

## 【题目大意】

维护两个数组， $A[1\sim N]$ ， $B[1\sim N]$ ，支持三种类型的操作：

1、 $A[i] = \max\{A[i], (i - 1) * a + b\}$

2、 $B[i] += (i - 1) * a + b$

3、输出  $A[i] + B[i]$

总共  $Q$  个操作。

## 【解题报告】

因为我们只需要输出  $A[i] + B[i]$ ，且操作间不会互相影响，所以我们可以分开来处理  $A[]$  和  $B[]$  两数组。

一、先考虑  $B[]$  这边，要简单许多。

首先，我们可以把操作 2 改写成：

$$B[i] += i * a + 1 * a + b$$

亦可以写成：

$$B[i] += i * a' + b'$$

此外，显然有：

$$(i * a + b) + (i * c + d) = i * (a + c) + (b + d)$$

因此，我们可以维护一棵线段树。对于每个代表区间  $[l, r]$  的结点，我们记录  $a$  的和以及  $b$  的和（作用于整个区间）。标记不需要下传，当询问  $B[i]$  时，我们从根  $[1, N]$  走到  $[i, i]$  并合并答案即可。

所有与  $B[]$  相关的操作均可在  $O(\log n)$  时间内完成。

二、考虑  $A[]$  这边，略显棘手，不过也很容易理解。

对于每个代表区间 $[l,r]$ 的结点，我们记录一对数  $a$  和  $b$ ，代表对于任意  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ )， $A[i]$ 应当比  $i * a + b$  小。当新的一对  $a'$ 、 $b'$ 操作于该结点时，由于这两个以  $i$  为变量的函数均为线性，因而最多具有一个交点。这是一个非常重要且美妙的性质——它表明只有以下两种情形：

1、 $a'$ 、 $b'$ 完全比  $a$ 、 $b$  优或劣。意即，对于任意  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ )， $a * i + b \leq a' * i + b'$ ，或对于任意  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ )， $a * i + b \geq a' * i + b'$ 。

2、令  $m = (1 + r) / 2$ ，在 $[l,m]$ 或 $[m+1,r]$ 区间中满足情形 1。

因此，当遇到情形 2 时，我们可以递归的更新。又因为一个区间最多对应  $O(\log N)$ 个结点，所以一次更新操作复杂度不超过  $O(\log^2 N)$ 。对于一次询问，我们依然可以从根 $[1,N]$ 走到 $[i,i]$ ，对路径上每组  $a$ 、 $b$ 形成的函数，代入自变量  $i$ ，取函数值的最大值。故查询可以在  $O(\log n)$  时间中完成。

综上，此题可在  $O(Q \log N)$ 到  $O(Q \log^2 N)$ 的时间范围内完成。由于  $N$  的规模较大，我们不能建出整棵线段树。因此我们需要使用动态开结点的方法，对每次操作最多新开  $\log N$  个结点，所以空间复杂度为  $O(Q \log N)$ 。