

IOI2014 国家集训队作业

第二部分泛做报告

(详细解题报告在表格后)

刘家昌

泉州第一中学 2014届

i@dotkrnl.com

版权所有 © 2013-2014, 刘家昌。你有权在自由软件基金会发布的 GNU 自由文档许可证 1.3 版本, 或任一后续许可证的范围内, 复制、分发或修改此文档。本文档不包括许可证定义的不变章节, 封面文字。在附录 A 中, 包括了此许可证的一个副本。

Copyright © 2013-2014 Jason Lau. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

试题名称	试题编号	试题类型	时/空复杂度
Low Power	2013 F	二分搜索	$O(n \cdot (\lg d + \lg n)) / O(n)$
Self-Assembly	2013 A	图论判环	$O(n) / O(1)$
Matryoshka	2013 H	动态规划	$O(n^3) / O(n^2)$
Hey, Better Bettor	2013 B	概率三分	$O(1) / O(1)$
Network	2007 G	搜索模拟	$O(n! \cdot \Sigma l) / O(n + m)$
Stacking Plates	2012 K	动态规划	$O(s^2 \cdot \Sigma h) / O(n \cdot \Sigma h)$
Bus Tour	2012 C	状态压缩	$O(n^2 \cdot 2^n) / O(n \cdot 2^n)$
Infiltration	2012 E	搜索剪枝	$O(\sum_{i=1}^5 \binom{n}{i} + n^2) / O(n^2)$
Factors	2013 D	数论搜索	$O(q) / O(1)$
Curvy Little Bottles	2012 B	积分二分	$O(n \cdot (\lg d + \lg n)) / O(n)$
Fibonacci Words	2012 D	建模深搜	$O(2^{\text{end1}}) / O(n \cdot \text{len}(p))$
Ancient Messages	2011 C	建模广搜	$O(H \cdot W) / O(H \cdot W)$
Trash Removal	2011 K	计算几何	$O(n \lg n) / O(n)$
Coffee Central	2011 E	坐标转换	$O(q \cdot d^2) / O(d^2)$
Takeover Wars	2012 L	博弈模拟	$O(n + m) / O(n + m)$
Minimum Cost Flow	2012 G	图论建模	$O(n^3) / O(n^2)$
Affine Mess	2011 B	变换等效	$O(1) / O(s)$
Mining Your Own Business	2011 H	双联通性	$O(n + m) / O(n + m)$

试题名称	试题编号	试题类型	时/空复杂度
Pyramids	2011 J	性质搜索	$O(1) / O(1)$
Barcodes	2010 B	编码模拟	$O(n) / O(n)$
Tracking Bio-bots	2010 C	离散递推	$O(w^2) / O(w^2)$
Castles	2010 D	树上贪心	$O(n^2 \lg n) / O(n)$
Robots on Ice	2010 I	搜索剪枝	$O(mn) / O(mn)$
Sharing Chocolate	2010 J	动态规划	$O(x2^nk) / O(x2^n + xy)$
The Islands	2010 G	动态规划	$O(n^2) / O(n^2)$
Fare and Balanced	2009 E	图论构造	$O(n) / O(n)$
A Careful Approach	2009 A	二分贪心	$O(n! \lg p) / O(n)$
Glenbow Museum	2008 F	组合数学	$O(1) / O(1)$
Pirate Chest	2013 I	堆栈优化	$O(n^3) / O(n^2)$
Pollution Solution	2013 J	计算几何	$O(n^2) / O(n)$
Struts and Springs	2009 I	繁琐模拟	$O(n^2) / O(n)$
Conduit Packing	2009 D	二分几何	$O(n! \cdot n \lg q) / O(n)$
Subway Timing	2009 J	二分动规	$O(n^3 \lg n) / O(n^2)$
Deer-Proof Fence	2009 F	几何动规	$O(3^n + n \cdot 2^n) / O(2^n)$
The Ministers' Major Mess	2009 H	二元满足	$O(n \cdot (n + m)) / O(n)$
Suffix-Replacement Grammars	2009 K	图论建模	$O(l * n^3) / O(n^2)$
Air Conditioning Machinery	2008 A	朴素搜索	$O(8^c) / O(n^3)$

试题名称	试题编号	试题类型	时/空复杂度
Always an Integer	2008 B	数学证明	$O(p^2) / O(p)$
Huffman Codes	2008 E	方案记录	$O(n^2 \cdot k) / O(n \cdot k)$
Net Loss	2008 G	数学方法	$O(nt) / O(n)$
The Sky is the Limit	2008 J	计算几何	$O(n^3) / O(n^2)$
The Hare and the Hounds	2008 D	繁琐模拟	$O(nm) / O(n^2)$
APL Lives!	2010 A	繁琐模拟	N/A ¹ / N/A
Bipartite Numbers	2006 D	优化枚举	N/A / N/A
Consanguine Calculations	2007 A	枚举模拟	$O(1) / O(1)$
Water Tanks	2007 I	物理数学	$O(n) / O(n)$
Tunnels	2007 J	流最小割	$O(n^4) / O(n^2)$
Grand Prix	2007 C	计算几何	$O(n \lg n) / O(n)$
Low Cost Air Travel	2006 A	动态规划	$O(ikt^2l^3) / O(t^2l)$
Bit Compressor	2006 E	搜索剪枝	N/A / N/A
Pilgrimage	2006 G	阅读理解	$O(nst) / O(n + s)$
Degrees of Separation	2006 I	最短路径	$O(n^3) / O(n^2)$
Simplified GSM Network	2005 B	图论几何	$O(n^3 + kbr) / O(n^2)$
The Traveling Judges Problem	2005 C	枚举图论	$O(2^n n^2) / O(n^2)$

¹N/A 即英文 not applicable 之缩写，对于复杂度极难分析的题目，或是与输入的全部内容而非个别量相关时，将采用此符号标记。

试题名称	试题编号	试题类型	时/空复杂度
Lots of Sunlight	2005 E	几何数学	$O(nQ) / O(n)$
Crossing Streets	2005 F	离散广搜	$O(n^2) / O(n^2)$
Tiling the Plane	2005 G	枚举剪枝	$O(n^3) / O(n)$
Zones	2005 J	枚举判断	$O(\binom{n}{r}(n+m)) / O(n+m)$
Workshops	2005 I	排序贪心	$O(wr) / O(w+r)$
Suspense!	2004 I	积分几何	$O(\max(n, m)T) / O(n+m)$
Navigation	2004 G	计算几何	$O(nT) / O(n)$
Intersecting Dates	2004 E	日期处理	$O((x+r)T) / O(x+r)$
Tree-Lined Streets	2004 H	计算几何	$O(n^2) / O(n)$
A Spy in the Metro	2003 H	动态规划	$O(nt) / O(nt)$
Toll	2003 J	最短路径	$O(kp^2) / O(p^2)$
The Solar System	2003 I	二分几何	$O(pT) / O(1)$
Combining Images	2003 F	编码递归	$O(l) / O(l)$
Light Bulbs	2003 B	编码枚举	$O(n) / O(n)$
Silly Sort	2002 H	枚举贪心	$O(n \lg n) / O(n)$
Balloons in a Box	2002 A	搜索几何	$O(n! \cdot n^2) / O(n)$
Island Hopping	2002 E	几何图论	$O(n^2) / O(n)$
Crossing the Desert	2002 C	动态规划	$O(n^2) / O(n)$
Airport Configuration	2001 A	朴素计算	$O(n \lg n) / O(n)$

试题名称	试题编号	试题类型	时/空复杂度
Say Cheese	2001 B	几何图论	$O(n^3) / O(n^2)$
A Major Problem	2001 F	朴素模拟	$O(n) / O(1)$
Professor Monotonic's Network	2001 H	递推搜索	$O(2^nk + k^2) / O(k^2)$
Bee Breeding	1999 A	模拟计算	$O(\max(a, b)) / O(\max(a, b))$
Lead or Gold	1998 C	线性规划	N/A / $O(n)$
Internet Bandwidth	2000 E	裸网络流	$O(n^2m) / O(n + m)$
Page Hopping	2000 F	最短路径	$O(n^3) / O(n^2)$
Trade on Verwegistan	1999 E	朴素枚举	$O(wb) / O(wb)$
P.S. by Keyword Matching	1998 D	朴素模拟	$O(p^2nl \lg n) / O(pnl)$
Petri Net Simulation	1998 E	朴素模拟	$O(FTP) / O(T + P)$

以上共 83 项，满足《IOI2014 中国国家集训队第一次作业》试题泛做的作业要求²。

²每人从后面表格（略）中列出的试题中选择 80 道完成，并在清橙网络自动评测系统上提交通过，填写做题表格³，提交做题表格。

³即上表，题目大意、算法讨论部分在后文详细完成。

1 Low Power

1.1 试题大意

给定 $2nk$ 个数，将其分为 n 大组，再各分为 2 小组。设大组的 x 值为小组最小值之差，求使所有大组 x 值的最大值最小。

1.2 解题思路

对于一个最大值最小的问题，最直观的想法是二分方法。对于给定大组最大 x 值 X ，只需有一个算法判断是否存在可行解，便可以轻松地通过二分 X 来完成此题。

将输入数据排序得 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{2nk}$ ，可以发现最小的大组 x 值必须是相邻的两个数，而这两个数后必须有至少 $k-1$ 个不小于他们的、未被使用的数。

设第 i 大组的 x 值为 $p_{t_{i+1}} - p_{t_i} \leq X$ ，且 $t_i > t_{i+1} + 1$ ，可以由上面一段的陈述得到 $t_i \leq 2nk - 2ik + 1$ 的结论。通过贪心的方法，若能得到一组 t_i 的解，则可判定此 X 值有解，否则无解。

至此，此题完成，时间复杂度为 $O(n(\lg d + \lg n))$ ，空间复杂度为 $O(n)$ ，其中 d 为排序后相邻两数差值的最大值。

1.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2013, Problem F

2 Self-Assembly

2.1 试题大意

给定 n 种正方形，四条边分别标记 $A+$ 、 $A-$ 、 $B+$ 、 $B-$ 、...或者 00 ， $A+$ 能与 $A-$ 相连，依此类推， 00 为禁止连接。可旋转翻转，问是否可能产生无限结构。

2.2 解题思路

由于正方形可以旋转翻转，可以发现是否产生无限结构与标记顺序无关。因而可以得出可能产生无限结构，当且仅当存在一种方案 S_1, S_2, \dots, S_m ，其中 S_i 能与 S_{i+1} 相连，特殊地， S_m 能与 S_1 相连。

这是一个图论判环的问题，但完全不需要建立 $n \leq 40000$ 个点来完成，注意到标记除 00 外均为英文大写字母，最多只有 26 种。只需要建立一张 $2 \cdot 26$ 个点的图，便可完成此题。

至此，此题完成，时间复杂度为 $O(n)$ ，空间复杂度为 $O(1)$ 。

2.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2013, Problem A

3 Matryoshka

3.1 试题大意

给定 n 个单个数的集合，求方案将其合并为若干个 $[1, l_i]$ 的集合， l_i 未知。每次只能合并相邻两个集合，集合合并后不得拆开。合并代价为两者个数之和，减去两集合内小于两者分别最小值的较大值的数字个数。求最小的方案代价。

3.2 解题思路

首先定义三个需要的量，布尔量 $\text{mergeable}(i, j)$ 代表将区间 $[i, j]$ 合并为一个集合的可行性，布尔量 $\text{ok}(i, j)$ 代表将区间 $[i, j]$ 合并为一个集合的完整性，整数量 $\text{longest}(i, j)$ 代表区间 $[i, j]$ 合并为一个集合后，从 1 起始的最长连续序列长度（若不从 1 起始则为 0）。

定义 $\text{after}(i)$ 为 i 及之后的量均合并至满足题意时，最小的方案代价。则最终答案为 $\text{after}(1)$ （ $+\infty$ 代表无解）。定义 $\text{merged}(i, j)$ 为将区间 $[i, j]$ 合并的最小代价。则 $\text{after}(i)$ 可以通过下式计算：

$$\text{after}(i) = \min_{\substack{j \in [i, n] \\ \text{ok}(i, j)}} \text{merged}(i, j) + \text{after}(j + 1) \quad (1)$$

$\text{merged}(i, j)$ 可以通过下式计算：

$$\text{merged}(i, j) = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \text{merged}(i, k) + \text{merged}(k + 1, j) + \text{cost}(i, k, j) & \text{mergeable}(i, j) \\ +\infty & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\text{cost}(i, k, j) = (j - i + 1) - c$ ，其中 c 是 $[i, k]$ 与 $[k + 1, j]$ 中，小于两者内最小值较大值的数字个数。特别地，有 $\text{merged}(i, i) = 0$ ， $\text{after}(n + 1) = 0$ 。

由于最前面的三个量、 c 值都可以用前缀和等方法在 $O(n^3)$ 的时间内轻松预处理得到。且 $\text{ok}(i, j) := \text{longest}(i, j) == j - i + 1$ 可以省去一个量的计算。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

3.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2013, Problem H

4 Hey, Better Bettor

4.1 试题大意

定义赌局为 p 的概率获得 1 元，相反失去。结束后若失去钱，则返还 x 比例。求在最优策略下的期望收益。

4.2 解题思路

解决此题首先要注意到下一步决策只取决于此时输赢量，而与过去输赢的情况无关。亦即存在 $L \leq 0$ 与 $R \geq 0$ 决定继续博弈的范围 (L, R) 。以此，博弈最终的结果为获得 R 的金钱，或失去 $(x - 1)L$ 的金钱。

暂时不讨论 L 与 R 值的获得。设当拥有 M 元时最终达到 R 值的概率为 $P(M)$ ，可得 $P(M) = pP(M + 1) + (1 - p)P(M - 1)$ ，解得下式：

$$P(M) = n + m\left(\frac{1-p}{p}\right)^M \quad (3)$$

由 $P(L) = 0$ 与 $P(R) = 1$ 可解得：

$$n = -\frac{r^L}{r^R - r^L}; \quad m = \frac{1}{r^R - r^L} \quad (4)$$

$$r = \frac{1-p}{p} \quad (5)$$

则答案为 $RP(0) - L(1 - P(0))(x - 1)$ 。

现在关注 L 与 R 的取值。注意到解得的期望值关于 L 与 R 呈单峰（可以观察数据或者求导发现这一性质），因此只需要进行三分求峰，便可解决此题。三分的右边界与所需精度相关，可认为一个常数。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(1)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

4.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2013, Problem B

5 Network

5.1 试题大意

缓冲器接收到来自分组交换网络的 n 个信息，属于这 n 个信息的 m 个数据包，总长度为 Σl ，将一条信息的信息包按照顺序并连续地通过缓冲区，没有立即传输出去的数据需要缓存。求方案使得需要的缓冲区最小。

5.2 解题思路

由于此题 n 极小，可以直接搜索枚举信息的通过顺序。再模拟缓冲区的行为，求得最小缓冲区大小。但有几处细节需要注意：

一是题目中的“一条信息的信息包必须按照顺序并连续地通过缓冲区”，“连续”这二字在长句中容易被忽略，且样例数据没有体现出这一点。二是可能存在发送完一条数据后，需要直接发送缓冲区中其他数据（甚至可能是多条）的情况。

在明确细节后，简单的编程实践便可完成，我使用了最朴素的实现。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n! \cdot \Sigma l)$ ，空间复杂度 $O(n + m)$ 。

5.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2007, Problem G

6 Stacking Plates

6.1 试题大意

有 n 组有序的数，第 i 组 h_i 个数。每次可以将一组数拆为两组数，或将两组有序的数头尾相连合为一组。求合并为 1 组有序数的最小操作数。

6.2 解题思路

如果所有的数都是两两不同的，只需简单地将它们排序，然后根据排序后记录的原组序号的分割数 $split$ 来求得最小操作数 $split + n - 1$ 。

但是此题有相同数的情况，发现需要考虑的是相同数的原组序号排序方式。可以以进行离散化后的最前端数值、与最前端的原组序号为状态，从上一个最前端数值、枚举的上一个最前端原组序号状态，以枚举的当前最前端数值末尾原组序号为方案转移，进行动态规划。时间复杂度在数据规定可承受范围内。为分析复杂度，定义 s 为数的最大相同个数。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(s^2 \cdot \Sigma h)$ ，空间复杂度 $O(n \cdot \Sigma h)$ 。

6.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2012, Problem K

7 Bus Tour

7.1 试题大意

给定一张有 n 个节点的无向图，要求一个方案，从 0 节点到 $n - 1$ 节点，访问所有节点，并同样遍历返回。允许经过节点而不访问，要求除起终点，首次遍历的前 $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ 个节点属于末次遍历的前 $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ 个节点。求最小边权和。

7.2 解题思路

此题是一个变形的 TSP 问题，对于标准的 TSP 问题，可以用 $O(n^2 \cdot 2^n)$ 的时间求出单点起始，任意子集，任意终止点的最小遍历边权和。令 $\text{minCost}(S, s, d)$ 表示访问了子集 S 中节点， s 起始 d 终止的最小边权和。对于一个给定 s ，均可在上述时间完成所有 S 、 d 的计算。这是一个经典问题，在此不赘述。

关于如何解决问题给定的变形 TSP 问题。首先以 $\binom{n-2}{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$ 的时间枚举所有可能的前半段节点集合 F ，再在其中枚举 $\lfloor (n-2)/2 \rfloor^2$ 种情况——即所有可能的首次遍历的第 $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ 个节点 s_1 ，和末次遍历的第 $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ 个节点 s_2 （计数不包含起终点）。

根据上面枚举的信息，可以将整个遍历路径分为 4 段，即：

$$\text{minCost}(F + \{0\}, 0, s_1) \tag{6}$$

$$\text{minCost}(\bar{F} - \{0\} + \{s_1\}, s_1, n - 1) \tag{7}$$

$$\text{minCost}(\bar{F} - \{0\} + \{s_2\}, n - 1, s_2) \tag{8}$$

$$\text{minCost}(F + \{0\}, s_2, 0) \tag{9}$$

观察到无向图中 $\text{minCost}(S, s, d) = \text{minCost}(S, d, s)$ ，因此上述信息只需通过标准 TSP 问题的状态压缩动态规划方法预处理求得，分别为 $s = 0$ 与 $s = n - 1$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2 \cdot 2^n)$ ，空间复杂度 $O(n \cdot 2^n)$ 。

7.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2012, Problem C

8 Infiltration

8.1 试题大意

给定一张有向图，保证任两点之间有且仅有一条有向边。求一个最小点覆盖方案。其中一个点被覆盖，指此点被选中，或有一个选中点有一条向此点的有向边。点的个数 ≤ 75 。

8.2 解题思路

显然的，此题描述的问题只能通过搜索解决。但如果只是简单地搜索，时间上显然无法完成此题，所以必须加入一些剪枝优化。

由于两点之间必有一有向边，即必然有 $n(n-1)/2$ 条边。由抽屉原理可以观察到，每次选定指向最多未覆盖点的未覆盖节点，以此策略进行贪心，每次至少会有 $\lceil (n-1)/2 \rceil + 1$ 个节点被覆盖。

由上面的论述，对于 75 个节点的情况，观察到通过贪心策略，至多需要 6 次选中以覆盖所有的节点。因此在搜索中，可以剪枝掉所有使用节点大于等于 6 的情况，以节约时间。

分析求解问题的时间，75 个节点至多只有 $\sum_{i=1}^5 \binom{75}{i} = 18545215$ 个可能的解，对这些解进行枚举，而若无解则使用贪心策略给出的结果。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(\sum_{i=1}^5 \binom{n}{i} + n^2)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

8.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2012, Problem E

9 Factors

9.1 试题大意

定义 $f(x)$ 为 x 的质因子排列方案数。给定正整数 n ，求最小的 x 使得 $f(x) = n$ 。

9.2 解题思路

对于给定的整数 x ，设其质因数分解为 $x = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_l^{e_l}$ ，则 $f(x) = \frac{(e_1 + e_2 + \dots + e_l)!}{e_1! e_2! \dots e_l!}$ 。观察到 $f(x)$ 的值与分解出的质因数的值无关，即对于给定 $f(x)$ ，最小的 $x = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_l^{e_l}$ 必有 $e_i \geq e_{i+1}$ ，且 p_i 必为第 i 小质数。

那么，便可以通过搜索算法，求出所有 $x = 2^{e_1} 3^{e_2} 5^{e_3} \dots$ ，其中 $e_i \geq e_{i+1}$ ，并且满足 $1 < x < 2^{63}$ ， $f(x) = \frac{(e_1 + e_2 + \dots + e_l)!}{e_1! e_2! \dots e_l!} < 2^{63}$ 。对于每个 $f(x)$ 记录下对应的可能的最小 x 值。

实践证明，上面描述的算法枚举的结果总共只有 43606 组，可以很快地预处理出所有 19274 个 $f(x)$ 所对应的最小 x 值。为一常数，因此可认为预处理复杂度为 $O(1)$ 。

关于 $\frac{(e_1 + e_2 + \dots + e_l)!}{e_1! e_2! \dots e_l!}$ 的计算，为防止中间过程超出 long long 范围，不可直接计算出 $(e_1 + e_2 + \dots + e_l)!$ 与 $e_i!$ 再进行相除。一个好的实践是使用类似约分的方式，对于分子的每个乘项，与分母的乘项求最大公约数，并进行相除。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(q)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

9.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2013, Problem D

10 Curvy Little Bottles

10.1 试题大意

给定多项式 $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ，求从给定 $x = x_{low}$ 到 $x = x_{high}$ ，多项式绕 x 轴旋转一周构成体的体积。并对给定 inc ， $x = x_{low}$ 到 x_i 体积为 $i \cdot inc$ ，求 x_i 。

10.2 解题思路

从 $x = x_{low}$ 到 $x = x$ 的体积可通过下式求得：

$$V(x) = \int_{x_{low}}^x \pi P^2(x) dx \quad (10)$$

其中 $P^2(x)$ 亦为多项式，可用 $O(n^2)$ 时间求得，或使用 DFT 在 $O(n \lg n)$ 时间内求得。设此多项式为 $P^2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{2n}x^{2n}$ ，则体积如下：

$$V(x) = \pi \sum_{i=0}^{2n} \frac{b_i}{i+1} (x^{i+1} - x_{low}^{i+1}) \quad (11)$$

第一问答案即 $V(x_{high})$ ，第二问答案可通过二分搜索 x 求得。为分析时间复杂度，设 $d = (x_{high} - x_{low})/0.001 = O(x_{high} - x_{low})$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n \cdot (\lg d + \lg n))$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

10.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2012, Problem B

11 Fibonacci Words

11.1 试题大意

$$F(n) = \begin{cases} \text{"0"} & n = 0 \\ \text{"1"} & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n \geq 2 \end{cases}$$

给定模式串 p 和 n , 求 p 在 $F(n)$ 中出现次数。

11.2 解题思路

可以观察到 $F(n-1)$ 与 $F(n)$ 的实质区别是将所有的子串 “0” 替换为 “1”，而 “1” 替换为 “10”。则在 $F(n)$ 中查找 p 的出现次数，可以转换为在 $F(n-1)$ 中查找 p' 的出现次数的问题。

将 p 变换为 p' ，只需与替换规则相反即可。特殊的， p 中若以 “0” 起始，意味着 p' 以 “1” 起始（即 “1” 替换为 “10” 中只保留了 “0”）； p 中若以 “1” 终结，意味着 p' 可能以 “0” 终结，或是以 “1” 终结。对于特殊情况中的后者，需要递归处理所有可能的结果。

最终，问题将转变为在 $F(n)$ 中查找 “0” 或 “1” 的问题。若为查找 “0”，答案为 $f(n-2)$ ，否则为 $f(n-1)$ 。另外需要特别注意 $F(0)$ 中 “0” 的个数为 1。其中 $f(i)$ 为 Fibonacci 数列的第 i 项。

本题还可使用动态规划算法完成。

为了分析时间复杂度，定义 end1 为最长搜索链中出现 “1” 结尾的个数。这是一个很小的值。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(2^{\text{end1}})$ ，空间复杂度 $O(n \cdot \text{len}(p))$ 。

11.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2012, Problem D

12 Ancient Messages

12.1 试题大意

给定一张位图，求其中六种象形符号的个数。象形符号见：<http://tsinsen.com/D6878>

12.2 解题思路

观察题目提供的图片，可以发现 A 代表的象形符号中有 1 个孔，K 有 2 个孔，J 有 3 个孔，S 有 4 个孔，D 有 5 个孔，而 W 没有孔。就可以以此为特征，判断象形符号的个数。

具体过程为：

Stage 1 对背景进行 Flood Fill，背景定义为与边框相接的白色区域。

并对与背景相接的黑色区域进行 Stage 2。

Stage 2 对文字进行 Flood Fill，文字定义为相接的黑色区域。

并对与文字相接的，不为背景的白色区域进行 Stage 3，统计个数。

Stage 3 对孔进行 Flood Fill，防止一个孔被多次统计。

三个阶段是一致的，只需要编写一个过程即可完成。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(H \cdot W)$ ，空间复杂度 $O(H \cdot W)$ 。

12.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2011, Problem C

13 Trash Removal

13.1 试题大意

在平面直角坐标系下，给定一个 n 个顶点的多边形。求一个最小宽度值 w ，使得存在一旋转变换， $\max\{x_i\} - \min\{x_i\} \leq w$ 。

13.2 解题思路

本题是一个典型的凸包类算法题目。

解决此题的关键，在于观察到这一宽度值必为一边到某一顶点的距离。形式化地描述，即旋转后存在 a, b ，使 $\max\{x_i\} = x_a = x_b$ ，或 $\min\{x_i\} = x_a = x_b$ 。

掌握到这一点后，便可以在 $O(n \lg n)$ 的时间内计算多边形的凸包，并在 $O(n)$ 的时间内使用旋转卡壳法⁴解决题目。

但由于数据规模较小，可以考虑使用较为简便易写的 $O(n^3)$ 算法。为了不求凸包，原多边形上任意两点相连，都可能是凸包上的一条边。简单地枚举两个点，若所有剩余顶点都在这连起来的边一侧，则可认定此边在凸包上。再枚举其他点，求出到此边最大距离。最后选择一个值最小的方案，即可解决此题。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n \lg n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

13.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2011, Problem K

⁴<http://cgm.cs.mcgill.ca/~orm/rotcal.html>

14 Coffee Central

14.1 试题大意

给定一个 $dx \times dy$ 的 01 矩阵，对于每个询问 m 求一个 (x, y) 使得与其曼哈顿距离不超过 m 的 1 项个数最多。

14.2 解题思路

只需要将矩阵旋转 45° ，问题就转变为了求某一给定长宽的子矩阵最大和问题。求此矩阵的前缀和 ($\text{sum}_{ij} = \text{mat}_{ij} + \text{sum}_{i-1j} + \text{sum}_{ij-1} - \text{sum}_{i-1j-1}$)，枚举右下角的坐标，在 $O(1)$ 时间内求出对应子矩阵和 $\text{sum}_{ij} - \text{sum}_{i-m'j} - \text{sum}_{ij-m'} + \text{sum}_{i-m'j-m'}$ ，即可在 $O(d^2)$ 时间内得到最优答案。

但是矩阵是离散的，结果也应该是离散的。并不能直接旋转 45° ，给出一个变换法则如下：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (12)$$

要注意边界的处理。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(q \cdot d^2)$ ，空间复杂度 $O(d^2)$ 。

14.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2011, Problem E

15 Takeover Wars

15.1 试题大意

给定长度为 n 的序列 A 与长度为 m 的序列 B ，每次操作将自己序列的两个数合并为和，或删除对方序列小于自己某数的数。最先失去所有数者为败。问何序列为胜者。

15.2 解题思路

这是一道博弈的问题。解决问题的关键在于发现以下两个性质：

删除性质 只有当操作者可以删除对方最大数时，删除才可能获胜。

合并性质 只有当操作者合并自己最大的两个数时，合并才可能获胜。

根据上面的性质，若当前操作选择了：

删除 则对方被删除后最大的数小于操作者最大的数，对方只能合并。

合并 可能出现下列两种情况。

情况1 合并后仍小于对方最大的数，操作者必败。

情况2 否则，对方最大的数小于操作者最大的数，对方只能合并。

从上面的推论，可以发现实际上只有先手可以选择整个博弈的发展。先手可以选择删除对方最大的数，或是合并自己最大的两个数，之后的博弈进程都是决定了的。所以可以枚举两种情况，并模拟整个博弈过程，直到确定博弈结果，即出现合并后的**情况1**。

显然，若两种情况有一种是先手必胜的，则先手必胜。否则先手必败。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n + m)$ ，空间复杂度 $O(n + m)$ 。

15.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2012, Problem L

16 Minimum Cost Flow

16.1 试题大意

给定 n 个三维空间节点， m 个管道连接。每个节点给定空接口个数，连接的代价为两点距离，封堵为 0.5。施加水压，求满足连通器原理时，源水流到汇的最小代价。

16.2 解题思路

枚举水能到达的最高点，易知这个点高于源与汇。则整个网络被分为多个连通块，可用并查集维护。当两个节点均有空接口，两节点的距离定义为它们的几何距离。而当两个节点在一个连通块内时，距离为 0。此后，只需计算从源点至汇点的最短路径即可。

对于每个连通块，又必须封堵所有空接口。建立边的代价显然大于封堵的代价，因此对于多余空接口，全部采取封堵策略，计算最短距离时必须加上封堵当前连通块空接口的代价，即每个 0.5。而连上一条边可封堵两个接口，之前不同连通块的两节点距离应减去 1。

还应注意到的是，一个节点若只有一个空接口，不能在由此连入的同时由此连出。对此的解决方式可通过点的拆分完成。一个点分为入点 in_i 与出点 out_i ，不同连通块间的边 (i, j) 只能从出点 out_i 连向入点 in_j 。若一个点 i 有两个及以上空接口，可从入点 in_i 连向出点 out_i 。对于同一连通块内的所有点对 (i, j) ，从入点 in_i 连向出点 out_j 。如此便能保证需要的性质。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

16.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2012, Problem G

17 Affine Mess

17.1 试题大意

给定二维平面上的三个起始点，依次经过旋转，坐标取整，整数倍拉伸，平移操作后，得到给定的三个目标点。问输入是否合法，若合法，变换是否唯一。

17.2 解题思路

可以很快地观察到平移和拉伸的顺序并不重要，对于一个先拉伸后平移的操作，一定可以等价为一个平移后拉伸的操作，反之亦然。由此可以将原本复杂的题意简化为题目大意的叙述。

由于三点对应关系并不明确，可以通过枚举所有对应的可能性，解决这道问题。在对应确定的情况下，根据原题给的方式，枚举角度。依据这些信息，对其进行旋转与取整。可以发现只需要三个点 x 方向的两两坐标差之比为定整数值， y 方向亦然，则必定存在方案进行拉伸、平移，得到结果。需要特殊注意的是，若三点某坐标值相等，则在此坐标轴的拉伸可以任意，亦即存在无穷种可行的变换。

对于变换方式，可以用旋转角度与拉伸系数来确定。而两个变换等价当且仅当旋转相反且拉伸相反。若存在一种变换，则输入合法。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(1)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

17.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2011, Problem B

18 Mining Your Own Business

18.1 试题大意

给定一张 n 个节点， m 条边的无向图，求最少需要的节点数及方案数，使得删除图中任一节点后，剩余节点都能到达至少一个答案节点。

18.2 解题思路

这个问题是经典的双连通问题，通过 Tarjan 算法可以获得所有连通块及割点。

当删除一个节点时，若：1) 不是一个割点，则图保持原有连通性不变；2) 是一个割点，则与此割点相连的各连通块，若只有此割点，则与其他连通块失去连通，否则与大图相连。

那么可以得到如下结论：1) 若连通块割点数不少于二，删除任一割点后仍能到达其他连通块，则显然不需要建立答案节点；2) 若割点数等于一，删除唯一割点后只能内部连通，需要建立答案节点，且可以选择块内任一节点；3) 若割点数为零，当前连通块为整个图，若只有一个点，只需一个答案节点即可，否则需要考虑删除点为答案节点的情况，即需要两个答案节点。

本题虽未明确给出 n 的范围，但由描述，显然有 $n \leq m + 1$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n + m)$ ，空间复杂度 $O(n + m)$ 。

18.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2011, Problem H

19 Pyramids

19.1 试题大意

给定三种金字塔搭建方案，每层宽度按一递减、宽度按奇数或偶数递减，直至最小。给定总体积，求方案，使得产生最少金字塔，两两不同，高度不少于二，且体积字典序最大。

19.2 解题思路

可以先预处理出所有的搭建方案所使用的体积，之后实验观察到所产生的金字塔数必不超过 6。在观察到这一点之后，直接对给定体积进行迭代加深搜索，每次优先选择体积最大的搭建方案，即可解决问题。

复杂度太难分析了，（/ - o -） / ⊥——⊥，因为各种条件都已知，就偷懒当成常数吧。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(1)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

19.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2011, Problem J

20 Barcodes

20.1 试题大意

给定标签条形码各黑线宽度，求 Code-11 解码的结果。

20.2 解题思路

这个问题的一个难点在于判断一个黑线是宽线或是窄线，如果条形码合法，所有宽线必然都在 $[\max * \frac{0.95}{1.05}, \max]$ 范围内，同理窄线都在 $[\min, \min * \frac{1.05}{0.95}]$ 范围内。

并且需要注意宽线必须是窄线的两倍宽，这个可以通过求出宽线与窄线标准宽度的可行区间，将窄线区间翻倍，若其交不为空集，则可行。

另外一个需要注意的地方是，如果终止编码提前出现在条形码中，那这个条形码亦为无效。本人被这点坑了一下午。

在注意到这些之后，先求得 0/1 串，然后正反尝试，即可得到答案。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

20.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2010, Problem B

21 Tracking Bio-bots

21.1 试题大意

给定一张 $m \times n$ 格的方格图， w 个横向单行染色操作，求从多少格子起始，只通过向右与向上行走，能到达右上角的格子，而不经染色点。

21.2 解题思路

令 f_{ij} 代表从 (i, j) 起始，是否能到达右上角的格子，而不经染色点。设 c_{ij} 代表 (i, j) 被染色与否。则有：

$$f_{ij} = \begin{cases} \text{false} & c_{ij} \vee i > m \vee j > n \\ \text{true} & i = m \wedge j = n \wedge \neg c_{ij} \\ f_{i+1, j} \vee f_{i, j+1} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

由于题目给定的 m 、 n 范围过大，不能直接建 $m \times n$ 的二维数组计算。但是由于 w 较小，可以对行、列分别进行离散化，得到 $O(w)$ 个新行列，问题便由原有的 $O(mn)$ 变为了 $O(w^2)$ 。处理答案时，每个格子恢复为实际代表的格子数，即可解决此题。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(w^2)$ ，空间复杂度 $O(w^2)$ 。

21.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2010, Problem C

22 Castles

22.1 试题大意

设一个变量 x ，给定一棵无根树，首次访问一个节点要求 $x \geq a_i$ ，且访问后 $x := x - m_i - g_i$ ，每条边只可经过两次，求最小输入 x 以访问所有节点。

22.2 解题思路

不知道为什么莫名其妙想到了圣诞树，作者脑洞比较大，写到这里正是圣诞节，祝各位读者圣诞快乐。虽然你们看到的时候已经不是圣诞节了，而且估计也不会有人来看这份解题报告。嗯可以多写一点凑字数，显得我写得很认真的样子。

然后呢，这题一眼就可以看出的一个特点就是， m_i 和 g_i 不是一个东西吗摔！直接加起来就好了啊！（咳咳，写解题报告写得有点寂寞了，我要阻止自己继续卖萌。）也就是说，每个节点实际上只有两个参数：访问需求与访问消耗。

对于枚举的起点 s ，可建立一棵以 s 为根的树。从题意可以注意到当访问了节点 r ，则必须继续访问完 r 子树的所有节点，否则 r 到其双亲的边将需要访问两次以上。

那么对于每棵子树都可以作为一个节点处理，有两个参数：子树访问需求 A_i 、子树访问消耗 C_i 。那么从节点 r 出发，给定一个其子树访问序列，可以很方便地计算出子树 r 的这两个参数。答案为 s 的子树访问需求参数 A_s 。

关于访问序列的选择，容易证明从 $A_i - C_i$ 最大的节点倒序访问必然最优，且值相等的节点访问顺序与答案无关。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2 \lg n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

22.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2010, Problem D

23 Robots on Ice

23.1 试题大意

给定一张 $m \times n$ 格的方格图及 3 个检查点，要求一条路径，在给定时间经过检查点，并遍历所有方格一次。求方案数。

23.2 解题思路

本题数据较小，只要有足够的优化便能通过此题，搜索剪枝的思路非常清晰。

当访问到某一节点时，有以下几处剪枝：

超时 到达某一处检查点要求时间，并没有到达此检查点。

提前 到达了一处检查点，却没有到达检查点要求的时间。

无望 在剩余的时间里，不可能到达下一个检查点。

堵塞 这是最强的剪枝之一，有两种情况：

情况1 当前节点上下格子均访问过，而左右未访问。

情况2 当前节点左右格子均访问过，而上下未访问。

这些情况下，未访问侧的两个相邻格子将被当前位置分为两个连通块。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(mn)$ ，空间复杂度 $O(mn)$ 。

23.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2010, Problem I

24 Sharing Chocolate

24.1 试题大意

给定一块 $x \times y$ 的巧克力，要求切割方案，只允许行切割与列切割，问是否能得到大小给定的 n 块。

24.2 解题思路

首先考虑朴素搜索的方法，对于一块 $x \times y$ 的巧克力，能切割得到 S 集，当：

边界 S 集中只有一个元素，且大小为 xy 。

切割 满足下列条件之一：

x 切割 可切割为 $i \times y$ 与 $(x - i) \times y$ 两块，分别为 S' 集与 $S - S'$ 集，且 iy 为 S' 集大小和，同理 $(x - i)y$ 。并且两者都为有效解。

y 切割 可切割为 $x \times i$ 与 $x \times (y - i)$ 两块，分别为 S' 集与 $S - S'$ 集，且 xi 为 S' 集大小和，同理 $x(y - i)$ 。并且两者都为有效解。

对于边界条件，可以预先对每个目标块，求出所有有效的 $x \times y$ 方案。而对于切割转移，可以预处理出所有面积为 $area$ 的 S' 集，枚举每个切割方案，求出 $area := iy$ or xi ，得到 S' 集并判断是否满足 $S' \in S$ 。

可以观察到搜索中有大量重复，可以使用记忆化搜索优化。注意到 S 集决定了面积，与 x 共同决定了 y ，因而状态数仅为 $O(\min(x, y)2^n)$ 。可以解决此题。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(\min(x, y)2^n k)$ ，空间复杂度 $O(\min(x, y)2^n + xy)$ 。

24.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2010, Problem J

25 The Islands

25.1 试题大意

给定二维平面上 n 个点，求从左向右至最右点后返回，遍历每个点的最短路程。有两个特殊点 b_1 、 b_2 要求在不同次访问。

25.2 解题思路

这是一道经典的双线动态规划题目，设 F_{ij} 为第一线（经过第一个特殊点 b_1 的线）到达 i ，而第二线到达 j 的最短路程。关于 F_{ij} 有：

$$F_{i,(\max(i,j)+1)} = \min\{F_{ij} + \text{dist}(j, (\max(i,j) + 1))\}(\max(i,j) + 1 \neq b_1) \quad (14)$$

$$F_{(\max(i,j)+1),j} = \min\{F_{ij} + \text{dist}(i, (\max(i,j) + 1))\}(\max(i,j) + 1 \neq b_2) \quad (15)$$

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

25.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2010, Problem G

26 Fare and Balanced

26.1 试题大意

给定一张 n 个点的有向无环图，求一个增加边权的方式，使得任意一条从起点到终点的路线均有相同的边权和，且路线上不存在两条及以上边被增加过边权。要求增加边权的方式使得最终边权和最小。

26.2 解题思路

对于此有向无环图，定义 $\max(i, j)$ 为 i 点至 j 点的最大边权和，相对的 $\min(i, j)$ 为最小边权和。

若存在一点，从起点到此点边权和不唯一，且此点到终点边权和不唯一，则为使最终边权和唯一，两侧路径均需要修改：即存在一条路径从起点到此点，从此点到终点，存在两处修改，不符合题意。否则，必定可通过后文构造获得一个解，如此便可以得出这样一个结论：此图无解当且仅当存在点 i 满足 $\max(1, i) \neq \min(1, i) \wedge \max(i, n) \neq \min(i, n)$ 。

将满足 $\max(1, i) = \min(1, i) \wedge \max(1, j) \neq \min(1, j)$ 的边 (i, j, c) 称为割边。对于割边能导出性质： $\max(j, n) = \min(j, n)$ ；每条起点到终点的路径都只存在一条割边。

对于每一条割边 (i, j, c) ，增加 $\max(1, n) - \max(1, i) - \max(j, n) - c$ 的边权。则显而易见的，在此构造下，任意一条从起点到终点的路线均有相同的边权和。

关于 $\max(i, j)$ 与 $\min(i, j)$ 的求解，由于只使用到从起点开始到某点的数据，和某点到终点的数据，因此可以在拓扑排序后，使用动态规划方法在线性时间内求得。

另外此题可以用网络流的方法解决。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

26.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem E

27 A Careful Approach

27.1 试题大意

给定 n 个闭区间 $L_i = [a_i, b_i]$, 要求最小的 $d = \min\{c_{s_i} - c_{s_{i-1}}\}$, 使得 $c_i \in L_i$, 其中 $c_{s_{i-1}} < c_{s_i}$ 。

27.2 解题思路

对于给定的 d 与 s_i , 可以贪心地计算:

$$c_{s_i} = \begin{cases} a_{s_i} & s_i = 1 \\ \max\{c_{s_{i-1}} + d, a_{s_i}\} & s_i > 1 \end{cases} \quad (16)$$

容易证明, 若存在 $c_i > b_i$, 则给定的信息无效。

关于 s_i , 由于 n 较小, 可以枚举所有的可能。

关于 d , 显然具有单调性, 可以二分获得。

至此, 此题完成。时间复杂度 $O(n! \lg p)$, 空间复杂度 $O(n)$ 。

27.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem A

28 Glenbow Museum

28.1 试题大意

从一个所有边都平行于坐标轴的多边形任一顶点出发，逆时针遍历，记录顶点的转角。求指定长度的角字符串中，可能表示一个某点可观测全部面积的多边形的串个数。

28.2 解题思路

这么扯的题目一看就知道是组合数学题嘛。

显然当 $L = 2k+1$ 时，解不存在；当 $L = 2k$ 时，设 $m = \frac{l+4}{2}$ ，所求结果为 $\binom{m}{4} + \binom{m-1}{4}$ 。

推导略长，懒得写了，参见[WU2012]⁵，这本书里应该有吧。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(1)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

28.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem F

⁵吴永辉, 王建德. (2012). ACM-ICPC 世界总决赛试题解析(2004~2011年). 机械工业出版社.

29 Pirate Chest

29.1 试题大意

给定已知各处深度 d 的底面 $n \times m$ 池塘，将立方体箱子沉入水中，箱子底面小于 $a \times b$ ，且沉入水中后水面上升，箱子表面不露出水面。求满足题意的箱子最大体积。

29.2 解题思路

若池塘面积 S ，箱子底面积 s ，选择区域的最小深度为 d ，则箱子高度 h 需满足 $h < \frac{Sd+sh}{s}$ ，即 $h < \frac{Sd}{S-s}$ 。由于 h 为正整数，因此 h 的最大取值为 $\lfloor \frac{Sd-1}{S-s} \rfloor$ 。

枚举箱子沉入位置的第一行 s 和第二行 $e < s + a$ ，问题转化为给定 $d'_i \leq d_{ji}$ ， $s \leq j \leq e$ ，选一段 d' ，设其最小值为 d ，段长度为 $l \leq b$ ，令 $s = l(e - s + 1)$ ， $V = hs$ 。求最大 V 。

上述问题是一个经典的最大有效子矩阵问题，可以用单调栈在 $O(n)$ 时间内解决。而枚举需要 $O(n^2)$ ，因此最终时间复杂度为 $O(n^3)$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

29.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2013, Problem I

30 Pollution Solution

30.1 试题大意

给出一个简单多边形，同时给出一个直径在 x 轴的半圆。求多边形与圆的交面积。

30.2 解题思路

将给定多边形的顶点、多边形边与圆弧的交点和 $(0, 0)$ 连线，将角度区间 $[0, \pi)$ 进行划分。可以单独计算每个扇形中交集的面积。之后减去底端三角形。

剩下的都是计算几何的事情了，不赘述。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

30.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2013, Problem J

31 Struts and Springs

31.1 试题大意

这题是一道繁琐的模拟题，题意无法简述。调整窗户，详见题目。

31.2 解题思路

这道问题解决的第一步是确定窗户的树状层级关系，只需要找到包含 W_1 的最小窗户 W_2 ，则 W_2 便是 W_1 的上级窗户。

第二步是处理调整操作， x 轴与 y 轴可以分别以同样的方式处理。假设存在窗户 W 其外部窗户的宽度改变了 δ 。令 L 为控制 W 的横向弹簧的总长度，长度为 l 的弹簧将会变为 $l' = l(1 + \delta/L)$ 。如果弹簧控制着 W 的宽度，那么 W 内部的窗户也需要跟着改变，否则只有位置移动了。

由于清橙上出数据的人卡常数比较严，不能使用浮点数计算。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

31.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem I

32 Conduit Packing

32.1 试题大意

给定 $n = 4$ 个圆，求最小半径圆能将它们放在其中而不相交。

32.2 解题思路

一个非常自然的想法是用 $O(\lg q)$ 的时间二分最小的半径 r ，对于每个半径进行验证，确定下一个区间。

可以证明，大圆内的 $n = 4$ 个小圆的最优排序必定是顺时针的，那么可以用 $O(n!/n)$ 时间枚举所有可能的圆排列方案。问题因而简化为，给定大圆半径及小圆顺时针的排序方案，求是否满足题意。

可以注意到，与大圆相切时，小圆相切，若得到的角总和小于等于 2π ，则可行。注意相切的并不一定是相邻排序的圆，故需要 $O(n^2)$ 时间计算角度和。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n! \cdot n \lg q)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

32.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem D

33 Subway Timing

33.1 试题大意

给定地铁交通图为一棵树，每条边时间单位为秒，求取整为分钟的最优方式，使得误差最大的路径最小。

33.2 解题思路

对于最大值最小的问题，直观的想法便是使用二分法计算答案。二分这个误差上界，可以证明这个值最大为 118，且显然由于误差上界的包含关系，问题是单调的。

现在问题在于，对于一个给定的上界 d ，如何确定这个上界是否合法。以 F_{ij} 状态表示在以 i 为根的子树中，保证内部误差不大于 d 时，使得正值误差最大为 j 的情况下，导致以 i 为端点的最大的负值误差。则若根 r 存在 $0 \leq j \leq d$, $F_{rj} \geq -d$ ，则上界合法，反之不合法。

关于 F_{ij} 状态的转移，先将问题简化为二叉树（左儿子右兄弟方法），枚举左右节点的正值误差。首先要保证的是内部误差不大于 d ，即对于左右两个子结点，选定的正值误差加上与父节点连边的误差不超过 d ，且负值误差亦满足条件；则在这个情况下，可以将左右儿子的最坏情况转移到以父为端点，即正值误差为两者最大值，负值误差亦然。

边界叶节点为正值误差 0，负值误差 0。根据上面描述的方法，利用树形动态规划，便可解决问题。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3 \lg n)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

33.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem J

34 Deer-Proof Fence

34.1 试题大意

给定二维平面上 n 个整数点，若干封闭曲线将所有点包围，且曲线与点距离大于 m ，求最短曲线长度。

34.2 解题思路

首先分析所有点都在一个封闭曲线内的情况，容易发现，曲线的每条直线边都与点集凸包某条边平行。若不平行则根据三角形不等式，曲线并不是最短曲线。而非直线边则必然是圆的一部分，并且很容易证明得其和为一个半径为 m 的圆。

本题要求若干封闭曲线，可以枚举所有分拆情况，但会导致超时。观察到搜索过程有大量重复，可以以已包围的点集为状态，进行状态压缩的动态规划。例如 F_S 可由 S 的凸包、 $F_{S'} + F_{S-S'}$ ， $S' \in S$ 转移而来。将点集压位至 `int` 范围，即可解决问题。

关于凸包的计算有多种方法，由于点数极少可以枚举凸包上的点；也可以以 x 坐标排序，并从左至右求一次上凸包与下凸包。几何方法不赘述。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(3^n + n \cdot 2^n)$ ，空间复杂度 $O(2^n)$ 。

34.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem F

35 The Ministers' Major Mess

35.1 试题大意

给定 n 个命题与 m 个要求，每个要求包含不超四个命题真值。求方案使每个要求有一半（不含）以上真值合法，多解命题输出 “?”。

35.2 解题思路

解决本题的关键，在于观察到每个要求至多有一个真值不合法，而在小于等于二的情況下，更要求所有真值合法。对于大于二的情况，一个命题真值不合法意味着其他所有真值合法。这是一个典型的，包含硬性真值条件的 2-SAT 问题。

可以迭代计算出所有命题真值出现的可能性。若某个真值情况选定，会导致某议案既否定又肯定，或与已知可能性冲突等 2-SAT 无解的情况，则这个真值情况不能出现。

最后，只需要对所有的命题，若真假均可能，则输出 “?”，否则依据情况输出 “y” 或 “n”。特殊地，若存在命题不可为真，且不可为假，则问题无解。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n \cdot (n + m))$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

35.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem H

36 Suffix-Replacement Grammars

36.1 试题大意

给定初始串与目标串， n 个后缀变换，求最小变换次数。

36.2 解题思路

写了一个代码，交上去 UVa 轻轻松松过了，但是清橙就是死都是超时。然后去网上找了个程序，交上去竟然过了。按理说呢，我的程序还比他优的，是 $O(n^3)$ ，结果这个代码没过倒是 $O(l \cdot n^3)$ 的给过了。最可气的是 Linux 和 Mac OS X 下好像都还挺正常的，就只有清橙，简直死不瞑目。

说说那个的程序的思路吧，观察到一个字符串 a 要变成 b ，要么通过有一些转换规则使得 a 能整个得变成 b ，要不就是 a 的第一个字符与 b 相等，且剩余字符串可变换。那么就淡定地从长度 1 到长度 l 处理，内部建图 Floyd 就 OK 了。

然后我的那个方法呢，是直接按顺序做 Floyd，转移过程中判断是否可以转移（即大的变成小的变回大的，则需要两个大的有符合要求的公共部分），就可以解决了。只是我给 $O(n^3)$ 这部分加的常数估计略大了，在奇怪的机子（我在看你，清橙）上会导致大于 l ，就悲剧了。

算了不想吐槽清橙了，最近我无数次被卡常数被迫优化，或者是 `#pragma GCC optimize (0)` 拯救浮点数。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(l \cdot n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

36.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2009, Problem K

37 Air Conditioning Machinery

37.1 试题大意

在一个 $n \times n \times n$ 的空间里，给定入口与出口坐标与朝向，用 $c \leq 6$ 个 L 形管道链接，求最小 c 。

37.2 解题思路

注意到每个 L 形管道只有 8 种放置方式，且最多只能使用 6 个管道。则这个问题可以通过非常朴素的搜索解决，直接枚举每次选择的放置方式即可。

这道问题的难点在于朝向的处理，所谓朝向可以用向朝向移动一位的位置表示。要注意结尾次段朝向必须与出口一致，同理初始 L 的首段朝向与入口一致，且两两 L 一致。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(8^c)$ ，空间复杂度 $O(n^3)$ 。

37.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem A

38 Always an Integer

38.1 试题大意

给定自变量为 n ，最高项为 p 的多项式 $f(n)$ ，问当 n 取任意正整数时，这个多项式的值是否恒为 D 的倍数？

38.2 解题思路

首先可以观察到若 $f(n)$ 对于所有 $1 \leq n \leq D$ 满足题意，根据同余可以证明当 n 取任意正整数时， $f(n)$ 满足题意。

但是 D 可以是一个很大的整数，必须考虑另外一个界。下面证明若 $f(n)$ 对于所有 $1 \leq n \leq p+1$ 满足题意，当 n 取任意正整数时， $f(n)$ 满足题意。

记 $f_p(n) = f(n)$ ， $f_{i-1}(n) = f_i(n+1) - f_i(n)$ 。若 $f_p(n)$ 在 $[1, p+1]$ 范围内被 D 整除，则可以推出 $f_0(n)$ 在 $[1, 1]$ 范围内被整除。又 $f_0(n)$ 是一个最高次幂为 0 的多项式，亦即 $f_0(n)$ 是一个常数，因此 $f_0(n)$ 在 n 取任意正整数时，被 D 整除。又 $f_1(1)$ 可被 D 整除， $f_i(n+1) = f_{i-1}(n) + f_i(n)$ ，得到 $f_1(n)$ 在 n 取任意正整数时，被 D 整除的结论。同理，由于 $f_i(n)$ 在 $[1, i+1]$ 范围内被整除，反推得试题要求结论。

另外顺便吐槽，UVa 没有遵循数据约定，需要 long long 才能获得 Accepted。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(p^2)$ ，空间复杂度 $O(p)$ 。

38.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem B

39 Huffman Codes

39.1 试题大意

给定 n 个字符的哈夫曼编码，出现频率都是正整数，求可能的组合数 k 。两个频率组合不同，当且仅当频率构成的集合不同。

39.2 解题思路

根据题意建立的哈夫曼树，以广度优先序，从右往左编号 $1, 2, \dots, N$ 。则其频率 $F(i)$ 满足要求 $F(i-1) \geq F(i)$ 。父节点的频率为子节点之和，且特殊地， $F(1) = 100$ 。

根据上面的描述，可以观察到方案数 k 有一个较小的上界。可以将所有的方案枚举出来，便能得出答案。

这里采用一个比搜索更稳定的，类似动态规划的做法。每次将一个最浅，最右的节点展开。所谓展开即为枚举所有之前的方案，将此节点的频率拆为两份，给予左右节点。测试是否依然满足上述要求，若是则保存为新的方案。自然，未展开时的方案并不保留。

最后，只需输出方案数即可。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2 \cdot k)$ ，空间复杂度 $O(n \cdot k)$ 。

39.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem E

40 Net Loss

40.1 试题大意

给定一个 n 次多项式 $p(x)$ ，求分段函数：

$$g(x) = \begin{cases} -a_1x + a_0 & (-1 \leq x \leq c) \\ -b_1x + b_0 & (c \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (17)$$

使得：

$$\int_{-1}^1 (p(x) - g(x))^2 dx \quad (18)$$

最小。

40.2 解题思路

化简式 (18) 得到一个关于 a_1 的二次函数，根据这个性质便可以解决问题。

首先固定值 $g(c)$ ，求出在此值下，对左右两侧的最佳拟合。只需做三次不同的拟合，即可获得二次函数的系数，从而获得 $g(c)$ 的最优取值。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(nt)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

40.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem G

41 The Sky is the Limit

41.1 试题大意

给定 n 个底边在 x 轴上的等腰三角形，问三角形并后， x 轴上方的长度和。

41.2 解题思路

利用扫描线的思想，记录当前扫描线顶端的三角形编号，即可求出斜率，进而求出长度。称顶端编号可能改变的 x 坐标为关键点，显然关键点只有三角形的左、右两端，以及三角形两两间的交点。显然，这 n 个等腰三角形最多能产生 $O(n^2)$ 个关键点。

现在的关键问题在于，如何求出两个关键点之间扫描线顶端的三角形编号。由于编号不变，可以取中间点 x_0 ，求出与 $x = x_0$ 交点最高的三角形即可。

最后，设左关键点为 x_1 ，右关键点为 x_2 ，斜率 k ，则之间的长度为 $(x_2 - x_1)\sqrt{1 + k^2}$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

41.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem J

42 The Hare and the Hounds

42.1 试题大意

给定一个图和起点终点，给定一个行走的规则。繁琐模拟，详见题目。

42.2 解题思路

思路对于模拟题完全不适用啊，要有思路也是拷贝一下题目。

就是有些恶心的细节要注意一下，就没有别的了。

另外，UVa 的数据保证了初始方向有边，而清橙没有保证，所以这要用主道路方法判断从何开始。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(nm)$ ，空间复杂度 $O(n + m)$ 。

42.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem D

43 APL Lives!

43.1 试题大意

给定一个简化的 APL 程序语言模型，要求实现一个解释器。

43.2 解题思路

“只是”一个非常繁琐的模拟题。

根据题目要求做就可以了。 $\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon = \vdash(\overline{}\Diamond\overline{})\lrcorner$

至此，此题完成。时间复杂度完全看输入心情，空间复杂度完全看输入心情。

43.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2010, Problem A

44 Bipartite Numbers

44.1 试题大意

对于一个公钥 p ，其私钥为比公钥大，而且是其倍数的最小的二段数。二段数定义为恰好包含 m 个 s 和 n 个 t 的十进制数字， s 与 t 必须连续。

44.2 解题思路

先吐槽一下，出数据的大神自己的程序都要跑 3.3 秒，结果给了一个 4 秒。本来这题就比较靠人品卡时限的恶心枚举题了，这么一搞人生就更加凄惨了。

没有什么特别的方法，就是朴素的枚举加上几个小优化。枚举的首先是长度，由于要最小的二段数，所以长度从小到大枚举，直到找到答案为止。然后枚举第一段的长度 m ，第一段的数值 s 和第二段的数值 t 。

现在关键的问题在于如何判断枚举的内容是否合法。如果能在平摊 $O(1)$ 的时间里计算出这个二段数是否能被 p 整除，那这个枚举就很有希望在时限内完成了。这里可以用记忆化的方式，每次计算 i 个 1 相连的数模 p 的值后，都可以保存下来，下次计算可以节约很多的时间。同理 10^i 也用类似的方式记录。如此枚举出的二段数模 p 的值就可以平摊快速地得到。

为了在时限内完成，观察到如果 p 是 10 的倍数或是 25 的倍数，可以节约很多枚举。如果不能通过，贱贱的 `#pragma GCC optimize ("O3")` 欢迎你！

至此，此题完成。时间复杂度完全卡着恶心的时限过的，空间复杂度依赖于卡时间的常数。

44.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2006, Problem D

45 Consanguine Calculations

45.1 试题大意

给定父亲、母亲、孩子中两个血型，求未给出的所有可能性。

45.2 解题思路

由于可能的血型组合极少，可以直接通过枚举所有血型完成本题。ABO 等位基因与 Rh 因子互不相关，可以分开处理。

对于 Rh 因子，注意到除了父母均为 Rh^- 外，孩子可能是任意因子。而 Rh^- 的父母只能产生 Rh^- 的孩子。对于 ABO 血型，可以根据题意列出可能性表格。利用上面的分析进行枚举即可。

需要注意可能血型为一种的情况，此时不需要加花括号。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(1)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

45.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2008, Problem A

46 Water Tanks

46.1 试题大意

给定 n 个水箱的体积，水箱 1 上方与大气相通，其余封闭。给定相邻两水箱的连接高度，求从水箱 1 上方灌水，最大的容水体积。

46.2 解题思路

此题只需根据物理规律，从水箱 2 开始逐个模拟。注意到从水箱 1 与水箱 2 均灌注至连接处时起，之后的水箱内空气就与大气隔离了。

则水流入水箱的过程为：1) 当前水箱水位未达到进水口高度时，当前水箱水位上升，前一水箱水位不变，体积减小因而压强增大。2) 将进水口封住后，所有水箱水位将随第一个水箱水位上升而上升（用数学方法一并计算），直到最后一个有水的水箱达到下一水箱进水口为止。若是最后一个水箱，则认为进水口高度无穷。3) 特殊地，若水箱 1 满，结束。

还应特殊判断只有一个水箱的情况，此时最大容水体积为水箱 1 的体积。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

46.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2007, Problem I

47 Tunnels

47.1 试题大意

给定一个 n 个节点的无向图，求最坏情况下，阻断源到汇运动的最小割边数。

47.2 解题思路

此题直观感受是一个最小割，根据最大流最小割定理，求源到汇的最大流即可得到阻断流的答案。但本题存在一个重要陷阱，运动的并不是多线程的流，而是单线程的运动。

若将最大流小于等于 P 的节点的最小割全部断开，此时得到其他节点的最大流 F' 。显然不经过小于等于 P 的节点，亦即可以等效为删除这个节点。此时总花费至多为 $P + F'$ 。利用类似于 Dijkstra 的方法即可解决。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^4)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

47.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2007, Problem J

48 Grand Prix

48.1 试题大意

给定一个二维赛道，和其与 xy 平面的倾角 θ 。问是否能以原点为中心旋转，使得不存在下坡。求角度。

48.2 解题思路

解决此问题的关键在于观察到，除了 $\theta = 0$ ，不存在坡度这一情况下，答案为不旋转外， θ 与答案并无关系。

$\theta \neq 0$ 只讲述了一点事实： z 坐标与 x 坐标成比例。则原问题： z 坐标不降，就转化为了新问题： x 坐标不降。三维问题简化为二维处理。

此时只需要将每段路程变为一个向量，问题转化为对于给定向量集合，求旋转方案使其与 y 轴夹角 $\alpha \in [0, \pi]$ 。按照极角排序，枚举旋转到 0 或 π 的向量，依情况，若上一向量或下一向量在范围内，则方案有效。更新答案即可。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n \lg n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

48.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2007, Problem C

49 Low Cost Air Travel

49.1 试题大意

给定 t 张机票联票，最长途径 l 个城市。对于 i 个询问，每个询问途径 $O(l)$ 个城市，求最优买票方案。联票必须使用第一到任意一个城市连续的一段。

49.2 解题思路

由于路线上途径的城市是连续的，最后途径城市与当前到达城市共同表示了独立的状态。这具有明显的动态规划性质。

因而可以用状态 f_{ij} 表示途径至要求的城市第 i ，且最后停留在 j 城市的代价。对于 j 的转移，需要使用起点为 j 的联票，转移到联票中任意一个城市，代价为机票价格。由于存在后效性，可以使用类似 SPFA 的方法计算。而对于 i 的转移，仅当 j 为第 i 个城市时可行。

需要特别注意的，需要在转移 j 的过程中同时转移 i ，否则会无法处理一张通票经过多个要求城市的情况。

由于城市编号任意，处理输入时需要离散化。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(ikt^2l^3)$ ，空间复杂度 $O(t^2l)$ 。

49.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2006, Problem A

50 Bit Compressor

50.1 试题大意

定义压缩为将 n 个连续 1 替换为 n 的二进制表示。给定压缩后的串，原串 1 个数与长度。求是否存在原串，若存在是否唯一。

50.2 解题思路

枚举所有可能的解压方案。对于一个处理到的位：

0 则必保留为 0，处理下一位。

1 对于向后枚举的一段下一位为 0 的串：

原始 若长度不大于 2 且不含 0，则可能为原串。

压缩 这段串表示为二进制，解压为若干 1。

可以注意到几个优化，首先若长度超过原串长度，或一的个数超过给定，则继续搜索必然无解；其次枚举一段串时，若当前表示的长度已超过可能，则可以结束枚举；最后，若答案已超过 1，则可以不继续搜索。

至此，此题完成。时间复杂度 N/A ，空间复杂度 N/A 。

50.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2006, Problem E

51 Pilgrimage

51.1 试题大意

两个变量，人数与金额。 n 个变化，分别为金额变化与人数变化。要求发生人数变化时金额是人数的倍数，且任何时候人数至少为一。求可能的初始人数。

51.2 解题思路

分别分析金额变化与人数变化。当金额变化时，由于增加操作并不影响总钱数与人数的倍数关系，可以直接忽略；相对的，减少操作并不同，条件是在上次人数变化之后，进行的金额变化在下次人数变化时，能成倍数，因而可以合并处理。由上面的描述，又可以知道在第一次与最后一次人数变化之外的金额变化是可以忽略的。

对每次合并的金额变化，可以计算出所有可能有效的人数（在金额变化后必然是人数变化，因而此次改变金额必然为**人数改变之前**的人数的倍数）。根据之前的人数变化，可以计算出最初的人数。

特殊地，如果没有金额变化，人数可为任意值。此时必须满足任何时候至少一人的要求，输出结果。相对应的，有金额变化时，除了注意记录所有可能的方案，还要注意可能的方案应满足这一条件。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(nst)$ ，空间复杂度 $O(n + s)$ 。

51.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2006, Problem G

52 Degrees of Separation

52.1 试题大意

给定一张无向图，求分离度。分离度为两点间最远距离。

52.2 解题思路

直接 Floyd 就好了，没别的东西。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

52.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2006, Problem I

53 Simplified GSM Network

53.1 试题大意

给定 b 个基站, n 个城市及 r 条道路, 求城市两两间基站切换次数。

53.2 解题思路

此题第一个需要解决的点是, 给定一个点, 求所属基站。根据题目, 是距离最近的一个基站, 直接枚举计算即可。

第二点在于, 如何计算出两个城市间切换的基站数。可以二分地考虑这个问题, 两个城市间切换基站数等于第一个城市到中间点的切换数, 加上中间点到第二个城市的切换数。若两个点属于一个基站, 则切换数为 0。若两点十分接近, 则可以认定是二分过程中逼近的一个分割点, 返回 1。

在明确上面的问题后, 计算出两两间的切换数, 进行 Floyd。

至此, 此题完成。时间复杂度 $O(n^3 + kbr)$, 空间复杂度 $O(n^2)$ 。

53.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2005, Problem B

54 The Traveling Judges Problem

54.1 试题大意

给定一张 n 个节点的无向图，求最小生成树，使得给定的 m 个节点联通。

54.2 解题思路

由于此题 n 值极小，可以直接枚举在树上的节点，求最小生成树。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(2^n n^2)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

54.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2005, Problem C

55 Lots of Sunlight

55.1 试题大意

给定东西线上 n 个房屋及高度，求给定位置日照时间。

55.2 解题思路

这是一道标准的数学几何计算题。

对于一个给定的位置，可以通过 $O(n)$ 的时间枚举每个可能遮住光线的房屋，计算出要求的最低日照角度 $\theta = \cos^{-1}(\Delta y / \Delta x)$ 。注意左右的最低日照角度的最高值需要独立计算。

从上面计算的结果，可以得到日照角度 θ_1 与 θ_2 ，分别计算出它们代表的时间（即太阳到达此角度的时间）， $T = r + \frac{\theta}{\pi}(s - r)$ 。输出即可。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(nQ)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

55.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2005, Problem E

56 Crossing Streets

56.1 试题大意

给定一张平面图，上面的线段均平行于 x 或 y 轴。求给定两点间穿过的最少线段数。

56.2 解题思路

本题难点在于平面图是连续的，需要用离散化技术将其离散，方便处理。注意到线段均平行 x 或 y 轴，只需将这些关键信息离散出，就可以将原平面图分为大小不同的网格。每个网格保存的信息为向四周是否穿过线段。

在这之后，通过广度优先搜索，每个网格可以计算出自此可不穿过线段到达的网格。可以使用 Flood-Fill 方法，将穿过 i 条线段可以到达的网格缩为一个状态。则目标位置所在的状态即为答案。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

56.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2005, Problem F

57 Tiling the Plane

57.1 试题大意

给定一个 n 条边的多边形，求是否能够不重不漏地铺满平面。

57.2 解题思路

只有两种本质不同的铺满平面的情况：使用正四边形铺满平面（棋盘覆盖），或使用正六边形铺满平面（蜂巢覆盖）。一个多边形当且仅当满足以下两个条件中至少一个时可以铺满平面：

棋盘覆盖 在多边形边界上顺次存在四个点 A, B, C, D （不一定要是多边形的顶点），使得 A 到 B 的边界与 D 到 C 的边界重合， B 到 C 的边界与 A 到 D 的边界重合。这表明这个多边形可以用棋盘覆盖的方式铺满平面。

蜂巢覆盖 在多边形边界上顺次存在六个点 A, B, C, D, E, F （不一定要是多边形的顶点），使得 A 到 B 的边界与 E 到 D 的边界重合， B 到 C 的边界与 F 到 E 的边界重合， C 到 D 的边界与 A 到 F 的边界重合。这表明这个多边形可以用蜂巢覆盖的方式铺满平面。

因此，只需直接枚举点即可完成问题。但原数据规模较大（周长未限制），需要进行一些优化。首先，根据上面的描述，枚举割点将多边形割为正好两个。再使用类似搜索剪枝的方式优化剩下点的枚举即可解决问题。

由于原题未限制周长，需要记录重复字符个数，优化判断可行性。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

57.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2005, Problem G

58 Zones

58.1 试题大意

给定 n 个服务塔及服务人数，及给定 m 个服务塔集合的共同服务人数。求保留 r 个后，最大服务人数。

58.2 解题思路

由于本题的 n 、 m 均小，可以直接枚举选取的塔，累计服务人数。如果有公共部分，例如一个服务塔集合包含了 c 个选定的服务塔，这个集合服务了 p 个人，则结果需要减去 $p(c-1)$ 。

关于枚举选取的塔，选中 r 个可以用下面代码来判断。

```
int bitcount(uint32_t i)
{
    i = i - ((i >> 1) & 0x55555555);
    i = (i & 0x33333333) + ((i >> 2) & 0x33333333);
    return (((i + (i >> 4)) & 0x0F0F0F0F) * 0x01010101) >> 24;
}
```

至此，此题完成。时间复杂度 $O(\binom{n}{r}(n+m))$ ，空间复杂度 $O(n+m)$ 。

58.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2005, Problem J

59 Workshops

59.1 试题大意

给定 w 个讨论会时间与参加人数，及 r 个房间租用时间与容纳人数。要使不能分配到房间的讨论会最少，在这条件下使不能分配的人数最少。求这两个值。

59.2 解题思路

此题的直观想法便是贪心策略。若不存在人数这一条件，就是一道典型的贪心题，容易证明且容易完成。但加上人数这一条件并不使本题失去贪心性质。

可以采用这样的贪心策略：将房间按时间由短至长排序，在处理第 i 个房间的容纳会议时，选择能够容纳且人数最多的，这个策略必为最优。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(wr)$ ，空间复杂度 $O(w + r)$ 。

59.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2005, Problem I

60 Suspense!

60.1 试题大意

给定两栋楼的宠物情况，求一个吊桥使得一侧的猫咬不到另一侧的鸟。⁶

60.2 解题思路

枚举吊桥路基高度，因为观察到周期性只有 $O(\max(n, m))$ 个需要枚举的值。然后剩下的问题就是丧心病狂地求积分了。原来的题目还可以用计算机，通过很小的差值模拟求积分，这题来了个 100000 组测试数据，就只能数学解了。

可以求得 $L = \int_0^d \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^d \sqrt{1 + 4A^2(t - B)^2} dt$ ，其中抛物线为 $y = A(t - B)^2 + C$ 。然后继续算得到 $L = \int_0^B \sqrt{1 + 4A^2(t - B)^2} dt + \int_0^{d-B} \sqrt{1 + 4A^2(t - B)^2} dt$ 。接着 $\int \sqrt{ax^2 + c} dx = \frac{x}{2} \sqrt{ax^2 + c} + \frac{c}{2\sqrt{a}} \ln(x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + c})$

经过这些可怕的计算之后，剩下的事情就是优化输入了。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(\max(n, m))$ ，空间复杂度 $O(n + m)$ 。

60.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2004, Problem I

⁶QAQ 我大喵星人哪有那么凶残啊，明明这道题 100000 组测试数据，没优化的读入都要 900ms，时限还是 1s 比较凶残好不好！

61 Navigation

61.1 试题大意

(用题目提供的一个比较奇怪的方式) 给定 n 个圆, 求是否存在唯一一个点在所有圆上, 输出这个点与给定点的角度。

61.2 解题思路

认真阅读题目就可以求得这 n 个圆的圆心与半径。

为求这一唯一的点, 需找出两个互不相同的圆。若不存在圆互不相同, 则必然存在无穷多组解。这两个圆若不存在交点, 则无解。

否则可以对这两个圆的每个交点, 判断是否在所有圆上, 交点数不超过 2。若有效交点为 0, 题目无解; 若有效交点为 1, 题目有唯一解, 输出角度; 否则有无穷多组解。

需要注意一点, 本题浮点计算中 $\epsilon(\text{EPS})$ 必须为题目给定的 0.1。

至此, 此题完成。时间复杂度 $O(nT)$, 空间复杂度 $O(n)$ 。

61.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2004, Problem G

62 Intersecting Dates

62.1 试题大意

给定一组以区间格式输入日期集合 A ，与另一组日期集合 B ，以美国日期格式输出 $B - A$ 的结果，连续的日期区间需要合并输出。

62.2 解题思路

假设此题的输入为整数格式，则为一道极为简单的题目，只需排序后合并赋值，用数组记录每个数是否属于 B 且不属于 A ，最后合并输出即可。

将日期转换为数值也是很容易的，以 1700 年 01 月 01 日为数值 0，则每个日期的对应数值为在这之前的各年份的天数，加上当年此日之前的各月份的天数，加上当月此日之前的天数。由于此题的数据规模较小，注意闰年的判断，直接迭代叠加即可完成。

同理，将数值转换为日期只需从 1700 年开始，不断减去当年天数，直到不足以相减。对于月进行同样的操作。此时的数值加一作为日期值，即可得到日期格式的结果。

本解法时间复杂度为输入区间数的排序复杂度，加上 17000101 到 21001231 间的日期数。由于本题数据规模极小，不需要更多优化。

至此，此题完成。时间复杂度 $O((x + r)T)$ ，空间复杂度 $O(x + r)$ 。

62.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2004, Problem E

63 Tree-Lined Streets

63.1 试题大意

给定 n 条线段，要求其上画点，要求两两交点 25m 内不得存在点，且一条线段上点距不小于 50m。求最多画点数。

63.2 解题思路

这道题还算一道正常的几何题，可惜笔者手残，把坐标设为整数类型，又手残把它当成向量来用，更手残的是我这个向量竟然用来保存线段交点的相对位置。于是愣是提交了十次才通过，中途还找了个标准程序用来查错。

题目给了若干条件用于简化问题，比如端点不共，三线段不共点，并给出了推荐 ϵ 值用于浮点计算。因而只要求出每条线段与其他线段的交点个数，并将这个线段割成若干段，除首末段外其余不允许点与边缘小于 25m。直接进行计算即可。

为了简化代码，根据上面描述，可以在首末段边缘加上 25m，从而使问题一致化为：所有段不允许点与边缘小于 25m。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

63.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2004, Problem H

64 A Spy in the Metro

64.1 试题大意

给定一条地铁线与多路， n 个站到达的时间，求在给定时间 t 到达目的地 n 的最短等候时间，允许来回坐地铁。

64.2 解题思路

根据给定的信息，由于换乘不花费时间，可以将问题简化为每坐一站都下车决定下一决策。可以很轻松地预处理出每个时间，在某站是否能够往前或往后乘坐列车及花费时间的信息。

根据这些信息，最短等候时间 f_{ij} 代表在时间 i 到达 j 站时的状况。这个状态可以转移到：

等待 在本站等候，时间加一，站点不变。等候时间值加一。

返回 若在此状态，能够往后乘坐列车，则时间加乘坐时间，站点减一。等候时间不变。

前进 若在此状态，能够往前乘坐列车，则时间加乘坐时间，站点加一。等候时间不变。

状态转移间不存在环，可以直接进行动态规划，转移时间为 $O(1)$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(nt)$ ，空间复杂度 $O(nt)$ 。

64.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2003, Problem H

65 Toll

65.1 试题大意

给定一张 $p \leq 26 \times 2$ 的无向图。有两种点，一种进入损失为 1，另一种进入损失为关于当前值 v 的 $\lceil \frac{v}{20} \rceil$ 。给定要求到达目的点时的值，求给定起始点的最小值。

65.2 解题思路

对于枚举的下一点 t ，以及已知的其要求的最小值，容易求得进入其前的所需值。将这个值作为入边的权值，使用类似 SPFA 的优先搜索方法，可以获得起点的所需值。

由于本题 $p \leq 26 \times 2$ 较小，可以考虑直接使用动态规划转移，每次记录是否更新，若更新则再次转移，否则可以证明即为答案。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(kp^2)$ ，空间复杂度 $O(p^2)$ 。

65.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2003, Problem J

66 The Solar System

66.1 试题大意

给定一个行星的描述（就是说行星轨道的半长轴长度，半短轴长度，和它的环绕周期）以及第二个行星的描述（它的长轴和短轴），求第二个星球在经过一个指定的时间后到达的位置。

66.2 解题思路

首先由第二个行星的描述计算出这个椭圆的基本信息，之后通过第一个行星的描述可以计算出第二个行星的运行周期 $T = \sqrt{\frac{t_1^2 a_2^3}{a_1^3}}$ 。

通过运行周期，根据时间 t 可以计算出极角面积 $S = \frac{ts}{T} \bmod s$ ，其中 s 为椭圆面积， $a \bmod b$ 代表实数 $0 \leq a - kb < b$ 。

最后二分极角，计算划过的面积。为保证精度进行 100 左右次二分即可。对于求得的极角 θ ，直接计算可以得到坐标 $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(pT)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

66.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2003, Problem I

67 Combining Images

67.1 试题大意

二进制串表示的四分图，10 表示图内容为 0，11 表示图内容为 1，而 0 表示下面连续四个二进制串，分别代表四个子四分图。给定两个十六进制四分图，求它们的并的四分图十六进制表示。

67.2 解题思路

首先需要把十六进制串转化为二进制串，并删除至第一次出现的 1 后。在进行这些处理之后，就可以直接递归地建立四分图，有三种节点，分别为零节点、一节点与分叉节点。

求并也只需要递归地并即可。可以将特殊四分图节点的四个子四分图设为自己，直接递归，以简化代码复杂度。当两个四分图均递归至特殊节点时，就可以返回结果。需要注意的，若合并后四分图节点均为一个类型，则返回的四分图需要合并为一个特殊四分图节点。

对于答案的输出，用与输入类似的方法递归即可求出。需要注意的是编码最前端需要添加前缀 1，并补零后转化为十六进制。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(l)$ ，空间复杂度 $O(l)$ 。

67.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2003, Problem F

68 Light Bulbs

68.1 试题大意

一个按钮会改变对应灯泡和相邻的状态，给定初始状态与目标状态，求最少次的方案。

68.2 解题思路

首先给定的是十进制表示，需要将其转化为二进制，并且补零将其变为同样长度。

之后只需枚举第一个按钮是否按下，然后由前一个灯在改变后的情况，就可以确定这个按钮是否按下：即如果暗着，后面的按钮并不能改变其状态，当前按钮必须按下。最后进行判断方案是否有效。

保存枚举的两种情况，输出最少次的方案，同样情况下输出最高位为 0 的。或两个均不能完成，即为无解。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

68.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2003, Problem B

69 Silly Sort

69.1 试题大意

给定 n 个数的序列，交换两个数的代价为其和，求排序为升序的最小代价。

69.2 解题思路

容易证明，最小代价必然类似于最少交换次数的环。

将排序交换变成环状，对于每个环都只有两种交换排列方案：利用里面最小值完成交换；或是将全局最小值交换进环内，完成交换。由于每个环都是独立的，可以分别计算其最小值，所以直接枚举计算即可。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n \lg n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

69.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2002, Problem H

70 Balloons in a Box

70.1 试题大意

给定一个三维盒子及 n 个气球圆心点，选中一些放置圆球，求没被占据的最小体积。

70.2 解题思路

由于题目给定的 $n \leq 6$ 极小，可以直接枚举所有的放置方案。每次选中一个点膨胀气球，直至不能膨胀。亦即使用与已有气球圆心距减半径的最小值，或是与墙的距离最小值作为新的半径。枚举选中的序列顺序即可，直接通过搜索解决。

关于每次膨胀至不能膨胀的原因，体积为 r 的三次方程，增大一个的 r 导致为其他气球的线性减小。简单地理解，就是 $\frac{d}{dx}(x^3 + (a-x)^3) = 6ax - 3a^2$ ，由导数可以知道，体积是两者差距越大越优的。

需要注意的，在盒子外的点不能选择。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n! \cdot n^2)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

70.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2002, Problem A

71 Island Hopping

71.1 试题大意

给定平面上 n 个点，对于将其连接成联通图的最短方案，令一条边连线时间代价为距离，同时连所有边。求每个点与 1 节点联通的时间平均值。

71.2 解题思路

简单的最小生成树算法即可完成此题，产生树后计算每个点与 1 节点路径上的最长边即可。图的边权为两点欧式距离。

为了娱(ying)乐(cou)大(zi)众(shu)，吐槽一下清橙上的格式化。为什么格式化要连样例输入输出一块儿格式化啊摔，于是本人看了一下未格式化的，有两个空格嗯，于是就丧(xi)心(wen)病(le)狂(jian)地错误答案了。然后改成一个空格就过了，显然本人想多了。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

71.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2002, Problem E

72 Crossing the Desert

72.1 试题大意

给定二维平面上 n 个绿洲，每个绿洲可以存放食物与取得水，起点可以获得食物与水。限制携带单位数 t ，求到达给定绿洲的最少食物消耗。每走 x 的路径将消耗 x 的食物与水，且不是离散的。

72.2 解题思路

此题目有一处需要注意，限制携带单位数是食物与水的和，而并非分别。

以 f_i 记录从点 i 到达终点的最少食物开销，换句话为在此点包含存放的食物在内，需要拥有的食物量。终点 $f_n = 0$ 。

关于状态的转移，从点 i 到点 j ，若距离并不允许携带仅仅足够运动的水与食物，则不能转移；若 $f_j + 2d \leq t$ ，其中 d 为 i 至 j 的消耗（ $2d$ 是由于需要同时携带水），则意味着可以直接携带足够的物品到达 j ；否则，若容量足够到 j ，留下些食物，再返回，亦即 $3d \leq t$ ，可以多次往返以满足 f_j 的要求。

对于这类动态规划题目，可以使用类似 Dijkstra 的方法进行计算。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

72.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2002, Problem C

73 Airport Configuration

73.1 试题大意

客流指数定义为两门距离乘流量之和。对于每一机场布局，计算客流指数。

73.2 解题思路

根据题目要求直接计算，排序输出。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

73.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2001, Problem A

74 Say Cheese

74.1 试题大意

给定空间中 n 个球，求从给定起点到给定终点的最短路径，其中路径不包含球内运动。

74.2 解题思路

由几何知识知道，在球与球之间，不在球内的运动一定为直线，且过两球球心。亦即问题为求一个在球与球之间行走的序列方案，且起点与终点为半径为 0 的球。这是一个典型的最短路问题，由于 $n \leq 100$ ，直接使用 Floyd 是可以接受的。

关于两点距离的求法，设两球半径为 r_1 与 r_2 ，球心距离为 d 。需要注意图论距离不能为负值，因而距离为 $\max\{0, d - r_1 - r_2\}$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

74.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2001, Problem B

75 A Major Problem

75.1 试题大意

给定交换规则，求在不同音阶中交换音符的结果。

75.2 解题思路

这是一道阅读理解题，在理解题意，获得交换表后，即可轻松完成问题。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n)$ ，空间复杂度 $O(1)$ 。

75.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2001, Problem F

76 Professor Monotonic's Network

76.1 试题大意

给定一个排序网络，求是否有效，与其运行时间。

76.2 解题思路

解决此题需要引入一个定理：0-1 原理（Zero-one Principle），这一原理在《计算机程序设计艺术》的第三卷：排序与选择中，被高德纳（Donald Knuth）提出并论证。

这一原理的内容为：如果一个排序网络能够正确地对任何 0-1 序列排序，那么它就能对任意数组成的任意序列正确排序。

证明如下：令 $f(x)$ 是一单调函数，此处令 $f(x)$ 为 1 当 $x \geq a$ ，否则为 0。

易证如果一给定比较网络能够将输入序列 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 转化为输出序列 $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ ，那么这个比较网络也能够将输入序列 $\langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \rangle$ 转化为输出序列 $\langle f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n) \rangle$ 。

假定网络能对所有 0-1 序列排序，但存在一个由任意数组成的序列，网络不能对该序列正确地排序。即其中两个元素 a 和 b 满足 $a < b$ ，但在输出序列中 a 被排在 b 之前。因为当 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 作为输入序列时，其输出序列中 a 位于 b 之前，所以当 $\langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \rangle$ 作为输入序列时，其输出序列中 $f(a)$ 位于 $f(b)$ 之前。但由于 $f(a) = 1$ ， $f(b) = 0$ ，与假设的网络能对所有 0-1 序列排序矛盾。

因此，第一问只需枚举所有 0-1 序列并判断即可。

对于第二问，直接进行递推即可得到。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(2^n k + k^2)$ ，空间复杂度 $O(k^2)$ 。

76.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2001, Problem H

77 Bee Breeding

77.1 试题大意

按照给定规则编号六边形格点，求给定编号格点间距离。

77.2 解题思路

根据规则预处理出所有的格点坐标，对于每个请求计算六边形格点距离。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(a)$ ，空间复杂度 $O(a)$ 。

77.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 1999, Problem A

78 Lead or Gold

78.1 试题大意

给定 n 种由 A、B、C 物质，以给定比例混合而成的源材料。求解是否存在方案，将其混合为给定比例的最终产物。

78.2 解题思路

此题的第一想法为列出三项 n 元方程组，以矩阵的秩求是否存在解。但这个方法并不能求解此题，因为试题隐含着只接受非负解这一条件，即各原材料的使用量不为负。问题为求解是否存在非负解，并不能通过矩阵方法求得。由于存在非负这一约束，可以很快地想到用线性规划方法完成此题：

$$\text{maximize } \sum_{i=1}^n (a_i + b_i + c_i)x_i \quad (19)$$

$$\text{s.t.} \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i \leq B$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \leq C$$

$$x_i \geq 0$$

其中， x_i 为第 i 种原材料在最终产物中的比例。 A 为 A 物质的所需量， a_i 为第 i 种原材料中 A 的比例， $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A$ 意味着 A 的最终量不会多于所需量，依此类推。而 $x_i \geq 0$ 则限制了最终解均为非负数。在这些限制条件下，若 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i + c_i)x_i$ 的最大值能够达到 $A + B + C$ ，则意味着存在非负解符合题意。

关于此线性规划标准形式的解，可以使用单纯形法求得。

至此，此题完成。时间复杂度由于单纯形的特性并不稳定，空间复杂度 $O(n)$ 。

78.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 1998, Problem C

79 Internet Bandwidth

79.1 试题大意

给定一张无向图，求其两点间最大流。

79.2 解题思路

直接用 SAP 计算最大流即可。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^2m)$ ，空间复杂度 $O(n + m)$ 。

79.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2000, Problem E

80 Page Hopping

80.1 试题大意

给定一张有向图，求点两两之间最短路径的平均值。

80.2 解题思路

记 n 为使用了的编号数， σ 为进行 Floyd 算法计算后，两两间的最短路径之和。

则答案为 $\frac{\sigma}{n(n-1)}$ 。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n^3)$ ，空间复杂度 $O(n^2)$ 。

80.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 2000, Problem F

81 Trade on Verweggistan

81.1 试题大意

给定 w 个栈，每个栈 b 个元素。已知各元素利润，求最大获利及获得最大获利取出的元素个数。

81.2 解题思路

解决这道问题首先要观察到，各个栈是互不关联的，因此可以分开计算。

对于每个栈可以通过枚举取几个元素来获得最大获利的值，也可以因此知道可能取几个元素以获得最大获利。

最后只需通过背包，或是朴素的搜索，便可以获得所有可能的取出的元素个数。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(wb)$ ，空间复杂度 $O(wb)$ 。

81.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 1999, Problem E

82 Page Selection by Keyword Matching

82.1 试题大意

添加有若干个关键词的网页，或查询相关性最高的五个网页。算法给定。

82.2 解题思路

读入处理比较麻烦。用 `std::map` 储维权值，然后根据算法计算即可。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(p^2nl \lg n)$ ，空间复杂度 $O(pnl)$ 。

82.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 1998, Problem D

83 Petri Net Simulation

83.1 试题大意

给定令牌变迁规则，求在引发给定次数的变迁后是否仍然能够变迁。

83.2 解题思路

根据题意直接模拟令牌变迁即可。可用队列优化。

因为这几题题解都太短了，所以打算随便找点东西凑凑字数。做这道题目的时候因为太久没用这个方法，忘记了逻辑与的短路性质，遇到了一个较难调试发现的问题，感觉稍微有些被坑。例如：`able = able && (cnt[i] = cnt[i] - 1);` 这样一段代码，在 `able` 为 `false` 的时候 `cnt[i]` 是会被递减的。

至于为什么后面这几篇题解都太短，是因为前面我都以为最近年份的题目资料比较多，实在想不出来的时候也有解题报告可以参考，就没发现前面年份的题目都比较简单。所以这些短的题解就都挤在这里了。

接着突然发现，这是最后一道题目了。这几个月来做这些作业，感觉特别多，突然做完了反而有点若有所失的感觉。不过也好，接下去的几个月就可以去完成之前说好还没有做的事情了。比如写几个小项目玩玩什么的。呃，不说了，该结束这份报告了。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(FTP)$ ，空间复杂度 $O(T + P)$ 。

83.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals, 1998, Problem E

99 FIN⁷

99.1 试题大意

完成 IOI2014 中国国家集训队第一次作业的 n 道题，并安全退役。

99.2 解题思路

本题是一道繁琐题（笑，完成方式如全文档所述。

至此，此题完成。时间复杂度 $O(n)$ ，空间复杂度 $O(n)$ 。

99.3 试题来源

ACM/ICPC World Finals,

```
pdflatex: fatal signal: Segmentation fault
pdflatex: file: getinfo.c:209  function: printYear()
pdflatex: 209      int problemYear = year[sectionid];
pdflatex: debug: sectionid = 99, year = {0, 2013, 2013, ...}
pdflatex died (signal SIGSEGV, exit 255)
```

⁷即 TCP 协议的 finish 消息，标示结束。

⁷错误信息当然是逗你的啦，要不后面的 GFDL 怎么活～

A GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

<<http://fsf.org/>>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a small enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any small number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. RELICENSING

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with ... Texts.” line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

B 相关信息

本文档内所有题目的相关代码，均可由 db.tt/TqGee3wS 获得。

此地址仅保证有效至 2014 年 7 月 1 日。在此日期之后，本人有权将其从 Dropbox 中移除。在此之后，若有需要者，可以直接联系本人 i@dotkrnl.com，或通过 [whois dotkrnl.com](http://whois.dotkrnl.com) 得到本人的最新个人信息。

程序代码均以 GPLv2 协议授权。由于 GNU General Public License 协议并不与 GNU Free Documentation License 兼容，现补充 GFDLv1.3 授权。

若需要将本文档用于 GNU General Public License 协议以外的用途，请与本人联系。

备用页