IOI2014 国家集训队作业
(第一部分解题报告)

刘家昌

泉州第一中学 2014届

i@dotkrnl.com

试题名称	试题编号	试题类型
Lead or Gold	1998 C	线性规划
Intersecting Dates	2004 E	日期处理
Fare and Balanced	2009 E	图论构造

1 Lead or Gold

1.1 试题大意

给定 n 种由 A、B、C 物质，以给定比例混合而成的源材料。求解是否存在方案，将其混合为给定比例的最终产物。

1.2 解题思路

此题的第一想法为列出三项 n 元方程组，以矩阵的秩求是否存在解。但这个方法并不能求解此题，因为试题隐含着只接受非负解这一条件，即各原材料的使用量不为负。问题为求解是否存在非负解，并不能通过矩阵方法求得。

由于存在非负这一约束，可以很快地想到用线性规划方法完成此题：

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i)x_i$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i &\le A \\
\textstyle\sum_{i=1}^{n} b_i x_i &\le B \\
\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i &\le C \\
x_i &\ge 0
\end{aligned}$$

其中，x_i 为第 i 种原材料在最终产物中的比例。A 为 A 物质的所需量，a_i 为第 i 种原材料中 A 的比例，$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le A$ 意味着 A 的最终量不会多于所需量，依此类推。而 $x_i \ge 0$ 则限制了最终解均为非负数。在这些限制条件下，若 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i)x_i$ 的最大值能够达到 $A+B+C$，则意味着存在非负解符合题意。

关于此线性规划标准形式的解，可以使用单纯形法求得。

1.3 试题来源

ACM Programming Contest World Finals, 1998, Problem C

2 Intersecting Dates

2.1 试题大意

给定一组以区间格式输入的日期集合 A，与另一组日期集合 B，以美国日期格式输出 $B - A$ 的结果，连续的日期区间需要合并输出。

2.2 解题思路

假设此题的输入为整数格式，则为一道极为简单的题目，只需排序后合并赋值，用数组记录每个数是否属于 B 且不属于 A ，最后合并输出即可。

将日期转换为数值也是很容易的，以 1700 年 01 月 01 日为数值 0，则每个日期的对应数值为在这之前的各年份的天数，加上当年此日之前的各月份的天数，加上当月此日之前的天数。由于此题的数据规模较小，注意闰年的判断，直接迭代叠加即可完成。

同理，将数值转换为日期只需从 1700 年开始，不断减去当年天数，直到不足以相减。对于月进行同样的操作。此时的数值加一作为日期值，即可得到日期格式的结果。

本解法时间复杂度为输入区间数的排序复杂度，加上 17000101 到 21001231 间的日期数。由于本题数据规模极小，不需要更多优化。

如此，本题便轻松完成。

2.3 试题来源

ACM Programming Contest World Finals, 2004, Problem E

3 Fare and Balanced

3.1 试题大意

给定一张 n 个点的有向无环图，求一个增加边权的方式，使得任意一条从起点到终点的路线均有相同的边权和，且路线上不存在两条及以上边被增加过边权。要求增加边权的方式使得最终边权和最小。

3.2 解题思路

对于此有向无环图，定义 $\max(i,j)$ 为 i 点至 j 点的最大边权和，相对的 $\min(i,j)$ 为最小边权和。

若存在一点，从起点到此点边权和不唯一，且此点到终点边权和不唯一，则为使最终边权和唯一，两侧路径均需要修改：即存在一条路径从起点到此点，从此点到终点，存在两处修改，不符合题意。否则，必定可通过后文构造获得一个解，如此便可以得出这样一个结论：此图无解当且仅当存在点 i 满足 $\max(1,i) \neq \min(1,i) \wedge \max(i,n) \neq \min(i,n)$。

将满足 $\max(1,i) = \min(1,i) \wedge \max(1,j) \neq \min(1,j)$ 的边 (i,j,c) 称为割边。对于割边我们能导出性质：$\max(j,n) = \min(j,n)$；每条起点到终点的路径都只存在一条割边。

对于每一条割边 (i,j,c)，我们增加 $\max(1,n) - \max(1,i) - \max(j,n) - c$ 的边权。则显而易见的，在此构造下，任意一条从起点到终点的路线均有相同的边权和。

关于 $\max(i,j)$ 与 $\min(i,j)$ 的求解，由于我们只使用到从起点开始到某点的数据，和某点到终点的数据，因此可以在拓扑排序后，使用动态规划方法在线性时间内求得。

另外此题可以用网络流的方法解决。

3.3 试题来源

ACM Programming Contest World Finals, 2009, Problem E