

# 不相交格路与反射容斥

吴畅

北京市十一学校

January 12, 2024

- ① 定义与约定
- ② 不相交格路
  - 起点和终点固定
  - Pfaffian
  - 终点不固定
  - 起点和终点均不固定
- ③ 反射容斥
  - 两条斜率为 1 的直线边界
  - 更一般的描述
  - 两个例子

# 定义与约定

# 定义

## Definition (步长, 格路)

称  $\mathbb{Z}^d$  上的一个向量为一种**步长**, 若干步长构成的集合为一个**步长集合**。  
考虑  $\mathbb{Z}^d$  上的序列  $P = (P_0, P_1, \dots, P_l)$ , 以及步长集合  $\mathbb{S}$ , 若满足  
 $\forall 0 \leq i < l, \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \in \mathbb{S}$ , 则称  $P$  是步长集合  $\mathbb{S}$  下的一条长度为  $l$  的**格路**。

# 定义

## Definition (步长, 格路)

称  $\mathbb{Z}^d$  上的一个向量为一种**步长**, 若干步长构成的集合为一个**步长集合**. 考虑  $\mathbb{Z}^d$  上的序列  $P = (P_0, P_1, \dots, P_l)$ , 以及步长集合  $\mathbb{S}$ , 若满足  $\forall 0 \leq i < l, \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \in \mathbb{S}$ , 则称  $P$  是步长集合  $\mathbb{S}$  下的一条长度为  $l$  的**格路**.

更常见的是下面的概念:

## Definition (简单步, 简单格路)

若  $\mathbb{Z}^d$  上的步长  $s = (s_1, s_2, \dots, s_d)$  满足  $\forall 1 \leq i \leq d, s_i \in \{0, 1\}$  且  $\sum_{i=1}^d s_i = 1$ , 则称  $s$  是**简单步**.

步长集合由  $\mathbb{Z}^d$  上所有简单步构成的格路, 称为**简单格路**.

# 约定

从  $A$  到  $E$ , 长度为  $m$ 、步长集合为  $\mathbb{S}$ 、约束集合为  $R$  的所有格路 (组) 构成的集合:

$$L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} \mid R)$$

# 约定

从  $A$  到  $E$ , 长度为  $m$ 、步长集合为  $\mathbb{S}$ 、约束集合为  $R$  的所有格路(组) 构成的集合:

$$L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} \mid R)$$

例如  $L((0, 0) \rightarrow (1, 1) \mid x \geq y) = \{((0, 0), (1, 0), (1, 1))\}$ 。

# 约定

从  $A$  到  $E$ , 长度为  $m$ 、步长集合为  $\mathbb{S}$ 、约束集合为  $R$  的所有格路(组) 构成的集合:

$$L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} \mid R)$$

例如  $L((0, 0) \rightarrow (1, 1) \mid x \geq y) = \{((0, 0), (1, 0), (1, 1))\}$ 。

带权计数,  $w$  是定义在  $\mathcal{M}$  上的函数:

$$GF(\mathcal{M}; w) := \sum_{x \in \mathcal{M}} w(x)$$



# 约定

从  $A$  到  $E$ , 长度为  $m$ 、步长集合为  $\mathbb{S}$ 、约束集合为  $R$  的所有格路(组) 构成的集合:

$$L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} \mid R)$$

例如  $L((0, 0) \rightarrow (1, 1) \mid x \geq y) = \{((0, 0), (1, 0), (1, 1))\}$ 。

带权计数,  $w$  是定义在  $\mathcal{M}$  上的函数:

$$GF(\mathcal{M}; w) := \sum_{x \in \mathcal{M}} w(x)$$

通常情况下  $\mathcal{M}$  是路径或路径组的集合, 而  $w$  同时定义在边、路径和路径组上: 路径的权值为所有边权的乘积, 路径组的权值为所有路径权值的乘积。

# 不相交格路

# 起点和终点固定

当起点集合和终点集合固定时，有广为人知的 LGV 引理：

## Lemma (Lindström–Gessel–Viennot lemma)

令  $G$  是有向无环图， $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ,  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  均是节点组成的序列， $w$  是边权函数。 $\mathfrak{S}_n$  表示长度为  $n$  的排列构成的集合。

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) GF(L_G(\mathbf{A}_\sigma \rightarrow \mathbf{E} \mid \text{non-intersecting}); w) \\ = \det_{1 \leq i, j \leq n} (GF(L_G(A_i \rightarrow E_j); w)) \end{aligned}$$

其中  $L_G(\dots)$  含义与  $L(\dots)$  基本相同，唯一的区别是语境不再是格路而是有向无环图  $G$  上的路径。

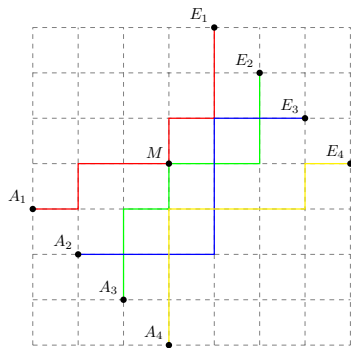
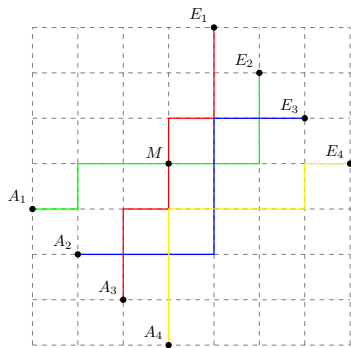
# LGV 引理的简要证明

构造一个对合  $\phi$ , 定义在二元组  $(\sigma, \mathbf{P})$  上, 其中  $\mathbf{P} \in L_G(\mathbf{A}_\sigma \rightarrow \mathbf{E})$  是相交的路径组, 满足符号相反、权值不变。

# LGV 引理的简要证明

构造一个对合  $\phi$ , 定义在二元组  $(\sigma, \mathbf{P})$  上, 其中  $\mathbf{P} \in L_G(\mathbf{A}_\sigma \rightarrow \mathbf{E})$  是相交的路径组, 满足符号相反、权值不变。

$\phi$  的构造: 取任一  $G$  的拓扑序  $\mathcal{A}$ 。找到最小的交点  $(M, i, j)$ , 表示  $P_i$  和  $P_j$  在  $M$  处有一交点, 其中第一维的比较按照  $\mathcal{A}$  上的排名进行。交换  $P_i, P_j$  在  $M$  前的子路径。



# G-协调

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献，但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

# G-协调

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献, 但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

## Definition

若有向无环图  $G$  以及其上的顶点集合  $\mathbf{A}, \mathbf{E}$  满足,  $\forall i < j, k < l$ , 任意  $P \in L_G(A_i \rightarrow E_l)$  和  $Q \in L_G(A_j \rightarrow E_k)$  相交, 则称  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{E}$  是  $G$ -协调的。

# G-协调

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献, 但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

## Definition

若有向无环图  $G$  以及其上的顶点集合  $\mathbf{A}, \mathbf{E}$  满足,  $\forall i < j, k < l$ , 任意  $P \in L_G(A_i \rightarrow E_l)$  和  $Q \in L_G(A_j \rightarrow E_k)$  相交, 则称  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{E}$  是  $G$ -协调的。

## Theorem

令  $G$  是一张有向无环图,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ,  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  是  $G$ -协调的节点序列,  $w$  是边权函数 (同样定义在路径和路径组上)。

$$GF(L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E} \mid \text{non-intersecting}); w) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (GF(L_G(A_j \rightarrow E_i); w))$$



# G-协调

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献，但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

## Definition

若有向无环图  $G$  以及其上的顶点集合  $\mathbf{A}, \mathbf{E}$  满足,  $\forall i < j, k < l$ , 任意  $P \in L_G(A_i \rightarrow E_l)$  和  $Q \in L_G(A_j \rightarrow E_k)$  相交, 则称  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{E}$  是  $G$ -协调的。

## Theorem

令  $G$  是一张有向无环图,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n), \mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  是  $G$ -协调的节点序列,  $w$  是边权函数 (同样定义在路径和路径组上)。

$$GF(L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E} \mid \text{non-intersecting}); w) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (GF(L_G(A_j \rightarrow E_i); w))$$

在简单格路的环境下, 这个条件更容易被满足, 例如  $A_i = (1, a_i), E_i = (n, e_i)$ 。

# 完美匹配

## Definition (完美匹配)

称一个长度为  $2n$  的排列  $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$  是完美匹配, 当且仅当其满足

- $\forall 1 \leq i \leq n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i}$
- $\forall 1 \leq i < n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i+1}$

对所有  $1 \leq i \leq n$ , 称  $\pi_{2i-1}$  和  $\pi_{2i}$  是一对匹配的元素。

# 完美匹配

## Definition (完美匹配)

称一个长度为  $2n$  的排列  $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$  是完美匹配, 当且仅当其满足

- $\forall 1 \leq i \leq n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i}$
- $\forall 1 \leq i < n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i+1}$

对所有  $1 \leq i \leq n$ , 称  $\pi_{2i-1}$  和  $\pi_{2i}$  是一对匹配的元素。

记  $\mathfrak{M}_{2n}$  表示全体长度为  $2n$  的完美匹配构成的集合。

# 完美匹配

## Definition (完美匹配)

称一个长度为  $2n$  的排列  $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$  是完美匹配, 当且仅当其满足

- $\forall 1 \leq i \leq n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i}$
- $\forall 1 \leq i < n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i+1}$

对所有  $1 \leq i \leq n$ , 称  $\pi_{2i-1}$  和  $\pi_{2i}$  是一对匹配的元素。

记  $\mathfrak{M}_{2n}$  表示全体长度为  $2n$  的完美匹配构成的集合。

类似排列, 对匹配  $\pi$  定义  $\text{inv } \pi$  和  $\text{sgn } \pi$ 。此外我们还有一种递归的方法计算  $\text{inv } \pi$  的奇偶性:

取  $\pi$  中任意一对匹配的元素  $(i, j)$ , 将它们删去, 其余元素在下标和值域上填补空缺。可以得到一个  $\pi' \in \mathfrak{M}_{n-2}$ , 那么  $\text{inv } \pi \equiv \text{inv } \pi' + j - i - 1 \pmod{2}$ 。

## Definition (反对称矩阵)

令  $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n \times n}$  是一个方阵, 若  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ , 则称  $\mathbf{A}$  是一个反对称矩阵。

## Definition (反对称矩阵)

令  $A = (a_{i,j})_{n \times n}$  是一个方阵, 若  $A^T = -A$ , 则称  $A$  是一个反对称矩阵。

可以发现, 反对称矩阵满足主对角线上为 0, 关于主对角线对称的元素互为相反数。因此, 我们可以只用主对角线上方的元素  $(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$  来描述一个  $n \times n$  的反对称矩阵  $A$ 。

## Definition (反对称矩阵)

令  $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n \times n}$  是一个方阵, 若  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ , 则称  $\mathbf{A}$  是一个反对称矩阵。

可以发现, 反对称矩阵满足主对角线上为 0, 关于主对角线对称的元素互为相反数。因此, 我们可以只用主对角线上方的元素  $(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$  来描述一个  $n \times n$  的反对称矩阵  $\mathbf{A}$ 。

## Definition (Pfaffian)

令  $n$  是偶数,  $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$  是一个反对称矩阵, 定义  $\mathbf{A}$  的 Pfaffian 为

$$\text{Pf}(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in \mathfrak{M}_n} (\text{sgn } \pi) \prod_{i=1}^{n/2} a_{\pi(2i-1), \pi(2i)}$$

# Pfaffian 的性质

## Proposition

假设  $n$  是偶数,  $A$  是大小为  $n$  的反对称矩阵,  $X$  是大小为  $n$  的方阵

- a  $\text{Pf}(1)_{1 \leq i < j \leq n} = 1$ , 等价地,  $\sum_{\pi \in \mathfrak{M}_n} \text{sgn } \pi = 1$ 。
- b  $\text{Pf}(X^T A X) = \det(X) \text{Pf}(A)$ 。
- c  $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$ 。



# Pfaffian 的性质

## Proposition

假设  $n$  是偶数,  $A$  是大小为  $n$  的反对称矩阵,  $X$  是大小为  $n$  的方阵

- a  $\text{Pf}(1)_{1 \leq i < j \leq n} = 1$ , 等价地,  $\sum_{\pi \in \mathfrak{M}_n} \text{sgn } \pi = 1$ 。
- b  $\text{Pf}(X^T A X) = \det(X) \text{Pf}(A)$ 。
- c  $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$ 。

为了求 Pfaffian, 可以考虑令 (b) 中的  $X$  是初等行变换矩阵, 得到与  $\det$  类似的消元过程, 复杂度同高消。

# 终点不固定的不相交路径

## Theorem

令  $G$  是一张有向无环图,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2n})$ ,  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$  是  $G$ -协调的节点序列,  $w$  是边权函数。

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}, |\mathbf{E}'| = 2n} GF(L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}); w) \\ = \text{Pf}_{1 \leq i < j \leq 2n} (Q_G(i, j; w)) \end{aligned}$$

其中  $Q_G(i, j; w)$  表示对所有不交路径对  $(P', P'')$ , 满足起点分别为  $A_i$  和  $A_j$ , 终点均为  $\mathbf{E}$  中的点,  $\sum_{(P', P'')} w(P')w(P'')$ 。

# 终点不固定的不相交路径

## Theorem

令  $G$  是一张有向无环图,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2n})$ ,  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$  是  $G$ -协调的节点序列,  $w$  是边权函数。

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}, |\mathbf{E}'| = 2n} GF(L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}); w) \\ = \text{Pf}_{1 \leq i < j \leq 2n} (Q_G(i, j; w)) \end{aligned}$$

其中  $Q_G(i, j; w)$  表示对所有不交路径对  $(P', P'')$ , 满足起点分别为  $A_i$  和  $A_j$ , 终点均为  $\mathbf{E}$  中的点,  $\sum_{(P', P'')} w(P')w(P'')$ 。

我们希望仿照 LGV 引理的证明, 构造对合  $\phi$  将二元组  $(\pi, \mathbf{P})$  中  $\mathbf{P}$  相交的那些消掉。

# 一个引理

## Lemma

令  $n, i, j$  是三个正整数, 满足  $1 \leq i < j \leq n$ 。对完美匹配  $\pi \in \mathfrak{M}_n$ , 满足在  $\pi$  中  $i$  和  $j$  不匹配, 令  $\pi'$  表示交换  $\pi$  中  $i$  和  $j$  的位置, 然后在保持匹配关系不变的情况下, 重排形成的新完美匹配。假如对所有  $i < k < j$ , 在  $\pi$  中  $k$  和  $i, j$  均不匹配, 那么  $\operatorname{sgn} \pi = -\operatorname{sgn} \pi'$ 。

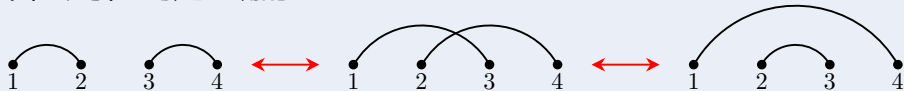
# 一个引理

## Lemma

令  $n, i, j$  是三个正整数, 满足  $1 \leq i < j \leq n$ 。对完美匹配  $\pi \in \mathfrak{M}_n$ , 满足在  $\pi$  中  $i$  和  $j$  不匹配, 令  $\pi'$  表示交换  $\pi$  中  $i$  和  $j$  的位置, 然后在保持匹配关系不变的情况下, 重排形成的新完美匹配。假如对所有  $i < k < j$ , 在  $\pi$  中  $k$  和  $i, j$  均不匹配, 那么  $\operatorname{sgn} \pi = -\operatorname{sgn} \pi'$ 。

## Proof.

根据引理中所给的条件,  $i, j$  及其匹配元素的变换情况, 只可能为下图两种中的一种。用之前提到的方法比较  $\operatorname{inv} \pi$  和  $\operatorname{inv} \pi'$  的奇偶性, 也就是分别删去  $i, j$  及其匹配元素并检查贡献的不同。不难验证, 在两种情况下, 该引理均是正确的。



□

# 定理的证明

Proof.

$\phi$  的构造：取任一  $G$  的拓扑序  $\mathcal{A}$ 。对于一个相交路径组  $P$ ，我们将每个交点描述为  $(M, i, j)$  的形式，表示  $P_i$  和  $P_j$  在  $M$  处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个，其中第一维的比较按照  $\mathcal{A}$  上的排名进行。交换  $P_i, P_j$  在  $M$  前的子路径；同时交换  $i, j$  在  $\pi$  中的位置，保持元素的匹配关系不变的情况下重排。

# 定理的证明

## Proof.

$\phi$  的构造：取任一  $G$  的拓扑序  $\mathcal{A}$ 。对于一个相交路径组  $\mathbf{P}$ ，我们将每个交点描述为  $(M, i, j)$  的形式，表示  $P_i$  和  $P_j$  在  $M$  处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个，其中第一维的比较按照  $\mathcal{A}$  上的排名进行。交换  $P_i, P_j$  在  $M$  前的子路径；同时交换  $i, j$  在  $\pi$  中的位置，保持元素的匹配关系不变的情况下重排。

不难发现  $w(\mathbf{P})$  不变，接下来只需要说明符号取反。首先  $Q_G(i, j; w)$  的定义保证了  $i$  和  $j$  在  $\pi$  中不匹配。

# 定理的证明

## Proof.

$\phi$  的构造：取任一  $G$  的拓扑序  $\mathcal{A}$ 。对于一个相交路径组  $P$ ，我们将每个交点描述为  $(M, i, j)$  的形式，表示  $P_i$  和  $P_j$  在  $M$  处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个，其中第一维的比较按照  $\mathcal{A}$  上的排名进行。交换  $P_i, P_j$  在  $M$  前的子路径；同时交换  $i, j$  在  $\pi$  中的位置，保持元素的匹配关系不变的情况下重排。

不难发现  $w(P)$  不变，接下来只需要说明符号取反。首先  $Q_G(i, j; w)$  的定义保证了  $i$  和  $j$  在  $\pi$  中不匹配。

假设存在  $i < k < j$  和  $i, j$  其一匹配，不妨设  $k$  和  $i$  匹配。记  $P_i, P_k$  对应的的终点编号分别为  $id_i, id_k$ ， $P_i, P_j$  分别被  $M$  分割成  $AB$  和  $CD$ 。根据假设  $P_k$  和  $A, B$  均不交，而由于  $M$  是拓扑序最小的交点， $P_k$  和  $C$  也不相交。由于  $A$  和  $E$  是  $G$ -协调的，必然有  $id_k > id_i$ 。现在考虑路径  $P_k$  以及  $CB$ ，由于  $CB$  的终点  $id_i$  在  $id_k$  前面， $P_k$  和  $CB$  必然相交，而前面推出了  $P_k$  和  $C, B$  均不相交，矛盾。  $\square$



## Proof.

这样一来,  $\phi$  对  $\pi$  的影响, 也就是交换  $i$  和  $j$  的位置, 满足引理中的条件, 因此符号必然取反。由于  $A, C$  上不存在其它的交点, 也容易说明再进行一次变换会回到初始状态, 进而  $\phi$  是对合。

最后, 待验证的是, 每组合法的不交路径恰好贡献 1。由之前的命题这也是显然的。



## Proof.

这样一来,  $\phi$  对  $\pi$  的影响, 也就是交换  $i$  和  $j$  的位置, 满足引理中的条件, 因此符号必然取反。由于  $A, C$  上不存在其它的交点, 也容易说明再进行一次变换会回到初始状态, 进而  $\phi$  是对合。

最后, 待验证的是, 每组合法的不交路径恰好贡献 1。由之前的命题这也是显然的。



假如路径数量 (同起点集合) 是奇数, 我们只需向  $G$  加一个没有任何邻边的虚点  $v$ , 同时将  $v$  添加到  $A$  和  $E$  的末尾。这样一来, 起点集合的  $v$  只能和终点集合的自己以唯一的方式匹配, 答案不变但转化为了偶数的情况。

# 起点也不固定

事实上，起点也可以不固定。更多信息可以参考本人的集训队论文以及互测题《网格图最大流计数》。

# 起点也不固定

事实上，起点也可以不固定。更多信息可以参考本人的集训队论文以及互测题《网格图最大流计数》。

## Theorem

令  $G$  是一张有向无环图,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ,  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$  是节点序列, 满足  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{E}$  是  $G$ -协调的,  $w$  是边权函数。

$$\sum_{s \geq 0} x^s \sum_{\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}, \mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}, |\mathbf{A}'| = |\mathbf{E}'| = s} GF(L_G(\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}); w)$$

当  $n$  是奇数时  $= \text{Pf}_{1 \leq i < j \leq n+1}((-1)^{i+j-1} + x^2 Q_G(i, j; w))$

其中  $Q_G(i, j; w)$  在  $j \leq n$  时与前述定义一致, 而

$$Q_G(i, n+1; w) = x^{-1} \sum_{E \in \mathbf{E}} GF(L(A_i \rightarrow E); w);$$

当  $n$  是偶数时  $= \text{Pf}_{1 \leq i < j \leq n+2}((-1)^{i+j-1} + x^2 Q_G(i, j; w))$

其中  $Q_G(i, j; w)$  在  $j \leq n+1$  时定义同上, 而  $Q_G(i, n+2; w) = 0$ 。

# 反射容斥

# 两条斜率为 1 的直线边界

比较常见的反射容斥：

# 两条斜率为 1 的直线边界

比较常见的反射容斥：

## Theorem

令  $n, m$  是非负整数,  $l, r$  是整数, 满足  $l < 0 < r, n + l < m < n + r$ , 从  $(0, 0)$  到  $(n, m)$ , 始终不与  $y = x + l$  和  $y = x + r$  相交的格路数量为

$$\begin{aligned} & |L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid x + l < y < x + r)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \binom{n + m}{n - k(r - l)} - \binom{n + m}{n - k(r - l) + r} \right) \end{aligned}$$

# 两条斜率为 1 的直线边界

比较常见的反射容斥：

## Theorem

令  $n, m$  是非负整数,  $l, r$  是整数, 满足  $l < 0 < r, n + l < m < n + r$ , 从  $(0, 0)$  到  $(n, m)$ , 始终不与  $y = x + l$  和  $y = x + r$  相交的格路数量为

$$\begin{aligned} & |L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid x + l < y < x + r)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \binom{n + m}{n - k(r - l)} - \binom{n + m}{n - k(r - l) + r} \right) \end{aligned}$$

简单来说, 将一条路径与两直线相交的情况写成字符串  $s$ :

$$\begin{aligned} [s = \emptyset] &= [\emptyset \subseteq s] - [L \subseteq s] - [R \subseteq s] + [LR \subseteq s] + [RL \subseteq s] \\ &\quad - [LRL \subseteq s] - [RLR \subseteq s] + \dots \end{aligned}$$



# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

在  $\mathbb{R}^d$  上，令  $\mathcal{H}$  是一个超平面构成的有限集合， $W$  是将  $\mathcal{H}$  中所有元素看成边界，生成的反射群。注意到  $W$  中的一些反射变换并不沿着  $\mathcal{H}$  中的超平面进行，那么记  $\mathcal{R}$  表示  $W$  中的所有元素对应的超平面的集合。

# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

在  $\mathbb{R}^d$  上，令  $\mathcal{H}$  是一个超平面构成的有限集合， $W$  是将  $\mathcal{H}$  中所有元素看成边界，生成的反射群。注意到  $W$  中的一些反射变换并不沿着  $\mathcal{H}$  中的超平面进行，那么记  $\mathcal{R}$  表示  $W$  中的所有元素对应的超平面的集合。

$\mathcal{R}$  中的超平面将  $\mathbb{R}^d$  分割为许多区域， $\mathbb{R}^d - \bigcup_{H \in \mathcal{R}} H$  中的连通块被称为腔。不难发现，对于任意腔  $C$ ，取  $w \in W$ ，那么  $w(C)$  两两不同且覆盖了全部的腔。

# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

在  $\mathbb{R}^d$  上，令  $\mathcal{H}$  是一个超平面构成的有限集合， $W$  是将  $\mathcal{H}$  中所有元素看成边界，生成的反射群。注意到  $W$  中的一些反射变换并不沿着  $\mathcal{H}$  中的超平面进行，那么记  $\mathcal{R}$  表示  $W$  中的所有元素对应的超平面的集合。

$\mathcal{R}$  中的超平面将  $\mathbb{R}^d$  分割为许多区域， $\mathbb{R}^d - \bigcup_{H \in \mathcal{R}} H$  中的连通块被称为腔。不难发现，对于任意腔  $C$ ，取  $w \in W$ ，那么  $w(C)$  两两不同且覆盖了全部的腔。

经过如上的若干定义，我们已经具备了描述更一般的反射容斥的工具。然而，为了使反射容斥适用，步长集合也需要加以约束，使得路径无法在不接触边界的情况下越过边界。为此，我们通过定义  $k_H$  和  $r_H$  来实现这一点，其中  $H \in \mathcal{H}$ 。

# 反射容斥

## Theorem

令  $C$  是反射群  $W$  对应的一个腔, 由超平面集合  $\mathcal{H}$  生成. 取步长集合  $\mathbb{S}$ , 使得对任意  $w \in W$ ,  $w(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ , 且对任意  $H \in \mathcal{H}$ ,  $s \in \mathbb{S}$ , 内积  $\langle s, r_H \rangle$  的值为 0 或  $\pm k_H$ . 其中  $r_H$  是一和  $H$  垂直的非零向量,  $k_H$  是固定常数, 它们都只和  $H$  有关.

对于  $C$  中任意两个整点  $A, E$ , 满足对任意  $H \in \mathcal{H}$ ,  $\langle A, r_H \rangle$  和  $\langle E, r_H \rangle$  都是  $k_H$  的整数倍. 从  $A$  到  $E$ , 恰好  $m$  步, 且始终在  $C$  内部的格路数量为

$$|L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} \mid \text{inside } C)| = \sum_{w \in W} (\det w) |L_m(w(A) \rightarrow E; \mathbb{S})|$$

# 反射容斥

## Theorem

令  $C$  是反射群  $W$  对应的一个腔, 由超平面集合  $\mathcal{H}$  生成. 取步长集合  $\mathbb{S}$ , 使得对任意  $w \in W$ ,  $w(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ , 且对任意  $H \in \mathcal{H}$ ,  $s \in \mathbb{S}$ , 内积  $\langle s, r_H \rangle$  的值为 0 或  $\pm k_H$ . 其中  $r_H$  是一和  $H$  垂直的非零向量,  $k_H$  是固定常数, 它们都只和  $H$  有关.

对于  $C$  中任意两个整点  $A, E$ , 满足对任意  $H \in \mathcal{H}$ ,  $\langle A, r_H \rangle$  和  $\langle E, r_H \rangle$  都是  $k_H$  的整数倍. 从  $A$  到  $E$ , 恰好  $m$  步, 且始终在  $C$  内部的格路数量为

$$|L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} \mid \text{inside } C)| = \sum_{w \in W} (\det w) |L_m(w(A) \rightarrow E; \mathbb{S})|$$

下面给出两个具体例子来理解这个定理。

# Example1

考虑在  $\mathbb{Z}^2$  中, 步长集合为  $\{(1, -1), (1, 1), (F, 0)\}$ , 且始终不低于  $x$  轴的一类格路。当  $F = 1$  时, 对应的格路称为 **Motzkin 路**。当  $F = 2$  时, 对应的格路称为 **Schröder 路**。

# Example1

考虑在  $\mathbb{Z}^2$  中, 步长集合为  $\{(1, -1), (1, 1), (F, 0)\}$ , 且始终不低于  $x$  轴的一类格路。当  $F = 1$  时, 对应的格路称为 **Motzkin 路**。当  $F = 2$  时, 对应的格路称为 **Schröder 路**。

## Corollary

令  $a, c$  是整数,  $b, d$  是非负整数, 从  $(a, b)$  到  $(c, d)$  的 Schröder 路的数量为

$$|L((a, b) \rightarrow (c, d); S = \{(1, -1), (1, 1), (2, 0)\} \mid y \geq 0)| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \left( \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2} - \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a+b+2)/2} \right)$$



# Example1

## Proof.

如果没有  $y \geq 0$  的限制, 可以直接枚举  $(2, 0)$  走了多少步, 而剩下的步长和简单步本质相同, 只需将坐标系旋转 45 度。那么我们有

$$|L((a, b) \rightarrow (c, d); S)| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}$$

应用反射容斥, 将问题转化为从  $(a, b)$  到  $(c, d)$  的自由 Schröder 路数量, 减去从  $(a, b)$  到  $(c, -d-2)$  的自由 Schröder 路数量, 代入上式即可完成证明。 □

# Example1

## Proof.

如果没有  $y \geq 0$  的限制, 可以直接枚举  $(2, 0)$  走了多少步, 而剩下的步长和简单步本质相同, 只需将坐标系旋转  $45^\circ$ 。那么我们有

$$|L((a, b) \rightarrow (c, d); S)| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}$$

应用反射容斥, 将问题转化为从  $(a, b)$  到  $(c, d)$  的自由 Schröder 路数量, 减去从  $(a, b)$  到  $(c, -d-2)$  的自由 Schröder 路数量, 代入上式即可完成证明。 □

这类格路均适用反射容斥解决, 其本质在于较为特殊的  $(F, 0)$  步长与边界  $y = -1$  平行, 对应了  $\langle s, r_H \rangle = 0$  的情况。

# Example1

## Proof.

如果没有  $y \geq 0$  的限制, 可以直接枚举  $(2, 0)$  走了多少步, 而剩下的步长和简单步本质相同, 只需将坐标系旋转  $45^\circ$ 。那么我们有

$$|L((a, b) \rightarrow (c, d); S)| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}$$

应用反射容斥, 将问题转化为从  $(a, b)$  到  $(c, d)$  的自由 Schröder 路数量, 减去从  $(a, b)$  到  $(c, -d-2)$  的自由 Schröder 路数量, 代入上式即可完成证明。 □

这类格路均适用反射容斥解决, 其本质在于较为特殊的  $(F, 0)$  步长与边界  $y = -1$  平行, 对应了  $\langle s, r_H \rangle = 0$  的情况。

另外, 此时可以取  $r_H = (0, 1), k_H = 1$ , 那么所有满足  $\langle s, r_H \rangle = k_H$  的步长都可以成对加入进步长集合, 即  $(x, 1)$  和  $(x, -1)$ 。

# Example2

## Corollary

令  $d$  是正整数,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$  和  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$  是  $\mathbb{Z}^d$  中的两格点, 且满足  $\forall 1 \leq i < d, a_i < a_{i+1}, e_i < e_{i+1}$ 。从  $\mathbf{a}$  走到  $\mathbf{e}$ , 且始终保持  $x_1 < x_2 < \dots < x_d$  的路径数量为

$$|L(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e} \mid x_1 < x_2 < \dots < x_d)| = \left( \sum_{i=1}^d (e_i - a_i) \right)! \det_{1 \leq i, j \leq d} \left( \frac{1}{(e_i - a_j)!} \right)$$

## Example2

### Proof.

在该情境中, 上述定理中的概念

$\mathcal{H} = \{x_i = x_{i+1} \mid 1 \leq i < d\}$ ,  $\mathcal{R} = \{x_i = x_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$ , 而  $W$  对应了全体  $\{1, 2, \dots, d\}$  的置换, 因此我们有

## Example2

### Proof.

在该情境中, 上述定理中的概念

$\mathcal{H} = \{x_i = x_{i+1} \mid 1 \leq i < d\}$ ,  $\mathcal{R} = \{x_i = x_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$ , 而  $W$  对应了全体  $\{1, 2, \dots, d\}$  的置换, 因此我们有

$$\begin{aligned} & |L(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e} \mid x_1 < x_2 < \dots < x_d)| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} (\text{sgn } \sigma) |L(\mathbf{a}_\sigma \rightarrow \mathbf{e})| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} (\text{sgn } \sigma) \frac{\left(\sum_{i=1}^d (e_i - a_i)\right)!}{\prod_{i=1}^d (e_i - a_{\sigma(i)})!} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d (e_i - a_i)\right)! \det_{1 \leq i, j \leq d} \left(\frac{1}{(e_i - a_j)!}\right) \end{aligned}$$



# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV）。

# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV）。

这里给出了用反射容斥的证明，也在一定程度上，揭示了不相交格路与反射容斥的关系。



# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV）。

这里给出了用反射容斥的证明，也在一定程度上，揭示了不相交格路与反射容斥的关系。

本课件仅是抛砖引玉的简单介绍了格路计数中两个比较常见的概念，更多的内容可以参考本人的集训队论文。也期待格路计数在OI中的更广泛的应用。

# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV）。

这里给出了用反射容斥的证明，也在一定程度上，揭示了不相交格路与反射容斥的关系。

本课件仅是抛砖引玉的简单介绍了格路计数中两个比较常见的概念，更多的内容可以参考本人的集训队论文。也期待格路计数在OI中的更广泛的应用。

谢谢大家！