



中国计算机学会
China Computer Federation

浅谈OI中的数学问题

北京大学 罗煜翔



例题与基础知识

例题1.

- 给定 n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n 。
- 求 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin(a_i + a_j) a_i a_j$ 。
- 相对或绝对误差不超过 10^{-6} 。
- $1 \leq n \leq 10^6, 0 \leq a_i < \pi$ 。

复数

- 形式： $z = a + ib$ 。定义 $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$ 。
 - 几何意义：复平面上的点。
- 四则运算：根据 $i^2 = -1$ 推导。
 - 几何意义：平移，旋转，位似。
- 指数形式： $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ 。
 - 乘方与开方。
 - 三角函数计算。
- 实现：
 - `std::complex`。
 - 手动实现。

例题1.题解

- 注意到 $a_i a_j \sin(a_i + a_j) = \text{Im}(a_i e^{ia_i} \cdot a_j e^{ia_j})$ 。
- 记 $b_i = a_i e^{ia_i}$ ，于是只需要计算 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^{j-1} b_i) b_j$ 。
- 于是只需要求出 b_i 的前缀和即可。

例题2

- 给定一个正整数 n ，并将 $0, 1, \dots, n-1$ 染上了红色或蓝色。
- 你要求有多少个元素在 $0, 1, \dots, n-1$ 中的序列 $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ ，使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2021} \equiv 0 \pmod{n}$ ，且序列中同时有红色和蓝色的数字。
- 有 m 次修改，每次改变一个数的颜色。你需要在每次修改后求出答案，对998244353取模输出。
- $1 \leq m, n \leq 10^6$ 。

多项式

- 形式： $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 。定义 $[x^i]f(x) = a_i$ ， $\deg f(x) = n$ 。
- 四则运算。
- 整除，同余，因式分解，最大公因式。

生成函数

- 对于一个给定的序列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, 定义其生成函数为形式幂级数 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 。
- 指数生成函数。
- 乘法及其组合意义。

例题2.题解

- 设红色的生成函数为 $r(x)$ ，蓝色的生成函数为 $b(x)$ ，则要求的是 $[x^0] \left((r(x) + b(x))^{2021} - r(x)^{2021} - b(x)^{2021} \bmod x^n - 1 \right)$ 。
- 设 $(r(x) + b(x))^{2021} - r(x)^{2021} - b(x)^{2021} = Q(x)(x^n - 1) + R(x)$ ，注意到 $r(x) + b(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ ，且左式有因式 $r(x) + b(x)$ ，则 $R(x)$ 有因式 $r(x) + b(x)$ ，从而 $R(x) = k(r(x) + b(x))$ 。带入 $x = 1$ 得 $k = \frac{(r(1) + b(1))^{2021} - r(1)^{2021} - b(1)^{2021}}{r(1) + b(1)}$ 。
- 而 k 也就是 $R(x)$ 的常数项。

例题3.

- 定义一个图是好的，如果它的边可以分解成若干个没有公共边的简单圈的并。
- 现在给定一个 n 个点的图，问有多少种方案把它的顶点分成两个不交的集合 V_1, V_2 ，使得 V_1, V_2 的导出子图都是好的。关于998244353取模。
- $n \leq 2000$ 。

矩阵与线性方程组

- 矩阵： $n \times m$ 列的数表。
- 矩阵乘法：第一个矩阵的行向量与第二个矩阵的列向量两两内积。
- 线性方程组： $Ax = B$ 。
 - 解的结构。
 - 高斯消元法。
 - \mathbb{F}_2 上的压位。

例题3.题解

- 不难发现好图相当于所有点度数为偶数。
- 用01变量 x_i 表示第 i 个点是否分在 V_i 中。
- 则对于顶点 i ，有方程 $\bigoplus_{(i,j) \in E} (x_i \oplus x_j \oplus 1) = 0$ 。
- 解这个线性方程组即可。

例题4.

- 给定 n 个互不相同的正整数 a_1, a_2, \dots, a_n 。
- 你需要求最小的非负整数 m ，使得存在 n 个 $0 \sim m$ 的非负整数 b_1, b_2, \dots, b_n ，且 $\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = 1$ 。
- 你还要求出此时满足条件的 b_i 的解的总数量并求出一组解。解的总数量关于998244353取模后输出。
- $1 \leq a_i \leq 5 \times 10^5, 6 \leq n \leq 10^5$ 。

max卷积

- 形式： $f_i = \sum_{\max(j,k)=i} a_j \cdot b_k$ 。
- 解法：记 \hat{f} 表示 f 的前缀和，则 $\hat{f}_i = \hat{a}_i \cdot \hat{b}_i$ 。
- min卷积
- 高维情形。
 - 高维前缀和与差分。
 - 常见例子：并卷积、gcd卷积。

例题4.题解

- 使用贪心的方法不难证明 $m = 1$ 是足够的，于是考虑如何计数。
- 问题相当于求 $\{a_i, a_i + 1\}$ 的gcd卷积的1处值，于是只需要做高维后缀和，求乘积，再求高维差分。

例题5.

- 给定 n 个非负整数 a_1, a_2, \dots, a_n 。
- 对每个 $1 \sim n$ 中的 i , 求 $\sum_{a_j \neq a_i} \frac{1}{a_i - a_j}$ 。对998244353取模。
- $1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq a_i < 998244353$ 。

形式导数

- 定义：对 $f(x) = \sum_i a_i x^i$ ，定义 $f'(x) = \sum_{i \geq 1} i a_i x^{i-1}$ 。
- 四则运算。
- 高阶形式导数： $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ 。
- 形式泰勒展开： $f(x+c) = \sum_i \frac{f^{(i)}(c)}{i!} x^i$ 。
- 形式不定积分：对 $f(x) = \sum_i a_i x^i$ ，定义 $\int f(x) dx = \sum_i \frac{a_i x^{i+1}}{i+1} + C$ 。
 - 利用形式导数运算律得到相关公式。

例题5.题解

- 首先将 a_i 去重，设有 k_i 个 a_i 。
- 令 $f(x) = \sum_i \frac{k_i}{x-a_i}$ ，则相当于对所有 a_i 计算 $f(x) - \frac{k_i}{x-a_i}$ 带入 a_i 的值。
- 设 $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ，注意到 $F(x) - \frac{k_i G(x)}{x-a_i} = F(a_i) + F'(a_i)(x-a_i) - k_i G'(a_i) - k_i \frac{G''(a_i)}{2} (x-a_i) + (x-a_i)^2 P(x)$ 与 $G(x) = G'(a_i)(x-a_i) + (x-a_i)^2 Q(x)$ 。则只需要计算 $\frac{F'(a_i) - \frac{k_i G''(a_i)}{2}}{G'(a_i)}$ 即可，这可以通过多点求值解决。

例题6.

- 给定平面上 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 。
- 现在进行如下 m 次如下操作：
 1. 将区间 $[l, r]$ 中的点关于直线 $ax + by = c$ 反射（保证 a, b 不全为0）。
 2. 将区间 $[l, r]$ 中的点绕 (a, b) 逆时针旋转 θ 。
 3. 将区间 $[l, r]$ 中的点以向量 (a, b) 平移。
 4. 将区间 $[l, r]$ 中的点关于以 (a, b) 为圆心， r 为半径的圆反演（保证 (a, b) 与区间中任意点距离不小于 10^{-3} ）。
- 求最后每个点的坐标，相对或绝对误差不超过 10^{-6} 。
- $1 \leq n, m \leq 10^5, 0 \leq |a|, |b|, |c| \leq 10^3, 1 \leq r \leq 10, 0 \leq \theta < 2\pi$ 。

几何变换

- 几何变换群。
- 仿射变换，射影变换，莫比乌斯变换等。
 - 变换公式。
 - 不变量。
- 应用：将新问题转换为已知问题，提取出新问题中的代数特征。

例题6.题解

- 维护区间莫比乌斯变换即可。



例题7.

- 给定一个周长为 L 的圆和圆上 n 条长度分别为 c_1, c_2, \dots, c_n 的弧。
- L, c_i 均为正整数。
- 现在将这些弧随机放到圆的某一位置，问这些弧覆盖整个圆周的
概率是多少。对998244353取模。
- $1 \leq n \leq 10, 1 \leq c_i < L \leq 50$ 。

拉格朗日插值公式

- 对于 n 次多项式 $f(x)$ 和互不相同的 a_0, a_1, \dots, a_n , 有 $f(x) = \sum_{i=0}^n f(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$ 。

例题7.题解

- 考虑将圆周等分为 mL 份，并规定圆弧的端点只能位于等分的端点处。则当 m 趋于无穷时，就能得到原题的答案。
- 注意到如果考虑方案数，则答案是关于 m 的 n 次多项式。于是只需要考虑 $m = 1, 2, \dots, n + 1$ 的情况即可。
- 此时可以用状态压缩的动态规划解决。



中国计算机学会
China Computer Federation

试试看！



题1.

- 给定一棵 n 个点的树，每个顶点上有一个 $1 \sim n$ 的正整数。
- 每次操作可以交换树上一条边两个端点的数。
- 请你解决如下四个问题：
 1. 给定树的形态和树顶点上数的初始值和目标值，判断是否存在操作方式将初始值变为目标值。
 2. 给定树顶点上的数的初始值和目标值，求所有 n^{n-2} 棵带标号无根树中，可以通过操作将初始值变为目标值的树的数量。
 3. 给定树顶点上的数的初始值和 $n - k$ 个顶点的目标值，对于剩下 k 个没有给定目标值的 n^k 种目标值的可能性，求问题2的答案之和。
 4. 给定树 $n - l$ 个顶点的初始值和 $n - k$ 个顶点的目标值，对于剩下 l 个没有给定初始值的 n^l 种初始值的可能性，求问题3的答案之和。
- 问题2,3,4中的答案关于998244353取模。
- $1 \leq n \leq 500$ 。

题1.提示

- 不难发现操作可以任意的交换树上的权值，于是问题只需要考虑权值集合是否相同。

题2.

- 当 n 是奇数时，可以通过如下方法构造一个幻方：
 - 先将1写在第一行中间，之后从小到大一次填写 $k(k = 2, 3, \dots, n^2)$ ：
 - 若 $k - 1$ 在第一行但不在最后一列，则将 k 填在最后一行， $k - 1$ 所在列的右一列；
 - 若 $k - 1$ 在最后一列但不在第一行，则将 k 填在第一列， $k - 1$ 所在行的上一行；
 - 若 $k - 1$ 在第一行最后一列，则将 k 填在 $k - 1$ 的正下方；
 - 若 $k - 1$ 既不在第一行也不在最后一列，如果 $k - 1$ 的右上方未填数则将 k 填在 $k - 1$ 的右上方，否则填在 $k - 1$ 的正下方。
- 现在给定一个奇数 n 和正整数 x_1, x_2, y_1, y_2 ，求用上述方法构造的 $n \times n$ 幻方中，以 (x_1, y_1) 为左上角， (x_2, y_2) 为右下角范围内幻方所填数的和。
- 共 T 次询问，每次 n 不一定相同。
- $1 \leq n \leq 10^9, 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq n, 1 \leq y_1 \leq y_2 \leq n, 1 \leq T \leq n$ 。

题2.题解

- 首先考虑如何快速求一个点的值。
- 之后根据公式分类讨论或利用其它算法求解。

题3.

- 给定三个正整数 n, a, b , 求 $\sum_{i=0}^n \left\lfloor \frac{a^i}{b} \right\rfloor$ 。关于998244353取模。
- $1 \leq n, a \leq 10^{18}, 1 \leq b \leq 10^6$ 。

题3.提示

- 将取整拆成取模，然后寻找取模后的循环节。



题4.

- 给定一个 n 个点完全图，每个点和边上都有一个非负整数权值 p_i 或 $p_{i,j}$ 。这个完全图有一个特殊性质：对于图中每一个简单环，都存在相邻两条边权值相同。
- 初始时有一些点是黑的，其他点是白的。每次以 p 为概率分布随机选择一个点或者一条边，反转这个点或这条边连接的两个点的颜色。
- 问期望几次后可以将所有点变成黑的。
- $1 \leq n \leq 100, 1 \leq \sum p_i + \sum p_{i,j} \leq 10^4, p_i \geq 1$ 。

题4.提示

- 引理1.
- 引理2.
- 根据这两个引理设计动态规划解决。



题5.

- 在一个平面直角坐标系中，有若干个点。定义在 y 轴右的为红点，其余点为蓝点。
- 若一条直线经过至少两个给定点，且这条直线一侧没有红点，另一侧没有蓝点，则称这条直线是好的。
- 初始时没有点，现在依次往平面中添加 n 个点 (x_i, y_i) ，每次添加后询问当前有多少好的直线。
- $1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq x_i, y_i \leq 10^9$ ，保证没有重复点。

题5.提示

- 不难发现题目的要求和凸包具有一定的相似性。
- 事实上，做适当的射影变换可以转化为凸包问题。

题6.

- 给定 N, s, t, x , 对所有 $1 \leq n, m \leq N$ 且 n, m 是完全平方数, 求 $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{x^{i+j}}{i+j+1} \binom{n}{i} \binom{m}{j} s^i t^j$ 。对998244353取模。
- $1 \leq N \leq 10^5, 0 \leq s, t, x < 998244353$ 。

题6.题解

- 将原问题转化为积分形式，借助分部积分公式给出固定 n 的递推式。

题7.

- 给定一个长度为 n ，元素为 $1 \sim m$ 正整数的序列。
- 你需要找这个序列的两个不相交的长度相同的非空子序列，使得他们的元素和相同。
- $1 \leq n, m \leq 4 \times 10^5$ 。

题7.提示

- 分析无解时 n 的最大值。



题8.

- 给定一个素数 p 和二次函数 $y = ax^2 + bx$ 在 $1, 2, \dots, n$ 处的值模 p 的结果排序后的结果。保证排序后的数互不相同。
- 请你求出一个满足条件的二次函数或说明无解。
- $2 \leq p \leq 10^{18}, 1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。

题8.提示

- 利用原序列的和与平方和得到方程组求解。
- 注意对方程组退化的情况讨论。

题9.

- 有 n 个桶和 $2n - 1$ 个球，其中第 i 个桶可以装前 $2i - 1$ 个球，一个桶只能装一个球。
- 问有多少种方案取 m 个桶，再取 m 个球，再讲这些球分别放在一个桶里。对998244353取模。
- 共 T 次询问。
- $1 \leq m \leq n \leq 10^7, 1 \leq T \leq 10^5$ 。

题9.提示

- 分析桶的选择不难得到递推式，分析小数据找规律归纳证明。



题10.

- 有一个序列 a_1, a_2, \dots, a_n 。最初, $a_i = i^k$, 其中 k 是一个正整数。
- 现在对这个序列进行 m 次操作, 在第 i 次操作中:
 - 将这个序列分成两个序列 a_1, a_2, \dots, a_{b_i} 和 a_{b_i+1}, \dots, a_n 。
 - 将这两个序列等概率随机归并成一个新的序列, 成为新的序列 a 。
- 最后有 q 次询问, 第 i 次询问 a_{c_i} 的期望大小是多少, 对998244353取模。
- $1 \leq n \leq 10^9, 1 \leq m, q \leq 10^5, 1 \leq k \leq 10, 0 \leq b_i \leq n, 1 \leq c_i \leq n$ 。

题10.提示

- 考虑分析第一次操作后的结果，做适当假设将和式转化为特定形式而快速求和。



中国计算机学会
China Computer Federation

谢谢大家！

