Permutant解题报告

绍兴市第一中学洪华敦

1 试题来源

$Topcoder\ SRM684\ Hard$

2 试题大意

给定一个正整数数组$a[1..n]$，设$m = \sum_{i=1}^{n} a[i]$
设$b[1..n]$为$a[1..n]$的一个随机排列
设$s[j] = \sum_{i=1}^{j} b[i]$
求$\frac{m!}{\prod_{i=2}^{n} s[i]}$的期望值
你需要返回答案乘$n!$后对1000000007取模的值
$1 \le n \le 50$，$1 \le a[i] \le 50$，$1 \le m \le 1000$

3 算法介绍

3.1 弱化版题目

这道题是十分难的，我们可以先考虑他的弱化版
注意到我们要求的是$\frac{m!}{\prod_{i=2}^{n} s[i]}$
我们考虑弱化版：求$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} s[i]}$
相当于是：一开始你的值有$m!$，和为m，每次值除掉和，和减去最后一个s的值
我们大胆地猜测，这个和是$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} a[i]}$

3.1.1 证明一

我们可以用数学归纳法证明

当$n = 1$时，显然是成立的

假设这个公式对于$n-1$时是成立的，现在证明他对于n时是成立的

考虑枚举最后一个数是哪个，假设是j，则答案为剩下$n-1$个数自由排列后的答案除m

根据数学归纳法，答案是：

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{m!}{m \prod_{i \neq j} a[i]}$$

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{m!}{\prod_{i \neq j} a[i]}$$

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{m! * a[j]}{\prod_{i=1}^{n} a[i]}$$

$$\frac{1}{m} \frac{m! * m}{\prod_{i=1}^{n} a[i]}$$

$$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} a[i]}$$

证毕

然而这种证明方法很难推广到原题的解法

3.1.2 证明二

考虑一种直观证明：

有m颗球，每个球有颜色，第i种颜色的有a_i个，每个球有互不相同的编号。现在考虑这些球的排列是有$m!$种的

我们相当于随机了一种颜色的排列，答案是$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} s[i]}$

我们可以理解为，先考虑m个球，要求第一棵球是颜色n的标号最小的球，然后把颜色n的球全部拿掉，对剩下$m-a[n]$个球和$n-1$个颜色继续做

这样最后的结果就是：每种颜色第一个出现的球标号一定是这个颜色里最小的

于是答案就是$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} a[i]}$

3.2 推广

现在考虑原题目，根据弱化版的证明二，我们发现答案就相当于最后一个出现的颜色标号是可以随便排的

我们可以考虑动态规划，算出一种颜色在最后的排列数是几个

令$f[i][j][k]$表示前i个颜色，最后出现的颜色是j，j的第一个球的位置后面剩余的空位数量是k

转移时，考虑颜色$i+1$放在哪里，如果他不放在最后的话，枚举他有几个在后k个，几个在前$m-k$个即可

如果他要放最后的话，则在k个空位里选出放第一个球的位置即可

于是最后直接枚举一遍统计答案就好了

时间复杂度$O(n^3m)$，常数相当小，可以通过此题