

Stanovi 解题报告

东营市胜利第一中学 姜志豪

1 试题来源

COCI 2015

bzoj提交: <http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3810>

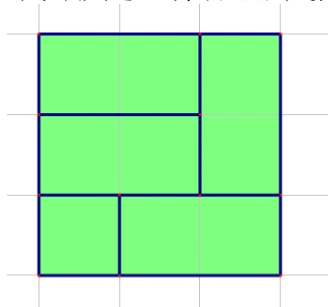
2 试题大意

有一个 $n \times m$ 的矩形 A ，由 $n \times m$ 个 1×1 的单位正方形组成。

现在要将这个矩形划分成若干个区域，不能把一个单位正方形划分到多个区域中。

每个区域都必须是一个矩形，并且这个矩形至少有一条边在矩形 A 的边界上。

下图就是一种合法的划分方式。



对于一个区域，若这个区域长为 a ，宽为 b ，那么这个区域的差异度是 $(ab - k)^2$ 。

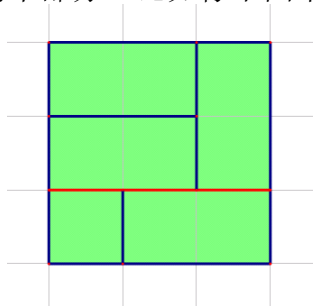
矩形 A 的差异度是所有区域差异度的和。

求矩形 A 的差异度的最小值。

$$1 \leq n, m \leq 300$$

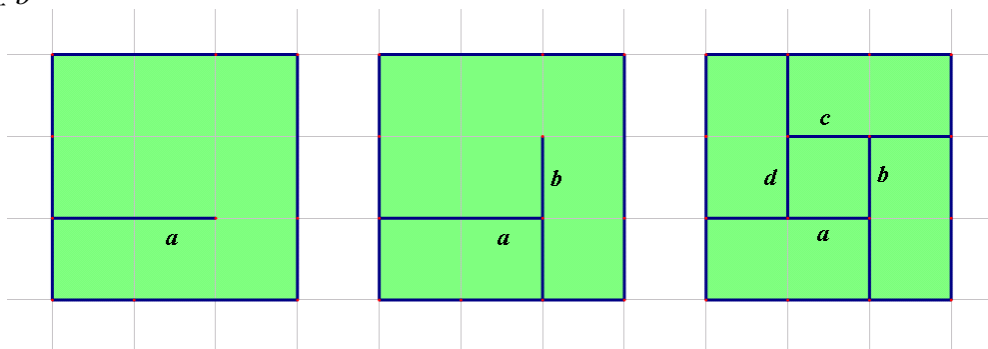
3 算法介绍

一种合法的方案，必定存在至少一条横线或竖线贯穿整个矩形，将矩形分成两个部分。比如像下图中红色的线。



为了证明这个猜想，我们尝试构造一种方案，不存在横线或竖线贯穿整个矩形。

对于一条线 a ，为了避免它贯穿整个矩形，必须至少有一条与 a 垂直的线 b 挡住它。这时 b 又有可能贯穿整个矩形，那就必须至少有一条与 b 垂直的线 c 挡住 b ……



所以，对于每一条线，都必须至少有一条线挡住它，避免它贯穿整个矩形。由于线的数量有限，所以挡的关系会形成一个环，比如 a 挡住 b ， b 挡住 c ， c 挡住 d ， d 挡住 a 。如果挡的关系形成了一个环，就会出现一个矩形，满足它没有任何一条边在矩形 A 的边界上，这样不满足题目要求。所以，必定存在一条线贯穿整个矩形。

现在，我们可以通过dp来解决这个问题了。

令 $f(i, j, x)$ 表示一个 $i \times j$ 的矩形，边界情况为 x 时，划分后的最小差异度。其中 x 表示了这个矩形的每一条边是否在大矩形 A 的边界上，可以用4位的二进制数表示。计算 $f(i, j, x)$ 时，分两种情况，一种情况是不对这个矩形继续划分，那么差异度是 $(ij - k)^2$ 。另一种情况是继续划分，枚举哪一条线贯穿了这个矩

形，计算此时的最小差异度，更新 $f(i, j, x)$ 。

写记忆化搜索可以明显减少程序运行时间。

时间复杂度： $O(nm(n + m))$