试题泛做表格

1.D11236

试题编号

Codechef SEP 12

名称

Knight Moving

题目大意

给定一个无限大的棋盘，一个骑士可以从点(x,y)移动到(x+a1,y+b1)或(x+a2,y+b2)。问从点(0,0)到点(X,Y)有多少种方案。

注：跳到(X,Y)后还可以继续跳。两种方案不同当且仅当，存在 i 使得两种方案在跳完第 i 步时位置不同。图中存在 k 个障碍点，骑士不能跳到任何一个障碍点。本题有 t 组数据。

数据范围：$0 \le k \le 15$，$1 \le t \le 5$，所有坐标绝对值小于 500

算法讨论

首先需排除 a1,b1,a2,b2 均为 0 的情况。然后分为两种情况。

1.当 a1*b2=b1*a2 时，可以发现整个问题可以转换为一个一维的问题。可以将每个点向从这个点跳一步能到的点连一条边，转化成一副图，只需要考虑有可能到的点即可，而对于超过终点的点，可以用一个点代替。用 tarjan 算法判断转换后的图是否存在一条从起点到终点的带环路径。如果存在，则答案为无穷，否则可以按拓扑序进行 dp 得出答案。

2.否则，可以发现如果将做了 k1 次第一种移动 k2 次第二种移动的所有方案看作做一种，那么骑士移动到图中的每一个点至多只有一种方案。而最终方案可以通过这种方案用组合数算出。用容斥的方法扣掉障碍物的情况即可。

时空复杂度

时间：O(t*max(2^k,max(X,Y)))

空间：O(max(X,Y))

2.D11237

试题编号

Codechef SEP 12

名称

Annual Parade

题目大意

给定一个 n 个点 m 条边的有向图，现在需要用若干环和路径覆盖所有点至少一次。每个环的花费，为环上的边权和。每条路径的花费为路径上的边权和加 C。路径可以是一个点，花费为 C。有 k 组询问，每组询问给定 C 问最小花费。

数据范围：$2 \le n \le 250$，$1 \le m \le 30000$，$1 \le k \le 10000$

算法讨论

将被环或路径覆盖的点，看成是被这个点所在的环或路径上的前一个点所覆盖，而如果是路径的起点则是用 C 的花费覆盖。一个点可能被覆盖多次，可以发现，如果一个点被覆盖了多次，一定是因为其他条路径或环，从这里经过比在这里断开更优，其目的并不是覆盖这点。也就是说，每个点最多被其他点有目的覆盖一次就够了，花费则是其他点到这点的最短距离。如果 C 不变，用费用流即可解决。对于不同的 C，如果两个询问的最优方案中路径的个数相同那么，它们的最优值扣掉 C 所带来的花费后一定相等。于是只需知道对于所有 i，方案中有 i 条路径的最优解即可。

时空复杂度

时间：O(n^3+maxflow(n*2,n^2)+k*n) maxflow(n,m)为 n 个点 m 条边的费用流效率

空间：O(n^2)

3.D11239

试题编号

Codechef JUN 14

名称

Two Companies

题目大意

给定一个 n 个点的树和两个树上路径集合，大小分别为 m1，m2。集合中每一条路径有一个权值。想从两个集合中选取若干路径，使得不同集合的路径，在树上没有公共点。问满足条件的方案中权值和最大为多少。

数据范围：1 ≤ n ≤ 100000，1 ≤ m1,m2 ≤ 700

算法讨论

如果选择了一条路径，那么另一个集合中与这条路径有公共点的边则不能选。可以发现这是一个经典的最小割模型。用源和汇分别表示两个集合的路径是否选。

可以发现如果两条路径有公共点那么某一条路径两端点的 lca 一定在另一条路径上。由此可以判断两条路径是否有公共点。

时空复杂度

时间：O(m1*m2^log(n)+n*log(n)+maxflow(m1+m2,m1*m2))

maxflow(n,m)为 n 个点 m 条边的网络流效率

空间：O(n*log(n)+m1*m2)

4.D11240

试题编号

Codechef JUN 14

名称

Sereja and Arcs

题目大意

数轴上有 n 个点，坐标分别为(1,0)，(2,0)…(n,0)。每个点有一个颜色，所以颜色相同的点对间都画一个这种颜色的半圆弧。问有多少对颜色不同的圆弧相交。

数据范围：1 ≤ n ≤ 100000

算法讨论

将圆弧分为两类，一类为圆弧颜色所对应的点的个数大于 k 称作 A 类，其他为另一类称作 B 类。统计答案时也分为两类。

1.A 类圆弧与其它圆弧的相交对答案的贡献

首先枚举 A 类圆弧的颜色 k，计算该颜色对答案的贡献。对于每个其他颜色的点计算，以这点为一端的圆弧与颜色为 k 的圆弧的相交的个数。将以这个点为左端的圆弧和以这个点为右端的圆弧分别计算。计算左端时，可以从右往左依次计算，对于一个颜色不为 k 的点，其答案可以通过最近的与这点颜色相同的点的答案得到。计算右端时情况类似。这可能导致同为 A 类的情况被算两次需减掉。

2.B 类圆弧与 B 类圆弧对答案的贡献

可以发现总共的圆弧个数不多，可以将每个圆弧看作一个二维点，两个圆弧相交，相当于两个点满足一个二维偏序。因此可以通过排序加树状数组的方法解决。

当 k=(n*logn)^0.5 时，总复杂度为 O(n*(n*log(n))^0.5)。

时空复杂度

时间：O(n*(n*log(n))^0.5)

空间：O(n)

5.D11243

试题编号

Codechef JAN 12

名称

Card Shuffle

题目大意

给一个 n 张牌的牌堆。开始时从顶到底牌面为别为 1，2，3，...，n。有 m 次操作，每次操作，先将顶部 A 张牌那做，再将顶部 B 张牌拿走，按原来顺序放回开始拿走的 A 张牌，再拿走 C 张，将开始拿走的 B 张牌一张一张的放回，即倒序放回，最后将拿走的 C 张牌按原序放回。问按从顶到底的顺序输出每张牌的牌面。

数据范围：$1 \le n,m \le 100000$

算法讨论

将牌堆看作一个数列，所有的操作均可以用 splay 进行维护。

时空复杂度

时间：O(m*log(n))

空间：O(n)

6.D11244

试题编号

Codechef JAN 12

名称

Misinterpretation 2

题目大意

给定一种字符串置换，将一个字符串第 2k 个的字符移到第 k 个，将其他字符移到后面，且相对位置不变。有 t 组询问，每次询问长度在 L 到 R 之间的字符串中有多少个满足置换后字符串与原来相同。

注：字符集大小为 26

数据范围：$1 \le t \le 5$，$1 \le L \le R \le 10^{10}$，$R - L \le 50000$

算法讨论

将长度为 n 的字符串的每个位置与一次置换之前的位置连一条边，所形成的图中环的个数记为 f[n]，那么长度为 n 的答案即为 26^f[n]。考虑如何求 f[n]。

对于一个长度为 n 的字符串，第 i 个位置将会与(i*2)%p(a%b 表示 a 模 b)连边，其中如果 n 为奇数那么 p 为 n 如果 n 为偶数那么 p 等于 n+1。因此可以发现当 n 为偶数时 f[n]=f[n+1]-1。考虑当 n 为奇数时如何求 f[n]。

考虑所有与 n 互质的位置，这样的位置有 phi[n]个(phi 表示欧拉函数)，由欧拉定理可知，这些位置会构成若干长度一样的环，且这些环的长度 x 是 phi[n]的因子中最小的满足 2^x%n=1 的数。因此对 phi[n]分解质因数，对于每个质因子取其满足条件的最小指数既是环长。phi[n]/x 即为这些位置构成环的个数，记为 g[n]。

构成对于不与 n 互质的位置，可以发现对于所有与 n 的最大公约数为 k 的位置所构成的环的个数为 g[n/k]，因此可以先预处理出所有可能 g[n]，再计算所有的 f[n]，最后统计答案。

由于 n 是连续的，所以所有可能的 g[n]只有 n*ln(n)个。在处理 g 时，如果 n 和 m 互质那么，g[n*m]=g[n]*g[m]*gcd(phi[n]/g[m],phi[m]/g[m])，因此可以先预处理出 g[p^k]的值再计算其他的，其中 p 为质数，而这样的 g 几乎可以认为只有 O(R-L)个。

时空复杂度

时间：O(D*log(R)^2) D=R-L

空间：O(D)

7.D11245

试题编号

Codechef JUL 12

名称

Sereja and Equality

题目大意

称两个长度为 n 的数组 A,B 相似，当且仅当其按大小离散后完全相同。对于两个排列 P1，P2，定义函数 F(P1,P2)等于满足 P1[l…r]相似于 P2[l…r](1 ≤ l ≤ r ≤ n)并且 P1[l…r]包含不超过 E 个逆序对的数对(l,r)的数目。问对于所有满足 P1,P2 为 n 的排列的 F(P1,P2)的总和是多少。包含 t 组数据。

数据范围：1 ≤ t ≤ 10000，1 ≤ n ≤ 500，E ≤ 1000000

算法讨论

对于 n 枚举计算长度为 k 的区间对答案的贡献 x。用 f[i][j]表示长度为 i 的排列中逆序对小于等于 j 的排序个数则，c[i][j]表示从 i 个中取 j 个的方案数，fac[i]表示 i 的阶乘。

那么 x=f[k][E]*(n-k+1)*(c[n][i]*fac[n-i])^2

计算 f 时可用前缀和优化至 O(n^3)。由于空间限制，需先将 t 组数据读入计算完长度为 k 的后直接记入答案，将 f 的第一维优化掉。

时空复杂度

时间：O(t*n+n^3)

空间：O(n^2+t)

8.D11246

试题编号

Codechef JUL 12

名称

Game of Numbers

题目大意

给定两个长度为 n 的数组 A 和 B。每次选择两个数对(i,j)，(p,q)，满足 Bj>Ai，Bp<Aq，且 gcd(Aq,Bp,Ai,Bj)≠1。每个数对至多被选择一次，问最多可以选择几对。有 t 组数据

数据范围：1 ≤ n ≤ 400，1 ≤ t ≤ 10，数组中的值小于等于 10^9

算法讨论

这是一个经典的网络流模型。对于每个数对(a,b)可以将 gcd(a,b)相同的且 Aa>Bb(或 Aa<Bb)的合在一起当作一个点。将所有点满足 Aa>Bb 的从源朝这个点连一条流量为这个点所代表的数对个数的边，反之则从这点朝汇连边。每一次选择相当与一条从源到汇的流量。对于所有因子中有 k 的两边点对，都可以构成一条流量。因此还需建若干额外点，表示一个因子为 k 的中介点，将所有因子中有 k 的点都朝这个点连边。这样的 k 只需质数即可。

由于 gcd(a,b)一定为也是 a 和 b 的因子，所以总的额外点数小于 O(n*log(D))，D 为数组中的最大值。

时空复杂度

时间：O(maxflow(n*n+n*log(D),n*n*log(D))) D 为数组中的最大值

maxflow(n,m)为 n 个点 m 条边的网络流效率

空间：O(n*n*log(D))