最大异或和II解题报告

雅礼中学 毛啸

1 题目描述

我有一个数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$，每个a_i是小于2^m的正整数。

显然正整数的二进制表示下至少有一个1，现在，我希望您能把每个数仅保留二进制下其中的某一位1，并最大化这个数列中所有数的异或和。

5的二进制表示为101，那么5就只能变为4（保留从左往右第一个1，即变为100），或者1（保留另一个1，即变为001），11的二进制表示为1011，那么它可以变为8（1000）、2（0010）、1（0001）中的某一个。

多组(不超过五组)数据。

2 数据范围

对于前10%的数据，$n, m \le 7$。

对于前30%的数据，$n, m \le 18$。

对于另外20%的数据，保证所有数都是奇数。

对于前100%的数据，$n \le 100$, $m \le 60$。

3 算法一

暴力枚举每个数保留哪一位1，并不断更新答案。

时间复杂度$O(m^n)$，期望得分10分。

如果采用meet in the middle或者其他优化方法，可以获得更高的分数。

4 算法二

我们记录当前前缀能达到哪些数，然后每次暴力枚举下一个数保留哪一位1进行转移。

时间复杂度$O(2^m nm)$，期望得分30分。

5 算法三

我们考虑用非完美算法，比如使用模拟退火算法，或者我们多次随机打乱顺序，每次对于每一个数看看保留哪一位能得到最优值，或者我们搜索剪枝。根据实现的优劣程度得分从0到50分不等，如果采用比较强的非完美算法或许可以获得50分以上的分数。

6 算法四

对于另外20%的数据，所有数都是奇数，所以所有数都能变为1。

对于每个数a_i建一个点u_i，每一个二进制位j建一个点v_j，若a_i的第j位是1则i向j连边，边权为2^j，然后求二分图最大权匹配。

对于没有匹配的点，我们可以让它都变为1，容易证明这样即可得到最优答案，期望得分20分，结合前面的算法可以获得50分。

7 算法五

算法四实际上提醒我们往匹配的方向上去思考。

异或值为1就意味着匹配它的点的个数为奇数。我们考虑这样一个问题，设$n > m$，前m个数都是$2^m - 1$，如果两个数选了同一位那么称它们配对，那么答案如果不是$2^m - 1$，仅当后$n - m$个数不能两两配对，这是一个任意图匹配问题。

所以任意图匹配不难于此题，我们考虑如何用任意图匹配来做这道题。

首先，如果判断答案是否是$2^m - 1$怎么做呢？如果我们还是对于每个数a_i建一个点u_i，每一个二进制位j建一个点v_j，若a_i的第j位是1则i向j连边。判断是否有完美匹配。这样会有什么问题呢，我们发现一个二进制位是奇数可能不一定只与一个点匹配，还可能与多个点匹配。

我们发现，如果两个数配对，那么我们不妨假设它们之间连了一条匹配边，所以我们对所有$a_i \wedge a_j \neq 0$的(i, j)之间连一条边即可。由于这个图不是二分图所以需要用任意图匹配的算法。概括地讲，有一个二分图，一端的点为X另一端为Y，我们修改匹配的定义为X中每个点还是只能匹配一条边，而Y中每个点可以匹配多条边，现在我们要求Y所有点的匹配边数均为奇数，用上述算法这个模型是可以被解决的。

对于这题，我们可以考虑按位贪心，每次我们将会遇到这样一个问题：要求某些位一定要是奇数，其他位任意，怎么做呢？

如果我们修改前面的模型，改为只是只是要求某些点的匹配边数为奇数，我们想办法呢把它规约到之前的模型中去。我们在Y中新建一个点p，那么我们考虑对Y中每个不要求是奇数的点y_i，我们在X中新建一个点x_i，x_i仅与两个点相邻：y_i, p，最后如果X中的点数与Y中的点数奇偶性不同，那么我们在X中再新建一个仅与p相连的点即可，可以发现这样新的模型(要求部分点的匹配边数为奇数)的答案就等于在这张新的图上之前已经解决的那个模型(要求所有点的匹配边数为奇数)的答案。**注意如果所有点都要求是奇数，这个算法会因为Y中新建的点与所有点均不相邻而出错**，但是即使选手没有考虑到这个特殊情况，由于其思路基本是正确的，我也酌情给了接近满分的分数。

假设$n > m$，如果使用$O(VE)$的任意图最大匹配算法，这个算法的时间复杂度是$O(n^3m)$，如果使用$O(V\sqrt{E})$的任意图最大匹配算法，则这个算法的时间复杂度是$O(n^2m)$，期望得分100分。

8 算法六

我们发现，上述算法的时间复杂度瓶颈在于按位贪心。

其实本题有一个非常优美的算法：只要把模型改成若a_i的第j位是1则i向j连边**且边权为**2^j，直接运行任意图最大权匹配即可。

假设$n > m$，如果使用$O(V^4)$的任意图最大权匹配算法，则时间复杂度为$O(n^4)$，如果使用$O(V^3)$的任意图最大权匹配算法，则时间复杂度为$O(n^3)$，期望得分100分。

这种做法的缺点是由于目前所有的任意图最大权匹配算法的代码量都比较大，因此难以简洁的实现。

9 总结

本题是一个基础的任意图匹配题，只要选手看出模型就很容易AC。看不出的话就难以得到高分，考察了选手对匹配题的敏感程度和基本建模能力。属于集训队互测中的简单题。

本题的设计了30分不需要想到匹配就能得到的分，这部分分应该所有人都可以拿到，接着又设计了20分的二分图最大权匹配的分，结合前面的分有50分，这部分分不需要任意图匹配的能力，如果想到了中间20分，将会很容易将思维集中到匹配上从而更容易AC。

虽然此题为本人独立想出，但本题的思路之前碰巧之前在codevs月赛以及某些其他地方已经提前出现过，但是并不是很普及，同样现在基于任意图匹配的建模也还处于萌芽阶段，个人认为此题作为推广任意图匹配建模的意义甚至大于其用于测试的意义。

9.1 分数估计

100分：5人左右。

50分：5人左右。

30分及以上：绝大多数选手。