Devus and their voting system 解题报告

绍兴市第一中学 王鉴浩

1 试题来源

DEVVOTE

2 试题大意

有 n 个房子，每个房子里有一个选民。房子按 $1, 2, 3, ..., n$ 的顺序沿一条直线以此排列，也就是说 1 是 2 的邻居，2 是 1 和 3 的邻居，以此类推。

现在要竞选总统，每个人都可以成为总统，每个人能给这 n 中的一人投票（可以投自己），最后票数最高的人当总统，如果有多人同时得到最高票数，那么这些人同时被选中当总统。

有一个奇怪的规则：每个人不能和其邻居投的人相同。

现在问期望有多少人当总统，答案保留 6 位小数。

数据范围：$1 \leq n \leq 36$

时限：$2s$

3 算法介绍

我们考虑用动态规划来解决此题。

由于是计算期望，所以我们需要计算出有 x 个总统的方案数。

先考虑没有奇怪的规则的情况。我们可以用 $f[i][j][k][u]$ 来表示枚举了第 i 个选民，已经有 j 个选民投了票，前 i 个选民中得票数最多为 k 票，其中得到了 k 票的人有 u 人。现在，我们枚举第 $i+1$ 人得到的票数 x，转移如下：

- 当 $x < k$ 时，$f[i][j][k][u] \xrightarrow{\binom{j+x}{x}} f[i+1][j+x][k][u]$
- 当 $x = k$ 时，$f[i][j][k][u] \xrightarrow{\binom{j+x}{x}} f[i+1][j+x][k][u+1]$
- 当 $x > k$ 时，$f[i][j][k][u] \xrightarrow{\binom{j+x}{x}} f[i+1][j+x][x][1]$

由于满足 $k \cdot u \leq j$，所以上述动态规划的时间复杂度为 $O(n^4 \log n)$。

在上述动态规划状态中的转移，我们可以理解为有 $j+1$ 个位置，新加的 x 个人要加进这 $j+1$ 个位置中。现在我们来考虑奇怪的规则。而对于这个限制，我们可以理解为本来有 $j+1$ 个位置，因为最终相邻的两个选民选的人不能相同，所以有 r 个位置最终是不能是空的。于是，我们就可以加一维来表示状态：$g[i][j][k][u][r]$。现在，我们除了枚举第 $i+1$ 人得到的票数 x 之外，还需要枚举这 x 个人加进了 w 个位置中，其中在 r 个位置中选了 e 个，转移如下：

- 设 $y = \binom{x-1}{w-1} \cdot \binom{r}{e} \cdot \binom{j+1-r}{w-e}$, $z = r - e + (x - w)$
- 当 $x < k$ 时，$g[i][j][k][u][r] \xrightarrow{y} g[i+1][j+x][k][u][z]$
- 当 $x = k$ 时，$g[i][j][k][u][r] \xrightarrow{y} g[i+1][j+x][k][u+1][z]$
- 当 $x > k$ 时，$g[i][j][k][u][r] \xrightarrow{y} g[i+1][j+x][x][1][z]$

那么上述动态规划的时间复杂度为 $O(n^7 \log n)$。这样的时间复杂度太高了，我们需要进行优化。

经过分析之后，我们可以发现：在转移中计算 y 和 z 时，是和 i, k, u 无关的。于是，可以针对 j, r, x, w, e 预处理转移。那么在最终转移的时候，我们只需要枚举 i, j, k, u, r, z 就行了。

于是，我们就可以在时间复杂度为 $O(n^5 \log n)$ 解决此题。

我们可以发现预处理转移数组的空间复杂度是 $O(n^4)$ 的，而对于最终转移数组，我们可以运用滚动数组把 i 这一维消掉。于是，上述解法的空间复杂度

为 $O(n^4)$。因为枚举并不满，上述做法是可以在 $1s$ 内跑出解的。另外，我们可以对每个 n 进行打表预处理。这样做的时间复杂度为 $O(1)$。