存在 解题报告

安徽师范大学附属中学 吴作凡

1 试题来源

陶润洲同学告诉我的题目，不清楚来源。

2 试题大意

有一个$n-1$阶的行列式，第i行第j列$(1 \le i, j \le n-1)$的数是$gcd(i+1, j+1)$的因子数，求它的值。

数据范围：$2 \le n \le 10^{18}$。

3 算法介绍

先考虑一个简单一点的问题：一个n阶的行列式，第i行第j列$(1 \le i, j \le n-1)$的数是$gcd(i, j)$的因子数，求它的值。

可以用行列式的一个性质——两个矩阵的积的行列式等于它们行列式的积。构造一个矩阵A，使得$A_{i,j} = [j|i]$，也就是如果j是i的因子则$A_{i,j} = 1$，否则为0，那么A的转置$A^T_{i,j} = [i|j]$。令$B = AA^T$，可以发现

$$B_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} * A^T_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [k|i][k|j]$$

于是B就是需要求值的行列式，由于A^T是上三角矩阵，行列式的值就是对角线的积，而对角线的值必定为1，所以$det(B) = det(A)det(A^T) = 1$。

回到原题，我们依然可以构造一个矩阵C，$C_{i,j} = [j|i]$，特别的，我们令$C_{1,i} = \mu(i)$，这里的$\mu(i)$是莫比乌斯函数，考虑$D = CC^T$。

可以发现

$$D_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} C_{1,k} C^T_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} \mu^2(k)$$

$$D_{1,i}=\sum_{k=1}^{n}C_{1,k}C_{k,i}^{T}=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)[k|i]=0\ [i!=1]$$

$$D_{i,1}=\sum_{k=1}^{n}C_{i,k}C_{k,1}^{T}=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)[k|i]=0\ [i!=1]$$

$$D_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}C_{i,k}C_{k,j}^{T}=\sum_{k=1}^{n}[k|i][k|j]\ [i!=1,j!=1]$$

所以将D去掉第一行第一列的余子式就是要求的答案，而第一行和第一列只有$D_{1,1}$有值，所以答案就是$\frac{det(D)}{\sum_{k=1}^{n}\mu^2(k)}$，而$det(D)=det(C)det(C^T)=det(C)^2$，于是现在就是要求出$det(C)$。

最简单的求行列式值的方法就是高斯消元成上三角或者下三角矩阵，我们可以考虑用第2行到第n行来将第一行的μ全部消掉，那么答案就是第一行第一列的值。

我们可以用数学归纳法证明——若$\mu(i)$不为0，那么消掉$\mu(i)$会使得$C_{1,1}$加1。

当$i=2$的时候显然成立，现在假设当$2\le i<m$的时候都成立，证明当$i=m$的时候依然成立。

- 若$\mu(m)=0$，不需要消元，显然成立。
- 若$\mu(m)=1$，那么先将第一行减去第m行，那么第一行的某些元素变成了-1，这些元素都是m的因子而且μ值都不为0。一个数如果原来μ就为-1，那么为了消去现在的值会使得$C_{1,1}$加1，否则会减1。因为m有偶数个质因子，那么最终会加2，再减去将第一行减去第m行时减掉的1，$C_{1,1}$加了1。
- 若$\mu(m)=-1$，证明类似。

由于μ函数值只能为0,1或-1，$\mu(x)$不为0贡献为1的话就可以表示为$\mu^2(x)$，那么$det(C)=\sum_{k=1}^{n}\mu^2(k)$，所以答案是

$$\frac{det(D)}{\sum_{k=1}^{n}\mu^2(k)}=\frac{det(C)^2}{\sum_{k=1}^{n}\mu^2(k)}=\sum_{k=1}^{n}\mu^2(k)$$

。

为了计算这个式子，我们有$\mu^2(n)=\sum_{d^2|n}\mu(d)$，证明如下：

设n的质因子分解是$\prod_k p_k^{a_k}$，令$m = \prod_k p_k^{\lfloor a_k/2 \rfloor}$，那么$\mu^2(n) = 1$的充要条件是$a_k = 1$也就是$m = 1$，而$[d^2|n] = [d|m]$，所以

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d|m} \mu(d) = [m = 1] = \mu^2(n)$$

所以答案就变成了

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^2(k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d^2|k} \mu(d) = \sum_{kd^2 \le n} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n^{0.5}} \left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor \mu(k)$$

直接线性筛法求出$\mu(k)$ 可以做到$O(n^{0.5})$，但是要通过全部数据我们需要更优秀的算法。

我们设定一个阈值M，暴力M以内的所有k计算贡献，那么剩下的部分$\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor$都在$\lfloor \frac{n}{M^2} \rfloor$以内，于是可以换一种枚举方式，枚举$\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor$，于是就是要算

$$\sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{M^2} \rfloor} \sum_{k=M+1}^{\lfloor \sqrt{\frac{n}{t}} \rfloor} \mu(k)$$

令$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$，于是就是求$\sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{M^2} \rfloor} S(\lfloor \sqrt{\frac{n}{t}} \rfloor) - S(M)$，而莫比乌斯函数的前缀和我们有一种经典方法计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j|i} \mu(j) = \sum_{ij \le n} \mu(j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \mu(j) = \sum_{i=1}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

而我们知道

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j|i} \mu(j) = \sum_{i=1}^{n} [i = 1] = 1$$

所以

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

众所周知$\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$只有$O(\sqrt{n})$种不同的值，于是可以枚举。在本题中，需要计算$S(k)$的时候，后面枚举的部分的$S$都已经提前算好。

分析时间复杂度，暴力的部分是$O(M)$，而后面枚举的复杂度是

$$O(\sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{M^2} \rfloor} \sqrt{\lfloor \sqrt{\frac{n}{t}} \rfloor}) \approx O(n^{0.25} \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{M^2} \rfloor} t^{-0.25}) \approx O(\frac{n}{M^{1.5}})$$

为了使得两部分复杂度尽量平均，可以令$M = n^{0.4}$，于是总时间复杂度就是$O(n^{0.4})$，可以通过本题。