线性拟阵奇偶

华东师范大学第二附属中学 郭羽冲

2024.2

线性拟阵奇偶

定义

给定 m 个二元组 (a_i, b_i)，其中 a_i, b_i 均为 n 维向量。选出最多的二元组，使得所有被选出的二元组中包含的向量线性无关。

线性拟阵奇偶

稀疏型构造

令 v 为原问题的答案。
令 $x'_1 \dots x'_m$ 为未定元。构造矩阵 A, X：

$$A = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m)$$

$$X = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & x'_1 \\ -x'_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x'_2 \\ -x'_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & x'_m \\ -x'_m & 0 \end{pmatrix}\right)$$

将矩阵放在 $x'_1 \dots x'_m$ 的有理分式域下考虑，则有

$2v + 2m = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}$。

线性拟阵奇偶

紧凑型构造

令 $x_1 \ldots x_m$ 为未定元。构造矩阵 M:

$$M = \sum_{i=1}^{m} x_i(a_i b_i^T - b_i a_i^T)$$

将矩阵放在 $x_1 \ldots x_m$ 的有理分式域下考虑则有 $2v = \text{rank}(M)$。
相比稀疏型构造，紧凑型构造得到的矩阵规模较小，在计算的时间复杂度上有优势。

线性拟阵奇偶

算法

为了得到较好的时间复杂度，我们需要对未定元 $x_1 \dots x_m$ 进行一些特殊处理。任取一个大质数 p，$x_1 \dots x_m$ 均从 $[0,p)\bigcap\mathbb{Z}$ 中随机选取，在 M 中将 $x_1 \dots x_m$ 的值代入后得到 M'。M' 为 $\mathbb{F}_p$ 上的矩阵，可以用高斯消元 $O(n^3)$ 地计算 $\mathrm{rank}(M')$。我们认为 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(M')$，即可进一步得到答案。

线性拟阵奇偶

正确率分析

上述算法是有一定错误概率的，考虑对其进行分析。
有 $\mathsf{rank}(M') \le \mathsf{rank}(M)$，下证明两者有较大概率取等。
令 $r = \mathsf{rank}(M)$，则 M 一定有一个 r 阶可逆子矩阵 $M_{S,T}$。
$\det(M_{S,T})$ 为关于 $x_1 \ldots x_m$ 的非零多元多项式，而 $\det(M'_{S,T})$ 即为将 $x_1 \ldots x_m$ 的值代入多项式得到的结果。因此考虑如下引理：
引理（Schwartz-Zippel）若 $f(x_1 \ldots x_m)$ 为不超过 d 次的非零多元多项式，且 $x_1 \ldots x_m$ 均从集合 S 中随机选取，则 $f(x_1 \ldots x_m) = 0$ 的概率不超过 $\dfrac{d}{|S|}$。
于是 $\det(M'_{S,T}) = 0$ 的概率不超过 $\dfrac{r}{p}$。因此我们有至少 $1 - \dfrac{r}{p}$ 的概率能够得到正确的结果。

线性拟阵奇偶

构造方案——算法

依次考虑每个二元组，若将当前二元组删除之后答案不会变小，则将其删除，否则保留。最终一定会剩下恰好 v 个二元组，它们即构成了一组答案。
若使用暴力算法，则我们需要在删除每个二元组之后在 $O(n^3)$ 的时间复杂度内求 $\mathrm{rank}(M)$。则总时间复杂度为 $O(mn^3)$。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

考虑到 $\mathrm{rank}(a_i b_i^T - b_i a_i^T) \leq 2$，我们可以使用经典的矩阵低秩扰动方法加速计算。

具体地，我们有如下引理：

引理（Sherman-Morrison-Woodbury, SMW）对于可逆 n 阶矩阵 A, B，$n \times m$ 矩阵 U，$m \times n$ 矩阵 V，有：

$$(A - UB^{-1}V)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(B - VA^{-1}U)VA^{-1}$$

且 $(A - UB^{-1}V)$ 可逆等价于 $(B - VA^{-1}U)$ 可逆。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

M 未必可逆，无法直接利用上述引理。
由 M 的反对称性，M 一定有一个 r 阶可逆主子矩阵 $M_{S,S}$。
将所有向量在 S 上截取，即只保留 S 所给出的 r 个分量。
任取 r 个线性无关的行作为 S，容易证明 $M_{S,S}$ 即为满足条件的主子矩阵。问题归约为 M 可逆的情况。

线性拟阵奇偶

构造方案——优化

下假设 M 可逆。实时维护 $N=M^{-1}$。
令 $U=(a_i,-b_i),V=(b_i,a_i)^T$，则 $a_ib_i^T-b_ia_i^T=UV$。
需要判断 $M-UV$ 是否可逆。由 SMW 引理可转化为判断 $I-VNU$ 是否可逆，可以在 $O(r^2)$ 的时间内计算出 $I-VNU$。而这是一个 2×2 的矩阵，可以 $O(1)$ 判断其可逆性。
若可逆，则将 N 更新为 $N'=(M-UV)^{-1}$。由 SMW 引理得：

$$N'=(M-UV)^{-1}=N+NU(I-VNU)^{-1}VN$$

可以在 $O(r^2)$ 的时间复杂度内计算出 N'。总时间复杂度降为 $O(mr^2)$。

线性拟阵奇偶

时间复杂度

上述算法时间复杂度组成如下：

- 求 $M=\sum_{i=1}^{m} x_i(a_ib_i^T-b_ia_i^T)$，$O(mn^2)$。
- 求 $\text{rank}(M)$，$O(n^3)$。

若构造方案，则需要增加：

- 求 M^{-1}，$O(n^3)$。
- 每次低秩扰动后判断是否可逆，更新 N，$O(mr^2)$。

实际情况中根据 a_i, b_i 的特殊性质可能可以进一步优化时间复杂度。

带权线性拟阵奇偶

定义

顾名思义，是线性拟阵奇偶问题的带权版本。

学术界已经提出了本问题的 $O(\text{poly}(n, m))$ 算法。但此算法非常复杂，超出了笔者目前的能力范围。因此本节中我们将介绍一个相对简单但时间复杂度较高（非多项式）的算法。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造

令 v 为原问题的答案。
令 w_i 的值域为 $[1, V] \bigcap \mathbb{Z}$。新引入一个未定元 z，利用它的次数来刻画权值和。
类似于不带权情况下的稀疏型构造，令:

$$A = (a_1 z^{w_1}, b_1, a_2 z^{w_2}, b_2, \ldots, a_m z^{w_m}, b_m)$$

$$X = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & x_1' \\ -x_1' & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_2' \\ -x_2' & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & x_m' \\ -x_m' & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = \operatorname{diag}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造

则我们有如下定理：

定理

$$2v = \deg_z\left(\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}\right)$$

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

Y 为对角矩阵，因此将行列式展开得：

$$\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix} = \sum_S \det\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} \det(Y_{\bar{S},\bar{S}})$$

其中 $\bar{S} = ([1, n+2m] \bigcap \mathbb{Z}) \backslash S$。
而反对称矩阵中有 $\det(A) = \mathrm{pf}(A)^2$，因此：

$$\deg_z\left(\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}\right) = 2\deg_z\left(\sum_S \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} \det(Y_{\bar{S},\bar{S}})\right)$$

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

由 Pffafian 的定义展开可得:

$$\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}_{S,S} = \sum_{T\subseteq S} \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T} \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}_{S\setminus T,S\setminus T}$$

因为 X, Y 的非零主子式均互不相同，所以左式中 z 的最高次数一定是通过选择一组合适的 S, T 使得 $\det(Y_{\bar{S},\bar{S}}) \neq 0, \mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}_{S\setminus T,S\setminus T} \neq 0$ 且 $\deg_z\left(\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T}\right)$ 最大所贡献而来。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

由 Y 右下角均为 0 可得 $n+1\dots n+2m$ 均在 S 中。由 S 左上角均为 0 可得 $1\dots n$ 均不在 T 中。

因此 $\mathrm{pf}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & X\end{pmatrix}_{S\setminus T,S\setminus T}$ 非零当且仅当 $\forall i\in[1,m]\bigcap\mathbb{Z}$，有 $n+2i,n+2i-1$ 同时在或同时不在 T 中。

而这与原问题的形式是高度吻合的。$T\bigcap[n+1,n+2m]$ 刻画了每个二元组是否被选择（在 T 中的元素对应的二元组均被选择，否则不选择）。

固定 $T\bigcap[n+1,n+2m]$。为了使得 $\mathrm{pf}\begin{pmatrix}0 & A\\ -A^T & 0\end{pmatrix}_{T,T}$ 确实能够贡献出它所对应的 $\deg_z$，我们还需要将 $[1,n]\bigcap\mathbb{Z}$ 的一个子集加入 T 中以确保其 Pffafian 非零。

带权线性拟阵奇偶

稀疏型构造——正确性证明

若 $\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T} \neq 0$，则有：

$$\deg_z\left(\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T}\right) = \sum_{n+2i\in T} w_i$$

能够找到这样的一个子集当且仅当所有被选择的向量线性无关，而这恰好是原题的要求。因此 $v = \max\left(\deg_z\left(\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}_{T,T}\right)\right)$（要求 S, T 满足之前列出的条件）。

定理得证。

带权线性拟阵奇偶

紧凑型构造

考虑将稀疏型构造化为紧凑型构造。我们有如下引理：

引理（Schur 补）若 D 可逆，则如下等式成立：

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

由上述引理可得：

$$2v = \deg_z\left(\det\begin{pmatrix} Y & A \\ -A^T & X \end{pmatrix}\right) = \deg_z(\det(Y + AX^{-1}A^T))$$

带权线性拟阵奇偶

紧凑型构造

令 $x_i = -\dfrac{1}{x_i'}$，展开可得：

$$Y + AX^{-1}A^T = Y + \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{x_i'}(a_i b_i^T - b_i a_i^T) z^{w_i} = Y + \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i b_i^T - b_i a_i^T) z^{w_i}$$

令此矩阵为 M，则得到了带权情况下的紧凑型构造，有 $2v = \deg_z(\det(M))$。

带权线性拟阵奇偶

算法

求 $\det(M)$。

未定元 x_i, y_i 均可使用随机取值的方式处理。

M 中每个元素均为关于 z 的不超过 V 次多项式，因此 $\det(M)$ 为关于 z 的不超过 Vn 次多项式。

任选 $Vn+1$ 个不同的 z 的取值 $z_1 \dots z_{Vn+1}$，并求出代入每个 z_i 后 $\det(M)$ 的值，再使用拉格朗日插值法还原出 $\det(M)$ 对应的多项式。

带权线性拟阵奇偶

构造方案

维护代入每个 z_i 时的矩阵 $M_1 \ldots M_{Vn+1}$ 以及它们的逆 $N_1 \ldots N_{Vn+1}$。

需要支持对矩阵低秩扰动，并维护其行列式。我们有如下引理：

引理（Matrix Determinant Lemma）若 A, B 可逆，则如下等式成立：

$$\det(A - UB^{-1}V) = \frac{\det(A)}{\det(B)} \det(B - VA^{-1}U)$$

可能在某个时刻出现 M_i 不可逆的情况，即 $\det(M_i) = 0$。

带权线性拟阵奇偶

构造方案

由于 $det(M)$ 为关于 z 的不超过 Vn 次多项式，若我们从 $[0,p)\cap\mathbb{Z}$ 中随机选取 $z_1\dots z_{Vn+1}$，则由 Schwartz-Zippel 引理，$\det(M_i)=0$ 的情况期望会发生 $O\left(\frac{V^2mn^2}{p}\right)$ 次。

在发生 $\det(M_i)=0$ 时更换 z_i 的取值，不断地从 $[0,p)$ 中随机选取新的 z_i，直到 z_i 与其它的 z_j 均不同且 $\det(M_i)\neq 0$ 即可。

若取足够大的 p，则重构的时间复杂度可以忽略不计。

此时已实时维护出了 $\det(M_1)\dots\det(M_{Vn+1})$，每次使用拉格朗日插值法还原出 $\det(M)$ 并进行判断即可。

带权线性拟阵奇偶

时间复杂度

上述算法时间复杂度组成如下：

- 求矩阵中每个元素 $z_1 \ldots z_{Vn+1}$ 处的值（多点求值），$O(Vn^3 \log^2(Vn))$。
- 求每个 z_i 处的行列式，$O(Vn^4)$。
- 插值还原 $\det(M)$，$O(Vn \log^2(Vn))$。

若构造方案，则需要增加：

- 求 $N_1 \ldots N_{Vn+1}$，$O(Vn^4)$。
- 每次低秩扰动后插值还原 $\det(M)$，$O(Vmn \log^2(Vn))$。
- 更新 $\det(M_1) \ldots \det(M_{Vn+1})$ 以及 $N_1 \ldots N_{Vn+1}$，$O(Vmn^3)$。

例题

一般图最大匹配

给定一个无向图，要求选出最多的边满足任意两条选出的边均无公共点。

例题

一般图最大匹配——算法

解决此问题的经典方法为带花树。
若第 i 条边为 (u_i, v_i)，则令 $a_i = e_{u_i}, b_i = e_{v_i}$。
若选出的边有公共点 u，则 e_u 这个向量一定了出现了至少两次，一定线性相关。否则每个 e_u 至多出现一次，一定线性无关。
有趣的是，观察我们得到的矩阵 M，与一般图最大匹配的另一经典解法：Tutte 矩阵 完全一致。
令边数为 n，点数为 m。则直接使用通用算法构造方案的时间复杂度为 $O(mn^2)$。

例题

一般图最大匹配——优化

考虑利用 a_i, b_i 的性质进一步优化，我们有如下引理：

引理（Harvey）若 A 可逆，且 A 与 B 只有集合 S 对应的主子矩阵不同。令 $D = B - A$，则有：

$$(B^{-1})_{T,T} = (A^{-1})_{T,T} - (A^{-1})_{T,S}(I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S})^{-1} D_{S,S}(A^{-1})_{S,T}$$

且 B 可逆当且仅当 $I + D_{S,S}(A^{-1})_{S,S}$ 可逆。

Harvey 引理启示我们，只需要知道局部的信息即可处理局部的修改。

而在一般图最大匹配问题中，(a_i, b_i) 只会影响 M_{u_i,v_i}, M_{v_i,u_i} 这两个位置。于是考虑分治地进行计算。

例题

一般图最大匹配——优化

定义过程 $solve(S,T)$ 表示处理所有满足 $u_i \in S, v_i \in T$ 的二元组，判断它们是否在答案中。

令 $X = S \bigcup T$，则只需要关注 $M_{X,X}$ 以及 $(M^{-1})_{X,X}$。

若 $|S| = |T| = 1$，则直接暴力，时间复杂度为 $O(1)$。

否则将 S 均分为 S_1, S_2，将 T 均分为 T_1, T_2。依次枚举每一对 $(i,j) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$，并进行如下过程：

- 递归 $solve(S_i, T_j)$。
- 在上一步中我们求出了 S_i, T_j 对应的子问题中所有不在答案中的二元组。删除它们后会将 M 变为 $M + D$，显然 D 只可能在 X 对应的主子矩阵内有值。因此利用 Harvey 引理在 $O(|X|^3)$ 的时间复杂度内计算出 D 对 $(M^{-1})_{X,X}$ 的影响即可。

例题

一般图最大匹配——时间复杂度

为了方便分析时间复杂度，不妨令 $S=T$ 或 $S\bigcap T=\varnothing$，令两种情况的时间复杂度分别为 $T_1(|S|),T_2(|S|+|T|)$，则有：

$$T_2(n)=O(n^3)+4T_2\left(\frac{n}{2}\right)=O(n^3)$$

$$T_1(n)=2T_1\left(\frac{n}{2}\right)+2T_2(n)+O(n^3)=O(n^3)$$

因此 $solve(\{1,2,\ldots,n\},\{1,2,\ldots,n\})$ 的时间复杂度为 $T_1(n)=O(n^3)$。

谢谢大家!