Chefbook - 解题报告

龚林源

1 Description

给定： M 个整数对 $(x, y),\ (1 \le x, y \le N)$ 和对应的 $L_{x,y}$、$S_{x,y}$ 和 $T_{x,y}$。

求出： N 个非负整数 P_x、N 个非负整数 Q_x（$1 \le x \le N$）。

定义： $W_{x,y} = L_{x,y} + P_x - Q_y$

约束条件： $S_{x,y} \le W_{x,y} \le T_{x,y}$

目标： 使得 $\sum W_{x,y}$ 最大

输出： 最大的 $\sum W_{x,y}$ 和对应的 P_x 和 Q_x。

2 Constraints

$1 \le T \le 10,\ 1 \le N \le 100,\ 0 \le P_x, Q_x \le 10^6$

3 Tags

- 线性规划对偶原理
- 最小费用最大流
- 差分约束系统

4 Solution

4.1 转化为线性规划标准型

4.1.1 非负变量

$$\begin{cases} P_x \ge 0 \\ Q_y \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

为了方便，我们定义：

$$\forall 1 \le i \le N,\ P_{N+i} = Q_i \tag{2}$$

4.1.2 约束

$$S_{x,y} \le L_{x,y} + P_x - Q_y \le T_{x,y} \tag{3}$$

整理 $(2),(3)$ 两式：

$$\begin{cases} P_x - P_{N+y} \le T_{x,y} - L_{x,y} \\ P_{N+y} - P_x \le L_{x,y} - S_{x,y} \end{cases} \tag{4}$$

4.1.3 目标函数

在题目给定的 M 个整数对 (x, y) 中，令 $i(1 \le i \le N)$ 作为 x 出现的次数为 C_i、作为 y 出现的次数为 $-C_{N+i}$。

$$\begin{aligned} & \sum W_{x,y} \\ = & \sum (L_{x,y} + P_x - Q_y) \\ = & \sum (L_{x,y} + P_x - P_{N+y}) \\ = & \sum L_{x,y} \ + \ \sum_{i=1}^{N} P_i C_i \ - \ \sum_{i=1}^{N} P_{N+i} \cdot (-C_{N+i}) \\ = & \sum L_{x,y} \ + \ \sum_{i=1}^{N} P_i C_i \ + \ \sum_{i=1}^{N} P_{N+i} C_{N+i} \\ = & \sum L_{x,y} \ + \ \sum_{i=1}^{2N} P_i C_i \end{aligned} \tag{5}$$

最左边的 $\sum L_{x,y}$ 是题目给定的常数。因此我们只需要最大化：

$$\sum_{i=1}^{2N} P_i C_i \tag{6}$$

4.1.4 矩阵表示法

令 $\S 4.1.2$ 中所有约束条件组成的不等式组的系数矩阵为 A。

定义向量 B 为与系数矩阵 A 对应的，不等式组的不等号右边的数构成的向量。

则题目可进一步简化为：

$$\begin{cases} maximize \quad C^T P \\ subject\ to \quad AP \le B,\ P \ge 0 \end{cases} \tag{7}$$

至此，经过了简单的代数变换，此题已经转化为了线性规划的标准型。

然而，一般的整数线性规划是 $NP-Hard$ 问题，因此此题不能通过线性规划的一般方法求解。

4.2 用最小费用最大流算法解决对偶问题

4.2.1 转化为对偶问题

- 让我们来分析一下矩阵 A 的性质：
  - 如果题目有解，说明不等式组 $AP \le B$ 有解，所以系数矩阵 A 是个非奇异矩阵
  - 矩阵 A 的每个元素都是 0 或者 ± 1。容易推知 $det(A) = \pm 1$。即最优解一定恰好在整点取到

– 矩阵 A 每行 恰好有一个 1 和一个 -1。而我们知道如果是每列 有一个 1 和一个 -1 的话，就是一个最小费用最大流问题了

- 把“行”转化成“列”——很自然地想到把原问题转化为它的对偶问题。
- 原问题：

$$\begin{cases} maximize \quad C^T P \\ subject\ to \quad AP \le B,\ P \ge 0 \end{cases} \tag{8}$$

- 对偶问题：

$$\begin{cases} minimize \quad B^T Y \\ subject\ to \quad A^T Y \ge C,\ Y \ge 0 \end{cases} \tag{9}$$

- 原问题中的 A 矩阵变为了它的转置 A^T，问题变得简单多了
- 仔细观察发现：

定理 1. 对偶问题中的 $A^T Y \ge C$ 等价于 $A^T Y = C$

证明. $\because A^T$ 每一列恰有一个 1 和一个 -1

$\because \sum_{i=1}^{2N} C_i = 0$

$\therefore$ 将不等式组 $A^T Y \le C$ 的所有不等式相加，得到 $0 \ge 0$

$\because$ 这个不等式只能在取等号时成立

$\therefore$ 不等式组中每个不等式都只能在取等号时成立

$\therefore A^T Y = C$

4.2.2 最小费用最大流的应用

- 对偶问题与最小费用最大流的要素的对应关系：

点： A^T 中的每一行代表一个点，共 $2N$ 个

边： A^T 中的每一列代表一条边，从 -1 所在行的连向 1 所在行的点，共 $2M$ 条

流量：
- Y_i 代表 A^T 中第 i 列代表的边的流量
- 若 $C_i > 0$，那么从 $source$ 到 i 有流量为 C_i 的边
- 若 $C_i < 0$，那么从 i 到 $sink$ 有流量为 $-C_i$ 的边

费用： B_i 代表 A^T 中第 i 列代表的边的费用

- 对偶问题与最小费用最大流的条件的对应关系：

流量平衡： 对于方程组 $A^T Y = C$ 的第 i 行，把等号右边的项移到左边之后，就是关于点 i 的流量平衡式

费用最小： 需要最小化的 $B^T Y = \sum_{i=1}^{2M} B_i Y_i$——正好是每条边的流量乘上费用之和

- 于是，这个对偶问题就成功解决了。这个对偶问题的答案（网络流的最小费用）就是原问题的答案。

4.3 求出一组可行方案

4.3.1 互补松弛定理

- 将原问题和对偶问题分别写成松弛型：

  原问题：
  $$\begin{cases} maximize \quad C^T P \\ subject\ to \quad AP + U = B,\ P \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

  对偶问题：
  $$\begin{cases} minimize \quad B^T Y \\ subject\ to \quad A^T Y - V = C,\ Y \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

- 互补松弛定理：

  定理 2. 设 P, Y 分别是原问题和对偶问题的可行解，U 为原问题的松弛变量的值、V 为对偶问题剩余变量的值。X, Y 分别是原问题和对偶问题最优解的充分必要条件是 $U^T Y + V^T X = 0$。（证明略）

- 由 §4.2.1 中的定理 1 得，$A^T Y = C$，即 $V = 0$。所以 $U^T Y = 0$
- 因此，如果我们求出的某个 $Y_i \neq 0$，那么一定有 $U_i = 0$，即 $A_i X = P_x - P_y = B_i,\ (1 \leq x, y \leq 2N)$
- 这样我们就通过对偶问题的最优解 Y 得到了对原问题的最优解 P 的约束条件

4.3.2 差分约束系统

- 再回到原问题固有的约束条件：

$$\begin{cases} P_x - P_{N+y} \leq T_{x,y} - L_{x,y} \\ P_{N+y} - P_x \leq L_{x,y} - S_{x,y} \end{cases} \tag{12}$$

- 这是对变量间差分关系的约束。仅凭这些，我们能够利用差分约束系统找出一组可行解，但是保证不了最优性
- 再看 §4.2.1 中由于对偶问题的要取到最优解而增加的约束条件 $P_x - P_y = B_i,\ (1 \leq x, y \leq 2N)$（$B_i$ 是常数）
- 将这个等式等价转化为两个不等式，使之符合差分约束系统的模型：

$$\begin{cases} P_x - P_y \leq B_i \\ P_y - P_x \leq -B_i \end{cases} \tag{13}$$

- 只要用这些差分约束条件构造一张有向图，就可以用最短路算法找出一组最优解了
- 要使 P_i 不超出题目规定的 $[0, 10^6]$ 的范围，可以把所有的 P_i 加上或减去一个数。答案是不变的

4.4 复杂度分析

由于使用了最小费用最大流的算法,所以单组数据的复杂度上界为 $O(NM^2)$。不过上界很松，实际上这个算法是可以通过此题的。