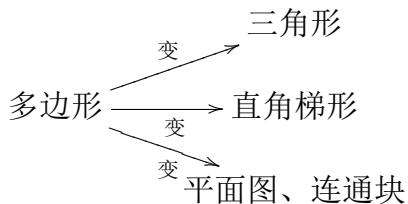
董宏华

绍兴市第一中学

2014 年 4 月 29 日

引言

近年来，多边形在各省省选及各类 OI 竞赛，以及 ACM World Finals 等比赛中频繁出现，而且出现形式复杂，变化多样。



我总结了多边形的常用变法，为解决与多边形有关的题目提供了思路，并结合其中一种变法深入研究了多边形内部点信息统计问题，得到了一个较优秀的算法。

定义

多边形

由三条及以上的线段首尾顺次连接所组成的平面封闭图形。

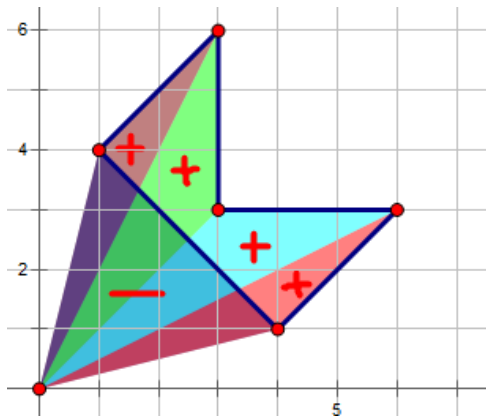
简单多边形

不相邻的边不相交。

凸多边形

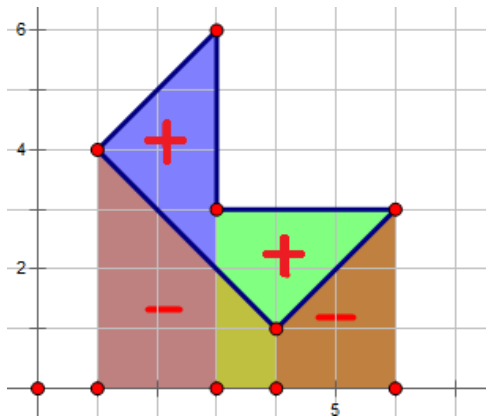
所有内角均不超过 180° 的简单多边形。

结合原点



三角形!

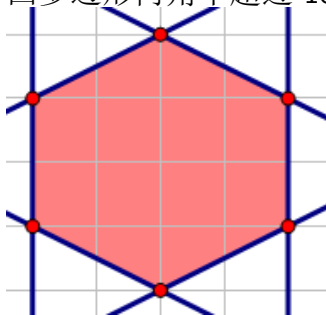
结合坐标轴



直角梯形!

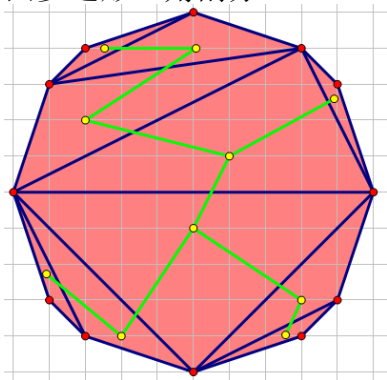
半平面

凸多边形内角不超过 180° ? 半平面!



树?

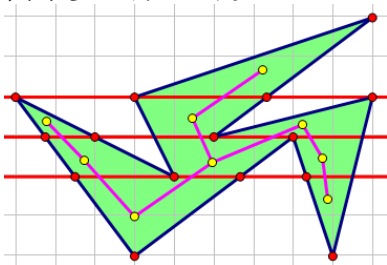
凸多边形三角剖分!



三角形 组成 树。

树?

简单多边形也可以!



梯形 组成 树。

GIS 中的应用

在 GIS（地理信息系统）中，常常需要统计在某片区域内的特征值。

往往可以用多边形来表示区域，那么这些问题就是多边形内部点信息统计问题了。

在大多数 GIS 中，使用的是射线法来依次判断点是否在多边形内部，但该算法效率较低，且没有很好地利用地图的性质。

内部点权和

- 给出初始平面上 n 个点的点权，多次询问一个简单多边形内的点权和。

内部点权和

- 给出初始平面上 n 个点的点权，多次询问一个简单多边形内的点权和。
- 使用沿坐标轴拆分，则需要统计一个梯形内部的点权和。

内部点权和

- 给出初始平面上 n 个点的点权，多次询问一个简单多边形内的点权和。
- 使用沿坐标轴拆分，则需要统计一个梯形内部的点权和。
- 用点对梯形产生贡献，即把一个点的点权加给在其上方的每条边，在多边形询问时根据边的方向求和。

内部点权和

- 给出初始平面上 n 个点的点权，多次询问一个简单多边形内的点权和。
- 使用沿坐标轴拆分，则需要统计一个梯形内部的点权和。
- 用点对梯形产生贡献，即把一个点的点权加给在其上方的每条边，在多边形询问时根据边的方向求和。
- 该算法可用扫描线优化，用平衡树维护还与扫描线有交的线段（同时要求所有交点，使扫描线上的线段有序），遇到候选点时给在其上方的线段都加上一个值。

内部点权和

- 给出初始平面上 n 个点的点权，多次询问一个简单多边形内的点权和。
- 使用沿坐标轴拆分，则需要统计一个梯形内部的点权和。
- 用点对梯形产生贡献，即把一个点的点权加给在其上方的每条边，在多边形询问时根据边的方向求和。
- 该算法可用扫描线优化，用平衡树维护还与扫描线有交的线段（同时需要求所有交点，使扫描线上的线段有序），遇到候选点时给在其上方的线段都加上一个值。
- 有修改点权时，由于点权对询问的贡献独立，可套用按时间分治，去除动态修改的影响。

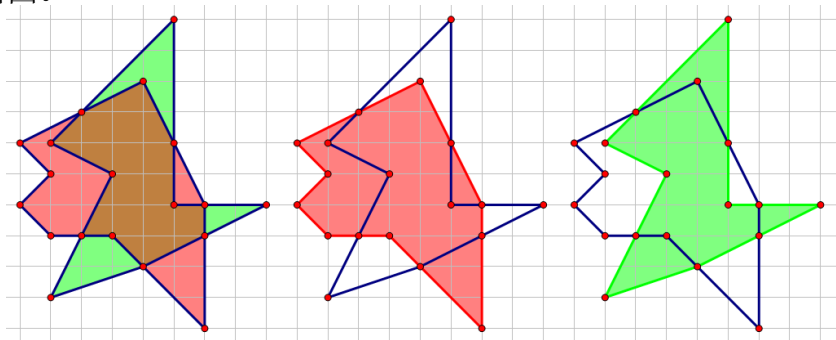
内部最大点权

在求点权和的基础上，同时要求最大点权。

由于最大值不满足加减，所以之前使用的算法不可行，需要另辟蹊径，找一种没有减法的拆分。

问题转化

由于实际中大多数询问都是在地图上，而地图一般是（连通）平面图。



尝试将所有询问多边形画在一起，它们就组成了一个平面图。

问题转化

- 假设我们已经得到了询问构成的连通平面图。

问题转化

- 假设我们已经得到了询问构成的连通平面图。
- 每个询问多边形都围出了一个连通块，而其在对偶图中也是连通块。

问题转化

- 假设我们已经得到了询问构成的连通平面图。
- 每个询问多边形都围出了一个连通块，而其在对偶图中也是连通块。
- 此外多边形的每条边就是对偶图中的边，删去这些边后多边形内部和外部就会分开。

问题转化

- 假设我们已经得到了询问构成的连通平面图。
- 每个询问多边形都围出了一个连通块，而其在对偶图中也是连通块。
- 此外多边形的每条边就是对偶图中的边，删去这些边后多边形内部和外部就会分开。
- 也就是说，问题转化为了删去一些边，询问某个连通块内的信息。

问题转化

- 假设我们已经得到了询问构成的连通平面图。
- 每个询问多边形都围出了一个连通块，而其在对偶图中也是连通块。
- 此外多边形的每条边就是对偶图中的边，删去这些边后多边形内部和外部就会分开。
- 也就是说，问题转化为了删去一些边，询问某个连通块内的信息。
- 这是经典的动态图问题，可以使用按时间分治解决。

信息对应

- 需要把平面图中点的信息对应到对偶图中的点上，即平面图中的域。

信息对应

- 需要把平面图中点的信息对应到对偶图中的点上，即平面图中的域。
- 继续分析，可以发现所有在内部的点的邻域也都在对偶图的连通块内，所以对于内部的点，直接随便选一个域作为对应即可。

信息对应

- 需要把平面图中点的信息对应到对偶图中的点上，即平面图中的域。
- 继续分析，可以发现所有在内部的点的邻域也都在对偶图的连通块内，所以对于内部的点，直接随便选一个域作为对应即可。
- 虽然边界上的点不满足，但这些点可以直接通过询问的信息得出。

信息对应

- 需要把平面图中点的信息对应到对偶图中的点上，即平面图中的域。
- 继续分析，可以发现所有在内部的点的邻域也都在对偶图的连通块内，所以对于内部的点，直接随便选一个域作为对应即可。
- 虽然边界上的点不满足，但这些点可以直接通过询问的信息得出。
- 询问时不加入边界上的点，相当于先修改点权，同样可以在动态图问题中处理。

构造平面图

- 现在还剩下构造连通平面图的问题。

构造平面图

- 现在还剩下构造连通平面图的问题。
- 用扫描线法可以求出所有多边形的边的交点，这些交点和多边形的边就构成了平面图。

构造平面图

- 现在还剩下构造连通平面图的问题。
- 用扫描线法可以求出所有多边形的边的交点，这些交点和多边形的边就构成了平面图。
- 设询问多边形边数之和为 S ，则这一步的复杂度为 $O(\text{交点个数} \times \log S)$ 。

不连通

- 注意到这样求出的平面图不一定连通。

不连通

- 注意到这样求出的平面图不一定连通。
- 所以就要使其连通，套用我在 WC2014 营员交流中的方法，可以转化为连通平面图。

优化

- 复杂度中的瓶颈为求所有交点这一步，即 $O(\text{交点个数} \log S)$ ，但把所有交点求出来显得不太科学，而且太浪费了。

优化

- 复杂度中的瓶颈为求所有交点这一步，即 $O(\text{交点个数} \log S)$ ，但把所有交点求出来显得不太科学，而且太浪费了。
- 考虑分块，每 T 个询问分成一块，这一块中需要建出平面图，而其余的点利用扫描线点定位可以放入一个域中。

优化

- 复杂度中的瓶颈为求所有交点这一步，即 $O(\text{交点个数} \log S)$ ，但把所有交点求出来显得不太科学，而且太浪费了。
- 考虑分块，每 T 个询问分成一块，这一块中需要建出平面图，而其余的点利用扫描线点定位可以放入一个域中。
- 这样建平面图复杂度为 $O(\frac{S}{T} \times T^2 \log S)$ ，其余点进行点定位复杂度 $O(\frac{S}{T} \times S \log S)$ ，对 T 个询问求解的复杂度为 $O(\frac{S}{T} \times T \log^2 T)$ 。

优化

- 复杂度中的瓶颈为求所有交点这一步，即 $O(\text{交点个数} \log S)$ ，但把所有交点求出来显得不太科学，而且太浪费了。
- 考虑分块，每 T 个询问分成一块，这一块中需要建出平面图，而其余的点利用扫描线点定位可以放入一个域中。
- 这样建平面图复杂度为 $O(\frac{S}{T} \times T^2 \log S)$ ，其余点进行点定位复杂度 $O(\frac{S}{T} \times S \log S)$ ，对 T 个询问求解的复杂度为 $O(\frac{S}{T} \times T \log^2 T)$ 。
- 综合发现 T 取 \sqrt{S} 时最优，最终复杂度为 $O(S^{1.5} \log S)$ 。

优化

- 但这样还有一个问题，如果询问多边形边数太多，使得序列无法按 \sqrt{S} 分割怎么办？

优化

- 但这样还有一个问题，如果询问多边形边数太多，使得序列无法按 \sqrt{S} 分割怎么办？
- 注意到这样的多边形数量不会太多，而且内部只有一个域，可以直接使用点定位来判断，总复杂度 $O((nQ + S) \log S)$ 。

优化

- 但这样还有一个问题，如果询问多边形边数太多，使得序列无法按 \sqrt{S} 分割怎么办？
- 注意到这样的多边形数量不会太多，而且内部只有一个域，可以直接使用点定位来判断，总复杂度 $O((nQ + S) \log S)$ 。
- 将所有边数 $> \sqrt{S}$ 的询问（不会超过 \sqrt{S} 个）提出，每个单独求解，这样就可以保证复杂度为 $O(S^{1.5} \log S)$ 。

总结

虽然多边形的边数不定，且形状复杂，给解决题目造成了很多困难。

但通过巧妙的拆分，多边形便能变为若干部分，为逐个击破提供了可能。

而在分析题目中多边形的特点后，套用常用拆分方法，往往能收到不错的效果。

感谢

感谢计算机协会提供这个学习与交流的平台。

感谢绍兴一中的陈合力老师、邵红祥老师、游光辉老师、董烨华老师多年来给予的关心和指导。

感谢国家集训队教练胡伟栋和余林韵的指导。

感谢绍兴一中的何奇正、俞鼎力、张恒捷等同学对我的帮助和启发。

感谢其他对我有过帮助和启发的老师和同学。

感谢

Thanks for listening!
Questions are welcome!

参考文献

- [1] 顾昱洲,《浅谈一类分治算法》, WC2013 授课。
- [2] 许昊然,《浅谈数据结构题的几个非经典解法》, 国家集训队 2013 论文。
- [3] 董宏华,《扫描线在计算几何中的应用》, WC2014 营员交流。
- [4] 董宏华,《Architext 命题报告》, 国家集训队 2014 作业。

按时间分治

对于当前序列，选定序列中点，计算左侧修改对右侧询问的影响，这部分问题变为先修改再询问。

然后左侧右侧分别递归处理。

动态图问题

- 问题简述：多次询问删去一些边后某个连通块内的信息。

动态图问题

- 问题简述：多次询问删去一些边后某个连通块内的信息。
- 这里只简单介绍离线算法。

动态图问题

- 问题简述：多次询问删去一些边后某个连通块内的信息。
- 这里只简单介绍离线算法。
- 使用按时间分治，任何时刻保证当前区间内所有询问中没有涉及到的边都已合并。并记录每条边在区间内所有询问中出现的次数。

动态图问题

- 问题简述：多次询问删去一些边后某个连通块内的信息。
- 这里只简单介绍离线算法。
- 使用按时间分治，任何时刻保证当前区间内所有询问中没有涉及到的边都已合并。并记录每条边在区间内所有询问中出现的次数。
- 递归左侧时，将右侧询问中出现，而左侧询问中未出现的边加入图中，用并查集维护连通块内信息。

动态图问题

- 问题简述：多次询问删去一些边后某个连通块内的信息。
- 这里只简单介绍离线算法。
- 使用按时间分治，任何时刻保证当前区间内所有询问中没有涉及到的边都已合并。并记录每条边在区间内所有询问中出现的次数。
- 递归左侧时，将右侧询问中出现，而左侧询问中未出现的边加入图中，用并查集维护连通块内信息。
- 在递归回来后，需要把并查集恢复到递归前的状态，也就是把左侧中添进去边删掉。

动态图问题

- 由于删的是一些最后添进去的一些边，只需对添边的栈进行退栈操作，即撤销并查集内指定父亲的操作，还原维护的信息。

动态图问题

- 由于删的是一些最后添进去的一些边，只需对添边的栈进行退栈操作，即撤销并查集内指定父亲的操作，还原维护的信息。
- 递归右侧时也一样，退回来时也要恢复。

动态图问题

- 由于删的是一些最后添进去的一些边，只需对添边的栈进行退栈操作，即撤销并查集内指定父亲的操作，还原维护的信息。
- 递归右侧时也一样，退回来时也要恢复。
- 当区间内只有一个询问时，直接得到所在连通块内的信息。

多边形退化？

多边形退化为线段后内部没有任何域？

是的，但同时它内部也没有其他点了，直接统计线段上的点就可以了。

多边形存在洞？

默认多边形内部不存在洞，若存在洞可以通过添边将其连接成不存在洞的多边形。