Water Tanks 解题报告

试题来源

ACM/ICPC World Finals 2007 I

题目大意

给定由 n 个矩形水箱，水箱 i(i<n)与水箱 i+1 用水平管道连通，管道高度递增。所有管道的高度不高于其所连接的水箱高度。水箱 1 开放，其余均封闭。向水箱 1 中倒水，由于水箱中存在空气，在水注入时空气被压缩，气压增大，会使水无法完全充满水箱。注意气体体积与压强的乘积不变。求当水倒到水箱 1 注满时，倒入水的总量。

n<=10，, 每个水箱和管道的高度∈(0,1000000],所有的实数保留一位小数。同时设定开始大气压为 1，一米水柱的压强为 0.097。

考察算法

物理，解方程

算法详解

很明显这是一道多过程物理题。首先气体气压改变的前提是气体与大气分隔，且体积被水压缩，所以我们要对每一段被密封的空气分别讨论。

当 n=2 时，问题非常容易解答。当 n>2 时，注意到这里有一个非常重要的条件，即水管的高度递增。那么我们可以发现在任意一个水箱中的空气存在两种情况，一是与外界和其他气体完全独立，二是与后面所有水箱中的空气相连。这是比较显然的，因为水会因重力向下流，所以在在注满前一个管道前，后一个管道必定不会有水通过，所以之后的管道都是连通的。知道这一点，那么题目就就非常简单了。

设每个水箱的高度为 H_i，每根管道的高度为 h_i。先注 $2*h_1$ 体积的水，使水没过第一根管道，这之后水箱内部的空气就会被密封。我们用 v 表示与最后一个水箱连通的空气体积。开始时 $v=\sum_{i=2}^{n} H_i - h_1, \mathrm{p}=1$。我们可以从水箱 2 开始逐个递推，对在每一个水箱 i(i>1)我们讨论两个过程：

1、水箱 i 的水面从 h_{i-1} 涨到 h_i。

在这个过程中，水面升高的同时水压在变化，我们假设当第一个水箱水面到达顶部时水箱 i 的水面上涨 x 米（以后均如此表示），根据在水面上的压强平衡，我们就能列出方程：$0.097*[\mathrm{H}_1-(\mathrm{h}_{i-1}+\mathrm{x})]+1=\frac{\mathrm{pv}}{\mathrm{v}-\mathrm{x}}$，这是一个二次方程，我们先用 c 表示 0.097，那么可化简得：$cx^2-[c(v+H_1-h_{i-1})+1]x+[c(H_1-h_{i-1})+1-p]v=0$。显然根据题意可以得到 x<v。那么原方程的等式左边随 x 增大而减小，等式右边随 x 减小而增大，所以在(-∞，v)的范围内只存在一个解，所以 x 取方程的较小的根即可。然后若 $x<h_i-h_{i-1}$，说明水箱 i 最后的高度是 x，且水不会到达水箱 i 之后的水箱。否则水箱 i 水面至少上升到 x，同时空气体积减少 h_i-h_{i-1}，气压做出相应改变。

2、水箱 i+1 水面从 0 涨到 h_i。

在这个过程中由于水箱 i 的水面不会改变，所以水压不会改变，所以可列方程：$0.097*(H_1-h_i)+1=\frac{pv}{v-x}$，这是一个一次方程，化简后解出 x，若 $x<h_i$，说明水不会到达水箱 i+1 之后的水箱，否则那么不断注水可以使得第 i+1 水箱的水面超过 h_i，同时空气体积减少 h_i，气压做出相应改变。但于此同时，水箱 i 上方的空气与后面的空气相互独立，可列出方程：$0.097*[H_1-(h_i+x)]+1=\frac{p(H_i-h_i)}{H_i-(h_i+x)}$。与情况 1 同理，x 取根中的较小值。那么 h_i+x 即为水箱 i 的最后高度。同时最后连通的气体的的体积会减少 H_i-h_i，但是气压不会改变。

最后将每个水箱的最后高度相加即是答案（第一个水箱的最后高度是 H_1）。由于运算中包含大量实数除法和开方，需要注意精度问题。