castles 解题报告

江苏省常州高级中学 徐毅

October 4, 2013

1 题目大意

给出一棵 n 个点的无根树，可以带士兵从任意一个点出发，遍历所有的点，且每条边在每个方向上只能经过一次。当第一次走到点 i 时，当前士兵数必须满足点 i 的最低要求 a_i，且会损耗 m_i 个士兵，还要留下 g_i 个士兵。求一开始要带的最少士兵数。

2 数据规模和约定

30% $1 \le n \le 10$。

100% $1 \le n \le 100$，$1 \le a_i \le 1000$，$0 \le m_i \le a_i$，$1 \le g_i \le 1000$。

3 30% 的算法

生成 n 的全排列，表示遍历顺序。对于每种顺序，模拟遍历过程，算出需要的士兵数，取最小的作为答案即可。

时间复杂度为 $O(n!n)$，空间复杂度为 $O(n)$。

4 100% 的算法

枚举起点作为根就使树转化为有根树。由于每条边在每个方向上只能经过一次，每进入一棵子树就要遍历完该子树的所有结点，因此我们想到使用树形动态规划来解决。

令 $f(i)$ 表示进入以 i 为根的子树所需要的最少士兵数，$s(i)$ 表示进入以 i 为根的子树所消耗的士兵数，易知 $s(i) = \sum_{j \in son_i} s(j)$。

考虑对 $f(i)$ 进行转移，我们需要寻找对儿子的最优遍历顺序。

假设依次遍历 x 和 y，遍历前累计所需人数 u，累计消耗人数 v。

若先遍历 x 后遍历 y，则遍历后累计所需人数 $\max\{u, f(x)+v, f(y)+v+s(x)\}$，累计消耗人数 $v+s(x)+s(y)$。

若先遍历 y 后遍历 x，则遍历后累计所需人数 $\max\{u, f(y)+v, f(x)+v+s(y)\}$，累计消耗人数 $v+s(x)+s(y)$。

我们要找的就是 x 和 y 满足某种条件时有 $\max\{f(x)+v, f(y)+v+s(x)\} \le \max\{f(y)+v, f(x)+v+s(y)\}$。

若 $f(x)+v \ge f(y)+v+s(x)$，必然有 $f(x)+v+s(y) > f(y)+v$，又由 $f(x)+v+s(y) > f(x)+v$，此时必然有 $\max\{f(x)+v, f(y)+v+s(x)\} \le \max\{f(y)+v, f(x)+v+s(y)\}$。

若 $f(y)+v+s(x) \geq f(x)+v$，又由 $f(y)+v+s(x) > f(y)+v$，要使 $f(y)+v+s(x) \leq f(x)+v+s(y)$，即 $s(y)+f(y)-s(y)+s(x) \leq s(x)+f(x)-s(x)+s(y)$，则必须满足 $f(x)-s(x) \geq f(y)-s(y)$。

由此我们发现，$f(x)-s(x) \geq f(y)-s(y)$ 就是所要找的条件，对 i 的儿子按此从大到小排序进行遍历即可求得 $f(i)$。

时间复杂度为 $O(n^2 \log n)$，空间复杂度为 $O(n)$。