Mummy Madness 解题报告

大连二十四中 于纪平

2013 年 9 月 28 日

1. 题目大意

坐标网格上有n个木乃伊，你站在原点处的小正方形。你与木乃伊轮流行动：你可以选择移动到邻接的 8 个格子之一或不动，然后每个木乃伊移动到邻接的 8 个格子之一，使得他与你的欧几里得距离最小。求在你与某个木乃伊相遇之前，能经过的最大回合数，或输出存在永不相遇的策略。

数据规模：$n \le 10^5, |x_i|, |y_i| \le 10^6$。

2. 算法分析

2.1. 问题转化

显然的思路是搜索，然而本题的数据规模较大，这种非多项式算法必然不可行。

本题显然满足单调性。即如果a是问题的答案，则$a-1$也是问题的答案，故可以以一个 log 的代价，将其转化为判定性问题：是否存在一种方案，使得经过a个回合之后，你不与任何一个木乃伊相遇。

在a个回合之后，每个木乃伊所能控制的范围是以其初始位置为中心，边长为$2a+1$的正方形；你所能到达的范围是以原点为中心，边长为$2a+1$的正方形，则：

你的范围中存在一个格子，它不在任何一个木乃伊的范围中$\Leftrightarrow$存在一种方案，你能够不与任何一个木乃伊相遇。

正推的结论是显然的：你只需要向这个格子走去，假设中途你能与木乃伊相遇，则木乃伊就能够在a个回合到达这个格子，与前提矛盾。反推的结论也是显然的：你与每个木乃伊的欧几里得距离不会变大，所以你的最终位置一定在任何一个木乃伊的范围之外。

2.2. 算法 1：直接模拟法

根据上面的分析，我们只需要判断，你的边长为$2a+1$的正方形范围是否被n个这样的正方形完全覆盖。显然的思路是开二维数组模拟，暴力填充。注意地图的范围大约是$10^6 \times 10^6$的，所以必须先对坐标进行离散化，使坐标范围变为 $O(n)$的。对于n个正方形中的每一个，我们都需要 $O(n^2)$的时间进行填充，乘上二分答案的 log，总的时间复

杂度为 $O(n^3\log n)$。

另外一种模拟的思路是，枚举你的范围中的每一个格子，判断是否在任何一个木乃伊的范围当中。同理，这种算法的时间复杂度也是 $O(n^3\log n)$。

2.3. 算法 2：对算法 1 的优化

考虑上面的模拟思路，它的实质是在二维数组上维护一个数据结构。修改：二维区间加上 1；查询：求全局最小值。查询只有一次，且在全部修改之后。

直接用二维线段树维护，平均情况下的复杂度是 $O(n^2\log^2 n)$，难以承受10^5的数据规模。然而，查询的特点能够使人立刻联想到降维处理。（或者说，扫描线）

将每个正方形的纵向边按照x坐标排序，而在y坐标方向开一维数组。从左向右一次扫描每条纵向边，如果当前扫到的是左边界，则在对应的y坐标上进行区间加 1；扫到的是右边界，则在对应的y坐标上进行区间减 1。只要当前的横坐标在你的正方形范围之中，且当前列的数组中最小值为 0，就说明全局的最小值为 0。

现在，问题转化为，在一维数组上维护一个数据结构，支持区间增减一个数和求全局最小值。暴力维护的时间复杂度为 $O(n^2)$，用线段树维护的时间复杂度为 $O(n\log n)$，乘上二分答案的 log，总的时间复杂度为 $O(n\log^2 n)$，足以通过测试数据。

本题的坐标是离散的方格，所以在细节上需注意$+1$或-1；用线段树的方法，也可以不写离散化，同样能够通过全部的测试数据。

3. 总结

本题是 ACM/ICPC World Finals 2011 的 Problem I，是当时全场通过数比较低的题目。算法本身的思维含量便不低，实现起来也会有很多细节问题。在我认为我的程序已经几乎没有漏洞的时候，测试官方数据却依然有约 15%的数据未能通过。这也显示出 ACM/ICPC 赛制与 OI 赛制的不同，需要选手们更加专注，认真，一丝不苟。