

Two Roads 题解

雅礼中学 袁宇韬

2015 年 11 月 3 日

1 题目大意

给定平面上的 N 个点，求出两条直线，使得所有点到这两条直线的距离的较小值的平方的平均值最小。只需要输出这个最小的平均值。 $N \leq 100$ 。

2 题解

显然我们只要求出这些距离的平方和的最小值。

先考虑只要求出一条直线的情况。这是一个经典问题，可以设直线方程为 $y = kx + b$ ，则需要最小化

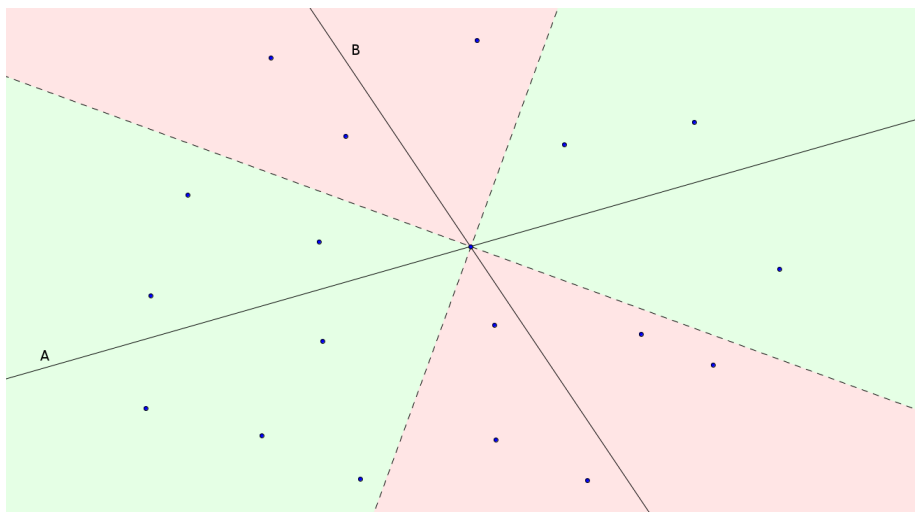
$$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2}{k^2 + 1}$$

可以先固定 k ，求出使答案最优的 b ，再代入并求出使答案最优的 k 。两步均可以求导解决。最终结果较为复杂，可以考虑在程序中计算。

考虑有两条直线的情况。如果已经知道每个点距离哪条直线距离较近，则可以对于两条直线所对应的点分别求出答案。可以枚举所有可能的划分，对每个划分求出答案。这样可以得到一个时间复杂度为 $O(n2^n)$ 的算法。

对于某个划分求出的答案可能并不符合这个划分，但是容易发现此时求出的答案一定不是最优解，因为划分错误时答案一定比对应划分正确时的答案大。所以不用检验方案是否符合枚举的划分。

然而在这些划分中很多划分并没有对于合法的方案。注意到在一个合法的方案中，一定可以作出这两条直线夹角的两条角平分线，则处于对角位置的两个区域会被划分在一起。将这两条角平分线称为划分直线，则两条划分直线一定垂直。如下图所示：



绿色区域的点距离直线 A 较近，红色区域的点距离直线 B 较近。

这样只需要枚举可能的划分方案。但是可能的划分直线有无穷多种，我们需要减少可能的划分直线的数量。

注意到在移动这两条划分直线时，只要没有点穿过这两条划分直线，得到的划分方案不会有变化。我们可以平移这两条划分直线使得这两条划分直线上各有一个点，再保持这两个点不变，在以这两个点为直径的圆上移动两条直线的交点，直到有一条直线上有两个点。由这三个点可以唯一确定这两条划分直线，可以用 $O(n^3)$ 时间枚举这三个点，再用 $O(n)$ 时间计算答案，时间复杂度为 $O(n^4)$ 。但由于常数较大，无法通过本题的测试数据。

在枚举两个点确定第一条划分直线后，第二条划分直线的方向已经确定。如果求出所有点在第一条划分直线上的投影并离散化，则第二条划分直线的相邻两个位置中的划分只相差一个点。注意到上面求出的答案只与 $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n y_i^2$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n y_i$ 和 n 有关，可以在改变划分时维护这些值。由于离散化需要 $O(n \log n)$ 的时间，总时间复杂度为 $O(n^3 \log n)$ ，经过优化可以通过本题。

不过这题还可以继续优化。如果按照极角序枚举第一条划分直线，则在极角增大时离散化的结果会有一些点对交换。总共的点对交换次数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 。可以通过点对交换维护离散化的结果，这样总时间复杂度为 $O(n^3)$ 。

3 官方题解

见<https://discuss.codechef.com/questions/23742/tworoads-editorial>