概率和数学期望

重庆市育才中学 周祖松

什么是概率？

概率是0和1之间的一个数目，表示某个事件发生的可能性或经常程度。

- 你买彩票中大奖的机会很小(接近0)
- 但有人中大奖的概率几乎为1

样本空间（S）：一个给定问题中可能发生的所有事件

生日问题

有n个人，按一年有365天计算，

1） 出现生日相同的概率是多少？

2） 同一天生日的人有多少对？

3） 有多少人生日相同？

数学期望是对事件长期价值的数字化衡量

抛3次硬币，正面向上的期望次数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{x}) = \frac{1}{8}\big(&\mathrm{X(zzz)} + \mathrm{X(zzf)} + \mathrm{X(zfz)} + \mathrm{X(fzz)} \\
&+ \mathrm{X(ffz)} + \mathrm{X(fzf)} + \mathrm{X(zff)} + \mathrm{X(fzz)}\big) \\
= {} & \frac{1}{8}(3+2+2+2+1+1+1+0) \\
= {} & \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

数学期望：$\mathrm{E(X)} = \sum(p(s) * X(s))$

魔球理论

篮球有三种得分方式:篮下进攻和中距离投中都是2分，而三分球投中得3分。当然，距离越远投篮命中率一般就会越低。总之，篮下投篮命中率为55%，中距离投篮命中率为45%，三分投篮命中率35%，但是得分高。哪种得分方式更有效率呢?

E(篮下) =2*55% + 0*45% = 1.1;

E(中距离) =2 *45% + 0*55% = 0.9;

E(三分球) =3*35% + 0*65% = 1.05。

抛硬币问题1

有1个硬币，抛n次，问正面向上的期望是多少？

抛硬币问题2

有1个硬币，期望抛多少次才会首次出现连续的n个正面？

抛硬币问题3

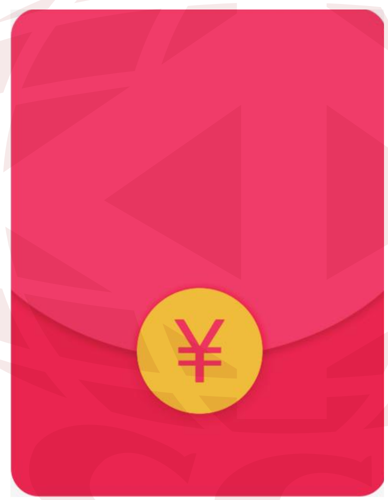
中国计算机学会 China Computer Federation

连续抛硬币，如果出现zzf,你赢，如果出现fzz则我赢，问双方胜负的概率是多少？

发红包

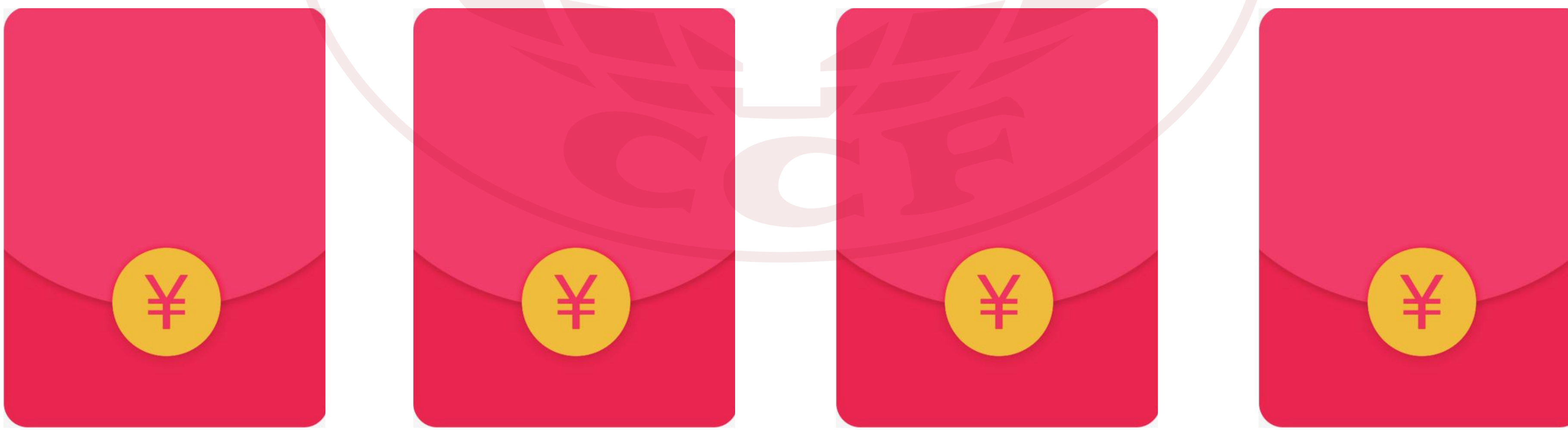
中国计算机学会 China Computer Federation

你要设计一个抢红包的算法，如何做到随机？



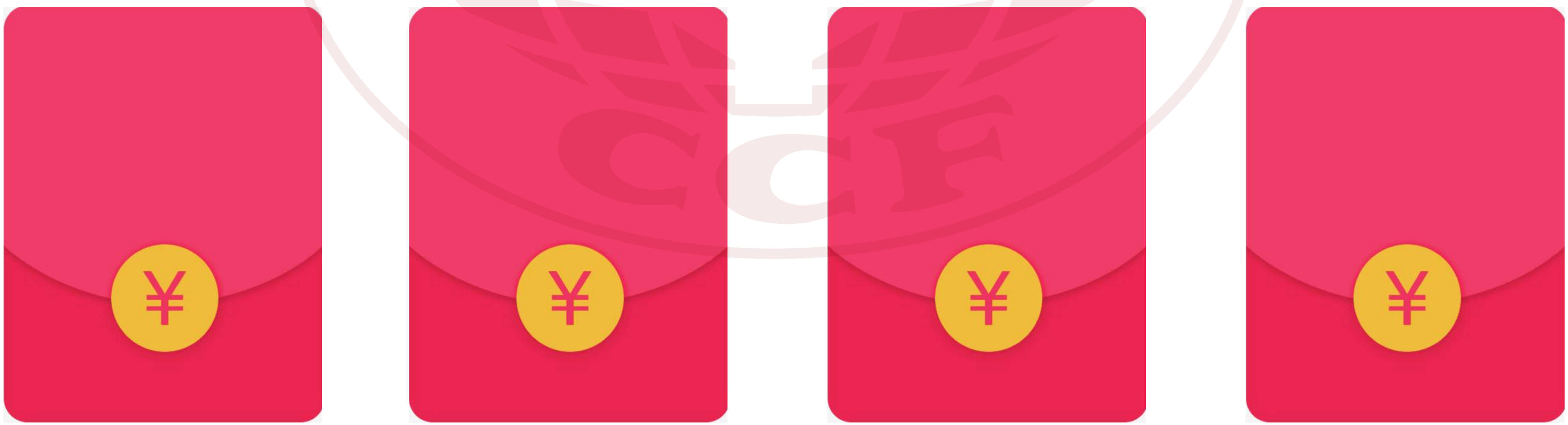
抢红包1

有n个红包，每个红包的钱数各不相同，你打开一个红包，看到钱数后可以选择收或丢弃。如果收了，你就不能再打开其它的红包了。如果丢弃，可以在没有打开的红包中重新选择一个打开。你只能收一个红包，丢弃的红包不能再选。问收到最大的红包的概率是多少？如何选择才？



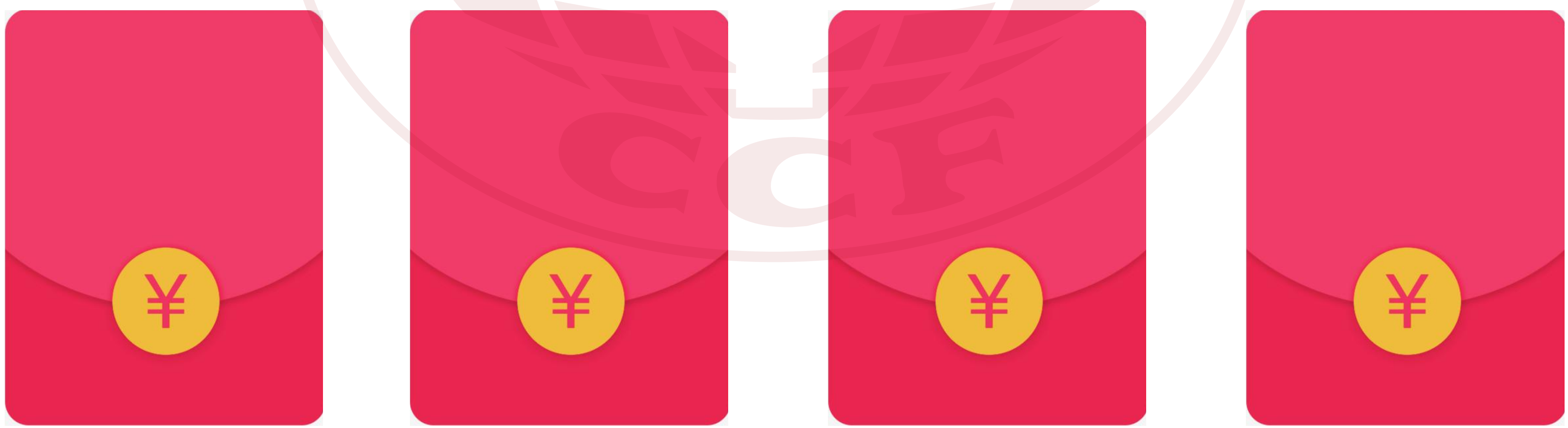
抢红包2

有4个红包，1个红包里有钱，3个红包是空的，我知道哪个红包有钱，而你不知道，你先选中一个红包，我打开另一个空的红包，此时你可以重新选择一个红包，问你是否愿意重新选择？



抢红包3

有n个红包，a个红包里有钱，其它红包是空的，我知道哪个红包有钱，而你不知道，你先选中一个红包，我打开 $c(c<n-a)$ 个空的红包，此时你可以换一个红包，问你选中红包的概率最大是多少？



卡片收集1

每包零食里有一张卡牌，总共有N (1 <= N <= 20)种不同的卡牌，得到这N种卡牌的概率相同(1 <= i <= N)。求收集到所有卡牌的期望是多少。

卡片收集2

每包零食里有一张卡牌，总共有N (1 <= N <= 20)种不同的卡牌，得到这N种卡牌的概率不同，分别为P[i](1 <= i <= N)。求收集到所有卡牌的期望是多少。

打怪游戏

2个人在玩打怪游戏，两人的怪物分别有A、B滴血数，两人轮流抛骰子，数小的怪物自减一血，平的不变，谁先到减0， 谁输，问A赢的概率。

电梯

n个人排成一排等电梯，最前面的人每一秒钟会有p的概率进电梯，有1-p的概率停在原地。每个人只有他前面的人都进电梯了，他才有可能进电梯。求t秒之后，进电梯人数的期望值。（$1 \leqslant n, t \leqslant 2000$，$0 \leqslant p \leqslant 1$）

换教室(NOIP2016 提高组)

中国计算机学会 China Computer Federation

题目大意：
有 2n 节课程安排在 n个时间段上。同一个时段在不同地教室有两节相同的课，在第 i（$1 \le i \le n$）时段，安排在教室 c_i□ 和教室 d_i□ 进行。默认在教室 c_i□ ，如果申请并通过，可在第 i时段去教室 d_i□ 上课。申请被通过的概率是一个已知的实数 k_i□。所有的申请只能在学期开始提交，并且每个人只能选择至多 m 节课程进行申请。可以不用完这 m 个申请的机会，甚至可以一门课程都不申请。
大学有由e 条双向道路连接的 v 个教室 。当第 i（$\le i \le n-1$）节课结束后，就会从这节课的教室出发，选择一条耗费体力最少的路径前往下一节课的教室。
申请哪几门课程可以使得在教室间移动耗费的体力值的总和的期望值最小，求最小值。（$1 \le n \le 2000$，$0 \le m \le 2000$，$1 \le v \le 300$，$0 \le e \le 90000$）

青蛙跳荷叶(NOIP2013 初赛)

现有一只青蛙，初始时在 n 号荷叶上。当它某一时刻在 k 号荷叶上时，下一时刻将等概率地随机跳到 1, 2, …, k 号荷叶之一上，直至跳到 1 号荷叶为止。当 $n = 2$ 时，平均一共跳 2 次；当 $n = 3$ 时，平均一共跳 2.5 次。则当 $n = 5$ 时，平均一共跳__________次。

炸弹

题目大意：

有 N 个城市，M 条双向道路组成的地图，城市标号为 1 到 N。“西瓜炸弹”放在 1 号城市，保证城市 1 至少连接着一个其他城市。“西瓜炸弹”有 P/Q 的概率会爆炸，每 次进入其它城市时，爆炸的概率相同。如果它没有爆炸，它会随机的选择一条道路到另 一个城市去，对于当前城市所连接的每一条道路都有相同的可能性被选中。对于给定的 地图，求每个城市“西瓜炸弹”爆炸的概率。数据范围：$2 \leqslant n \leqslant 300, 1 \leqslant m \leqslant 44850$，$1 \leqslant P, Q \leqslant 10^6$

样例1

输入

2 1 1 2

1 2

输出

0.666666667

0.333333333

样例2

输入

3 2 1 3

1 2

3 2

输出

0.466667

0.4

0.133333

迷宫

题目大意：

在一个树形迷宫中，以房间为节点。有n间房间，每间房间存在陷阱的概率为ki，存在出口的概率为ei，如果这两种情况都不存在（概率为pi），那么只能做出选择走向下一个房间（包括可能会走向上一个房间）。根节点为1，当遇到陷阱时必须返回到根节点1处重新开始，当遇到出口时，走出迷宫。问从开始到走出迷宫所做出选择次数的期望值。

聪聪和可可（NOI2005）

题目大意：整个森林是一个无向图，图中有从 1至 N编号的N 个景点，在景点之间有一些路连接。可可在景点 M(M≤N)处，以后的每个时间单位，可可都会等概率选择去相邻的景点或停留在原景点不动。假设有 P 个景点与 M 相邻，在时刻 T 可可处在景点 M，则在T+1时刻，可可有 1/(1+P)的可能在相邻的景点，还有1/(1+P)的可能停在景点 M。当聪聪在景点 C 时，她会选一个更靠近 可可的景点，如果这样的景点有多个，她会选一个标号最小的景点。在每个时间单位，假设聪聪先走，可可后走。在某一时刻，若聪聪和可可位于同一个景点，则可可就被吃掉了。平均情况下，聪聪几步就可能吃到可可?

输入整数 N ， E，C 和 M，分别表示景点数、 路的条数、聪聪和可可初始所在的景点的编号。接下来 E 行，每行两个整数Ai，Bi，表示两个景点之间有一条路。

□输出 1 个实数，表示平均多少个时间单位后聪聪会把可可吃掉。

输入	输出
4 3 1 4 1 2 2 3 3 4	1.5

单选错位

试卷上共有 n 道单选题，第 i 道单选题有 ai□ 个选项。lc 采取的策略是每道题目随机写上~ai□ 的某个数作为答案选项，他能期望做对∑□(1/ai□）□ 道题目。gx 则是认认真真地做完了这 n 道题目，他把答案抄到答题纸上时抄错位了：第 i 道题目的答案抄到了答题纸上的第 i+1 道题目的位置上，特别地，第 n 道题目的答案抄到了第 1 道题目的位置上。

现在 gx 想知道自己期望能做对几道题目，这样他就知道会不会被 lc 鄙视了。

我们假设 gx 答案全对，只是答案抄错了位置。

邀请

题目大意：

有N（1 ≤N≤10^6 ）个人排成一列，你向队列中的一个连续区间内的人发出邀请，第i个人接受邀请的概率为 pi（0<pi<1）。求出恰好只有一个人接受邀请的最大概率是多少。

输入格式

输入一个整数 N。

接下来 N 行，每行包含一个数 pi 。

输出格式

请输出恰好只有一个人接受邀请的最大概率

输入输出样例

样例输入	样例输出
3 0.3 0.4 0.35	0.47

矩形粉刷

给你一个w*h的矩形木板,每次随机选择两个格子,将以这两个格子为顶点的矩形内部的所有小正方形染色,染了k次之后，被染色的格子个数的期望值是多少。数据范围：(1≤W，H≤1000,1≤K≤100)

输入

第一行是整数K，W，H

输出

一行，为答案，四舍五入保留到整数。

样例输入	样例输出
1 3 3	4

字符串游戏

题目描述

给出n个长为m(m<20)的字符串从中选出一个字符串藏起来，然后游戏者来猜藏起来的串是什么 每一步游戏者可以等概率的询问字符串的一个位置是什么字符，经过多次再询问后，游戏者就可以确定藏起来的串是什么，游戏者确定字符串要询问的期望次数。（1≤n≤50）

	样例1	样例2	样例3
输入	2 aab aac	3 aaA aBa Caa	3 aca vac wqq
输出	2.00000	1.66667	1.00000

神奇的口袋（noi2006）

中国计算机学会 China Computer Federation

题目大意：袋中有 a1 个颜色为 1 的球,a2 个颜色为 2 的球,...,at个颜色为 t 的球,其中 ai ∈ Z + (1 ≤ i ≤ t) 。每次等概率地从袋中随机的抽出一个小球,然后再把 d+1 个与其颜色相同的小球放到口袋中。

设 ci 表示第 i 次抽出的小球的颜色 (1 ≤ ci ≤ t) ,一个游戏过程将会产生一个颜色序列(c1,c2,...,cn,...)。

已知t 种颜色的小球每一种的个数 a1,a2,...,at 求一次游戏过程产生的颜色序列满足下列条件的概率有多大?

$c_{x1} = y_1$, $c_{x2} = y_2$, … , $c_{xi} = y_i$, … , $c_{xn} = y_n$ 其中 0<x1<x2<...<xn , 1≤yi≤t 。

换句话说，已知 (t , n , d , a1,a2,...,at ,x1,y1,x2,y2,...,xn,yn) ,你要回答有多大的可能性会发生下面的事件：“对所有 k,1≤k≤n,第 xk 次抽出的球的颜色为 yk”。

【数据规模和约定】

1≤t,n≤1000,1≤ak ,d≤10, 1≤x1<x2<...<xn≤10000,1≤yk≤t

【样例】

输入	输出	样例 说明
2 3 1 1 1 1 1 2 2 3 1	1/12	初始时,两种颜色球数分别为(1, 1),取出色号为 1 的球的概率为 1/2;第二次取球之前,两种颜色球数分别为(2, 1),取出色号为 2 的球的概率为 1/3;第三次取球之前,两种颜色球数分别为(2, 2),取出色号为 1 的球的概率为 1/2,所以三次取球的总概率为 1/12。

OSU!

题目描述

给一个长度为n的01串的每一位为1的概率，一个串的分数为其中每一个长度为x的全1串的长度的立方和，即x^3，求期望分数。（每一个1只会作为一个全1串的一部分而只被算一次）。（ $1 \leqslant n \leqslant 10^5$）

游走(HNOI2013)

中国计算机学会 China Computer Federation

题目描述

给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图，顶点从 1 编号到 n，边从 1 编号到m。小 Z 在该图上进行随机游走，初始时小 Z 在 1 号顶点，每一步小 Z 以相等的概率随机选择当前顶点的某条边，沿着这条边走到下一个顶点，获得等于这条边的编号的分数。当小 Z 到达 n 号顶点时游走结束，总分为所有获得的分数之和。现在，请你对这 m 条边进行编号，使得小 Z 获得的总分的期望值最小。

数据规模与约定

对于30% 的数据，n≤10。

对于100%的数据，保证2≤n≤500，1≤m≤125000，1≤u,v≤n，给出的图无重边和自环，且从 1 出发可以到达所有的节点。

输入	输出	样例 说明
3 3 2 3 1 2 1 3	3.333	边(1,2) 编号为1，边(1,3) 编号 2，边(2,3) 编号为3。

亚瑟王(HNOI2015)

题目描述

有 n+m 张不同的牌，其中有 n 张牌是编号 1→n的，剩下的 m 张牌是joker牌，但有标号。

现在我们对牌随机打乱以后做如下两个操作，且每个操作耗时 1：

1、如果牌顶不是joker牌，则把牌放到一边。

2、如果第一张牌是joker牌，并且放到一边的牌已包含 1 到 n 的所有元素，则结束游戏，否则随机打乱所有的牌（包括之前放到一边的牌），继续游戏。

求游戏结束的期望时间。（$1 \le n,m \le 2\times10^6$）

走平衡木

题目大意：Bessie在表演走平衡木，平衡木上从左向右的位置记为0,1,…,N+1。如果Bessie到达了位置0或是N+1，她就会从平衡木的一端掉下去，表演失败。

如果Bessie处在一个给定的位置k，她可以进行下面两项中的任意一项：

1. 投掷一枚硬币。如果背面朝上，她前往位置k-1，如果正面朝上，她前往位置k+1。
2. 跳下平衡木，获得f(k)的报酬（$1 \leqslant f(k) \leqslant 10^9$）。

求当她进行一系列最优的决定之后，她能够得到的期望报酬最高。例如，如果她的策略能够使她以1/2的概率获得10的报酬，1/4的概率获得8的报酬，1/4的概率获得0的报酬，那么她的期望报酬为加权平均值10(1/2)+8(1/4)+0(1/4)=7.

输入的第一行包含 N （2≤N≤105）。后面有N 行包含 f(1)…f(N) 。

输出 N 行。第 i 行表示从位置 I开始获得最优报酬的期望值。

样例输入	样例输出
3 0.3 0.4 0.35	0.47

洗牌

题目描述

有 $n+m$ 张不同的牌，其中有 n 张牌是编号 $1 \to n$的，剩下的 m 张牌是joker牌，但有标号。

现在我们对牌随机打乱以后做如下两个操作，且每个操作耗时 1：

1、如果牌顶不是joker牌，则把牌放到一边。

2、如果第一张牌是joker牌，并且放到一边的牌已包含 1 到 n 的所有元素，则结束游戏，否则随机打乱所有的牌（包括之前放到一边的牌），继续游戏。

求游戏结束的期望时间。（ $1 \le n,m \le 2 \times 10^6$）