GTHRONES 解题报告

‹1› 题目大意

给定一个正整数可重集 S。双方轮流从集合中选数，这个数要满足与上一轮中对方选的数只差一个质因子，并将其从集合中删除。不能操作的人输。在第一轮中先手可以任意选一个数。问是否先手必胜。并且如果先手必胜，问第一个选的数最小是多少。

两个正整数 u 和 v(不妨设 u>v)只差一个质因子当且仅当 v 能整除 u 且 u/v 为一个质数。

‹2› 解题思路

首先如果将每个数看作一个点，将两个满足相差为一个质因子的数之间连一条边。那么会发现构成的图是一个二分图。

因为如果将一个数按质因子的个数的奇偶性分类，会发现同奇偶的点不会有边，所以是二分图。

然后，发现对一个转化过去的二分图做最大匹配，先手选择任意一个最大匹配中的未配点都可以保证先手必胜。

因为对于一个未配点 A，后手如果能选择一定选的是某个与 A 相连的已经匹配的点 B(不然这就不是最大匹配了)，这样先手就可以选择点 B 的匹配点 C，而后手又不得不再选另一个已匹配的点 D。因此对于后手的每个选择，先手都有选择，而点数是有限的，所以后手总会因没得选输掉游戏。所以如果一个点在原图的某个最大匹配中是未配点，那么点就是先手可以选择的保证必胜的点。

‹3› 算法流程 & 复杂度分析

构图，枚举任意两对点，判断其是否有边，可以用米勒罗宾判断素数。时间复杂度为 O(n^2*k)。k 为计算一个数是素数的效率。

用网络流算法，解决最大匹配问题。时间复杂度为 O(maxflow(n,n^2))，maxflow(n,m)，表示 n 个点 m 条边的最大流。

用残余网络中的边，跑强联通分量，枚举每条边(一个数)判是否可选。如果这条边在某个强联通分量中，则这条边在原网络流中可以不流仍能达到最大流，即这个点对应的数保证先手必胜。时间复杂度为 O(n^2)。

时间复杂度为 O(n^2*k+maxflow(n,n^2))，空间复杂度为 O(n^2)。

题目链接 https://www.codechef.com/problems/GTHRONES