

# 《circuit》解题报告

佛山石中李子豪

## 1 试题来源

CTSC 2012

可在BZOJ2805找到。

## 2 试题大意

给定一棵 $N$ 个节点组成的边上带电阻的树，叶子全部接地，形成一个电阻网络。

$M$ 次操作，操作分为两种：

- 1.在某条边上加一个电源；
- 2.查询某个点的对地电压。

$N, M \leq 5 * 10^4$ , 树中最长链长度 $L$ 不超过50

## 3 算法介绍

### 3.1 基本物理模型的分析

这道题，比较容易受到各种奇奇怪怪的电阻、电源的影响，从而难以正常思考题目。因此，我们先从最简单的弄起。

首先，是电阻的问题。电阻的连接分为串联与并联两种。

串联： $R = \sum_i R_i$ 。

并联： $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

通过这两种电阻基本连接，我们就可以把一个电阻网络用一个总电阻来代替，从而简化问题。

然后，是电压的问题。我们同样只需要知道串并联的分压原理以及电压差的问题即可。

串联：

$$\frac{U_i}{R_i} = C, C \text{ 为一定值。}$$

$$\sum_i U_i = U, U \text{ 为总电压。}$$

并联：

$$U_i = U, U \text{ 为总电压。}$$

然后，电压差的问题，我们假设每个节点有一个电压 $U_i$ ，那么 $ab$ 节点间的电压差 $U_{ab} = U_a - U_b$ 。

最后，是电源的问题。这个问题，我们容易发现，各个电源之间实际上是相互独立的，我们可以独立考虑每一个电源对各节点的电压的贡献即可。

### 3.2 暴力算法

每插入一个电源，我们可以以电源所在位置为起点，然后通过串并联的分压原理求出各节点的电压值，并累加到该节点的最终电压值中。

对于询问操作，我们则可以查询当前节点的电压值。

这个方法复杂度为 $O(nm)$ 。

### 3.3 优化算法

对于上一个算法，我们可以发现问题在于每一次更新都把所有点更新一遍，速度非常慢。而询问则只需要询问一个点，速度比较快。

因此，我们可以通过一些改变，使得更新不需要更新所有点，询问也不只询问一个点，从而使总体复杂度更优。

假如我们知道根节点的电压值，那么我们可以很简单的求出其余各点的电压值： $U_k = \prod_i \frac{sum_i}{R_i + sum_i} U_{root}$ ， $i$ 在 $root$ 到 $k$ 的路径上， $R_i$ 为 $i$ 与父亲连边的电阻， $sum_i$ 为 $i$ 子树的总电阻。

那么，我们把这个根节点的电压值看作标记 $flag$ ，进一步的就可以得到任意节点的电压值： $U_k = \sum_j \prod_i \frac{sum_i}{R_i + sum_i} flag_{root}$ ， $j$ 是 $k$ 或 $k$ 的祖先， $i$ 在 $k$ 到 $j$ 的路径上

因此，我们就可以解决这一问题了。

## 4 时空复杂度

空间复杂度 $O(N)$ ,时间复杂度 $O(N + ML)$ .

## 5 总结

通过对物理模型的转换，转换为基本的树上询问问题，然后考虑解决方法。