加权约数和解题报告

绍兴市第一中学洪华敦

1 试题来源

https://www.51nod.com/contest/problem.html#!problemId=1584

2 试题大意

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} max(i,j) * \sigma(i*j)$$

其中$\sigma(x)$表示x的约数之和

有T组询问，答案对10^9+7取模，$1 \le T \le 50000$，$1 \le N \le 1000000$

3 算法介绍

3.1 转化

题目中是二维的，这个很麻烦，我们可以转化成一维的

设$F(n)$为答案的函数

设

$$G(n) = \sum_{i=1}^{n} n * \sigma(i*n)$$

设

$$T(n) = \sigma(n^2) * n$$

则

$$F(n) = F(n-1) + 2 * G(n) - T(n)$$

于是问题就变成了求$G(n)$和$T(n)$

3.2 如何求T(n)

我们知道，约数和是有积性的，也就是说，设

$$n = \prod_{i=1}^{m} a_i^{p_i}$$

其中，a_i是两两不同的质数

则

$$\sigma(n^2) = \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{2*p_i} a_i^j$$

$$\sigma(n^2) = \prod_{i=1}^{m} \frac{a_i^{2*p_i+1}}{a_i - 1}$$

所以我们只要对每个数分解质因数即可

可以用$O(n)$效率的质数筛

时间复杂度$O(n)$

3.3 如何求G(n)

对于$n * i$的一个约数x，我们可以把他拆成$u * v$，为了不重复计算，我们可以令$gcd(\frac{n}{u}, v) = 1$

$$G(n) = \sum_{u|n} \sum_{v=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{v} \right\rfloor uv * e(gcd(\frac{n}{u}, v))$$

我们都知道

$$e(x) = \sum_{d|x} \mu(d)$$

$$G(n) = \sum_{T|n} \mu(T) * T^2 \sum_{v=1}^{\frac{n}{T}} v \sum_{u|\frac{n}{T}} u$$

$$G(n) = \sum_{T|n} \mu(T) * T^2 C_{\frac{n}{T}+1}^{2} \sigma(\frac{n}{T})$$

于是我们可以预处理好每个数的约数和，然后枚举T，之后枚举每个n把贡献加上

时间复杂度$O(nlogn)$

于是问题就完美地解决了