

Combining Images题解

浙江省镇海中学 岑若虚

1 题目大意

用如下方式递归给边长为2的幂次的01方阵编码：若方阵中所有元素都相同，编码以1开始，接下来是一个元素的值；否则将方阵分为四个大小相同的方阵，编码以0开始，接下来依次是左上、右上、左下、右下方阵的编码。之后，在编码开头插入1，再在开头用补0使得编码的位数是4的倍数，并将得到的二进制编码转化为十六进制。

给你两个大小相同的01方阵的十六进制编码，长度不超过100。求它们对应位置进行与运算后的方阵的十六进制编码。

2 算法分析

很容易得到暴力的算法：根据编码将方阵递归“解压”出来，适当扩大方阵使得两个方阵大小相同，直接进行与运算，然后再直接按题目中的方法求出编码。这样做的时间复杂度是 $O(m^2 \log m)$ ，其中 m 是方阵的边长。遗憾的是，虽然输入的编码长度只有100，转化为二进制后不超过400位，但是可以用类似分形的方法构造方阵，每次将分出来的三块设置成相同颜色，第四块继续细分，这样只需很少的编码量（7位）就可以将方阵的边长扩大一倍。所以方阵的边长最大可达 2^{57} ，暴力算法的时间复杂度是不能承受的。

既然原方阵和新方阵都是用递归的形式表示的，为什么不试着用递归的方式处理呢？考虑当前要处理的两个方阵的编码。如果有一个方阵的编码是10，即该方阵全0，则进行与运算后结果方阵也全0，结果编码也为10。如果有一个方阵的编码是11，即该方阵全1，则进行与运算后结果方阵与另一个方阵相同，结果编码即为另一个方阵的编码。如果两个方阵的编码都是0开头，则可以分别对四部分的编码递归进行处理，结果编码即为0与四部分的结果编码依次连接。需要注意四部分的结果编码可能都是10，此时需将它们合并，结果编码为10。

时间复杂度： $O(L)$ （ L 表示输入编码长度）

空间复杂度： $O(L)$