IOI2014 中国国家集训队作业 1 解题报告

绍兴一中　董宏华

2013 年 10 月 10 日

Contents

1 Asteroid Rangers (ACM/ICPC World Finals 2012 A)

1.1 题目大意

三维坐标上 n 个点，每个点匀速直线运动，求最小生成树改变的次数+1。

1.2 关键字

事件点，最小生成树， dfs 序

1.3 特判 (15%)

$n=2$说明只有一种生成树，所以系统建立后不会修改，答案为 1。

所有点运动方向和速度相同，则所有点的相对位置不变，系统建立后不会修改，答案为 1。

【时间复杂度】$O(1)$，【空间复杂度】$O(1)$。

1.4 暴力 (另15%)

共有 $O(n^2)$ 条边，任意两条边的大小关系最多交换两次，则可能会最小生成树方案变化的事件点最多 $O(n^4)$ 个。所以事先枚举两条边，求出两者长度差关于时间 t 的二次函数，解二次函数得出事件点。排序后对于每个事件点 $+10^{-7}$ 的时刻重新求一遍最小生成树 $O(n^2)$，若方案变化答案 +1。

而在只有一个点和其他点运动方向速度不同时，事件点的数量是 $O(n^3)$ 的，常数较小或加一些优化的话可以通过 5% 的特殊数据。

【时间复杂度】$O(n^6)$　$O(n^5)$，【空间复杂度】$O(n^4)$　$O(n^3)$。

1.5 标准算法 (100%)

对于每个事件点，发生大小关系改变的两条边中，定义在事件点之后长度变得更小的边为取代边，另一条为被取代边，如果被取代的边不在当前的最小生成树上，那么最小生成树显然不会发生改变，更进一步地，只

有在取代边的两端点在最小生成树的路径中包含被取代边，最小生成树才会发生改变。而一条边树的路径上，相当于这条边断开后，路径两端点不连通，也就是一个在子树内，另一个不在子树内，这样就可以在每次最小生成树改变后维护 dfs 序，$O(1)$ 就可以得到对于边是否在路径上的询问。由于每次最小生成树改变后需要重新得到 dfs 序，每次为 $O(n)$ ，但由于答案大概不会超过 $O(n^3)$ 的，所以复杂度也为 $O(n^4)$。此外，造出答案超过几百的数据很困难（至少我随机数据得到的答案大概是 $O(n^2)$ 的)。

【时间复杂度】$O(n^4 \log n)$，【空间复杂度】$O(n^4)$

2 Painter (ACM/ICPC World Finals 2008 H)

2.1 题目大意

给出 n 个三角形，先判断是否有三角形相交，若没有三角形相交则求被三角形包含次数最多的区域被包含的次数 $+1$。

2.2 关键字

扫描线，平衡树 (set) ，计算几何

2.3 暴力 (15% 或 40%)

暴力枚举来自不同三角形的两条边，用向量叉积（跨立试验）判断线段是否相交（注意平行的情况），要注意只有一个交点的情况也算作相交。（只判断数据是否合法可以通过三角形互不完全包含的 3 个点，可得到 15%的分数）

判断完数据的合法性后可以暴力枚举一个三角形的某一顶点，依次枚举其他三角形，判断该点是否被包含（用三次叉积正负相同或射线法均可判断)，若被包含则深度 $+1$ ，深度最深的即为答案。

【时间复杂度】$O(n^2)$，【空间复杂度】$O(n)$

2.4 标准算法 (100%)

首先判断数据合法性，判断平面中是否存在相交线段是有经典做法的[1]。首先为了避免垂直线段的干扰，我们对点进行剪切变换 $(x, y) \to (x + y * eps, y)$。接下来就是沿 x 坐标扫描，遇到线段左端点则把线段插入 set 中，并与它上方和下方的线段分别求是否相交。而遇到线段右端点时把该线段从 set 中删除，并判断原来在它上方和下方的线段是否相交。简略证明的话就是两线段相交前在 set 中一定是相邻的（否则已经出现其他的相交），详细证明参见《算法导论》。

此题略有不同，即属于同一个三角形的三边允许相交，这个只需要在判断线段相交时特判掉来自同一三角形的情况即可。这样可以判断数据的合法性了。之后就是求包含的次数，仍然是扫描线的做法，对于当前的扫描线，我们发现一个三角形一定是两条边在 set 中，因此可以把它们看作左右括号，也就是三角形构成的树的 dfs 序。我们只要维护括号对应节点在树上的深度就可以取max得到最大的包含次数了，即最多需要的明暗度的数量。为了减少特判，我们初始把画布也加入set中，即线段 $(-10^7, -10^7), (10^7, -10^7)$ 和 $(-10^7, 10^7), (10^7, 10^7)$。在扫到三角形最左侧顶点时，我们确定该点连出去两条边的上下关系就可以确定左右括号关系了，并在插入时求该括号对应点的深度。若插入的是左括号，如果其左侧为左括号，说明左侧是它父亲，则该点深度 = 父亲深度 +1；如果左侧为右括号，说明左侧是它兄弟，则该点深度 = 父亲深度 +1。若插入的是右括号，类似地讨论即可。在扫到三角形中间的顶点时，删去左侧点到它的边，并得到这条边的左右括号属性，插入它到右侧点的边即可。扫到三角形最右侧顶点，则删去两边即可。在插入和删除的同时进行线段相交的判断。

【时间复杂度】$O(n \log n)$，【空间复杂度】$O(n)$。

2.5 造数据

我使用是小数据多次所有数随机（基本上都是调试过程中对拍出来的数据），中等数据构造三角形树，大数据直接构造（构造了两个点，分别为等边三角形和等腰直角三角形的嵌套）的方法。

[1] 见《算法导论》 33.2 节 确定任意一对线段是否相交

其中构造三角形树采用递归构造，在每个三角形的节点，我用参数确定该点是放弃构造，构造与边框不相交的三角形，还是继续分裂。构造三角形为多次随机选取原边框三角形内的 3 个整点，直到满足要求，且与原三角形边框的面积比达到一定程度（使嵌套层数尽量多）。分裂即在边框三角形上随机选取一条边，把它以某种随机的比例划分为两条后递归两边。这样在调整参数后构造出了每点度数较大，深度较浅的树和每点度数较小，深度较深的树。但由于坐标范围限制，这种方法产生的数据节点数不多，最多的也只达到了 40000+ ，所以最后在数据中加入了两个构造的大点。

3 The Solar System (ACM/ICPC World Finals 2003 I)

3.1 题目大意

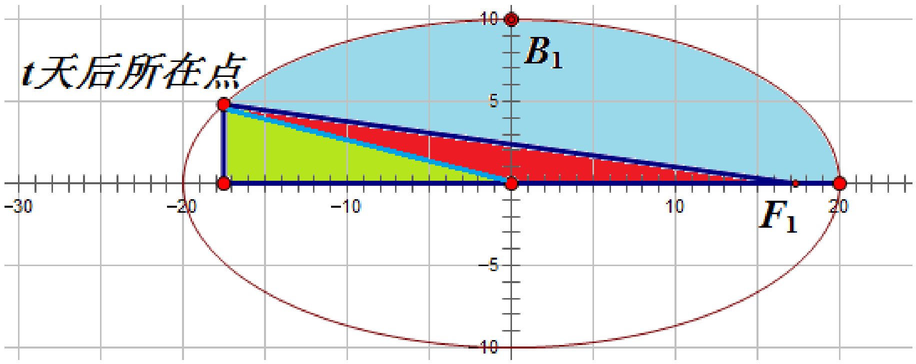
给出第一个行星的轨道的半长轴，半短轴和周期，以及第二个行星的半长轴，半短轴，求第二个行星在第 t 天的坐标。

3.2 关键字

物理，数学，转化/积分，计算几何

3.3 暴力 (30%)

首先利用开普勒第三定律求出第二个行星的周期 t_2。根据开普勒第二定律，在时间 t 内扫过的区域（下图中蓝色区域）的面积与椭圆总面积的比为 $\frac{t}{t_2}$，并且我们可以先把整圈的去掉。



但终点坐标并不好求，由暴力的思想，我们可以把 x 轴(或椭圆轨道上的点、原点、长轴右端点所成的角)切大条切成若干段，依次增加每段上对应的面积，直到超过需要的比例。由于我们只需要粗略地估计，直接把两段之间的区域当作矩形或梯形计算面积，当划分段数足够多时就能满足精度要求了。

【时间复杂度】$O(\log \frac{1}{eps})$，【空间复杂度】$O(1)$。

3.4 特殊数据 (另 30%)

注意到 $a2 = b2$，所以第二个行星的轨道是圆形，而且焦点为原点，那么我们相当于已知扇形和圆形的面积比，求扇形的圆心角。求出圆心角后用 cos, sin求出坐标。

【时间复杂度】$O(1)$，【空间复杂度】$O(1)$。

3.5 标准算法 (100%)

如果我们的问题是给出终点，求经过的时间，那么我们只需要算出蓝色区域的面积求和整个椭圆面积的比例即可。计算蓝色区域的面积有两种：

1. 蓝红 − 红

   蓝红区域类似于圆中的扇形，我们可以借助扇形来计算它的面积。椭圆可以看作一个被“压扁”的圆，把椭圆上所有 y 坐标都 $\times\frac{a}{b}$ 后，就变成了半径为 a 的圆，而椭圆中所有图形的面积都$\times\frac{a}{b}$（因为只有 y 变换

了，x 保持不变)。所以我们通过坐标变换后可以轻松求出蓝红区域的面积，同时求出椭圆焦点坐标后也可以轻松求出红色区域的面积，这样蓝色区域的面积就搞定了。这种方法比较巧妙。

设 m 为转换为圆后圆心角的弧度， F 为右侧焦点 x 坐标，则

$$t = \frac{m}{2 \times \pi} - \frac{\sin m \times F}{2 \times \pi \times a2}$$

2. **蓝红绿 – 红绿**

蓝红绿就是上半部分椭圆方程下方的面积+下半部分椭圆方程上方的面积，其中第二部分和第一部分的求法相同，我们只讨论第一部分(其实在转化式子后发现可以两部分一起计算)。第一部分的面积可以用积分来求。

首先椭圆方程化为 $y = \frac{b_2}{a_2}\sqrt{{a_2}^2 - x^2}$ （只取 x 轴之上的部分，但其实这样把 x 轴之下部分的积分变正了，两部分可以一起计算了)，设 m 为(起点,原点,终点)构成的角的弧度，那么终点的坐标为 $(a_2 \cos m, b_2 \sin m)$。然后按 x 积分，则

$$S = \int_{a_2 \cos m}^{a_2} \frac{b_2}{a_2}\sqrt{{a_2}^2 - x^2}\, dx$$

设 $x = a_2 \cos\theta$ ，则

$$S = \int_m^0 b_2\sqrt{1 - \cos\theta^2}\, da_2 \cos\theta = b_2 \int_m^0 \sin\theta\, da_2 \cos\theta$$

$$\because \frac{da_2 \cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$$

$$\therefore da_2 \cos\theta = -a_2 \sin\theta d\theta$$

$$\therefore S = a_2 b_2 \int_m^0 -\sin^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore 2S - a_2 b_2 m = a_2 b_2 \int_m^0 1 - 2\sin^2\theta\, d\theta = a_2 b_2 \int_m^0 \cos 2\theta\, d\theta$$

根据微积分基本定理:

$$\because (\frac{\sin 2\theta}{2})' = \cos 2\theta$$

$$\therefore \int_m^0 \cos 2\theta = \frac{\sin 0}{2} - \frac{\sin 2m}{2} = -\frac{\sin 2m}{2}$$

$$\therefore S = \frac{a_2 b_2 m}{2} - \frac{a_2 b_2 \sin 2m}{4} = \frac{a_2 b_2 m}{2} - \frac{a_2 b_2 \sin m \cos m}{2}$$

红绿是一个直角三角形，可轻松算出面积，即

$$\frac{(F - a_2 \cos m) \times b_2 \sin m}{2} = \frac{b_2 \sin m \times F}{2} - \frac{a_2 b_2 \sin m \cos m}{2}$$

从而求得蓝色部分面积为

$$\frac{a_2 b_2 m}{2} - \frac{b_2 \sin m \times F}{2}$$

而总面积为 $a_2 b_2 \pi$ ，所以

$$t = \frac{m}{2 \times \pi} - \frac{\sin m \times F}{2 \times \pi \times a2}$$

可以发现求得的式子和上一种方法是一样的。

最后，我们的条件是只知道时间，但随着点逆时针移动，时间单调增，所以我们可以二分点移动的角度，然后判断即可（注意精度问题，eps 需要 10^{-15} 左右）。

同时，如果移动的角度作为未知量的话，就相当于解类似 $ax+b\sin(x)+c=0$ 的方程，这个方程可以用牛顿迭代法解，速度比二分快。

【时间复杂度】$O(\log \frac{1}{eps})$，【空间复杂度】$O(1)$。