题目讲评

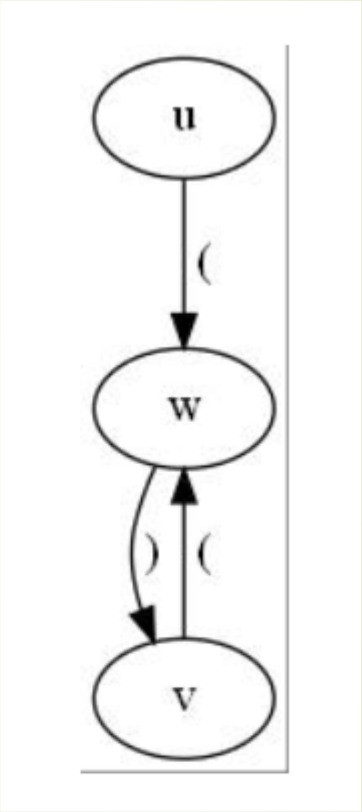
括号路径（bracket）

- 题意：给定 n 个点 $2m$ 条边的有向图，边带单个括号，共有 k 种括号。
- 存在 $u \to v$ 带第 w 种左括号的边就一定存在 $v \to u$ 带第 w 种右括号的边，反之亦然。求有多少个点对满足它们之间存在一条合法括号序列路径。
- $n \le 3\times10^5$，$m \le 6\times10^5$。

- 性质1：若 u,v 之间存在合法括号序列路径，则对于其他点 w，要么 w 和 u,v 之间都存在，要么都不存在。
- 假设 $w \to u$ 存在一条合法括号序列路径，则 $w \to u \to v$ 一定也合法，即 w,v 也存在合法括号序列路径。
- 由性质1，点集可以分为若干个集合，每个集合内任意两点存在合法括号序列路径。

括号路径（bracket）

- 注意到合法括号序列中一定存在某个位置会出现 () 型的情况，这对应着某个点 w 有两个同类型左括号的入边。
- 维护所有点左括号类型的入边，如果出现同类型的两条边，就把这两条边对应的起点合并。不断进行这个过程，直到无法合并。此时所有合法点对都被找到，不同集合间的点不存在合法括号序列路径。
- 反证：如果存在没被合并的合法点对，则它们的路径一定包含 () 型，这说明还存在能继续合并的点对。
- 合并点对的入边时采用启发式合并。时间复杂度 $O(n\log n)$。



表达式求值（expr）

- 题意：定义两个运算符 < 和 >，分别表示对两个数组同下标元素取 min/max。给定一个只包含 <，>，？三种运算符的表达式 E，其中？表示该运算可以是 < 或 >。求所有可能的结果的元素之和。涉及的操作数有 m 个，每个都是长度为 n 的数组。
- $n \le 10^5$，$m \le 10$，$|E| \le 5\times10^4$。

- 数组中不同位置的结果互相独立，考虑求出一个位置在所有结果中的和。由于 m 很小，考虑求出每个结果的出现次数。
- 将一个位置上可能的结果排序得 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$，求出该位置上 $> x_i$ 的结果数量，就可以求出每个结果的出现次数。
- 求 $> x_i$ 的结果数量时，表达式中每个操作数非 0 即 1。由于有 ？，所以实际求值时需要知道左右两边的结果中有多少个 0 和多少个 1。

表达式求值（expr）

- 求> x_i 的结果数量。
- 记两边操作数为 $(x0, x1), (y0, y1)$，结果记为 $(z0, z1)$ 。
- 对于 > ：$z0 = x0 * y0$，$z1 = x0 * y1 + x1 * y0 + x1 * y1$。
- 对于 < ：$z0 = x0 * y0 + x0 * y1 + x1 * y0$，$z1 = x1 * y1$。
- 对于？：将上面两个结果加起来。
- 根据表达式建出表达式树，每次 $O(|S|)$ 可计算出结果数量 z_1。
- 这样共有 $n * (m - 1)$ 个布尔变量需要求值，但注意到操作数只有 10 个，所以本质不同的初始操作数取值情况也只有 2^{10} 种，我们只需要预处理这 2^{10} 个结果。
- 总时间复杂度 $O(2^m|S| + nm^2)$。

斐波那契（fib）

- 题意：给定斐波那契数列 f_i 中的前两项，求最小的 p 使得模 m 意义下 $f_p = 0$。
- 询问组数 $\le 10^5$，$m \le 10^5$

- 记 $F_0 = 0, F_1 = 1$ 的斐波那契数列第 n 项为 F_n。
- 首先计算 f_n 与前两项 $f_0 = a, f_1 = b$ 的关系。
- $f_0 = a$，$f_1 = b$，$f_2 = a + b$，$f_3 = a + 2b$，$f_4 = 2a + 3b$，$f_5 = 3a + 5b$，$\cdots$
- 容易得出 $f_n = a\times F_{n-1} + b\times F_n$。
- 计算 F_n 模 m，根据经典结论其有长度不超过 $6m$ 的循环节。
- m 是素数时：$f_n \equiv 0\ (mod\ m) \Rightarrow -\frac{a}{b} \equiv \frac{F_n}{F_{n-1}}\ (mod\ m)$，预处理 $\frac{F_i}{F_{i-1}}$，询问时查表。

斐波那契（fib）

- 如果 $m = p_1 p_2 \cdots p_k$
- 可以对每个质数找到 F_p 第一次为 0 的位置。
- 接下来要对不同质数进行合并，此处用大数翻倍法进行中国剩余定理合并即可。
- 唯一需要注意的是，对于每个质数的情况下，模数不应该是循环节长度（因为循环节长度内不止 1 个 0，使用循环节长度会存在选择哪个 0 进行合并的问题）。
- 但可以很容易证明，同一个质数情况下，0 出现的位置是周期性的并且这个周期是循环节的因子，所以枚举循环节因子找到真正的最小周期即可。

斐波那契（fib）

- $m = p^k$，此时逆元有可能不存在。下面提供一个比较暴力直接的做法。
- 我们不使用除法操作，考虑最初的乘法 $F_{i-1} \times a' + F_i \times b' \equiv 0 (mod\ m)$。
- 令 $a' = a \times p^A$，$-b' = b \times p^B$，$F_{i-1} = c \times p^C$，$F_i = d \times p^D$。
- 则 $a \times c \times p^{A+C} \equiv b \times d \times p^{B+D} \left(mod\ p^k\right)$。
- 有两种情况满足条件：$A + C \geq k$ 且 $B + D \geq k$。
- 或者 $A + C = B + D$ 且 $a \times c \equiv b \times d \left(mod\ p^{k-A-C}\right)$。

斐波那契（fib）

- 预处理的时候我们知道的是 c,d,C,D,k。
- 对于情况一，只要 $\mathrm{C} \geq k-A$ 且 $D \geq k-B$，用二维后缀最小值处理即可。
- 对于情况二，在预处理的时候我们不知道 a,b,A,B，但我们可以暴力枚举 A 的值，这样可以解出 B 的值。通过暴力枚举把所有的可能性全部存下来（A 只有 $\log m$ 种可能性），之后询问的时候只需要保证 A,B 的值以及互质部分的用逆元除法能对上，就说明找到了一组解。
- 总体复杂度 $O(n\log^2 m)$。用哈希可以省一个 log。