拉格朗日乘数及对偶的应用

施开成

宁波市镇海中学

2024 年 1 月 14 日

1 拉格朗日乘数
- 松弛变量
- 拉格朗日乘数定理
- 拉格朗日乘数法

2 对偶

3 纳什均衡

4 Thanks

考虑一类具有等式约束的最优化问题：

$$
\max f(\boldsymbol{x})
$$
$$
s.t. \quad \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \ldots \\ g_m(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}
$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元实向量，$f, g_1, \cdots, g_m$ 均为 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的连续可微函数。

对于这类最优化问题，我们可以通过在等式约束前加入松弛变量，将原问题变为如下形式：

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\lambda_i} f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

其中系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ 被称作拉格朗日乘数，函数 $F(\mathbf{x}, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$ 被称为拉格朗日函数。

对于这类最优化问题，我们可以通过在等式约束前加入松弛变量，将原问题变为如下形式：

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\lambda_i} f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$$

其中系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ 被称作拉格朗日乘数，函数 $F(\mathbf{x}, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$ 被称为拉格朗日函数。

此方法可以将等式约束并入要最大化的式子里。

1. 拉格朗日乘数
   - 松弛变量
   - 拉格朗日乘数定理
   - 拉格朗日乘数法
2. 对偶
3. 纳什均衡
4. Thanks

Theorem 2.1 (拉格朗日乘数定理)

假设 $f, g_1, \cdots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均为连续可微函数。则对于 f 在 $\forall i \in [1, m] \cap \mathbb{N}, g_i(\mathbf{x}_\star) = 0$ 时的任意极值点 $\mathbf{x}_\star$，都有 $\nabla f(\mathbf{x}_\star), \nabla g_1(\mathbf{x}_\star), \cdots, \nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$ 线性相关。

Theorem 2.1 (拉格朗日乘数定理)

假设 $f, g_1, \cdots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均为连续可微函数。则对于 f 在 $\forall i \in [1, m] \cap \mathbb{N}, g_i(\mathbf{x}_\star) = 0$ 时的任意极值点 $\mathbf{x}_\star$，都有 $\nabla f(\mathbf{x}_\star), \nabla g_1(\mathbf{x}_\star), \cdots, \nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$ 线性相关。

由于时间有限，且该定理的证明需要用到隐函数定理等微积分内容，故此处不作展示。

Corollary 2.1

对于 f 在 $g_i(x_1, \cdots, x_n) = 0\ (1 \leq i \leq m)$ 时的任意一组极值点 $\mathbf{x}_\star$，当 $\nabla g_1(\mathbf{x}_\star), \cdots, \nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$ 线性无关时，存在唯一一组系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 使得 $\nabla f(\mathbf{x}_\star) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_\star) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$。

Corollary 2.1

对于 f 在 $g_i(x_1,\cdots,x_n)=0\ (1\leq i\leq m)$ 时的任意一组极值点 $\mathbf{x}_\star$，当 $\nabla g_1(\mathbf{x}_\star),\cdots,\nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$ 线性无关时，存在唯一一组系数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 使得 $\nabla f(\mathbf{x}_\star)=\lambda_1\nabla g_1(\mathbf{x}_\star)+\cdots+\lambda_m\nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$。

这一推论是拉格朗日乘数定理的等价形式，其结论常常被写为拉格朗日函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,\cdots,x_n)+\lambda_1 g_1(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+\lambda_m g_m(x_1,\cdots,x_n)$ **关于所有** x_i **和** λ_i **的偏导数均为** 0。

注意条件中的 $\nabla g_1(\mathbf{x}_\star), \cdots, \nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$ 线性无关不可忽略。

注意条件中的 $\nabla g_1(\mathbf{x}_\star), \cdots, \nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$ 线性无关不可忽略。

如果忽略条件，考虑函数 $f(x,y) = x + y, g(x,y) = x^2 + y^2$，求 $f(x,y)$ 在 $g(x,y) = 0$ 时的最大值。

此时拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2)$ 不存在任何临界点，然而 $g(x,y) = 0$ 时 $f(x,y)$ 的最大值应为 $f(0,0) = 0$。这是因为在 $x = 0, y = 0$ 时有 $\nabla g(x,y) = \mathbf{0}$，不满足 ∇g 线性无关的条件。

注意条件中的 $\nabla g_1(\mathbf{x}_\star), \cdots, \nabla g_m(\mathbf{x}_\star)$ 线性无关不可忽略。

如果忽略条件，考虑函数 $f(x,y) = x + y, g(x,y) = x^2 + y^2$，求 $f(x,y)$ 在 $g(x,y) = 0$ 时的最大值。

此时拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2)$ 不存在任何临界点，然而 $g(x,y) = 0$ 时 $f(x,y)$ 的最大值应为 $f(0,0) = 0$。这是因为在 $x = 0, y = 0$ 时有 $\nabla g(x,y) = \mathbf{0}$，不满足 ∇g 线性无关的条件。

此条件在相关题目中一般都是满足的，放在此处仅为了保证定理的严谨性。

1 拉格朗日乘数
- 松弛变量
- 拉格朗日乘数定理
- 拉格朗日乘数法

2 对偶

3 纳什均衡

4 Thanks

对于问题

$$\max f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t.\quad g_1(\boldsymbol{x})=0, g_2(\boldsymbol{x})=0,\cdots,g_m(\boldsymbol{x})=0\ (m<n)$$

在答案存在的情况下，我们可以使用拉格朗日乘数法求解这类问题，具体过程见下一页。

定义拉格朗日函数 $F(\boldsymbol{x},\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(\boldsymbol{x})+\lambda_1 g_1(\boldsymbol{x})+\cdots+\lambda_m g_m(\boldsymbol{x})$。

列出 $n+m$ 个方程 $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=0$ 和 $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}(\boldsymbol{x})=0$，其中 $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}(\boldsymbol{x})=0$ 等价于 $g_i(\boldsymbol{x})=0$。取方程的所有解的 $\boldsymbol{x}$ 和使得 $\nabla g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\nabla g_m(\boldsymbol{x})$ 线性相关且满足 $g_i(\boldsymbol{x})=0$ 的所有 $\boldsymbol{x}$，分别代入 $f(\boldsymbol{x})$ 计算并取最大值，该值即为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $g_i(\boldsymbol{x})=0$ 约束下的最大值。

[NOI2012] 骑行川藏

给定实数 s_i, k_i, v'_i, E，最小化 $f(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v_i}$。其中 $v_1, \cdots, v_n$ 均为正实数而且需要满足 $\sum_{i=1}^{n} k_i(v_i - v'_i)^2 s_i = E$。

$1 \le n \le 10000, 0 \le E \le 10^8, s_i \in [0, 10^5], k_i \in (0, 15], v'_i \in (-100, 100)$。

稍作分析可以发现，当 $f(v_1,\cdots,v_n)$ 在题目的条件下取到最小值时，必然有 $v_i \geq v'_i$。

因此我们定义 $g(v_1,\cdots,v_n)=\sum_{i=1}^{n} k_i(v_i-v'_i)^2 s_i - E$，$\nabla g$ 线性相关当且仅当所有 $v_i = v'_i$ 成立，此时特判处理即可。

稍作分析可以发现，当 $f(v_1,\cdots,v_n)$ 在题目的条件下取到最小值时，必然有 $v_i \ge v_i'$。

因此我们定义 $g(v_1,\cdots,v_n)=\sum_{i=1}^{n} k_i(v_i-v_i')^2 s_i - E$，$\nabla g$ 线性相关当且仅当所有 $v_i=v_i'$ 成立，此时特判处理即可。

则可以使用拉格朗日乘数法求解 $F(v_1,\cdots,v_n,\lambda)=f(v_1,\cdots,v_n)-\lambda g(v_1,\cdots,v_n)$ 的临界点。解偏导方程会求出全部极值点，但由于题目要求 v_i 为正实数，所以我们只需要考虑满足 $0<v_i$ 的极值点。

由 $\frac{\partial F}{\partial v_i} = -\frac{s_i}{v_i^2} + 2\lambda s_i k_i(v_i - v_i'), \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} k_i(v_i - v_i')^2 s_i - E$ 可得

$$2\lambda s_i k_i(v_i - v_i') = \frac{s_i}{v_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(v_i - v_i')^2 s_i = E$$

$$2\lambda s_i k_i(v_i - v_i') = \frac{s_i}{v_i^2} \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i(v_i - v_i')^2 s_i = E$$

当 λ 固定时，考虑左式等式两端的函数图像。当 $\lambda > 0$ 时，等式两端的函数在 $v_i > 0$ 时有且仅有一个交点，且必然有 $v_i \geq v_i'$ 成立；当 $\lambda \leq 0$ 时，等式两端的函数在 $v_i \geq v_i'$ 时不存在交点。

$$2\lambda s_i k_i (v_i - v_i') = \frac{s_i}{v_i^2} \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i (v_i - v_i')^2 s_i = E$$

当 λ 固定时，考虑左式等式两端的函数图像。当 $\lambda > 0$ 时，等式两端的函数在 $v_i > 0$ 时有且仅有一个交点，且必然有 $v_i \geq v_i'$ 成立；当 $\lambda \leq 0$ 时，等式两端的函数在 $v_i \geq v_i'$ 时不存在交点。

故必然有 $\lambda > 0, v_i \geq v_i'$，并且由函数图像可知 λ 递增时 v_i 会递减，此时右式的等式左侧也会递减。

因此可以通过二分 λ 的方式求解以上方程组。

1 拉格朗日乘数

2 对偶
- 拉格朗日对偶
- 性质
- 线性规划对偶

3 纳什均衡

4 Thanks

拉格朗日对偶

对于 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ ，考虑最优化问题

$$
\begin{aligned}
&\max f(\boldsymbol{x})\\
s.t.\quad & g(\boldsymbol{x})\geq \mathbf{0}\\
& h(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

对于 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ ，考虑最优化问题

$$\begin{aligned} & \max f(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad & g(\mathbf{x})\geq \mathbf{0} \\ & h(\mathbf{x})=\mathbf{0} \end{aligned}$$

对于不等式约束，也可以加入松弛变量，将问题变为

$$\max_{\mathbf{x}}\ \min_{\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{\nu}} f(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}g(\mathbf{x})+\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}h(\mathbf{x})$$

记拉格朗日函数 $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})=f(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}g(\mathbf{x})+\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}h(\mathbf{x})$。

$$\max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\nu}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$$

对于上式，其拉格朗日对偶问题即为交换 max 和 min 的顺序后的问题，即

$$\min_{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\nu}} \max_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$$

原函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的拉格朗日对偶函数即为内层的式子

$$L(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \max_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$$

1 拉格朗日乘数

2 对偶
- 拉格朗日对偶
- 性质
- 线性规划对偶

3 纳什均衡

4 Thanks

弱对偶性

Theorem 2.1 (min-max 不等式)

对于 $F: D_x \times D_y \to \mathbb{R}$，有 $\max\limits_{y\in D_y}\min\limits_{x\in D_x} F(x,y) \le \min\limits_{x\in D_x}\max\limits_{y\in D_y} F(x,y)$。

弱对偶性

Theorem 2.1 (min-max 不等式)

对于 $F: D_x \times D_y \to \mathbb{R}$，有 $\max\limits_{y\in D_y}\min\limits_{x\in D_x} F(x,y) \le \min\limits_{x\in D_x}\max\limits_{y\in D_y} F(x,y)$。

Proof

$$\forall i,j: F(i,j) \le F(i,j)$$
$$\forall i,j: \min_x F(x,j) \le F(i,j)$$
$$\forall i: \max_y \min_x F(x,y) \le \max_y F(i,y)$$
$$\max_y \min_x F(x,y) \le \min_x \max_y F(x,y)$$

强对偶性

在一些特殊情况下，交换 $\min$ 和 $\max$ 的顺序不会改变式子的值，这一性质被称为强对偶性。

强对偶性

在一些特殊情况下，交换 min 和 max 的顺序不会改变式子的值，这一性质被称为强对偶性。

Definition 1

$\mathbb{R}^n$ 的子集是紧致的当且仅当它是闭集合且有界。

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸集当且仅当 $\forall p, q \in S, \forall \lambda \in [0,1], \lambda p + (1-\lambda) q \in S$。

对于凸集 C，$f : C \to \mathbb{R}$ 是凸函数当且仅当 $\forall p, q \in C, \forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda p + (1-\lambda) q) \leq \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$，$f$ 是凹函数当且仅当 $\forall p, q \in C, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda p + (1-\lambda) q) \geq \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$。

Lemma 2.1

若 $D_x \subseteq \mathbb{R}^n, D_y \subseteq \mathbb{R}^m$ 为紧致凸集，连续函数 $f : D_x \times D_y \to \mathbb{R}$ 关于 x 是凸函数，关于 y 是凹函数，则存在 $x_0 \in D_x, y_0 \in D_y$，满足：

$$\min_{x \in D_x} F(x, y_0) = F(x_0, y_0) = \max_{y \in D_y} F(x_0, y)$$

Lemma 2.1

若 $D_x \subseteq \mathbb{R}^n, D_y \subseteq \mathbb{R}^m$ 为紧致凸集，连续函数 $f: D_x \times D_y \to \mathbb{R}$ 关于 x 是凸函数，关于 y 是凹函数，则存在 $x_0 \in D_x, y_0 \in D_y$，满足：

$$\min_{x \in D_x} F(x, y_0) = F(x_0, y_0) = \max_{y \in D_y} F(x_0, y)$$

由于该引理的证明过于困难，故此处不作展示。

Theorem 2.2 (minimax 定理)

若 $D_x \subseteq \mathbb{R}^n, D_y \subseteq \mathbb{R}^m$ 为紧致凸集，连续函数 $f : D_x \times D_y \to \mathbb{R}$ 关于 x 是凸函数，关于 y 是凹函数，则有：

$$\max_{y \in D_y} \min_{x \in D_x} F(x, y) = \min_{x \in D_x} \max_{y \in D_y} F(x, y)$$

Theorem 2.2 (minimax 定理)

若 $D_x \subseteq \mathbb{R}^n, D_y \subseteq \mathbb{R}^m$ 为紧致凸集，连续函数 $f : D_x \times D_y \to \mathbb{R}$ 关于 x 是凸函数，关于 y 是凹函数，则有：

$$\max_{y \in D_y} \min_{x \in D_x} F(x, y) = \min_{x \in D_x} \max_{y \in D_y} F(x, y)$$

在实际应用中 F 常常是个双线性函数。

Proof

由引理 2.1 可知，存在 $x_0 \in D_x, y_0 \in D_y$ 满足

$$\max_{y \in D_y} F(x_0, y) = F(x_0, y_0) = \min_{x \in D_x} F(x, y_0)$$

则有 $\min\limits_{x \in D_x} \max\limits_{y \in D_y} F(x, y) \leq \max\limits_{y \in D_y} F(x_0, y) = F(x_0, y_0) = \min\limits_{x \in D_x} F(x, y_0)$
$\leq \max\limits_{y \in D_y} \min\limits_{x \in D_x} F(x, y)$。

由弱对偶定理可知 $\max\limits_{y \in D_y} \min\limits_{x \in D_x} F(x, y) \leq \min\limits_{x \in D_x} \max\limits_{y \in D_y} F(x, y)$。

因此有 $\max\limits_{y \in D_y} \min\limits_{x \in D_x} F(x, y) = \min\limits_{x \in D_x} \max\limits_{y \in D_y} F(x, y)$。

1 拉格朗日乘数

2 对偶
- 拉格朗日对偶
- 性质
- 线性规划对偶

3 纳什均衡

4 Thanks

对于线性规划标准型

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ s.t. \quad &\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ &A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

我们可以通过添加拉格朗日乘数的方式来对其进行改写：

$$\max_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}} \min_{\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

对于线性规划标准型

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ s.t. \quad &\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ &A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

我们可以通过添加拉格朗日乘数的方式来对其进行改写:

$$\max_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}} \min_{\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

并得到其对偶形式

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}} \max_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}}\max_{\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})$$

将式子关于 $\boldsymbol{x}$ 进行整理得:

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}}\max_{\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}}\max_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})$$

将式子关于 $\boldsymbol{x}$ 进行整理得:

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}}\max_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

将 $\boldsymbol{x}$ 视为拉格朗日乘数并从式子中取出，即得到线性规划问题的对偶形式:

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

$$s.t.\quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$$

对于一个非标准型线性规划问题，如果我们先将其转为标准型再进行常规的线性规划对偶，不仅步骤繁杂，而且可能会在矩阵中增加大量冗余元素，阻碍对问题形式的观察和判断。

而这种利用拉格朗日乘数进行对偶的方法，既便于记忆和使用，又能在很大程度上保留原问题的简洁形式，使得对偶问题的组合意义更加清晰。

[AtCoder World Tour Finals 2022 Day1] Welcome to Tokyo!

给定 m 对 l_i, r_i，你需要对于每个 $k = 1, 2, \cdots, n$，求出：如果在 $1, 2, \cdots, n$ 中标记 k 个数，最多能有多少个 i 使得 $[l_i, r_i]$ 中存在被标记的数。

$1 \leq n, m \leq 10^6, 1 \leq l_i, r_i \leq n$。

对于一个固定的 k 考虑问题。令 a_i 表示是否标记 i， b_i 表示 $[l_i, r_i]$ 中是否存在被标记的数，则可以转化为求以下线性规划问题的整数解：

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad s.t. \quad a_i \leq 1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = k,\ \ b_i \leq 1,\ \ b_i \leq \sum_{j=l_i}^{r_i} a_j,\ \ 0 \leq a_i, b_i$$

对于一个固定的 k 考虑问题。令 a_i 表示是否标记 i，b_i 表示 $[l_i, r_i]$ 中是否存在被标记的数，则可以转化为求以下线性规划问题的整数解：

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad s.t. \quad a_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = k,\ b_i \le 1,\ b_i \le \sum_{j=l_i}^{r_i} a_j,\ 0 \le a_i, b_i$$

稍作改写得到

$$\max_{0 \le a_i, b_i} \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad s.t. \quad a_i - 1 \le 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i - k = 0,\ b_i - 1 \le 0,\ b_i - \sum_{j=l_i}^{r_i} a_j \le 0$$

对于一个固定的 k 考虑问题。令 a_i 表示是否标记 i，b_i 表示 $[l_i, r_i]$ 中是否存在被标记的数，则可以转化为求以下线性规划问题的整数解：

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad s.t. \quad a_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = k,\ b_i \le 1,\ b_i \le \sum_{j=l_i}^{r_i} a_j,\ 0 \le a_i, b_i$$

稍作改写得到

$$\max_{0 \le a_i, b_i} \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad s.t. \quad a_i - 1 \le 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i - k = 0,\ b_i - 1 \le 0,\ b_i - \sum_{j=l_i}^{r_i} a_j \le 0$$

由于该线性规划问题的矩阵是全幺模矩阵，因此我们忽略整数性的限制。

对限制加入拉格朗日乘数可得 $\max\limits_{0\le a_i,b_i}\ \min\limits_{p_i,q_i,s_i\le 0,\lambda}$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(b_i+q_i(b_i-1)+s_i\left(b_i-\sum_{j=l_i}^{r_i}a_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-1)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-k\right)。$$

对限制加入拉格朗日乘数可得 $\max\limits_{0\le a_i,b_i}\ \min\limits_{p_i,q_i,s_i\le 0,\lambda}$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(b_i+q_i(b_i-1)+s_i\left(b_i-\sum_{j=l_i}^{r_i}a_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-1)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-k\right)。$$

使用 minimax 定理交换 max 和 min 并重新整理得 $\min\limits_{p_i,q_i,s_i\le 0,\lambda}\ \max\limits_{0\le a_i,b_i}$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i+\lambda-\sum_{j\,|\,i\in[l_j,r_j]}s_j\right)a_i+\sum_{i=1}^{m}(1+q_i+s_i)b_i-\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}q_i-\lambda k。$$

将 a_i, b_i 视为拉格朗日乘数后得到

$$\min_{p_i, q_i, s_i \le 0, \lambda} -\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} q_i - \lambda k$$

$$s.t. \quad p_i + \lambda - \sum_{j \mid i \in [l_j, r_j]} s_j \le 0$$

$$1 + q_i + s_i \le 0$$

将 a_i, b_i 视为拉格朗日乘数后得到

$$\begin{aligned} \min_{p_i, q_i, s_i \le 0, \lambda} \quad & -\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} q_i - \lambda k \\ s.t. \quad & p_i + \lambda - \sum_{j \mid i \in [l_j, r_j]} s_j \le 0 \\ & 1 + q_i + s_i \le 0 \end{aligned}$$

此时对偶已经完成，后续可以通过人类智慧去除 p_i, q_i 并思考该问题的组合意义。由于这部分与主题无关，故不作叙述。

1 拉格朗日乘数

2 对偶

3 纳什均衡
- 定义
- 零和博弈

4 Thanks

为简化讨论，我们将一个策略空间有限的完全信息双人静态非合作博弈视为以下模型：

两人各自独立地进行一次行动，第一个人有 n 种可能的行动，第二个人有 m 种可能的行动。如果第一个人选了第 i 种行动，第二个人选了第 j 种行动，则第一个人获得 A_{ij} 的收益，第二个人获得 B_{ij} 的收益。(A, B 是事先给出的 $n \times m$ 的收益矩阵)。

为简化讨论，我们将一个策略空间有限的完全信息双人静态非合作博弈视为以下模型：

两人各自独立地进行一次行动，第一个人有 n 种可能的行动，第二个人有 m 种可能的行动。如果第一个人选了第 i 种行动，第二个人选了第 j 种行动，则第一个人获得 A_{ij} 的收益，第二个人获得 B_{ij} 的收益。(A, B 是事先给出的 $n \times m$ 的收益矩阵)。

下文中提到双人博弈时默认指策略空间有限的完全信息双人静态非合作博弈。

参加博弈的人可以制定混合策略，即在操作前给每一种行动分配一个概率。如果第一个人给第 i 种行动分配了 a_i 的概率，则所有的 a_i 可以看作一个 n 维列向量 $\boldsymbol{a}$，其每个元素都介于 $[0,1]$ 之间且所有元素总和为 1。类似的，第二个人的策略也可以用一个 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$ 表示，其每个元素都介于 $[0,1]$ 之间且所有元素总和为 1。

参加博弈的人可以制定混合策略，即在操作前给每一种行动分配一个概率。如果第一个人给第 i 种行动分配了 a_i 的概率，则所有的 a_i 可以看作一个 n 维列向量 $\boldsymbol{a}$，其每个元素都介于 $[0,1]$ 之间且所有元素总和为 1。类似的，第二个人的策略也可以用一个 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$ 表示，其每个元素都介于 $[0,1]$ 之间且所有元素总和为 1。

假如双方的最优策略分别为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则第一个人的期望收益为 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{b}$，第二个人的期望收益为 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{b}$。

Definition 2 (纳什均衡)

如果博弈的每个参与者都选择了自己的混合策略，且没有玩家能在只调整自己混合策略的情况下增大自己的期望收益，则称当前的混合策略集合与相应的博弈结果构成了纳什均衡（或纳什均衡点）。

Example 1 (囚徒困境)

一个监狱中有两名嫌疑犯，他们每人有两个选择：认罪并检举对方和保持沉默。如果两人都检举对方，则各判刑 8 年；如果一人检举对方，另一人保持沉默，则检举对方者立刻出狱，保持沉默者判刑 10 年；如果两人都保持沉默，则各判刑 2 年。两名囚犯无法交流，并且都希望最小化自身刑期。

Example 1 (囚徒困境)

一个监狱中有两名嫌疑犯，他们每人有两个选择：认罪并检举对方和保持沉默。如果两人都检举对方，则各判刑 8 年；如果一人检举对方，另一人保持沉默，则检举对方者立刻出狱，保持沉默者判刑 10 年；如果两人都保持沉默，则各判刑 2 年。两名囚犯无法交流，并且都希望最小化自身刑期。

如果我们用刑期的相反数表示收益，则根据问题描述，有 $n = m = 2, A = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$。

此时存在唯一的纳什均衡点，即双方都选择检举对方，混合策略为 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

Example 2 (性别博弈)

有一对夫妻，丈夫希望看球赛，妻子希望逛街，但他们都想待在一起而不是分开各做各的。具体而言，两个人会分别选择看球赛或者逛街，如果双方选择不一致则均获得 0 的满意度，否则与自己希望相符的一人获得 3 的满意度，另一人获得 2 的满意度。

根据问题描述，有 $n=m=2, A=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$。

Example 2 (性别博弈)

有一对夫妻，丈夫希望看球赛，妻子希望逛街，但他们都想待在一起而不是分开各做各的。具体而言，两个人会分别选择看球赛或者逛街，如果双方选择不一致则均获得 0 的满意度，否则与自己希望相符的一人获得 3 的满意度，另一人获得 2 的满意度。

根据问题描述，有 $n=m=2, A=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$。

该博弈有三个纳什均衡点，分别为 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，此时两人收益分别为 $3,2$；$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}$，此时两人期望收益分别为 $1.2,1.2$；$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，此时两人收益分别为 $2,3$。

1 拉格朗日乘数

2 对偶

3 纳什均衡
- 定义
- 零和博弈

4 Thanks

Definition 3 (零和博弈)

如果对于任意博弈结果都有所有人的收益之和为 0，则称这一博弈是零和博弈。

对于之前描述的模型，如果其为零和博弈，则有 $A=-B$。

Definition 3 (零和博弈)

如果对于任意博弈结果都有所有人的收益之和为 0，则称这一博弈是零和博弈。

对于之前描述的模型，如果其为零和博弈，则有 $A=-B$。

因此可以只用一个矩阵 A 来描述收益函数，对于双方的混合策略 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，有第一个人的期望收益等于 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{b}$，第二个人的期望收益等于 $-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{b}$。

Theorem 2.1

对于任意一个双人零和博弈，不可能存在两个纳什均衡点，使得参与者在这两个纳什均衡点处的期望收益不同。

Theorem 2.1

对于任意一个双人零和博弈，不可能存在两个纳什均衡点，使得参与者在这两个纳什均衡点处的期望收益不同。

Proof

反证法。假设双方在第一个纳什均衡点的混合策略分别为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1$，在第二个纳什均衡点的混合策略分别为 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2$，且假设第一位玩家在第一个纳什均衡点的期望收益更高，即 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_1 > \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_2$。

由于纳什均衡的定义是没有玩家可以通过改变自身策略来增加期望收益，因此有

$$-\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_1 \geq -\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_2 \geq \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_2$$

即 $\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_2 \geq \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_2 \geq \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_1$，与 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_1 > \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}_2$ 矛盾。故双人零和博弈不可能存在两个期望收益不同的纳什均衡点。

Theorem 2.2

双人零和博弈必然存在纳什均衡点。

Theorem 2.2

双人零和博弈必然存在纳什均衡点。

Proof

设该博弈中两人的策略数量分别为 n, m，第一个人的收益矩阵为 A。令 D_a 表示第一个人的所有混合策略构成的集合，D_b 表示第二个人的所有混合策略构成的集合，则有 D_a, D_b 均为凸集。定义函数 $F : D_a \times D_b \to \mathbb{R}$ 满足 $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} A\mathbf{b}$。

由之前的引理可知，必然存在 $\mathbf{a}_0 \in D_x, \mathbf{b}_0 \in D_b$，使得

$$\max_{\mathbf{a}\in D_a} F(\mathbf{a}, \mathbf{b}_0) = F(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = \min_{\mathbf{b}\in D_b} F(\mathbf{a}_0, \mathbf{b})$$

则双方的混合策略 $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ 构成了该博弈的一个纳什均衡。

由上述讨论可知，任意双人零和博弈均存在且仅存在一个期望收益不同的纳什均衡点。因此实际应用中常常把纳什均衡定义为双人零和博弈的解。对于 OI 中的双人零和静态博弈问题，题目中的“双方均采取最优策略”即指代达到纳什均衡的混合策略。

由上述讨论可知，任意双人零和博弈均存在且仅存在一个期望收益不同的纳什均衡点。因此实际应用中常常把纳什均衡定义为双人零和博弈的解。对于 OI 中的双人零和静态博弈问题，题目中的“双方均采取最优策略”即指代达到纳什均衡的混合策略。

Corollary 2.1

对于一个双人零和博弈，令 D_a 表示第一个人的所有混合策略构成的集合，D_b 表示第二个人的所有混合策略构成的集合，A 表示第一个人的收益矩阵，S 表示纳什均衡情况下第一个人的期望收益。则有 $S=\min\limits_{\boldsymbol{b}\in D_b}\max\limits_{\boldsymbol{a}\in D_a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{b}=\max\limits_{\boldsymbol{a}\in D_a}\min\limits_{\boldsymbol{b}\in D_b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{b}$。

该推论还提供了一种把双人零和博弈的纳什均衡问题转化为线性规划问题的方法。第一个人在纳什均衡点的期望收益可以用以下线性规划问题表示：

$$
\begin{aligned}
&\max t\\
&s.t.\quad \boldsymbol{x}_i \geq 0,\quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i = 1,\quad \forall i \in [1,n]\cap\mathbb{Z}, \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}_j A_{ji} \geq t
\end{aligned}
$$

Thanks for listening!