Sum of sum of divisors 解题报告

绍兴一中 张恒捷

1 试题来源

PE 439

2 试题大意

另 $d(k)$ 为所有k的约数之和。
我们定义 $S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} d(i \cdot j)$。
求 $S(10^{11})\ mod\ 10^9$

3 算法介绍

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k|i \cdot j} k$$

k 可以唯一被表示成 $u \cdot v$ 的形式，其中 $u|i, v|j, gcd(\frac{i}{u}, v) = 1$ 。

$$\begin{aligned}
S(N) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{u|i} \sum_{v|j,gcd(\frac{i}{u},v)=1} uv \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \sum_{d|gcd(\frac{i}{u},v)} \mu(d) \\
&= \sum_{d} \mu(d) \sum_{u,v} \left\lfloor \frac{n}{du} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{dv} \right\rfloor uvd \\
&= \sum_{d} \mu(d) d \cdot F\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)^2
\end{aligned}$$

$$F(N) = \sum_{i=1}^{N} i \cdot \left\lfloor \frac{N}{i} \right\rfloor$$

为了防止出现对 $\mu(d)$ 的计算，我们需要做一些转化。考虑下列等式：

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mu(k) \cdot g\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

证明：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k \cdot f\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) \\
=&\sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} i \cdot \mu(i) \cdot g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right) \\
=&\sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i) i \cdot \frac{j}{i} \\
=&g(n)
\end{aligned}$$

重新整理一下，我们可以得到：

$$S(N) = F(N)^2 - \sum_{k=2}^{N} k \cdot S\left(\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor\right)$$

于是递归计算 S 。 F 可由经典方法算出，总时间复杂度为 $O(N^{\frac{3}{4}})$ 。