线性规划与对偶问题

福建省福州第一中学 董克凡

2016.05.03

介绍

我的论文主要分为两个部分

- 介绍线性规划的定义，模型的建立以及求解方法
- 介绍线性规划对偶性及其应用，通过线性规划对偶性实现问题的模型转换，从而更高效地解决问题。

线性规划模型的定义

- **线性规划：** 最大(小)化一个受限于一组有限线性约束的线性函数
- **线性规划标准型：**

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

- 线性规划问题可以在多项式时间内解决

将问题表示为线性规划

最大流问题

- 最大流问题中，除源汇外每一节点都需满足流量平衡
- 用c(u,v)表示边(u,v)的容量，f(u,v)表示流量
- 添加一条边(t,s)，令c(t,s)=∞，使得流量平衡对所有节点成立，f(t,s)即为总流量。

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & f(t,s) & \\
\text{s.t.} \quad & f(u,v) \le c(u,v), & (u,v) \in E \\
& \sum_v f(u,v) = \sum_v f(v,u), & u \in V \\
& f(u,v) \ge 0, & (u,v) \in E
\end{aligned}
$$

将问题表示为线性规划

最小费用流问题

- 用w(u,v)表示每条边的费用，可以得到:

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)w(u,v) \\
\text{s.t.} \quad & f(u,v) \le c(u,v), && (u,v) \in E \\
& \sum_{v} f(u,v) = \sum_{v} f(v,u), && u \in V \setminus \{s,t\} \\
& f(u,v) \ge 0, && (u,v) \in E
\end{aligned}
$$

将问题表示为线性规划

最小费用流问题

- 用w(u,v)表示每条边的费用，可以得到：

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)w(u,v) & \\
\text{s.t.} \quad & f(u,v) \le c(u,v), & (u,v) \in E \\
& \sum_{v} f(u,v) = \sum_{v} f(v,u), & u \in V \setminus \{s,t\} \\
& f(u,v) \ge 0, & (u,v) \in E
\end{aligned}
$$

- 网络流模型在对偶问题的模型转化中有重要意义

将问题表示为线性规划

- 除了网络流问题，还有很多问题也可以用线性规划模型表示。如最短路、半平面交、以及不少OI竞赛中的实际问题。

线性规划对偶性

引言

- 有些问题直接求解是困难的，而求解它的对偶问题却是容易的
- 一个例子

线性规划对偶性

引言

- 一个例子

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad (1) \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 \\
x_1 - x_2 + 3x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 && (1)\\
\text{s.t.} \quad & \;\; x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& \qquad\qquad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

7	1	5
1	–1	3

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 && (1) \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y_1(x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2(5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
=& (y_1 + 5y_2)x_1 + (-y_1 + 2y_2)x_2 + (3y_1 - y_2)x_3 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 && (1)\\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

$$
\text{min.} \quad 7x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad (1)
$$

$$
(y_1 + 5y_2)x_1 + (-y_1 + 2y_2)x_2 + (3y_1 - y_2)x_3 \qquad (2)
$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{1}$$

7	1	5
$(y_1 + 5y_2)$	$(-y_1 + 2y_2)$	$(3y_1 - y_2)$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
\tag{1}
$$

7	1	5
$(y_1 + 5y_2)$	$(-y_1 + 2y_2)$	$(3y_1 - y_2)$

$$
\begin{aligned}
y_1 + 5y_2 &\leq 7 \\
-y_1 + 2y_2 &\leq 1 \\
3y_1 - y_2 &\leq 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 && (1)\\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y_1(x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2(5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
=& (y_1 + 5y_2)x_1 + (-y_1 + 2y_2)x_2 + (3y_1 - y_2)x_3 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$+$$

$$
\begin{aligned}
y_1 + 5y_2 &\leq 7 \\
-y_1 + 2y_2 &\leq 1 \\
3y_1 - y_2 &\leq 5
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
& 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\
& \geq (y_1 + 5y_2)x_1 + (-y_1 + 2y_2)x_2 + (3y_1 - y_2)x_3 \\
& \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

线性规划对偶性

引言

- 由此可以定义一个新的线性规划

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & 10y_1 + 6y_2 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 5y_2 \le 7 \\
& -y_1 + 2y_2 \le 1 \\
& 3y_1 - y_2 \le 5 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

线性规划对偶性

引言

- 比较这两个线性规划

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_i \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & 10y_1 + 6y_2 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 5y_2 \leq 7 \\
& -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\
& 3y_1 - y_2 \leq 5 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

线性规划对偶性

引言

- 比较这两个线性规划

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
\text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

其中

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2]^T, \mathbf{c} = [7, 1, 5]^T, \mathbf{b} = [10, 6]^T$$

线性规划对偶性

引言

- 比较这两个线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{max.} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

- 它们的系数矩阵互为转置！

线性规划对偶性

- 对偶问题:

$$\begin{aligned}
&\text{min.} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j && \text{max.} \quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i && \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \\
&\qquad\qquad x_j \geq 0 && \qquad\qquad y_i \geq 0
\end{aligned}$$

线性规划对偶性

- 线性规划对偶性:

Theorem

若$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$为原问题的最优解，$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$为对偶问题的最优解，那么

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- 对偶问题的最优解 等于 原问题的最优解

线性规划对偶性

- 最优解的取值关系——互松弛定理
- 也就是说，若两个问题互为对偶问题，那么只要我们解决了其中的一个问题，另一个问题也就被解决了。

线性规划对偶性

- 最大流——最小割
- 二分图最大匹配——最小点覆盖
- 二分图最小顶标和——最大权匹配
- 详细论述见论文。

应用实例

Equation

- 题意简述：给出三个长度为n的数组a, b, c，以及m次询问，每次询问给出两个参数s, t，求一组非负实数xi ,满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = s, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = t$$

- 并且最大化

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

应用实例

Equation

- 对于每一个询问，写出它的线性规划模型：

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = s \\
& \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = t \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- 直接求解复杂度过高
- 观察问题的性质

应用实例

Equation

- 这个线性规划只有两个约束,那么对偶之后只有两个变量。

应用实例

Equation

- 这个线性规划只有两个约束,那么对偶之后只有两个变量。
- 只有两个变量的线性规划?——半平面交。
- 对偶之后可得:

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & sx + ty \\ \text{s.t.} \quad & a_i x + b_i y \geq c_i \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 每次询问在半平面交上二分

应用实例

Equation

- 题目大意：给出一张带权有向图，对于每个点你需要将其所有出边边权加上一个非负数，将其所有入边边权减去一个非负数。对于每条边(u,v)，原始边权记为Luv，要求操作之后这条边边权在范围[Suv,Tuv]之间，同时最大化所有边的边权总和。
- 需要输出方案。

应用实例

Equation

- 首先写出这个问题的线性规划模型：

$$
\begin{aligned}
\text{max.} & \sum_u (P_u deg_{out}[u] - Q_u deg_{in}[u]) \\
\text{s.t.} & \quad P_u - Q_v \le T_{uv} - L_{uv} \\
& \quad -P_u + Q_v \le L_{uv} - S_{uv} \\
& \quad P_u, Q_u \ge 0
\end{aligned}
$$

应用实例

Equation

- 首先写出这个问题的线性规划模型：

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \sum_u (P_u deg_{out}[u] - Q_u deg_{in}[u]) \\
\text{s.t.} \qquad P_u - Q_v &\le T_{uv} - L_{uv} \\
-P_u + Q_v &\le L_{uv} - S_{uv} \\
P_u, Q_u &\ge 0
\end{aligned}
$$

- 这个线性规划每一个约束只涉及两个变量，且这两个变量的系数分别为±1

应用实例

Equation

- 费用流模型的矩阵每一列只有两个非零位置,分别为±1。

应用实例

Equation

- 费用流模型的矩阵每一列只有两个非零位置,分别为±1。
- 对偶!

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{(u,v)\in E} ((T_{uv} - L_{uv})x_{uv} - (L_{uv} - S_{uv})y_{uv}) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{v} (x_{uv} - y_{uv}) \geq deg_{out}[u], \qquad u \in V \\
& \sum_{u} (-x_{uv} + y_{uv}) \geq -deg_{in}[v], \qquad v \in V \\
& x_{uv}, y_{uv} \geq 0
\end{aligned}$$

应用实例

Equation

- 约束→点(流量平衡)，变量→边(流量)。
- 变量在目标函数中的系数就是边的费用。变量系数为1，认为是流入；系数为−1，认为是流出；
- 常数项即为与源汇相关的的流量。

应用实例

Equation

- 使用费用流解决对偶问题之后，可以通过互松弛定理得出原问题的一组最优解。(详细转化见论文)

应用实例

Equation

- 使用费用流解决对偶问题之后，可以通过互松弛定理得出原问题的一组最优解。(详细转化见论文)
- 由于费用流是一种特殊的线性规划，求解费用流问题用到了问题本身的特殊性，所以这个方法要比直接求解线性规划更高效。
- 可以通过全部的测试数据。

总结

- 问题描述更加清晰。
- 能够描述的问题类型更普遍。
- 新的解决问题的方法。

总结

- 问题描述更加清晰。
- 能够描述的问题类型更普遍。
- 新的解决问题的方法。
- 线性规划的角度将问题一般化，损失效率。

总结

- 问题描述更加清晰。
- 能够描述的问题类型更普遍。
- 新的解决问题的方法。
- 线性规划的角度将问题一般化，损失效率。
- 通过对偶，利用问题特殊性，实现模型的转化，提高效率。

感谢

- 感谢父母的养育之恩。
- 感谢陈颖老师，余林韵教练，以及学长们对我的帮助
- 感谢CCF提供学习和交流的机会。

参考文献

- Thomas H.Cormen, Chales E Leiserson, Ronald L Rivest, Chifford Stein, Introduction to Algorithms. Second Edition.
- Vijay V. Vazirani. Approximation Algorithms: Chapter 10, Introduction to LP-Duality, Chapter 13, The primal-dual schema
- Dimitris BersimasJohn N. Tsitsiklis, Introduction to Linear Optimization.
- Luca Trevisan, Stanford University-CS216: Optimization, Handout 15
- 曹钦翔，《线性规划与网络流》
- 胡伯涛，《最小割模型在信息学竞赛中的应用》

互松弛定理

对于一组对偶问题：

$$\text{min.} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \text{max.} \quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad\qquad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad y_i \geq 0$$

设x_j, y_i分别为原问题与对偶问题的两个可行解，那么x_j, y_i均为最优解当且仅当：

- 对于$\forall j \leq n$，满足$x_j = 0$或$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$
- 对于$\forall i \leq m$，满足$y_i = 0$或$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$