FN 解题报告

福州一中 董克凡

Contents

1 题目大意

输入两个数C, P，求最小的n，使得$F_n \equiv C\,(modP)$，或指出无解，其中F_n为斐波那契数列的第n项。

2 数据范围

$0 \le C \le P-1,\ 11 \le P \le 2*10^9$，其中$P$以及$P\ mod\ 10$为质数。

3 题解

首先，由于$P\ mod\ 10$为质数，我们可以推断$P \equiv \pm 1\,(mod\,5)$，那么根据二次剩余的知识，在模P意义下一定存在5的平方剩余。

那么，由斐波那契数列通项公式可得：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

记

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \boldsymbol{\phi}^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

那么

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * \left(\boldsymbol{\phi}^n - (-\boldsymbol{\phi})^{-n}\right)$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{5}} * \left(\boldsymbol{\phi}^n - (-\boldsymbol{\phi})^{-n}\right) = C$$

当n为偶数时

$$\boldsymbol{\phi}^n - \boldsymbol{\phi}^{-n} = C * \sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{\phi}^{2*n} - C * \sqrt{5} * \boldsymbol{\phi}^n - 1 = 0$$

由二次方程求根公式，可得：

$$\boldsymbol{\phi}^n = \frac{C \pm \sqrt{C^2+4}}{2}$$

所以，在此可以用二次剩余的知识直接求出ϕ^n，接着用大步小步法求出n，判断是否符合假设即可。n为奇数时类似。

4 复杂度分析

平方剩余复杂度为$\mathcal{O}\left(logC\right)$，大步小步法复杂度为$\mathcal{O}\left(\sqrt{C}\right)$