

Cube Snake 解题报告

绍兴市第一中学 王鉴浩

1 试题来源

CF 198D

2 试题大意

设立方体边长为 n ，编号有以下要求：

1. 每个 $1 \cdot 1 \cdot 1$ 的单位立方体有一个编号，每个单位立方体的编号都不同。
2. 编号相邻的两个单位立方体必须是 6 方向相邻的。
3. 对于 $1 \leq i < n$ ，至少有两个不同的子立方体 $i \cdot i \cdot i$ ，使得内部的所有编号排序后是连续的： $x, x + 1, \dots, x + i^3 - 1$ 。

要求你构造出一种合法的立方体编号，输出任意一种方案。

数据范围： $1 \leq n \leq 50$

时限： $2s$

3 算法介绍

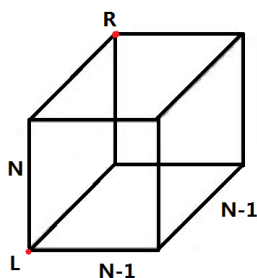
对于一个长度为 x ，宽度为 y ，高度为 z 的长方体，我们用 $x \cdot y \cdot z$ 来表示。

对于此题中的第三个要求，我们构造的流程如下：

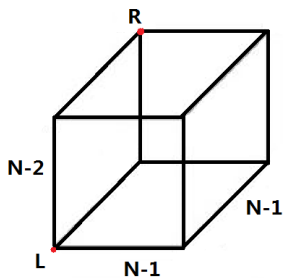
- 在 $n \cdot n \cdot n$ 的两个侧面 $n \cdot n$ 放最小的数字，将其变成 $(n-1) \cdot (n-1) \cdot n$ 。
- 在底层 $(n-1) \cdot (n-1)$ 中放最小的数字；
- 顶层 $(n-1) \cdot (n-1)$ 放最大的数字；
- 中间 $(n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ 乱放；
- 就可以满足有两个不同的子立方体 $(n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-1)$ ，内部的所有编号排序后是连续的。
- 现在考虑中间的长方体 $(n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ 。
- 通过旋转，我们把 $(n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ 转成 $(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-1)$ 。
- 在侧面 $(n-1) \cdot (n-1)$ 放最小的数字，我们可以得到 $(n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-1)$ 。
- 于是，我们就可以递归子问题来解决此题了。

上述构造解决了第三个要求，我们还需要通过一些实现技巧来满足第二个要求：

对于 $(n-1) \cdot (n-1) \cdot n$ 的形式，我们把最小的和最大的如下图放置， L 表示最小的数， R 表示最大的数：



然后把上下两层各遍历一遍，保证上下同步操作，这样使得消完上下两层后， L 和 R 相对位置还是保持一致的。于是我们可以把图转成原来的位置，只是边长不同，具体如下图所示：



如果要递归原问题，需要使得把它消成 $(n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-1)$ 的形式，且要保证 L 和 R 的相对位置不变。我们可以把上图中最前的那一面消掉，这面为 $(n-2) \cdot (n-1)$ ，由于长宽不同，就说明 L 一定能遍历那一面并到达右上角 (使得 L 和 R 的相对位置不变)，具体操作只需要根据 n 的奇偶分情况讨论就可以了。

现在的操作就是 6 方向移动和旋转立方体，这个可以经过直接模拟来解决。

于是上述解法的时间复杂度为 $O(n^3)$ ，空间复杂度为 $O(n^3)$ 。