

Easy Airthmetic Geometric Progression 解题报告

长郡中学 陈胤伯

1 试题来源

<http://www.codechef.com/IOPC2014/problems/IOPC14E>

2 试题大意

一棵 n 个点的树，每个点有个权值 p_i （初始时为 0）。

先执行 U 次修改操作，再进行 Q 次询问操作。

每次修改操作，先选中一条从 S_i 到 T_i 的链，然后给定一个参数 X 。设链上的点依次为 $v_1 \sim v_k$ ，则给 p_{v_i} 加上 iXR^i 。其中 R 是一个一开始给定的参数，即对于每个询问 X 可能不同但 R 相同。

每次询问操作，是询问一条从 S_i 到 T_i 的链上的权值和模 100711433。

$1 \leq n, U, Q \leq 10^5$, $1 \leq X, R \leq 10^9$ 。

3 算法介绍

3.1 分成两步

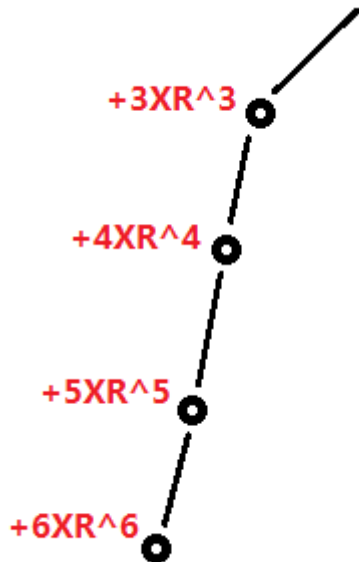
由于所有询问在修改之后，如果我们能求出所有修改后每个点的权值最终成了啥，剩下的就是一个经典的链上求和问题了。

对于树上链求和问题，我们可以记录每个点到根的权值和 S_i ，对于链询问 u, v ， $S_u + S_v - 2S_{lca(u,v)} + p_{lca(u,v)}$ 即为答案， $lca(u, v)$ 可以通过倍增预处理后每次 $O(\log n)$ 求得（经典问题不再展开描述）。

那么我们下面来考虑怎么搞出在所有修改后每个点的权值。

3.2 考虑一次修改

首先，对于一次修改，我们以两端点的 lca 为界，把修改链拆成两段祖先链。每一条形如 $+lXR^l, +(l+1)XR^{l+1}, \dots, +rXR^r$ ，一边是深到浅的，一边是从浅到深的。我们先讨论从浅到深的。



由于加的值缺乏统一性，我们很难直接维护。

但注意到一个点加的值和深度有一定关联，我们考虑维护这样两个量 A_i, B_i ，对于点 i 定义 $p_i = A_i * (deep_i * R^{deep_i}) + B_i * (R^{deep_i})$ ，我们把对链上 p 的修改，转化成对链上 A, B 的修改。

设形如上图的修改的最上面点的权值 $p_u = lXR^l$ ，我们转化为 $A_u = XR^{l-d}$ ， $B_u = (l-d)XR^{l-d}$ ，其中 $d = deep_u$ ，可以发现这样转化后修改是等价的。

进一步地，我们发现，链上每个点的 A 都加上了同一个值， B 也都加上了同一个值。

这样，一次奇怪的对 p 的链修改转化成了对 A, B 的链上加同一个数。

3.3 快速进行树上链加值

设 $A'_u = A_u - \sum_{v \in son(u)} A_v$ ，那么注意到对 A 的链上加 k 只会影响修改链最顶端和最低端的 A' ，这样可以做到 $O(1)$ 的对 A' 的修改。

全部修改完后，再通过 A' 自底而上递推出 A 即可。

上面讨论的是如何处理从浅到深的情况，从深到浅同理，这里不加赘述。

求出最终的 A, B 也就求出了最终的 p 。然后就可以处理询问了。

时间复杂度 $O(n \log n + (U + Q) \log n)$ 。