# 不相交格路与反射容斥

吴畅

北京市十一学校

January 21, 2024

# Overview

1. 定义与约定
2. 不相交格路
   - 起点和终点固定
   - Pfaffian
   - 终点不固定
   - 起点和终点均不固定
3. 反射容斥
   - 两条斜率为 $1$ 的直线边界
   - 更一般的描述
   - 两个例子

# 定义与约定

# 定义

**Definition (步长，格路)**

称 $\mathbb{Z}^d$ 上的一个向量为一种**步长**，若干步长构成的集合为一个**步长集合**。考虑 $\mathbb{Z}^d$ 上的序列 $P = (P_0, P_1, ..., P_l)$，以及步长集合 $\mathbb{S}$，若满足 $\forall 0 \le i < l, \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \in \mathbb{S}$，则称 $P$ 是步长集合 $\mathbb{S}$ 下的一条长度为 $l$ 的**格路**。

# 定义

**Definition (步长，格路)**

称 $\mathbb{Z}^d$ 上的一个向量为一种**步长**，若干步长构成的集合为一个**步长集合**。考虑 $\mathbb{Z}^d$ 上的序列 $P=(P_0,P_1,...,P_l)$，以及步长集合 $\mathbb{S}$，若满足 $\forall 0\le i<l, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}\in\mathbb{S}$，则称 $P$ 是步长集合 $\mathbb{S}$ 下的一条长度为 $l$ 的**格路**。

更常见的是下面的概念：

**Definition (简单步，简单格路)**

若 $\mathbb{Z}^d$ 上的步长 $s=(s_1,s_2,...,s_d)$ 满足 $\forall 1\le i\le d, s_i\in\{0,1\}$ 且 $\sum_{i=1}^{d} s_i=1$，则称 $s$ 是**简单步**。

步长集合由 $\mathbb{Z}^d$ 上所有简单步构成的格路，称为**简单格路**。

# 约定

从 $A$ 到 $E$，长度为 $m$、步长集合为 $\mathbb{S}$、约束集合为 $R$ 的所有格路（组）构成的集合：

$$L_m(A \to E; \mathbb{S} \mid R)$$

# 约定

从 $A$ 到 $E$，长度为 $m$、步长集合为 $\mathbb{S}$、约束集合为 $R$ 的所有格路（组）构成的集合：

$$L_m(A \to E; \mathbb{S} \mid R)$$

例如 $L\big((0,0) \to (1,1) \mid x \geq y\big) = \{((0,0),(1,0),(1,1))\}$。

# 约定

从 $A$ 到 $E$，长度为 $m$、步长集合为 $\mathbb{S}$、约束集合为 $R$ 的所有格路（组）构成的集合：

$$L_m(A \to E; \mathbb{S} \mid R)$$

例如 $L\big((0,0) \to (1,1) \mid x \geq y\big) = \{((0,0),(1,0),(1,1))\}$。

带权计数，$w$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的函数：

$$GF(\mathscr{M}; w) := \sum_{x \in \mathscr{M}} w(x)$$

# 约定

从 $A$ 到 $E$，长度为 $m$、步长集合为 $\mathbb{S}$、约束集合为 $R$ 的所有格路(组）构成的集合：

$$L_m(A \to E; \mathbb{S} \mid R)$$

例如 $L\big((0,0) \to (1,1) \mid x \geq y\big) = \{((0,0),(1,0),(1,1))\}$。

带权计数，$w$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的函数：

$$GF(\mathscr{M}; w) := \sum_{x \in \mathscr{M}} w(x)$$

通常情况下 $\mathscr{M}$ 是路径或路径组的集合，而 $w$ 同时定义在边、路径和路径组上：路径的权值为所有边权的乘积，路径组的权值为所有路径权值的乘积。

# 不相交格路

# 起点和终点固定

当起点集合和终点集合固定时，有广为人知的 LGV 引理：

**Lemma (Lindström–Gessel–Viennot lemma)**

令 $G$ 是有向无环图，$\mathbf{A}=(A_1,A_2,\dots,A_n),\mathbf{E}=(E_1,E_2,\dots,E_n)$ 均是节点组成的序列，$w$ 是边权函数。$\mathfrak{S}_n$ 表示长度为 $n$ 的排列构成的集合。

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\operatorname{sgn}\sigma)GF(L_G(\mathbf{A}_\sigma\to\mathbf{E}\mid\text{non-intersecting});w)$$
$$=\det_{1\le i,j\le n}\left(GF\big(L_G(A_i\to E_j);w\big)\right)$$

其中 $L_G(\dots)$ 含义与 $L(\dots)$ 基本相同，唯一的区别是语境不再是格路而是有向无环图 $G$ 上的路径。

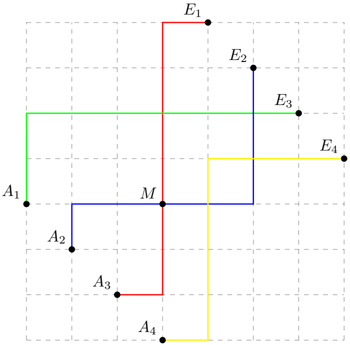
# LGV 引理的简要证明

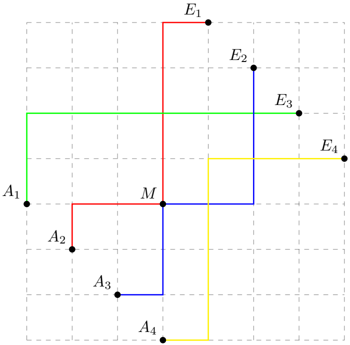
构造一个对合 $\phi$，定义在二元组 $(\sigma, \mathbf{P})$ 上，其中 $\mathbf{P} \in L_G(\mathbf{A}_\sigma \to \mathbf{E})$ 是相交的路径组，满足符号相反、权值不变。

# LGV 引理的简要证明

构造一个对合 $\phi$，定义在二元组 $(\sigma, \mathbf{P})$ 上，其中 $\mathbf{P} \in L_G(\mathbf{A}_\sigma \to \mathbf{E})$ 是相交的路径组，满足符号相反、权值不变。

$\phi$ 的构造：取任一 $G$ 的拓扑序 $\mathscr{A}$。找到最小的交点 $(M, i, j)$，表示 $P_i$ 和 $P_j$ 在 $M$ 处有一交点，其中第一维的比较按照 $\mathscr{A}$ 上的排名进行。交换 $P_i, P_j$ 在 $M$ 前的子路径。



# G-协调

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献，但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

# G-协调

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献，但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

**Definition**

若有向无环图 $G$ 以及其上的顶点集合 $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ 满足，$\forall i < j, k < l$，任意 $P \in L_G(A_i \to E_l)$ 和 $Q \in L_G(A_j \to E_k)$ 相交，则称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 $G$-**协调**的。

# G-协调

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献，但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

**Definition**

若有向无环图 $G$ 以及其上的顶点集合 $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ 满足，$\forall i < j, k < l$，任意 $P \in L_G(A_i \to E_l)$ 和 $Q \in L_G(A_j \to E_k)$ 相交，则称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 $G$-**协调**的。

**Theorem**

令 $G$ 是一张有向无环图，$\mathbf{A} = (A_1, A_2, ..., A_n), \mathbf{E} = (E_1, E_2, ..., E_n)$ 是 $G$-协调的节点序列，$w$ 是边权函数（同样定义在路径和路径组上）。

$$GF(L_G(\mathbf{A} \to \mathbf{E} \mid \text{non-intersecting}); w) = \det_{1\le i,j\le n} \Big(GF\big(L_G(A_j \to E_i); w\big)\Big)$$

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献，但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

**Definition**

若有向无环图 $G$ 以及其上的顶点集合 $\mathbf{A},\mathbf{E}$ 满足，$\forall i<j,k<l$，任意 $P\in L_G(A_i\to E_l)$ 和 $Q\in L_G(A_j\to E_k)$ 相交，则称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 $G$-**协调**的。

**Theorem**

令 $G$ 是一张有向无环图，$\mathbf{A}=(A_1,A_2,...,A_n),\mathbf{E}=(E_1,E_2,...,E_n)$ 是 $G$-协调的节点序列，$w$ 是边权函数（同样定义在路径和路径组上)。

$$GF(L_G(\mathbf{A}\to\mathbf{E}\mid \text{non-intersecting});w)=\det_{1\le i,j\le n}\Big(GF\big(L_G(A_j\to E_i);w\big)\Big)$$

在简单格路的环境下，这个条件更容易被满足，例如 $A_i=(1,a_i),E_i=(n,e_i)$。

# 完美匹配

**Definition (完美匹配)**

称一个长度为 $2n$ 的排列 $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$ 是完美匹配，当且仅当其满足

- $\forall 1 \leq i \leq n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i}$
- $\forall 1 \leq i < n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i+1}$

对所有 $1 \leq i \leq n$，称 $\pi_{2i-1}$ 和 $\pi_{2i}$ 是一对匹配的元素。

# 完美匹配

**Definition (完美匹配)**

称一个长度为 $2n$ 的排列 $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$ 是完美匹配，当且仅当其满足

- $\forall 1 \leq i \leq n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i}$
- $\forall 1 \leq i < n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i+1}$

对所有 $1 \leq i \leq n$，称 $\pi_{2i-1}$ 和 $\pi_{2i}$ 是一对匹配的元素。

记 $\mathfrak{M}_{2n}$ 表示全体长度为 $2n$ 的完美匹配构成的集合。

# 完美匹配

**Definition (完美匹配)**

称一个长度为 $2n$ 的排列 $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$ 是完美匹配，当且仅当其满足

- $\forall 1 \le i \le n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i}$
- $\forall 1 \le i < n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i+1}$

对所有 $1 \le i \le n$，称 $\pi_{2i-1}$ 和 $\pi_{2i}$ 是一对匹配的元素。

记 $\mathfrak{M}_{2n}$ 表示全体长度为 $2n$ 的完美匹配构成的集合。

类似排列，对匹配 $\pi$ 定义 $\operatorname{inv}\,\pi$ 和 $\operatorname{sgn}\,\pi$。此外我们还有一种递归的方法计算 $\operatorname{inv}\,\pi$ 的奇偶性：

取 $\pi$ 中任意一对匹配的元素 $(i, j)$，将它们删去，其余元素在下标和值域上填补空缺。可以得到一个 $\pi' \in \mathfrak{M}_{n-2}$，那么 $\operatorname{inv}\,\pi \equiv \operatorname{inv}\,\pi' + j - i - 1 \pmod 2$。

# Pfaffian

**Definition (反对称矩阵)**

令 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n\times n}$ 是一个方阵，若 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$，则称 $\mathbf{A}$ 是一个反对称矩阵。

# Pfaffian

**Definition (反对称矩阵)**

令 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n\times n}$ 是一个方阵，若 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$，则称 $\mathbf{A}$ 是一个反对称矩阵。

可以发现，反对称矩阵满足主对角线上为 $0$，关于主对角线对称的元素互为相反数。因此，我们可以只用主对角线上方的元素 $(a_{i,j})_{1\le i<j\le n}$ 来描述一个 $n \times n$ 的反对称矩阵 $\mathbf{A}$。

# Pfaffian

## Definition (反对称矩阵)

令 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n\times n}$ 是一个方阵，若 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$，则称 $\mathbf{A}$ 是一个反对称矩阵。

可以发现，反对称矩阵满足主对角线上为 $0$，关于主对角线对称的元素互为相反数。因此，我们可以只用主对角线上方的元素 $(a_{i,j})_{1\le i<j\le n}$ 来描述一个 $n \times n$ 的反对称矩阵 $\mathbf{A}$。

## Definition (Pfaffian)

令 $n$ 是偶数，$\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1\le i<j\le n}$ 是一个反对称矩阵，定义 $\mathbf{A}$ 的 Pfaffian 为

$$\mathrm{Pf}(\mathbf{A}) = \sum_{\pi\in\mathfrak{M}_n} (\operatorname{sgn}\pi) \prod_{i=1}^{n/2} a_{\pi(2i-1),\pi(2i)}$$

# Pfaffian 的性质

**Proposition**

假设 $n$ 是偶数，$A$ 是大小为 $n$ 的反对称矩阵，$X$ 是大小为 $n$ 的方阵

- (a) $\mathrm{Pf}(1)_{1\le i<j\le n}=1$，等价地，$\sum_{\pi\in\mathfrak{M}_n}\mathrm{sgn}\,\pi=1$。
- (b) $\mathrm{Pf}(X^TAX)=\det(X)\mathrm{Pf}(A)$。
- (c) $\mathrm{Pf}(A)^2=\det(A)$。

# Pfaffian 的性质

**Proposition**

假设 $n$ 是偶数，$A$ 是大小为 $n$ 的反对称矩阵，$X$ 是大小为 $n$ 的方阵

a. $\mathrm{Pf}(1)_{1\le i<j\le n} = 1$，等价地，$\sum_{\pi\in\mathfrak{M}_n} \mathrm{sgn}\ \pi = 1$。
b. $\mathrm{Pf}(X^T A X) = \det(X)\mathrm{Pf}(A)$。
c. $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$。

为了求 Pfaffian，可以考虑令 (b) 中的 $X$ 是初等行变换矩阵，得到与 det 类似的消元过程，复杂度同高消。

# 终点不固定的不相交路径

**Theorem**

令 $G$ 是一张有向无环图，$\mathbf{A} = (A_1, A_2, ..., A_{2n}), \mathbf{E} = (E_1, E_2, ..., E_m)$ 是 $G$-协调的节点序列，$w$ 是边权函数。

$$\sum_{\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}, |\mathbf{E}'|=2n} GF\left(L_G(\mathbf{A} \to \mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}); w\right) = \mathrm{Pf}_{1 \le i < j \le 2n}\left(Q_G(i, j; w)\right)$$

其中 $Q_G(i, j; w)$ 表示对所有不交路径对 $(P', P'')$，满足起点分别为 $A_i$ 和 $A_j$，终点均为 $\mathbf{E}$ 中的点，$\sum_{(P', P'')} w(P')w(P'')$。

# 终点不固定的不相交路径

**Theorem**

令 $G$ 是一张有向无环图，$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_{2n}), \mathbf{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$ 是 $G$-协调的节点序列，$w$ 是边权函数。

$$\sum_{\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}, |\mathbf{E}'| = 2n} GF\left(L_G(\mathbf{A} \to \mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}); w\right)$$
$$= \mathrm{Pf}_{1 \le i < j \le 2n}\left(Q_G(i, j; w)\right)$$

其中 $Q_G(i, j; w)$ 表示对所有不交路径对 $(P', P'')$，满足起点分别为 $A_i$ 和 $A_j$，终点均为 $\mathbf{E}$ 中的点，$\sum_{(P', P'')} w(P')w(P'')$。

我们希望仿照 LGV 引理的证明，构造对合 $\phi$ 将二元组 $(\pi, \mathbf{P})$ 中 $\mathbf{P}$ 相交的那些消掉。

# 一个引理

**Lemma**

令 $n,i,j$ 是三个正整数，满足 $1 \le i < j \le n$。对完美匹配 $\pi \in \mathfrak{M}_n$，满足在 $\pi$ 中 $i$ 和 $j$ 不匹配，令 $\pi'$ 表示交换 $\pi$ 中 $i$ 和 $j$ 的位置，然后在保持匹配关系不变的情况下，重排形成的新完美匹配。假如对所有 $i < k < j$，在 $\pi$ 中 $k$ 和 $i,j$ 均不匹配，那么 $\mathrm{sgn}\ \pi = -\mathrm{sgn}\ \pi'$。

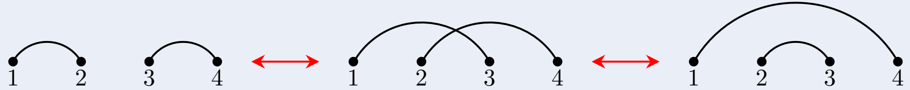
# 一个引理

## Lemma

令 $n,i,j$ 是三个正整数，满足 $1 \le i < j \le n$。对完美匹配 $\pi \in \mathfrak{M}_n$，满足在 $\pi$ 中 $i$ 和 $j$ 不匹配，令 $\pi'$ 表示交换 $\pi$ 中 $i$ 和 $j$ 的位置，然后在保持匹配关系不变的情况下，重排形成的新完美匹配。假如对所有 $i<k<j$，在 $\pi$ 中 $k$ 和 $i,j$ 均不匹配，那么 $\mathrm{sgn}\ \pi = -\mathrm{sgn}\ \pi'$。

## Proof.

根据引理中所给的条件，$i,j$ 及其匹配元素的变换情况，只可能为下图两种中的一种。用之前提到的方法比较 $\mathrm{inv}\ \pi$ 和 $\mathrm{inv}\ \pi'$ 的奇偶性，也就是分别删去 $i,j$ 及其匹配元素并检查贡献的不同。不难验证，在两种情况下，该引理均是正确的。




□

# 定理的证明

**Proof.**

$\phi$ 的构造：取任一 $G$ 的拓扑序 $\mathscr{A}$。对于一个相交路径组 $\mathbf{P}$，我们将每个交点描述为 $(M,i,j)$ 的形式，表示 $P_i$ 和 $P_j$ 在 $M$ 处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个，其中第一维的比较按照 $\mathscr{A}$ 上的排名进行。交换 $P_i, P_j$ 在 $M$ 前的子路径；同时交换 $i,j$ 在 $\pi$ 中的位置，保持元素的匹配关系不变的情况下重排。

# 定理的证明

**Proof.**

$\phi$ 的构造：取任一 $G$ 的拓扑序 $\mathscr{A}$。对于一个相交路径组 $\mathbf{P}$，我们将每个交点描述为 $(M, i, j)$ 的形式，表示 $P_i$ 和 $P_j$ 在 $M$ 处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个，其中第一维的比较按照 $\mathscr{A}$ 上的排名进行。交换 $P_i, P_j$ 在 $M$ 前的子路径；同时交换 $i, j$ 在 $\pi$ 中的位置，保持元素的匹配关系不变的情况下重排。

不难发现 $w(\mathbf{P})$ 不变，接下来只需要说明符号取反。首先 $Q_G(i, j; w)$ 的定义保证了 $i$ 和 $j$ 在 $\pi$ 中不匹配。

# 定理的证明

**Proof.**

$\phi$ 的构造：取任一 $G$ 的拓扑序 $\mathscr{A}$。对于一个相交路径组 $\mathbf{P}$，我们将每个交点描述为 $(M,i,j)$ 的形式，表示 $P_i$ 和 $P_j$ 在 $M$ 处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个，其中第一维的比较按照 $\mathscr{A}$ 上的排名进行。交换 $P_i, P_j$ 在 $M$ 前的子路径；同时交换 $i,j$ 在 $\pi$ 中的位置，保持元素的匹配关系不变的情况下重排。

不难发现 $w(\mathbf{P})$ 不变，接下来只需要说明符号取反。首先 $Q_G(i,j;w)$ 的定义保证了 $i$ 和 $j$ 在 $\pi$ 中不匹配。

假设存在 $i<k<j$ 和 $i,j$ 其一匹配，不妨设 $k$ 和 $i$ 匹配。记 $P_i, P_k$ 对应的的终点编号分别为 $id_i, id_k$，$P_i, P_j$ 分别被 $M$ 分割成 $AB$ 和 $CD$。根据假设 $P_k$ 和 $A,B$ 均不交，而由于 $M$ 是拓扑序最小的交点，$P_k$ 和 $C$ 也不相交。由于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 $G$-协调的，必然有 $id_k > id_i$。现在考虑路径 $P_k$ 以及 $CB$，由于 $CB$ 的终点 $id_i$ 在 $id_k$ 前面，$P_k$ 和 $CB$ 必然相交，而前面推出了 $P_k$ 和 $C,B$ 均不相交，矛盾。 $\square$

# 续

**Proof.**

这样一来，$\phi$ 对 $\pi$ 的影响，也就是交换 $i$ 和 $j$ 的位置，满足引理中的条件，因此符号必然取反。由于 $A, C$ 上不存在其它的交点，也容易说明再进行一次变换会回到初始状态，进而 $\phi$ 是对合。
最后，待验证的是，每组合法的不交路径恰好贡献 $1$。由之前的命题这也是显然的。

$\square$

# 续

**Proof.**

这样一来，$\phi$ 对 $\pi$ 的影响，也就是交换 $i$ 和 $j$ 的位置，满足引理中的条件，因此符号必然取反。由于 $A, C$ 上不存在其它的交点，也容易说明再进行一次变换会回到初始状态，进而 $\phi$ 是对合。
最后，待验证的是，每组合法的不交路径恰好贡献 $1$。由之前的命题这也是显然的。

$\square$

假如路径数量（同起点集合）是奇数，我们只需向 $G$ 加一个没有任何邻边的虚点 $v$，同时将 $v$ 添加到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 的末尾。这样一来，起点集合的 $v$ 只能和终点集合的自己以唯一的方式匹配，答案不变但转化为了偶数的情况。

# 起点也不固定

事实上，起点也可以不固定。更多信息可以参考本人的集训队论文以及互测题《网格图最大流计数》。

# 起点也不固定

事实上，起点也可以不固定。更多信息可以参考本人的集训队论文以及互测题《网格图最大流计数》。

**Theorem**

令 $G$ 是一张有向无环图，$\mathbf{A}=(A_1,A_2,\dots,A_n),\mathbf{E}=(E_1,E_2,\dots,E_m)$ 是节点序列，满足 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 $G$-协调的，$w$ 是边权函数。

$$\sum_{s\geq 0} x^s \sum_{\mathbf{A}'\subseteq\mathbf{A},\mathbf{E}'\subseteq\mathbf{E},|\mathbf{A}'|=|\mathbf{E}'|=s} GF\left(L_G\left(\mathbf{A}'\to\mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}\right);w\right)$$

当 $n$ 是奇数时 $=\mathrm{Pf}_{1\leq i<j\leq n+1}((-1)^{i+j-1}+x^2Q_G(i,j;w))$

其中 $Q_G(i,j;w)$ 在 $j\leq n$ 时与前述定义一致，而
$Q_G(i,n+1;w)=x^{-1}\sum_{E\in\mathbf{E}} GF(L(A_i\to E);w)$；

当 $n$ 是偶数时 $=\mathrm{Pf}_{1\leq i<j\leq n+2}((-1)^{i+j-1}+x^2Q_G(i,j;w))$

其中 $Q_G(i,j;w)$ 在 $j\leq n+1$ 时定义同上，而 $Q_G(i,n+2;w)=0$。

# 反射容斥

# 两条斜率为 $1$ 的直线边界

比较常见的反射容斥：

# 两条斜率为 1 的直线边界

比较常见的反射容斥：

**Theorem**

令 $n, m$ 是非负整数，$l, r$ 是整数，满足 $l < 0 < r, n + l < m < n + r$，从 $(0, 0)$ 到 $(n, m)$，始终不与 $y = x + l$ 和 $y = x + r$ 相交的格路数量为

$$\left|L\big((0,0) \to (n,m) \mid x + l < y < x + r\big)\right| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \binom{n+m}{n - k(r-l)} - \binom{n+m}{n - k(r-l) + r} \right)$$

# 两条斜率为 1 的直线边界

比较常见的反射容斥：

**Theorem**

令 $n, m$ 是非负整数，$l, r$ 是整数，满足 $l < 0 < r, n + l < m < n + r$，从 $(0, 0)$ 到 $(n, m)$，始终不与 $y = x + l$ 和 $y = x + r$ 相交的格路数量为

$$\begin{aligned}&\left|L((0,0) \to (n,m) \mid x + l < y < x + r)\right| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \binom{n+m}{n - k(r-l)} - \binom{n+m}{n - k(r-l) + r} \right)\end{aligned}$$

简单来说，将一条路径与两直线相交的情况写成字符串 $s$：

$$\begin{aligned}[s = \varnothing] = [\varnothing \subseteq s] - [L \subseteq s] - [R \subseteq s] + [LR \subseteq s] + [RL \subseteq s] \\ - [LRL \subseteq s] - [RLR \subseteq s] + \dots\end{aligned}$$

# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

在 $\mathbb{R}^d$ 上，令 $\mathscr{H}$ 是一个超平面构成的有限集合，$W$ 是将 $\mathscr{H}$ 中所有元素看成边界，生成的反射群。注意到 $W$ 中的一些反射变换并不沿着 $\mathscr{H}$ 中的超平面进行，那么记 $\mathscr{R}$ 表示 $W$ 中的所有元素对应的超平面的集合。

# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

在 $\mathbb{R}^d$ 上，令 $\mathscr{H}$ 是一个超平面构成的有限集合，$W$ 是将 $\mathscr{H}$ 中所有元素看成边界，生成的反射群。注意到 $W$ 中的一些反射变换并不沿着 $\mathscr{H}$ 中的超平面进行，那么记 $\mathscr{R}$ 表示 $W$ 中的所有元素对应的超平面的集合。

$\mathscr{R}$ 中的超平面将 $\mathbb{R}^d$ 分割为许多区域，$\mathbb{R}^d - \bigcup_{H\in\mathscr{R}} H$ 中的连通块被称为**腔**。不难发现，对于任意腔 $C$，取 $w \in W$，那么 $w(C)$ 两两不同且覆盖了全部的腔。

# 一些约定

对反射容斥比较理想的描述，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论。

在 $\mathbb{R}^d$ 上，令 $\mathscr{H}$ 是一个超平面构成的有限集合，$W$ 是将 $\mathscr{H}$ 中所有元素看成边界，生成的反射群。注意到 $W$ 中的一些反射变换并不沿着 $\mathscr{H}$ 中的超平面进行，那么记 $\mathscr{R}$ 表示 $W$ 中的所有元素对应的超平面的集合。

$\mathscr{R}$ 中的超平面将 $\mathbb{R}^d$ 分割为许多区域，$\mathbb{R}^d - \bigcup_{H\in\mathscr{R}} H$ 中的连通块被称为**腔**。不难发现，对于任意腔 $C$，取 $w \in W$，那么 $w(C)$ 两两不同且覆盖了全部的腔。

经过如上的若干定义，我们已经具备了描述更一般的反射容斥的工具。然而，为了使反射容斥适用，步长集合也需要加以约束，使得路径无法在不接触边界的情况下越过边界。为此，我们通过定义 $k_H$ 和 $r_H$ 来实现这一点，其中 $H \in \mathscr{H}$。

# 反射容斥

## Theorem

令 $C$ 是反射群 $W$ 对应的一个腔，由超平面集合 $\mathscr{H}$ 生成。取步长集合 $\mathbb{S}$，使得对任意 $w\in W$，$w(\mathbb{S})=\mathbb{S}$，且对任意 $H\in\mathscr{H}, s\in\mathbb{S}$，内积 $\langle s, r_H\rangle$ 的值为 $0$ 或 $\pm k_H$。其中 $r_H$ 是一和 $H$ 垂直的非零向量，$k_H$ 是固定常数，它们都只和 $H$ 有关。
对于 $C$ 中任意两个整点 $A, E$，满足对任意 $H\in\mathscr{H}$，$\langle A, r_H\rangle$ 和 $\langle E, r_H\rangle$ 都是 $k_H$ 的整数倍。从 $A$ 到 $E$，恰好 $m$ 步，且始终在 $C$ 内部的格路数量为

$$\left|L_m(A\to E;\mathbb{S}\mid \text{inside } C)\right| = \sum_{w\in W}(\det w)\left|L_m(w(A)\to E;\mathbb{S})\right|$$

# 反射容斥

## Theorem

令 $C$ 是反射群 $W$ 对应的一个腔，由超平面集合 $\mathscr{H}$ 生成。取步长集合 $\mathbb{S}$，使得对任意 $w \in W$，$w(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$，且对任意 $H \in \mathscr{H}, s \in \mathbb{S}$，内积 $\langle s, r_H \rangle$ 的值为 $0$ 或 $\pm k_H$。其中 $r_H$ 是一和 $H$ 垂直的非零向量，$k_H$ 是固定常数，它们都只和 $H$ 有关。
对于 $C$ 中任意两个整点 $A, E$，满足对任意 $H \in \mathscr{H}$，$\langle A, r_H \rangle$ 和 $\langle E, r_H \rangle$ 都是 $k_H$ 的整数倍。从 $A$ 到 $E$，恰好 $m$ 步，且始终在 $C$ 内部的格路数量为

$$\left| L_m(A \to E; \mathbb{S} \mid \text{inside } C) \right| = \sum_{w \in W} (\det w) \left| L_m(w(A) \to E; \mathbb{S}) \right|$$

下面给出两个具体例子来理解这个定理。

# Example1

考虑在 $\mathbb{Z}^2$ 中，步长集合为 $\{(1,-1),(1,1),(F,0)\}$，且始终不低于 $x$ 轴的一类格路。当 $F=1$ 时，对应的格路称为 **Motzkin 路**。当 $F=2$ 时，对应的格路称为 **Schröder 路**。

# Example1

考虑在 $\mathbb{Z}^2$ 中，步长集合为 $\{(1,-1),(1,1),(F,0)\}$，且始终不低于 $x$ 轴的一类格路。当 $F=1$ 时，对应的格路称为 **Motzkin 路**。当 $F=2$ 时，对应的格路称为 **Schröder 路**。

## Corollary

令 $a,c$ 是整数，$b,d$ 是非负整数，从 $(a,b)$ 到 $(c,d)$ 的 Schröder 路的数量为

$$\left|L\big((a,b)\to(c,d);S=\{(1,-1),(1,1),(2,0)\}\mid y\geq 0\big)\right| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k}\left(\binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}-\binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a+b+2)/2}\right)$$

# Example1

**Proof.**

如果没有 $y \geq 0$ 的限制，可以直接枚举 $(2,0)$ 走了多少步，而剩下的步长和简单步本质相同，只需将坐标系旋转 45 度。那么我们有

$$\left|L((a,b) \to (c,d); S)\right| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}$$

应用反射容斥，将问题转化为从 $(a,b)$ 到 $(c,d)$ 的自由 Schröder 路数量，减去从 $(a,b)$ 到 $(c,-d-2)$ 的自由 Schröder 路数量，代入上式即可完成证明。 $\square$

# Example1

**Proof.**

如果没有 $y \geq 0$ 的限制，可以直接枚举 $(2,0)$ 走了多少步，而剩下的步长和简单步本质相同，只需将坐标系旋转 45 度。那么我们有

$$\left|L((a,b) \to (c,d);S)\right| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k}\binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}$$

应用反射容斥，将问题转化为从 $(a,b)$ 到 $(c,d)$ 的自由 Schröder 路数量，减去从 $(a,b)$ 到 $(c,-d-2)$ 的自由 Schröder 路数量，代入上式即可完成证明。 $\square$

这类格路均适用反射容斥解决，其本质在于较为特殊的 $(F,0)$ 步长与边界 $y=-1$ 平行，对应了 $\langle s, r_H \rangle = 0$ 的情况。

# Example1

**Proof.**

如果没有 $y \geq 0$ 的限制，可以直接枚举 $(2,0)$ 走了多少步，而剩下的步长和简单步本质相同，只需将坐标系旋转 45 度。那么我们有

$$\left|L((a,b) \to (c,d); S)\right| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}$$

应用反射容斥，将问题转化为从 $(a,b)$ 到 $(c,d)$ 的自由 Schröder 路数量，减去从 $(a,b)$ 到 $(c,-d-2)$ 的自由 Schröder 路数量，代入上式即可完成证明。 □

这类格路均适用反射容斥解决，其本质在于较为特殊的 $(F,0)$ 步长与边界 $y=-1$ 平行，对应了 $\langle s, r_H \rangle = 0$ 的情况。

另外，此时可以取 $r_H = (0,1), k_H = 1$，那么所有满足 $\langle s, r_H \rangle = k_H$ 的步长都可以成对加入进步长集合，即 $(x,1)$ 和 $(x,-1)$。

# Example2

## Corollary

令 $d$ 是正整数，$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_d)$ 和 $\mathbf{e}=(e_1,e_2,...,e_d)$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 中的两格点，且满足 $\forall 1\le i<d, a_i<a_{i+1}, e_i<e_{i+1}$。从 $\mathbf{a}$ 走到 $\mathbf{e}$，且始终保持 $x_1<x_2<...<x_d$ 的路径数量为

$$\left|L\left(\mathbf{a}\to\mathbf{e}\mid x_1<x_2<...<x_d\right)\right|=\left(\sum_{i=1}^{d}(e_i-a_i)\right)!\det_{1\le i,j\le d}\left(\frac{1}{(e_i-a_j)!}\right)$$

# Example2

**Proof.**

在该情境中，上述定理中的概念 $\mathscr{H} = \{x_i = x_{i+1} \mid 1 \le i < d\}, \mathscr{R} = \{x_i = x_j \mid 1 \le i < j \le d\}$，而 $W$ 对应了全体 $\{1, 2, ..., d\}$ 的置换，因此我们有

# Example2

## Proof.

在该情境中，上述定理中的概念 $\mathscr{H} = \{x_i = x_{i+1} \mid 1 \leq i < d\}, \mathscr{R} = \{x_i = x_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$，而 $W$ 对应了全体 $\{1, 2, \ldots, d\}$ 的置换，因此我们有

$$\begin{aligned}
&\left|L\big(\mathbf{a} \to \mathbf{e} \mid x_1 < x_2 < \ldots < x_d\big)\right| \\
=& \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} (\mathrm{sgn}\ \sigma) \left|L(\mathbf{a}_\sigma \to \mathbf{e})\right| \\
=& \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} (\mathrm{sgn}\ \sigma) \frac{\left(\sum_{i=1}^{d} (e_i - a_i)\right)!}{\prod_{i=1}^{d} (e_i - a_{\sigma(i)})!} \\
=& \left(\sum_{i=1}^{d} (e_i - a_i)\right)! \det_{1 \leq i,j \leq d} \left(\frac{1}{(e_i - a_j)!}\right)
\end{aligned}$$

□

# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV)。

# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV)。

这里给出了用反射容斥的证明，也在一定程度上，揭示了不相交格路与反射容斥的关系。

# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV)。

这里给出了用反射容斥的证明，也在一定程度上，揭示了不相交格路与反射容斥的关系。

本课件仅是抛砖引玉的简单介绍了格路计数中两个比较常见的概念，更多的内容可以参考本人的集训队论文。也期待格路计数在 OI 中的更广泛的应用。

# 后话

最后的例子是一个非常经典的问题，但在许多地方都是用 LGV 引理来解释的（事实上其形式确实非常像 LGV)。

这里给出了用反射容斥的证明，也在一定程度上，揭示了不相交格路与反射容斥的关系。

本课件仅是抛砖引玉的简单介绍了格路计数中两个比较常见的概念，更多的内容可以参考本人的集训队论文。也期待格路计数在 OI 中的更广泛的应用。

谢谢大家！