Misinterpretation 2 解题报告

赣州三中 赖金霖

1. 题目大意

求长度在[L,R]内的，满足所有偶数位字符取出和所有奇数位字符相接与原串相等的小写字母串个数，输出对 10^9+7 取模。

数据范围 $1\leqslant T\leqslant 5$，$1\leqslant L\leqslant R\leqslant 10^{10}$, $R-L\leqslant 50000$。

在下面的题解中，为了方便，D=R-L，!≡表示不同余，!|表示不整除。

2. 题目解答

2.1 模型转化

设字符串长度为 X，内容为 $C_1C_2C_3...C_{X-1}C_X$。若 X 为偶数，则经过转化之后，字符串变为 $C_2C_4C_6...C_{X-2}C_XC_1C_3C_5...C_{X-3}C_{X-1}$，要与原串相等，则 $C_1=C_2, C_2=C_4, C_3=C_6, ...,$ $C_{X/2}=C_X$，$C_{X/2+1}=C_1$，$C_{X/2+2}=C_3$，$C_{X/2+3}=C_5$，...，$C_{X-1}=C_{X-3}$，$C_X=C_{X-1}$。设 $F(t)=2t$（$t\leqslant X/2$）；$2(t-X/2)-1$（$t>X/2$）。则要求是对所有 $1\leqslant t\leqslant X$，有 $C_t=C_{F(t)}$。容易发现，$F(t)\equiv 2t \pmod{X+1}$，且 t 于 F(t) 一一对应，构成置换，设该置换循环数为 G(X)，答案即为 $26^{G(X)}$。若 X 为奇数，则 $F(t)\equiv 2t \pmod{X}$ 对 $t<X$ 成立，$F(X)=X$，那么 $G(X)=G(X-1)+1$。最终答案为 $\sum_{i=L}^{R} 26^{G(i)}$。

2.2 做法

显然我们现在只需要考虑 X 为偶数的情况。设 ord(d) 为 2 模 d 的阶。对 $1\leqslant i\leqslant X$，我们先来证明 i 最少乘 $\mathrm{ord}((X+1)/\gcd(i,X+1))$ 个 2 与 i 同余（mod X+1）。

证明：设 $\gcd(i,X+1)=k$。设 $\gcd(x,X+1)=k$ 的 x 分别为 p_1k、p_2k、...、p_mk，构成集合 P，$X+1=pk$，那么必有 $p_i<p$，且 $\gcd(p_i,p)=1$，于是 $m=\varphi(p)$。由 p_i 及 p 均为奇数，易知 $\gcd(2p_ik\%pk, pk)=k$，所以 $2p_ik\%pk\in P$。更进一步，设 $2p_i\%p=p_j$，必有 $2p_ik\%pk=p_jk$，于是 p_ik 乘 2 模 pk 与 p_i 乘 2 模 p 等价。因为 $\gcd(p_i,p)=1$，所以 p_i 最少乘 ord(p) 个 2 与自己同余(mod p)，所以 p_ik 最少乘 ord(p) 个 2 与自己同余（mod pk）。

上面的证明中的 $m=\varphi(p)$ 个数都最少乘 ord(p) 个 2 与自己同余(mod X+1)，那么这些数构成 $\varphi(p)/\mathrm{ord}(p)$ 个循环。对所有 $p|(X+1)$ 都成立，那么 $G(X)=\sum_{p|(X+1)\wedge p\neq 1}\varphi(p)/\mathrm{ord}(p)$。

对于一个 X+1，将它分解质因数，是 $O(\sqrt{X})$ 的，但对于连续的 X+1，我们只需要筛出 $\sqrt{R}$ 之内的质数，将每个质数分给它的倍数，就能在 $O(\sqrt{R}+D\log R)$ 内

将所有 X+1 分解质因数。于是我们可以利用 dfs 求出 X+1 的所有因子及它们的欧拉函数值。现在关键就是 2 模 X+1 的所有因子的阶了，题解提供了一个公式，对 gcd(x,y)=1，ord(xy)=lcm(ord(x),ord(y))，下面我们来证明这个公式。

证明：设 d=lcm(ord(x),ord(y))，首先，因为 ord(x)|d，ord(y)|d，所以 $2^d \equiv 1 \pmod x$，$2^d \equiv 1 \pmod y$，所以 $2^d \equiv 1 \pmod{xy}$。而 ord(xy)是 ord(x)的倍数，且是 ord(y)的倍数(否则有 $2^{ord(xy)}! \equiv 1 \pmod x$或者 $2^{ord(xy)}! \equiv 1 \pmod y$，与 $2^{ord(xy)} \equiv 1 \pmod{xy}$矛盾)，所以 d 是最小的使得 $2^d \equiv 1 \pmod{xy}$的正整数，即 ord(xy)=d=lcm(ord(x),ord(y))。

现在我们只需要求出 2 模所有质数幂的阶了，设我们要求 ord(y)，只需要将 y-1 分解质因数，然后一个一个用快速幂验证。但这样还是略慢，注意到，如果 $2^{xp} \equiv 1 \pmod y$，若 $2^x! \equiv 1 \pmod y$，则 ord(y)!|x，若 $2^x \equiv 1 \pmod y$，则 ord(y)|x。所以我们只需要从 y-1 开始，对每个质因子不断试除，就可以在 $O(\log^2(y))$内求出 ord(y)。

关于分解质因数的方法，本题不断用质数试除就可以了，不过用 Pollard-rho 算法能做到更快(?)。

2.3 复杂度

标程主要分为两个部分，一是预处理部分，二是计算部分。

预处理部分，我们要筛出 $\sqrt{R}$ 内的质数，将 p-1 分解因数（暴力枚举质数），并求出 2 模它们的幂的阶，这样做的复杂度是不超过 $O(R^{3/4}/\log^2(R)+\sqrt{R}\log^2(R))$的（事实上常数非常小）。同时我们要把所有质数分给它们的倍数，这样做的复杂度是 $O(D\log(R))$的。

计算部分，我们要先将所有 X+1 分解质因数，分解过程中可能产生一个大质数，需要计算 2 模它的阶，之后再枚举 X+1 的所有因子。这样做总复杂度是 $O(D(\sqrt{R}/\log(R)+\log^2(R)))$的（由于数是连续的，常数依然非常小）。

总时间复杂度是 $O(R^{3/4}/\log^2(R)+\sqrt{R}\log^2(R)+TD(\sqrt{R}/\log(R)+\log^2(R)))$，稍微卡一卡常数就能过去辣。

空间复杂度 $O(\sqrt{R})$。