TWOCOMP 解题报告

江苏省常州高级中学 张志俊

题目大意

给定一棵 n 个节点的无根树，以及两个非空的链集合 S_1 和 S_2，其中的每条链均有一定的收益。要求分别从 S_1 和 S_2 中选择若干条链（允许不选择其中某个集合中的任意一条链），使得从 S_1 中选择的任意一条链 a 与从 S_2 中选择的任意一条链 b 在给定的树上均不相交（包括点交和边交）。最大化选择的所有链的收益之和。

时间限制：2 s

数据规模

- 对于 40% 的数据，$n \le 10^3$，$|S| \le 100$；
- 对于 100% 的数据，$1 \le n \le 10^5$，$1 \le |S| \le 700$。

算法分析

首先通过初步分析可知，由于选择链时的限制条件只存在于两个集合之间，因此结合数据范围容易想到二分图模型。于是，不妨将 S_1 中的链视为左点集，S_2 中的链视为右点集，则题中的限制条件表现为某些特定的左点与右点不能同时被选择，收益即可视作相应的点权，那么题目所求即为最大化点权之和。不难发现，上述转化其实就是经典的二分图最大点权独立集模型，其中点数为 $\Theta(|S_1| + |S_2|)$，边数为 $\Theta(|S_1||S_2|)$。此问题只需借助相关网络流算法即可解决，在此便不再赘述。

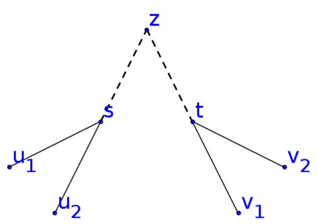
于是，遗留的问题便是如何求得左右点集之间的连边状况。对于 40% 的数据而言，每次简单地暴力扫描的代价也是可以承受的。但当数据规模扩大后，这种方法显然过于低效。下面，我们尝试证明：树上的两条链 (u_1, v_1) 与 (u_2, v_2) 相交，当且仅当节点 $lca(u_1, v_1)$ 在链 (u_2, v_2) 上，或者节点 $lca(u_2, v_2)$ 在链 (u_1, v_1) 上。

充分性

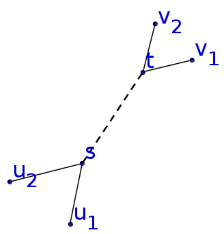
上述结论的充分性应该是显而易见的：当节点 $lca(u_1, v_1)$ 在链 (u_2, v_2) 上时，$lca(u_1, v_1)$ 便是两条链的一个公共点，因此两条链在树上必然相交，另一种情形同理。

必要性

如图，由于树的特性，两条链的所有公共部分必然是像图中 (s, t) 这样连续一段。不妨记 $z = lca(s, t)$，下面分两种情形进行讨论：



图一



图二

- （图一）此时 z 既是 $lca(u_1, v_1)$ 也是 $lca(u_2, v_2)$，于是必要性得证；
- （图二）此时 $z = t$，假设 z 既不是 $lca(u_1, v_1)$ 也不是 $lca(u_2, v_2)$，则链 (z, v_1) 和链 (z, v_2) 都必须向上延伸经过 $father_z$，但这表明 $father_z$ 也是两条链的公共部分，矛盾。

借助上述结论，则每次询问只需分别判断 $lca(u_1, v_1)$ 与 (u_2, v_2)，以及 $lca(u_2, v_2)$ 与 (u_1, v_1) 的相交情况即可，此处可以通过 Dfs 序、倍增等多种途径完成，实现均较为简单。

时间复杂度：$\Theta(MaxFlow(|S_1| + |S_2|, |S_1||S_2|))$

空间复杂度：$\Theta(n \log n + |S_1||S_2|)$