

ReturnOfTheJedi 解题报告

绍兴市第一中学 王文涛

1 试题来源

TopCoder SRM 678 Div.1 Level 3 ReturnOfTheJedi

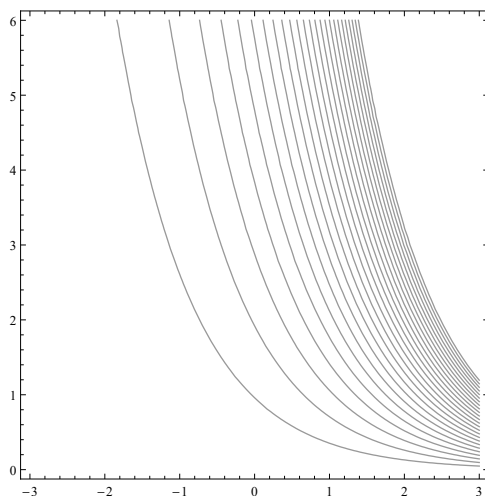
2 试题大意

给定 N 个实数二元组 (p_i, x_i) 。对于所有满足 $1 \leq K \leq N$ 的 K ，你需要从 N 个二元组中选出 K 个使得这 K 个二元组的 x_i 之和与 p_i 之积的积最大，即最大化 $\prod p_i \sum x_i$ 。

数据范围： $N \leq 400$, $1 \leq x_i \leq 10^9$, $0 < p_i \leq 1$

3 算法介绍

考虑把乘法转化为加法，我们对 p_i 取对数。我们可以把每个二元组看成一个向量 $(\log p_i, x_i)$ 。那么就是要求一个向量的组合，求出这些向量之和 $(\sum p_i, \sum q_i)$ ，不妨设为 (X, Y) ，那么要求最小化 $e^X Y$ 。



我们在平面上画出函数 $e^X Y$ 的“等高线”，可以发现对于一些点中函数值最小的那个点，作这个点对应函数“等高线”的切线，其他点都在切线的一侧。也就是说，存在一个方向向量 \vec{d} 使得与其点积最大的答案就是函数值最大的答案。

考虑对于某个 \vec{d} 如何求出最优解。我们把所有向量按与 \vec{d} 的点积排序，取最小的 K 个即可。

考虑逐渐旋转 \vec{d} ，维护每时每刻所有向量与其点积大小的排序。那么如果排序发生变化，也就是交换了相邻的两个元素，此时的切线方向就是这两个点连线的方向。因此只要把所有两两点的连线的斜率求出来作为断点，中间每一段连续的区间内排序都是不变的。每次碰到一个断点只要像冒泡排序一样尝试交换一些元素就好了。这样总的交换次数是 $O(N^2)$ 的。每段连续区间内 $O(N)$ 更新答案，这样总复杂度就是 $O(N^3)$ 。如果动态维护前缀和，每次只更新交换的那些元素的前缀和对应的答案的话就可以做到 $O(N^2)$ 。