Counting on a Tree 解题报告

第一部分（25%） $n \le 10^3, Z \le 10^6$

首先，将边权质因数分解后，易知每个质因数的次数与答案无关，因此将质因数的次数降为 1。

在开始时，我们只需要暴力算出每一条路径的 gcd 就行了。

对于每次修改操作，gcd 发生改变的路径一定经过被修改的边。准确地说，我们要求出修改前和修改后 gcd 为 1 的路径数。记这条边连接点 i 和点 j，边权为 k。对于路径 s->t(s 在 i 一侧，t 在 j 一侧)，其 gcd 为 gcd(s->j,i->t)。由于 s->j 和 i->t 都包含边(i,j)，且它们的 gcd 为 1，所以对于 k 的每一个质因数，要么属于 s->j，要么属于 i->t，要么都不属于它们。因此我们从 j 出发向 i 一侧遍历，求出所有 s->j，i 也同理，然后枚举 k 的每一个质因数即可。

时间复杂度：$\Theta(n^2 \log Z + Q(n \log Z + 3^7))$

第二部分（75%） $n \le 10^5, Z \le 10^6$

令 f(i)表示 gcd 为 i 的路径个数，F(i)表示 gcd 为 i 的倍数的路径个数，则 $F(i) = \sum_{i|d} f(d)$。由莫比乌斯反演可知 $f(i) = \sum_{i|d} F(d)\mu(\frac{d}{i})$，所以 $f(1) = \sum_{i=1}^{Z} F(i)\mu(i)$。因此我们只需求出所有的 F(i)即可。

我们可以对每一个 i 建立一个并查集，包含所有边权是 i 的倍数的边。由于 2*3*5*7*11*13*17*19=9699690>Z，因此每个边权只含有不超过 7 个质因数，因数个数不超过 128，即每条边只在不超过 128 个并查集中出现。因此时间复杂度为 $\Theta(2^7 n \log n)$。

我们将会被修改的若干条边提出来，把每一条边按时刻拆成 Q+1 条，在每个并查集中，先加入所有不会被修改的边，最后枚举时刻，将这个时刻会被修改的边加进来，统计答案后再删去，复原。

时间复杂度：$\Theta(2^7(n + Q^2)\alpha(n))$