

# Mirror Room 解题报告

东营市胜利第一中学 姜志豪

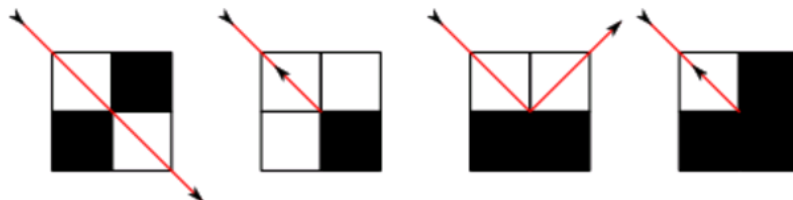
## 1 试题来源

Codeforces Round #168 (Div. 1)

提交: <http://codeforces.com/problemset/problem/274/E>

## 2 试题大意

假设有一个  $n \times m$  的网格。左上角的格子坐标是  $(1, 1)$ ，右下角的格子坐标是  $(n, m)$ 。网格中有  $k$  个堵塞的格子，其他的格子是空的。你在空格子  $(x_s, y_s)$  的中心向一个对角线方向（也就是东北，西北，东南，西南）发射一束激光。如果光束碰到堵塞的格子或网格边界，它会反射。在不同情况下光束的反射方式如下图所示。



过了一会儿，光束进入了一个无限的循环。计算至少被光束通过一次的空格子数。我们认为光束通过了一个格子的中心才算是通过了这个格子。

$$1 \leq n, m \leq 10^5, 0 \leq k \leq 10^5$$

## 3 算法介绍

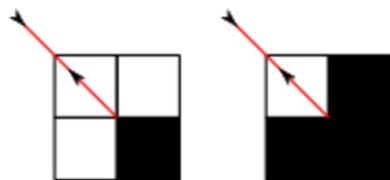
光线只有遇上边界或堵塞的格子才会改变方向，所以改变方向的位置是有限的，光线的方向又最多只有四种，所以光线在循环之前改变方向的次数是  $O(n + m + k)$  级别的。我们可以模拟光线的移动。已知光线位置和光线的方向，

使用二分的方法可以在  $O(\log k)$  的时间复杂度内求出即将改变方向的位置和改变后的方向。

我们暂把光线的位置和方向称为光线的状态。一种状态只能转移到一种状态。如果从状态  $a$  能转移到状态  $b$ ，那么  $b$  反向后的状态能转移到  $a$  反向后的状态。所以一种状态也只能从一种状态转移而来。这就像是一种置换，所以从初始状态出发，必定会回到初始状态，并且回到初始状态之前不会重复经过某种状态。

我们对网格进行染色，有邻边的格子颜色不同，形成一个二分图。根据光线反射的方式，可以发现，当光线沿西北、东南方向前进时，只会经过一种颜色的格子。当光线沿东北、西南方向前进时，只会经过另一种颜色的格子。所以光线在某一个格子中心时，要么只会是西北、东南方向之一，要么只会是东北、西南方向之一。

这样，如果一次循环内一个格子被重复经过，只有可能是光线以相反的两个方向进入，并且一次循环内一个格子最多被经过两次。一个格子被经过两次，所有被光线经过的格子都会被经过两次。如果光线在前进过程中出现过下图中的两种反射，所有格子就会被经过两次。只需在模拟的过程中记录是否出现过这两种情况即可。



时间复杂度：  $O((n + m + k) \cdot \log k)$