中国计算机学会
China Computer Federation

题目选讲

周航锐

杭州学军中学教育集团文渊中学

2023 年 1 月

中国计算机学会 China Computer Federation

交互题。

有 n 只昆虫，第 i 只昆虫的类型是 a_i，你只知道昆虫的编号，不知道类型。

初始昆虫都在机器外，你可以执行如下操作：

- 将一只机器外的昆虫放进机器
- 将一只机器内的昆虫取出机器
- 查询当前机器内类型众数的数量

你需要求出，n 只昆虫中，最少的类型出现了几次。

三种操作的最大次数不得超过 $3n$，$2 \le n \le 2000$，交互库不自适应。

中国计算机学会
China Computer Federation

逐个加入，保持机器内众数数量为 1，则可以以 n 的代价得到数的种类数，令为 k。

考虑组合出一个基础操作：查询答案是否大于等于 x。这只需要逐个加入元素，保持机器内众数数量不超过 x，则对于每种类型，机器内会留下 $\min(cnt, x)$ 只虫子，判断机器内虫数是否为 kx 即可。

于是二分答案，即可得到操作次数为 $O(n\log n)$ 的方案。

考虑优化，发现二分的同时可以舍弃一部分虫子，具体的，如果答案大于等于 x，则舍弃机器内的虫子，否则舍弃机器内的虫子。如此一来，若当前二分区间长 x，只需考虑不超过 kx 只虫子。因此，二分部分操作次数大致是 $n + n/2 + n/4 + \cdots = 2n$，加上随机扰动足以通过本题。

中国计算机学会
China Computer Federation

有一张 n 个点，m 条边的无向图，每个点上初始有一个人。有 q 天，第 i 天会袭击点 b_i。每个人可以在图上以无限的速度行走，但是袭击时必须停留在某个不是袭击点的点上。

问 q 天结束之后，所有人行走距离之和最小是多少。

$n, m, q \le 10^5, w \le 10^9$

逆向思维，令 $f_{i,j}$ 表示如果时刻 i 在点 j，则需要多少代价生存到最后，则答案就是 $\sum_{i=1}^{n} f_{0,i}$。

不难发现，$f_{i-1,j}$ 和 $f_{i,j}$ 不同当且仅当 $j = b_i$，且有

$$f_{i-1,b_i} = \min_{(b_i,v)\in G} (w_{b_i,v} + f_{i,v})$$

因此，这个问题可以考虑成，给定一张图，需要支持单点修改，给定 u 查询 $\min_{(u,v)\in G}(w_{u,v}+a_v)$。

对度数分治，修改小度点时，暴力更新周围点的 set，查询时枚举周围的大度点。选取合适的阈值，即可做到 $O(q\sqrt{m\log n})$。

给定以 1 为根的树，定义一个点集是虚树当且仅当点集中任意两个点的 LCA 同样在点集中。

询问有多少长为 k 的虚树序列 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 满足 $S_1 = \{1, 2, \cdots, n\}, S_k = \{1\}, S_{i+1} \subset S_i$。

此处 $\subset$ 表示真子集，$n, k \leq 2000$。

中国计算机学会 China Computer Federation

题意与最后集合是空集区别不大，首先容斥掉真子集的限制，对于 $k = 1 \cdots n-1$ 分别求出长为 $k+1$ 的虚树序列数量，即 k 步删空树的方案数。

考虑某棵子树被删除的过程，一定是先删除到只剩根的一或零棵儿子树，然后删根，然后删除剩下的儿子树。于是令 $dp_{i,j}$ 表示以 i 为根的子树在 j 步内删空的方案数，则枚举 i 的删除时间，有

$$dp_{i,j}=\sum_{t=1}^{j}\left(\prod_{v\in son_i}dp_{v,t}\right)\left(1+\sum_{v\in son_i}\frac{dp_{v,j}-dp_{v,t}}{dp_{v,t}}\right)$$

不难优化到 $O(n^2)$

中国计算机学会
China Computer Federation

给定 n 个区域，每个区域形如某个点的左上方/左下方/右上方/右下方。

求最少选择多少区域覆盖整个平面（或无解）。

$n \leq 10^6$

中国计算机学会
China Computer Federation

把关键点分成四组，每组内处理成单调的点集，则每组至少选一个关键点。

首先注意到一个结论，相对的两组点集，至少有一组，每个集合中恰选一个。大致证明可以考虑两组一定有一组联通，则另一组符合条件。

不妨设左上，右下两组恰选一个，则枚举左下组最靠上的一个区域，后续可以不断贪心选择，此时用倍增优化已经可以做到 $O(n\log n)$。

特判答案为 4 的情形，则通过简单分析，由于不能一步到位，只需让右上组第一次选择的区域最靠下。那么左下组需要考虑的初始区域是唯一的，即左下组和左上组轮廓线相交点对应的区域，则算法的复杂度优化到 $O(n)$。

中国计算机学会
China Computer Federation

给定一棵 n 个点的树，每个点有点权。对于每个点，求出包含它的大小恰为 k 的所有子联通块中，最大的权值和。

$n \le 40000, k \le 3000$

中国计算机学会
China Computer Federation

考虑如果加上一个限制：子连通块必须包含 1。则问题转化为了经典 dp，即顺着 dfs 序 dp。处理出 dp 的前后缀信息，对于某个点，查询时将前后缀简单合并即可。

考虑点分治，每次处理包含分治中心的所有子联通块，则复杂度为 $O(nk\log n)$，不足以通过。

但是注意到，如果当前分治块大小不超过 k，可以直接返回，复杂度降为 $O(nk\log\frac{n}{k})$，足以通过本题。

中国计算机学会 China Computer Federation

一个序列 $a_1,\cdots,a_m$ 是好的当且仅当：

- $a_i > 0$
- $|a_i - a_{i+1}| = 1$
- $\sum_{i=1}^{m} a_i = n$

对于好的序列，定义权值 $f(a)=\sum_{i=1}^{m-1}[a_i > a_{i+1}]$，求所有好的序列的 $c^{f(a)}$ 之和。

$n \le 3\times 10^5$

中国计算机学会 China Computer Federation

令 $dp_{i,j}$ 表示当前总和是 i，上一个元素是 j，所有序列的权值总和是多少，则转移方程不难列出，但这个 dp 是 $O(n^2)$ 的。

中国计算机学会 China Computer Federation

毛估估长度和权值不能同时较大，于是考虑对 a_1 大小分治。令 $S=\sqrt{2n}+O(1)$。则当 $a_1>S$ 时，有 $m<S$，无需考虑 $a_i>0$ 这个限制，此时考虑换个方向进行 dp，令 $f_{i,j}$ 表示不考虑 $a_i>0$ 这个限制，长为 i 的序列满足 $a_1=0$，且总和为 j 的总权值，转移方程同样不难列出。计算答案时枚举 a_1 和 m 即可。

当 $a_1<S$ 时，序列最大元素不超过 $O(\sqrt{n})$，沿用 dp 数组的计算方式即可。

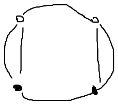
总复杂度 $O(n\sqrt{n})$

在一个环上均匀分布 $2n$ 个点，其中黑白点各 n 个。你要画 n 条线段，形成黑白点之间的匹配。

请你求出求最大的相交线段对数。

$n \leq 2 \times 10^5$

首先发现，最优解一定不存在如下结构：



否则替换为相交一定更优。

然后我们证明：最优解一定是，黑白点分别从某个位置断成序列，两个序列对应位置匹配。证明可以考虑，若第 i 个白点匹配了第 j 个黑点，但第 $i+1$ 个白点没有匹配第 $j+1$ 个黑点，则这两个点无论如何匹配，都会形成上述不优的结构。

中国计算机学会
China Computer Federation

对于一条线段，和他有关的交点数形式为 $\min(w_1, b_2) + \min(w_2, b_1)$，其中 w_1, w_2 表示两侧的白点个数，b_1, b_2 为黑点个数。由 $w_1 + w_2 = b_1 + b_2$ 可知，该式子即为 $\min(w_1 + b_1, w_2 + b_2)$，即两侧点数的较小值。

对于某个固定的白点，随着匹配黑点标号的增大，$\min$ 的取值方向只有一个分界点，对于黑点也是同理，双指针求出分界点后前缀和优化即可。

时间复杂度 $O(n)$。

中国计算机学会
China Computer Federation

给定一棵带边权的树，每次询问给出一个区间，求：

$$\min_{l\le i<j\le r} \operatorname{dist}(i,j)$$

$n \le 2\times 10^5, 1 \le w \le 10^9$

中国计算机学会
China Computer Federation

考虑点分治，则单次分治的问题转化为，有一个序列，询问区间中最小值加次小值，这个问题是简单的，但是同时存在 $O(n)$ 个长度不一的序列，且无法简单合并信息。

考虑对于一个序列，提取出若干关键点对，即可能成为答案的点对，然后对关键点对和询问做扫描线。

中国计算机学会 China Computer Federation

枚举次小值的位置 x，则最小值只需考虑两侧最近的不超过它的值，设左侧的位置为 y，左侧另一个不超过它的位置是 z，则有 $z < y < x$ 和 $a_y, a_z <= a_x$，可以发现 (y, z) 优于 (x, z)。因此对于一个长为 l 的序列，可以提取出不超过 $2l$ 个关键点对。

问题转化为了，给定若干 (l, r, v)，询问给出 L, R，求所有 $L \le l \le r \le R$ 的元素中，v 的最小值。只需简单扫描线线段树维护即可。

时间复杂度 $O(n \log^2 n / \log\log n)$

中国计算机学会 China Computer Federation

交互题。

有一棵 n 个点的树，询问时可以给出 $\{1, \cdots, n-1\}$ 的子集，交互库会返回，连上这些边后，图的联通情况（连通块的集合）。

你需要以任意顺序返回这棵树的所有边。

$n \le 131072, limit \ge 20$，$limit$ 表示询问次数限制，交互库不自适应。

首先考虑二进制分组，对于每一位，把这一位为 1 的集合和这一位为 0 的集合分别查询一遍，则两个点在某次查询中联通当且仅当路径上的所有边这一位相同。

如果两个点在 $\log n$ 次查询中都联通，则两个点相邻。于是我们得到了一个查询次数为 $2\log n$，时间复杂度为 $O(n^2 \log n)$ 的做法。

首先考虑如何降低查询次数，将点用 $2m$ 位恰包含 01 各 m 个的二进制数编号，对于每一位，只查询这一位为 1 的集合，则同样可以确定树。由 $\binom{20}{10} > 131702$ 可知，查询次数足够。

中国计算机学会 China Computer Federation

接下来考虑降低复杂度。首先尝试找到树的一个拓扑序，可以发现，一个点是叶子等价于其恰在 m 次查询里是孤立点。不断找到叶子后删去，于是可以得到树的一个拓扑序。

接下来考虑从根到叶逐个确定每个点的父亲。重新将这个点加入对应的若干集合，考虑每个集合中最早被加入的元素，则它的兄弟子树都不需要考虑了。而对于这些元素，只需考虑最晚的那个元素，这样即可排除父亲连向祖先的边，于是只剩下它的父亲。

总复杂度 $O(n \log n)$

中国计算机学会 China Computer Federation

有一条 1 到 n 的链，接下来有 m 次加边操作。

每次加边操作结束后，你需要求出，有多少删除两条边的方式，使得图不连通。

$n, m \le 2.5 \times 10^5$

中国计算机学会 China Computer Federation

由经典结论，问题大致可以转化为，将链上的边按照覆盖它的非链边的集合分类，求等价类大小的平方和。

等价类的分裂是一个树形结构，考虑通过分治求出每个时刻的等价类信息，只需在分治一个区间时保留与区间合并次数同阶的信息即可保证复杂度。

中国计算机学会 China Computer Federation

具体的，求出区间中点时刻的等价类划分状况，对于更早的时刻，此时等价的边一定等价，对于每个等价类只需保留一个元素即可。而对于更晚的时刻，此时不等价的边一定不等价，可以分开处理。

如果当前需要考虑的点只有一个，则直接对区间加上贡献返回即可，这对应到合并的树上就是，当前区间要处理的是一段没有分叉的链。

总复杂度 $O(n \log^2 n)$

定义一个序列是平衡的当且仅当它长为奇数，且正中间的元素恰是中位数。

定义一个排列是好的当且仅当其任意长为大于 1 的奇数的子区间都不是平衡的。

现在给出了排列的一部分，求有多少补全它的方式使得这个排列是好的。

$n \le 10^6$, F1: $n \le 1000$

中国计算机学会 China Computer Federation

考虑所有长为 3 的区间，可以得出这个序列是大小交替的，不妨设奇数位大于相邻的偶数位。在此基础上考虑所有长为 5 的区间，可以发现奇数位形成一个单峰序列，偶数维形成单谷序列。不难证明，这就是这个序列合法的充要条件。

考虑将序列重排到环上，下标序列为 $\{1, 3, \cdots, n, n-1, n-3, \cdots, 2\}$ (n 为偶数是类似的)，则合法的序列一定满足，从某个位置断环为链是一个单峰序列。于是可以列出 dp 方程，令 $dp_{i,j}$ 表示环上从 i 到 j 顺时针填了最大的若干数的方案数。时间复杂度为 $O(n^2)$，足以通过 F1。

枚举起点，假设排列全部未确定。构造序列的过程可以认为在环上，每次向左扩展一步或向右扩展一步，将两种操作分别看作在平面上向右走一步和向上走一步，则不合法状态恰是两条斜线的上下方，于是转化为经典问题，预处理组合数前缀和即可。

对于排列不是全部确定的情况，由于除了第一段扩展后，后续的起始区间和终止区间可能性都是 $O(1)$ 的，同样可以沿用上述做法。

时间复杂度 $O(n)$

中国计算机学会
China Computer Federation

平面上有 n 个黑点，接下来有 m 个白点依次被加入。
对于一对黑白点，如果黑点在白点右上角，那么连一条边。
你需要在每个白点加入后，求出二分图匹配大小。
$n, m \leq 10^5$

中国计算机学会 China Computer Federation

首先将问题转化为二分图最大独立集，即在平面上画一条从左上至右下的折线，最大化右上角的白点加左下角的黑点数。

对于一次询问，可以通过线段树扫描线求出最优的折线以及方案，时间复杂度 $O(n\log n)$。

考虑整体二分，注意到折线是单调的，因此在求出某个时间点的决策后，每个点只需要递归到一侧，贡献可以直接加入另一侧。

因此总复杂度 $O(n\log^2 n)$，实际上这个分治对于更一般的二分图也是通用的。

中国计算机学会
China Computer Federation

给你一个 01 串，每次可以删除连续 2 或 3 个相同的字符，请你构造一个方案将串删空或报告不存在。

$n \le 10^6$

中国计算机学会 China Computer Federation

由小凯的疑惑可知，题意等价于可以删除任意长度大于 1 的同色连续段。

首先转化题意，将原串拆分成极长同色连续段后，将连续段分为长为 1 的和长度大于 1 的，则原串转化为一个 12 串，而题意等价于你可以将?2? 变化为 2，问是否能将串变为全由 2 组成。

中国计算机学会
China Computer Federation

首先考虑 12 串长为 $2k+1$ 的情况，若正中间的元素是 2，则显然这个串可以删空。

若正中间的元素是 1，则考虑在左右侧各找一个最近 2，然后将问题转化为第一种情况。按照这个思路，能删空等价于不存在一个长为 k 的全 1 连续段（一定包含正中间的元素）。

而不难发现，如果存在一个长为 k 的包含正中元素的连续段，则即使其余元素都是 2 也无济于事。于是我们完成了对 12 序列长为奇数的讨论。

中国计算机学会 China Computer Federation

对于 12 串长为 $2k$ 的情况，若可以删空，则有某一时刻串恰有两个 2，则一定存在一个分界点，将 12 串划为两个长为奇数的串，两半分别合法。于是我们得到了整个题的解法，时间复杂度 $O(n)$。

中国计算机学会 China Computer Federation

谢谢大家！