chef and big matrix 解题报告

福建省福州第一中学 董克凡

1 试题来源

codechef APRIL16

提交地址：`https://www.codechef.com/problems/CHNBGMT`

2 试题大意

给出一个$n*m$的网格，其中有c个位置是关键点。求两条从$(1,1)$到(n,m)的路径，要求每次只能向下走或者向右走一格，并且这两条路径在除了起点以及终点之外的格子不相交，并且两条路径经过的关键点的个数之和不超过d。求路径的方案数对mod取模的结果。

$n,m \le 10^5, d \le c \le 200, mod \le 10^9$，不保证$mod$为质数。

3 算法讨论

3.1 只有一条路径的情况

首先讨论寻找一条路径的解法。

首先将所有的关键点按照x为第一关键字，y为第二关键字排序，那么一条路径经过的所有关键节点的编号就一定是递增的，那么考虑递推计数。用$g(i,j)$表示当前的路径走到了第i个关键点，在此之前经过了共j个关键点的方案数，那么枚举上一个经过的关键节点的位置k，首先就要保证点k在点i的左上角。如果用$f(i,j)$表示从关键点i走到关键点j，且在此之间不经过其他关键点的方案数，那么就能得到如下递推关系：

$$g(i,j) = \sum_{k=1}^{i-1} g(k,j-1)f(i,j)$$

如果称起点为0号节点，终点为$c+1$号节点，那么边界为$g(0,0)=1$，最终答案就是：

$$\sum_{i=0}^{d} g(c+1,i)$$

其中$f(i,j)$的求法就是一个经典问题了。首先不考虑关键节点，从(sx,sy)走到(tx,ty)的方案数就是$\binom{tx-sx+ty-sy}{tx-sx}$，记$ways(i,j)$为关键点$i$到关键点$j$的路径方案数（若$i$不在$j$的左上角，那么定义$ways(i,j)=0$）。枚举一个点$k$，扣除路径经过的第一个关键点为点$k$的路径，那么

$$f(i,j) = ways(i,j) - \sum_{k=i+1}^{j-1} f(i,k)\cdot ways(k,j)$$

由于mod不一定为质数，这里求组合数需要用一些小技巧。设$mod = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$，那么在预处理阶乘的时候就需要单独将所有$p_i$的幂次计数，剩余的部分$x$满足$(x, mod)=1$，则$x$存在逆元，而所有$p_i$的幂就需要单独用快速幂计算，所以计算一次组合数的复杂度为$O(log^2 mod)$。

所以只计算一条路径的复杂度为$O(c^3)$

3.2 两条路径

由于很难直接求两条不相交的路径，不妨考虑如何求出两条相交路径的方案数，然后用任意的路径减去两条相交路径的方案数。

在此不妨假设这两条路径分别为$(1,2)\to(n-1,m),(2,1)\to(n,m-1)$，这样就可以避开起点与终点相交的问题。记两条路径分别为$s_1\to t_1, s_2\to t_2$，设它们相较于点p，那么两条路径可以写为$s_1\to p\to t_1, s_2\to p\to t_2$，如果将这两条路径的后半段交换，那么可以得到$s_1\to p\to t_2, s_2\to p\to t_1$，那么这就是$s_1\to t_2, s_2\to t_1$的两条路径。也就是说，任意一组$s_1\to t_1, s_2\to t_2$的相交路径都能唯一对应到一组$s_1\to t_2, s_2\to t_1$的路径上。类似的，任意一组$s_1\to t_2, s_2\to t_1$的路径都能唯一对应一组$s_1\to t_1, s_2\to t_2$的相交路径。那么最终的答案就是$s_1\to t_1, s_2\to t_2$的路径方案数减去$s_1\to t_2, s_2\to t_1$的路径方案数。

经过这样的转换，我们就只要求出从两个起点出发到达两个终点的两条路径的方案数，不要求这两条路径不相交，所以这就等于一对起点与终点之间路径的方案数的乘积。这个子问题在之前已经用$O(c^3)$的时间求出，故此题可以在$O(c^3)$的时间内解决。

3.3 一点扩展

第二步中的思想被称作Lindstrom－Gessel－Viennot lemma，定理内容大致如下：在一个有限的图[1]中给n对起点以及终点(a_i, b_i)，设$e(i, j)$为点i到点j的路径方案数，那么从a_i到b_i的n条不相交路径的方案数为：

$$\begin{vmatrix} e(a_1,b_1) & e(a_1,b_2) & \cdots & e(a_1,b_n) \\ e(a_2,b_1) & e(a_2,b_2) & \cdots & e(a_2,b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(a_n,b_1) & e(a_n,b_2) & \cdots & e(a_n,b_n) \end{vmatrix}$$

即上面的矩阵的行列式的值。

这里的$e(i, j)$可以不是一个整数，比如在本题中就可以令$e(i, j)$为一个长度为d的形式幂级数。那么就可以得到最终的不相交路径的形式幂级数

$$c(x) = e(s_1,t_1)(x) \cdot e(s_2,t_2)(x) - e(s_2,t_1)(x) \cdot e(s_1,t_2)(x)$$

这个定理的证明与上面的证明思路类似。

3.4 参考资料

https://en.wikipedia.org/wiki/LindstromCGesselCViennot_lemma

http://discuss.codechef.com/problems/CHNBGMT

[1]这里的有限是指任意两点之间的路径方案数是有限的