浅谈 q-analogue

湖南省长沙市第一中学 李铭乐洋

基本 q-analogue

在 q-analogue 中，我们有时将 q 视作满足 $0 < q < 1$ 的实参数。

基本 q-analogue

在 q-analogue 中，我们有时将 q 视作满足 $0 < q < 1$ 的实参数。

对于实数 x，我们定义其 q-analogue 为 $[x] = \frac{1-q^x}{1-q}$ 。此处，根据洛必达法则，当 $q \to 1$ 时 $[x] \to x$ 。

基本 q-analogue

在 q-analogue 中，我们有时将 q 视作满足 $0 < q < 1$ 的实参数。

对于实数 x，我们定义其 q-analogue 为 $[x] = \frac{1-q^x}{1-q}$ 。此处，根据洛必达法则，当 $q \to 1$ 时 $[x] \to x$ 。

类似地定义 q-factorial：对于正整数 n，我们定义 $n!$ 的 q-analogue 为 $[n]! = \prod_{i=1}^{n} [i] = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^i}{1-q}$ 。

partition 与 Ferrers graph

我们记 partition 为序列 λ 满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$，接着记 $\ell(\lambda)$ 为最大的 x 使得 $\lambda_x > 0$ ，然后记 $|\lambda|$ 为 $\sum \lambda_i$ 。

partition 与 Ferrers graph

我们记 partition 为序列 λ 满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$，接着记 $\ell(\lambda)$ 为最大的 x 使得 $\lambda_x > 0$，然后记 $|\lambda|$ 为 $\sum \lambda_i$。

对于一个 partition 定义其 Ferrers graph 为：共 $\ell(\lambda)$ 行，从下往上第 i 行长度为 λ_i，且所有行均左对齐的图形。

Gaussian polynomial

我们对于 $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ 定义 Gaussian polynomial 为：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}$$

Gaussian polynomial

我们对于 $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ 定义 Gaussian polynomial 为：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}$$

这是 q-binomial coefficients 的特殊情况。后者是对于 $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ 定义的，有：

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^{x-k+1}; q)_k}{(q; q)_k}$$

Gaussian polynomial

我们对于 $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ 定义 Gaussian polynomial 为：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}$$

这是 q-binomial coefficients 的特殊情况。后者是对于 $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ 定义的，有：

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^{x-k+1}; q)_k}{(q; q)_k}$$

其中 $(a; q)_k = (a)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a)$，被称做 q-rising factorial 。

Gaussian polynomial

而事实上 Gaussian polynomial 是 q 中的多项式，因为我们对于 $n, k \in \mathbb{N}$ 有：

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\lambda \subseteq n^k} q^{|\lambda|}$$

Gaussian polynomial

而事实上 Gaussian polynomial 是 q 中的多项式，因为我们对于 $n, k \in \mathbb{N}$ 有：

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\lambda \subseteq n^k} q^{|\lambda|}$$

其中 $\lambda \subseteq n^k$ 即 $\lambda_1 \leq n, \ell(\lambda) \leq k$ 。

Gaussian polynomial

考虑归纳。我们令 $P(n,k)=\sum_{\lambda\subseteq n^k} q^{|\lambda|}$，即有：

$$P(n,k)=\sum_{\lambda\subseteq n^k,\lambda_1=n} q^{|\lambda|}+\sum_{\lambda\subseteq n^k,\lambda_1<n} q^{|\lambda|}=q^n P(n,k-1)+P(n-1,k)$$

Gaussian polynomial

考虑归纳。我们令 $P(n,k)=\sum_{\lambda\subseteq n^k} q^{|\lambda|}$，即有：

$$P(n,k)=\sum_{\lambda\subseteq n^k,\lambda_1=n} q^{|\lambda|}+\sum_{\lambda\subseteq n^k,\lambda_1<n} q^{|\lambda|}=q^n P(n,k-1)+P(n-1,k)$$

边界条件 $P(n,0)=P(0,k)=1$ 是显而易见的。

Gaussian polynomial

另一方面：

$$
\begin{aligned}
q^n \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1+k \\ k \end{bmatrix} &= q^n \frac{[n+k-1]!}{[k-1]![n]!} + \frac{[n+k-1]!}{[k!][n-1]!} \\
&= \frac{[n+k-1]!}{[k]![n]!} \left(q^n \frac{1-q^k}{1-q} + \frac{1-q^n}{1-q} \right) \\
&= \frac{[n+k]!}{[k]![n]!}
\end{aligned}
$$

The Catalan numbers and Dyck paths

我们记所有 $(0,0)$ 到 (n,m) 的格路集合为 $L_{n,m}$，以及 $L_{n,m}^{+} \subseteq L_{n,m}$ 为那些永远不低于到 $y=\frac{n}{m}x$ 的格路。对于任意的 $\pi \in L_{n,m}^{+}$ 我们称 π 是一个 Dyck path，又称作 Catalan path 。

The Catalan numbers and Dyck paths

我们记所有 $(0,0)$ 到 (n,m) 的格路集合为 $L_{n,m}$，以及 $L^+_{n,m} \subseteq L_{n,m}$ 为那些永远不低于到 $y = \frac{n}{m}x$ 的格路。对于任意的 $\pi \in L^+_{n,m}$ 我们称 π 是一个 Dyck path，又称作 Catalan path 。

我们记 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 为 Catalan number 。Catalan 数的一种组合解释是 $L^+_{n,n}$ 中的元素个数,即 $|L^+_{n,n}| = C_n$ 。

The area statistic

对于 $\pi \in L_{n,n}^{+}$，我们给出如下定义：

The area statistic

对于 $\pi \in L^+_{n,n}$，我们给出如下定义：

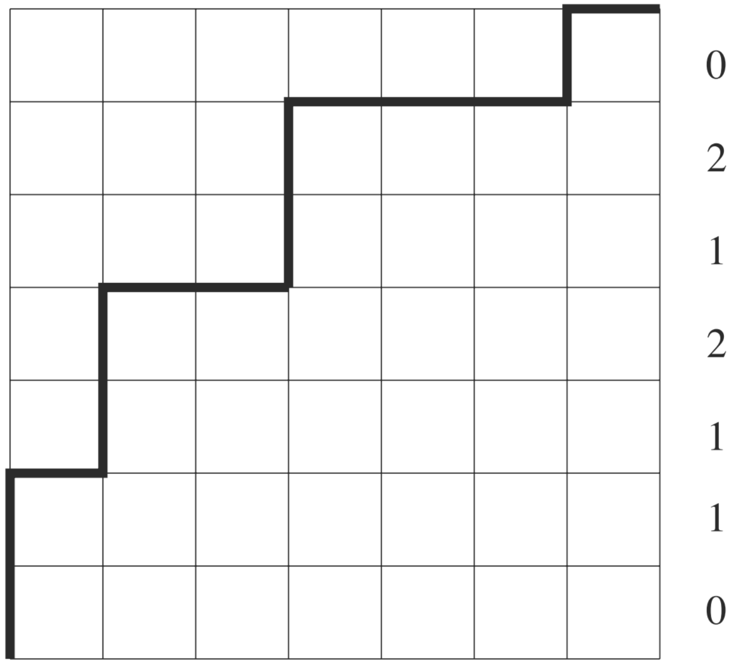
- 记 $\sigma(\pi)$ 为：初始为空，从 $(0,0)$ 开始，每走一步 North（即 $(1,0)$）就往后加入字符 0，每走一步 East（即 $(1,0)$）就往后加入字符 1 。最终走到 (n,n) 结束时得到的序列。

The area statistic

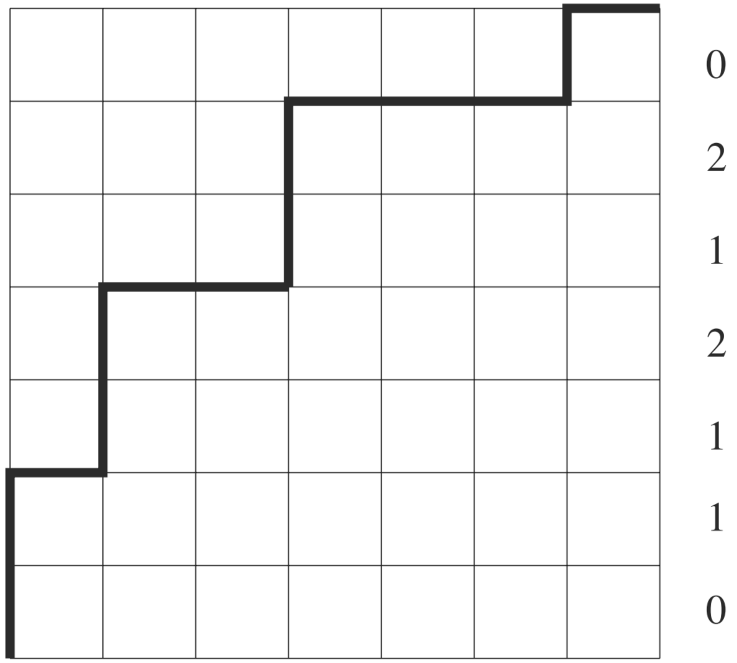
对于 $\pi \in L^+_{n,n}$，我们给出如下定义：

- 记 $\sigma(\pi)$ 为：初始为空，从 $(0,0)$ 开始，每走一步 North（即 $(1,0)$）就往后加入字符 0，每走一步 East（即 $(1,0)$）就往后加入字符 1 。最终走到 (n,n) 结束时得到的序列。
- 记 $a_i(\pi)$ 为：第 i 行中，在 π 右侧、在 $y=x$ 左侧的完整格子个数。这里我们还将 $a_i(\pi)$ 称做 π 的第 i 行的长度。同时，π 的 area statistic 被定义为 $\sum a_i(\pi)$（记做 $\mathrm{area}(\pi)$）。

The area statistic



The area statistic



上图每行右侧的值即为对应的 $a_i(\pi)$ 。

C_n 的 q-analogue

我们有:

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))} = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

C_n 的 q-analogue

考虑所有非法路径 $L_{n,n}^{-}=L_{n,n}\backslash L_{n,n}^{+}$ 。对于任一 $\pi\in L_{n,n}^{-}$，我们找到其经过的格点中，$j-i$ 最小的（如有多个，选择最早的一个），记为 P 。

C_n 的 q-analogue

考虑所有非法路径 $L_{n,n}^- = L_{n,n} \backslash L_{n,n}^+$ 。对于任一 $\pi \in L_{n,n}^-$，我们找到其经过的格点中，$j-i$ 最小的（如有多个，选择最早的一个），记为 P 。

那么到达 P 的一步一定是 East 。将这一步 East 变成 North，后面的部分平移，得到了一个 $\pi' \in L_{n-1,n+1}$ 。可以看到此时 $\operatorname{maj}(\sigma(\pi'))$ 相比 $\operatorname{maj}(\sigma(\pi))$ 少了 1 。

C_n 的 q-analogue

考虑所有非法路径 $L_{n,n}^{-}=L_{n,n}\backslash L_{n,n}^{+}$ 。对于任一 $\pi\in L_{n,n}^{-}$，我们找到其经过的格点中，$j-i$ 最小的（如有多个，选择最早的一个），记为 P 。

那么到达 P 的一步一定是 East 。将这一步 East 变成 North，后面的部分平移，得到了一个 $\pi'\in L_{n-1,n+1}$ 。可以看到此时 $\mathrm{maj}(\sigma(\pi'))$ 相比 $\mathrm{maj}(\sigma(\pi))$ 少了 1 。

事实上，对于任一 $\pi'\in L_{n-1,n+1}$，只要找到 $j-i$ 最小的点（如有多个，选择最晚的一个）。下一步必然是 North，将其改为 East，后面的部分平移即可。

C_n 的 q-analogue

那这样 $L_{n-1,n+1}$ 和 $L^-_{n,n}$ 中的路径就是一一对应的了，即有：

$$\sum_{\pi\in L^-_{n,n}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))} = \sum_{\pi\in L_{n-1,n+1}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))+1} = q \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix}$$

C_n 的 q-analogue

那这样 $L_{n-1,n+1}$ 和 $L^-_{n,n}$ 中的路径就是一一对应的了，即有：

$$\sum_{\pi\in L^-_{n,n}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))} = \sum_{\pi\in L_{n-1,n+1}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))+1} = q\begin{bmatrix}2n\\ n-1\end{bmatrix}$$

于是就有：

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in L^+_{n,n}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))} &= \sum_{\pi\in L_{n,n}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))} - \sum_{\pi\in L^-_{n,n}} q^{\mathrm{maj}(\sigma(\pi))}\\ &= \begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix} - q\begin{bmatrix}2n\\ n+1\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

C_n 的 q-analogue

然后来看另一个 C_n 的 q-analogue：

$$C_n(q) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\mathrm{area}(\pi)}$$

C_n 的 q-analogue

然后来看另一个 C_n 的 q-analogue：

$$C_n(q) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\mathrm{area}(\pi)}$$

其满足：

$$C_n(q) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} C_{k-1}(q) C_{n-k}(q), n \geq 1$$

C_n 的 q-analogue

考虑 $(0,0)$ 出发后，第一次碰到 $y=x$ 的位置为 (k,k) 。那么 $(0,1)$ 到 $(k-1,k)$ 的路径可以被 $q^{k-1}C_{k-1}(q)$ 描述，(k,k) 到 (n,n) 的路径可以被 $C_{n-k}(q)$ 描述。

The bounce statistic

对于路径 $\pi \in L_{n,n}^{+}$ 定义其 bounce path 为如下算法生成的路径：

The bounce statistic

对于路径 $\pi \in L_{n,n}^{+}$ 定义其 bounce path 为如下算法生成的路径：

从 $(0,0)$ 开始，跟着 π 走直到遇见一个 E，转向并走到 $y=x$ 。此时再次转向，跟着 π 走直到再次遇见某个 E，重复上述过程。

The bounce statistic

对于路径 $\pi \in L_{n,n}^{+}$ 定义其 bounce path 为如下算法生成的路径：

从 $(0,0)$ 开始，跟着 π 走直到遇见一个 E，转向并走到 $y=x$ 。此时再次转向，跟着 π 走直到再次遇见某个 E，重复上述过程。

可以将 bounce path 想象成从 $(0,0)$ 出发、初始向 N 走的、碰到 π 或 $y=x$ 会反弹的小球走出的路径。

The bounce statistic

我们记下所有碰到 $y = x$ 的位置：

$$(0,0),(j_1,j_1),\cdots,(j_b,j_b)=(n,n)$$

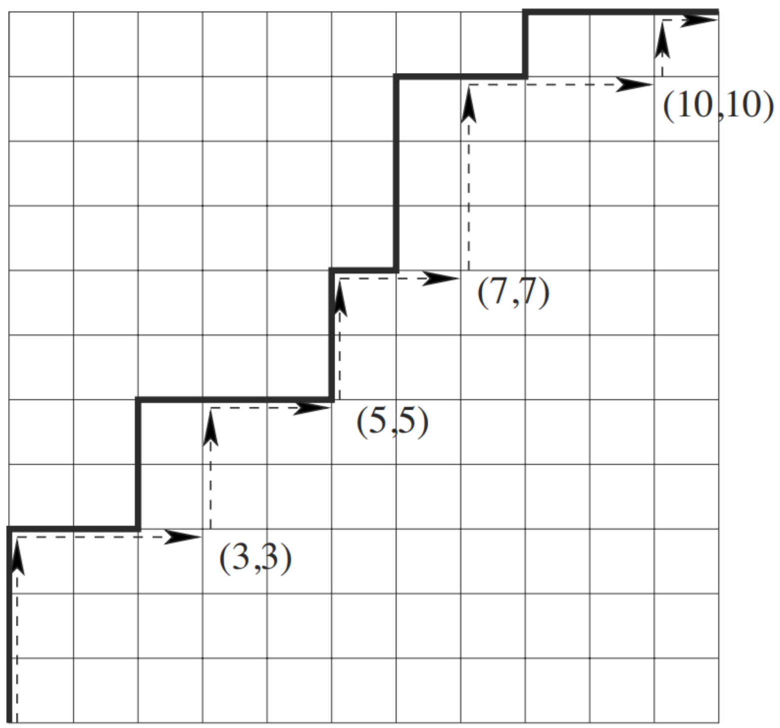
The bounce statistic

我们记下所有碰到 $y = x$ 的位置：

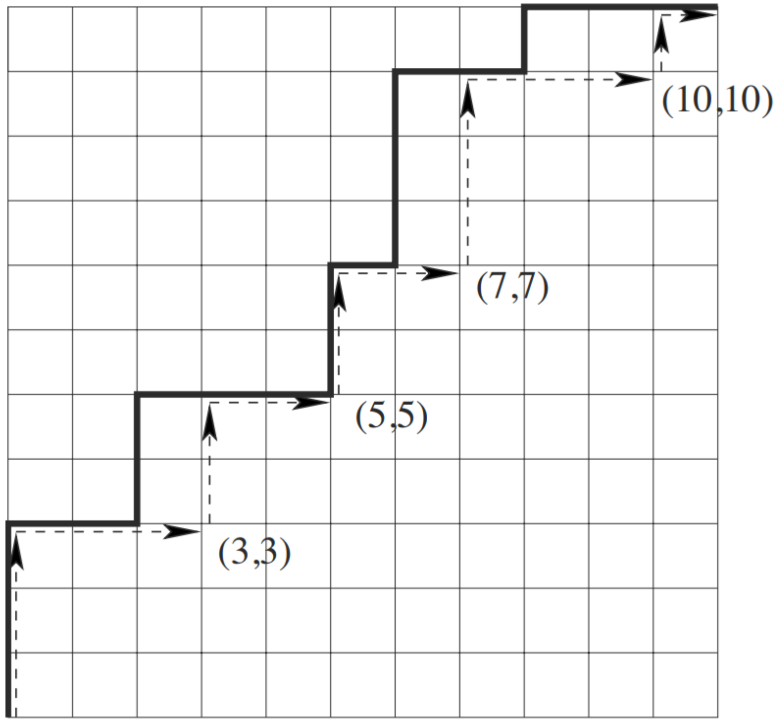
$$(0,0),(j_1,j_1),\cdots,(j_b,j_b)=(n,n)$$

我们称 b 为反弹次数，称 j_1 为第一次反弹的长度，称 $j_2 - j_1$ 为第二次反弹的长度 .. 剩下的以此类推。

The bounce statistic



The bounce statistic



如图所示。

The bounce statistic

对此，我们定义 bounce statistic $\mathrm{bounce}(\pi)$ 为：

$$\mathrm{bounce}(\pi) = \sum_{i=1}^{b-1} n - j_i$$

q, t-Catalan numbers

我们定义：

$$F_n(q,t) = \sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\mathrm{area}(\pi)} t^{\mathrm{bounce}(\pi)}$$

q, t-Catalan numbers

记 $L^+_{n,n}(k)$ 为满足 $\pi \in L^+_{n,n}$ 且恰好以 k 个 N 开头，然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

q, t-Catalan numbers

记 $L^{+}_{n,n}(k)$ 为满足 $\pi \in L^{+}_{n,n}$ 且恰好以 k 个 N 开头，然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

特别地，对于 $L^{+}_{0,0}(k)$ 。当 $k = 0$ 时其仅包含空路径，否则为空。

q,t-Catalan numbers

记 $L^+_{n,n}(k)$ 为满足 $\pi \in L^+_{n,n}$ 且恰好以 k 个 N 开头，然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

特别地，对于 $L^+_{0,0}(k)$ 。当 $k=0$ 时其仅包含空路径，否则为空。

我们定义：

$$F_{n,k}(q,t)=\sum_{\pi\in L^+_{n,n}(k)} q^{\mathrm{area}(\pi)}t^{\mathrm{bounce}(\pi)}$$

q,t-Catalan numbers

记 $L_{n,n}^{+}(k)$ 为满足 $\pi \in L_{n,n}^{+}$ 且恰好以 k 个 N 开头，然后紧接着下一步是 E 的那些 π 的集合。

特别地，对于 $L_{0,0}^{+}(k)$ 。当 $k=0$ 时其仅包含空路径，否则为空。

我们定义：

$$F_{n,k}(q,t)=\sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}(k)} q^{\mathrm{area}(\pi)} t^{\mathrm{bounce}(\pi)}$$

特别地，$F_{n,0}$ 仅在 $n=0$ 时取 1，否则取 0 。

q, t-Catalan numbers

那么我们有如下递归关系：

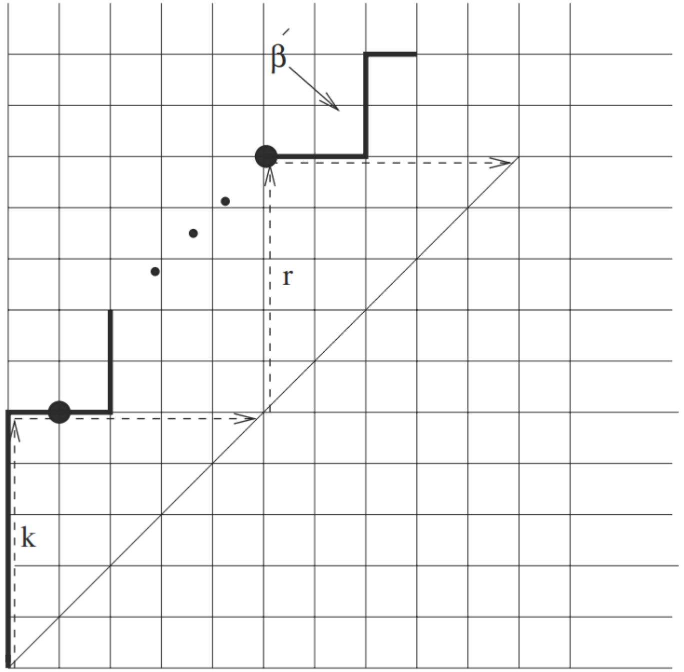
$$F_{n,k}(q,t) = \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{n-k} q^{\binom{k}{2}} F_{n-k,r}(q,t)$$

q, t-Catalan numbers

考虑反弹至少两次的 $\beta \in L^{+}_{n,n}(k)$，其满足第一次反弹长度为 k，第二次反弹长度为 r —— 这意味着其经过点 $(1, k), (k, k+r)$，即下图中的两个大点：

q,t-Catalan numbers

考虑反弹至少两次的 $\beta \in L_{n,n}^{+}(k)$，其满足第一次反弹长度为 k，第二次反弹长度为 r —— 这意味着其经过点 $(1,k),(k,k+r)$，即下图中的两个大点：



q, t-Catalan numbers

将 β 分成两个部分，第一个部分是 $(0,0)$ 到 $(k, k+r)$，第二个部分是 $(k, k+r)$ 到 (n, n) 。

q, t-Catalan numbers

将 β 分成两个部分，第一个部分是 $(0,0)$ 到 $(k, k+r)$，第二个部分是 $(k, k+r)$ 到 (n, n) 。

对于第二个部分，我们在其前面加入 r 个 N 并记其为 β' 。此时有 $\beta \in L^{+}_{n-k,n-k}(r)$，同时也有 $\operatorname{bounce}(\beta') = \operatorname{bounce}(\beta) + n - k$ 。

q, t-Catalan numbers

而面积可以拆成三部分：$x = k$ 右侧的面积，$y = k$ 下侧的面积以及剩余面积。

q, t-Catalan numbers

而面积可以拆成三部分：$x = k$ 右侧的面积，$y = k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。

q,t-Catalan numbers

而面积可以拆成三部分：$x=k$ 右侧的面积，$y=k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。
2. 第二部分一定是 $\binom{k}{2}$ 。

q,t-Catalan numbers

而面积可以拆成三部分：$x=k$ 右侧的面积，$y=k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。
2. 第二部分一定是 $\binom{k}{2}$ 。
3. 第三部分，只要考虑 $(1,k)$ 走到 $(k,k+r)$ 的方案。根据定理 3.2，所有方案的面积和为 $\begin{bmatrix} r+k-1 \\ r \end{bmatrix}_q$ 。

q,t-Catalan numbers

而面积可以拆成三部分：$x=k$ 右侧的面积，$y=k$ 下侧的面积以及剩余面积。

1. 第一部分只和 β' 有关系。
2. 第二部分一定是 $\binom{k}{2}$ 。
3. 第三部分，只要考虑 $(1,k)$ 走到 $(k,k+r)$ 的方案。根据定理 3.2，所有方案的面积和为 $\begin{bmatrix} r+k-1 \\ r \end{bmatrix}_q$ 。

因此有：

$$q^{\operatorname{area}(\beta)} = q^{\operatorname{area}(\beta')} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ r \end{bmatrix}_q$$

q,t-Catalan numbers

于是就有：

$$
\begin{aligned}
F_{n,k}(q,t) &= \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{\beta' \in L^{+}_{n-k,n-k}(r)} q^{\mathrm{area}(\beta')} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{\mathrm{bounce}(\beta')} t^{n-k} \\
&= \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ r \end{bmatrix}_q t^{n-k} q^{\binom{k}{2}} F_{n-k,r}(q,t)
\end{aligned}
$$

q,t-Catalan numbers

于是就有：

$$F_{n,k}(q,t)=\sum_{r=0}^{n-k}\sum_{\beta'\in L^{+}_{n-k,n-k}(r)} q^{\mathrm{area}(\beta')}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} r+k-1\\ r\end{bmatrix}_q t^{\mathrm{bounce}(\beta')}t^{n-k}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-k}\begin{bmatrix} r+k-1\\ r\end{bmatrix}_q t^{n-k}q^{\binom{k}{2}}F_{n-k,r}(q,t)$$

而对于 $n=k$ 的情况（即唯一需要考虑反弹恰好一次的情况）上述结果是显然的。

q, t-Catalan numbers

另外，我们有：

$$F_n(q,t) = \sum_{b=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_b=n, \alpha_i>0} t^{\sum_{j=2}^{b}(j-1)\alpha_j} q^{\sum_{j=1}^{b}\binom{\alpha_i}{2}} \prod_{i=1}^{b-1} \begin{bmatrix} \alpha_i + \alpha_{i+1} - 1 \\ \alpha_{i+1} \end{bmatrix}_q$$

对称性问题

我们有：

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\mathrm{area}(\pi)} = \sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\mathrm{bounce}(\pi)}$$

对称性问题

对于 $\pi \in L_{n,n}^{+}$，其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \le a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是，我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数，分别记为 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 。接着考虑它们组合的方案数计算如下：

对称性问题

对于 $\pi \in L_{n,n}^{+}$，其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \le a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是，我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数，分别记为 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 。接着考虑它们组合的方案数计算如下：

先将 b_0, b_1 组合，方案数为 $\binom{b_0+b_1-1}{b_1}$。然后将 b_2 加入，不能出现 0 后面紧邻一个 2 的情况。方案数为 $\binom{b_1+b_2-1}{b_2}$ .. 以此类推。

对称性问题

对于 $\pi \in L^{+}_{n,n}$，其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \le a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是，我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数，分别记为 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 。接着考虑它们组合的方案数计算如下：

先将 b_0, b_1 组合，方案数为 $\binom{b_0+b_1-1}{b_1}$。然后将 b_2 加入，不能出现 0 后面紧邻一个 2 的情况。方案数为 $\binom{b_1+b_2-1}{b_2}$ .. 以此类推。

因此，我们可以得到：

$$\sum_{\pi \in L^{+}_{n,n}} q^{\mathrm{area}(\pi)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{b_1+\cdots+b_k=n, b_i>0} q^{\sum_{i=2}^{k} b_i(i-1)} \prod_{i=1}^{k-1} \binom{b_i + b_{i+1} - 1}{b_{i+1}}$$

对称性问题

对于 $\pi \in L_{n,n}^{+}$，其 $a_i(\pi)$ 需要满足的必要条件是 $a_i(\pi) \leq a_{i-1}(\pi) + 1$ 。于是，我们转而枚举 $a_i(\pi) = j$ 的次数，分别记为 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 。接着考虑它们组合的方案数计算如下：

先将 b_0, b_1 组合，方案数为 $\binom{b_0+b_1-1}{b_1}$。然后将 b_2 加入，不能出现 0 后面紧邻一个 2 的情况。方案数为 $\binom{b_1+b_2-1}{b_2}$ .. 以此类推。

因此，我们可以得到：

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\operatorname{area}(\pi)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{b_1+\cdots+b_k=n, b_i>0} q^{\sum_{i=2}^{k} b_i(i-1)} \prod_{i=1}^{k-1} \binom{b_i + b_{i+1} - 1}{b_{i+1}}$$

结果与 $F_n(1, q)$ 一致。

The dinv statistic

我们接下来介绍另外一个关于 q, t-Catalan 的 Dyck path 的 statistic 。

The dinv statistic

我们接下来介绍另外一个关于 q,t-Catalan 的 Dyck path 的 statistic 。

对于 $\pi \in L_{n,n}^{+}$ 有:

$$\begin{aligned}\operatorname{dinv}(\pi) = & |\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi)\}| + \\ & |\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi) + 1\}|\end{aligned}$$

The dinv statistic

我们接下来介绍另外一个关于 q, t-Catalan 的 Dyck path 的 statistic 。

对于 $\pi \in L_{n,n}^{+}$ 有:

$$\begin{aligned}\operatorname{dinv}(\pi) = & |\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi)\}| + \\ & |\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi) + 1\}|\end{aligned}$$

对此我们有:

$$\sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\operatorname{dinv}(\pi)} t^{\operatorname{area}(\pi)} = \sum_{\pi \in L_{n,n}^{+}} q^{\operatorname{bounce}(\pi)} t^{\operatorname{area}(\pi)}$$

The dinv statistic

我们构造 Dyck path 的双射 ζ 使其满足：

$$\operatorname{dinv}(\pi) = \operatorname{area}(\zeta(\pi))$$
$$\operatorname{area}(\pi) = \operatorname{bounce}(\zeta(\pi))$$

The dinv statistic

我们构造 Dyck path 的双射 ζ 使其满足：

$$\begin{aligned}\operatorname{dinv}(\pi) &= \operatorname{area}(\zeta(\pi)) \\ \operatorname{area}(\pi) &= \operatorname{bounce}(\zeta(\pi))\end{aligned}$$

对于 $\pi \in L^+_{n,n}$，令 $b-1$ 为其最长行的长度（即 $\max a_i(\pi)$，记 $c_0, \cdots, c_{b-1}$ 为每个长度对应的出现次数。

The dinv statistic

我们构造 Dyck path 的双射 ζ 使其满足：

$$\operatorname{dinv}(\pi) = \operatorname{area}(\zeta(\pi))$$
$$\operatorname{area}(\pi) = \operatorname{bounce}(\zeta(\pi))$$

对于 $\pi \in L^+_{n,n}$，令 $b-1$ 为其最长行的长度（即 $\max a_i(\pi)$，记 $c_0, \cdots, c_{b-1}$ 为每个长度对应的出现次数。

我们构造对应路径 π' 使其有恰好 b 次反弹，且反弹长度依次为 $c_0, \cdots, c_{b-1}$ 。对于每个 $0 \leq i < b-1$ 的 $(c_i, c_i + c_{i+1})$ 处，我们构造其与 $(c_{i-1}, c_{i-1} + c_i)$（当 $i = 0$ 即 $(0, 0)$）之间的路径：从上到下考虑所有 $a_i(\pi)$，若是 $i+1$ 则加入一个 S（South step），若是 i 则加入一个 W（West step），其他情况不做考虑。

The dinv statistic

如图所示，左侧的 π 对应了右侧的 π' 。

The dinv statistic

ζ 很显然是个双射：对于 π'，我们通过反弹次数得到了 $b-1$，并且得到了每个长度的出现次数。此时再看具体路径，对于 $0 \leq i < b-2$ 可以得到仅有 $i, i+1$ 的子序列。而组合原路径的方案是唯一的，这和定理 4.3 的证明是对应的。

The dinv statistic

ζ 很显然是个双射：对于 π'，我们通过反弹次数得到了 $b-1$，并且得到了每个长度的出现次数。此时再看具体路径，对于 $0 \leq i < b-2$ 可以得到仅有 $i, i+1$ 的子序列。而组合原路径的方案是唯一的，这和定理 4.3 的证明是对应的。

我们将 $\operatorname{area}(\pi')$ 按照 bounce path 分成两部分：下侧是 $\binom{c_0}{2} + \cdots + \binom{c_{b-1}}{2}$，对应了 $\operatorname{dinv}(\pi)$ 中的 $|\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi)\}|$ 。上侧，分析每一段，不难发现也恰好对应了 $|\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i(\pi) = a_j(\pi) + 1\}|$ 。

因此 $\operatorname{area}(\pi') = \operatorname{dinv}(\pi)$ 。

The dinv statistic

另一方面，我们有：

$$\mathrm{bounce}(\pi') = \sum_{i=1}^{b-1} i c_i = \mathrm{area}(\pi)$$

The dinv statistic

一个推论是：

$$F_{n,k}(q,t)=\sum_{\pi\in L^{+}_{n,n},\ \pi\ has\ exactly\ k\ rows\ of\ length\ 0} q^{\mathrm{dinv}(\pi)}t^{\mathrm{area}(\pi)}$$

这是因为 ζ 对应的限制即为有恰好 k 行长度为 0（即第一次反弹长度为 k）。

The end

限于时长到这里就结束了。
更多内容可以见于论文。
谢谢大家。