《tapair》解题报告

一、题目大意

- 给定一个N个点M条边的无向简单图，求有多少对边删去后整张图不连通。
- N<=100000, M<=300000

二、边界情况

- 若原图不连通，则任一对边均符合要求。

三、联系算法

- 关于“连通性”的问题，由于边数最少的连通图即是树，因此不妨先求出图的一颗生成树。
- 求出生成树后，就分为两种情况（因为删去两条非树边显然仍然连通）：
- (1)删去一条树边一条非树边
- (2)删去两条树边

四、初步分析

- 注意到一条非树边若连接树上两点u,v，则它可以替代u,v之间所有的树边。
- 为了讨论方便，我们不妨给每条非树边染上不同颜色，然后对于一条非树边，在它能替代的所有树边上染上它的颜色。

五、具体讨论

- (1)删去一条树边一条非树边
- a.该树边上没有颜色
- 即该树边无可取代，删去后自然不连通
- b.该树边上只有一种颜色，即该非树边的颜色
- 删去了唯一能替代的非树边，自然不连通了
- （易知，若该树边上至少有两种颜色，则至少有两条非树边可以代替它，
- 最多删去一条，图仍然连通）
- (2)删去两条树边
- 我们发现又有一条树边无色等多种情况
- 为了方便，我们单独拎出“至少删了一条无色树边”的情况
- ###
- (0)至少删去一条无色树边
- 显然会导致不连通
- ###
- 下面我们考虑删去两条有色树边的情况
- a.两条树边的色彩集合不同
- 很显然，可以分别取一条非树边“补”好，故不符合要求
- b.两条树边的色彩集合全等
- 很显然，所有可以替代的非树边都跨过了这两条边，
- 故删去后图一定不连通，符合要求

六、初步算法

- 求出图的任意一颗生成树，染色，再按上述做法判断集合全等计数。
- 时间复杂度O(NM) 会超时，需要优化。

七、算法优化

- 我们注意到我们只需要判断两个集合是否全等，这不禁让我们想到使用随机化算法。
- 给每种颜色一个随机数特征值，若干种颜色的并集的特征值即为它们的特征值的异或。
- 判断两个集合是否全等就只需判断它们的特征值是否相等，可以证明出错的概率非常小，可以忽略不计。
- 时间复杂度被优化到了O(N+M)，当然，使用哈希判断两个异或值的相等。
- 若使用平衡树或map判断，复杂度会上升到O((N+M)log(N+M))

八、实现细节

- 一条非树边连接树上两点u,v，设u,v的lca为w，则其需要给u-w,v-w均染上颜色。
- 有一个较简单的方法：使用dfs树作为生成树，这样的好处是：
- 注意到无向图的dfs树只有树枝边和返祖边，所有的非树边都是返祖边，而一条返祖边只需染一段即可。
- 具体地，若一条返祖边从u返到v（v为祖先）
- 只需
- w[u]^=Val;w[v]^=Val;
- 即可。
- 最终，时间复杂度O(N+M)
- 空间复杂度O(N+M)