Goldbach's Conjecture 解题报告

宁波市镇海中学 邹逍遥

1 试题来源

2015 Multi-University Training Contest 9

`http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5403`

2 试题大意

令$d(x)$为x的约数和。定义x是Good number当且仅当$1 \sim d(x)$的数都能被表示成x的某几个不同约数之和。

给定一个偶数p，求p是否能表示成两个Good number之和。假如可以的话需要给出一种分解方案。

为了方便spj检查正确性，同时需要输出分解出的两个数的质因数分解。

3 数据范围

$p \leq 10^{18}$

不超过$T = 40000$组数据。

4 算法介绍

4.1 算法1

首先考虑如何判断Good number。

设$x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}, p_1 < p_2 < \cdots < p_k$，那么$x$是Good number的充要条件就是每个$p_i$都满足$p_i - 1 \leq d(\prod_{j=1}^{i-1} p_j^{e_j})$。

必要性比较显然，因为小于p_i的数只能使用这些数表示，假如这些数之和都不够就一定不满足条件。

充分性可以考虑用p_i进制来表示1到$d(\prod_{j=1}^{i} p_j^{e_j})$之间的数。那么由于保证了小的那些数能拼出$1 \sim p_i - 1$，所以转进制之后每一位都一定有办法拼出来。

那么这样就获得了一个暴力算法：枚举i检查i和$x - i$是不是Good number。

但是这样显然是会TLE的，假设瞬间能找到解，每次只分解一个10^{18}级别的数也需要$O(Tp^{\frac{1}{4}})$的时间复杂度，所以光找方案时间就不够用了。

4.2 算法2

由于光分解p就会TLE，所以必须想办法将解表示成两个数乘积的形式。这样两个数都是10^9级别，就可以承受了。

那么就需要找出Good number分解成两个数后的一些性质。

观察到Good number的充分性证明中并不需要保证p_i按照从小到大的顺序加入。也就是说对于一个Good number x，乘上任意一个小于$d(x)$的质数p后得到的数xp也是Good number。

由于x是Good number所以$d(x) \geq 2x - 1$，假如x和$x + 2$都是Good number，使用扩展欧几里得就能将$x^2 + 2$到$3x^2$之间的数表示成x的倍数和$x + 2$的倍数之和的形式。

也就是说只需要预处理出$O(\log p)$对x和$x + 2$都是Good number的情况就能覆盖所有情况了。

由于Good number的密度还是比较大的，预处理部分只需要每找出一对相邻的Good number之后在扩大$\sqrt{3}$倍以内的地方暴力找到下一组Good number即可。

时间复杂度$O(Tp^{\frac{1}{8}})$