浅谈无向图最小割问题的一些算法及应用

王文涛

绍兴市第一中学

带非负边权的无向图最小割

带非负边权的无向图最小割

- 什么是无向图的割?

带非负边权的无向图最小割

- 什么是无向图的割？
- 顾名思义，就是在无向图上，割掉一些边，把这张图分割成两部分。

带非负边权的无向图最小割

- 什么是无向图的割？
- 顾名思义，就是在无向图上，割掉一些边，把这张图分割成两部分。
- 一个割的权就是所有割掉的边的边权之和。

带非负边权的无向图最小割

- 什么是无向图的割？
- 顾名思义，就是在无向图上，割掉一些边，把这张图分割成两部分。
- 一个割的权就是所有割掉的边的边权之和。
- 两点间的最小割？

带非负边权的无向图最小割

- 什么是无向图的割？
- 顾名思义，就是在无向图上，割掉一些边，把这张图分割成两部分。
- 一个割的权就是所有割掉的边的边权之和。
- 两点间的最小割？
- 就是所有使这两点分别在两部分中的权最小的割。

带非负边权的无向图最小割

- 什么是无向图的割?
- 顾名思义，就是在无向图上，割掉一些边，把这张图分割成两部分。
- 一个割的权就是所有割掉的边的边权之和。
- 两点间的最小割?
- 就是所有使这两点分别在两部分中的权最小的割。
- 假定讨论的问题边权都非负。

带非负边权的无向图最小割

- 那这和有向图的最小割有什么区别呢？

带非负边权的无向图最小割

- 那这和有向图的最小割有什么区别呢?
- 图中的边是无向的。

带非负边权的无向图最小割

- 那这和有向图的最小割有什么区别呢？
- 图中的边是无向的。
- 要求的往往不只是一对点之间的最小割，而是多对点甚至所有点之间的最小割。

带非负边权的无向图最小割

- 那这和有向图的最小割有什么区别呢?
- 图中的边是无向的。
- 要求的往往不只是一对点之间的最小割，而是多对点甚至所有点之间的最小割。
- 无向图最小割问题是有向图最小割问题的一个特例。

论文目的

- 为什么要研究无向图最小割问题？

论文目的

- 为什么要研究无向图最小割问题？
- 近年来，在信息学竞赛中出现了一些这类问题（例如今年CQOI的“不同的最小割”一题）。而一些选手往往对解决这类问题的方法和原理不甚了解。

论文目的

- 为什么要研究无向图最小割问题？
- 近年来，在信息学竞赛中出现了一些这类问题（例如今年CQOI的“不同的最小割”一题）。而一些选手往往对解决这类问题的方法和原理不甚了解。
- 我的论文对处理这类问题的几个算法进行了介绍，给出了它们的证明及实现，并通过几道例题简要阐述了这类问题的解题思路。

论文内容

论文内容

- Gomory-Hu 树(最小割树)及其构造算法

论文内容

- Gomory-Hu 树(最小割树)及其构造算法
- 等价流树的 Gusfield 构造算法

论文内容

- Gomory-Hu 树(最小割树)及其构造算法
- 等价流树的 Gusfield 构造算法
- Stoer-Wagner 算法

论文内容

- Gomory-Hu 树(最小割树)及其构造算法
- 等价流树的 Gusfield 构造算法
- Stoer-Wagner 算法
- Karger 算法

论文内容

- Gomory-Hu 树(最小割树)及其构造算法
- 等价流树的 Gusfield 构造算法
- Stoer-Wagner 算法
- Karger 算法
- 一些例题

Karger 算法

Karger 算法

- 全局最小割：

Karger 算法

- 全局最小割：
- 不给定两点，只要求把图分成两部分的权最小的割。

Karger 算法

- 全局最小割：
- 不给定两点，只要求把图分成两部分的权最小的割。
- 显然，全局最小割就是所有两点间最小割中权最小的割。

Karger 算法

- 全局最小割：
- 不给定两点，只要求把图分成两部分的权最小的割。
- 显然，全局最小割就是所有两点间最小割中权最小的割。
- 暴力枚举其中一部分？

Karger 算法

- 全局最小割：
- 不给定两点，只要求把图分成两部分的权最小的割。
- 显然，全局最小割就是所有两点间最小割中权最小的割。
- 暴力枚举其中一部分？
- $O(2^{|V|})$，复杂度太高。

Karger 算法

- 全局最小割：
- 不给定两点，只要求把图分成两部分的权最小的割。
- 显然，全局最小割就是所有两点间最小割中权最小的割。
- 暴力枚举其中一部分？
- $O(2^{|V|})$，复杂度太高。
- 枚举两个点求最小割？

Karger 算法

- 全局最小割：
- 不给定两点，只要求把图分成两部分的权最小的割。
- 显然，全局最小割就是所有两点间最小割中权最小的割。
- 暴力枚举其中一部分？
- $O(2^{|V|})$，复杂度太高。
- 枚举两个点求最小割？
- 做$O(|V|^2)$次网络流，还是不够快。

Karger 算法

- 挖掘性质！

Karger 算法

- 挖掘性质！
- 如果某两点在全局最小割的同侧，那么把这两点“缩”成一个点不会影响答案。

Karger 算法

- 挖掘性质！
- 如果某两点在全局最小割的同侧，那么把这两点“缩”成一个点不会影响答案。
- “缩”点之后点数减少1，问题规模减小了。

Karger 算法

- 挖掘性质！
- 如果某两点在全局最小割的同侧，那么把这两点“缩”成一个点不会影响答案。
- “缩”点之后点数减少1，问题规模减小了。
- 不停地找两个点“缩”起来，直到只剩两个点为止。

Karger 算法

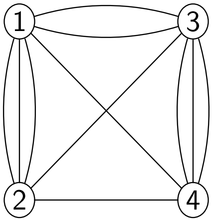
- 挖掘性质！
- 如果某两点在全局最小割的同侧，那么把这两点“缩”成一个点不会影响答案。
- “缩”点之后点数减少1，问题规模减小了。
- 不停地找两个点“缩”起来，直到只剩两个点为止。
- 怎么找这样两个点？

Karger 算法

- 挖掘性质！
- 如果某两点在全局最小割的同侧，那么把这两点“缩”成一个点不会影响答案。
- “缩”点之后点数减少1，问题规模减小了。
- 不停地找两个点“缩”起来，直到只剩两个点为止。
- 怎么找这样两个点？
- 随机选！

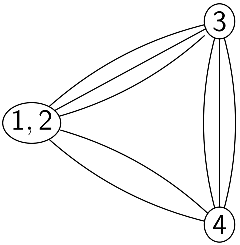
Karger 算法

- 比如对于这张不带权（边权全为1）的图。



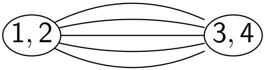
Karger 算法

- 我们收缩了一条点1到点2的边。



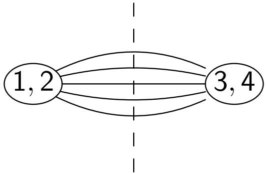
Karger 算法

- 我们又收缩了一条点3到点4的边。



Karger 算法

- 这样就找到了一个割。



Karger 算法

- 对于不带权的图，每次随机选择一条边，可以证明最终的割就是全局最小割的概率为$\binom{|V|}{2}^{-1}$。

Karger 算法

- 对于不带权的图，每次随机选择一条边，可以证明最终的割就是全局最小割的概率为$\binom{|V|}{2}^{-1}$。
- 对于带权的图，图中的每条边可以当成是很多条权为1的边。

Karger 算法

- 对于不带权的图，每次随机选择一条边，可以证明最终的割就是全局最小割的概率为$\binom{|V|}{2}^{-1}$。
- 对于带权的图，图中的每条边可以当成是很多条权为1的边。
- 只要按边权之比分配概率即可。

Karger 算法

- 对于不带权的图，每次随机选择一条边，可以证明最终的割就是全局最小割的概率为$\binom{|V|}{2}^{-1}$。
- 对于带权的图，图中的每条边可以当成是很多条权为1的边。
- 只要按边权之比分配概率即可。
- 缩边可以用并查集来实现。

总结

总结

- 针对特定需求进行分析。

总结

- 针对特定需求进行分析。
- 挖掘无向图割的种种性质。

总结

- 针对特定需求进行分析。
- 挖掘无向图割的种种性质。
- 设计合适的算法。

总结

- 针对特定需求进行分析。
- 挖掘无向图割的种种性质。
- 设计合适的算法。
- 借助其它算法或数据结构实现。

参考文献

[1] R. E. Gomory, T. C. Hu. Multi-terminal network flows. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 9, 1961.

[2] Dan Gusfield (1990). "Very Simple Methods for All Pairs Network Flow Analysis". SIAM J. Comput. 19 (1): 143-155.

[3] David R. Karger, Global Min-cuts in $\mathcal{RNC}$, and Other Ramifications of a Simple Min-Cut Algorithm, Department of Computer Science, Stanford University.

[4] David Morrison, Chandra Chekuri, "Gomory-Hu Trees", CS 598CSC: Combinatorial Optimization Lecture 6.

[5] Uri Zwick, Lecture notes for "Analysis of Algorithms": Global minimum cuts. School of Computer Science, Tel Aviv University.

[6] Gomory-Hu tree - Wikipedia

[7] Karger's algorithm - Wikipedia

[8] 演算法筆記- Cut，國立台灣師範大學資訊工程學系

感谢

感谢大家的聆听！