CasinoGame 解题报告

绍兴一中 张恒捷

1 试题来源

Topcoder SRM 643 1050pts

2 试题大意

你正在玩一个游戏，你的初始分数是0分。有一列n个实数a_i，每回合你等概率随机选择一个数，那个数加入到了你的分数然后被删去了，之后其他数字会产生影响，直到所有数字都没了。

对于剩下的其他数字，影响有3种：

1.有33%的概率这个数字会被删掉。（且不会加入到你的分数中）

2.有33%的概率这个数字除以2。

3.有33%的概率这个数字变成了它的平方根。

4.有1%的概率这个数字变成了它最初时的数 a_i。

每个数字之间的影响是互不关联的。

求你的分数的期望。

数据范围：

$n \le 1000, a_i \le 1000$

3 算法介绍

一开始看这道题会觉得状态不好设计，甚至连暴力都难以实现。所以需要更进一步的分析。

由于数字之间的影响是独立的，所以

$$\mathbb{E}(Ans) = \sum_i \mathbb{E}(a_i)$$

现在题目简化成了求每个数字对答案贡献的期望。

由于

$$\mathbb{E}(a_i) = \sum_s P(s) \times f_s(a_i)$$

其中 s 为由除以2与开根号所组成的操作序列，$f_s(x)$表示 x 经过 s 这个操作序列后得到的值。这个式子的意思就是说a_i 对答案的贡献等同于枚举它最终加入到答案时所经过的操作序列，然后累计相应的值。

这样就可以成功的推出我们的第一个算法。

3.1 算法1

假设现在考虑x这个数字。

我们可以用dp来求上式中的$P(s)$。$f(i,j,k)$表示已经经过了i回合了，x还没有被删除，当前序列只剩下 j 个数字，并且 x 已经经过了k这个操作序列的概率。由于操作只有两种，所以操作序列可以用一个二进制数来表示。转移时枚举这回合有多少数字被删掉了，可以得到转移：

$$\begin{cases} f(i,j,k) \cdot \frac{1}{j} \to P(k) \\ f(i,j,k) \cdot \frac{j-1}{j} \cdot \binom{j-2}{x} \cdot 0.33^x \cdot 0.67^{j-2-x} \cdot 0.33 \to f(i+1, j-x-1, k + `/2')(x \le j-2) \\ f(i,j,k) \cdot \frac{j-1}{j} \cdot \binom{j-2}{x} \cdot 0.33^x \cdot 0.67^{j-2-x} \cdot 0.33 \to f(i+1, j-x-1, k + `\sqrt{}')(x \le j-2) \end{cases}$$

由于一个数字若不被选到，则每回合都有 33% 的概率被删除。因此过了一些回合后还剩下很多数没被删掉的概率是极小的。经验证剩下的数字数随着回合以大概0.8 的倍率收敛。假设最终收敛到对答案贡献几乎无影响时的时刻是 t，则上述算法的复杂度为：

$$\begin{aligned}&O\left(\sum_{i=0}^{t}\left(0.8^i n\right)^2\cdot 2^i\right)\\=\;&O\left(n^2\sum_{i=0}^{t}1.28^i\right)\\=\;&O\left(1.28^t n^2\right)\end{aligned}$$

很可惜收敛的倍率不是很快，所以这个算法会TLE。

3.2 算法2

继续观察dp的式子，发现 $f(i+1, j-x-1, k+`/2')$ 与 $f(i+1, j-x-1, k+`\sqrt{}')$ 的转移系数是相同的。那么对于相同长度的序列$S1$与$S2$，一定有$P(S1) = P(S2)$。事实上，我们根本不必存下具体的序列，只需要知道序列的长度即可。

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(a_i)\\=\;&\sum_{s}P(s)\cdot f_s(a_i)\\=\;&\sum_{s}P(len(s))\cdot P(s|len(s))\cdot f_s(a_i)\\=\;&\sum_{l}P(l)\cdot\sum_{s,len(s)=l}f_s(a_i)\\=\;&\sum_{l}P(l)\cdot\mathbb{E}(f_s(a_i)|len(s)=l)\end{aligned}$$

至于求$P(l)$，只要将上述$f(i, j, k)$的第三维写成k的长度即可，转移几乎相同。这步的复杂度降为：

$$\begin{aligned}&O\left(\sum_{i=0}^{t}\left(0.8^i n\right)^2\right)\\=\;&O\left(n^2\right)\end{aligned}$$

最后只剩下求 $\mathbb{E}(f_s(a_i)|len(s) = l)$ 了。不妨设 $G_l(x) = \mathbb{E}(f_s(x)|len(s) = l)$ 。

那么有转移：

$$G_l(x) = \frac{1}{2}\left(G_{l-1}\left(\sqrt{x}\right) + G_{l-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

可以发现 $G_l(x)$ 是一个关于 x，$\sqrt{x}$，$\sqrt[4]{x}$，$\ldots$，$\sqrt[2^l]{x}$ 的线性组合。设 $H_l(x, y)$ 表示 $G_l(x)$ 中 $\sqrt[2^y]{x}$ 前的系数，那么有：

$$H_l(x, y) = \frac{1}{2}\left(H_{l-1}(x, y-1) + \frac{H_{l-1}(x, y)}{\sqrt[y]{2}}\right)$$

这一步的复杂度为：$O\left(t^2 n\right)$

这样一来所有变量都求出来了。只要枚举所有 a_i，然后将 $x = a_i$ 带入 $H_l(x, y)$ 中就能求解了。

最终复杂度：$O(n^2 + t^2 n)$

t 取100也没有问题了。