试题泛做报告

厦门双十中学 汪文潇

1.Codechef Sept14 Rectangle Query

2.Codechef Sept14 Fibonacci Numbers on Tree

3.Codechef Sept14 Factorisation(challenge)

这 3 题是由我负责翻译、准备数据的，详见试题准备部分的解题报告。

4.Codechef July14 Sereja and Equality

题目大意：

定义 2 个数组相似为 2 个数组对应位置上的数在各自数组中的排位相同。

定义函数 F(P1, P2) 等于满足 P1[l...r]相似于 P2[l...r]并且 P1[l...r]包含不超过 E 个逆序对的数对(l, r)的数目。其中 P1、P2 为长度为 n 的排列。

T 组数据，求对于所有的不同的长度为 n 的 P1、P2，F(P1, P2)的和。

数据规模和约定：

$T \le 10^4, n \le 500, E \le 10^6$

算法讨论：

将所有情况按$[l, r]$的区间长度分类，分别计算。

考虑一组询问，枚举区间长 i，这种情况下对答案的贡献可以通过简单的组合计数得到，即$(n - i + 1) * \binom{i}{n}^2 * ((n - i)!)^2 * f(i, e)$。

其中$f(i, e)$为长度为 i 且逆序对数不超过 e 的排列种数，可以通过简单的 dp 预处理得出。另外，显然$e > \frac{n(n-1)}{2}$是没有意义的。

至此，此题得到解决，空间方面可以采用原地 dp 的方法优化。

时间复杂度：

$O(n^3 + nT)$

空间复杂度：

$O(n^2)$

5. Codechef July14 Game of Numbers

题目大意：

给定两个长度为 N 的数组 A 和 B。维护两个二元组的集合 S1 和 S2，初始均为空。每次操作选择两个数对(i,j)和(p,q)分别加入到集合 S1, S2 中，满足(i,j)不在 S1 中, (p,q)不在 S2 中，且$\mathrm{Bj} > Ai, Bp < Aq$，$\gcd(\mathrm{Ai},\mathrm{Bj},\mathrm{Aq},\mathrm{Bp}) \neq 1$ 。

求最多操作次数。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq \mathrm{N} \leq 400$，$1 \leq \mathrm{T} \leq 10$，$1 \leq \mathrm{Ai},\mathrm{Bi} \leq 10^9$

算法讨论：

考虑一个直接的做法，把所有满足$\mathrm{Bj} > Ai$的(i,j)和所有满足$\mathrm{Bp} < Aq$的(p,q)预处理出来，如果一对(i,j)和(p,q)满足$\gcd(\mathrm{Ai},\mathrm{Bj},\mathrm{Aq},\mathrm{Bp}) \neq 1$，就连一条边。这样会形成一个二分图，这个二分图的最大匹配显然就是答案。

但这个二分图太大，需要在构图上进行优化。显然的，一对(i,j)和(p,q)能够一起操作，当前仅当存在一个素数 p，使得$\mathrm{p}|\gcd(\mathrm{Ai},\mathrm{Bj})$且$\mathrm{p}|\gcd(\mathrm{Aq},\mathrm{Bp})$。

可以对所有有效的素数 p 在图中建立一个辅助点，对于每个$(\mathbf{i},\mathbf{j})$向所有满足$\mathrm{p}|\gcd(\mathrm{Ai},\mathrm{Bj})$的点连边，$(\mathrm{p},\mathrm{q})$同理。由于$\mathrm{Ai},\mathrm{Bi} \leq 10^9$，每个$(\mathrm{i},\mathrm{j})$最多只会连出 9 条边。同样，辅助点的数量最多只有$9\mathrm{N}^2$个。

最后用最大流解决即可。如果将数值限制的上界 9 当作常数, 图中的点数和边数都是$O(\mathrm{N}^2)$的。

6. Codechef Sept12 Knight Moving

题目大意：

无限大的方格棋盘上的一个骑士，从(0,0)格开始，每一步，只能从(u,v)格移动至(u+Ax,v+Ay)或(u+Bx,v+By)，有 K 个障碍格不能进入，最终要移动至(X,Y)格。计算骑士有多少种到达指定位置的方案模 1000000007。两种方案不同，当且仅当步数不同，或存在某个 i 使得骑士在第 i 步到达的格子不同。

有 T 组数据。

数据规模和约定：

$\mathrm{T} \le 5, \mathrm{K} \le 15,$所有坐标的绝对值不超过 500

算法讨论：

分两种情况考虑。

如果$\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{Ax},\mathrm{Ay})$与$\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{Bx},\mathrm{By})$是线性无关的，那么对于每个点(或者说是向量)$\vec{\mathrm{P}}$，都可以找出唯一的一对实数$(\mathrm{p},\mathrm{q})$，使得$\vec{\mathrm{P}} = \mathrm{p}\vec{\mathrm{A}} + \mathrm{q}\vec{\mathrm{B}}$。那么就可以将每个点的坐标用其对应的$(\mathrm{p},\mathrm{q})$，相应地每一步的移动会变成横坐标加 1 或纵坐标加 1。如果一个点对应的 p 或 q 不是非负整数，那么它显然是无法被到达的，可以被忽略。接下来使用经典的递推和组合数计算即可。

如果$\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{Ax},\mathrm{Ay})$与$\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{Bx},\mathrm{By})$是线性相关的，那么可以先通过一些讨论判断目标点和每个障碍点是否有可能到达。定义$\vec{\mathrm{G}}(\gcd(\mathrm{Ax},\mathrm{Bx}),\gcd(\mathrm{Ay},\mathrm{By}))$。把没有影响的点去掉后，对于剩下的点，由于$\vec{\mathrm{A}}$与$\vec{\mathrm{B}}$线性相关，故而如果骑士当前位置的某一维(要求$\vec{\mathrm{G}}$的这一维非 0，如不存在，则可直接分情况讨论答案)与某个可达点的该维相等，那么另一维一定也相等。所以此时可以只考虑一维情况。

由于坐标绝对值不超过 500，所以当到达一个坐标大于 500(小于−500)的点时，通过对$\vec{\mathrm{A}}$和$\vec{\mathrm{B}}$分类讨论，只会有 2 种情况：

1、可以到达所有坐标大于 500(小于−500)的点。

2、不能回到坐标小于 500（大于−500）的点

由此转化出一个只有大约 1000 个点的图，通过对该图进行遍历、递推即可得到方案数(或判出有无限种方案)。

至此，此题得到解决。

7. Codechef Sept12 Annual Parade

题目大意：

有 N 座城市，城市之间有 M 条有向道路。

每次游行会有若干英雄在城市间旅行，每个英雄至少要经过 2 个城市。

最终费用如下：

1、如果一条道路被 k 人次经过，将花费$\mathbf{k}\times$这条边的边权。

2、如果一名英雄的起点不等与终点，花费 C。

3、如果某个城市没有被任何一名英雄经过，花费 C。

K 组询问，每组的 C 不同，求每组的最小花费。

数据规模和约定：

$\mathbf{2 \le N \le 250, 1 \le M \le 30000, 1 \le K \le 10000}$

算法讨论：

只考虑一组询问，是经典的最小权路径覆盖的模型，预处理任意 2 点间最短路，将每个点拆成 2 个点分别表示入度和出度，构图求最小费用最大流即可。

构图大致为：源点向所有点的出度连容量为 1、边权为 0 的边。源点向所有点的入度连容量为 1、边权为 C 的边。每个点的出度向所有点的入度连容量为 1、边权为原图中两点最短路的边。每个点的入度向汇点连容量为 1、边权为 0 的边。

考虑多组询问。C 不同只影响构图中从源点向每个点的入度连的一条容量为 1 费用为 C 的边。那么不妨枚举这类边被使用的数量，求出不考虑这种边的最优解。

这样，将图中的这类边直接去掉，在使用 EK 算法计算该图最小费用流的过程中，总流量每次增广会增加 1，如果当前流量为 f，即表明剩下的 n-f 的流量是需要使用边权为 C 的边的，由于 EK 的性质，这也是使用 n-f 条边权为 C 的边时的最优方案。

那么，可以通过一遍 EK 算法求出对于每种情况的最优解，询问时枚举所有情况取最优即可。

时间复杂度：

$O(n^3 \log n + nm)$

8.Codechef June14 Two Companies

题目大意：

有一棵 n 个点的树以及 2 个树上简单路径的集合 A 和 B，集合中的每条路径有一个权值。要选出 A 的一个子集 A’和 B 的一个子集 B’，使得 A’中的路径和 B’中的均不相交，且 A’和 B’中的路径的权值和最大。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 10^5$

$m_1 =$ 集合 A 的大小，$m_2 =$ 集合 B 的大小

$1 \le m_1, m_2 \le 700$

算法讨论：

通过这棵树的 dfs 序和每条路径两个端点的 Lca，可以直接判断 2 条路径是否相交。

经典问题，转化后构图求最小割即可。

时间复杂度：

$O(n + m_1 \log n + m_2 \log n + \min(m_1, m_2) m_1 m_2)$

9.Codechef June14 Sereja and Arcs

题目大意：

给定一个颜色序列以代表一个区间集合 S。每对颜色相同的位置 u、v(u<v)，S 中都有一个该颜色的区间，区间 2 端分别为 u、v。

求有多少对不同颜色的区间相交。

数据规模和约定：

$1 \le 序列长度 \le 10^5, 1 \le 颜色编号 \le 10^5$

算法讨论：

将颜色按照该颜色的出现次数分成 2 类，次数严格超过$\sqrt{n}$称为 A 类，不超过$\sqrt{n}$称为 B 类。

那么所有的相交对应可以分为不含 A 类和含 A 类的。

对于含 A 类的，由于最多只有$\sqrt{n}$种颜色是 A 类，可以枚举一个颜色，然后$O(n)$计算与该颜色相交的。

对于不含 A 类的，也即 B 类之间的，由于出现次数较少，可以直接用树状数组维护一些辅助量，每次枚举所有位置进行更新。

时间复杂度：

$O(n\sqrt{n}\log n)$

10.Codechef Jan12 Card Shuffle

题目大意：

有 n 张卡片，初始从上至下为 1 到 n，有 m 次操作，每一次操作为从上方先取出前 A 张卡，再取出前 B 张卡，然后把取出的 A 张卡放回，再取出前 C 张卡，接着把取出的 B 张卡逆序后放回，最后把取出的 C 张卡放回。

求最后所有卡片的顺序。

数据规模和约定：

$\mathbf{1 \le n, m \le 10^5}$

算法讨论：

用平衡树直接模拟所有操作即可。

时间复杂度：

$O(m \log n)$

11.Codechef Jan12 Misinterpretation 2

题目大意：

求长度在$[L,R]$内并且满足“所有偶数位字符顺序拼成的字符串和所有奇数位字符顺序拼成的字符串相接与原串相等”的小写字母串个数，输出对10^9+7取模。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 5$

$1 \le L \le R \le 10^{10}$

$R - L \le 5 \times 10^4$

算法讨论：

考虑字符串的长度如果为 n，那么该操作则对应一个置换，如果设长度为 n 时置换的循环数为$f(n)$, 那么显然有方案数为$26^{f(n)}$。

由于 n 为奇数时，n 的对应位置仍是 n，所以此时显然有$f(n)=f(n-1)+1$，因此只需要考虑 n 为奇数或偶数之一的情况即可。

不妨令 n 为奇数，并将位置 n 看作位置 0，那么位置 i 对应的位置就是$i*2 \bmod n$，考虑位置 i 所在的循环的大小，令$\mathrm{ord}(p)$表示 2 模 p 的阶，那么显然循环的大小即为$\mathrm{ord}\left(\frac{n}{\gcd(i,n)}\right)$, 对应的，就有$f(n)=\sum_{p|n}\frac{\varphi(p)}{\mathrm{ord}(p)}$。

由于$R-L\le 5\times 10^4$，可以通过预处理不超过$\sqrt{R}$的所有质数并对这个范围内的数依次进行除法来分解质因数，进而得到所有因数。

对$\mathrm{ord}(p)$的计算可以利用这个性质：当 $\gcd(a,b)=1$ 时，$\mathrm{ord}(ab)=\mathrm{lcm}\big(\mathrm{ord}(a),\mathrm{ord}(b)\big)$，求出所需质数的$\mathrm{ord}(p)$即可。

时间复杂度：

$$O\left(\frac{R^{\frac{3}{4}}}{\log R}+\sqrt{R}\log^2 R+T(R-L)\left(\frac{\sqrt{R}}{\log R}+\log^2 R\right)\right)$$

12.Codechef Feb13 Observing the Tree

题目大意：

给定一棵 n 个节点的树，有 m 次操作，操作有三种：1、给两点间路径上的每个点的点权加一个等差数列。2、询问两点间路径点权和。3、回到某个历史版本。强制在线。

数据规模和约定：

$1 \le n, m \le 10^5$

算法讨论：

等差数列可以用首项和公差来表示，且 2 个等差数列的和仍是等差数列，线段树可以直接支持区间加等差数列。

那么直接用树链剖分和线段树维护即可，为了解决操作 3，需要将线段树可持久化。

时间复杂度：

$O(n + m\log^2 n)$

13.Codechef Feb13 Room Corner

题目大意：

房间是一个每条边都为水平或竖直的多边形。每个 90 度内角处的内部格子都站着一个小朋友。任意时刻相邻（之间没有别的小朋友）的两个小朋友都可以交换位置，速度为每秒一格。每次给出一对小朋友，询问他们两个发生相遇的最短时间。

房间用 n 行字符串来表示。

数据规模和约定：

$1 \le \mathrm{n}, 每行长度 \le 2500$

$询问数 \le 10^4$

算法讨论：

从某一个小朋友开始，左边贴着边界遍历一遍房间的边界，就得到了一个环。（这一步需要考虑一些细节）

对于询问，考虑两个小朋友从哪个方向相遇，二分出相遇的位置取较优一侧即可。

时间复杂度：

$\mathrm{O}(\mathrm{nm} + \mathrm{T} \log \mathrm{n})$

14.Codechef Sept11 Counting Hexagons

题目大意：

求满足最长边大于等于 L，其他边小于等于 X，相同长度边至多出现 K 次且每条边边长都为不超过 N 的正整数的六边形个数。两个六边形不同当且仅当边长的可重集合不同。

数据规模和约定：

$1 \le \mathrm{X} < L \le \mathrm{N} \le 10^9$

$\mathrm{N} - \mathrm{L} \le 100$

$1 \le \mathrm{K} \le 5$

算法讨论：

枚举最大的一条边的长度 m 后，就要求 5 个单调不减的数, 使得和大于 m, 最大的数小于 X, 且相同数的个数小于 K。

把这 5 个数内相同的放到一个集合，考虑把 5 个数划分成若干集合的方案，一共有 7 种不同的形式。

对于每一种形式，直接计算不太容易，可以把限制放宽成强制同一个集合内的相同，不同集合不做限制的情况，然后容斥解决。

时间复杂度：

$\mathrm{O}(7 \times 7 \times 6 \times (\mathrm{N} - \mathrm{L}) \times \log \mathrm{N})$

15.Codechef Sept11 Short

题目大意：

给定两个数 n、k，找出所有的数对(a, b)，满足 n<a<k, n<b<k，并且 ab−n 可以被(a−n)(b−n)整除，输出数对(a, b)的对数。

数据规模和约定：

$0 \le \mathrm{n} \le 10^5$

$\mathrm{k} \le 10^{18}$

算法讨论：

令$\mathrm{c}=\mathrm{a}-\mathrm{n}, \mathrm{d}=\mathrm{b}-\mathrm{n}$，那么原题变为，求$\mathrm{c}, \mathrm{d}$使得$\mathrm{cd} \mid (\mathrm{c}+\mathrm{n})(\mathrm{d}+\mathrm{n})-\mathrm{n}$，且$1 \le \mathrm{c}, \mathrm{d} < k-n$。

设$(\mathrm{c}+\mathrm{n})(\mathrm{d}+\mathrm{n})-\mathrm{n}=\mathrm{kcd}$，则有$\mathrm{d}=\frac{\mathrm{cn}+\mathrm{n}^2-\mathrm{n}}{\mathrm{kc}-\mathrm{c}-\mathrm{n}}$，假设$\mathrm{c}<d$，那么可以得出$\mathrm{c} \le \frac{2\mathrm{n}+\sqrt{(4\mathrm{k}-3)\mathrm{n}^2-(4\mathrm{k}-4)\mathrm{n}}}{2\mathrm{k}-2}$，即$\mathrm{c} \le 2.42\mathrm{n}$，那么就可以枚举 c。当 c 较小时，枚举$\mathrm{cn}+\mathrm{n}^2-\mathrm{n}$的约数即可。当 c 较大时，k 的范围较小，转而枚举 k 的值。

16.Codechef Oct13 Fibonacci Number

题目大意：

定义斐波那契数列为$f_n\begin{cases} n\ (n \le 1) \\ f_{n-1} + f_{n-2} (n > 1) \end{cases}$，给定一个素数 P 和一个非负整数 C，求满足$f_n \equiv C (\mathrm{mod}\ p)$的最小的 n。保证如果答案存在，不会超过$2 \times 10^9$。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 100$

$11 \le P \le 2 \times 10^9$

$(P\ \mathrm{mod}\ 10)$是完全平方数

算法讨论：

考虑斐波那契数列的通项公式，由已知条件可以找到模 P 意义下的$\sqrt{5}$和$\frac{1}{2}$，那么最终就是要解一个以下形式的方程$x^n + x^{-n} = a$, 可得$x^n = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$，那么就要用 Cipolla 算法求出模意义下的平方根，然后大步小步法求解。

时间复杂度：

$O(T\sqrt{P})$

17.Codechef Oct13 Three-Degree-Bounded Maximum Cost

题目大意：

给定一张 n 个点，m 条边的带权联通无向图，保证每个点双连通分量大小小于 10, 求该图的 3 点度限制最大生成树的边权和，即每个点度数不超过 3, 生成树可以不包括所有顶点。在保证边权和最大的情况下，输出方案数对2^{32}取模的结果。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 6$

$1 \le n \le 100$

$n - 1 \le m \le \min\left(\frac{n(n-1)}{2}, 450\right)$

算法讨论：

对于每个点双连通分量，状压 dp 计算出其 3 点度限制最大生成树和方案数。所有的点双连通分量构成了一个树形结构，记录割点的度数进行树形 dp 即可。

时间复杂度：

$O(m + n \times$ 点数小于 10 的 3 点度限制最大生成树的合法度数的数目$)$

18.Codechef May15 Chef and Balanced Strings

题目大意：

一个字符串是平衡的当且仅当它的每一个字符都出现了偶数次，一个字符串的 type 权值是它的所有平衡子串长度的 type 次方和。给定一个长度为 n 的小写字符构成的字符串，有 Q 组询问，每一次询问由 L、R、t 描述，表示询问这个字符串的子串$[l,r]$的 type 权值是多少。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 10^5$

$1 \le Q \le 10^5$

算法讨论：

预处理对于每个前缀，每个字符出现的次数的奇偶性并用一个二进制数表示，记为$s_{0..n}$。那么子串$[l,r]$是平衡的当且仅当$s_{l-1} = s_r$。这是经典问题，对序列分块，预处理整段的答案，询问时暴力即可。

时间复杂度：

$O((n+q)\sqrt{n})$

19.Codechef May15 Counting on a directed graph

题目大意：

给定一个 N 个点（从 1 到 N 标号）M 条边的有向图。统计无序对(X,Y)的个数，要求(X,Y)满足存在一条从点 1 到点 X 的路径，和一条从点 1 到点 Y 的路径，且两条路径除了点 1 以外没有公共点。

数据规模和约定：

$1 \leq \mathrm{n} \leq 10^5$

$0 \leq \mathrm{m} \leq 5 \times 10^5$

算法讨论：

一对(X,Y)合法当且仅当从 1 出发时，X 和 Y 没有除 1 以外的公共必经点。于是只要求出该图的 dominator tree,在树上统计一遍即可。

时间复杂度：

$\mathrm{O}((\mathrm{n}+\mathrm{m})\alpha(\mathrm{n}))$

20.Codechef Nov13 Gangsters of Treeland

题目大意：

给定 n 个节点的有根树，点有权，有 m 次操作，操作有两种：1. 把某个点到根路径上的所有节点权值修改为同一个值。2. 询问某个子树中所有节点到根路径上不同权值个数的平均值。

数据规模和约定：

$n, m \leq 2 \times 10^5$

算法讨论：

直接用树链剖分和线段树维护修改对每个点答案的影响即可。

时间复杂度：

$O(n + m\log^2 n)$

21.Codechef Nov13 Queries With Points

题目大意：

平面上给出 n 个相离的简单多边形。Q 次询问，每次询问一个点在哪个多边形内。强制在线。

数据规模和约定：

$1 \le n, Q \le 10^5$

多边形边数和 $K \le 3 \times 10^5$

算法讨论：

这是一个经典问题。离线情况可以直接通过平衡树维护扫描线来解决。

为了在线回答询问，只需要记录维护扫描线的平衡树的历史版本，使用函数式平衡树即可。

时间复杂度：

$O(K \log K + Q \log K)$

22.Codechef March14 The Street

题目大意：

有长度为 n 的数组 A 和 B，初始 A 全为 0，B 全为负无穷。有 m 次操作，操作有三种：1、给数组 A 区间加一个等差数列。2、给数组 B 区间对一个等差数列取 max。3、询问 Ai+Bi 的值。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 10^9$

$1 \le m \le 3 \times 10^5$

算法讨论：

首先，可以预先将序列中会被询问的不超过 m 个位置找出，显然其余位置是无用的。

等差数列显然可以看作一个关于位置的一次函数。

对于操作 1，一次函数的和仍是一次函数，直接线段树维护即可。

对于操作 2, 可以在线段树上的每个区间维护至多一个“备选最优函数”。考虑一次修改，最多覆盖$O(\log m)$个线段树上的节点。对于一个节点，如果当前没有函数，就直接将当前函数放到该点上，否则这两个函数中一定至少有一个在该点的某个子节点中恒优于另一个，那么递归下传其中之一即可。

时间复杂度：

$O(m\log^2 m)$

23.Codechef March14 Chef and Graph Queries

题目大意：

给定一个 n 个点 m 条边的无向图，Q 次询问，每次询问只保留编号在$[L,R]$中的边的情况下图中有多少个联通块。

数据规模和约定：

$1 \le n, m, Q \le 2 \times 10^5$

算法讨论：

考虑暴力的做法，对于一次询问，依次遍历$[L,R]$内的边，如果当前边两端不在同一个连通块，则答案减一并加边。考虑一条边 i 对答案有贡献的条件，即$[1,i-1]$中所有边的最大生成森林中，边 i 的两端不连通或者两端在树上的简单路径所经过最小边编号小于 L。

那么我们只需要按编号顺序加边，维护最大生成树即可，用 LCT 可以直接维护。

回答询问只需要用树状数组简单维护即可。

时间复杂度：

$O((n+m)\log n)$

24.Codechef Jan14 Counting The Important Pairs

题目大意：

给定 n 个点 m 条边的无向图，求有多少种删除两条边的方案使得这张图不连通。

数据规模和约定：

$1 \leq n \leq 10^5$

$1 \leq m \leq 3 \times 10^5$

算法讨论：

先任取一棵生成树，给每条非树边随机分配一个权值，而每条树边的权值即为所有覆盖它的非树边的权值的异或和。

那么显然的，删除某个边集使得图不连通的必要条件是这个边集中存在一个子集异或和为 0。而如果这个边集不能使图不连通，存在一个子集使得异或和为 0 的概率是很小的，当边集大小为 2 时（如果随机分配的边权不会为 0），概率不超过$\frac{1}{权值范围}$。

那么我们只需要求出每条边的边权，便可以很容易计算方案数。

时间复杂度：

$O(n + m)$

25.Codechef Jan14 Counting D-sets

题目大意：

n 维空间中的两个点的距离定义为每一维坐标差的绝对值的最大值，点集的直径定义为点集内距离最远的两个点的距离。两个点集相同当且仅当它们可以通过平移得到。求 n 维空间中直径等于 D 的不同点集个数。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 10$

$1 \le n \le 10^3$

$1 \le D \le 10^9$

算法讨论：

考虑计算直径不超过 D 的不同点集个数。为了避免重复，可以强制要求每一维中最小的为 0，那么每一维的范围即为$[0, D]$。

即目标是计算每一维都至少有一个 0，且每维均在$[0, D]$的方案数。这可以通过对有 0 的维度进行容斥得出。

时间复杂度：

$O(n^2 + Tn\log n)$

26.Codechef Aug12 A Game of Thrones

题目大意：

给定一个博弈游戏。初始序列中有 n 种数，第 i 种值是u_i，有c_i个。A、B 双方轮流操作。第一回合 A 选取一个数字作为初始的局面值。之后每一回合，操作方需选出一个和局面值相似的数作为局面的值，并将上次的局面值移除（如果有多个只移除一个），如果无法操作则输。两个数相似当且仅当它们中较大的一个是较小的一个的整数倍且这个整数是素数。

求最优策略下谁获胜。如 A 获胜，求保证取胜情况下第一次能取的最小值。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 500$

$1 \le u_i \le 10^{18}$

$1 \le v_i \le 10^9$

算法讨论：

根据初始局面建一张图，每个数对应图中一个点，如果两个数相似，则在图中对应两点间连一条边。那么 A 有必胜策略当且仅当这张图不存在完备匹配。

注意到可以根据所含素因子的次数和的奇偶性把点分成两个集合，集合内部肯定是没有边的，因而该图是一张二分图，直接用最大流即可判定是否存在完备匹配。

一个初始权值能保证 A 获胜，当且仅当存在一个最大匹配使该数没有匹配边，对于每个数 dfs 一遍判定是否存在改流的增广路即可。

判定是否相似可以通过 miller rabin 算法解决。

时间复杂度：

$O(n^2 \log u + \mathrm{maxflow}(n, n \log u))$

27.Codechef Dec11 Short II

题目大意：

给定质数p，问有多少对$a,b(a>p,b>p)$满足$(a-p)(b-p)|ab$。T 组数据。

数据规模和约定：

$1\le T\le 5$

$1<p<10^{12}$

算法讨论：

令$c=a-p,d=b-p$，则原条件变为$cd|(c+p)(d+p)$，即$cd|p(c+d+p)$，然后分类考虑三种情况。

1、c 和 d 均是 p 的倍数：那么显然此时只有 5 对c,d满足条件。

2、c 和 d 均不是 p 的倍数：显然$c=d$时无解。不妨令$c<d$，此时我们可以设$kcd=p(c+d+p)$，那么就有$\begin{cases}c<1+\sqrt{p+1}\\ d=\frac{c+p}{kc-1}\end{cases}$，令$d=kc-1$，分别考虑$c\le d$和$c\ge d$两种情况进行枚举，那么显然只要枚举到$\sqrt{p+1+\sqrt{p+1}}$即可。

3、c 和 d 中恰有 1 个是 p 的倍数：每 1 个第 2 类中的解(c,d)都恰好和该情况中的 2 个解$\left(c,\frac{p(c+p)}{d}\right)$、$\left(\frac{p(d+p)}{c},d\right)$对应，故该类的解的个数是第 2 类的两倍。

时间复杂度：

$O(T\sqrt{p})$

28.Codechef Dec14 Divide or die

题目大意：

平面上给定一个 n 度的角，要求通过尺规作图来把这个角分割成 n 个大小为 1 度的角或输出无解。

数据规模和约定：

$0 < n < 360$

所有坐标的绝对值 ≤ 1000

要求操作次数不超过 1000

算法讨论：

n 是 3 的倍数时是无解的。对于其它情况，可以先构造出一个 3 度的角。

通过绘制正 5、正 3 边形可以得到 72 度和 60 度的角，作差即得到 12 度的角，再取两次角平分线即可得到 3 度角。当 n 不是 3 的倍数时，n+1 和 n−1 中一定有一个是 3 的倍数，通过 3 度角得到这个角，然后和 n 度角作差即可得到 1 度角。

有了 1 度角，即可简单地把原角 n 等分了。

29.Codechef Aug12 Two Magicians

题目大意：

给定一个博弈游戏。有一张 n 个点 m 条边的简单无向图，A、B 初始分别位于点 1 和 2。从 A 开始，双方轮流操作，每一个回合有以下三个步骤：1、沿着现有的无向边移动任意步，如果结束时两个人在同一个格子，则操作者胜。2、加入一条图中不存在的无向边，如果无法加入则操作者负。3、初始双方各有 p 次传送机会，操作者可以选择消耗一次机会并传送到任意一个节点。求最优策略下谁会取胜。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le \mathrm{T} \le 100$

$2 \le \mathrm{n} \le 7777$

$\mathrm{m}, \mathrm{p} \le 10000$

算法讨论：

如果 A、B 一开始在同一个连通块上，那么显然 A 胜。

显然，任意一方都不希望自己回合结束后与对方在同一个连通块。所以最终决出胜负之前，一定是有两个连通块且块内部均是完全图。

那么，当 n 是奇数时，到达这一步时经过的回合数的奇偶性就确定了（因为每回合一定加一条边），直接根据需要加的边数的奇偶性判断胜者即可。

考虑 n 为偶数的情况：到达这一步时只有两个连通块均为奇数和均为偶数 2 种情况，这 2 种情况所需加的边数（即经过的回合数）的奇偶性是相反的，即 A、B 各希望出现其中一种情况。

若$\mathrm{p} = 0$:假设先手希望出现均为奇数，反之亦然。如果 A、B 所在初始连通块中有至少一个大小为奇数，先手胜，由于总共的大小为奇数的连通块个数为偶数，后手一定无法使 2 个连通块大小均为偶数。反之则后手胜。

若$\mathrm{p} \neq 0$:此时除 2 种特殊情况外，均是希望达到最终 2 个块大小均为偶数的一方胜。2 种情况分别为：1、一开始只有 2 个连通块，且均为奇数。2、一开始只有 3 个连通块，2 个大小为奇数，先手希望到达最终 2 个块大小均为奇数的状态。

至此，此题得到解决。

时间复杂度：

$\mathrm{O}(\mathrm{n} + \mathrm{m})$

30.Codechef June12 Expected Maximum Matching

题目大意：

按以下方式随机生成一个左边 n 个点右边 m 个点的二分图：左边第 i 个点和右边第 j 个点之间有边的概率为$f_{i,j}$。求这样生成的二分图的最大匹配的期望值。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 5$

$1 \le m \le 100$

算法讨论：

考虑用 Hall 定理解决，用$f_{i,s}$表示只考虑右边前 i 个点，左侧点的所有子集中满足条件的集合为 s 的概率。注意到合法的 s 数量是有限的，预处理出合法状态进行 dp 即可。

时间复杂度：

$O(m \times$ 合法的状态 s 的数量$)$

31.Codechef June12 Cool Numbers

题目大意：

一个数 A 有 k 位，从中选出至多 3 个不同的数位，令这几位的和为 S，这个数的所有数位和为 K，如果存在一种选取方案满足$(K-S)^S$是 A 的倍数，那么就把 A 称为 cool number。给定 n，求小于等于 n 的最大的 cool number 和大于 n 的最小的 cool number。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 10^5$

$1 \le n \le 10^{1000}$

算法讨论：

对于只有不超过 3 个非 0 位的 cool number，可以直接讨论一下求得，现在只考虑除此以外的情况。

此时，显然位数 k 至少要满足$(9k-27)^{27} > 10^{k-1}$，即$k \le 77$，那么我们可以枚举$K-S$，然后枚举$(K-S)^{27}$的因数进行判定，预处理出所有这种情况的 cool number。然后询问时二分即可。

32.Codechef March12 Ciel and Earthquake

题目大意：

有一个$R \times C$的网格图，每对相邻（曼哈顿距离为 1）的点之间有$1 - P$的概率有边。求点$(1,1)$和点(R, C)连通的概率。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 50$

$1 \le R \le 8$

$1 \le C \le 10^{18}$

$0.1 \le P \le 1$

算法讨论：

考虑使用状压 dp 来解决这个问题。用$f_{i,j,s}$表示当前考虑到点(i, j)，轮廓线上的所有点和点$(1,1)$这些点相互之间的连通性。考虑到具体情况，实际有效的状态数 S 是不多的。

然而当 C 很大时，dp 的复杂度是不可接受的。设$ans(R, C, P)$为输入为$(R，C，P)$时的答案，此时可以通过证明得出$\frac{ans(R,n+1,P)}{ans(R,n,P)}$是收敛的，那么只需要设定一个阈值K，当$C > K$时，将$ans(R, K, P) \times (\frac{ans(R,K+1,P)}{ans(R,K,P)})^{C-K}$作为答案即可保证精度要求。

时间复杂度：

$O(TRKS)$

33.Codechef March12 Evil Book

题目大意：

有 n 个人，打败第 i 个人要付出c_i的代价，可以得到d_i的魔法值。初始魔法值为 0。可以对人使用魔法，对第 i 个人使用后，c_i和d_i都将变成原来的$\frac{1}{3}$。每一次使用要消耗 X 点魔法值，魔法值不够时不能使用魔法。求使魔法值大于等于 666 最少要付出的代价。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 5$

$1 \le n \le 10$

$10 \le X \le 666$

算法讨论：

不难发现，除了打败的第一个人外，之后每个被打败的人都会尽量把魔法值除到 666 以下，同时如果你对第 i 个人使用了 k 次魔法，那么一定有$Xk < \frac{d_i}{3^k}$。

由此可以得出每个人被施法的次数一定不超过 4 种。将当前已打败的每个人各被用了多少次魔法作为状态，记忆化搜索即可。

时间复杂度：

$O(Tn4^n)$

34.Codechef July12 Dynamic GCD

题目大意：

一棵 n 个结点的树，每一个结点上有一个正整数权值，有 Q 个操作，操作有两种：1、询问给定两点之间的简单路径上的所有点点权的最大公约数。2、将给定两点之间的简单路径上的所有点点权加上一个定值。

数据规模和约定：

$1 \leq n, Q \leq 5 \times 10^4$

算法讨论：

将每个点的点权对其父节点作查分，则对应的区间加变为了若干个单点加，用 LCT 直接维护即可。维护时记录链上最大公约数和对所有轻孩子节点的修改标记。

时间复杂度：

$O((n + q) \times \log n \times \log \text{权值})$

35.Codechef March13 Little Elephant and Colored Coins

题目大意：

有 n 种给定面值 V 和颜色 C 的硬币，数量不限。有 Q 组询问，要求选出一些硬币使得它们的面值和为 S，且最小化选出硬币的颜色种类数，无解输出-1。

数据规模和约定：

$1 \leq \mathrm{n} \leq 30$

$1 \leq \mathrm{V}, \mathrm{Q} \leq 2 \times 10^5$

$1 \leq \mathrm{S} \leq 10^{18}$

算法讨论：

先选出任意一种硬币，令其权值为 V，用$f_{i,j}$表示用了 i 种颜色所能达到的模 V 等于 j 的最小的面值。这可以通过 dp 求出。询问时考虑选出的那种硬币的颜色是否有取，然后枚举所有情况取最优值即可。

时间复杂度：

$O(n^2V + nQ)$

36.Codechef July15 Easy Exam

题目大意：

有一个 K 面的骰子，每个面上的数字分别是 1 到 K。给定两个参数L和F($0 < L \leq K$)。将这个骰子掷 N 次，令a_i为掷出数字 i 的次数。求$\prod_{i=1}^{L} {a_i}^F$的期望值。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq T \leq 2$

$0 < N, K \leq 10^9$

$0 < L \times F \leq 2 \times 10^4$

$F \leq 10^3$

算法讨论：

用变量$b_{i,j}$表示第 j 次是否掷出了 i，显然有$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$。相应的，所求式展开后的每一项都是若干个 b 的乘积。显然如果某一项中有 2 个 b 的 j 值相同，该项的值是恒为 0 的。对于其它的项，如果这一项由 t 个变量相乘，那么其期望值显然是$\frac{1}{K^t}$。

用$f_{i,j}$表示$N = i$时含 j 个变量的有用项一共有多少个，就可以递推了。这里的递推式是可以通过 FFT 和快速幂优化的。

最后统计一下答案即可。

时间复杂度：

$O(LF \times \log LF \times \log L)$

37.Codechef Aug13 Music & Lyrics

题目大意：

给定 n 个字符串 S 和 m 个字符串 T，询问每一个 S 串在 T 中一共出现了多少次。

数据规模和约定：

$n \le 500$

$m \le 100$

$|S| \le 5000$

$|T| \le 50000$

算法讨论：

对所有的 S 串建一个 AC 自动机，对每一个 T 都在 AC 自动机走一遍，每走到一个节点，该节点在 fail 树上所有的祖先答案都要加一。

转化为子树和即可。

时间复杂度：

$O(n|S| + m|T|)$

38.Codechef Aug13 Prime Distance On Tree

题目大意：

给定一棵 n 个点的树。求在树中等概率地随机选取两个不同的点，这两个点之间的距离是一个质数的概率。

数据规模和约定：

$2 \leq n \leq 5 \times 10^4$

算法讨论：

通过点分治套 FFT 对于每一个 i 求出距离为 i 的点对有多少对，最后统计一下答案即可。

时间复杂度：

$O(n\log^2 n)$

39.Codechef June13 Count Special Matrices

题目大意：

求满足以下条件的 n 阶矩阵个数：

1、对于任意$1 \le x \le n$，有$a_{x,x} = 0$。

2、对于任意$1 \le x < y \le n$，有$a_{x,y} = a_{y,x} > 0$

3、对于任意$1 \le x, y, z \le n$，有$a_{x,y} \le \max(a_{x,z}, a_{z,y})$

4、对于任意$1 \le x < y \le n$, 有$a_{x,y} \in \{1,2,\dots,n-2\}$

5、对于任意$k \in \{1,2,\dots,n-2\}$，存在$1 \le x, y \le n$使得$a_{x,y} = k$

答案模$10^9 + 7$。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 10^5$

$3 \le n \le 10^7$

算法讨论：

注意到输入只有一个 n，事实上最终的答案即为$\frac{n!(n-1)!}{3\times 2^{n-1}}\left(\frac{3n}{2} - 2 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right)$。于是预处理出阶乘、阶乘的逆元和逆元的前缀和，直接回答询问即可。

时间复杂度：

$O(n + T\log n)$

40.Codechef June13 Two k-Convex Polygons

题目大意：

给定 n 个棍子的长度和整数 k，求能否在其中选出 2k 个棍子拼成两个凸 k 多边形，要求任意相邻的边不共线。

如果有，任意输出一组方案。

数据规模和约定：

$2k \le n \le 1000$

$3 \le k \le 10$

$1 \le$ 棍子长度 $\le 10^9$

算法讨论：

将所有棍子按长度排序。考虑如果只需要组成一个凸多边形，那么一个贪心策略是确定了最长边后，取比它短的最长的 k−1 条边判断和是否大于它即可。

那么如果 2 个凸多边形边长范围不交，只需要贪心判定即可。

如果相交，那么取的一定是连续的 2k 条边，枚举一个区间，然后搜索判定即可。

时间复杂度：

$$O(n^2 + n\binom{2k-1}{k})$$

41.Codechef Nov11 Luckdays

题目大意：

定义数列 S：$S_i = \begin{cases} A\ (i = 1) \\ B\ (i = 2) \\ (XS_{i-1} + YS_{i-2} + Z) \bmod P\ (i \geq 3) \end{cases}$

给定 C，有 Q 个询问，每次询问满足$L \leq k \leq R$且$S_k = C$的 k 的个数。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq T \leq 2$

$2 \leq P \leq 10007$ 且 P 是质数

$0 \leq A, B, X, Y, Z, C < P$

$1 \leq Q \leq 20000$

$1 \leq L \leq R \leq 10^{18}$

算法讨论：

当 X 或 Y 为 0 时，S 的循环节长度不超过 P，求出循环节后暴力计算即可。

考虑 X 和 Y 均不为 0 的情况。记该线性递推式的转移矩阵为 T，初始向量为$(A, B, 1)$，此时只需要用大步小步法求出循环节的长度，并且对于每个$0 \leq q < P$求出满足$(A, B, 1) \times T^k = (C, q, 1)$的最小的 k，然后就可以通过二分快速回答询问了。

时间复杂度：

$O(P\sqrt{P} + Q \log P)$

42.Codechef Nov 11Colored Domino Tilings and Cutsontest

题目大意：

有一个 n 行 m 列的矩形棋盘。给棋盘染色是指每个格子有且仅有一个相邻格子的颜色与之相同。棋盘的割是指一条竖直或水平的直线将棋盘分成两半，而且这两半都是合法的棋盘染色。要构造一个棋盘覆盖染色使得割的数量最少，在此前提下，使得使用的颜色最少。任意输出一组解。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 3000$

$n, m \le 500$

算法讨论：

当 nm 是奇数时无解。可以构造出两种分别为6×8和5×6的棋盘，使得割数为 0 且用到 3 种颜色，且可以在不增加割数和颜色数的前提下增加两行或两列。对于剩下的情况，通过打表解决。

时间复杂度：

$O(Tnm)$

43.Codechef Oct11 Sine Partition Function

题目大意：

给定 m、n、X，求$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}\prod_{i=1}^{m}\sin(k_iX)$。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 10$

$1 \le m \le 30$

$1 \le n \le 10^9$

$0 \le X \le 6.28$

算法讨论：

令$f_{i,j}$为$m = i$且$n = j$时的答案，那么最终可以推出：

$$f_{i,j} = f_{i-1,j-1} \times \sin(X) + f_{i,j-1} \times 2\cos(X) - f_{i,j-2}$$

通过矩阵快速幂优化即可。

时间复杂度：

$O(m^3 \log n)$

44.Codechef Oct11 The Baking Business

题目大意：

有 S 个操作，操作有两种，即出售或询问：

1、出售的格式为：

I 产品编号[.大小编号] 省编号[.城市编号[.地区编号]] 性别 年龄 出售数量

包括出售的产品细节，位置细节以及顾客性别和年龄。顾客的性别为 M 或者 F，年龄从 1 到 90。所有的编号都是从 0 开始。方括号内的部分是可选的。出售数量不会超过 100。

2、询问的格式为：

Q 产品编号[.大小编号] 省编号[.城市编号[.地区编号]] 性别 起始年龄[-结束年龄]

询问在该范围下的出售总数。如可选部分缺失则该部分没有限制。如果产品编号为-1，意为所有商品，如省份为-1 意为所有的省份。

数据规模和约定：

有 10 种产品，每种都有 3 种不同的大小。有 10 个省份，每个省份可以被划分为 20 个城市，每个城市又可以被划分成 5 个地区。

$S \leq 100000$

算法讨论：

用一个数组直接记录对于某个年龄，当前所有类型询问的出售总数。询问时枚举年龄即可。

时间复杂度：

$O(S)$

45.Codechef Oct12 Max Circumference

题目大意：

给出一个三角形 ABC，以及 N 个操作。每个操作有两个参数 x 和 y，使用这个操作可以使得点 A 的 x 坐标增加 x，并且 y 坐标增加 y。

要求使用最多 K 个操作，最大化三角形 ABC 的周长。允许 A、B、C 共线或共点。

数据规模和约定：

$K \le N \le 500$

算法讨论：

题意等价于最大化$|AB| + |AC|$。一定存在一对(u, v)，使得最大化$uA_x + vA_y$时，$|AB| + |AC|$也最大化。假设最优值为 x，以$|AB| + |AC| = x$作一个椭圆，那么所有可能的 A 都在该椭圆内，且最优的 A 在椭圆上，过该点作椭圆切线即可得到一对满足条件的(u, v)。

如果知道了(u, v)，那么只需要排序后取前 K 个中权值为正的即可。对于所有的(u, v)，不同的排序结果只有不超过N^2个，按顺序遍历不同的排序结果，每次二分计算答案即可。

时间复杂度：

$O(N^2 \log N)$

46.Codechef Jan15 Ranka

题目大意：

要求在一个9×9的围棋棋盘上给出有 n 步且不存在重复局面的围棋步骤。

数据规模和约定：

$n \le 10^4$

算法讨论：

注意到如果当前棋盘上除了一个空位外全是某一方的棋子，另一方落子后就会将棋盘变为只剩一个子，反复重复此过程，最多有2×81^2步，已经足够了。

47.Codechef Jan15 Xor Queires

题目大意：

给定一个初始时为空的整数序列(元素由 1 开始标号)以及 m 个询问：

1、在数组最后加入数字 x。

2、在区间[L,R]中找到数字 y，最大化(x xor y),xor 表示按位异或。

3、删除数组最后 k 个元素。

4、在区间 L..R 中，统计小于等于 x 的元素个数。

5、在区间 L..R 中，找到第 k 小的数(第 k 个顺序统计量)。

数据规模和约定：

$m, x \leq 5 \times 10^5$

算法讨论：

直接对每个前缀维护一棵函数式的 Trie 即可。

时间复杂度：

$O(n \log x)$

48.Codechef Oct14 Union on Tree

题目大意：

给定 n 个节点的树，边长均为 1。Q 组询问，每组询问给出了若干个数对 (a, r)，表示与点 a 距离不超过 r 的所有点都被守护了，求该询问中被守护的点的总数。

数据规模和约定：

$1 \leq n, Q \leq 50000$

所有询问给出的数对总数 ≤ 500000

算法讨论：

只有一个数对的情况可以通过点分治计算答案。

考虑多个数对的情况，对于一个询问，建出涉及点的虚树。可以通过一个 dp 计算出每个点实际要考虑的守护距离。然后考虑虚树上的一条边上，一定存在一个点使两端到达它后剩余的距离相同，把它的守护距离设成这个剩余的距离。那么可以证明得出最终的答案即是所有点能守护到的点数后减去所有中间点能守护到的。

然后点分治计算即可。

时间复杂度：

$O((n + \text{所有询问给出的数对总数}) \log n)$

49.Codechef Oct14 Children Trips

题目大意：

一棵 n 个点的树，边权均为 1 或 2。有 m 个询问，每次询问从 u 走到 v，每天最多走 d 的距离，且只能停在一个节点上，至少要几天才能完成。

数据规模和约定：

$1 \le n, m \le 10^5$

算法讨论：

对于$d > \sqrt{n}$的询问，最多只要走$O(\sqrt{n})$天，可以通过倍增找到每天能走到的最远位置，直接模拟即可。

对于$d \le \sqrt{n}$的询问，最多只有$O(\sqrt{n})$种不同的 d，可以将 d 相同的询问一起处理，预处理在当前的 d 下，从每个点向上走2^k天后会到达的点，即可快速回答询问。

时间复杂度：

$O(n\sqrt{n}\log n)$

50.Codechef April14 Chef and Tree Game

题目大意：

有一棵 n 个节点的树，边均为红色或蓝色。两人轮流进行操作，第一个人每次删除一条红色边，第二个人每次删除一条蓝色边，和根不连通的部分将被删除，不能操作的人算输。求最优策略下双方先手时分别是谁取胜。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq T \leq 1000$

T 组数据中 n 的和 $\leq 10^5$

算法讨论：

对每个点定义一个局面函数f：叶节点函数值为 0，每一个节点的函数值为其所有孩子的贡献之和，对于孩子 i，如果连的是红边，令a为大于$1-f_i$的最小正整数，则贡献就是$\frac{f_i+a}{2^{a-1}}$，反之，令 a 为大于f_i+1的最小正整数，则贡献为$\frac{f_i-a}{2^{a-1}}$。

如果根的函数值为 0，则后手胜，如果大于 0，则一定是第一个人胜，如果小于 0，则一定是第二个人胜。

求函数值可以用平衡树维护二进制高精度数的方法实现，相加时可以启发式合并。

时间复杂度：

$O(n\log^2 n)$

51.Codechef Sep13 Two Roads

题目大意：

平面上有 n 个点，要求作两条直线，最小化所有节点到这两条直线上最近点的距离的平方和，输出这个最小值。不存在重点和三点共线。

数据规模和约定：

$3 \le n \le 100$

算法讨论：

考虑直线相交的情况，可以根据角平分线把平面分成 4 个区域，每个区域内属于同一条直线。那么就可以枚举划分方案不同的角平分线。

对于一个点集，可以通过维护一些量，直接计算出最优的一条直线。

时间复杂度：

$O(n^3 \log n)$

52.Codechef Nov12 Arithmetic Progressions

题目大意：

给定一个长度为 n 的数组 A，求有多少个三元组$(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})(1 \le \mathrm{i} < j < k \le n)$满足$\mathrm{a_j} - \mathrm{a_i} = \mathrm{a_k} - \mathrm{a_j}$。

数据规模和约定：

$3 \le \mathrm{n} \le 10^5$

$1 \le \mathrm{A} = \max(\mathrm{a_i}) \le 3 \times 10^4$

算法讨论：

将序列每连续 L 个分成一块，然后分情况进行计算。

如果 i 和 k 中至少一个与 j 处在同一块内，可以枚举其中两个进行统计。

当三个均在不同块中时，枚举 j 所在的块，然后用 FFT 统计$\mathrm{a_i} + \mathrm{a_k}$为每个值的方案数即可。

时间复杂度：

$\mathrm{O}(\frac{\mathrm{nA}\log\mathrm{A}}{\mathrm{L}} + \mathrm{nL})$

当$\mathrm{L} = \sqrt{\mathrm{A}\log\mathrm{A}}$时复杂度最优，为$\mathrm{O}(\mathrm{n}\sqrt{\mathrm{A}\log\mathrm{A}})$

53.Codechef Sept13 To Queue or not to Queue

题目大意：

有一个字符串 S，初始为空，有 Q 次操作，操作有三种：1、在末尾插入一个字符。2、在开头删掉一个字符。3、询问当前字符串的不同子串个数。

数据规模和约定：

$1 \le Q \le 10^6$

算法讨论：

如果没有修改操作，询问不同子串个数可以通过后缀数组、后缀树来解决。

考虑修改操作，可以预先求出完整串的后缀数组，然后修改时统计一下答案。

也可以在后缀树的构建算法 Ukkonen 的基础上进行一些拓展来实现。

时间复杂度：

$O(Q\log Q)$或 $O(Q)$

54.Codechef Nov12 Martial Arts

题目大意：

一个两边各 n 个点的完全二分图，每条边有两个权值 A 和 B，求一个匹配。令匹配边的 A 值和为H，B 值和为G。对手的目的是最大化$G-H$，其次最大化G，他会在知道给出的匹配之后选择是否去掉一条匹配边。任务是找一个完全匹配，最大化$H-G$，其次最大化H。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 100$

算法讨论：

对于两个条件，可以直接双关键字进行加减、比较，就变成了一般的情况。

那么现在只考虑己方要最大化权值和，对方要最小化权值和。那么对方删除的一定是匹配边中最大的一条。那么可以枚举匹配边中最大的边，计算出强制匹配该边，且只能使用不大于该边的边时最优的匹配。注意到不需要每次重新求一遍匹配，可以从小到大枚举最大的边，每次在上次基础上增广即可。

时间复杂度：

$O(n^4)$

55.Codechef May14 Dynamic Trees and Queries

题目大意：

给定一棵 n 个点的有根树，有 m 次操作，操作有四种：1、加入一个给定点权的叶子。2、删除某个子树。3、给某个子树内所有点的点权加上一个值。4、询问某个子树内的点权和。

数据规模和约定：

$n, m \leq 50000$

算法讨论：

直接用 splay 维护这棵树的 dfs 序列即可。

时间复杂度：

$O((n+m)\log n)$

56.Codechef May14 Sereja and Subsegment Increasings

题目大意：

有两个长度为 n 的模 4 意义下的数组 A、B，每一次可以选出一个 A 数组的一个区间，把区间内所有数在模 4 的意义下加一，求将数组 A 变成数组 B 的最少操作次数。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 10^5$

算法讨论：

在模 4 意义下用 B 减去 A 得到一个数组 C。然后再对 C 作差分。那么问题就变成了每次可以给一前一后两个位置分别加一和减一，要从一个全 0 的数组得到 C。不考虑模意义下，那么答案即为 C 中所有正数的和。

考虑模意义下，C 中的值均在$[-3,3]$内。考虑一个位置，如果其值在$[-1,1]$内，进行加四或减四无法使其更优。不妨使用贪心，遍历一遍数组，每当遇到 2 或 3 时，就判断是否在其之前仍有-3 或-2，如果有，就可以将当前位置减四，-3 或-2 的位置加四来使答案更优。

时间复杂度：

$O(n)$

57.Codechef July11 Trial of Doom

题目大意：

一个房间被划分成了$n \times m$个方格，有 k 个方格是红色，其余为蓝色。起点在$(1,1)$，终点在(n, m)，要从起点到达终点并使得所有方格都是蓝色。每一步可以移动到八个相邻的方格上，每离开一个方格，这个方格和它周围的四个方格会改变颜色。现在给出房间的颜色情况，求是否存在方案。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq T \leq 50$

$1 \leq n, m \leq 10^9$

$\min(n, m) \leq 40$

$k \leq 10000$

算法讨论：

不妨设$n \leq m$。

当$n = 1$时，路径长度与 n 奇偶性相同，考虑起点经过次数是奇数还是偶数，解出每个格子的经过此时的奇偶性，判断总次数是否与 n 同奇偶即可。

当$n > 1$时，可以证明存在方案使得任意的某些格子经过奇数次，其余经过偶数次。因此问题等价于每次可以将一个方格和它周围四个方格反色，判断是否能全部变成蓝色。

注意到操作是可逆的，所以对当前局面任意进行操作不改变方案的存在性。对于一个红格(x, y)，可以通过操作$(x, y-1)$使其转化为 4 个 y 更小的红格，最终把所有红格都移到第 1 列上。第 i 列的格子对前面列的影响是有周期性的，可以通过找出循环节来处理 y 较大的情况。

最后高斯消元判断是否有解即可。

时间复杂度：

$O(Tk + T \times \min(n, m) \times$ 循环节长度$)$

58.Codechef July11 Billboards

题目大意：

对于一个长度为 n 的 01 序列，称它满足条件当且仅当它的所有长度为 m 的连续子序列中都有至少 k 个 1。求所有满足条件的序列中，1 的数目最少的不同序列的个数。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq T \leq 300$

$k \leq m \leq 500$

$m \leq n \leq 10^9$

算法讨论：

当$n \bmod m = 0$时，把序列每 m 个分成一段，每段至少有 k 个 1，同时又有每段开头 k 个为 1 即满足条件，由此可知最少的 1 的数目即为$\frac{nk}{m}$。

对一个序列构造对应的$k \times \frac{n}{m}$的矩阵 A，A 的第 i 行第 j 列表示第 j 段中第 i 个 1 在这段中的位置。那么就有所有的合法序列和这样的每一行单调不增每一列单调增的矩阵一一对应。

A 是半标准的杨氏矩阵，其方案数为$\prod_{(i,j)} \frac{r+j-i}{hook(i,j)}$，其中$hook(i,j)$为和$(i,j)$同行或同列且某一维坐标比其大的位置数，r 表示可选数集合的大小。展开后可以发现大部分项会被约掉，需要计算的项数是很少的。

对于$n \bmod m != 0$的情况，如果$n \bmod m \leq m - k$，那么每段的前$n \bmod m$个数一定是 0，反之则后$m - n \bmod m$个数一定是 1，即可转化为$n \bmod m = 0$的情况了。

时间复杂度：

$O(Tkm)$

59.Codechef Aug15 Simple Queries

题目大意：

给定一个含 n 个正整数的数组 A。有 Q 个操作，操作有五种：1、令 S 为区间$[l,r]$内所有不同的元素构成的有序集合，求$\left(\sum_{1\le i<j<k\le|S|} S_iS_jS_k\right) \bmod (10^9+7)$。2、将下标为 x 的元素赋值为 y。3、删除下标为 x 的元素。4、在下标为 z 的元素之后插入元素 y。5、求下标$[l,r]$内的不同元素个数

数据规模和约定：

$1\le n,Q\le 10^5$

算法讨论：

对于操作一，只需要求出这些点的点权和 x、点权平方和 y、点权立方和 z，即可算出答案，即$\frac{x^3-3xy+2z}{6}$。操作五同理。可以先用平衡树遍历一遍所有操作，以将插入删除转换成修改操作。维护这个这些量时可以通过对每个权值开一棵平衡树来转化成三维偏序问题，使用分治和树状数组解决即可。

时间复杂度：

$O((n+Q)\log^2(n+Q))$

60.Codechef May12 Selling Tickets

题目大意：

有 n 道菜 m 个人，晚餐时每一道菜都被分配给一个人，每个人只要吃到指定的某两道菜之一就会开心，否则不开心。现在求最大的 k 使得对于任意 k 人都存在一个分配的方案使他们都开心。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 15$

$2 \le n \le 200$

$0 \le m \le 500$

算法讨论：

原题可以转化为对一个 n 个点 m 条边的无向图求满足边数恰好比点数多一的点数最少的连通子图的点数。

那么这种子图其实只有两种情况：1、两个点之间有三条路径。此时可以枚举这两个点然后 bfs 求解。2、两个环由一条路径连接，此时枚举一个点然后在其 bfs 树上处理一下环即可。

时间复杂度：

$O(n^2m + nm^2)$

61.Codechef May12 Little Elephant and Boxes

题目大意：

有 n 个盒子，每个盒子里有一定概率是一些钱，否则是一块钻石。打开所有盒子之后去购物，一共有 m 件物品，每件都需要一定的钱数和一些钻石，求能最多能买到的物品数的期望值。T 组数据

数据规模和约定：

$1 \leq T \leq 5$

$2 \leq n \leq 30$

$1 \leq m \leq 30$

算法讨论：

可以使用 meet in the middle 的方法。先预处理出用一定数量的钻石要买到一定数量的物品至少需要的钱数。设立一个阈值 N，先搜索并存储下最后的 n-N 个盒子开完后的所有结果，即钱数、钻石数和概率。然后再搜索前 N 个盒子的所有状态，枚举后面的盒子一共得到了多少钻石以及最终买了多少物品，此时可行的后半部分状态的钻石数已经确定，而钱数在一个区间内，通过排序、二分以及前缀和的方法求出这种情况的概率即可。N 取$\frac{n}{3}$左右即可通过。

时间复杂度：

$O(Tnm^2 + 2^{n-N}(n-N) + 2^N m(n-N)^2)$

62.Codechef Jan13 A New Door

题目大意：

有一个矩形区域和 n 个圆，求 n 个圆的圆并的周长在矩形内的部分的长度。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 1000$

算法讨论：

对每个圆求出在矩形内且不被别的圆覆盖的周长的长度，其和即为答案。可以对每个圆暴力求出其它的圆在其周长上覆盖的范围，排序后扫一遍即可。

时间复杂度：

$O(n^2 \log n)$

63.Codechef Jan13 Cucumber Boy and Cucumber Girl

题目大意：

已知 B 个$n \times n$矩阵$Q_1, Q_2, \dots, Q_B$。

对于每对(a, b)满足$1 \le a < b \le B$，构造一个矩阵$C_{a,b}$满足：

$$C_{a,b}[i][j] = \sum_{k=1}^{n} Q_a[i][k] \times Q_b[j][k] \ (1 \le i, j \le n)$$

一个长为 n 的排列p是好的当且仅当存在 i 使得$C_{a,b}[i][p_i]$为奇数。

一对数对(a, b)是好的当前仅当对于它而言，好的排列有奇数个。

求好的数对数量。

数据规模和约定：

$n \le 60$

$B \le 8000$

算法讨论：

对于每个矩阵 C，将其每个位置变为原值加一模二的值，那么这个数对是好的当且仅当其对应矩阵 C 的行列式为奇数。

不妨在所有矩阵 Q 后加上一列全 1，那么模 2 意义下，就有$C_{a,b} = Q_a \times Q_b^T$。令$Q_{i,j}$为矩阵$Q_i$删除第 j 列后得的的矩阵，那么由 Binet-Cauchy 定理可知，$\det(C_{a,b}) = \sum_{i=1}^{n+1} \det(Q_{a,i}) + \det(Q_{b,i})$。可以对$Q_i$进行消元，如果不满秩，那么行列式都为 0，否则可以消出一个矩阵D，使得D是单位矩阵加上一列的形式，设加上的是第 k 列，相应的有$\begin{cases} \det(Q_{i,j}) = D[j][k] \ (j < k) \\ \det(Q_{i,j}) = 1 \ (j = k) \\ \det(Q_{i,j}) = 0 \ (j > k) \end{cases}$，然后即可统计答案了。

时间复杂度：

$O(n^2B + B^2)$

64.Codechef Aug11 Shortest Circuit Evaluation

题目大意：

布尔型表达式满足短路运算原理，及某个表达式已经得到结果，则不再计算。现在给出布尔型表达式，和每个变量(只出现一次)为 true 的概率，调整布尔型表达式的顺序，使得期望的计算次数(使用变量的次数)最少，求期望概率。数据保证将表达式化简后与原表达式相比无实质影响。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 50$

一个表达式长度不超过 30000

一个表达式中不会有超过 1000 个变量

变量名长度不超过 5 个字母

算法讨论：

实际上能更换的只有连续用 and 连接的变量和连续用 or 连接的变量，对于连续用 and 连接的变量，可以直接贪心排序，or 同理。于是只需要维护一个栈来处理表达式即可。处理变量名可以直接使用 stl 的 map。

时间复杂度：

O(Tn log 变量个数)

65.Codechef Aug11 Something About Divisors

题目大意：

对于给定的正整数B和X，求满足条件的正整数N的个数:要求对于N，至少存在一个数D（$N < D \leq B$)能整除$N \times X$。T 组数据。

数据规模和约定：

$T \leq 40$

$B \leq 10^{12}$

$X \leq 60$

算法讨论：

令$i = \frac{NX}{D}$，则显然$i < X$。考虑对于每个 N，在其对应的最大的 i 处计入答案。枚举 i，有$i|NX$，即$\frac{i}{\gcd(i,X)}|N$, 令$a_i = \frac{i}{\gcd(i,X)}$，则$N = a_i k(k \leq \frac{iB}{a_i X})$，设 k 的最大值为 P，进行容斥，即可得到$ans_i = \sum_{S \subseteq \{i+1,i+2,\ldots,X-1\}} (-1)^{|S|} \frac{P}{Lcm(S)}$。

显然只有$Lcm(S) \leq P$时的项才需要计算，可以通过扩展算出，需要加入一些优化。

66.Codechef June15 Chefbook

题目大意：

给定 m 个整数对$(x, y)(1 \le x, y \le n)$和对应的$L_{x,y}$、$S_{x,y}$、$T_{x,y}$，有 n 个非负整数变量P_x和 n 个非负整数变量$Q_x(1 \le x \le n)$，定义$W_{x,y} = L_{x,y} + P_x - Q_y$, 要求$S_{x,y} \le W_{x,y} \le T_{x,y}$，求一组对应的P、Q使得$\sum W_{x,y}$最大。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 10$

$n \le 100$

算法讨论：

可以将题目要求写成整数线性规划的形式，然后转化成对偶问题用最小费用最大流求出最优值。得到最优值后，可以根据流网络构造一个查分约束来得出一组合法的最优解。

67.Codechef Feb12 Find a Subsequence

题目大意：

给定一个长度为 n 的数组 A 和一个长度为 5 的排列 B。要求找出一个长度为 5 的 A 的子序列，满足其相对大小和 B 相同。T 组数据。

数据规模和约定：

$T \leq 20$

$n \leq 1000$

算法讨论：

枚举子序列中第 2 个和第 4 个的位置，贪心选择剩余位置中数值最小的和最大的，然后判断最后一个位置是否有合法解即可。

可以通过预处理来快速求出一段区间内数值在某个范围内的数值最小和数组最大的位置。

时间复杂度：

$O(Tn^2 \log n)$

68.Codechef Feb12 Flight Distance

题目大意：

给一个 n 个点 m 条边的带权无向图，每条边的边权为w_i。为了使每条边的边权为这条边两个端点的最短路长度，可以将第 i 条边的权值增加或减少一个有理数值D_i。求$\sum_{i=1}^{m} D_i$的最小值。

数据规模和约定：

$n \le 10$

$m \le \frac{n(n-1)}{2}$

$1 \le w_i \le 20$

算法讨论：

显然可以将原题转化成一个线性规划的模型。对于初始的合法解可以通过对变量进行一些相应的代换得到。

69.Codechef Aug14 Team Sigma and Fibonacci

题目大意：

给定 m、n，求$\sum_{x,y,z\text{是非负整数且}x+y+z=n} 6xyz \times \mathrm{fib}_x \times \mathrm{fib}_y \times \mathrm{fib}_z$模 m 的值。T 组数据。

数据规模和约定：

$n \le 10^{18}$

$m \le 10^5$

T 组数据中 m 的和 $\le 10^6$

算法讨论：

可以通过生成函数直接计算出答案的形式，用矩阵快速幂快速求斐波那契数列的某几项直接计算即可。

时间复杂度：

$O(T \log n)$

70.Codechef Dec12 Different Trips

题目大意：

给定一棵 n 个节点的树，两条路径相同当且仅当它们长度相同且经过的点的度数按顺序对应相同。求有多少条不同的从孩子走向祖先的路径。

数据规模和约定：

$1 \le \mathrm{n} \le 10^5$

算法讨论：

先算出每个点的度，然后直接用倍增法对这棵树求出后缀数组。按顺序遍历一遍后缀数组并用总长减去后缀数组上所有相邻串的最长公共前缀的和即是不同的子串数，即所求答案。

时间复杂度：

$\mathrm{O}(\mathrm{n} \log \mathrm{n})$

71.Codechef Feb15 Payton numbers

题目大意：

定义三元组(a, b, c)的乘法运算，其中$c = 11$ 或 24

$\mathrm{def\ multiply((a1, b1, c1), (a2, b2, c2))}$:

$s = (a1a2 + b1b2 + c1c2) + (a1b2 + b1a2) + (c1 + c2)$

$t = \mathrm{foor}[s/2] + 16(c1 + c2) - c1c2$

$A = (t - 2(a1b2 + b1a2) - (a1c2 + c1a2) + 33(a1 + a2) + (b1b2 - a1a2))$

$B = (t - 5(a1b2 + b1a2) - (c1b2 + b1c2) + 33(b1 + b2) + (2b1b2 + 4a1a2))$

$\mathrm{if\ s\ is\ even: return\ }(A - 540, B - 540, 24)$

$\mathrm{else: return\ }(A - 533, B - 533, 11)$

定义单位元:A是对于任何B满足$A \times B = B$的三元组，则A是单位元。

定义零:A是对于任何B满足$A \times B = A$的三元组，则A是零。

定义一个三元组是素数当且仅当这个三元组不能表示成两个非零非单位元的三元组的乘积。

要求判定一个三元组是否是素数。T 组数据。

数据规模和约定：

$T \le 10^4$

$-10^7 \le a, b \le 10^7$

算法讨论：

令ω为方程$x^2 = x - 3$的解，即$\omega = \frac{1+\sqrt{-11}}{2}$。对每个三元组$(a, b, c)$有到域$Z[\omega]$的映射$\Phi(a, b, c) = (33 - 2a - c) + (b - a)\omega$, 能够证明$(a, b, c)$是素数当且仅当$\Phi(a, b, c)$在域$Z[\omega]$下是素数。定义共轭$(a + b\omega)' = (a + b - b\omega)$，令$N = xx'$，那么有结论：如果x不是整数，那么其是素数当且仅当N是素数；否则其是素数当且仅当整数 x 是素数，并且要么$|x| = 2$，要么$|x| \ne 11$且-11在模x意义下没有二次剩余。可以用欧拉判别法和 miller rabin 算法判断。

时间复杂度：

$O(T \log |a|)$

72.Codechef Feb15 Devu and Locks

题目大意：

对于所有的$0 \le m \le M$，求出满足数位和不超过m且是P的倍数的 n 位数的个数模 998244353，可以有前导 0。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 10^9$

$P \le 50$ 且 $M \le 500$ 或

$P \le 16$ 且 $M \le 15000$

算法讨论：

可以倍增位数，用$f_{i,j}$表示当前位数下，模 P 为 i，数字和为 j 的数的个数。每次合并 dp 值可以把位数增加一倍，合并时可以用 FFT 优化。

时间复杂度：

$O(PM\log M\log n + P^2M\log n)$

73.Codechef Dec13 Query on a tree VI

题目大意：

给定一棵 n 个节点的树，每个节点都为黑色或白色，初始都为黑色，有 m 个操作，操作有两种：1、给定点 u，求 u 所在的与 u 同色的连通块大小。2、修改一个点的颜色。

数据规模和约定：

$n, m \leq 10^5$

算法讨论：

求出这棵树的 dfs 序，对每个块在其最高点记录答案，对黑白两种颜色的点分别维护各自的答案，修改时找到往根走遇到的第一个两种颜色，计算一下影响即可。

需要支持区间加和单点求值，可以直接用树状数组实现。

时间复杂度：

$O(n \log n + m\log^2 n)$

74.Codechef Dec13 Petya and Sequence

题目大意：

给定一个长度为 n 的序列 A，问是否存在一个不全为 0 的序列 B 使得对于任意$0 \le j < n$满足$\sum_{i=0}^{n-1} A_i \times B_{(i+j) \bmod n} = 0$。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 100$

$1 \le n \le 3 \times 10^4$

T 组数据中 n 的和 $\le 1.5 \times 10^5$

算法讨论：

原题可以转化为给出一个循环矩阵$C = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$，要求判断其是否满秩。令$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i x^i$，那么循环矩阵 C 的秩有公式为：

$$\mathrm{rank}(C) = n - \mathrm{degree}(\gcd(f(x), x^n - 1))$$

考虑分圆多项式，定义$\Phi_n(x)$为$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$，那么就要判断是否存在 n 的约数 d 使得$\Phi_d(x) | f(x)$，这与$x^d - 1 | f(x) \times \prod_{i|d\text{ 且 }i\text{ 是质数}} (x^{\frac{d}{i}} - 1)$等价，直接判定即可。

时间复杂度：

$O(Tn\log n + Tn \times n$ 的因子个数$)$

75.Codechef March15 Counting on a Tree

题目大意：

给定一颗 n 个节点带边权的树，接下来有 Q 次操作，每一次操作修改一条边的权值。所有操作前以及每次操作后输出这棵树中所有权值为 1 的路径条数，路径的权值定义为路径上所有边权值的最大公约数。

数据规模和约定：

$n \leq 10^5$

$Q \leq 100$

边权 v 不超过10^6

算法讨论：

考虑对于所有的 i，求出权值 i 的倍数的路径总数，然后容斥出答案。

枚举 i，那么此时只需要考虑边权为 i 的倍数的边,先将不涉及修改的边全部加入，然后对于每次操作，将剩下所有涉及的边加入，统计答案后再撤销。

可以用并查集实现。

时间复杂度：

$O(v + (n + Q^2)\log n \times v \text{ 的因数个数})$

76.Codechef July12 Equivalent Suffix Tries

题目大意：

两个后缀树等价当且仅当为它们对应的有向图是同构的。给定一个长度为 n 的只包含小写字母的字符串 S，要求计算只包含小写字母的不同字符串的数量，满足它们的后缀树和给定的字符串的后缀树等价。答案对 42424242 取模。T 组数据。

数据规模和约定：

$T \leq 10$

$n \leq 10^5$

算法讨论：

首先有一些结论：1、后缀树的叶子数取决于最长的后缀 s 的长度L，其中 s 满足其是 S 的其它某一个后缀的前缀。叶子数即$n-L$。2、所有的后缀树与 S 的后缀树等价的串中出现的不同的字符数相同。3、符合条件的串中所有不同的字符都会在前$n-L$个位置中至少出现一次。4、对于任意$1 \leq i < j \leq n-L$，如果$S_i = S_j$，那么所有符合条件的串中它们也相等，如果$S_i \neq S_j$，那么所有符合条件的串中它们也不相等。5、确定其它字符后，最后 L 个字符最多只有$n-L$种填法。6、对所有满足条件的串，有$Lcp(i, n-L)$(要求 $1 \leq i \leq n-L$)是定值。

结合上述结论，即可得出答案。可以用字符串 hash 和 kmp 优化效率，即可通过。

时间复杂度：

$O(Tn\log n)$

77.Codechef June11 Attack of the Clones

题目大意：

我们称一个形为 f:A➞B 的函数叫做布尔函数，其中 A 是所有长度为 n 且仅由 0 和 1 组成的数列的集合，B={0,1}，我们称 n 为布尔函数的项数。我们称满足一些条件的布尔函数构成的集合称为 clone。

有四个特殊的 clone 如下：

Z 是 0-保留值函数集合:满足 f(0,..., 0) = 0。

P 是 1-保留值函数集合:满足 f(1,..., 1) = 1。

D 是自对偶函数集合:满足!f(x1,..., xn) = f(!x1,..., !xn)。

A 是仿射函数集合:满足 如果 f(a1,..., c,..., an) = f(a1,...,d, ..., an) 则 f(b1, ..., c, ..., bn) = f(b1, ..., d, ..., bn)的函数，在这里 c 和 d 都在某个位置 i，并且这个对于任意 i, a1, ..., an, b1, ... bn,c , d 都应成立。

现在我们有兴趣知道在上述几种集合的组合中有多少个 n 项函数。q组询问。

数据规模和约定：

$n, q \leq 100$

表达式长度 ≤ 100

算法讨论：

对于任意一个函数都可以用一个 4 位二进制表示其是否属于每一种集合。先分类讨论求出每个 4 位二进制数对应的函数个数。接下来可以将表达式中当前保护的情况数用一个 16 位二进制数表示，然后只要处理出表达式，最后统计一遍答案即可。

时间复杂度：

$O(\log n + q \times 表达式长度)$

78.Codechef Nov14 Sereja and Order

题目大意：

有 n 个程序，每个程序都需要在两台电脑上分别运行。第 i 个程序需要在第一台电脑上运行a_i秒，在第二台电脑上运行b_i秒。一台电脑不能同时运行两个程序，一个程序也不能同时在两台电脑上运行。求完成所有程序最少的时间并给出一个方案。T 组数据。

数据规模和约定：

T 组数据中 n 的和 $\leq 2 \times 10^5$

算法讨论：

可以证明答案一定是$\max\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i, a_i + b_i\right)$。如果取的是$a_i + b_i$，直接将剩下的填进两段时间内即可。否则可以随机两台计算机运行程序的顺序，然后贪心求出方案，通过多次随机来得到一个合法解。

79.Codechef Nov14 Chef and Churu

题目大意：

给定一个长度为 n 的数组和 n 个函数，第 i 个函数值为数组中一个连续区间的和。有 Q 个操作，操作有两种：1、修改数组某个位置的值。2、询问一个连续区间的函数值的和。

数据规模和约定：

$1 \leq n, Q \leq 10^5$

算法讨论：

可以每$O(\sqrt{Q})$次修改重新计算一遍所有函数的值，这可以每次通过前缀和线性求出。对于中间的每次询问，考虑所有上次重构到现在的所有修改对答案的影响即可。

时间复杂度：

$O(n\sqrt{m} + m\sqrt{m} + m\sqrt{n})$

80.Codechef Dec11 Hypertrees

题目大意：

一个 3−超图类似与一个普通的图, 只不过其中的边都连接三个点。

一个 3−超树是一个去掉任意一条边都以后都不连通的 3−超图。

给定 n, 问有几种含有 n 个带标号的点的本质不同的 3−超树。

T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le \mathrm{T} \le 15$

$3 \le \mathrm{n} \le 17$

算法讨论：

一棵超树可以分成若干点双连通分量。对于一个点双连通分量，除了只有3 个点的情况外，每一条边都恰连接了一个叶节点，故而其能和一个正常的点双连通分量对应。可以搜出这种点双连通分量的个数，然后搜索拼出所有超树。注意到输入只有一个 n，可以先将答案搜出后，打表提交即可。

81.Codechef April15 Black-white Board Game

题目大意：

一个$n \times n$的 01 矩阵，它的第 i 行的第 Li 到 Ri 个格子为 1，其余格子都是 0。现在有两个人在玩游戏，每一轮游戏他们同时报出一个还没有被报出过的长度为 n 的排列 P，排列 P 必须满足第 i 行第 Pi 个格子是 1，且第一个人报出的排列的逆序对个数必须是奇数，第二个报出的必须是偶数。如果有一轮一个人找不到可能的排列而另一个人能找到那么就算能找到的人赢，如果两个人同时找不到则算平局，需要判断一个游戏结果。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq T \leq 15$

$1 \leq n \leq 10^5$

算法讨论：

由题意，其实只要求出所给矩阵的行列式即可判断胜负。

求行列式可以采用消元法。注意到矩阵的特殊性，按顺序选取主元，然后选择右端点最前的一行来进行消元，就能够保证维持矩阵的特殊性。

用可并堆维护即可。

时间复杂度：

$O(Tn\log n)$

82.Codechef April15 Little Party

题目大意：

给定一个由 M 个元素组成的集合，每个元素由 N 个布尔变量组成，每个变量可以为真或假。要求找出一个总长度最小的基集合，使得以这个基集合中元素为子集的元素的集合恰好为给出的集合。基集合中元素由 N 个变量中某些变量组成，每个变量也仍然可以为真或假。给出的 M 个元素一定包含所有 N 个变量。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \leq \mathrm{T} \leq 120$

$\mathrm{M} \leq 1000$

$\mathrm{N} \leq 5$

算法讨论：

可以先预处理出所有有必要的基子集，可以发现最坏情况下只有 32 个。接下来需要用这些基子集覆盖所有元素，这可以通过搜索剪枝实现。

83.Codechef April12 Find a special connected block

题目大意：

一个$n \times m$的四连通网格，每一个格子都有一个$[-1, n \times m]$范围内的整数权值以及一个代价。求权值和最小的连通块使联通块中没有权值为-1的格子且至少出现了 k 种不同的正权值。

数据规模和约定：

$1 \le n, m \le 15$

$1 \le k \le 7$

算法讨论：

如果权值只有 k 种，那么可以直接通过状压 dp 求出最优解。

考虑使用随机化的方法，将$[1, n \times m]$中所有颜色随机对应到$[1, k]$中的一种，此时的最优解一定不优于原最优解，且等于原最优解的概率不低于$\frac{k!}{k^k}$。那么只需要随机若干次取最优解即可。

时间复杂度：

$O(\text{随机次数} \times nm(3^k + 2^k \log nm))$

84.Codechef July13 Across the River

题目大意：

有 n 个点和 m 种半径，每种半径都有一个代价。现在你需要以每一个点为圆心选择至多一个半径作圆，使得存在一条只经过圆上的点的路径连接 x 轴和直线$y=W$。求最小代价。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 10$

$1 \le n, m \le 250$

算法讨论：

将每个点拆成 m 个点，表示这个点选择不同半径后的圆，如果两个圆有公共点就在对应的点间连边，求最短路即为答案。注意到对于同一个点选择不同半径形成的圆，半径较大的会完全覆盖半径较小的，连边时可以将半径排序以优化边数。

时间复杂度：

$O(Tn^2 m \log nm)$

85.Codechef April12 Substrings on a Tree

题目大意：

给定一棵 n 个节点的树，每一个节点都被标记了一个小写字母。一个字符串被这棵树表示了当且仅当它可以被表示为一个点往它的后代移动路径上的经过所有点的字母连接起来得到的字符串。求这颗树表示的字符串个数。之后有 Q 次询问，每一次询问给出了 26 个字母的大小顺序，求被表示的字符串中字典序第 K 小。

数据规模和约定：

$n \leq 250000$

$Q \leq 50000$

输出不超过 800KB

算法讨论：

建出后缀自动机后，第一问即是求路径数，由于是 DAG，递推一遍即可。对于第二问，预处理出从每个点出发有多少不同路径，然后遍历一遍即可求出答案。

86.Codechef Feb14 Graph Challenge

题目大意：

给定一个 n 个点 m 条边的 DFS 序，每一个点的标号为它的 dfs 序。保证所有节点都能从第一个点到达。一个节点 x 对 y 来说是好的当且仅当$x < y$且存在一条 x 到 y 的路径使得中间节点编号都大于 y。一个节点 x 对 y 来说是最好的当且仅当它是所有对 y 的好节点中编号最小的。给定 Q 个询问，每个询问某个节点是多少个节点的最好的节点。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 10$

$2 \le n \le 10^5$

$n - 1 \le m \le 2 \times 10^5$

$1 \le Q \le 10^5$

算法讨论：

由题意，一个节点最好的节点即 dominator tree 算法中的半必经点，那么直接求出 dominator tree 即可。

时间复杂度：

$O((n + m)\alpha(n))$

87.Codechef Feb14 Count on a Treap

题目大意：

有一个初始为空的 treap，有 n 次操作，操作有三种：1、插入一个给定关键字和权值的节点。2、删除一个节点。3、询问两个节点之间的路径长度。保证关键字和权值两两不同。

数据规模和约定：

$n \le 2 \times 10^5$

算法讨论：

将所有点按关键字排序，那么两个点的 Lca 就是对应区间中权值最大的。求一个点的深度可以分别计算关键字比其大和比其小的祖先的个数来得出。可以离线预处理出所有出现过的节点并预先排序，这样就可以用线段树进行维护了。

时间复杂度：

$O(n\log^2 n)$

88.Codechef Dec14 Course Selection

题目大意：

课业计划共包含 n 项课程，每项课程都需要在 m 个学期里的某一个完成。

一些课程有前置课程，一共 k 个形如“a 是 b 的前置课程”的约数。一项课程在不同学期完成得到的收益不同。求最大收益。

数据规模和约定：

$n, m, k \leq 100$

算法讨论：

考虑用最小割求解。将每项课程拆成 m+1 个串连的点，其中的 m 条边容量分别为该课程在每个学期完成与最大值相比要损失的收益，用正无穷的边接在源和汇之间。对于限制关系，可以在两项课程的链间连上无穷大的单向边来解决。

时间复杂度：

$O(\mathrm{maxflow}(n, nm))$

89.Codechef March15 Random Number Generator

题目大意：

给定一个 k 阶常系数线性递推关系和数列的前 k 项，要求数列的第 n 项模 104857601。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 10^{18}$

$k \le 30000$

算法讨论：

这是一个经典问题，可以考虑递推关系的特征多项式$f(x)$，那么要求出的就是$x^n \bmod f(x)$的前 k 项系数，可以用倍增计算，并用 FFT 计算多项式乘法和多项式除法。

时间复杂度：

$O(k \log k \log n)$

90.Codechef June11 Minesweeper Reversed

题目大意：

给定一个$R \times C$的扫雷棋盘。初始所有的方块都是打开的。一次点击可以关闭一个方块（可以关闭含雷的方块）。在关闭一个块后，在扫雷游戏中可能和这个方块同时被打开的格子都会被关闭。求关闭所有方块的最少次数。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 50$

$1 \le R, C \le 50$

算法讨论：

每个雷都需要单独一次点击。剩余的格子中不和雷相邻的形成若干连通块，每个连通块一定被同时关闭。点击一个和雷相邻的格子会把和其相邻的连通块也关闭。每个不与连通块相邻的与雷相邻的格子也需要单独一次点集。初次以外，只需要关闭所有连通块即可保证全部格子都被关闭。一个与雷相邻的格子最多和 2 个连通块相邻，考虑以连通块为点，这种格子为边建一张图。那么剩下的关闭所有连通块的代价就是连通块数减去该图的最大匹配，需要使用带花树算法。

时间复杂度：

$O(TR^2C^2)$

91.Codechef May13 Queries on tree again!

题目大意：

有一个 n 个点 n 条边的简单无向连通图，边有权。题目保证这个图中仅包含的一个环的长度为奇数。有 Q 个操作：1、对某两点间最短路径上所有边权值取相反数。2、求某两点间最短路径上边权的最大连续子段和。

数据规模和约定：

$1 \leq n, Q \leq 10^5$

算法讨论：

显然图是一个环加外向树，将环找出，对每棵外向树用树链剖分进行维护，另外用线段树维护环上的信息，询问和修改时判断一下从环的哪个方向走，将信息合并即可。

时间复杂度：

$O(n + Q\log^2 n)$

92.Codechef Sept12 Simultaneous Nim(challenge)

题目大意：

有 n 堆石子，第 i 堆有a_i个，要求将这 n 堆石子分成尽量多个非空子集，使得每个子集内的石子堆数异或和为 0。T 组数据。

数据规模和约定：

$T = 10$

$10 \leq n \leq 1000$

$5 \leq m \leq 60$

$1 \leq a_i < 2^m$

算法讨论：

给定一个数集，可以用消元法判断是否存在一个非空子集使得异或值为 0。那么可以用一种贪心的做法，每次随机取出剩下数中的若干个，用消元法可以求出一个方案。每随机若干次，就选择这些方案中子集大小最小的，从剩余数集中扣除，就可以得到一个不错的解了。

93.Codechef Dec14 Kali and Devtas(challenge)

题目大意：

给定二维平面内的 N 个点，求这些点的一个生成树，使得C_i的最大值最小。C_i的定义是：对于每个点，设在生成树中与其相邻的点中最远的点的距离为 R，那么以该点为圆心，半径 R 以内的的点的C_i全部增加 1（包括自身）。T 组数据。

数据规模和约定：

$1 \le T \le 100$

$3 \le n \le 400$

算法讨论：

对此，并没有太好的想法。然而事实上，最小生成树已经是一个不错的解了。

时间复杂度：

$O(Tn^2)$

94.Codechef April12 Similar Graphs(challenge)

题目大意：

给定两个 n 个点的图，要求将其重标号，使公共边尽量多。

数据规模和约定：

$n \leq 75$

算法讨论：

这题我使用的是随机解+调整的方法，每次随机一个标号方法，然后进行调整，调整时找一对点判断交换标号后是否会更优，如果更优就交换，重复若干次。通过调整参数可以得到不错的解。

95.Codechef Feb15 Jigsaw Puzzle Solving(challenge)

题目大意：

有一个$W \times H$的方格图和K块拼图，每块拼图都是一个联通块，拼图的位置可以平移，但是不能旋转。现在要放置这些拼图，使得方格图被覆盖的面积尽量大。拼图之间不能互相覆盖。拼图不能超出方格图范围。

数据规模和约定：

$W, H \leq 1000$

$K \leq \frac{W \times H}{5}$

算法讨论：

考虑从较密的拼图放起，每次尽可能沿着已放拼图的边界，暴力记录所有可以放的位置。为了控制总耗时，当一个位置被尝试过一定次数仍没有拼图能放上去后，可以在以后的过程中忽略该位置。

96.Codechef June12 Closest Points(challenge)

题目大意：

三维空间中有 n 个点，现在给出了 q 组询问，每一组询问给出了一个点，需要从给定的 n 个点中找出距离这个点最近的点的编号，答案正确的询问组数越多分数越高。

数据规模和约定：

$n = q = 50000$

点的坐标的绝对值 ≤ 1000000000

算法讨论：

第一反应是可以用 kd tree 进行搜索剪枝，但这题我采用了其它做法。

一个粗暴的想法是给每个点一个特征值，然后对于每个询问枚举在其特征值附近的若干个点取最优。这个做法的效果很大程度取决于数据的特点和特征值的选取。这里我使用了三维坐标的乘积并枚举了附近的 1600 个点。

97.Codechef June13 To challenge or not(challenge)

题目大意：

给定一个长度为 m 的数组 B，要从中选出尽可能多的数使得选出的数中没有三个数构成等差数列。数据生成方式为给定随机种子，随机出L和p，[1, L]中每一个数都有p的概率加入 B 中。

数据规模和约定：

$10^4 \le L \le 10^5$

$0.1 \le p \le 0.9$

算法讨论：

将 B 从小到大排序。一种简单的策略是从前往后扫一遍，暴力判断加入当前数后是否会出现等差数列，如果不会就加入当前解中。

接下来我的做法是引入随机化，每次随机一个点作为起点计算一遍，重复多次取最优值。

98.Codechef Aug13 Deleting numbers(challenge)

题目大意：

假设当前有长度为 n 的数组 a，每次可以选择一对(v, t)，满足$v + t \le n + 1$，令k为最大的满足$v + kt \le n$的数，则还必须满足$a_v = a_{v+t} = a_{v+2t} = \cdots = a_{v+kt}$。然后这些数将会删除。要求用尽量少的步数删除所有数。

数据规模和约定：

$1 \le n \le 10^5$

$1 \le a_i \le 10^5$

算法讨论：

这题由于删除后位置的变化，使得不太容易得出太好的策略。我的方法是从后往前将除了出现次数最多的数以外的数都尽量两两删除，最后再将剩下的数删除。然而实际的表现并不太好。

99.Codechef April13 Fault Tolerance(challenge)

题目大意：

有 n 个 01 变量和 m 个异或方程，要删除尽量少的方程使解不唯一。

数据规模和约定：

$50 \le n \le 200$

$2 \times n \le m \le 1000$

算法讨论：

要判断方程组是否有唯一解，一个方法是判断是否存在某一列能被其它列线性表示。显然，把一个变量替换成其和另一个变量的异或值并将方程组相应更改，不会影响解是否唯一。

那么一种做法是不断随机选择一列和该列上的一个 1，并将其它所有该行为 1 的列与该列进行异或，找到过程中所有出现过的列中 1 的个数最少的，那么只需要将该列上所有 1 对应的方程删除，就一定没有唯一解了。

可以用 bitset 优化这个过程。

100.Codechef Nov11 Stepping Average(challenge)

题目大意：

考虑以下的方法求出 n 个数的“迭代平均数”：每次拿出其中两个数，将其删除，并加入其平均值，n−1 次后剩下的数即为“迭代平均数”。不同的选择方案会得出不同的“迭代平均数”。要求给出一个方案，使给定 n 个数的“迭代平均数”尽量接近给定值 K。T 组数据。

数据规模和约定：

$T = 10$

$n = 1000$

K 和给定的 n 个数都是在[1,1073741823]内随机生成

算法讨论：

这题有一个效果很好的做法。考虑当前数集 S，要让结果尽量接近K：令mid为 S 内最大数和最小数的平均值。设一个阈值L, 如果$mid < K*(1-L)$，那么就将最小值 x 留到最后一步，而对于剩下的数集，目标就是使结果尽量接近$2K-x$。如果$mid > K*(1+L)$，也作累死的处理。否则就将最大值和最小值直接合并。对于随机数据，取 L=0. 01 即可得到很好的解。