试题准备 解题报告

王子昱

1 01C. Crossword Puzzle

注意到这一问题至少是 NP 完全[1]的，所以我们考虑对朴素的搜索进行优化。

固定槽的顺序，对单词的安排顺序进行搜索。每尝试放下一个单词时，我们检查它是否与之前的单词冲突，并检查是否存在某个槽使得此单词被放下后，其起始位置的前一位置被占用。

除此之外，对未占用的槽，如果从它的起始位置出发已经可以连成一个字符串，我们检查在未被使用的单词中，是否存在一个单词使得该串为其前缀。这一检查可以用 Trie 树完成。

为了使上述检查尽量能在开始时约束搜索树的大小，我们将所有的槽按行列坐标排序。此外，对单词按长度排序也有很好的效果。

以上优化足以通过本题的测试数据。

2 07J. Tunnels

经过简单的尝试，我们可以想到这样的做法：

设 C_u 为 u 到 0 的最小割，D_u 为间谍从 u 出发时，需要删掉的最少边数。使用类似 Dijkstra 的标号设定法迭代。初始时 $D_u = C_u$。考虑 D 值未确定且 D_u 最小的 u，其当前 D 值与所求最小值已经相等，或者说其 D 值已经确定；对于其它的点 v，我们用 “将 v 与 0 和所有 D 值已经确定的点隔开的最小代价 + 已经确定的 D 值中的最大值” 更新其 D 值，并重复这一循环。

这一算法显然可以用至多 N^2 次最小割计算实现。接下来我们需要证明，这样计算出的 D 值是正确的。

首先，我们证明它是实际值的上界。

引理 2.1. *按照被确定的顺序，D_u 是单调不减的（显然）。*

定理 2.1. *存在一种方案，使得间谍从 u 出发时，需要删去的边数的最大值为 D_u。*

证明. 以 D 值为序使用归纳法。

对于 D_u 最小的点 u，$D_u = C_u$，所以我们只要删掉 u 与 0 的最小割集即可。

假设对某个 d，$D_u \le d$ 的点的方案已经得到。设 S 为这样的点组成的集合。我们考虑间谍从 $D_u = d + 1$ 的点 u 出发的方案。在间谍出发之前，我们删去一部分边，使

[1] 这里列出了本题的简化版。

得所有连接 u 和 0 的路径必须经过 S 中的点。于是，间谍必然要经过一个属于 S 的点 v，而对点 v 我们已经构造出了代价为 D_v 的方案。当他第一次到达这样的 v 时，我们使用这一方案。

显然，这样的方案需要删去不超过 D_u 条边。 □

接下来我们证明计算出的 D 值是实际值的下界。

引理 2.2. *考虑在图 G 中删去一条边 (s_i, e_i) 之后得到的图 G'。设存在 u 使得 $D'_u < D_u - 1$，则存在 (s_i, e_i) 的端点 p，使得 $D_p < D_u, D'_p < D'_u$。*

证明. 以下设 $S'(t) = \{x | D'_x < D'_t\}, S(t) = \{x | D_x < D_t\}$。

考虑此前确定的 D 值最小的点 v，满足 $D'_v = D_v - 1$。很明显，这样的 v 必然存在。于是有 $S(v) = S'(v)$，$\forall x \in S(v), D_x = D'_x$。

考虑图 G 中，间谍在 v 时的方案：删去 x 条边，使得连接 v 和 0 的路径必须经过 $S'(v)$ 中的点。设 $y = max_{x \in S'(v)}(D'_x)$，于是 $D'_v = x + y$。在 G 中删去相同的 x 条边之后，有两种可能的情况：

连接 v 和 0 的路径必须经过 $S'(v)$ 中的点，亦即，必须经过 $S(v)$ 中的点。计算 D_v 时应有 $D_v \le x + y = D'_v$，矛盾；

存在一条连接 v 和 0 的路径不经过 $S'(v)$ 中的点，于是这条路径必然经过 (s_i, e_i)。因此，另外删去 (s_i, e_i) 后，该边的一个端点 p 与 v 联通。反证可得此时 p 必须经过 $S(v)$ 中的点才能到达 0，亦即 $D_p \le x + 1 + y = D_v < D_u$，$D'_p < D'_u$。

□

引理 2.3. *考虑在图 G 中删去一条边 (s_i, e_i) 之后得到的图 G'。不存在 u 使得 $D'_u < D_u - 1$。*

证明. 设此结论不成立，u 为使得 $D'_u < D_u - 1$ 且 D_u 最小的点。于是有 $S'(u) \subset S(u)$，$max_{t \in S(u)}(D_t) \le max_{t \in S'(u)}(D'_t) + 1$。根据引理2.2，存在 (s_i, e_i) 的端点 p 使得 $p \in S(u)$。

考虑在 G' 中，间谍在 u 时的方案：删去 x' 条边，使得连接 u 和 0 的路径必须经过 $S'(u)$ 中的点。设 $y' = max_{x \in S'(u)}(D'_x)$，于是 $D'_u = x' + y'$。在 G 中删去相同的 x' 条边之后，有两种可能的情况：

连接 u 和 0 的路径必须经过 $S'(u)$ 中的点，亦即，必须经过 $S(u)$ 中的点。那么，$D_u \le x + max_{t \in S(u)}(D_t) \le x + y + 1 = D'_u + 1$，矛盾；

存在一条连接 u 和 0 的路径不经过 $S'(u)$ 中的点，于是此路径必然经过 (s_i, e_i)，由 $p \in S(u)$，该路径经过了一个 $S(u)$ 中的点。同上得到矛盾。 □

引理 2.4. *对于任意图 G 中的点 u，存在连接 u 和 0 的路径使得路径上 D 值的最小值不小于 D_u（显然）。*

定理 2.2. *不存在一种方案，使得间谍从 u 出发时，只需要删除 $D_u - 1$ 条边。*

证明. 以 D 值为序使用归纳法。

$D_u = 1$ 时，由引理2.4可知，存在一条从 u 到 0 的路径。因此不存在不需要删边的方案。

设结论对于 $D_u < d_0$ 的所有 u 成立，考虑 $D_u = d_0$ 的某个 u。由引理2.4可知，存在一条从 u 到 0 的路径满足其 D 值最小值不小于 d_0。令间谍沿该路径行进，直至第一次删边。设间谍在点 v 时，有 k 条边被删去。由引理2.3可知，$D'_v \geq D_u - k$；由归纳假设可知，在新图中不存在一种方案，使得从 v 出发时只需删除 $D_u - k - 1 \leq D'_v - 1$ 条边。 □

综上可得，计算出的 D 值与实际值相同。

定理 2.3. *对于任意点 u，D_u 为间谍从 u 出发，需要删去的边数的最小值。*

证明. 由定理2.1与定理2.2立即可得。 □

3 11B. Affine Mess

枚举初态和末态的对应关系以及旋转的方法，之后平移和缩放的方法可以解线性方程组得到。显然如果某一方程组有多解，原题必然有不相容的多组解。

另外，容易证明如果两个操作序列的旋转角不关于坐标轴或原点对称，则这两种操作必不相容。（考虑坐标足够大的某一个点。舍入和平移操作对它到原点的极角的影响是可以忽略的。所以它在两种变换下会被变换到不同的点。）所以，对得到的所有操作序列，忽略舍入过程将它用矩阵表示，如果有两个操作序列对应着不同的矩阵，则存在不相容的解；否则所有的解都是相容的。