

浅谈 q -analogue

湖南省长沙市第一中学 李铭乐洋

基本 q -analogue

在 q -analogue 中, 我们有时将 q 视作满足 $0 < q < 1$ 的实参数。

基本 q -analogue

在 q -analogue 中, 我们有时将 q 视作满足 $0 < q < 1$ 的实参数。

对于实数 x , 我们定义其 q -analogue 为 $[x] = \frac{1-q^x}{1-q}$ 。此处, 根据洛必达法则, 当 $q \rightarrow 1$ 时 $[x] \rightarrow x$ 。

基本 q -analogue

在 q -analogue 中, 我们有时将 q 视作满足 $0 < q < 1$ 的实参数。

对于实数 x , 我们定义其 q -analogue 为 $[x] = \frac{1-q^x}{1-q}$ 。此处, 根据洛必达法则, 当 $q \rightarrow 1$ 时 $[x] \rightarrow x$ 。

类似地定义 q -factorial: 对于正整数 n , 我们定义 $n!$ 的 q -analogue 为

$$[n]! = \prod_{i=1}^n [i] = \prod_{i=1}^n \frac{1-q^i}{1-q}。$$

partition 与 Ferrers graph

我们记 partition 为序列 λ 满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, 接着记 $\ell(\lambda)$ 为最大的 x 使得 $\lambda_x > 0$, 然后记 $|\lambda|$ 为 $\sum \lambda_i$ 。

partition 与 Ferrers graph

我们记 partition 为序列 λ 满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, 接着记 $\ell(\lambda)$ 为最大的 x 使得 $\lambda_x > 0$, 然后记 $|\lambda|$ 为 $\sum \lambda_i$ 。

对于一个 partition 定义其 Ferrers graph 为: 共 $\ell(\lambda)$ 行, 从下往上第 i 行长度为 λ_i , 且所有行均左对齐的图形。

Gaussian polynomial

我们对于 $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ 定义 Gaussian polynomial 为:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1}) \cdots (1-q)}$$

Gaussian polynomial

我们对于 $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ 定义 Gaussian polynomial 为:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1}) \cdots (1-q)}$$

这是 q -binomial coefficients 的特殊情况。后者是对于 $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ 定义的, 有:

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^{x-k+1}; q)_k}{(q; q)_k}$$

Gaussian polynomial

我们对于 $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ 定义 Gaussian polynomial 为:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}$$

这是 q -binomial coefficients 的特殊情况。后者是对于 $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ 定义的, 有:

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^{x-k+1}; q)_k}{(q; q)_k}$$

其中 $(a; q)_k = (a)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a)$, 被称做 q -rising factorial。

Gaussian polynomial

而事实上 Gaussian polynomial 是 q 中的多项式, 因为我们对于 $n, k \in \mathbb{N}$ 有:

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\lambda \subseteq n^k} q^{|\lambda|}$$

Gaussian polynomial

而事实上 Gaussian polynomial 是 q 中的多项式, 因为我们对于 $n, k \in \mathbb{N}$ 有:

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\lambda \subseteq n^k} q^{|\lambda|}$$

其中 $\lambda \subseteq n^k$ 即 $\lambda_1 \leq n, \ell(\lambda) \leq k$ 。

Gaussian polynomial

考虑归纳。我们令 $P(n, k) = \sum_{\lambda \subseteq n^k} q^{|\lambda|}$, 即有:

$$P(n, k) = \sum_{\lambda \subseteq n^k, \lambda_1 = n} q^{|\lambda|} + \sum_{\lambda \subseteq n^k, \lambda_1 < n} q^{|\lambda|} = q^n P(n, k-1) + P(n-1, k)$$

Gaussian polynomial

考虑归纳。我们令 $P(n, k) = \sum_{\lambda \subseteq n^k} q^{|\lambda|}$, 即有:

$$P(n, k) = \sum_{\lambda \subseteq n^k, \lambda_1 = n} q^{|\lambda|} + \sum_{\lambda \subseteq n^k, \lambda_1 < n} q^{|\lambda|} = q^n P(n, k-1) + P(n-1, k)$$

边界条件 $P(n, 0) = P(0, k) = 1$ 是显而易见的。

Gaussian polynomial

另一方面：

$$\begin{aligned} q^n \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1+k \\ k \end{bmatrix} &= q^n \frac{[n+k-1]!}{[k-1]![n]!} + \frac{[n+k-1]!}{[k!][n-1]!} \\ &= \frac{[n+k-1]!}{[k]![n]!} \left(q^n \frac{1-q^k}{1-q} + \frac{1-q^n}{1-q} \right) \\ &= \frac{[n+k]!}{[k]![n]!} \end{aligned}$$

The Catalan numbers and Dyck paths

我们记所有 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的格路集合为 $L_{n,m}$, 以及 $L_{n,m}^+ \subseteq L_{n,m}$ 为那些永远不低于到 $y = \frac{n}{m}x$ 的格路。对于任意的 $\pi \in L_{n,m}^+$ 我们称 π 是一个 Dyck path, 又称作 Catalan path。

The Catalan numbers and Dyck paths

我们记所有 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的格路集合为 $L_{n,m}$, 以及 $L_{n,m}^+ \subseteq L_{n,m}$ 为那些永远不低于到 $y = \frac{n}{m}x$ 的格路。对于任意的 $\pi \in L_{n,m}^+$ 我们称 π 是一个 Dyck path, 又称作 Catalan path。

我们记 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 为 Catalan number。Catalan 数的一种组合解释是 $L_{n,n}^+$ 中的元素个数, 即 $|L_{n,n}^+| = C_n$ 。

The area statistic

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 我们给出如下定义:

The area statistic

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 我们给出如下定义:

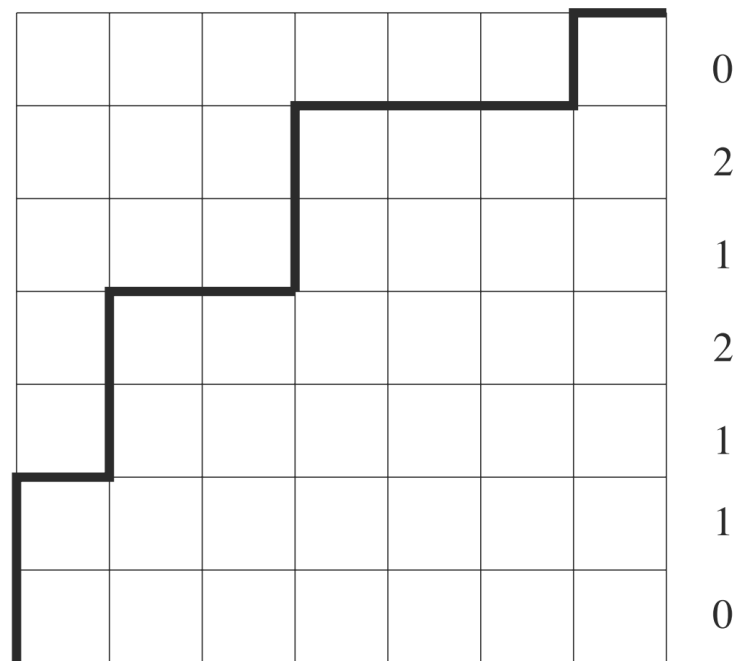
- 记 $\sigma(\pi)$ 为: 初始为空, 从 $(0,0)$ 开始, 每走一步 North (即 $(1,0)$) 就往后加入字符 0, 每走一步 East (即 $(0,1)$) 就往后加入字符 1。最终走到 (n,n) 结束时得到的序列。

The area statistic

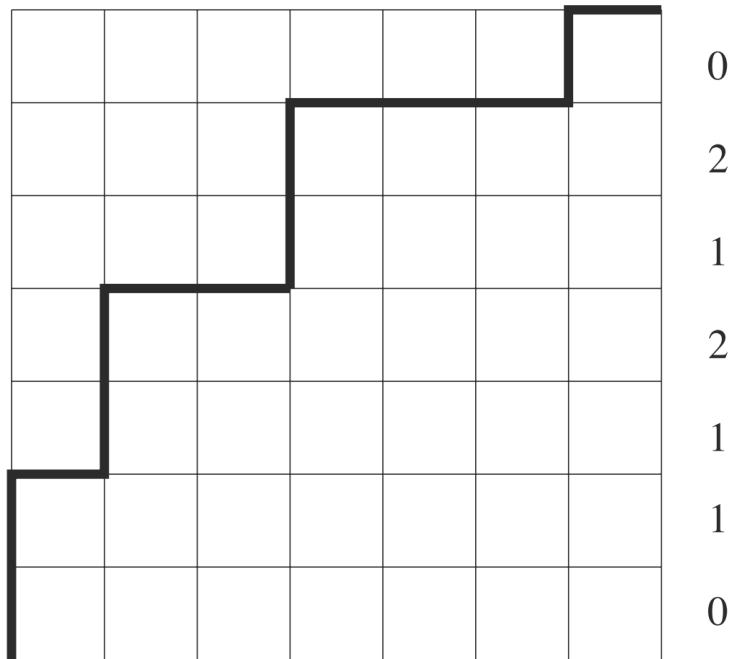
对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 我们给出如下定义:

- 记 $\sigma(\pi)$ 为: 初始为空, 从 $(0,0)$ 开始, 每走一步 North (即 $(1,0)$) 就往后加入字符 0, 每走一步 East (即 $(0,1)$) 就往后加入字符 1。最终走到 (n,n) 结束时得到的序列。
- 记 $a_i(\pi)$ 为: 第 i 行中, 在 π 右侧、在 $y = x$ 左侧的完整格子个数。这里我们还将 $a_i(\pi)$ 称做 π 的第 i 行的长度。同时, π 的 area statistic 被定义为 $\sum a_i(\pi)$ (记做 $\text{area}(\pi)$)。

The area statistic



The area statistic



上图每行右侧的值即为对应的 $a_i(\pi)$ 。

C_n 的 q -analogue

来看 C_n 的一个 q -analogue:

$$C_n(q) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{area}(\pi)}$$

C_n 的 q -analogue

来看 C_n 的一个 q -analogue:

$$C_n(q) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{area}(\pi)}$$

其满足:

$$C_n(q) = \sum_{k=1}^n q^{k-1} C_{k-1}(q) C_{n-k}(q), n \geq 1$$

C_n 的 q -analogue

考虑 $(0, 0)$ 出发后, 第一次碰到 $y = x$ 的位置为 (k, k) 。那么 $(0, 1)$ 到 $(k - 1, k)$ 的路径可以被 $q^{k-1}C_{k-1}(q)$ 描述, (k, k) 到 (n, n) 的路径可以被 $C_{n-k}(q)$ 描述。

The bounce statistic

对于路径 $\pi \in L_{n,n}^+$ 定义其 bounce path 为如下算法生成的路径:

The bounce statistic

对于路径 $\pi \in L_{n,n}^+$ 定义其 bounce path 为如下算法生成的路径:

从 $(0, 0)$ 开始, 跟着 π 走直到遇见一个 E , 转向并走到 $y = x$ 。此时再次转向, 跟着 π 走直到再次遇见某个 E , 重复上述过程。

The bounce statistic

对于路径 $\pi \in L_{n,n}^+$ 定义其 bounce path 为如下算法生成的路径:

从 $(0, 0)$ 开始, 跟着 π 走直到遇见一个 E , 转向并走到 $y = x$ 。此时再次转向, 跟着 π 走直到再次遇见某个 E , 重复上述过程。

可以将 bounce path 想象成从 $(0, 0)$ 出发、初始向 N 走的、碰到 π 或 $y = x$ 会反弹的小球走出的路径。

The bounce statistic

我们记下所有碰到 $y = x$ 的位置:

$$(0, 0), (j_1, j_1), \dots, (j_b, j_b) = (n, n)$$

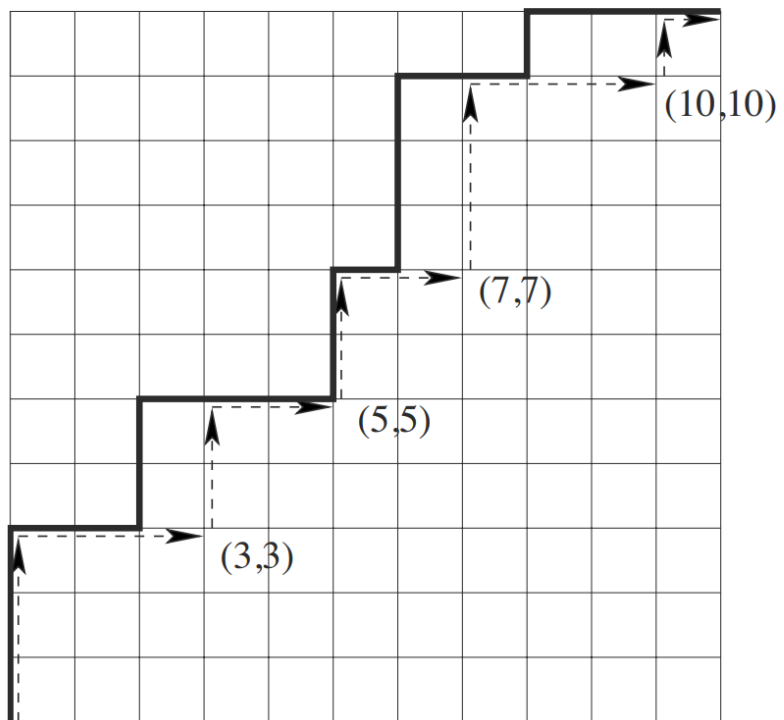
The bounce statistic

我们记下所有碰到 $y = x$ 的位置:

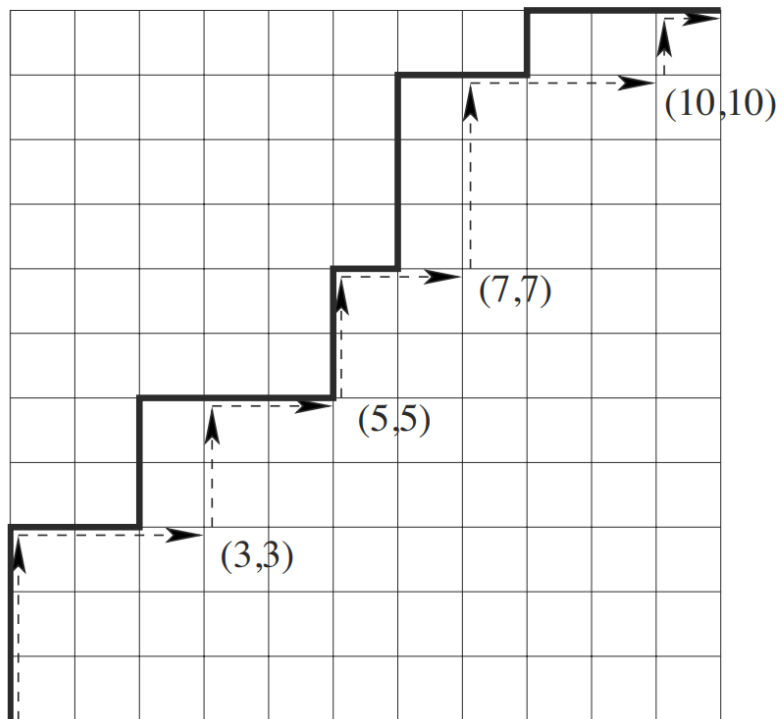
$$(0, 0), (j_1, j_1), \dots, (j_b, j_b) = (n, n)$$

我们称 b 为反弹次数, 称 j_1 为第一次反弹的长度, 称 $j_2 - j_1$ 为第二次反弹的长度 .. 剩下的以此类推。

The bounce statistic



The bounce statistic



如图所示。

The bounce statistic

对此, 我们定义 bounce statistic $\text{bounce}(\pi)$ 为:

$$\text{bounce}(\pi) = \sum_{i=1}^{b-1} n - j_i$$

q, t -Catalan numbers

我们定义：

$$F_n(q, t) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{area}(\pi)} t^{\text{bounce}(\pi)}$$

q, t -Catalan numbers

记 $L_{n,n}^+(k)$ 为满足 $\pi \in L_{n,n}^+$ 且恰好以 k 个 N 开头, 然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

q, t -Catalan numbers

记 $L_{n,n}^+(k)$ 为满足 $\pi \in L_{n,n}^+$ 且恰好以 k 个 N 开头, 然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

特别地, 对于 $L_{0,0}^+(k)$ 。当 $k = 0$ 时其仅包含空路径, 否则为空。

q, t -Catalan numbers

记 $L_{n,n}^+(k)$ 为满足 $\pi \in L_{n,n}^+$ 且恰好以 k 个 N 开头, 然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

特别地, 对于 $L_{0,0}^+(k)$ 。当 $k = 0$ 时其仅包含空路径, 否则为空。

我们定义:

$$F_{n,k}(q, t) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+(k)} q^{\text{area}(\pi)} t^{\text{bounce}(\pi)}$$

q, t -Catalan numbers

记 $L_{n,n}^+(k)$ 为满足 $\pi \in L_{n,n}^+$ 且恰好以 k 个 N 开头, 然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

特别地, 对于 $L_{0,0}^+(k)$ 。当 $k = 0$ 时其仅包含空路径, 否则为空。

我们定义:

$$F_{n,k}(q, t) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+(k)} q^{\text{area}(\pi)} t^{\text{bounce}(\pi)}$$

特别地, $F_{n,0}$ 仅在 $n = 0$ 时取 1, 否则取 0。

q, t -Catalan numbers

那么我们有如下递归关系：

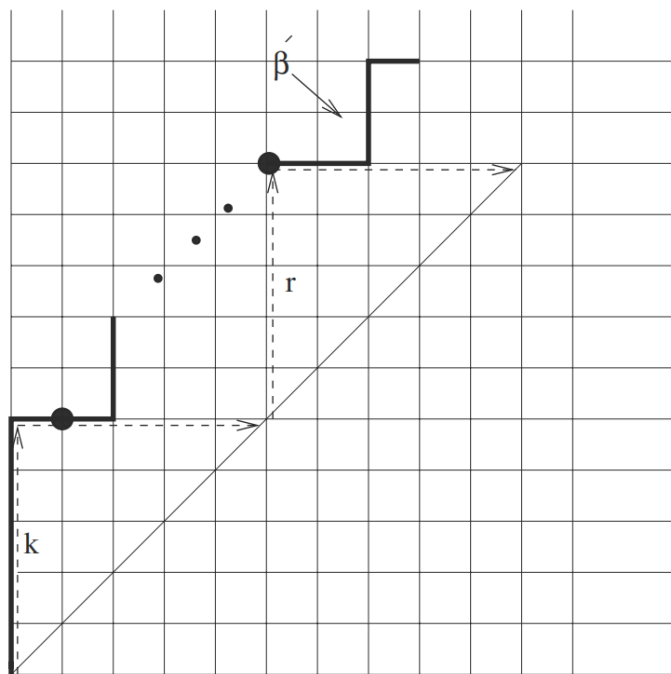
$$F_{n,k}(q, t) = \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} r + k - 1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{n-k} q^{\binom{k}{2}} F_{n-k,r}(q, t)$$

q, t -Catalan numbers

考虑反弹至少两次的 $\beta \in L_{n,n}^+(k)$, 其满足第一次反弹长度为 k , 第二次反弹长度为 r —— 这意味着其经过点 $(1, k), (k, k + r)$, 即下图中的两个大点:

q, t -Catalan numbers

考虑反弹至少两次的 $\beta \in L_{n,n}^+(k)$, 其满足第一次反弹长度为 k , 第二次反弹长度为 r —— 这意味着其经过点 $(1, k), (k, k + r)$, 即下图中的两个大点:



q, t -Catalan numbers

将 β 分成两个部分, 第一个部分是 $(0, 0)$ 到 $(k, k + r)$, 第二个部分是 $(k, k + r)$ 到 (n, n) 。

q, t -Catalan numbers

将 β 分成两个部分, 第一个部分是 $(0, 0)$ 到 $(k, k + r)$, 第二个部分是 $(k, k + r)$ 到 (n, n) 。

对于第二个部分, 我们在其前面加入 r 个 N 并记其为 β' 。此时有 $\beta' \in L_{n-k, n-k}^+(r)$, 同时也有 $\text{bounce}(\beta') = \text{bounce}(\beta) + n - k$ 。

q, t -Catalan numbers

而面积可以拆成三部分: $x = k$ 右侧的面积, $y = k$ 下侧的面积以及剩余面积。

q, t -Catalan numbers

而面积可以拆成三部分： $x = k$ 右侧的面积， $y = k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。

q, t -Catalan numbers

而面积可以拆成三部分： $x = k$ 右侧的面积， $y = k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。
2. 第二部分一定是 $\binom{k}{2}$ 。

q, t -Catalan numbers

而面积可以拆成三部分： $x = k$ 右侧的面积， $y = k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。
2. 第二部分一定是 $\binom{k}{2}$ 。
3. 第三部分，只要考虑 $(1, k)$ 走到 $(k, k + r)$ 的方案。根据定理 3.2，所有方案的面积和为 $\left[\begin{matrix} r + k - 1 \\ r \end{matrix} \right]_q$ 。

q, t -Catalan numbers

而面积可以拆成三部分： $x = k$ 右侧的面积， $y = k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。
2. 第二部分一定是 $\binom{k}{2}$ 。
3. 第三部分，只要考虑 $(1, k)$ 走到 $(k, k + r)$ 的方案。根据定理 3.2，所有方案的面积和为 $\left[\begin{matrix} r + k - 1 \\ r \end{matrix} \right]_q$ 。

因此有：

$$q^{\text{area}(\beta)} = q^{\text{area}(\beta')} q^{\binom{k}{2}} \left[\begin{matrix} r + k - 1 \\ r \end{matrix} \right]_q$$

q, t -Catalan numbers

于是就有：

$$\begin{aligned} F_{n,k}(q, t) &= \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{\beta' \in L_{n-k, n-k}^+(r)} q^{\text{area}(\beta')} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} r + k - 1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{\text{bounce}(\beta')} t^{n-k} \\ &= \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} r + k - 1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{n-k} q^{\binom{k}{2}} F_{n-k, r}(q, t) \end{aligned}$$

q, t -Catalan numbers

于是就有：

$$\begin{aligned} F_{n,k}(q, t) &= \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{\beta' \in L_{n-k, n-k}^+(r)} q^{\text{area}(\beta')} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} r + k - 1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{\text{bounce}(\beta')} t^{n-k} \\ &= \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} r + k - 1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{n-k} q^{\binom{k}{2}} F_{n-k, r}(q, t) \end{aligned}$$

而对于 $n = k$ 的情况（即唯一需要考虑反弹恰好一次的情况）上述结果是显然的。

q, t -Catalan numbers

另外，我们有：

$$F_n(q, t) = \sum_{b=1}^n \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_b = n, \alpha_i > 0} t^{\sum_{j=2}^b (j-1)\alpha_j} q^{\sum_{j=1}^b \binom{\alpha_j}{2}} \prod_{i=1}^{b-1} \begin{bmatrix} \alpha_i + \alpha_{i+1} - 1 \\ \alpha_{i+1} \end{bmatrix}_q$$

对称性问题

我们有：

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{area}(\pi)} = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{bounce}(\pi)}$$

对称性问题

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \leq a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是, 我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数, 分别记为 b_0, b_1, \dots, b_k 。接着考虑它们组合的方案数计算如下:

对称性问题

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \leq a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是, 我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数, 分别记为 b_0, b_1, \dots, b_k 。接着考虑它们组合的方案数计算如下:

先将 b_0, b_1 组合, 方案数为 $\binom{b_0+b_1-1}{b_1}$ 。然后将 b_2 加入, 不能出现 0 后面紧邻一个 2 的情况。方案数为 $\binom{b_1+b_2-1}{b_2}$.. 以此类推。

对称性问题

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \leq a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是, 我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数, 分别记为 b_0, b_1, \dots, b_k 。接着考虑它们组合的方案数计算如下:

先将 b_0, b_1 组合, 方案数为 $\binom{b_0+b_1-1}{b_1}$ 。然后将 b_2 加入, 不能出现 0 后面紧邻一个 2 的情况。方案数为 $\binom{b_1+b_2-1}{b_2}$.. 以此类推。

因此, 我们可以得到:

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{area}(\pi)} = \sum_{k=1}^n \sum_{b_1+\dots+b_k=n, b_i>0} q^{\sum_{i=2}^k b_i(i-1)} \prod_{i=1}^{k-1} \binom{b_i + b_{i+1} - 1}{b_{i+1}}$$

对称性问题

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \leq a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是, 我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数, 分别记为 b_0, b_1, \dots, b_k 。接着考虑它们组合的方案数计算如下:

先将 b_0, b_1 组合, 方案数为 $\binom{b_0+b_1-1}{b_1}$ 。然后将 b_2 加入, 不能出现 0 后面紧邻一个 2 的情况。方案数为 $\binom{b_1+b_2-1}{b_2}$.. 以此类推。

因此, 我们可以得到:

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{area}(\pi)} = \sum_{k=1}^n \sum_{b_1+\dots+b_k=n, b_i>0} q^{\sum_{i=2}^k b_i(i-1)} \prod_{i=1}^{k-1} \binom{b_i + b_{i+1} - 1}{b_{i+1}}$$

结果与 $F_n(1, q)$ 一致。

The dinv statistic

我们接下来介绍另外一个关于 q, t -Catalan 的 Dyck path 的 statistic 。

The dinv statistic

我们接下来介绍另外一个关于 q, t -Catalan 的 Dyck path 的 statistic 。

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$ 有：

$$\begin{aligned} \text{dinv}(\pi) = & |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi)\}| + \\ & |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi) + 1\}| \end{aligned}$$

The dinv statistic

我们接下来介绍另外一个关于 q, t -Catalan 的 Dyck path 的 statistic 。

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$ 有:

$$\text{dinv}(\pi) = |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi)\}| + \\ |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi) + 1\}|$$

对此我们有:

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{dinv}(\pi)} t^{\text{area}(\pi)} = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+} q^{\text{area}(\pi)} t^{\text{bounce}(\pi)}$$

The dinv statistic

我们构造 Dyck path 的双射 ζ 使其满足:

$$\text{dinv}(\pi) = \text{area}(\zeta(\pi))$$

$$\text{area}(\pi) = \text{bounce}(\zeta(\pi))$$

The dinv statistic

我们构造 Dyck path 的双射 ζ 使其满足:

$$\begin{aligned}\text{dinv}(\pi) &= \text{area}(\zeta(\pi)) \\ \text{area}(\pi) &= \text{bounce}(\zeta(\pi))\end{aligned}$$

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$, 令 $b - 1$ 为其最长行的长度 (即 $\max a_i(\pi)$), 记 c_0, \dots, c_{b-1} 为每个长度对应的出现次数。

The dinv statistic

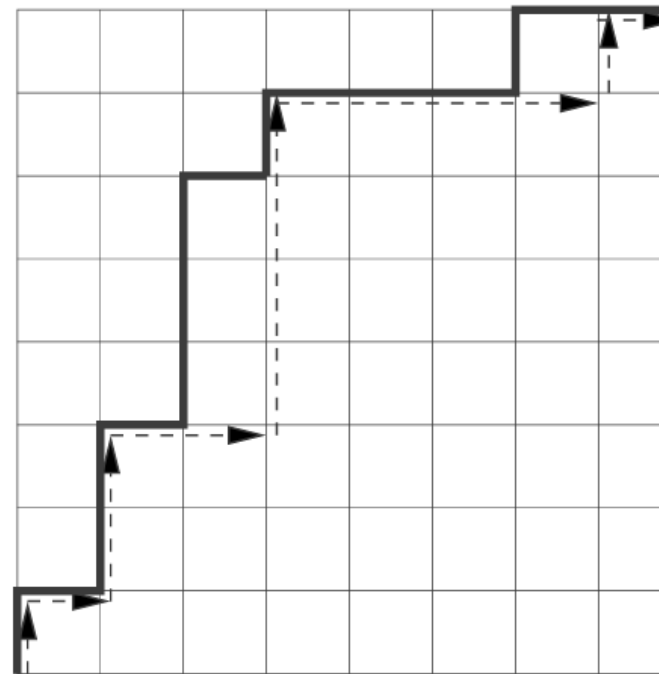
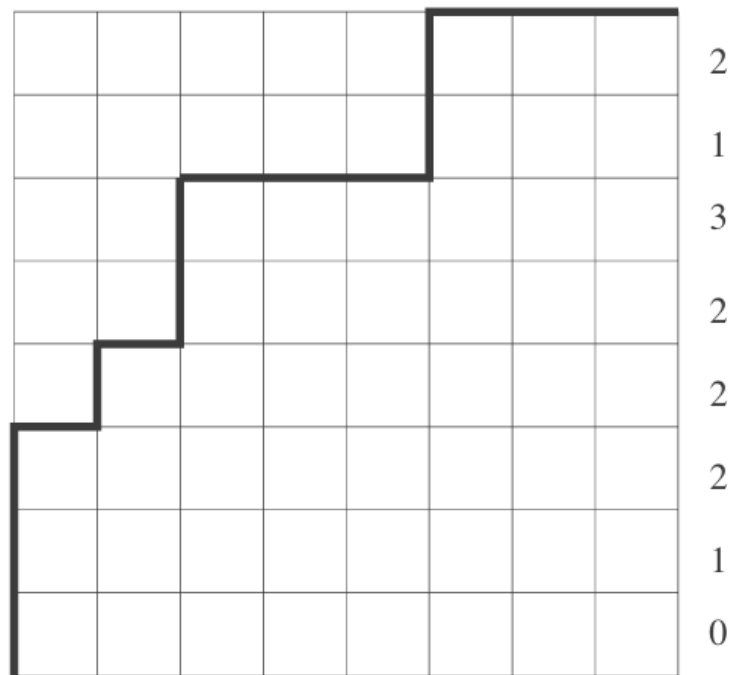
我们构造 Dyck path 的双射 ζ 使其满足：

$$\begin{aligned}\text{dinv}(\pi) &= \text{area}(\zeta(\pi)) \\ \text{area}(\pi) &= \text{bounce}(\zeta(\pi))\end{aligned}$$

对于 $\pi \in L_{n,n}^+$ ，令 $b - 1$ 为其最长行的长度（即 $\max a_i(\pi)$ ），记 c_0, \dots, c_{b-1} 为每个长度对应的出现次数。

我们构造对应路径 π' 使其有恰好 b 次反弹，且反弹长度依次为 c_0, \dots, c_{b-1} 。对于每个 $0 \leq i < b - 1$ 的 $(c_i, c_i + c_{i+1})$ 处，我们构造其与 $(c_{i-1}, c_{i-1} + c_i)$ （当 $i = 0$ 即 $(0, 0)$ ）之间的路径：从上到下考虑所有 $a_i(\pi)$ ，若是 $i + 1$ 则加入一个 S（South step），若是 i 则加入一个 W（West step），其他情况不做考虑。

The dinv statistic



如图所示，左侧的 π 对应了右侧的 π' 。

The dinv statistic

ζ 很显然是一个双射：对于 π' ，我们通过反弹次数得到了 $b - 1$ ，并且得到了每个长度的出现次数。此时再看具体路径，对于 $0 \leq i < b - 2$ 可以得到仅有 $i, i + 1$ 的子序列。而组合原路径的方案是唯一的，这和定理 4.3 的证明是对应的。

The dinv statistic

ζ 很显然是一个双射：对于 π' ，我们通过反弹次数得到了 $b - 1$ ，并且得到了每个长度的出现次数。此时再看具体路径，对于 $0 \leq i < b - 2$ 可以得到仅有 $i, i + 1$ 的子序列。而组合原路径的方案是唯一的，这和定理 4.3 的证明是对应的。

我们将 $\text{area}(\pi')$ 按照 bounce path 分成两部分：下侧是 $\binom{c_0}{2} + \cdots + \binom{c_{b-1}}{2}$ ，对应了 $\text{dinv}(\pi)$ 中的 $|\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi)\}|$ 。上侧，分析每一段，不难发现也恰好对应了 $|\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi) + 1\}|$ 。

因此 $\text{area}(\pi') = \text{dinv}(\pi)$ 。

The dinv statistic

另一方面，我们有：

$$\text{bounce}(\pi') = \sum_{i=1}^{b-1} ic_i = \text{area}(\pi)$$

The dinv statistic

一个推论是：

$$F_{n,k}(q, t) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^+, \pi \text{ has exactly } k \text{ rows of length } 0} q^{\text{dinv}(\pi)} t^{\text{area}(\pi)}$$

这是因为 ζ 对应的限制即为有恰好 k 行长度为 0（即第一次反弹长度为 k ）。

The end

限于时长到这里就结束了。
更多内容可以见于论文。
谢谢大家。