试题泛做

毛啸

1 CLASSICAL PROBLEMS

1.1 Prime Distance On Tree

见我的试题准备题解。

1.2 Music & Lyrics

见我的试题准备题解。

1.3 Future of draughts

Codechef AUG 15

PROBLEM

给定T张图，第i张图有n_i个点和m_i条边且均已给出，每次给定l_i, r_i, k_i，求在编号在$[l_i, r_i]$ 中的图的strong product 中从任一点x 出发走k_i 步以内回到x的方案数。

无重边无自环，最后几个点的数据范围是$T \leq 20, n_i \leq 50, k_i \leq 10000$，询问个数200000。

EXPLANATION

求出所有图的邻接矩阵(对角线上加一)的1到$maxk$ 次方的迹，然后每次询问的时候讲给定区间内的所有的k 次方的迹乘起来，但这样可能会有某一步每一张图都没有移动从而导致重复，可以用容斥原理化成卷积的形式然后FFT。

现在有两个遗留问题，怎么求迹和怎么FFT。

迹可以使用cayley-hamilton定理，先用拉格朗日插值求出特征多项式，然后带入定理可以发现迹满足一个次数是O(图的点数)的齐次递推式，求出前面O(图的点数)项，后面的暴力递推即可。

FFT的话，由于10^9+7不满足NTT的性质，而直接复数肯定会爆精度，一个好的办法就是用三个模数，最后CRT合并即可，用一些好的技巧可以避免高精度。

虽然询问个数很多，但是我们可以对每一种$[l,r]$预处理答案。

时间复杂度$(Tn^4+Tkn+T^2k\log k)$，空间复杂度$O(T^2n)$。

1.4 Simple Queries

Codechef AUG 15

PROBLEM

支持插入删除数，求区间不同数个数和区间不同数个数的一次方、二次方、三次方和查询。

操作数和原来序列中有的数的个数均在100000 范围内，数值有10^9左右的范围。

EXPLANATION

不支持插入删除的话可以通过记录每个数后面第一个和他相同的数的位置，然后用二维线段树解决。

首先可以使用重量平衡树套平衡树解决，重量平衡树中存当前子树中每个节点的后面第一个和他相同的数的位置形成的平衡树，用动态标号来实现序列顺序维护。C++的话找到前面和后面第一个和他相同的数可以用map 套set加$lower_bound$，比较函数直接调用序列顺序查询即可。这个方法会有常数问题。

注意这题可以离线，可以用平衡树预处理将问题转化为给定一个序列，每次把某个序列中某个位置中的数删除（位置不删除），或者在某个位置新增一个数，询问还是和原来一样。

由于没有了插入，可以用树状数组套平衡树解决。

时间复杂度为$O(n\log^2 n)$，空间也为$O(n\log^2 n)$。

1.5 Easy exam

Codechef JULY 15

PROBLEM

掷n次k个面的骰子，a_i 表示第i个面的出现次数，求${a_1}^f{a_2}^f\cdots{a_l}^f$ 的期望模2003的值。

$n,k\le 10^9, lf\le 50000, f\le 1000$。

每个测试点最多50组数据。

EXPLANATION

考虑如果掷出的结果已经确定了，答案个数可以看成是选lf 个位置(可以相同)，必须满足前f个位置都是第一面，然后的f 个位置都是第二面$\cdots$，以此类推的方案数。那么如果掷出结果不确定可以看做是这个东西的期望的和。

那么我们发现，概率相同的所有方案一定是选出的不同的位置个数相同的，我们考虑统计选出的位置个数为任意值的方案数。

我们可以假设，选出的位置一定是一个前缀，而且若$i<j$则位置i一定比位置j 先出现，最后再乘上$n(n-1)\cdots(n-p+1)$(其中p是不同位置个

数)就是答案。

我们发现，每f个位置将序列分成了l块，不同块之间的位置两两不同，所以可以对每一块单独统计答案。

对于每一块，不同数个数为任意值且满足上述选出位置的限制的方案数可以用第二类斯特林数统计。

我们显然可以用FFT卷积起来计算答案，但是注意到如果k不是2003的倍数那么所有高次项最后乘上的系数一定是0，所以我们直接用暴力就可以在$O(Mlf)$时间内解决，其中M是模数。

如果k是2003的倍数，似乎是不可做的，标程其实是有issue的，但是CC上并没有这种数据，鉴于能力问题本人无法处理，如果有人能处理希望能分享。

对每组数据，时间复杂度为$O(Mlf+f^2)$，空间复杂度$O(f^2)$。

1.6 A game on a graph

Codechef JULY 15

PROBLEM

给定一张图，点数n最多2000，两个人轮流移动一个点，每次可以移动到相邻的未经过的点，问从几个点开始可以让先手获胜。

边数不超过$n \times (n-1) \div 2$，保证无重边，且图连通。

每个测试点最多100组数据。

EXPLANATION

用带花树求出最大匹配，如果没有未匹配点则答案为0，否则从所有未匹配点开始进行带花树增广，所有加入过增广队列中的点均可行。

对每组数据，时间复杂度$O(nm)$，空间复杂度$O(n+m)$。

1.7 Chefbook

Codechef JUNE 15

PROBLEM

给定一张点数n不超过100，边数m不超过n^2的图，每个边$x \to y$ 有一个上界$S_{x,y}$和下界$T_{x,y}$，以及权值$L_{x,y}$，上界下界绝对值在1000 以内，权值绝对值在600以内。

每个点x有两个权值P_x, Q_x，这两个权值均在0到10^6之间而且未知。对于每一条边$x \to y$权值将会增加$P_x - Q_y$。你需要对每个点确定这两个权值使得每个点的边权在上界和下界之间且和最小。输出权值，如果有多种方案输出任意一种。

每个测试点最多10组数据。

EXPLANATION

很容易将题目中所描述的模型转化为线性规划，即

$S_{x,y} \le L_{x,y} + P_x - Q_y \le T_{x,y}$

$P_x \ge 0, Q_x \ge 0$。

取对偶线性规划之后，将所有不等式相加会发现得到了$0 \ge 0$，所以所有不等式都是等式，因此我们可以转化为一个费用流问题。

对偶线性规划中的每个未知量对应原线性规划的一个方程，根据对偶线性规划的解与原线性规划的解之间的关系可以得到如果某一个方程所对应的未知量的解不为0，那么这个方程必须成立，并且如果某个原线性规划未知量的取值能够使得这些条件和原线性规划的不等关系均成立，那么这个取值一定对应着一个最优解。

容易发现如果将方程拆成两个不等式，就能够用差分约束系统解决了。

对每组数据，时间复杂度为对n个点m条边且边权绝对值在1000左右的图做费用流的复杂度和做最短路的复杂度之和，空间复杂度为$O(n+m)$。

1.8 Connect Points

Codechef JUNE 15

PROBLEM

给定一张n个点m条边的图，问它是不是最大平面图(无论怎么加边都不是平面图的平面图)。

每个测试点有6000个数据，且每个数据$n \le 70000, m \le 300000$，所有数据的$n$ 之和不超过700000，无重边无自环。

EXPLANATION

特判掉$n \le 2$的情况，m必须等于$3n-6$ 不然不是最大平面图。

然后我们可以直接调用平面图判定算法解决，但太麻烦。

我们考虑到最大平面图的外部一定是一个三角形，否则的话可以将这个多边形的一个点向内凹陷，就可以加一条边了。

而且，平面图中的任何一个面都是三角形，这个显然。

对于任何一个三角形，都存在一种平面嵌入的方式使得它是外部面，这个考虑你把平面图的任意平面嵌入画在一张可以任意变形的纸上，然后把这个面画的很大，其他面画得很小，且让画的痕迹能够在纸的另一面看到，把这个平面图中这个面挖空，然后将他的外面想办法折进来（纸需要发生很大的变形，且需要一定的想象力），我们就得到了一个这个面是外部面的平面嵌入。

任意找一个面的方法很简单，由于$m = 3n-6$，所以度数最小的点度数不超过5，而每个点少在一个面上，所以我们可以在常数时间内找到一个面。

找到一个面之后，肯定可以找到一个以这个面为外部面的平面嵌入，否则肯定不满足条件。

我们考虑给这个多边形的外部不断删边保证任意时刻双联通，首先我们固定外部三角形的一条边AB，我们发现外部面非A非B的点中一定存在一个点他的度数为2，删掉这个点之后，外部面减少了这个点，增加的点就

是这个点所有相邻的还未进入外部面的点。

这个操作，我们只需要$O(1)$支持加元素删元素和找任意元素，即可线性解决，这个很简单，只需要用一个队列维护所有可能还在集合中的点，再用一个数组维护每个点是不是在集合中，然后取元素的时候不断暴力弹出元素直到当前元素在集合中为止。

当然如果找不出度数为2的点，肯定不满足条件。

当然如果顺利完成也不代表图满足条件，我们要按着删点顺序的逆序，加入点，并且同时维护外部面上的点的**顺序**。实际上我们也可以用这个操作完成平面嵌入。如果新加入的点的相邻的在外部面上的邻居，是外部面中x到y 的路径上的一段，那么这个点就合法并且很容易找到平面嵌入，加入点的时候把这一段删掉再加即可，如果不是一段肯定不满足条件。

如果顺利完成可以宣告图满足条件，因为我们已经找到了平面嵌入（虽然没必要真的求出来）。

想要做到线性，方法就是每次遍历当前点相邻的点的时候如果找到了一个在路径中的点，就暴力dfs把所有和他在同一段的和当前点相邻的点都拿出来，如果做完之后继续遍历点还找到了一个在路径中的点就不满足条件。

判断相邻可以用$hash$，但是用set用多一个log的复杂度也是可以通过的。

时间复杂度，每组数据$O(n+m)$或$O((n+m)\log m)$，空间复杂度$O(n+m)$。

1.9 Chef and Balanced Strings

Codechef MAY 15

PROBLEM

给定一个字符串，每次询问对于一段区间$[l,r]$和k，所有满足$l_0 \leq l_1 \leq r_1 \leq r_0$且$[l_1,r_1]$这个字符串满足每个字符的出现次数均是偶数的所有$(l_1,r_1)$的$(r_1-l_1)^k$和。强制在线。

最多100000个数据。

所有数据的字符串长度之和不超过100000，字符串仅含小写字母，$k \leq 2$。

EXPLANATION

将每个位置表示成一个二进制数表示每个字母出现次数的奇偶性，那么题目转化为区间内选两个权值相同的位置。

先把权值离散化使得权值范围在100000以内。

考虑分块，如果我们能$O(1)$实现对一个区间左边或者右边添加一个数并维护答案，就可以很容易预处理每两段之间的答案，每次询问的时候暴力添加即可，复杂度将为$O(n\sqrt{n})$。

按顺序维护每个权值的每次出现的位置，前缀和、前缀二次方和。

如果我们随时知道每个权值当前最早的出现位置和最晚的出现位置，答案很好更新。

而权值的最早位置和最晚位置，在更新的时候可以通过记录每个数是他所对应的位置所对应的第几次出现实现。

然而只是更新时的实现，如何实现初始化，也就是我们要知道询问时最初的两端之间最早的和最晚的出现位置。

通过记录每个权值在每一段的开头的最后出现位置，很容易解决这个问题。

每组数据的时间复杂度和空间复杂度均为$O(n\sqrt{n})$。

1.10 Counting on a directed graph

Codechef MAY 15

PROBLEM

给定一个有向图，问其中有多少对点(x, y)满足存在两条路径，一条终点是x号点，另一条是y号点，起点均为1号点，且它们之间只有1号点是公共点。

EXPLANATION

求出dominator tree，有且仅有根和所有点以及根的两棵不同子树中的点可能是答案。

时间复杂度和空间复杂度均为$O(n+m)$

1.11 Black-white Board Game

Codechef APRIL 15

PROBLEM

给定N，两个人博弈，对于一个排列P，如果对于所有i满足$l_i \le P_i \le r_i$则该排列可行。如果该排列的逆序对为偶数则第一个人可取，否则第二个人可取。每一个回合每一个人都可以取一个可以取的排列，如果某个回合只有一个人取则该人胜利，如果同时取完则平局。问最终游戏结果。

对于最后一个subtask，每个测试点15组数据，每个数据中$1 \le n \le 10^5$。

EXPLANATION

易知题目要求的东西就是对第i行，只有第l_i列到第r_i列为1，其他列为0的矩阵的行列式的奇偶性。

暴力消元显然是不可行的。

假设当前消到了第i个未知量，那么考虑所有需要消元的行中第i列非0的行，我们不妨将当前r最小的行作为主行，那么消元之后每一行仍然是连续一段1，且l 统一右移。

可以用可并堆维护以每一列作为l的行中r的最小值，选主元就是取出最小值，消元就是将当前堆剩余的元素合并到另一个堆中。

空间复杂度$O(n)$，时间复杂度$O(n\log n)$(若使用左偏树)。

1.12 Little Party

Codechef APRIL 15

PROBLEM

给定n个长度为k的二进制串，你每次可以选k个位置的一个集合以及这个集合中的每个位置对应的二进制位，覆盖所有2^k 个二进制串中的满足所有对应位置的二进制位都是你确定的值的二进制串。求覆盖掉给定的n个二进制串而不覆盖其他的二进制串至少需要的步数。

数据组数不超过120, $n \leq 1000, k \leq 4$。

EXPLANATION

集合只有3^k个，二进制串只有2^k个，直接使用暴力搜索并加上一系列剪枝即可通过本题。

空间复杂度$O(3^k + M(search))$，时间复杂度$O(n + 3^k2^k + T(search)$，其中$M(serach)$和$T(search)$ 分别表示搜索需要的空间复杂度和时间复杂度。

1.13 Counting on a Tree

Codechef MARCH 15

PROBLEM

给定一棵大小为n的带权树，要求支持修改边权，对开始的树和每次修改边权后的树询问权值gcd为1的路径条数。

修改数Q不超过100，$n \leq 10^5$，边权w为不超过10^6的正整数。

EXPLANATION

莫比乌斯反演得答案就是每一个边权的答案乘上该边权的μ 的和。

对于每一个边权，不考虑修改过的边，用并查集连上所有涉及到的边顺便统计答案。然后对每个询问的答案，对涉及到的所有边重新暴力合并一遍之后顺便统计答案即可。

空间复杂度$O(n+maxw)$，时间复杂度$O((maxw+Q\alpha(n))\times Q+n\alpha(n))$，其中$maxw$ 为边权的最大值。

1.14 Random Number Generator

Codechef MARCH 15

PROBLEM

已知$A_1, A_2, \cdots, A_k$，$C_1, C_2, \cdots, C_k$，且对$i > k$，$A_i = A_{i-1} \times C_1 + A_{i-2} \times C_2 + \cdots + A_{i-k} \times C_k$，求$A_N$。

$k \leq 30000, N \leq 10^{18}$。

EXPLANATION

题目即为给出常系数齐次递推式求某一项，用基于$cayley-hamilton$定理和多项式除法的经典算法即可。

时间复杂度$O(k \log k \log N)$，空间复杂度$O(k)$。

1.15 Devu and Locks

Codechef FEB 15

PROBLEM

求可以有前导零的所有n位数中，数位和不超过m且是p的倍数的数的个数。

对于最后一个subtask，$n \leq 10^9, p \leq 16, m \leq 15000$。

EXPLANATION

考虑所有的10^x对p取模，一定会形成循环，如果是混循环可以先暴力前面的非循环部分。

对于循环部分，每一个循环中的点对应着一系列10^a的集合，他们模p的值相同。

单独这一部分位置，数位和为特定值的取值方案可以利用生成函数+FFT算出来。

对于所有的集合，很容易用二维FFT合并答案。

时间复杂度$O(p^2m(\log m + \log p) + pm \log n)$，空间复杂度$O(pm)$。

1.16 Payton numbers

Codechef FEB 15

PROBLEM

定义一种新的数集，每个数是一个三元组(a, b, c)，乘法定义如下：

```
def multiply((a1,b1,c1), (a2,b2,c2)):

    s = (a1a2 + b1b2 + c1c2) + (a1b2 + b1a2) + (c1 + c2)
    t = floor[s/2] + 16(c1 + c2) - c1c2
    A = (t - 2(a1b2 + b1a2) - (a1c2 + c1a2) + 33(a1 + a2)
           + (b1b2 - a1a2))
    B = (t - 5(a1b2 + b1a2) - (c1b2 + b1c2) + 33(b1 + b2)
           + (2b1b2 + 4a1a2))

    if s is even:
        return (A-540,B-540,24)
    else:
        return (A-533,B-533,11)
```

定义$zero$为一个数z使得它与这个数集中的任何数相乘都是z，可以证明z唯一且$z = (4, 4, 4)$。

定义$unity$为一个数u使得它与这个数集中的任何数相乘都是那个数，可以证明u 唯一且$u = (4, 4, 24)$。

定义$unit$为一个数a使得存在这个数集中的一个数b使得$ab = u$。

定义这个数集中的质数为一个不能分解成两个非$zero$、非$unit$的数的乘积的数。

给定T个数(a,b,c)分别判断这些数是否是质数。

$T \leq 10^4, |a|, |b| \leq 10^7, c \in (11, 24)$。

EXPLANATION

可以证明这个运算满足交换律和结合律。

进一步地，令w为满足$w = w^2 - 3$的一个数，那么这个数集和欧几里得整环$Q[w]$形成同构：$(a,b,c) -> (33 - 2a - c) + (b - a)w$，转化为这当中的质数检测。

若$x = a + bw$，令$Nx = a + ab + 3b^2$，可以证明：

若x是整数，即$b = 0$，那么x是质数当且仅当a是质数, 且$|x|$模11为$2, 6, 7, 8, 10$。若x不是整数，那么x是质数当且仅当Nx是质数。

用$Miller - Rabin$质数判别法即可。

空间复杂度$O(1)$，时间复杂度$O(T \times t(primechecking))$, 其中$t(primechecking)$表示给上述的几个数判断是否是质数所需的时间。

1.17 Ranka

Codechef JAN 15

PROBLEM

构造一个9×9的棋盘上用围棋规则轮流走10000步使得不出现重复状态(局面和轮到谁走均相同)的方法。

EXPLANATION

容易构造出或者比较好的随机生成出解，如果时间过长或者正确性具有很大的随机因素那么打表即可。

打表的话时空复杂度均为$O(step)$，其中$step$表示步数。

1.18 Xor Queries

Codechef JAN 15

PROBLEM

给定一个序列，要求支持加数，删除最后连续的一段数，询问区间k大值，询问区间与给定值异或值最大的数，询问区间小于给定数的数的个数。

操作数和数的大小均在5×10^5以内。

EXPLANATION

用可持久化线段树树可以支持除了异或值最大之外的询问，而$trie$树可以支持异或值最大，如果我们把线段树的权值区间改成$[0, 524287]$，就可以把线段树当$trie$树使用了。

1.19 Divide or die

Codechef DEC 14

PROBLEM

用尺规作图N等分N度角，或者证明不可分。

EXPLANATION

可以证明如果$N \mod 3 = 0$则不可分否则可分。

可以利用$5 = 1^2 + 2^2$从而根据勾股定理构造出$\sqrt{5}$，由于36度角的余弦为$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$故可以构造出36 度，用等边三角形很容易构造出30度，从而3度角很容易作出。

利用圆上等角对等弦，容易作出$N \mod 3$度角，从而可以作出1度角，根据一个1 度角很容易做出所有的N个一度角。

空间复杂度$O(1)$，时间复杂度$O(N)$。

EXPLANATION

用可持久化线段树树可以支持除了异或值最大之外的询问，而$trie$树可以支持异或值最大，如果我们把线段树的权值区间改成$[0, 524287]$，就可以把线段树当$trie$树使用了。

1.20 Course Selection

Codechef DEC 14

PROBLEM

有n门课，总共有m天，每门课在某一天要么不能上，要么能上且有一个权值，有k个限制条件都是某门课必须在某门课之前的某天上，每天可以上多门课，你要上完所有课问最大权值。

$n, m, k \leq 100$，权值的绝对值不超过100。

EXPLANATION

用经典的最小割思路，首先将权值取一个相反数再加上一个值转化为最小权值，每门课拆成m个点依次代表每一天，将其中对应m条边依次定为每一天的权值，限制条件就是对每一个i将前一个软件第i天对应的点和后一个软件第$i+1$天对应的点连边。

直接跑最小割即可。

时间复杂度$O(maxflow(nm, (n+k)m))$，其中$maxflow(n, m)$表示给n个点，m 条边的图做网络流需要的时间和空间。

1.21 Chef and Churu

Codechef NOV 14

PROBLEM

给定一个长度为n个序列和n个询问，每个询问都是一段区间的和。

m个操作要求支持修改序列中的某个元素或查询下表在某个区间中的询问的答案的和。

$n, m \leq 10^5$。

EXPLANATION

不妨设$m = O(n)$。

本题有多种做法，其中一种做法是按修改分块，对于块内的修改，每个修改对当前查询的贡献是这个修改的位置在查询的询问区间中被涉及到的次数和，对于块外的可以直接$O(n)$预处理。如果块的大小为$O(\sqrt{n})$，那么要预处理的次数是$O(\sqrt{n})$ 次，总复杂度为$O(n \log n)$，对于块内要询问$O(\sqrt{n})$次，总复杂度为$O(n\sqrt{n}Q)$，其中Q为每次询问的复杂度。

直接用主席树等数据结构，$Q = O(\log n)$。

我们考虑继续离线，现在问题转化为$O(m\sqrt{n})$个查询询问区间中某个位置的出现次数，首先转化为两个询问前缀的查询之差，然后从前往后扫一遍序列，将询问转化为一个地方加一一个地方减一，查询转化为询问前缀和，将序列分块，维护每一个整块的前缀和和每一个位置到对应块首的前缀和，修改是$O(\sqrt{n})$的，但查询是$O(1)$ 的，修改只有$O(n)$个，可以承受。

时空复杂度$O(n\sqrt{n})$。

1.22 Sereja and Order

Codechef NOV 14

PROBLEM

有n个程序和两台电脑，每个程序在两台电脑上的执行时间不同，现在你要把每个程序在每台电脑上均执行一次，一台电脑不等同时执行两个程

序，每个程序每次执行必须一次执行完，且一个程序不能在某个时刻同时被两台电脑执行。

设计一个方案能够用最少的时间在每台电脑上执行完每个程序。

有多组数据，数据的n之和不超过200000，每个数据的n不超过10000，每个程序的执行时间不超过100000。

EXPLANATION

猜测答案是某个程序在两台电脑上的执行时间之和与某台电脑上执行每个程序的时间之和的最大值。

如果答案是前者，很好构造方案。

如果答案是后者，随机两个电脑的执行序列，对于总执行时间较长的电脑连续执行，总执行时间较短的直接贪心执行，可以证明很快可以找到一个不超过答案的方案。

对每个数据，空间复杂度$O(n)$，时间复杂度$O(T \times n)$，T是随机的次数。

1.23 Children Trips

Codechef OCT 14

PROBLEM

给定一棵树，边上有权，权值为1或2。m 次询问询问两点之间，如果每次可以走不超过p的距离，至少需要多少步才能到达。

$n, m \leq 100000$。

EXPLANATION

如果$p < \sqrt{n}$，那么可以对每个p单独预处理所有询问。

对于$p \geq sqrtn$，可以暴力往上走。

对于第一种情况，按逆dfs序，扫到每个点的时候处理处以这个点为lca的所有询问，用并查集维护到达离lca距离小于p的点的步数和到达的点，然后很好计算答案。

对于第二种情况暴力走到离lca距离小于p的点，计算步数，然后很好计算答案。

现在只有一个问题，如何计算每个点往根走不超过p的距离能到达的最远点。

直接倍增是$O(\log n)$的。

考虑按深度分块，处理出一个点走深度以内的步数到达的点和块的倍数步到达的点，这个似乎很好处理，比如我要计算走$a+b$步到达的点，就是走a步到达的点走b步到达的点，但是这样是不对的，因为可能走a 步有剩余，走b步也有剩余，这个剩余还能走一些点，但是注意到权值只有1和2，所以最多多走一个点，因此再判断一下能否继续往上走一步即可。

这样我们就把$O(n\log n)$预处理$O(\log n)$ 询问的东西变成了$O(n\sqrt{n})$预处理$O(1)$询问的东西了。

时空复杂度均为$O(n\sqrt{n})$。

1.24 Union on Tree

Codechef OCT 14

PROBLEM

给定一棵n个点的树，m次询问给出一些点和这些点能到达的距离，求所有能被到达的点的个数。

$n, m \leq 50000$，询问给出的总点数$qtot \leq 500000$。

EXPLANATION

考虑建出虚树，我们考虑如果a离b距离为c，且a能到达的距离是d，那么距离b不超过$d-c$的点都能到达，我们把$d-c$看成a给b的贡献，如果b实际能到的距离小于这个值，那么b实际上能到达的距离可以看成更远的$d-c$。

这样我们可以设计一个类迪杰斯特拉算法求出每个点实际上能到达的距离，不妨将每个点到达的距离设为实际能到的距离。

对原树的每条边我们新建一个点拆成两条边，那么对于虚树中的一条边，一定可以找到一个点mid，两个端点对他的贡献相同，不妨把他能到达的距离设为这个贡献。

可以证明答案就是距离每个点不超过他能到达的距离的点数减去所有mid的距离他不超过他能到达的距离的点数。

询问距离一个点不超过某个距离的点数可以用树分治在每次$O(\log n)$时间内解决。

注意新加的点不能算进答案，这个很好解决。

空间复杂度$O(n \log n)$，时间复杂度$O((n + qtot) \log n)$。

1.25 Rectangle Query

Codechef SEP 14

PROBLEM

Q次操作，每次可以添加一个矩形，或者询问与给定矩形有公共部分(包括只有公共边界或者公共点)的矩形有多少个，或者删除一个已经添加的矩形，所有矩形边与坐标轴平行。

$Q \leq 100000$，坐标范围为$[1, 10^9]$。

EXPLANATION

删除和添加可以看成加一和减一。

对于一个矩形，答案就是他下边y坐标大于他上边y坐标，左边x坐标大于他右边x坐标......等四个情况的答案，当然这样可能算重，我们要减去右下角在他左上角的左上，右上角在他左下角的左下......等四个情况的答案，用二维线段树或者树状数组套线段树即可。

时空复杂度均为$O(Q \log Q)$。

1.26 Fibonacci Numbers on Tree

Codechef SEP 14

PROBLEM

给定一棵大小为n的树，有m个操作，每个操作可以将一条链上的点依次加上斐波拉契数列，即第一个数加上1，第二个加1，第三个加2，第四个加3，以此类推，注意顺序是有影响的；也可以询问链和，以某个点为根某个点的子树和，或者将当前状态变为某次操作后的状态。

$n, m \leq 100000$。

EXPLANATION

斐波拉切数可以转化为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$的幂的形式，因此只要维护一个数的幂即可，这个很好直接打标记解决。

为了支持这几个操作，可以建出树链剖分的结构然后先重儿子后轻儿子的顺序遍历使重链变为dfs序列中的一段，而子树和显然也可以用区间询问解决。直接用线段树维护可以支持所有操作。

为了减少常数，可以标记不下传，每次询问的时候直接将标记的贡献算到答案中即可。

设$m = O(n)$，则时空复杂度均为$O(n \log^2 n)$。

1.27 Team Sigma and Fibonacci

Codechef AUG 14

PROBLEM

求$\sum\limits_{x+y+z=n, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} 6Fib_xFib_yFib_yxyz \mod m$。其中$Fib_x$表示第$x$个斐波拉切数，初值为$Fib_0 = 0, Fib_1 = 1$。

$n \leq 10^{18}, m \leq 10^5$，多组数据，数据的$m$和不超过$10^6$。

EXPLANATION

答案为$((5n^2+35n^3-4n)Fib_n-36n^2Lucas_n)\div 500$，$Lucas_x$表示第$x$个卢卡斯数。

用矩阵乘法计算两种数即可，除以500可以先将m乘500算完后再做除法。

时间复杂度$O(\log n)$，空间复杂度$O(1)$。

1.28 Push the Flow!

Codechef AUG 14

PROBLEM

给定一棵仙人球(每个点最多属于一个环的联通图)，无重边无自环，支持修改边权询问两点间最大流。

EXPLANATION

最大流即为最小割，考虑找出每个环上的最小边，然后将其删去并将该环上其他边均加上这条边的权值，那么我们只需要询问链两点间的最小边即可，都容易用LCT解决。找最小边可以对每个边用一个set方便的维护。

时间复杂度$O(n\log n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.29 Game of Numbers

Codechef JULY 14

PROBLEM

给定两个长度为n的序列a,b，A集合为所有满足的$a_i<b_j$的(i,j)，B集合为所有满足$a_i>b_j$的(i,j)，每次可以从两个集合中各选一对数并将它们

从对应的集合中删除，而且假设选的是(i,j)和(p,q)，则要求$gcd(a_i,a_j,a_p,a_q)\neq 1)$，求最多能选多少次。

不超过10组数据，$n\leq 400$，数的大小在1到10^9之间。

EXPLANATION

考虑网络流，对于A集合的每个(i,j)，起点向对应的点连边，对应的点向$gcd(a_i,a_j)$的质因子对应的点连边，对于B 集合的每个(i,j)向终点连边，让$gcd(a_i,a_j)$ 的质因子对应的点向它连边。

显然只需要考虑出现过的质因子，这些质因子一定是$2n$个数中的某一个数的质因子。

可以证明，范围内的数的质因子数的最大值$maxcnt$不会超过9，因此这样建出来的图点数边数都不多。

时空复杂度均为$O(n^2+maxcntn)$个点，$O((maxcnt+1)n^2)$条边上做网络流需要的时空复杂度。

1.30 Sereja and Equality

Codechef JULY 14

PROBLEM

定义两个序列A,B为几乎相等的，就是对每一个i，A序列中小于A_i的元素和B 序列中小于B_i的元素个数相同。

定义函数$F(A,B)$，当A和B几乎相等时返回1，否则返回0。

定义$A[l,r]$为A的下标在$[l,r]$的数形成的序列。

问对于每一对n个元素的排列P_1,P_2，和每一个区间$[l,r]$，且满足$P_1[l,r]$的逆序对个数小于等于E，$F(P_1[l,r],P_2[l,r])$ 的和是多少。

10000次询问，$n\leq 500,E\leq 1000000$。

EXPLANATION

容易设计一个$O(n^3)$的DP，求出给定长度逆序对为给定值的排列有多少个，离线处理询问很容易对每个询问的每个长度求出排列个数。

假设询问长度为n，当前排列长度为m，且个数为tot，那么对答案的贡献是$((n-m)!\binom{n}{m})^2(n-m+1)tot$。

时间复杂度$O(n^3)$，使用滚动数组的话空间复杂度为$O(n^2)$。

1.31 Two Companies

Codechef JUNE 14

PROBLEM

给定一棵大小为n的树，和两个大小分别为m_1，m_2的路径集合，每条路径有一个权值，求选出一系列路径，使得他们的权值和最大且任意两个不属于同一个集合的路径不相交。

$n \leq 100000, m_1, m_2 \leq 700$，权值在1到$10^6$之间。

EXPLANATION

判断出两条路径是否相交之后很容易建模跑网络流。

两条路径是否相交的判断就是考虑他们lca中较深的一个，如果在另一条路径上则相交。

时间复杂度$O(m^2\log n + n\log n + maxflow(m_0+m_1, m_0m_1))$，空间复杂度$O(m^2 + n\log n + maxflow(m_0+m_1, m_0m_1))$

1.32 Sereja and Arcs

Codechef JUNE 14

PROBLEM

按顺序给定平面上n个点，每个点有一个颜色，以相同的颜色的两个不同点往同一象限作半圆，问相交的半圆有多少对。

$n \leq 100000$。

EXPLANATION

首先考虑容斥，减去不交的半圆，不交的半圆有包含和相离两种，相离的很好统计，就是对每个点右端点在它左边的半圆的数量乘上它右边和它颜色相同的数量。

对于包含的半圆，考虑分块，如果两种颜色出现次数都不超过T，那么总数不多可以用二维数点的方法解决。如果出现次数超过了T，那么颜色个数不多。我们再次容斥为减去所有相交或者相离的半圆，对每种颜色统计出每个点左边有多少个该颜色，然后求出相同颜色两两相乘的结果，再减去对应的半圆的两个点相同的方案，注意到相离的情况算了两次也要减去。此外要注意避免重复统计，对于某种颜色，如果它统计过，后面统计的时候就忽略这种颜色即可。

若$T = \sqrt{\frac{n}{\log n}}$，时间复杂度最优，为$O(n\sqrt{n \log n})$。

空间复杂度$O(n)$，时间复杂度$O(n\sqrt{n \log n})$。

1.33 Dynamic Trees and Queries

Codechef MAY 14

PROBLEM

给定一棵带点权的树，支持加点，删子树，子树统一加一个值，询问点权和。

树的大小n和操作数m都不超过100000，强制在线。

EXPLANATION

用支持区间操作的平衡树(splay, treap等)维护dfs序即可，也就是欧拉回路树。

时间复杂度$O(n + m \log n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.34 Sereja and Subsegment Increasings

Codechef MAY 14

PROBLEM

给定两个长度为n的序列，每个数在0到3 之间，每次你可以将第一个序列一段区间的数每个数都加一，要求最后两个序列在模4意义上相等。

$n \leq 100000$，数据组数不超过10。

EXPLANATION

在模四意义上先做出两个序列的差，然后将每个数减去前一个数，第一个数不变。

考虑直接贪心就是每个数减去前一个数如果为正数就统计进答案，那么就是新序列每个正数的和。

但是由于模4的原因，有时候给某些位置加上4再贪心答案更优。那么差分之后的序列肯定是有一些加四有一些减四且任何前缀加四比减四要多。

所以考虑贪心，扫一遍这个序列，对于正数，直接先把答案加这个数，-1不管，对于-3，-2，我们统计个数，对于2如果有没用过的-3就将答案减一并记录次数，相当于把这个-3加四变成1并把2变成-2，同理对于3，如果有没用过的-3 答案减二，有没用过的-2 答案减一，如果有2 用过-3那么答案减一，相当于把这个操作撤除并将相应的-3 用到这个3上面。

对于每组数据，时空复杂度均为$O(n)$。

1.35 Chef and Tree Game

Codechef APRIL 14

PROBLEM

给定一棵有根树，每条边可以是黑色和白色，每次黑方可以删掉黑色边，白方可以删掉白色边，并将不与根相连的部分移除，无法移动的人负，问黑方先手和白方先手时的必胜方。

数据组数不超过1000，有根树的大小和不超过100000。

EXPLANATION

根据状态设出surreal number，求出每个子树x对应的局面对应的surreal number，记为f_x，以及子树加上子树根往父亲连的边合起来的局面对应的surreal number，记为g_x，显然f就是每个孩子的g之和。可以证明，由f求g的方法是，如果根往父亲的边是surreal number的左集合对应的玩家可以删的边，设a是最小的满足$g + a > 1$ 的正整数，则$f = \frac{g+a}{2^{a-1}}$，如果是右集合则设a 是最小的满足$g - a < -1$的正整数，则$f = \frac{g-a}{2^{a-1}}$。

为了避免精度可以用高精度，具体来说，小数部分用二进制存，整数部分用十进制，用set 存二进制中1的位置，负数的处理很简单，可以保证小数部分是正的，整数部分是不超过这个数的最大整数，首先可以发现整数部分不会超过n，然后二进制的1 的个数是子树大小集合的，因此可以用启发式合并。

时间复杂度$O(n \log^2 n)$，空间复杂度$O(n \log n)$，如果启发式合并后清空原集合则空间复杂度$O(n)$。

1.36 Make It Zero 3

Codechef APRIL 14

PROBLEM

给定一个长度为N的序列，每个数小于p，每次可以选一段在模p意义下加上一个数，用最小的操作个数将序列变为全0。

$N \le 10^{17}, p \le 10$，数据组数不超过100，序列有一定的生成方式，为不超过100个满足一阶非齐次递推方程的序列相连。

EXPLANATION

考虑处理出差分(第一个数不变)，可以发现问题转化为将差分后的序列分为最多的集合使得每个集合的和为p的倍数。

只有1到$p-1$中每个数的出现次数是有用的。

注意到，一阶非齐次递推方程具有不超过p的循环节，容易处理出差分。

假设p是10我们将1和9,2和8,3和7,4和6,5和5合并，就会变成一个个数不超过一的数和最多四个其他的数。

考虑用所有和为p的倍数且不含有和为p的倍数的子集的集合，不超过30个。

一个简单的方法是单纯形，但是单纯形不一定正确，可能无法AC。

还有一类方法是类似单纯形的调整，即选出一系列集合的并，判断是否可以用更多的集合的并来代替。

时空复杂度根据选择的方法有所不同。

1.37 Attack of the Clones

Codechef JUNE 11

PROBLEM

对于n元布尔函数，定义A为变量全0时的值为0的函数，B为全1为1的函数，C 为所有变量取反之后值取反的函数，D为所有的由部分未知量的

异或值异或0或1的式子构成的函数，询问某个含有集合并集合交集合补集合差运算的式子的值。

$T = 100$次询问，$n \leq 100$，式子长度l 不超过100。

EXPLANATION

注意到$ABCD$可以表示为16个不相交的函数集合的并，求出这些集合的方法很简单，求出他们的交集的组合，然后用$n = 3$和$n = 4$找出每个集合的大小，然后容斥即可。

然后直接用16位的二进制运算带入式子运算，最后统计答案的时候加起来即可。

时间复杂度$O(Tl + 16\log n + 16^2 + 4 \times 16)$，空间复杂度$O(16 + l)$。

1.38 The Baking Business

Codechef OCT 11

PROBLEM

有S次操作，每次可以是出售或者询问。

出售的格式为：

I 产品编号[.大小编号] 省编号[.城市编号[.地区编号]] 性别年龄出售数量

这一行包括了出售的产品细节，位置细节以及顾客性别和年龄，以空格相隔。产品细节例如6.2 表示第6号产品，2号大小。下一个是位置例如8.18.4代表8号省的18号城市的4号区域。然后顾客的性别为M或者F，年龄从1到90。注意所有的编号都是从0开始。还需要注意方括号内的部分是可选的，因为某些出售的这些信息丢失了。出售数量不会超过100。

询问的格式为：

Q 产品编号[.大小编号] 省编号[.城市编号[.地区编号]] 性别起始年龄[-结束年龄]

这询问在该范围下的出售总数。如果可选部分缺失的话，那么它意味着询问在该限制下的所有出售总数。对于年龄参数来说，如果结束年龄缺失，那么这个询问只询问年龄=起始年龄的顾客的购买总数，否则就是所有在此年龄范围内的顾客的购买总数。比较特殊的是如果产品编号为-1，意思为所有的商品，类似的如果省份为-1那么就是所有的省份。除此之外其它参数不会为-1。

$S \leq 200000$。有10种产品，每种都有3种不同的大小。有10个省份，每个省份可以被划分为20个城市，每个城市又可以被划分成5个地区。

EXPLANATION

对每种类型维护一个树状数组，缺省类型的解决方案是加入的时候将所有该类型和该类型的缺省类型都修改。

时间复杂度$O(S \log S)$。

1.39 Observing the Tree

Codechef FEB 13

PROBLEM

给定一棵树，包含n个结点。结点从1到n标号，每个结点都有一个整数，初始时等于0。然后车夫让你实现m个操作。

第一种操作是修改：给你整数X,Y,A,B。将A加到结点X的整数上，然后将A+B加到从X到Y路径的第二个结点上，然后将A+2*B加到从X到Y路径的第三个结点上，以此类推。

第二个操作是询问：给你整数X,Y。输出从X到Y 的路径上所有结点的整数和。

第三个操作是滚回：给你一个整数X。所有结点上的整数都返回到了第X次修改操作后的状态。如果X是0，则它们全变成最开始的0。

$n, m \leq 10^5, 0 \leq A, B \leq 1000$。

EXPLANATION

此题是Fibonacci Numbers on Tree的子问题，使用类似的方法即可。

设$m = O(n)$，时空复杂度均为$O(n \log^2 n)$。

1.40 Sine Partition Function

Codechef FEB 13

PROBLEM

给定M, N, X，求

$$\mathrm{f(M,N,X)} = \sum_{k_1+k_2+\cdots\ldots+k_M=N} \sin(k_1 X)\sin(k_2 X)\ldots\ldots\sin(k_m X)$$

$k_1, k_2, \ldots\ldots, k_M$都是非负整数

。

$M \le 30, N \le 10^9$，数据组数不超过10。

EXPLANATION

设dp[i][j]表示f(i, j, X)，则：

$dp[i][j] = dp[i-1][j-1] \times \sin x + dp[i-1][j] \times 2\cos x - dp[i-2][j]$。

使用矩阵乘法加速转移即可。

对于每组数据，时间复杂度$O(M^3 \log N)$，空间复杂度$O(M^3)$。

1.41 Card Shuffle

Codechef JAN 12

PROBLEM

n张牌叠成一叠面向下被放置在桌子上。这叠牌按照价值排列。最上面的牌价值为1，最下面的价值为n。m次给定A, B, C，并进行如下操作：

从牌堆顶端拿走A张牌。

再从牌堆顶端拿走B张牌。

将第一步拿走的A张牌放回到剩下的牌堆上面。

从牌堆顶拿走C张牌。

将第二步你拿起的B张牌一张一张放到牌堆顶。

最后，将剩下的C张牌放回到牌堆顶。

将一堆牌从顶端拿走不会改变牌的顺序。整堆牌是同时移动的而不是一张一张动的。唯一的例外是第五步，你需要将牌从顶端一张一张放回牌堆。

$1 \le n, m \le 100000, 0 \le A, C < n, 0 < B, A + B, C + B \le n$

EXPLANATION

直接使用平衡树维护即可，注意边界情况。

设$m = O(n)$，时间复杂度$O(n \log n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.42 Find a special connected block

Codechef APRIL 12

PROBLEM

给出一个$n \times m$的矩阵，每个格子要么是空的，要么是障碍，要么有一个颜色，并且每个格子都有一个选择的代价。求代价最小的包含了至少k种颜色的连通块，且不包含障碍。

$n, m \le 15, k \le 7$。

EXPLANATION

将每种颜色用一个1到k的随机颜色代替，并用斯坦纳树解决颜色数量很小的新问题，多次随机之后取最小值，可以证明平均随机大约160次左右即可得到最优解。

时间复杂度为斯坦纳树的时间复杂度乘以随机次数，空间复杂度为斯坦纳树的空间复杂度。

1.43 Counting D-sets

Codechef APRIL 12

PROBLEM

给定n, d，求n维空间中，切比雪夫距离最远的两个点的切比雪夫距离恰好为d的坐标为整数且不重合的点集等价类个数，两个点集是等价的当且仅当一个点集可以由另一个通过平移得到。

10组数据，$n \leq 1000, d \leq 10^9$。

EXPLANATION

恰好为d的集合个数可以转化为小于等于d的减去小于等于$d-1$的。

直接容斥，令dp[i]表示有i维，每一维至少有一个点坐标为0，且点坐标均不超过d的方案数，那么$dp[i] = 2^{d^i} - \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} dp[j] 2^{d-1^{i-j}}$。

时空复杂度均为每组数据$O(n^2)$。

1.44 Annual Parade

Codechef SEP 12

PROBLEM

给定一张n个点m条边的边带权图，k次询问，每次给定C，可以在图中补上任意数量条权值为C的边，并用很多个至少经过一条边的环覆盖图的所有点，问最小边权和。

$n \leq 250, m \leq 30000, k \leq 10000, C \leq 10000$。

EXPLANATION

将每个点i拆成i_0和i_1两个部分，i_0 与起点，i_1与终点之间连一条容量为1，费用为0的边。用$floyd$求一遍两两之间的最短路，如果i到j的距离为dis，则i_0与j_1之间连一条权值为1，费用为$dis-C$ 的边。

跑一遍费用流，注意到只有dis小于C的增广轨会增广，记录所有增广轨的费用和，维护一个前缀和即可。

时间复杂度为$O(n^3+k+T(maxflowmincost))$，空间复杂度$O(n^2+M(maxflowmincost))$，其中$T(maxflowmincost), M(maxflowmincost)$分别表示做费用流的时空复杂度。

1.45 Knight Moving

Codechef SEP 12

PROBLEM

有一个其实在一张无限大的方格棋盘上移动，开始在(0,0)，要求移动至(X,Y)格：每一步，它只能从(u,v)格移动至(u+Ax,v+Ay) 或者(u+Bx,v+By)。棋盘上有k个障碍格。你的任务是计算骑士有多少种到达指定位置的方案。我们认为两种方案不同，当且仅当它们的步数不同，或者存在某个i使得两种方案中，骑士在第i步到达的格子不同。输出方案数模1000000007的值。注意，骑士在到达(X,Y)格后还可能继续移动。

如果方案数无穷输出-1。

不超过5组数据，所有坐标的绝对值a不超过500，$k \leq 15$。

EXPLANATION

如果两个向量不能互相线性表出，那么求出目标状态的坐标，如果非实数则无解，否则用容斥计算即可，注意坐标范围不一定在500以内。

否则的话，相当于是一维可以移动两种向量，可以将无穷的棋盘只建出中间一段长度不长的一部分，设长度为l，建出图之后，如果与起点和终点同时相连的部分形成环则无穷解，否则的话用拓扑排序排出非环部分，然后统计方案数。

注意特判零向量，向量相同等特殊情况。

对每组数据，空间复杂度为$O(a^2+l)$，时间复杂度为$O(a^2+l+k^2)$。

1.46 Two Roads

Codechef SEP 13

PROBLEM

给定一个点集，求两条直线，最小化所有点到两条直线的距离的最小值的平方和，输出最小的平方和。

点集大小n不超过100。

EXPLANATION

可以证明，答案一定是找出一个点做互相垂直的两条线形成一个坐标系，取一三象限和二四象限的点作为两个集合，每个集合都距离一条直线最近。

枚举的方式可以是枚举两条直线确定一个轴，再扫描另一个轴，注意边界细节。

取直线可以通过数学计算解决，这里不再赘述。

时间复杂度$O(n^3)$，空间复杂度$O(n)$。

1.47 Room Corner

Codechef FEB 13

PROBLEM

用一种格式给出一个环形，每次可以交换环上相邻的两个点，两个点被交换之后会同时开始向对面移动，同时交集点集不能有交集。多次询问给定两个点相遇的最小时间。

环大小$n \leq 625000$，询问次数T不超过10000。

EXPLANATION

处理出环形之后，对于每个询问相当于找某两个相邻点的中点，最小化中点到两个点的距离的最大值，很容易用二分解决。

空间复杂度$O(n)$，时间复杂度$O(n + T \log n)$。

1.48 Selling Tickets

Codechef MAY 12

PROBLEM

给定一张二分图，每个X部的点度数为2，求X部最小的没有完备匹配的部分。

不超过15组数据，每组数据X部点数≤ 500，Y部点数≤ 200。

EXPLANATION

将X部每个点看做一条边，两个端点为其连的两个Y部的点的编号，则可以证明点数最小的满足边数大于点数的导出子图的大小即为所求。

可以证明答案只有两种可能：两个点之间的三条不相交路径，两个没有公共边的环。

第一种情况的解决办法是枚举起点和终点，删掉起点对终点做bfs，然后枚举起点的相邻边，取其对应的相邻点到终点的距离加一最小的三个点的和更新答案。

第二种情况就是枚举一个点之后求bfs树，枚举不在bfs树上的边，取两个端点到根的路径的并的大小最小的两个更新答案。

时间复杂度$O(n^2(n+m))$，空间复杂度$O(n+m)$。

如果此题改为边数大于点数加一或者加上其他不大的值，且n和m较小且数据组数不多，可以通过枚举边加斯坦纳树解决，这里不再赘述。

1.49 Little Elephant and Boxes

Codechef MAY 12

PROBLEM

有n个盒子，每个盒子打开有p_i的概率获得钻石，否则会获得v_i的钱。

有m个物品，每个物品要一定数量的钱和钻石。

问期望最大能获得的物品个数。

$n, m \leq 30$。

EXPLANATION

考虑meet in the middle，先用dp处理出dp[i][j]表示钻石数量不超过i获得j个物品要的最少钱数。

接着不妨设$n = 30$，那么我们枚举后20个盒子的状态，存进一个集合，再枚举前10个盒子的状态，枚举钻石数量和物品数，那么后20个盒子获得的钱数是一个区间，用支持区间询问的结构维护集合即可，比如将集合排序。

时间复杂度为$O(2^{20} \times \log 2^{20} + 2^{10} \times 30m)$，空间复杂度为$O(nm+2^{20})$。

1.50 Little Elephant and Colored Coins

Codechef MARCH 13

PROBLEM

有n种类型的硬币，每种硬币都有无限个，每种硬币有一个颜色和一个面额，面额C不超过200000。

m次询问要凑出给定数量的钱最多可以用多少种不同的颜色的硬币。

$n \leq 30, m \leq 200000$。

EXPLANATION

假设第一种硬币的面额为x，如果p元钱能凑出则$p+x$元也能凑出，考虑模x的剩余系，每个剩余系都是有一个最小的能凑出的钱数，之后每一种钱数都能凑出。

考虑颜色，记录一下每个剩余系要给定数量的颜色至少要多少钱数，考虑对颜色相同的统一先在相同颜色个数中转移，最后再更新颜色数加一的答案。转移形成很多个环，对每个环找出最小值然后扫一遍即可完成转移。

可以使用滚动数组优化空间。

时间复杂度$O(n^2C+mn)$，空间复杂度$O(nC)$。

1.51 Dynamic GCD

Codechef APRIL 12

PROBLEM

给定一棵树，要求支持链加和链gcd。

操作数m和树大小n均不超过50000。

EXPLANATION

差分之后变成单点修改，然后成为了Fibonacci Numbers on Tree的子问题，可以使用类似方法。

假设$m = O(n)$，则时间复杂度为$O(n \log^2 n)$，空间复杂度为$O(n)$。

1.52 Substrings on a Tree

Codechef MARCH 13

PROBLEM

给定一棵大小为n的有根树，树上每个点上有一个字母，这棵树的子串为所有从某个点不断走到它的孩子所经过的点的字母相连形成的串，求不同子串个数和不同子串集合中m次询问给定字母大小排列顺序下的第k大子串。

$n \leq 250000, m \leq 50000$，输出总长度$L$ 不超过800KB。

EXPLANATION

首先给这个有根数建后缀自动机，建立的方法是按深度顺序，可以参考刘研绎的2015年集训队论文。

后缀自动机的节点和转移之间形成了一个dag，对每个节点，求出从他能走出的不同子串个数，这个就是他所有能转移到的节点的不同子串个数和加一，可以在拓扑排序之后通过一个简单的DP 解决。

对每个询问，我们在后缀自动机上一位一位贪心即可。

时间复杂度$O(26(n + L) + m)$，空间复杂度$O(26n)$。

1.53 Chef and Graph Queries

Codechef MARCH 14

PROBLEM

给定一个n个点m条边的无向图，q次询问如果只保留一段区间中的边图的连通块个数。

最多1000组数据，所有数据的n, m, q之和均不超过200000。

EXPLANATION

用动态树维护关于编号的最大生成树，将询问按右端点排序，每次扫描到某个询问的右端点时只要看当前生成树中编号在左端点之后的边的个数，很容易用树状数组维护。

假设$m, q = O(n)$，对于每组数据时间复杂度$O(n \log n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.54 A New Door

Codechef JAN 13

PROBLEM

给定一个矩形和n个圆，求所有的圆的圆并的边界在矩形内的边界的周长。

最多1000组数据，$n \leq 1000$，所有数据的n之和不超过5000。

EXPLANATION

直接套用$O(n^2 \log n)$的圆并算法即可，去掉边界之外的部分非常好处理。

对于每组数据，时间复杂度$O(n^2 \log n)$)，空间复杂度$O(n)$。

1.55 The Street

Codechef MAR 14

PROBLEM

给定两个长度为n的序列，每次可以给第一个序列区间加一个等差序列，或者给第二个序列区间对一个等差序列取max，或者询问某个位置两个序列对应的数的和，共m次操作。

$n \le 10^9, m \le 3 \times 10^5$。

EXPLANATION

区间加等差数列很好用线段树维护，下面重点讨论如何区间对等差序列取max。

还是像原来一样打标记，注意到一个区间中如果原有的等差数列恒大于等于或者恒小于等于新加的标记那么可以直接更新，否则的话我们可以令它的标记为区间中点中较大的一个，然后剩下一个只需要往一个子树下传，这样每次打标记的时间是$O(\log n)$ 的。

询问的时候直接取访问到的每个点的标记的max 即可。

时间复杂度$O(m \log^2 n)$，空间复杂度$O(m \log n)$。

1.56 Count on a Treap

Codechef FEB 14

PROBLEM

维护一个大根堆Treap，要求支持插入一个给定键值和权重的数，删除一个点，或者询问两点之间的距离。

操作数m不超过200000。

EXPLANATION

考虑按键值排序之后形成的序列。

询问两点之间的距离可以通过求lca转化为求一个点的深度，lca 就是两个键值形成的区间中中权重最大的点。

注意到如果y是x的祖先，不妨设y的键值小于x的键值，那么区间$[y, x]$中不能有中间的点的权重比两个端点大，所以我们可以将问题转化为从x出发往左和往右的所有前缀最大值的个数，相当于每个点比作高度为权重的大楼。

用线段树维护序列，维护右孩子从左孩子的最大值开始的前缀最大值个数，更新的时候很容易做到$O(\log n)$，总时间复杂度$O(\log^2 n)$，询问的过程就是更新的过程。

注意预先离散化优化常数。

时间复杂度$O(m \log^2 n)$，空间复杂度$O(m)$。

1.57 Two k-Convex Polygons

Codechef JUNE 13

PROBLEM

给定n个棍子的长度和整数k，求选出2k个棍子拼成两个凸多边形。使得两个凸多边形都恰好有k跟棍子组成,且任意相邻的边都不共线。只需要输出选择方案或判断无解。

$n \leq 1000, k \leq 10$。

EXPLANATION

形成如题所述的凸多边形就是要满足最大边小于其他边的和。

按长度排序，如果两个边集不相交很容易用循环解决，如果相交那么枚举长度为$2k$的边集然后暴力枚举$\binom{2k-1}{k}$种可能性即可。

空间复杂度$O(n)$，时间复杂度$O(k(n^2 + n\binom{2k-1}{k}))$。

1.58 Query on a tree VI

Codechef DEC 13

PROBLEM

给定一棵n个点的树，每个点有黑白两种颜色。m次操作，每次可以修改一个点的颜色，或者询问一个点的同色连通块大小。

$n, m \leq 10^5$。

EXPLANATION

用LCT维护这棵树，对每个点，维护它的子树中能通过同色点到达它的黑点和白点个数。修改的时候直接找到它往上第一个和他父亲颜色不同的，很容易用链修改维护这两个值。询问的时候找到与他颜色相同的最远的祖先询问这个值即可。

假设$m = O(n)$，时间复杂度为$O(n \log n)$，空间复杂度为$O(n)$。

1.59 Evil Book

Codechef MARCH 12

PROBLEM

有n个厨师。第i位厨师有C_i点烹饪力量和M_i点魔法力量。可以通过在一次烹饪战斗中打败第i位厨师获得M_i点魔法力量，同时需要付出C_i点努力。通过消耗X点魔法力量，可以选择某个i并把第i位厨师的烹饪力量C_i和魔法力量M_i都乘以$\frac{1}{3}$。一位厨师可以被乘以多次$\frac{1}{3}$但只能打败一次，求获得666 点魔法力量需要的最少努力。

$n \leq 10, 10 \leq X < 666$, $M_i, C_i \leq 10^9$，不超过5组数据。

EXPLANATION

考虑直接搜索，每次搜索下一个打的厨师和使用魔法力量的次数，达到666就更新答案。

有几个显然的剪枝，首先打每个厨师的时候，必须满足消耗的魔法力量小于损失的魔法力量。

其次，由于魔法力量单调不减少，所以使用魔法力量的次数也一定可以做到单调不下降，使用魔法次数相同的厨师的标号也可以做到单调不下降。

可以将每个数预先乘上一个43046721(3^{16})，避免实数运算和精度误差。

可以证明，加上上述两个剪枝之后时间复杂度最坏为$O(4^n)$。

对于每组数据，时间复杂度为$O(4^n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.60 Gangsters of Treeland

Codechef NOV 13

PROBLEM

给定一棵n个点的树，初始每个点颜色不同，m次操作，每次可以将某个点到根的路径染为同一种颜色，或者询问某个点到根颜色变化了多少次。

最多15组数据，每组数据$n, m \leq 100000$，所有的n和m加起来不超过200000。

EXPLANATION

到根的路径染为一种颜色可以看做LCT的access 操作，所以我们要做的实际上是，维护LCT上每个点到根经过的不同链的个数。这个可以在access的时候进行子树修改完成。

子树修改很容易通过线段树维护dfs序完成。

假设$m = O(n)$，时间复杂度$O(n \log^2 n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.61 Different Trips

Codechef DEC 12

PROBLEM

给定一棵n个节点的有根树，定义一个点的权值为它的度数，一个人现在从任意一个点开始往根走任意多步，问形成的权值序列有多少种可能。

$n \leq 100000$。

EXPLANATION

可以用类似后缀数组的倍增的方法，将每个点往根的路径形成的字符串排序，那么答案就是所有字符串长度和减去排序后相邻两个的LCP。

相邻两个的LCP可以通过记录每次倍增之后的rank数组，然后按二进制位从高到底，如果两个的rank相同那么答案加上二的对应次幂并将两个点均往根移动二的对应次幂步。

时空复杂度均为$O(n \log n)$。

1.62 Find a Subsequence

Codechef FEB 12

PROBLEM

给你一个长度为n的数组A[0],A[1],...,A[N-1] 和一个字符串B，B是“12345”的排列。你需要找到一个长度为5的A的子序列，该子序列中的元素互不相等，并满足他们的相对大小和B一样。

不超过20组数据，$n \leq 1000$。

EXPLANATION

枚举B中的2和4在原序列中的下标，那么可以确定1、3、5的范围，然后我们贪心的选择最前面的满足条件的下标即可。具体实现可以离散化后预处理每个前缀小于等于某个特定数的位置个数，然后每次二分。

对于每组数据，时间复杂度$O(n^2 \log n)$，空间复杂度$O(n^2)$。

1.63 Counting The Important Pairs

Codechef JAN 14

PROBLEM

给定一张n个点m条边的连通简单图，问删掉两条边之后图不连通的方案数。

$n \leq 100000, m \leq 300000$。

EXPLANATION

找出一棵生成树，然后对每个非树边赋一个随机权值，对树边权值定为覆盖它的非树边的权值异或和，那么两条边如果一条权值为零或者权值异或和为零均为不连通的方案。

用map存下不同权值的个数即可。

时间复杂度$O(n + m + m \log m)$，空间复杂度$O(n + m)$。

1.64 Graph Challenge

Codechef FEB 14

PROBLEM

给定一张图，按规定顺序dfs，求每个点是几个点的半必经点。

EXPLANATION

直接求dominator tree即可。

将$O(\alpha(n))$忽略不计，时空复杂度均为$O(n+m)$。

1.65 Short II

Codechef DEC 11

PROBLEM

给定p(一个质数)，问有多少对$a, b(a > p, b > p)$满足ab被$(a-p)(b-p)$整除。

不超过5组数据，$1 < p < 10^{12}$。

EXPLANATION

用$a-p$替代a，$b-p$替代b再经过变形，题目转化为问有多少对正整数(a, b)满足$ab|p(a+b+p)$。

若a, b均不是p的倍数，即$ab|(a+b+p)$转化一下即为$b = (a+p)/(ak-1)$。

设$d = ak-1$，考虑分$b > d$和$b \leq d$两种情况考虑。

若$a = b$则只有可能$a = b = 1$，不妨设$a < b$。

如果$b > d$，那么我们枚举d，则由于$(d+1)$是a的倍数，所以$d+1$要大于等于a，而$a+p$又是d的倍数，所以a是d的某个倍数减去p。这样设$x = \lfloor \frac{p}{d} \rfloor$，那么$a$只能是$(x+1)d-p$或$(x+2)d-p$，也就是$b = x+1$或者$x+2$，可见$d$是$O(\sqrt{p})$级别的。

同理，若$b \leq d$，枚举b，由于$a = bd-p$，而$a < b$，所以d的值唯一确定，b的范围也不大。

然后对于每个解判定一下即可，最后注意乘以二再加一。

对于a, b有一个为p的倍数的情况，可证明情况数为均不为p的倍数的情况的两倍。

对于a, b均为p的倍数的情况，答案只有5种可能。

对于每组数据，时间复杂度$O(\sqrt{p})$，空间复杂度$O(1)$。

1.66 Petya and Sequence

Codechef DEC 13

PROBLEM

给出一个长度为n的序列A[0..n-1]，问是否存在一个长度为n的序列B[0..n-1]满足：

1. 至少存在一个$0 \le i \le n-1$满足$B[i] \neq 0$
2. 对于任意$0 \le j \le n-1$满足$\sum_{i=0}^{n-1} A[i] * B[(i+j) \bmod n] = 0$。

最多100组数据，对于每组数据$n \le 3 \times 10^4$，对于所有数据n的和不超过1.5×10^5。

EXPLANATION

题目即为一个circulant matrix是否满秩，根据circulant matrix的有关性质，设$f(x) = \sum_i A[i]x^i$，那么如果$f(x)$和$x^n - 1$互质，则满秩。

用Cyclotomic polynomial可以证明，只需要枚举n的所有约数d，将f(x)乘上$\prod_{d0|d, d0\ is\ prime}(x^{\frac{d}{d0-1)}}$之后，判断是否是$x^d - 1$的倍数即可。

判断是否是$x^d - 1$的倍数很简单，只需要对所有i，将第i项系数的值加到第$i \bmod d$项上，再判断多项式是否为零即可。

对于每组数据，空间复杂度为$O(n)$，时间复杂度为$O(n + \rho(n))$，其中$\rho(n)$表示n的约数和。

1.67 Martial Arts

Codechef NOV 12

PROBLEM

有两支分别有n个选手的队伍参加这次比赛。我们称Chef的队伍是主队，对方是客队。作为组织者要安排n场比赛。一场比赛两支队伍都要有一名选手参赛。每一个选手都要恰好参加一场比赛。Chef对所有的选手都非常了解，他想安排每场比赛的配对来最大化主队和客队的得分差。我们令主队最终得分为H，客队最终得分为G。那么Chef就是想要最大化H-G。如果他能有多种方式达到目的，则他还想要最大化H。然而，他不是唯一的有隐藏动机的人。当所有比赛的配对公布后，客队教练能编个理由——他们有个选手受伤了。这意味着这个选手所在的比赛就取消了，这场比赛也不会算分。当决定哪个选手不出战时，客队教练有着与Chef类似的目的。他的目的是最大化G-H，其次最大化G。求怎样安排比赛最优。

$n \leq 100$。

EXPLANATION

客队删的一定是最大边，考虑如果确定了比赛安排，那么一定删的是最大边。

所以我们枚举哪条是最大边即可，相当于每次新加一条边维护最大匹配，考虑KM，每次更新标号的时候用边权减去对应的点标号更新，然后BFS找增广路即可。

双关键字可以用pair解决，注意不删边以及双关键字的一些其他细节。

时间复杂度$O(n^4)$，空间复杂度$O(n^2)$。

1.68 Shortest Circuit Evaluation

Codechef AUG 11

PROBLEM

给定一个布尔表达式和每个布尔变量的分布列，求最优的短路求值方案下最少的期望计算次数。

不超过50组数据，布尔表达式长度n不超过30000，变量个数不超过1000。

EXPLANATION

直接在表达式树上DP，记录每棵子树的最少期望计算次数s和为true的概率p，如果是or则按$\frac{p}{s}$从大到小排，如果是and则按$\frac{1-p}{s}$从大到小排即可。

对于每组数据时间复杂度$O(n \log n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.69 Hypertrees

Codechef DEC 11

PROBLEM

一个3-超图类似与一个普通的图,只不过其中的边都连接三个点。

一个3-超树是一个去掉任意一条边都以后都不连通的3-超图。

给定n,问有几种含有n个带标号的点的本质不同的3-超树。

不超过15组数据，$n \leq 17$。

EXPLANATION

范围很小，考虑打表。

对于一棵超树，我们可以把它分成若干个点双联通分量，即对于每一个分量都有不经过任意一个点超树依然联通。可以发现对于一棵点双联通的点数大于3的超树，每一条边连接的三个点中都恰好有一个点为叶子节点。我们把那个节点删掉，这样就得到了一个常规的点双联通图，原来的超图的点数对应着这个图的点数+边数。可以用很多方法求出这样的图的个数。然后也可以用很多种方法合并这些答案获得最终的表。

对于每组数据，时空复杂度均为$O(1)$。

1.70 Queries on tree again!

Codechef MAY 13

PROBLEM

有一个包含n个节点和n条边的简单无向连通图。

题目保证所有环的长度为奇数。

定义节点u到v的最短路径为连接u, v的边数最少的路径。

实现以下两种操作：

$f\ u\ v$：对u到v的最短路径上的所有边的权值取相反数。

$?\ u\ v$：在u到v的最短路径上，找到一个连续的边的集合，使得集合中边的权值之和最大。换句话说，定义u到v的最短路径$a_1, a_2, \cdots, a_k(a_1 = u$且$a_k = v)$，你需要找到$a_i$和$a_j(i \le j$，使得路径$a_i, a_{i+1}, \cdots, a_j$上所有边的权值之和最大。

EXPLANATION

注意到链上维护只需要维护前缀最大值，后缀最大值和中间一段的最大值即可。树上很好用树链剖分维护。

对于有一个环的情况，也很好用线段树加分情况讨论解决。

本题可以用link/cut cactus推广到仙人掌上。

时间复杂度$O(n\log^2 n)$，空间复杂度$O(n)$。

1.71 Luckdays

Codechef NOV 11

PROBLEM

定义一个数列S：

S[1]=A

S[2]=B

$S[i] = (X \times S[i-1] + Y \times S[i-2] + Z) \bmod P, i \geq 3$

对每个询问L[i],R[i],求出满足$L[i] \leq k \leq R[i]$且S[k]=C的k的个数。

不超过2组数据，对于每组数据询问个数Q不超过20000，$L[i], R[i] \leq 10^18$，$p \leq 10007$且p为质数，$A, B, X, Y, Z < P$。

EXPLANATION

如果X = 0或者Y = 0那么直接找循环节即可。

否则矩阵一定可逆，考虑大步小步算法。

我们要解的问题是：

满足$uA^x = v$的x的最小值。

如果我们能对任意v求出这个值，首先v等于u就能求出循环节，容易看出由于矩阵可逆所以循环一定不会是ρ型，且对于给定v，最小值就是循环节内唯一的值，求出来之后用二分即可实现询问。

注意到v有p种可能，我们要枚举，对于每次枚举，我们每次走$O(\sqrt{p})$步，复杂度是$O(p\sqrt{p})$，预处理则要预处理前$O(p\sqrt{p})$项，复杂度一样。

具体方法就是每次我们在等式右边乘上一个逆元，求出v乘上这个逆元所得的向量，将u乘左边的矩阵得到的向量存入hash或者map中每次询问即可。

对于每组数据，时间复杂度$O(p\sqrt{p} + Q \log R)$，其中R表示$R[i]$的最大值，一种可能的空间复杂度为$O(p^2)$。如果采用memset则时间复杂度可能含有一个常数非常小的$O(p^2)$。

1.72 Billboards

Codechef JULY 11

PROBLEM

求长度为n的每一个长度为m的子序列之和均不小于k且总和最小的01序列个数。

$n \le 10^9, m, k \le 500$。

EXPLANATION

考虑将序列每m个一行写成一个矩阵。

设$res = n \bmod m$，若$res + k \le m$，那么每行前res个一定是0，否则，每行后$m - res$个一定是1，这样我们只需要处理$m|n$的情况。

我们发现，每一行的和一定是k，且对于任意i，前一行前i个当中1的个数一定不会多于后一行前i个当中1的个数，这样，我们把每行k个1的位置依次写下来，形成一个k列的矩阵，那么这个矩阵行单调不增，列单调增，符合semistandard young tableau的形式，可以用hook length formula解决，即答案就是：

$\prod_{i,j} \frac{r-i+j}{m-i+j}$。

注意到这个式子抵消之后项数很少，可以很快的计算。

假设$k = O(m)$，则根据具体实现方法时间复杂度$O(m)$或者$O(m^2)$，空间复杂度$O(1)$。

1.73 Count Special Matrices

Codechef JUNE 13

PROBLEM

一个$n \times n$的矩阵是特殊的，当且仅当它是对称矩阵且仅包含并且非对角线上包含了所有1到$n-2$的正整数，对角线上的元素为0。并且对于所有$1 \le x, y, z \le n$有$a[x][y] \le a[z][y], a[x][y] \le a[x][z]$中至少一个成立。

给定n，询问满足条件的矩阵个数。

不超过100000组数据，$n \leq 10^7$。

EXPLANATION

答案就是$\frac{n!(n-1)!}{3\times 2^{n-1}}(\frac{3}{2}n-2-\sum_{1\leq i\leq n-1}\frac{1}{i})$，预处理即可。

时空复杂度均为预处理的$O(n)$，对于每组数据只需要$O(1)$的时间解决。

1.74 Fibonacci Number

Codechef OCT 13

PROBLEM

F_i表示斐波拉切数列，给定C,P，求最小的n满足$F_n = C \bmod P$，或者判定无解。

不超过100组数据，$11 \leq P \leq 2*10^9$，且P为质数，P的个位数字为1或者4或者9。

EXPLANATION

易知$\sqrt{5}$在模意义下一定存在，求出通项公式之后是一个类似$x^n - -x^{-n} = a$的形式，这是一个关于x^n的二次方程，解出$x = \frac{a+\sqrt{a^2\pm(-1)^n\times 4}}{2}$。

枚举n的奇偶性然后离散对数即可。

对每组数据，时空复杂度均为$O(\sqrt{P})$。

1.75 Expected Maximum Matching

Codechef JUNE 12

PROBLEM

随机生成一个二分图：左边第i个点和右边第j个点之间有边的概率为f[i][j]。求这样生成的二分图的最大匹配的期望值。

左边的点数n不超过5，右边的点数m不超过100。

EXPLANATION

考虑压位DP，压位的状态是当前左边的每个集合是否满足与该集合内的点相邻的点不超过集合大小，每次枚举当前点连边状态之后，枚举所有满足条件的集合并将这个集合并上所有连边的点之后形成的新集合置为满足条件即可。

考虑如果一个集合被可行的集合包含，那么它一定是可行的，所以有用的状态数不多，可以通过本题。

如果用map等数据结构维护，时间复杂度$O(sta \log sta)$，空间复杂度$O(sta)$，sta表示状态总数。

1.76 Ciel and Earthquake

Codechef MARCH 12

PROBLEM

给定一张$n \times m$的网格图，每条边不存在的概率均为p，求$(1,1)$和(n,m)联通的概率。

最多50组数据，$n \le 8, m \le 10^{18}, 0.1 \le p \le 1$。

EXPLANATION

首先假设m很小，我们可以按n连通性DP，可以发现有用的状态数S只有三千四百多，预处理转移即可。

若m很大，那么到(n,x)和到$(n,x+1)$的概率之比在x很大的时候都是恒定的，可以直接通过很小的x和增长率算出答案，x取40即可满足精度要

求。

对于每组数据，时间复杂度$O(nxS)$，空间复杂度$O(S)$。

1.77 Misinterpretation 2

Codechef JAN 12

PROBLEM

对全是小写字母的字符串定义一种变换，将所有在偶数位置的字母（假定字母位置从1开始）按顺序移到单词开头，然后剩下的字母按照出现顺序往后依次排列下来。

对长度在$[L, R]$的所有只含小写字母的字符串，有多少个变换之后和原来相同？

不超过5组数据，$L, R \le 10^{10}, R - L \le 50000$。

EXPLANATION

考虑枚举长度。

如果长度为奇数最后一个不变可以转化为偶数，否则设长度为x，对于i会变成$2i \bmod (x+1)$。

设$ord(x)$为2在模x意义下的阶大小，这样答案就是对所有x的约数y的$\frac{\phi(y)}{ord(y)}$之和。

阶的大小就是每个对质因子的次幂算出来再取个gcd，单个质因子的次幂的阶可以通过枚举所有质因子并不断除去看看是否2的对应次方仍然为1。

找质因子的方法就是筛法，枚举质数并把给定范围内的数筛一下即可。

最后可能剩下一个大质数，这个质数减一的质因子可以转化为x本身减去一个不超过$\sqrt{R}$的数的质因子。

这样就可以计算答案了。

对于每组数据，时间复杂度$O(\frac{R^{\frac{3}{4}}}{\log R}+\sqrt{R}\log R+(R-L)(\frac{\sqrt{R}}{\log R}+\log^2 R))$，空间复杂度$O(\sqrt{R}+(R-L)\log R)$。

1.78 Trial of Doom

Codechef JULY 11

PROBLEM

一个$n \times m$的矩阵，每个格子可以是蓝色或红色。现在你在（1,1），出口在（n,m），你需要到达终点并使得最终所有格子都是蓝色的。每次可以移动到八个相邻的格子上，且每离开一个格子，这个格子和它周围的四个格子会改变颜色。现在给出房间的颜色情况，问是否可行。

最多50组数据，红色格子数量$k \le 10000, min\{n,m\} < 40, max\{n,m\} \le 10^9$。

EXPLANATION

不妨假设$n < m$。

在$m > 1$的时候可以证明路径是不重要的，只需要询问是否有一些格子的集合使得每个格子对应的五个格子改变一遍颜色之后，最终红色格子的集合就是给定集合。

每个红色格子(i, j)可以转化成(i - 1, j), (i - 1, j - 1), (i - 1, j + 1), (i - 2, j)四个红格子，最后转化到第一行。

于是我们维护每行每列的一个红色格子对应的第一行的红色格子的集合，我们发现由于$m < 40$，这个东西具有周期性，循环节c很小，可以计算。

计算完之后只需要计算是否能在第$n+1$行加一些红色格子使得可行，也就是问一个向量是否能被一些向量线性表出，容易解决。

$m = 1$的时候翻转的格子数量需要和$n-1$奇偶性相同，枚举第一个格子是否翻转，容易计算。

对于每组数据时间复杂度$O(mc + k + m^2)$，空间复杂度$O(mc + k)$。

1.79 A Game of Thrones

Codechef AUG 12

PROBLEM

一个数字游戏。规则如下：

1. 一开始，有很多个数字写在一张纸上(可能有相同数字)。
2. 在第一轮先选择一个纸上的数字，把它称做游戏的当前数字。
3. 从第二轮开始执行当前回合的人都按如下操作：我们称现在的当前数字为u。将u从纸上擦去。然后选择另一个纸上的数字v 作为当前数字，v要满足与u 刚好相差一个质因子。对于两个数u，v刚好相差一个质因子需满足的意思是，不妨设$u < v$，则$u|v$，且$v \div u$是一个质数。
4. 无法完成操作的人输。

请你计算先手是否必胜，如果两个人都采用最优策略。如果先手必胜输出能让先手必胜的最小数。

最多n种不同的数，每种数u_i的出现次数记为c_i。

$n \leq 500, u_i \leq 10^{18}, c_i \leq 10^9$。

EXPLANATION

很容易建出一个图，转化为图的匹配的问题，先手选一个数能必胜当且仅当存在一个最大匹配使得这个数对应的点未被匹配。也就是说如果是完美匹配那么先手必败，否则先手找的点要么未被匹配要么能找到增广轨。

进一步地我们发现这个图是一个二分图，由于数字出现次数多，所以必须用网络流解决，询问增广轨可以用退流的方式解决。

时间复杂度$O(n^2 \log n + maxflow(n, n \log n))$，空间复杂度$O(nlogn)$。

1.80 Max Circumference

Codechef OCT 12

PROBLEM

给定$\triangle ABC$和n个向量，你最多选出k个向量将其加到点A上，最大化三角形周长。

$k \leq n \leq 500$。

EXPLANATION

容易证明，只需要枚举经过原点的向量，并选对应与该向量点积最大的k个向量即可（如果点集为负则不选），将n向量按极角排个序，然后用扫描的方法枚举经过原点的向量，很容易维护其他向量的顺序。

时间复杂度$O(n^2 \log n)$，空间复杂度$O(n^2)$

1.81 Short

Codechef SEPT 11

PROBLEM

给你两个数n，k，你需要找出所有的数对(a,b)，满足$n < a < k, n < b < k$，并且$ab - n$可以被$(a-n)(b-n)$整除。

$n \leq 100000, k \leq 10^18$。

EXPLANATION

转化为$0 < a, b < k - n$且$((a+n)(b+n)-n) \mod (ab) = 0$，即$(n(a+b-1)) \mod (ab) = 0$。

设$n(a+b-1) = kab$则有$b = \frac{n(a-1)}{ka-n}$。不妨设$a \leq b$，则我们可以枚举a且可以证明a的枚举范围是$O(n)$的。

若a较小，我们可以枚举所有$n(a-1)$的约数并判断是否可行，若a较大我们可以枚举k。

时间复杂度$O(Tnlim)$，其中lim为两个求解方法切换时枚举量的阈值，当在$a=n+3000$的时候切换时$lim=1177$，空间复杂度$O(n\log n)$。

1.82 Short

Codechef SEPT 11

PROBLEM

给你两个数n，k，你需要找出所有的数对(a,b)，满足$n<a<k,n<b<k$，并且$ab-n$可以被$(a-n)(b-n)$整除。

$n\leq 100000, k\leq 10^18$。

EXPLANATION

转化为$0<a,b<k-n$且$((a+n)(b+n)-n) \mod (ab)=0$，即$(n(a+b-1)) \mod (ab)=0$。

设$n(a+b-1)=kab$则有$b=\frac{n(a-1)}{ka-n}$。不妨设$a\leq b$，则我们可以枚举a且可以证明a的枚举范围是$O(n)$的。

若a较小，我们可以枚举所有$n(a-1)$的约数并判断是否可行，若a较大我们可以枚举k。

时间复杂度$O(Tnlim)$，其中lim为两个求解方法切换时枚举量的阈值，当在$a=n+3000$的时候切换时$lim=1177$，空间复杂度$O(n\log n)$。

1.83 Minesweeper Reversed

Codechef JUNE 11

PROBLEM

处理一个扫雷的逆过程。

给定一个$n \times m$的矩阵，开始时所有的方块都是打开的，有的含“雷”，剩下的不含。玩家的目标是尽快关掉所有的方块。

有两种关掉方块的方式：你可以通过一次点击来关闭一个方块（可以关闭有“雷”的方块），或者点击其他的方块顺便让这个方块关闭。

点击一个方块C以后，按照正常扫雷规则，所有原本可能和C同时打开的方块会全部关闭。换句话说，令S_{xy}表示在正常扫雷中打开(x, y)后会自动打开的所有其他方块的集合，点击一个方块C_0以后，所有和C_0在一个公共集合S_{xy}中的C_1 方块会被关闭。注意到是“点击”一个方块，所以和扫雷游戏不同，这个过程不会重复。现在要你求出至少点击多少次，可以关闭所有的方块。

不超过50组数据，$n, m \leq 50$。

EXPLANATION

首先所有雷都要点一次，以下表述中不与雷相邻的格子也就是说没有标数字的格子，对于每个标有数字的格子如果他八个方向都没有标有数字的格子也必须点一次，没有标数字的格子形成了很多连通块，并且对于一个标有数字的格子，他八个方向最多两个不同的连通块，给他们连边并用带花树做最大匹配即可。

对于每组数据时间复杂度$O(n^2m^2)$，空间复杂度$O(nm)$。

1.84 Flight Distance

Codechef FEB 12

PROBLEM

给定一张n个点m条边的图，增减边权要付出的代价为增减的边权的值，要使得该图满足三角不等式，问最小代价。

$n \le 10, m \le 45$，无重边无自环。

EXPLANATION

对两两之间的距离和每条边的增减值各设一个未知量，然后跑单纯形即可。

时空复杂度均为给$O(n^2+m)$个未知量，$O(nm)$个等式的约数方程组跑单纯形的时空复杂度。

1.85 Cucumber Boy and Cucumber Girl

Codechef JAN 13

PROBLEM

给定B个$n \times n$的矩阵a_i，对于一个数对(a,b)，定义$C_{i,j}=\sum_k A_{a,k,i}A_{b,k,j}$，对于一个排列$P$称其是好的，当且仅当存在一个$i$使得$C_{i,P_i}$是奇数，一个数对$(a,b)$被称为是好的，当且仅当$a<b$ 且它对应的好的排列数是奇数，求好的数对数目。

最多4000组数据，$B \le 8000, n \le 60$，且B的和不超过8000。

EXPLANATION

C对应的好的排列的奇偶性与C取反后的行列式有关，容易发现如果$n>1$那么这个奇偶性就是C的行列式的奇偶性，即是否满秩，$n=1$的时候特判一下容易解决。如果$n>1$，我们在模2意义下考虑问题，我们发现，如果给每个矩阵加一个全是1列，那么C就是$A_a \times {A_b}^T$。根据Cauchy - Binet formula，我们只需要求每一个矩阵去掉每一列之后是否满秩，先进行高斯消元，如果多于一列没有代表元则均不满秩，否则去掉的列如果是没有代表元的列则满秩，如果是其他列则消这一列看是否能代替那个没有代表元的列。然后枚举之后直接带入公式即可，注意用位运算优化。

对于每组数据，时间复杂度$O(B^2+Bn^2)$，空间复杂度$O(Bn^2)$。

1.86 Something About Divisors

Codechef AUG 11

PROBLEM

对于给定的正整数B和x，求满足条件的正整数n的个数:

要求对于n，至少存在一个数$d(n < d \leq B)$能整除$n \times x$。

最多40组数据，$B \leq 10^{12}, x \leq 60$。

EXPLANATION

考虑d，一定是n去掉一个因子再乘上x的一个因子，对于n的去掉的这个因子，一定是要乘上x的比这个因子大的最小因子，所以我们可以得到x个比值，每两个个比值之间的n如果不满足条件必须不能是给定集合中任何数的倍数。传统的做法是枚举lcm然后容斥，注意到lcm的个数不多，且大于当且限制的话贡献就是0了，再加上一定的优化就可以通过了。

对于每组数据，时间复杂度$O(xk)$，空间复杂度$O(xk)$，其中k为可能的lcm数量，约为10^4级别。

1.87 To Queue or not to Queue

Codechef SEP 13

PROBLEM

有一个字符串S。初始时这个串是空的。还有一些操作，每个操作是下面两种之一：

1. 在S的末尾插入一个字符，S的长度增加1。
2. 删除S的第一个字符，S的长度减少1。

维护每个操作之后S的不同子串个数。

操作数Q不超过1000000。

EXPLANATION

Ukkonen算法的裸题，删除操作很容易支持。

时空复杂度均为$O(26Q)$。

1.88 Two Magicians

Codechef AUG 12

PROBLEM

有两个人在一张n个点m条边的图上博弈，每个人每次必须加一条边，要求满足没有重边和自环，每个人有p次移动的机会，每次可以选择使用一次移动的机会并移动到任意一个点，如果一个人操作完之后和另一个人在同一个连通块则负，求先手是否必胜。

最多100组数据，$n \leq 7777, m \leq 10000, p \leq 10000$。

EXPLANATION

设状态表示当且奇数大小的连通块的个数，偶数大小的连通块个数，不会改变联通性的边的条数的奇偶性，两个人所在的连通块的奇偶性，两人剩余的移动机会，这样时间复杂度是$O(n^2p^2)$。

可以证明两个人加起来最多移动一次，当奇数偶数连通块的个数很大时DP值关于他们以4为循环节，所以可以预处理然后再直接查询。

这样时空复杂度都是$O(1)$，常数取决于设置的阈值大小，当奇数偶数的连通块个数均大于20时就出现了循环。

1.89 Counting Hexagons

Codechef SEP 11

PROBLEM

有一大堆木棍，长度在区间[1，n]中，每种长度的木棍都有很多根。

这些木棍中选出6根拼成一个面积为正的六边形。

摆出的六边形需要满足如下性质：

最长的那一根木棍的长度大于等于L 。

其他木棍都的小于等于x。

同样长度的木棍不能超过K根。

你要做的当然是计算有多少合法六边形了

$n - L \leq 100, n \leq 10^9, x < L, 1 \leq k \leq 5$。

EXPLANATION

考虑从高位往低位数位DP，记录当前的相等状态，前面的和离n差多少或者已经超过了n，以及最大的数是否已经比x小，转移就直接枚举5个数这一位是什么即可。

时空复杂度均为$O(\log n)$，常数很大。

1.90 Making Change

Codechef MARCH 13

PROBLEM

有n种硬币凑C元钱，每种硬币有D_i元，假设每种硬币都有无限个。两种方法不同当且仅当方案中存在一种硬币在两个方案中使用的次数不同。任意两个硬币面值的最大公因数为1。输出答案模$10^9 + 7$。

不超过5组数据，$n \leq 50, C \leq 10^{100}, D_i \leq 500$。

EXPLANATION

列出生成函数之后可以转化为

$\frac{A(x)}{(1-x)^n}+\prod\frac{B_i(x)}{1+x+x^2+\cdots+x^{d-1}}$。

对于$B_i(x)$，我们可以将左右两边同时乘一个$1+x+x^2+\cdots+x^{d-1}$，然后可以得到$B_i(x)$的表达式，我们发现将单位复根带入有较简单的形式，计算出结果关于单位复根的表达式，由于我们有$\frac{1}{1-w_d{}^j}=-\frac{1}{d}\sum iw_d{}^{ij}$，所以是一个多项式，且这个结果在模$1+x+x^2+\cdots x^{d-1}$意义下与$B_i(x)$相等，上下同时乘一个$x-1$之后很好处理。

求出后面一部分之后，由于前面是一个不超过d次的多项式，可以求出前d项的值之后插值求出任一项的值。

时间复杂度$O(\sum D_i^2+n^2+\log C)$，空间复杂度$O(\max\{D_i\}+n+\log C)$。

2 CHALLENGE PROBLEMS

2.1 Deleting numbers

见我的试题准备题解。

2.2 Closest Points

Codechef JUNE 12

PROBLEM

给定三维空间中n个点，q次询问一个点的最近点，正确答案越多越好。

EXPLANATION

直接用$K-DtreeT$即可。

设$q=O(n)$，空间复杂度$O(n)$，时间复杂度$O(qn^{\frac{2}{3}})$。

2.3 To challenge or not

Codechef JUNE 13

PROBLEM

给定不重复的n个数的集合，求尽量大的一个不含有长度为3的等差数列的集合。

数据生成方式为

L=randint in [10000,100000]

p=rand in [0.1,0.9]

for k=0 to L-1 k有p的概率加入B中

EXPLANATION

从小到大贪心加数，由于答案不大，判断是否可行直接暴力即可。

时间复杂度$O(n^2)$但常数很小，空间复杂度$O(1)$。

2.4 Simultaneous Nim

Codechef SEPT 12

PROBLEM

给定n个数，他们的异或值为0，求分成尽量多的集合使得它们的异或和均为0。

不超过10组数据，每组数据$n \leq 1000, 5 \leq m \leq 60$，每个数在1到$2^m - 1$之间。

EXPLANATION

将数从小到大或者从大到小排序之后，贪心地依次加入数并维护基，找到一个集合之后重新构造基即可。

对于每组数据，时间复杂度$O(nm^2)$，空间复杂度$O(m^2)$。

2.5 The Spelling Problem

Codechef NOV 14

PROBLEM

给定一篇英文文章，可能有删除字母增添字母打错字母交换字母，但是错误很少，请尽量恢复原文。

文章长度不超过10M。

EXPLANATION

搞一个单词数不太多也不太少的较为正常的词典，然后只处理交换字母和删除非末尾字母，可以获得不错的分数。如果处理剩下两种情况效率太低，如果删除末尾字母又可能会导致把单词加s的形式变为不加s导致错误。词典次数过少则修改太少，词典次数过多又会因为生僻词的干扰导致一些typo被错误的认为是正确的词。

时空复杂度与具体实现有关，不再赘述。

2.6 Similar Graphs

Codechef APRIL 12

PROBLEM

给定两个图的邻接矩阵，求一种标号让他们的公共边尽量多。

最多5组数据。对于每一组数据，N是30-75之间的随机数。一个实数D是0.05到0.5之间的随机数。对于每一对合法的点对，存在边的概率为D。这就生成了第一张图。一个整数C是0到$N \times (N-1) \div 2$之间的随机数。之后会选择C对不同的合法点对。对于对于一对点对，如果之前它们之间已经存在边，则会有(1-D)的概率删除这条边。如果它们之间没有边，则有D的概率添加一条边。之后会生成一个随机的点标号的排列，这就生成了第二张图。不存在空图。

EXPLANATION

直接使用模拟退火算法并使用bitset优化，可以获得不错的分数。

时空复杂度与具体实现有关，不再赘述。

2.7 Efficient Painting

Codechef FEB 13

PROBLEM

从一块$n \times n$的正方形的画布开始，初始时全是白色的。每次可以画一个矩形，矩形的边长是整数，且边必须平行于坐标轴。有三种方法画一个矩形：

1. White - 矩形内全涂成白色。
2. Black - 矩形内全涂成黑色。
3. Flip - 矩形内的白色变成黑色，黑色变成白色。

求到达目标状态的最小步数。

$n \leq 50$。

EXPLANATION

考虑只用Flip操作，这样可以考虑倒着从目标状态回到初始状态。

对于$(n+1)\times(n+1)$个格子，每个格子的权值是它四周的格子的黑色格子数的奇偶性，容易发现Flip操作会改变四个角的格子的值。

容易发现每行每列的1的个数都是偶数，任何时候都存在一个矩形四个角有三个角是1，否则一定是全零矩阵即目标状态。每次贪心选矩形，尽量优先选有四个角是1的，然后多次随机即可得到不错的解。找有三个角是1的矩形就是找到一个1然后找到同行同列的另一个1，由于每行每列1的个数是偶数所以一定能找到。

时空复杂度与具体实现有关，不再赘述。

2.8 Kali and Devtas

Codechef DEC 14

PROBLEM

平面上有n个点，求这些点的一个生成树，使得C_i的最大值最小。C_i的定义是：对于每个点，设在生成树中与其相邻的点中最远的点的距离为R，那么以该点为圆心，半径R以内的的点的C_i全部增加1（包括自身）。

$n \le 400$

EXPLANATION

直接求最小欧几里得距离生成树即可获得不错的解。

时间复杂度$O(n^2 \log n)$，空间复杂度$O(n)$。

2.9 Maximum Sub-rectangle in Matrix

Codechef OCT 12

PROBLEM

给出一个$n \times m$的整数矩阵A，求一个子矩阵使其中元素之和尽可能大。

这个子矩阵不要求是连续的，即求出一些行和一些列，选取这些行列相交处的元素，输出这些行列。

$200 \le n, m \le 300, |A_{i,j}| \le 10^9$。

EXPLANATION

多次随机一个初始行状态，然后选出当且行状态下所有和大于等于零的列，然后再选取当且状态下所有和大于等于零的行，不断迭代直到稳定即可获得不错的解。

时空复杂度与具体实现有关，不再赘述。

2.10 Stepping Average

Codechef NOV 11

PROBLEM

给定n个数，每次拿出其中任意两个数，并用他们的平均数取代他们，重复N-1 次直到最后只剩一个数，请设计一种合并顺序让最后结果最接近给定值K。

每一组数据恰好有10组测试数据，且$n = 1000$。

其他数都是1到1073741823之间的随机数。

EXPLANATION

考虑依次合并，如果合并的数依次是a, b, c, d，那么答案是$\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{8} + \frac{d}{8}$，多个数的情况也很好类推。

所以我们可以随机一个排列，然后每次看看能不能交换相邻两个数使得答案变优，如果怎么交换相邻的数也不会变优则停止，多次随机即可得到不错的答案。

时空复杂度与具体实现有关，不再赘述。