

# SAB 解题报告

杭州学军中学 金策

## 1 试题来源

PA2015 Round 4

## 2 试题大意

这是一道分布式题目。

给定一个 $n$ 个点， $m$ 条边的无向图，你需要求出它的桥边的个数。

桥边 $(u, v)$ 的定义是所有从 $u$ 到 $v$ 的路径都需要经过这条边。

你可以通过调用库函数来得到第 $i$ 条边的两端点的编号。

## 3 数据规模

$n \leq 200000, m \leq 10^8$ 。

你可以同时在100台电脑上运行你的程序，它们之间可以相互通信。一台电脑发出的信息包的个数不超过1000，一台电脑发出的信息的总大小不超过8MB。

## 4 算法介绍

从2014年开始，波兰PA比赛的第四轮会包含两个分布式题目。去年我打了PA2015的线上赛，这道题就是那次第四轮的第二题。（第一题是对两个长度 $2 \times 10^9$ 级别的字符串求匹配次数）

首先回顾一下用来解决桥边问题的经典的Tarjan算法，它依赖于DFS。在DFS的过程中，之后将会遇到哪些边，以及那时栈中的情况怎样，等等，都

是无法提前知道的，只能一步步执行下来，因此不容易通过并行优化算法。所以直接套用经典算法是行不通的。

再来看一下这道题的数据规模， $n$ 的范围比较小，在一台电脑可以处理的范围内；然而 $m$ 比较大，所以肯定是要把这些边平均分配给每台电脑分别处理的。

令 $k$ 是电脑的数量。我们让每台电脑对分配给它的 $m/k$ 条边跑一遍Tarjan算法，从而得到这些边确定的 $n$ 个点之间的连通关系和双连通关系。

接下来很自然的想到要把两台电脑的信息合并。

首先找一个比较方便的能够表示连通性的方法。我的写法是建一张新图：把同一个双连通分量的点用一个环连在一起，剩下的一些连接两个双连通分量的树边还是和原来一样连接。这样得到的新图是由若干个仙人球组成的（沙漠）。可以根据仙人掌的性质证明它的边数量是 $O(n)$ 级别的。

接下来合并就很简单了，只要把两台电脑求出的新图的所有边都放到一起，然后再跑一遍Tarjan算法。然后把这次得到的连通关系再用一个新的仙人球沙漠表示出来。

为了保证复杂度靠谱，直接一个一个合并是不行的。要充分利用分布式的力量，可以对这 $k$ 台电脑建一个线段树，然后从底向上合并，这样只有 $O(\log k)$ 层合并。

## 5 复杂度分析

首先每个结点要对一个 $n$ 个点， $m/k$ 条边的图跑Tarjan，复杂度是 $O(n + m/k)$ 。

然后看合并的过程，合并次数最多的根结点要进行 $O(\log k)$ 次合并，每次要对 $n$ 个点， $O(n)$ 条边跑Tarjan，复杂度是 $O(n)$ 。

所以总的时间复杂度是 $O(m/k + n \log k)$ 。

再来看一下通信的复杂度。两台电脑要合并信息时，其中一方要发送 $O(n)$ 个整数，另一方进行计算。我们可以规定一台电脑等到之后用不到它的时候，才把合并在自己这里的信息给发送出去，于是每台电脑只需要发送一次信息，也就是 $O(n \log n)$ 个bit。

## 6 总结

目前算法竞赛里面DGCJ和PA是有分布式题的，但国内OI还没有看到过。我觉得UOJ以后肯定有能力评测这样的题目，等到那时说不定会诞生一波新的毒瘤黑科技。嘿嘿嘿。