Sine Partition Function解题报告

晋城一中 赵鋆峰

October 14, 2015

1 题目大意

求出

$$f(M,N,X)=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_M=N} sin(k_1X)sin(k_2X)\cdots sin(k_MX)$$

$M<=30, N<=10^9, 0<=X<=6.28$

2 题目解答

2.1 暴力做法

直接枚举每个k的取值显然是不可行的。

2.2 递推做法

考虑递推，令

$$dp[i][j]=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_i=j} sin(k_1X)sin(k_2X)\cdots sin(k_iX)$$

那么转移只需要枚举最后的k_i的值即可,即

$$dp[i][j]=\sum_{k_m=0}^{j} dp[i-1][j-k_m]sin(k_mX)$$

初始$dp[0][0]=0$,复杂度$O(MN^2)$。

2.3 新的递推公式

我们发现枚举k_i的复杂度是无法接受的,通过对k_i分类讨论我们可以得到新的递推式：

- $k_i=0$,由于$sin(0)=0$,所以这部分可以忽略

- $k_i = 1$,这部分就是$dp[i-1][j-1]sin(X)$
- $k_i >= 2$，我们有

$$\begin{aligned} sin(k_iX) &= sin((k_i - 1 + 1)X) \\ &= sin((k_i-1)X)cos(X) + sin(X)cos((k_i-1)X) \\ &= 2sin((k_i-1)X)cos(X) + sin(X)cos((k_i-1)X) - sin((k_i-1)X)cos(X) \\ &= sin((k_i-1)X)2cos(X) - sin((k_i-2)X) \end{aligned}$$

所以这部分的答案$= dp[i][j-1]2cos(X) - dp[i][j-2]$。

所以，我们得到了

$$dp[i][j] = dp[i-1][j-1]sin(X) + dp[i][j-1]2cos(X) - dp[i][j-2]$$

直接按这个递推来复杂度是$O(NM)$,仍然无法通过此题。

2.4 转移优化

我们构造一个行矩阵A,保存$dp[0][i], dp[1][i] \cdots dp[M][i]$和$dp[0][i+1], dp[1][i+1] \cdots dp[M][i+1]$ 的值很容易让A乘上一个转移矩阵B得到$dp[0][i+1], dp[1][i+1] \cdots dp[M][i+1]$和$dp[0][i+2], dp[1][i+2] \cdots dp[M][i+2]$。

这样$A \times B^{n-1}$就能得到答案,然后因为矩阵乘法满足结合律,所以只需计算B^{n-1}即可,快速幂解决。

复杂度$O(M^3 logN)$。