IOI2014 中国国家集训队第一次作业第一部分

部分 ACM/ICPC World Finals 试题解析

重庆市巴蜀中学　雷凯翔

2013 年 10 月 2 日

目录

1 ACM/ICPC World Finals 2013 K Up a Tree

1.1 题意概述

在以下三段有问题的代码中

Algorithm 1 前序遍历

function PRE(x)
  PRINT(x)
  $\boxed{\text{甲}}$(x 的左儿子)
  $\boxed{\text{乙}}$(x 的右儿子)
end function

Algorithm 2 中序遍历

function IN(x)
  $\boxed{\text{丙}}$(x 的左儿子)
  PRINT(x)
  $\boxed{\text{丁}}$(x 的右儿子)
end function

Algorithm 3 后序遍历

function POST(x)
  $\boxed{\text{戊}}$(x 的左儿子)
  $\boxed{\text{己}}$(x 的右儿子)
  PRINT(x)
end function

填入恰好两个 PRE 恰好两个 IN 和恰好两个 POST，使得存在一个树，分别调用这三个函数后，得到的先序中序后序遍历为给定的串，并使得输入的树的正确前序中序后序遍历的字典序最小化。

$4 \le$ 给定串的长度 ≤ 26。

1.2 简要分析

填写源代码的情况数只有 $\binom{6}{2,2,2} = 90$ 种，可先枚举。

这样，问题简化为，固定代码，给定一个二叉树调用 PRE, IN 和 POST 函数中某几个的输出，求字典序最小的树使其满足条件。

不妨递归处理，枚举左儿和右儿的元素数量，就可以确定根以及左右儿调用 PRE, IN 和 POST 某几个后的输出，且规模更小。继续分治处理即可。最后合并答案，选择一个字典序最小的树返回。边界条件为输出全部为空串，此时可直接返回空树。

有一些有效的剪枝。

1. 对于同一棵树，若几个函数输出的长度不一，可直接返回无解。
2. 对于同一棵树，若有结点在某些函数的输出中出现，而在另一些函数的输出中未出现，可直接返回无解。
3. 在递归调用时，若对于一棵子树，运行相同的函数，得出的输出序列不同，可直接返回无解。
4. 枚举左右儿元素数后，若输出序列确定的根不一，可直接跳过此次枚举。

5. 若左右儿对应的子问题有一个无解，可直接跳过此次枚举。

6. 记忆化搜索

2 ACM/ICPC World Finals 2008 G Net Loss

2.1 题意概述

给定多项式 $p(x)$ 和常数 $c\,(-1 < c < 1)$，求三个实数 k_1, k_2, b 使得

$$d = \int_{-1}^{c} \left(k_1\left(x-c\right)+b-p(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{c}^{1} \left(k_2\left(x-c\right)+b-p(x)\right)^2 \mathrm{d}x \tag{1}$$

最小化，并输出 k_1, k_2, b 的值。

$1 \le p(x)$的次数 ≤ 10。多组询问。

2.2 简要分析

考虑 d 关于 k_1, k_2, b 的梯度

$$\nabla d = \left(\frac{\partial d}{\partial k_1}, \frac{\partial d}{\partial k_2}, \frac{\partial d}{\partial b}\right) \tag{2}$$

其中

$$\frac{\partial d}{\partial k_1} = \int_{-1}^{c} 2(k_1(x-c)+b-p(x)) \cdot (x-c)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\frac{\partial d}{\partial k_2} = \int_{c}^{1} 2(k_2(x-c)+b-p(x)) \cdot (x-c)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\frac{\partial d}{\partial b} = \int_{-1}^{c} 2(k_1(x-c)+b-p(x))\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{1} 2(k_2(x-c)+b-p(x))\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

由三个方向的偏导随该维的单调性可知，d 取得最小值当且仅当

$$\nabla d = \mathbf{0} \tag{6}$$

即

$$\begin{cases} k_1\int_{-1}^{c}(x-c)^2\,\mathrm{d}x & + & 0 & + & b\int_{-1}^{c}(x-c)\,\mathrm{d}x & = & \int_{-1}^{c}p(x)\cdot(x-c)\,\mathrm{d}x \\ 0 & + & k_2\int_{c}^{1}(x-c)^2\,\mathrm{d}x & + & b\int_{c}^{1}(x-c)\,\mathrm{d}x & = & \int_{c}^{1}p(x)\cdot(x-c)\,\mathrm{d}x \\ k_1\int_{-1}^{c}(x-c)\,\mathrm{d}x & + & k_2\int_{c}^{1}(x-c)\,\mathrm{d}x & + & b\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x & = & \int_{-1}^{1}p(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{7}$$

写成矩阵的形式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{8}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} \int_{-1}^{c}(x-c)^2\,\mathrm{d}x & 0 & \int_{-1}^{c}(x-c)\,\mathrm{d}x \\ 0 & \int_{c}^{1}(x-c)^2\,\mathrm{d}x & \int_{c}^{1}(x-c)\,\mathrm{d}x \\ \int_{-1}^{c}(x-c)\,\mathrm{d}x & \int_{c}^{1}(x-c)\,\mathrm{d}x & 2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{x}=(k_1,k_2,b)^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$\mathbf{b}=\left(\int_{-1}^{c}p(x)\cdot(x-c)\,\mathrm{d}x,\int_{c}^{1}p(x)\cdot(x-c)\,\mathrm{d}x,\int_{-1}^{1}p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

定积分可以使用牛顿—莱布尼兹定理求得。剩下的只需使用高斯消元，人工解方程，或者通过伴随矩阵求逆矩阵等方法求出解向量 $\mathbf{x}$。

计算可得，系数矩阵 A 的行列式 $|A|=\frac{1}{18}(1+c)^3(1-c)^3$，故 $|A|>0$ 恒成立，方程组恒有且仅有一组解。

3 ACM/ICPC World Finals 2003 H A Spy in the Metro

3.1 题意概述

在一个有 N 个站的线形地铁里，某人在第一个站台。T 秒后，他必须到达最后一个站台。列车双向都有发车，但发车时间不一定对称。已知列车时刻表，且双向相邻两站的运行时间恒定，停车时间忽略。求一个乘坐方案，使得 T 秒后，他在准时出现在最后一个站台，

且在站台上的等待时间最少。

所有时刻都是整秒。$N \leq 50, T \leq 200$, 双向列车班数分别 ≤ 50。同向列车发车时间两两不同。

3.2 简要分析

令 $L[i][j]$ 和 $R[i][j]$ 分别表示在时刻 i 秒，站台 j 上是否有列车向左和向右开。根据发车时间表和相邻两站的运行时间，可以轻易处理出 $L[i][j], R[i][j]$。

最后令 $F[i][j]$ 表示该人在时刻 i 秒出现在站台 j 最多需要在站台上等的秒数。状态转移方程

$$F[i][j] = \min \begin{cases} F[i-d(j-1)][j-1], & i \geq d(j-1), j > 1, R[i-d(j-1)][j-1] \\ F[i-d(j)][j+1], & i \geq d(j), j < N, L[i-d(j)][j+1] \\ F[i-1][j]+1, & i \geq 1 \end{cases} \tag{12}$$

其中 $d(j)$ 表示站台 j 到站台 $(j+1)$ 的运行时间。边界

$$F[0][j] = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ +\infty, & j > 1 \end{cases} \tag{13}$$

最终答案为 $F[T][N]$。