

Versuch 23 - Quanten Analogien

Maximilian Block
maximilian.block@tu-dortmund.de

Jan Willeke
jan2.willeke@tu-dortmund.de

Durchführung am 18. November 2020
Abgabe am 25. November 2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
3 Versuchsaufbau und Durchführung	6
3.1 Der grundlegende Aufbau	6
3.2 Vorbereitungen	6
3.3 Das Wasserstoffatom	6
3.3.1 Messung der Druckamplituden	8
3.3.2 Aufspaltung der Peaks	8
3.3.3 Druckamplitude mit Zwischenring	8
3.4 Das Wasserstoffmolekül	8
3.4.1 Blendendurchmesserabhängigkeit des Frequenzspektrums	8
3.4.2 Winkelverteilung mit der 16mm Blende	9
3.5 Eindimensionaler Festkörper	9
3.5.1 Übergang Molekül zu Festkörper	9
3.5.2 Einfluss der Blenden	9
3.5.3 Festkörper mit gebrochener Symmetrie	9
3.5.4 Einfluss abwechselnder Zylinderhöhen	9
3.5.5 Einfluss abwechselnder Blendendurchmesser	10
4 Auswertung	11
4.1 Vorbereitungen	11
4.2 Das Wasserstoffatom	13
4.2.1 Berechnung der Druckamplituden	14
4.2.2 Aufspaltung der Peaks	17
4.2.3 Druckamplitude mit Zwischenring	17
4.3 Das Wasserstoffmolekül	18
4.3.1 Blendenabhängigkeit des Frequenzspektrums	18
4.3.2 Winkelverteilung mit der 16mm Blende	20
4.4 Eindimensionaler Festkörper	22
4.4.1 Übergang Molekül zu Festkörper	22
4.4.2 Einfluss der Blenden	23
4.4.3 Modifikationen der Struktur der Resonatorkette	24
5 Diskussion	27
5.1 Wasserstoffatom	27
5.2 Winkelverteilung des zweiten Peaks des Wasserstoffmoleküls	28
5.3 Festkörper Modellierung	28
Literatur	29

1 Ziel

Ziel ist es, quantenmechanische Systeme, beispielsweise eines Wasserstoffatoms, eines Wasserstoffmoleküls und eines eindimensionalen Festkörpers, klassisch zu veranschaulichen. Dazu werden akustische Experimente mit Hohlraumresonatoren und einer Resonatorkette aus Aluminiumzylindern durchgeführt. Die dabei genutzten Wellen sind Schallwellen im Gegensatz zu den Zustands-Wellenfunktionen der Quantenmechanik. Im Anschluss der Experimente werden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede erarbeitet.

2 Theorie

Aufgrund der Tatsache, dass die klassischen Analogien auf den quantenmechanischen Systemen basieren, werden zunächst die quantenmechanischen Grundlagen eingeführt und anschließend auf die klassischen Systeme übertragen. Dabei beginnen wir mit dem Wasserstoffatom und den zugehörigen Wellenfunktionen. Dazu wird der Hamilton-Operator des betrachteten Systems bestimmt:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} . \quad (1)$$

Dieser Operator beschreibt im Kontext der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad (2)$$

die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Da der Hamilton-Operator zeitunabhängig ist, lässt sich mithilfe eines Produktansatzes Orts- und Zeitabhängigkeit separieren, wodurch die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}\psi(\vec{r}) = E\psi \quad (3)$$

resultiert. Augrund der Kugelsymmetrie des Systems werden Kugelkoordinaten verwendet und wir werden im Folgenden nur die Kugelflächenfunktionen betrachten, da die Radialfunktionen für diesen Versuch nicht relevant sind. Damit ergibt sich durch Einsetzen des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten die partielle Differentialgleichung

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi(\vec{r})) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\vec{r}) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}(\vec{r}) \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \psi(\vec{r}) \quad (4)$$

und auch diese Differentialgleichung lässt sich mithilfe eines Produktansatzes lösen. Dies führt für die winkelabhängigen Funktionen zu der vereinfachten DGL:

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \varphi^2}(\theta, \varphi) \right] \stackrel{!}{=} c_1 \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) . \quad (5)$$

Zudem lässt sich zeigen, dass der Operator auf der linken Seite genau die Darstellung des Operators \hat{L}^2 in Kugelkoordinaten ist, wobei die Komponenten über $\hat{L}_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{r}_j \hat{p}_k$ definiert sind. Dann gilt aufgrund der Eigenwertgleichung

$$\hat{L}^2 |\psi\rangle = \hbar^2 l(l+1) |\psi\rangle \quad (6)$$

für die Konstante c_1 aus (5) $c_1 = \hbar^2 l(l+1)$ mit der Bahndrehimpulsquantenzahl $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ein weiterer wesentlicher Aspekt ist, dass über einen weiteren Produktansatz bei (5) die Differentialgleichung

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = c_2 \Phi(\varphi) \quad (7)$$

isoliert werden kann. Hierzu gehört die Eigenwertgleichung

$$\hat{L}_z |\psi\rangle = \hbar m |\psi\rangle \quad (8)$$

mit der magnetischen Quantenzahl $m \in \{-l, -l+1, \dots, +l\}$. Die Entartung der Eigenwerte bzgl. m resultiert dabei aus der sphärischen Symmetrie, während die Entartung der Eigenenergien bzgl. l eine Folge des $1/r$ -Potentials und der damit zusammenhängenden $SO(4)$ -Symmetrie ist. Dies ist auch der erste Unterschied zum klassischen System. Denn da beim klassischen Analogon diese Symmetrie gebrochen ist, wird keine Entartung in l zu sehen sein, während die Entartung in m erst durch Brechung der Kugelsymmetrie aufgehoben wird. Die Funktionen, die die oben angegebene Differentialgleichung für den Winkelanteil der Schrödinger-Gleichung lösen, werden als Kugelflächenfunktionen bezeichnet und ergeben sich zu

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (9)$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen P_{lm} . Zu beachten ist dabei, dass bei Messungen immer nur Betragsquadrate gemessen werden können. Der klassische Fall kann relativ analog betrachtet werden, da hierbei die Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\Delta p}{\rho \kappa} \quad (10)$$

gilt. Auch hier ergeben sich Kugelflächenfunktionen als Fundamentallösungen, da der zusätzliche Coulomb-Term in der Schrödinger-Gleichung lediglich die Radialfunktionen beeinflusst. Dem entsprechend ist auch im klassischen Fall eine Entartung in m gegeben, die genau wie im quantenmechanischen Fall erst durch Symmetriebrechung aufgehoben wird. Dabei wird ein Kugelresonator für die Modellierung verwendet und zudem die Tatsache ausgenutzt, dass es bei bestimmten Frequenzen zu Resonanz kommt, welche realisierbaren Zuständen entsprechen.

Auch das Wasserstoffmolekül kann ähnlich beschrieben werden, jedoch befindet müssen für die Elektronen auch in erster Näherung die Potentiale beider Protonen berücksichtigt

werden. Im Allgemeinen ist es nicht möglich, eine analytische Lösung zu bestimmen, jedoch können Näherungen mithilfe der Störungsrechnung gefunden werden und ebenfalls ist das Variationsverfahren ein geeignetes Mittel zur Bestimmung möglicher Orbitale. Beispielsweise sind für zwei gebundene Wasserstoffatome zwei verschiedene Gesamtwellenfunktionen und damit Orbitale möglich, welche auch im klassischen Analogon bestimmt werden können. Dabei kommt es zu einer Überlappung von Orbitalen, wobei nur die Überlappung, bei der ein gerade Zustand resultiert, bindend wirkt. Überlagerungen, bei denen die Zustände einer Phase von $\Delta\varphi = \pi$ aufweisen, werden als ungerde oder auch anti-bindende Zustände bezeichnet. Bei der Analogie der Akustik werden zwei Kugelresonatoren miteinander gekoppelt, wodurch sich die Frequenzabhängigkeiten verändern und weitere Zustände betrachtet werden können.

Bei der Betrachtung von Festkörpern muss ebenfalls das Pauli-Prinzip beachtet werden, welches verbietet, dass sich unterschiedliche Fermionen im exakt gleichen Zustand befinden. Dadurch ergeben sich, anders als bei Atomen, keine scharf definierten Spektrallinien, sondern sogenannte Energiebänder, welche den erlaubten Zuständen entsprechen. Ebenso existieren auch Bandlücken, welche auch als „verbogene Zonen“ bezeichnet werden. Ein wesentliches Charakteristikum eines Festkörpers ist die Dispersionsrelation $E = E(\vec{k})$, welche in erster Näherung proportional zu k^2 ist. Dies liegt an der Tatsache, dass die Modellierung des Festkörpers über Kastenpotentiale mit periodischen Randbedingungen geschieht, welche durch jene Dispersionsrelation ausgezeichnet sind. Bei den akustischen Hohlraumresonatoren ist die Dispersionsrelation linear abhängig von der Wellenzahl k und es kommt zu Resonanz, wenn die Länge eines Resonators einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge entspricht. Des Weiteren sind Festkörper im Allgemeinen nicht perfekt und es müssen praktisch immer Defekte berücksichtigt werden. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass durch die Defekt die Struktur des Festkörpers nicht mehr periodisch ist. Typische Beispiele dafür sind Fehlstellen oder Fremdatome in der Struktur. Fremdatome können durch einen veränderten Potentialtopf modelliert werden, sodass im klassischen Analogon die Länge von verschiedenen Resonatoren variiert werden kann.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

3.1 Der grundlegende Aufbau

Der grundlegende Aufbau besteht aus kugelförmigen Hohlraumresonatoren, einem Baukasten für die zylinderförmigen Hohlraumresonatoren, sowie weiteren Geräten zur Erzeugung und Messung der akustischen Wellen. Eine Schaltskizze findet sich in Abbildung 1. Die kugelförmigen Hohlraumresonatoren, insgesamt zwei Stück, verfügen über einen Mikrofoneingang, über den die Frequenzen letztlich mittels eines Lautsprechers wiedergegeben werden, und über einen Detektorausgang, über den das Messsignal übertragen wird. Für die zylinderförmigen Hohlraumresonatoren liegt ein Baukasten mit Zylindern unterschiedlicher Größen $h = \{12.5, 50, 75\}$ mm vor. Ebenfalls liegen weitere Blenden vor, welche für die Verbindung der einzelnen Zylinder eingesetzt werden. Auch diese weisen unterschiedliche Durchmesser von $d = \{10, 13, 16\}$ mm auf. Die verschiedenen Bauteile werden auf einer vorgefertigten Schienenkonstruktion angebracht, welche über ein Mikrofon und Detektor an den jeweiligen Enden verfügt. Die genannten Bauteile finden sich in der Abbildung 2. Zur Veranschaulichung und Aufnahme der Messwerte wird ein Oszilloskop sowie ein Computer verwendet. Über einen dafür vorgefertigten Anbau lässt sich über den Computer direkt ein Frequenzsignal ausgeben, sowie ein Detektorsignal empfangen. Die dabei gesammelten Daten werden mithilfe eines Computerprogramms abgespeichert und visualisiert. Das Oszilloskop besitzt im Gegensatz zum Computer kein geschlossenes Messvorgang, sodass weitere Vorrichtungen für die Datenverarbeitung eingesetzt werden. Unter anderem wird die Frequenz von einem Frequenzgenerator erzeugt, der über die sweep-Funktion einen Frequenzbereich periodisch wiedergeben kann. Um das Frequenzsignal verarbeiten zu können, ist es zudem notwendig, das Signal vorher durch einen Frequenz-Amplitude-Konverters zu schicken und dann erst auf das Oszilloskop zu übertragen.

3.2 Vorbereitungen

Mithilfe des Baukastens werden Zylinder der Höhe $h = 50$ mm der Konstruktion nach und nach hinzugefügt. Dabei wird nach jedem Hinzufügen eines Zylinders das Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 kHz mithilfe des Oszilloskops aufgenommen. Der dabei generierte Verlauf wird aufgenommen und die Messung mit der um ein Zylinder verlängerten Konstruktion erneut gestartet. Dieser Vorgang wird bis zum einschließlich zwölften Zylinder durchgeführt. Die vorherigen Messungen werden anschließend in gleicher Weise mit dem Computer durchgeführt. Anschließend wird das Frequenzspektrum eines einzelnen Zylinders der Höhe $h = 75$ mm aufgenommen.

3.3 Das Wasserstoffatom

Mit dem Computer wird ein Frequenzspektrum des kugelförmigen Hohlraumresonators aufgenommen. Dabei befinden sich die zwei Halbkugeln in einer Ausrichtung von $\alpha = 180^\circ$ zueinander. Aufgenommen wird von 0,1 kHz bis 12 kHz in 10Hz-Schritten mit einer Messdauer von je 60ms/Schritt. Anschließend werden die Phasenverschiebung

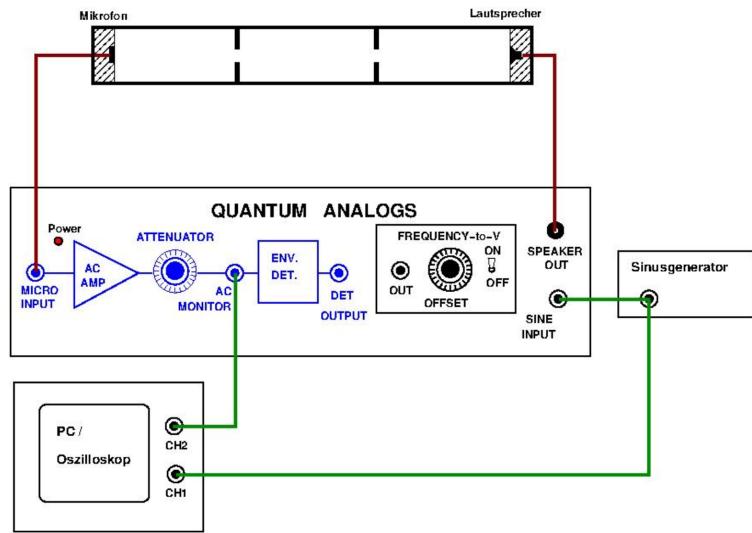


Abbildung 1: Schaltskizze des grundlegenden Aufbaus zur Messung akustischer stehender Wellen. [1]



Abbildung 2: Die Hohlraumresonatoren, Irisblenden und der Baukasten. [1]

der Resonanzfrequenzen gegenüber denen des Sinusgenerators mithilfe des Oszilloskops gemessen.

3.3.1 Messung der Druckamplituden

Für die Messung der winkelabhängigen Druckamplituden des Wasserstoffatoms wird das Frequenzspektrum in Abhängigkeit der Winkel vermessen. Dazu werden die Frequenzspektren in 5° Schritten von 0° bis 180° erneut mit einer Messdauer von 60ms/Schritt von 0.1 kHz bis 10 kHz aufgenommen. Die letztendlichen Druckamplituden werden für die Resonanzfrequenzen bei $\{2.3, 3.7, 6.25, 7.4\}$ kHz bestimmt, welche sich aus den Veränderungen der Amplituden in Abhängigkeit des Winkels ergeben.

3.3.2 Aufspaltung der Peaks

Der Kugelresonator wird nun mit den vorhandenen Zwischenringen erweitert. Diese werden zwischen den Halbkugeln angebracht. Anschließend werden die Messungen des Frequenzspektrums von 1.8 kHz bis 2.6 kHz bei gleicher Zeiteinstellung und einer Auflösung von 1 Hz aufgenommen. Die Position der beiden Halbkugeln zueinander sollte dabei 180° betragen. Die Messungen werden für Zwischenringdurchmesser von $d = \{3, 6, 9\}$ mm gemessen. Anschließend werden diese mit dem Ursprungs Peak ohne Zwischenring verglichen.

3.3.3 Druckamplitude mit Zwischenring

Wie bei der bereits beschriebenen Druckamplitudenmessung wird auch hier diese für die Resonanzfrequenz von 2.3 kHz für die verschiedenen Winkel untersucht. Als Zwischenring wird der 9 mm Ring verwendet und es wird in dem Bereich von 1.8 kHz bis 2.6 kHz mit 60ms/Schritt bei einer Auflösung von 2 Hz gemessen. Die Ergebnisse werden anschließend geplottet und dessen Form mit den Quantenzahlen in Verbindung gesetzt.

3.4 Das Wasserstoffmolekül

Für das Analogon eines Wasserstoffmoleküls werden zwei Kugelresonatoren verwendet, die mittels eines beiliegenden Verbindungsstückes aneinander gekoppelt sind. Das Kopplungsglied besitzt ein Blendenvorrichtung sodass sich stehende Wellen in beiden Systemen bilden und die Kopplung variiert werden kann.

3.4.1 Blendendurchmesserabhängigkeit des Frequenzspektrums

Die Resonatoren werden in die Position von $\theta = 180^\circ$ gebracht, sodass sich Lautsprecher und Mikrofon gegenüberstehen. Anschließend werden hochauflöste Frequenzspektren der 2.3 kHz Resonanz in Abhängigkeit der verschiedenen Blendendurchmesser aufgenommen. Die Blenden werden vor jeder Messung an dem dafür vorgesehenen Platz am Kopplungsglied montiert. Anschließend wird mithilfe des Computers ein Frequenzspektrum von 2.2 kHz bis 2.6 kHz in 2 Hz Schritten bei einer zeitlichen Auflösung von

75ms/Schritt aufgenommen. Dies wird für die verschiedenen Blendendurchmesser von $d = \{10, 13, 16\}$ mm durchgeführt.

3.4.2 Winkelverteilung mit der 16mm Blende

Für die Messung der Winkelverteilung der 16mm Blende wird ein Frequenzspektrum von 2.2 kHz bis 2.5 kHz in 5° Schritten bei 75 ms/Schritt aufgenommen. Die Winkelverteilung ergibt sich aus den verschiedenen Amplituden der Resonanzfrequenz bei 2.3 kHz. Die dabei entstehende Winkelverteilung soll interpretiert werden. Als zusätzliche Information wird dazu die Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Kugelresonatoren mithilfe des Oszilloskops aufgenommen. Hierbei ist es notwendig, die Phasenverschiebung anhand der Ursprungssinusspannung separat zu vermessen und am Ende zu summieren.

3.5 Eindimensionaler Festkörper

Bei dieser Messreihe wird ein eindimensionaler Festkörper simuliert. Das Analogon des Festkörpers wird dabei aus einer Kette von Zylindern aufgebaut, welche mit Blenden verbunden sind. Durch die Erhöhung der Anzahl der Zylinder wird der Übergang von einem Atom zum Molekül und zu einem Festkörper modelliert.

3.5.1 Übergang Molekül zu Festkörper

Es wird das Frequenzspektrum von 0.1 kHz bis 12 kHz für eine verschiedene Anzahl der 50mm Zylinder aufgenommen. Die Messung startet mit zwei Zylindern und wird nach jedem aufgenommenen Frequenzspektrum um einen weiteren Zylinder ergänzt bis einschließlich dem zehnten Zylinder. Zwischen den Zylindern befinden sich die 16mm Blenden und die Auflösung der Messung beträgt 5 Hz bei 50ms/Schritt.

3.5.2 Einfluss der Blenden

Um den Einfluss der Blenden auf die Resonanzfrequenzen zu ermitteln, werden die vorherigen Messungen für 2, 4 und 10 Zylindern der Höhe $h = 50$ mm durchgeführt. Die dabei genutzten Blenden sind die 10mm bzw. die 13mm Blenden.

3.5.3 Festkörper mit gebrochener Symmetrie

Um eine gebrochene Symmetrie des Festkörpers zu simulieren, ersetze man einen der 50mm Zylinder innerhalb der Kette mit verschiedenen Zylindern der Höhe $h = \{37.5, 62.5, 75\}$ mm und nehme die Frequenzspektren auf.

3.5.4 Einfluss abwechselnder Zylinderhöhen

In diesem Versuchsteil wird der Einfluss abwechselnder Zylinder auf das Frequenzspektrum untersucht. Dazu wird eine 10 zylindrige Zylinderkette aufgebaut mit sich abwechselnden Zylindern der Höhe $h = \{50, 75\}$ mm. Zwischen den Zylindern werden die 16mm Blenden

eingesetzt. Das dabei erstellte Frequenzspektrum werde mit den Spektrum der einzelnen Zylinder der genutzten Höhen verglichen und analysiert.

3.5.5 Einfluss abwechselnder Blendendurchmesser

Wie bereits im vorherigen Versuchsteil wird eine Zylinderkette aus acht Zylindern aufgebaut. Jedoch werden hierbei abwechselnde Blendendurchmesser von 13mm und 16mm verwendet. Die dabei genutzten Zylinderhöhen haben eine Höhe von $h = 50\text{mm}$.

4 Auswertung

4.1 Vorbereitungen

Zur Eichung der Messanlagen wurde der aus Zylindern aufgebaute Hohlraumresonator jeweils mit dem Oszilloskop als auch mit dem Computer aufgenommen. Die Messergebnisse finden sich zum anschaulichen Vergleich in Abbildung 3.

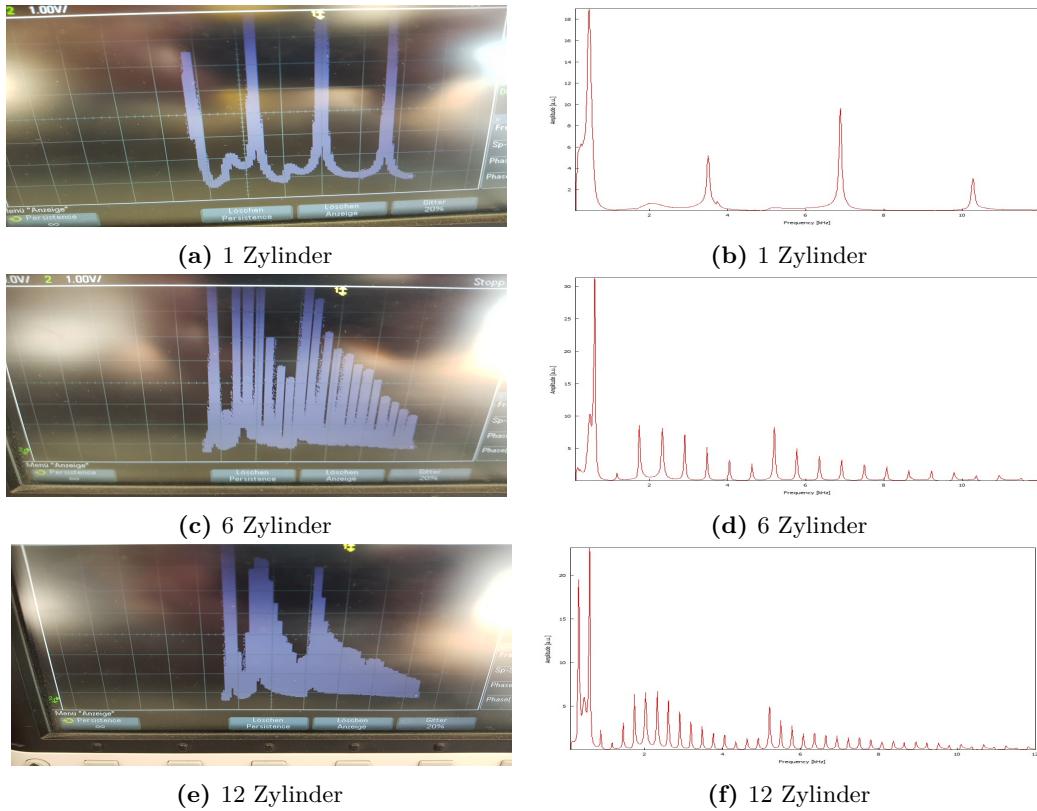


Abbildung 3: Die aufgenommenen Frequenzspektren der zylinderförmigen Hohlraumresonatoren mit unterschiedlicher Länge. Die Aufnahme erfolgt mittels eines Oszilloskops (links) und Computers (rechts).

Die zwei unabhängig voneinander aufgenommenen Frequenzspektren weisen eine gleiche Struktur auf, welche letztlich näherungsweise ein charakteristisches Spektrum eines Festkörpers wiederspiegelt. Dabei sind die Moden des Systems zu sehen. Zudem hängen die Frequenzen von der Länge des Systems ab, welche ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge für Resonanz sein muss. Mit zunehmenden Frequenzen nimmt die Amplitude ab, was den Erwartungen entspricht. Insgesamt bestätigen die Messungen die Erwartungen und die Eichung war damit erfolgreich. Für spätere Messungen erfolgt die Messung des Frequenzspektrums mittels des Computers. Zum Vergleich wurde das Spektrum eines einzelnen Zylinders mit der Höhe $h = 75$ mm aufgenommen. Das dabei resultierende Frequenzspektrum ist in Abbildung 4 ersichtlich.

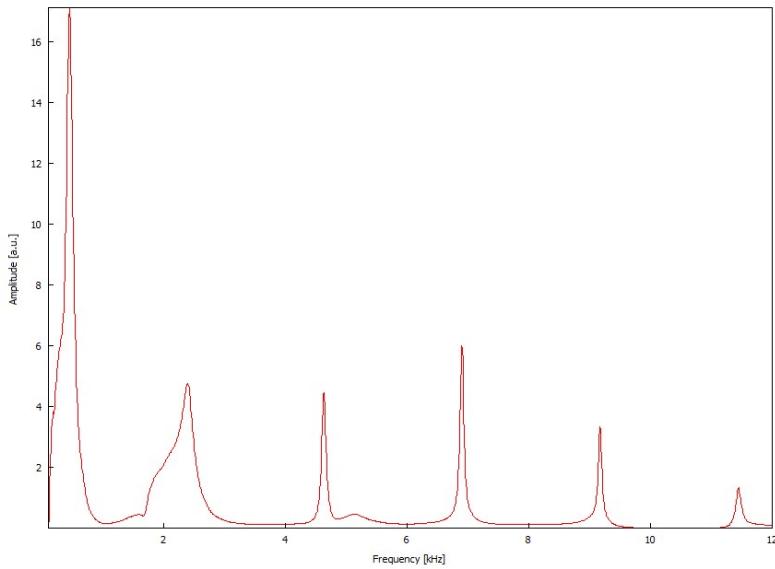


Abbildung 4: Das Frequenzspektrum eines zylinderförmigen Hohlraumresonators der Höhe $h = 75$ mm aufgenommen mittels des Computers.

Das Frequenzspektrum des 75 mm Zylinders zeigt dabei eindeutig die periodisch auftretenden Resonanzen, also stehende Wellen, die sich ausbilden. Ebenfalls lässt sich beim Vergleich mit dem 50 mm Zylinder feststellen, dass das Frequenzspektrum des 75mm Zylinders Resonanzen aufweist, die ca. bei Frequenzen auftreten, die $\frac{2}{3}$ der Resonanzfrequenzen des 50mm Zylinders entsprechen. Dies folgt letztlich aus der größeren Höhe des 75mm Zylinders, wodurch hierbei die stehenden Wellen die eineinhalbache Wellenlänge der Wellen bei dem 50mm Zylinders haben. Da die Frequenz umgekehrt proportional zur Wellenlänge ist, folgt hieraus sofort der Faktor $\frac{2}{3}$.

4.2 Das Wasserstoffatom

Es wird in diesem Teil das Frequenzspektrum des kugelförmigen Hohlraumresonators bei einer Ausrichtung von $\theta = 180^\circ$ aufgenommen. Die Messergebnisse finden sich in Abbildung 5.

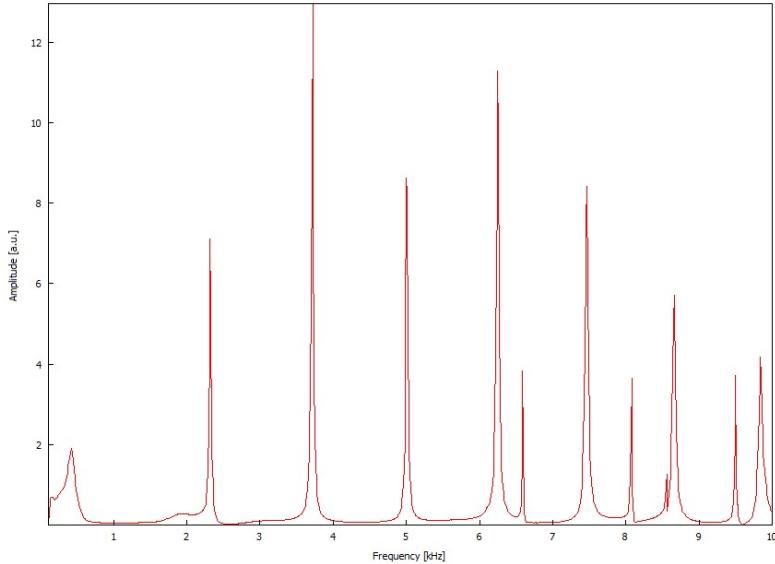
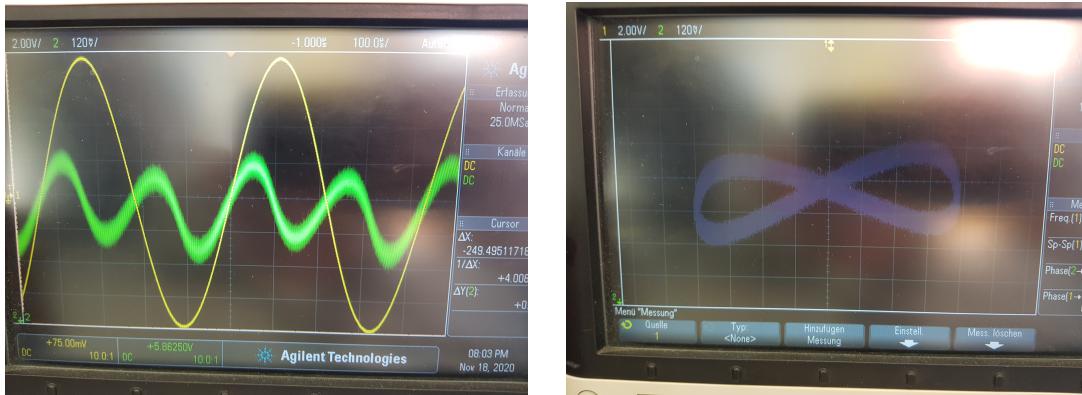


Abbildung 5: Das Frequenzspektrum des kugelförmigen Hohlraumresonators von 0.1 kHz bis 10 kHz bei einer Ausrichtung von $\theta = 180^\circ$.

Die Resonanzfrequenzen werden weiterhin auf die Phasenverschiebung gegenüber des Ursprungssignals des Sinusgenerators untersucht. Dabei ergibt sich für alle vier ersten Ordnungen der Resonanzfrequenzen die Darstellung in Abbildung 6. Die Lissajous Figuren weisen dabei auf eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = \pi$ hin bei einem Frequenzverhältnis von 1:2. Dies folgt daraus, dass beide Signale im Normalbetrieb unterschiedliche Frequenzen aufweisen, sodass eine genaue Bestimmung der Phasenverschiebung im normalen Modus nicht möglich ist. Eine genauere Auseinandersetzung mit dieser Messung ist in der Diskussion zu finden.



(a) Normalbetrieb des Oszilloskops

(b) XY-Betrieb des Oszilloskops

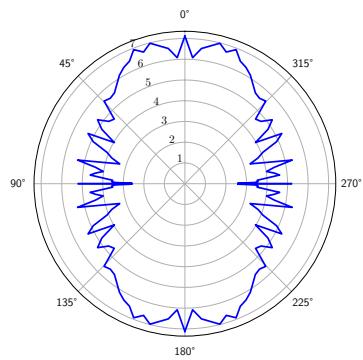
Abbildung 6: Die Messung der Phasenverschiebung der Resonanzfrequenzen am Beispiel der Resonanz zweiter Ordnung bei 2.3 kHz. Es sind die verschiedenen Darstellungsmodi des Oszilloskops zu sehen. Die gelbe Linie ist der Verlauf des Ursprungssignals des Sinusgenerators, während die grüne Linie das Signal des Detektors ist.

4.2.1 Berechnung der Druckamplituden

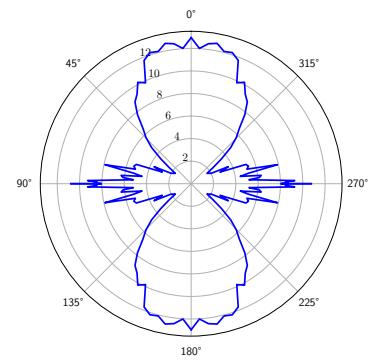
Um die Druckamplituden aus den gemessenen Werten bestimmen zu können, ist vorerst eine Umrechnung des gemessenen Winkels θ in den Polarwinkel φ notwendig. Die Umrechnung erfolgt mittels

$$\varphi = \arccos(0.5 \cdot \cos(\theta) - 0.5), \quad (11)$$

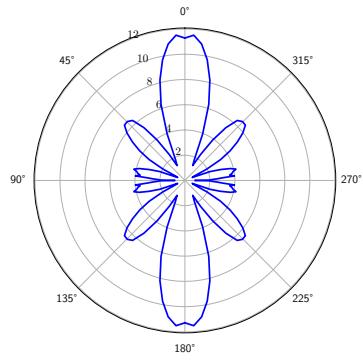
was aus einer Analyse mittels Drehmatrizen folgt [[quanten_analogien_dresden](#)]. Die gemessenen Werte der verschiedenen Resonanzfrequenzen ergeben Abbildung 7, wenn in Abhängigkeit des umgerechneten Winkels aufgetragen werden. Zum Vergleich finden sich die von der Theorie vorhergesagten Werte in Abbildung 8.



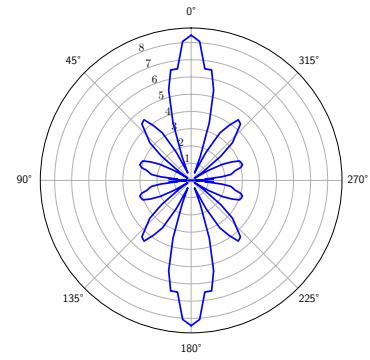
(a) Resonanzfrequenz 2.3 kHz



(b) Resonanzfrequenz 3.7 kHz



(c) Resonanzfrequenz 6.62 kHz



(d) Resonanzfrequenz 7.4 kHz

Abbildung 7: Die Messung der Amplituden der Resonanzfrequenzen in Abhängigkeit des Azimutwinkels φ .

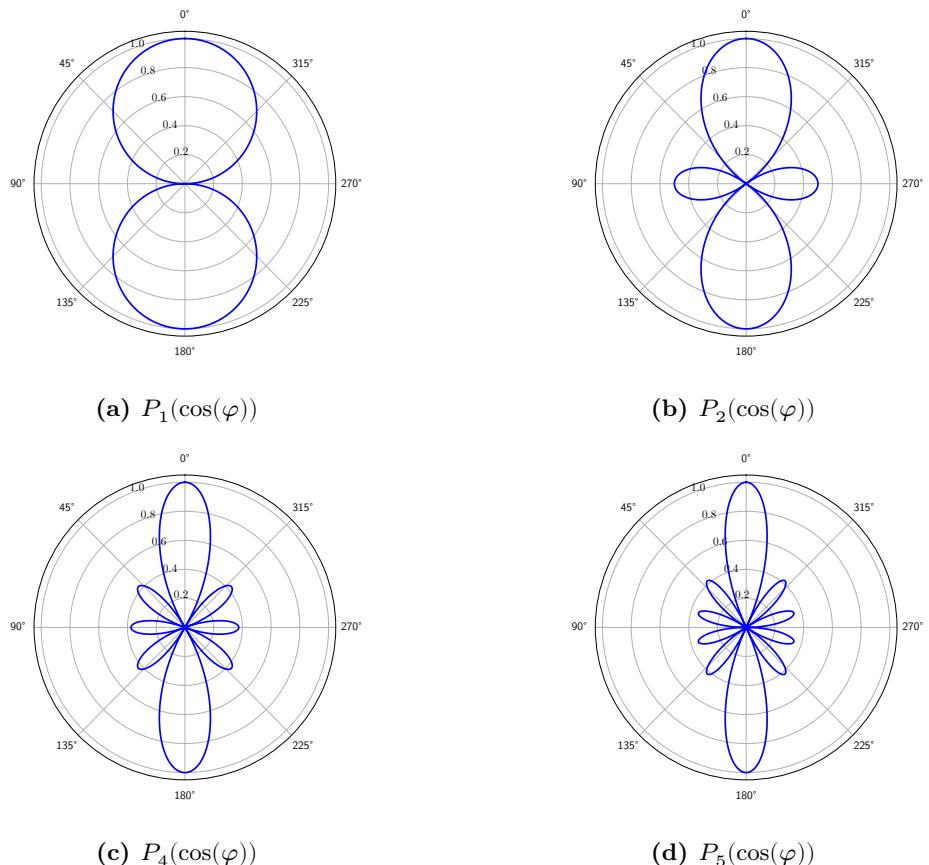
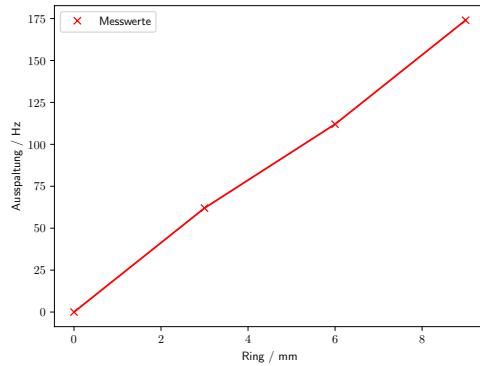


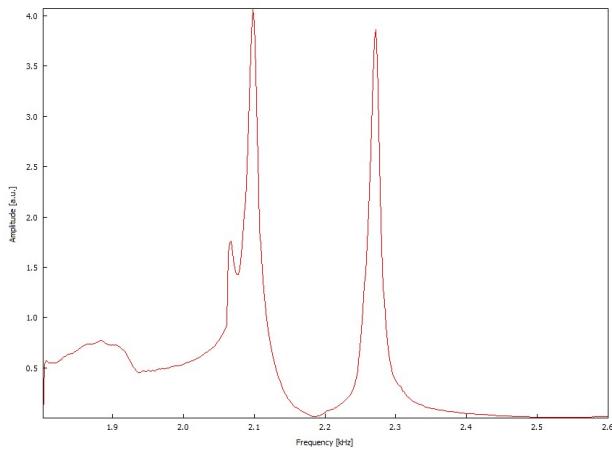
Abbildung 8: Die Legendre-Polynome, welche mit den gemessenen Druckamplituden übereinstimmen.

4.2.2 Aufspaltung der Peaks

Es werden die Frequenzspektren um die Resonanzfrequenz von 2.3 kHz für verschiedene Zwischenringhöhen aufgenommen. Die dabei resultierende Aufspaltung ist in Abbildung 9a visualisiert.



- (a) Die Aufspaltung ursprünglichen einzelnen Resonanzfrequenz bei ca. 2.3 kHz in zwei unterschiedliche Resonanzfrequenzen. Die Aufspaltung wurde in Abhängigkeit der Zwischenringhöhe bei einer Winkelausrichtung von $\varphi = 0^\circ$ gemessen.

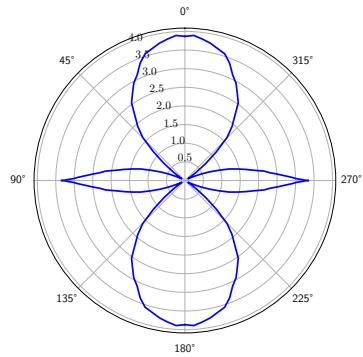


- (b) Es ist der aufgespaltene Peak in dem Frequenzspektrum bei ungefähr 2.3 kHz für einen Zwischenring der Dicke 9 mm bei einer Winkeleinstellung von 180° .

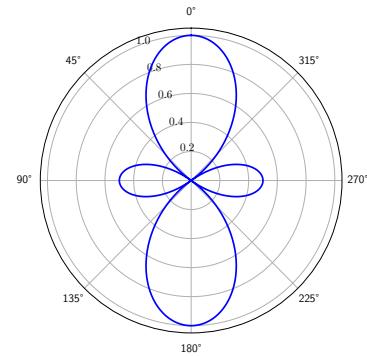
Abbildung 9: Der Peak bei 2.3 kHz des Kugelresonators kann mithilfe von Zwischenringen aufgespalten werden, welche die Kugelsymmetrie brechen.

4.2.3 Druckamplitude mit Zwischenring

Die Druckamplitude des 9 mm Zwischenringes findet sich in Abbildung 10.



(a) Gemessene Druckamplitude.



(b) $P_2(\cos(\varphi))$

Abbildung 10: Die Druckamplitude im Vergleich mit dem zugehörigen Legendre-Polynom.

Der Vergleich der Druckamplitude mit den Legendre-Polynomen liefert die Quantenzahlen $l = 2$ und $m = 0$. Mit Vergleich der zugeordneten Legendre-Polynome als Lösung des Wasserstoffatoms ergibt sich als Lösung das 3d Orbital.

4.3 Das Wasserstoffmolekül

4.3.1 Blendendependenz des Frequenzspektrums

Es werden hochauflöste Frequenzspektren der gekoppelten Kugelresonatoren um der Resonanzfrequenz von 2.3 kHz aufgenommen. Dabei werden verschiedene Blendendurchmesser eingesetzt. Die dabei entstehenden Frequenzspektren finden sich in Abbildung 11.

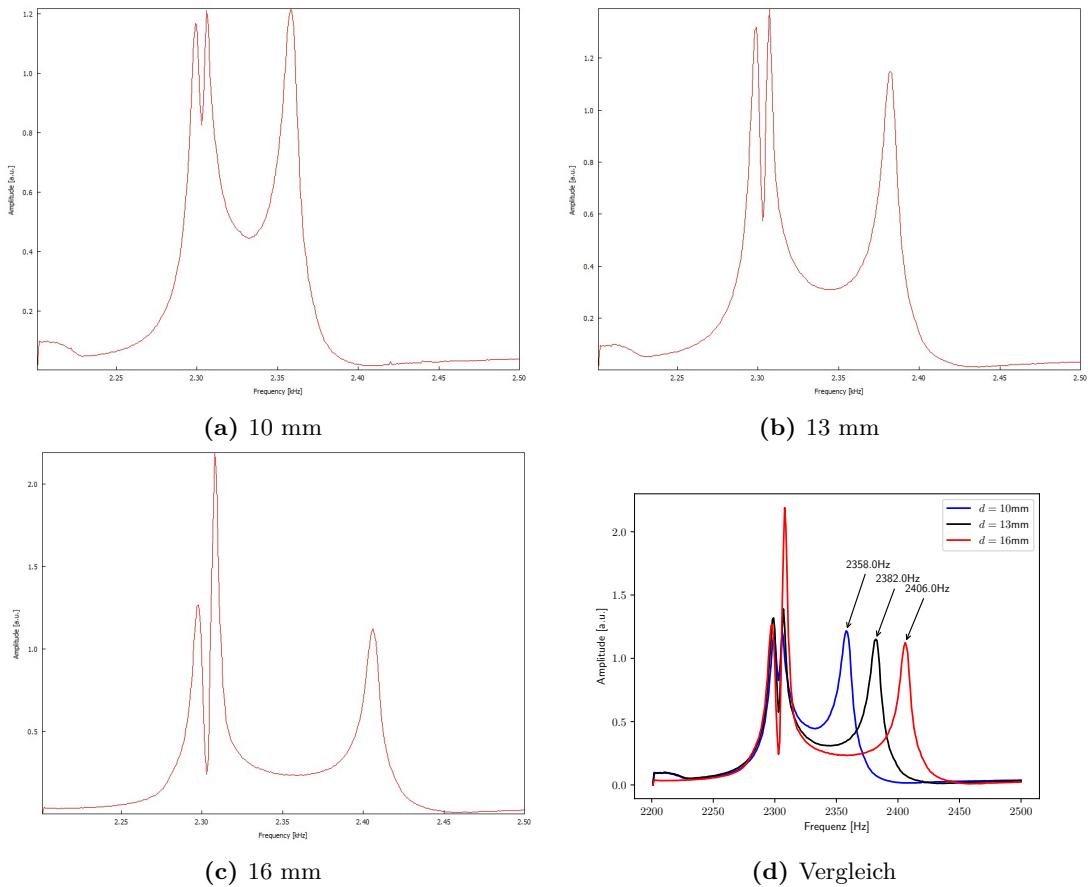


Abbildung 11: Die Frequenzspektren der gekoppelten Kugelresonatoren in Abhängigkeit der verschiedenen Blendendurchmesser.

Dabei zeigt sich, dass die drei Peaks mit dem Blendendurchmesser sich stärker differenzieren lassen. Die Entfernung zum dritten Peak vergrößert sich zudem. Eine Erklärung ist eine verstärkte Kopplung aufgrund der sich vergrößernden Verbindungsstelle. Je größer der Blendendurchmesser, desto stärker sind die zwei Kugelresonatoren aneinander gekoppelt. Der Vergleich zeigt zudem anschaulich das insbesondere die Frequenz des dritten Peaks von dem Durchmesser der Blende abhängig ist. Ebenfalls ist hier anzumerken, dass eine Aufspaltung der Zustände aufgrund der durch die Blende verursachten Brechung der Kugelsymmetrie vorliegt. Damit einhergehend ist die Entartung in m aufgehoben und die einzelnen m Zustände werden im Frequenzspektrum sichtbar. Die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit des Blendendurchmessers findet sich in Abbildung 12. Dabei lässt sich anhand dessen die gleichbleibende Frequenz der ersten beiden Peaks feststellen, während der zweite Peak eine lineare Proportionalität zu dem Blendendurchmesser aufweist.

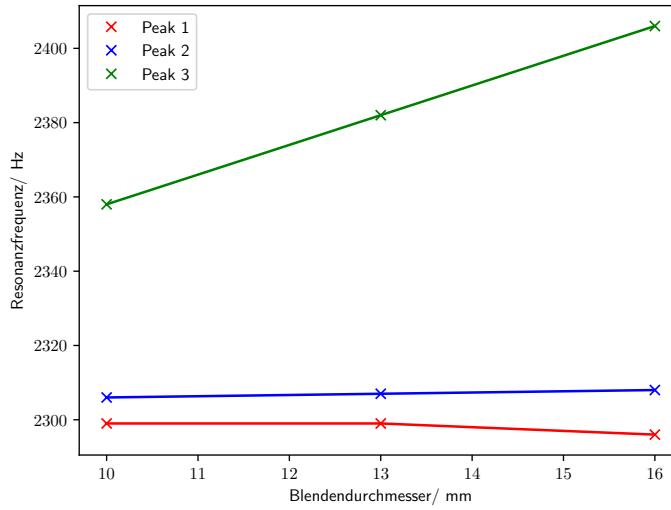


Abbildung 12: Die Abhängigkeit der verschiedenen Resonanzfrequenzen der zwei gekoppelten Kugelresonatoren von dem Blendendurchmesser.

4.3.2 Winkelverteilung mit der 16mm Blende

Die Ergebnisse der Winkelverteilung der verschiedenen Resonanzfrequenzen finden sich visualisiert in Abbildung 13. Die dabei resultierenden Ergebnisse lassen sich gut interpretieren. Der erste Peak zeigt den Zustand für $m = 0$. Dies folgt auch aus der Unabhängigkeit gegenüber den verschiedenen Blendendurchmessern. Dagegen ist der dritte Peak der Zustand für $m = 1$. Die mithilfe des Oszilloskops gemessenen Phasenunterschiede ergeben eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = 142^\circ$ für die ersten beiden Peaks, sowie $\Delta\varphi = 180^\circ$ für den dritten Peak. Der Phasenunterschied legt nahe, dass es sich bei dem dritten Peak um den anti-bindenden Zustand handelt. Dies folgt auch aus den Winkelverteilungen. Zusammenfassend stellt der erste Peak den Zustand $\sigma_g[1s]$ und der dritte Peak den Zustand $\sigma_{ug}[1s]$ dar. Dabei steht g für den geraden und somit bindenden Zustand während ug für ungerade und somit anti-bindend steht.

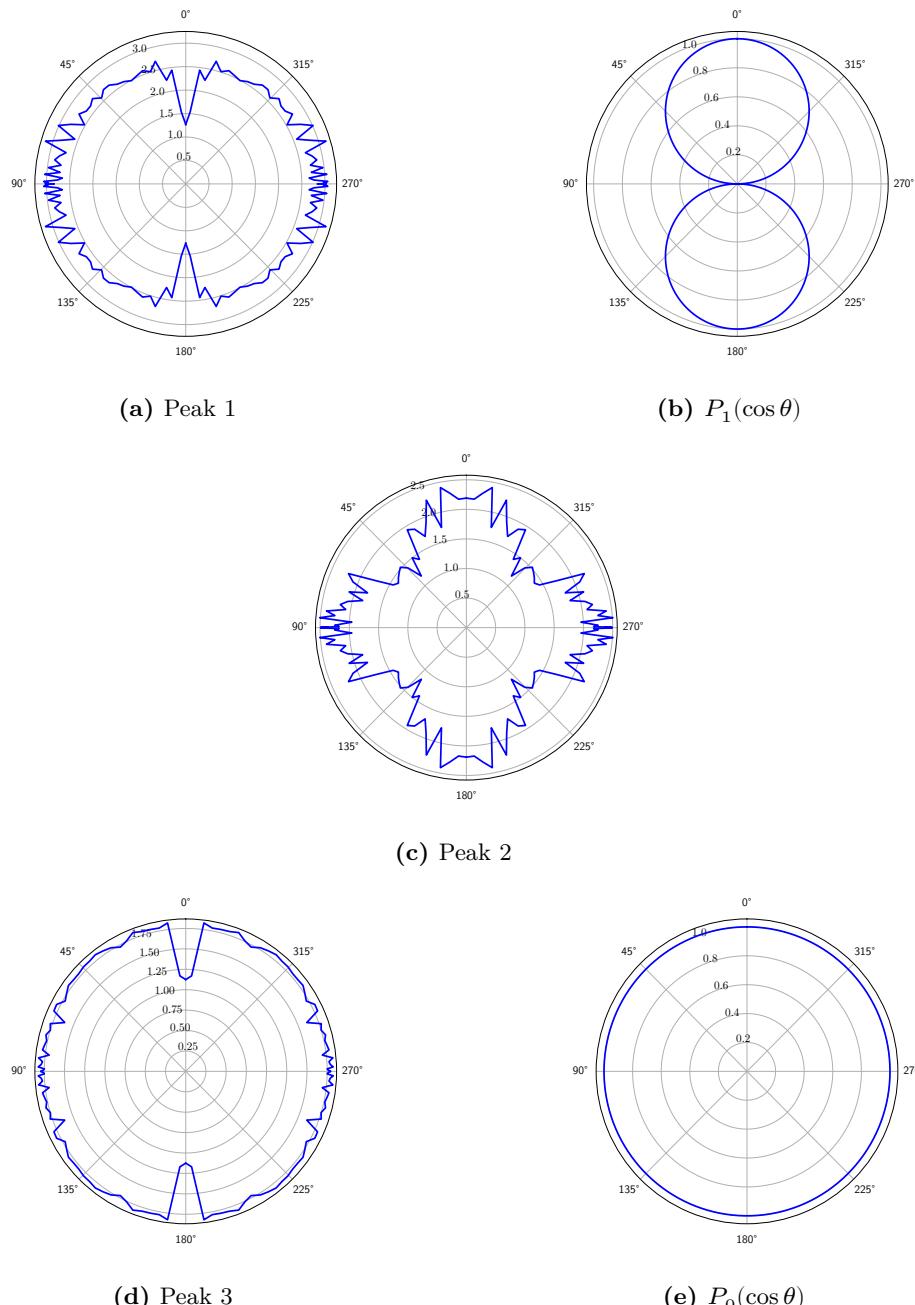


Abbildung 13: Die Winkelverteilungsfunktionen der gekoppelten Kugelresonatoren bei einem Blendendurchmesser von 16mm mit den zugehörigen Legendre-Polynomen.

4.4 Eindimensionaler Festkörper

4.4.1 Übergang Molekül zu Festkörper

Es wird das Frequenzspektrum für eine sich vergrößernde Anzahl an 50 mm Zylindern gemessen. Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 14. Dabei zeigen die Grafiken recht deutlich, dass die Anzahl der Banden unabhängig von der Anzahl der Zylinder ist, aber die Anzahl der Peaks einer mit der Anzahl der Zylinder um den gleichen Faktor ansteigen. Als Banden werden in der Festkörperphysik nah beieinander liegende und zusammenhängende Resonanzfrequenzen bezeichnet. Diese entsprechen letztlich den Schwingungen der Elektronen bzw. in diesem Versuch den Schallwellen in den Zylindern, die sich nur leicht von den Eigenschwingungen der anderen Elektronen unterscheiden. Diese kleine Abweichung sorgt somit dafür, dass die Resonanzfrequenzen immer als ein gemeinsamer Verbund von Peaks im Frequenzspektrum auftreten. Die verschiedenen Banden selbst werden durch die verschiedenen möglichen stehenden Wellen erzeugt. Für die Schwingungen gilt

$$\Psi(x) = A \cdot \sin(k_x x) \quad \text{mit Amplitude } A \text{ und } k_x = \frac{2n_x \pi}{L}, n_x \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Dabei gibt L die Länge der einzelnen Zylinder an. Die Amplitude der Resonanzfrequenzen ist für die Schwingungen der ersten Ordnung, $n_x = \pm 1$, am größten. Für alle weiteren Ordnungen nimmt die Amplitude ab. Dies lässt sich anhand der Energieerhaltung begründen. Es gilt $\nu = \frac{c}{\lambda}$, wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen angibt. Eine größere Frequenz bedeutet eine kleinere Wellenlänge, was wiederum eine erhöhte Energie bedeutet. Somit muss die Amplitude sinken um die Energie der kleineren Wellenlängen zu kompensieren.

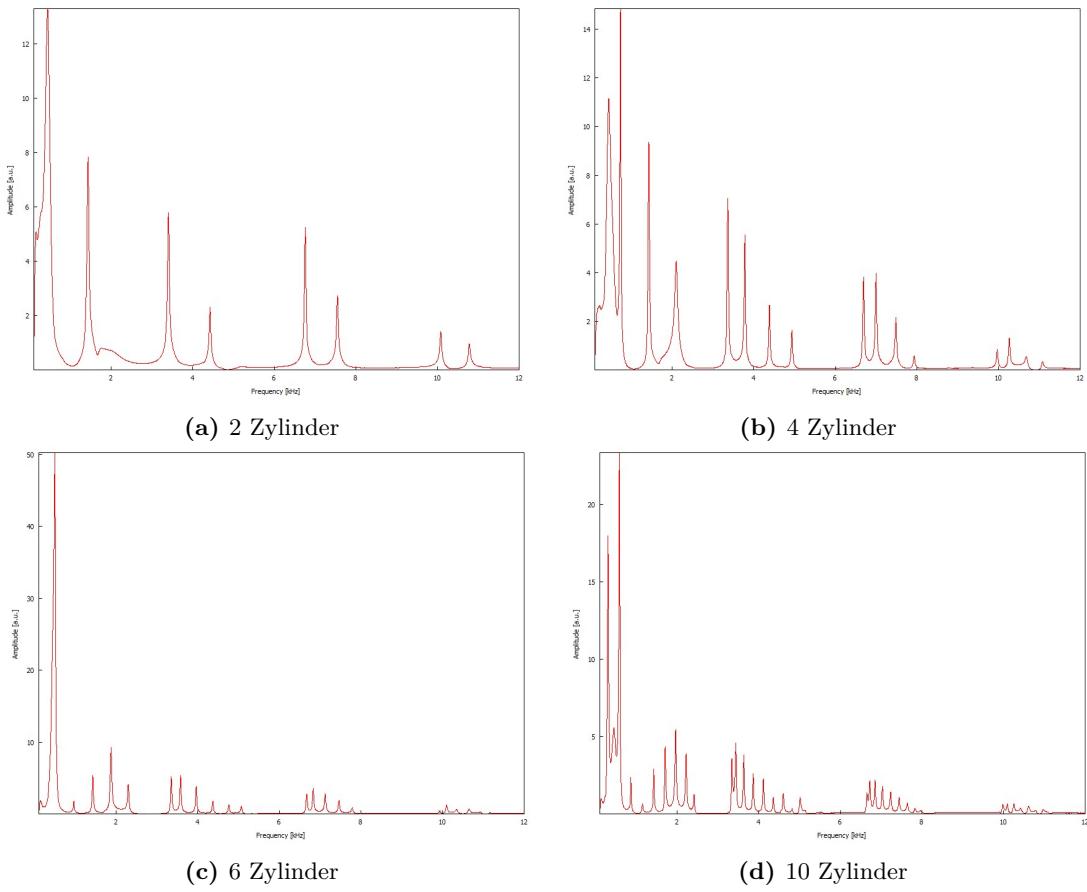


Abbildung 14: Das Frequenzspektrum der Zylinderkette bei Irisdurchmessern von 16mm.

4.4.2 Einfluss der Blenden

Die vorherigen Messungen sind für die Blenden von 13mm und 16mm durchgeführt worden. Zur Veranschaulichung findet sich in Abbildung 15 die Frequenzspektren in Abhängigkeit der Blendendurchmesser, wobei hier auch die 10mm Blenden verwendet werden. Aus der Abbildung lässt sich schließen, dass die Amplitude der ersten Ordnung für größere Irisdurchmesser stark verringert wird. Hingegen steigen die Amplituden der nächsten Ordnungen hingegen für die größeren Irisdurchmesser. Somit wird die Schwingung erster Ordnung durch eine Erhöhung des Irisdurchmessers unterdrückt. Ebenfalls ist festzustellen, dass die Banden bei einer Erhöhung des Irisdurchmessers breiter werden. Zudem verschieben sich die Peaks, was an einer veränderten Kopplung der einzelnen Resonatoren liegt.

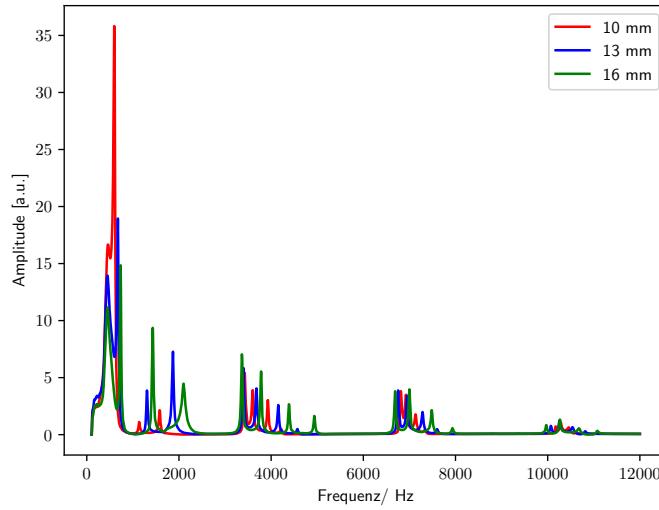


Abbildung 15: Die Frequenzspektren der vier zylindrischen Zylinderkette für verschiedene Irisdurchmesser.

4.4.3 Modifikationen der Struktur der Resonatorkette

In den bisher untersuchten Modellierungen ist immer eine periodische Struktur gegeben gewesen. Nun wird ausgewertet, welche Einflüsse verschiedene Variationsmöglichkeiten haben. Wie sich an den in Abbildung 16 dargestellten Frequenzspektren erkennen lässt, kommt es zu Unterschieden relativ zur Referenzmessung. Dabei wird das Frequenzspektrum bei zehn Zylindern der Länge 50mm und Blenden mit einem Durchmesser von 16mm als Referenz gewählt, da genau das der zugehörige Aufbau ohne simulierte Defekte ist. An dem direkten Vergleich lässt sich insbesondere an den mit Pfeilen markierten Peaks erkennen, dass sich die Bandstruktur verändert. Insbesondere bei dem Aufbau mit einem Ersatzzyliner der Länge 75mm, was in Abbildung 16c dargestellt ist, ist eine leicht ausgeprägte Bandlücke in der Umgebung des markierten Peaks erkennbar. Auch bei den Spektren der anderen beiden Aufbauten, welche in den Abbildungen 16a und 16b dargestellt sind, kommt es zu einer Verschiebung der Peaks innerhalb der Bandstruktur. Allerdings sind die Verschiebung dort nicht so ausgeprägt, woraus sich schließen lässt, dass ein stärkerer Effekt auch einen größeren Einfluss auf die Bandstruktur des (simulierten) Festkörpers hat.

Des Weiteren können die Effekte untersucht werden, wenn die Resonatorkette abwechselnd Zylinder mit einer Länge von 50mm bzw. 75mm hat. Der dazu gehörende Effekt ist in Abbildung 17 dargestellt, wobei zudem die Frequenzspektren der einzelnen Zylinder dargestellt werden.

An diesem Frequenzspektrum lässt sich erkennen, dass die Bandstruktur große Unterschiede zu zuvor betrachteten Festkörperstrukturen aufweist. Insbesondere fallen die Bänder bis ca. 5000kHz nur kaum mit den Resonanzen der einzelnen Zylinder zusammen.

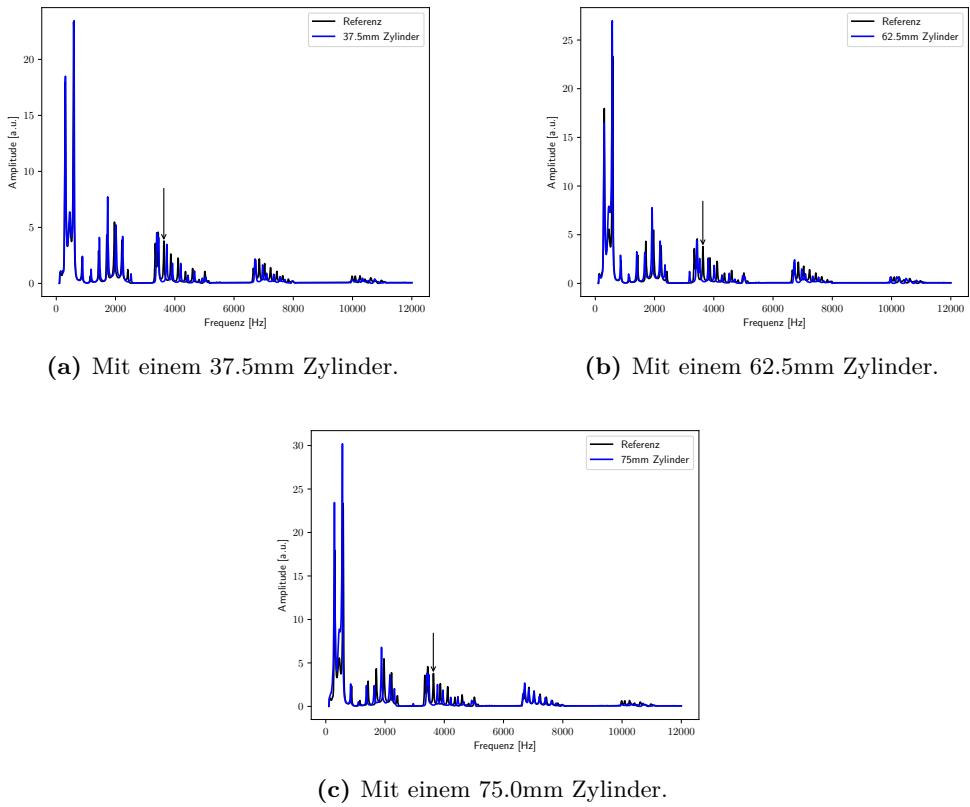


Abbildung 16: Eine Möglichkeit zur Simulierung eines Defektes wird über den Austausch eines Zylinders realisiert. Es wird als Referenz die Messung ohne einen Defekt gewählt, d.h. 10 Zylinder mit einer Länge von je 50mm, welche jeweils über eine 16mm Blende voneinander separiert sind.

Stattdessen sind viele Bänder in den Frequenzbereichen zu finden, bei denen die einzelnen Zylinder breite Bandlücken aufweisen. Eine wesentliche Ausnahme stellt das Band bei 7kHz dar, bei dem die Resonanzen der beiden Zylinderarten zusammenfallen. Diese Besonderheit hat zur Folge, dass ein relativ breites Band im Frequenzspektrum in diesem Frequenzbereich zu erkennen ist. Der Grund für den Effekt, dass es nur in den Bandlücken der einzelnen Zylinder kommen kann, solange die Resonanzen der einzelnen Zylinder nicht bei der gleichen Frequenz liegen, ist, dass diese Resonanzen durch destruktive Interferenz unterdrückt werden. Somit kann es im Gesamtsystem nur zu Resonanzen kommen, wenn nicht beide Zylindertypen die Resonanzen des jeweils anderen Typs stark unterdrücken können.

Analog zu der abwechselnden Resonatorlänge kann auch der Blendendurchmesser abwechselnd variiert werden. Die Auswirkungen dieser Modifikation sind in Abbildung 18 dargestellt. Dabei werden zwischen den jeweiligen Resonatoren abwechselnd Blenden mit einem Durchmesser von 13mm bzw. 16mm eingesetzt. Im Gegensatz zu einer variierenden

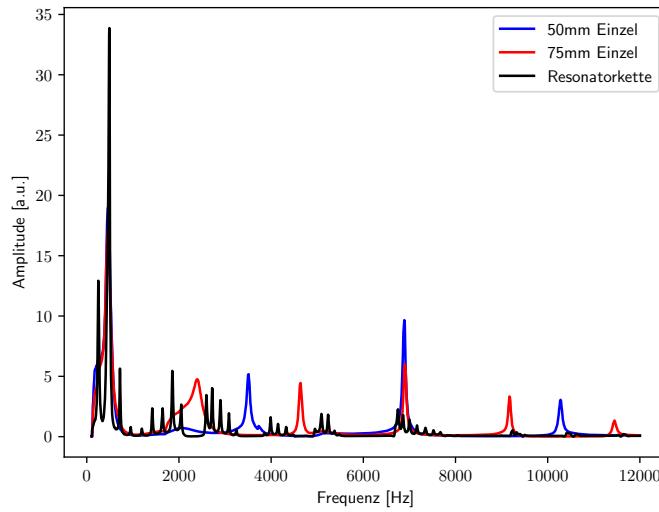


Abbildung 17: Das Frequenzspektrum zu dem Aufbau, bei dem abwechselnd 50mm und 75mm Zylinder vorhanden sind. Erneut sind die Zylinder über 16mm Blenden voneinander separiert.

Zylinderlänge verschieben sich hierbei nicht die Bänder, welche im Frequenzspektrum zu erkennen sind. Dennoch gibt es auch hier einen deutlichen Unterschied zu dem Referenzspektrum, welches zu erneut zu der Resonatorkette aus 10 Zylindern der Länge 50mm mit gleichem Blendendurchmesser von 16mm gehört. Die wesentlichen Unterschiede sind erneut im Spektrum mithilfe der Pfeile markiert. Daran ist zu erkennen, dass es durch die unterschiedlichen Blendendurchmesser zu einem Auftreten von kleinen Bandlücken in der Mitte eines Bandes kommt. Somit kommt es in diesem Fall zwar nicht zu einer Verschiebung der jeweiligen Bänder, jedoch würde die veränderte Struktur die Dispersionsrelation und allgemeine Bandstruktur des Festkörpers verändern.

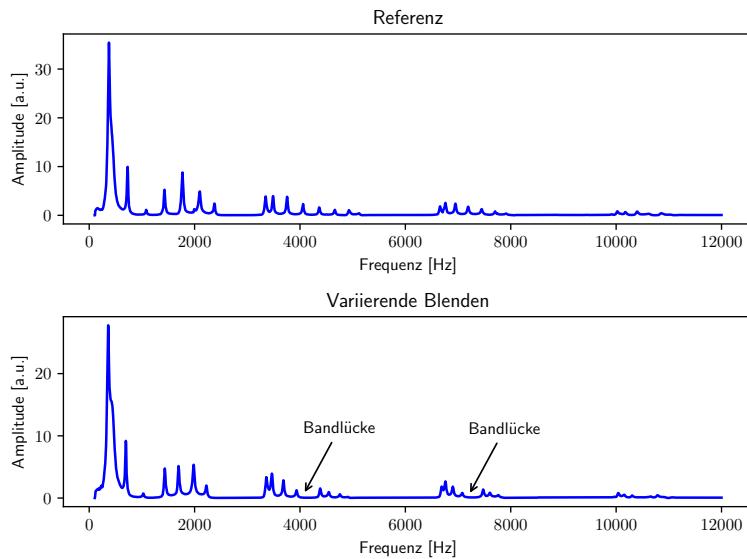


Abbildung 18: Bei einem wechselnden Durchmesser der Blenden kommt es zu einer Veränderung in der Bandstruktur der Resonatorkette. Explizit treten in diesem betrachteten Fall Bandlücken in der Mitte eines Bandes auf.

5 Diskussion

5.1 Wasserstoffatom

Zunächst kann angemerkt werden, dass das Frequenzspektrum ausgeprägt Peaks besitzt, was den diskreten Niveaus im Wasserstoffatom und damit auch den Erwartungen entspricht. Die generelle Messung der Phasenverschiebung mithilfe des Oszilloskops, sowohl bei den einzelnen Kugelresonatoren sowie des gekoppelten Systems, verursachte einige Probleme. Bei der zu messenden Phasenverschiebung des einzelnen Kugelresonators wies das Detektorsignal eine bereits veränderte Frequenz gegenüber des ursprünglichen Sinussignals auf, siehe dazu Abbildung 6. Dabei hätte das Detektorsignal nur phasenverschoben sein sollen, aber nicht eine andere Phase bekommen sollen. Eine Mögliche Ursache könnte der Konverter darstellen, der das akustische Signal in ein elektrisches Signal umgewandelt hat.

Weiterhin kann festgestellt werden, dass die Winkelverteilungen im Wasserstoffatom gut den Orbitalen der theoretischen Vorhersage zugeordnet werden konnten. Dies liegt daran, dass die Gesamtwellenfunktion des Wasserstoffatoms zwar Unterschiede zum klassischen Kugelresonator aufweist, jedoch nur in der Radialkomponente. Des Weiteren entspricht auch die Auspaltung eines Peaks im Spektrum durch das Einsetzen eines Rings den theoretischen Erwartungen. Denn durch den Ring wird die Kugelsymmetrie gebrochen und somit, wie in der Theorie angemerkt, die Entartung in m aufgehoben. Ein weitere positiver Aspekt des Aufbaus besteht darin, dass das entsprechende 3d Orbital des Wasserstoffatoms aufgelöst werden konnte.

5.2 Winkelverteilung des zweiten Peaks des Wasserstoffmoleküls

Während der erste Peak und der dritte Peak des Frequenzspektrums des Wasserstoffmoleküls zugeordnet werden konnten, siehe Abbildung 13, konnte der zweite Peak und dessen Winkelverteilung keinem Legendrepolynom eindeutig zugeordnet werden. Es könnte sich bei diesem Zustand um einen Zwischenzustand handeln. Die Winkelverteilung weist zumindest aufgrund der Form auf eine Superposition zweier winkelverschobener Legendre-Polynome hin.

5.3 Festkörper Modellierung

Bei den Messungen der Resonatorkette, welchen einen eindimensionalen Festkörper modellieren soll, wird festgestellt, dass die Messergebnisse im Allgemeinen den Erwartungen entsprechen. Insbesondere ist ein wichtiger Punkt, dass die Bandstruktur bei der Resonatorkette ohne Modifikationen genau den Verlauf aufweist, der zu erwarten ist. Dazu zählt explizit, dass pro Band genau so viele Peaks zu erkennen sind, wie Zylinder verbaut sind. Dies entspricht genau den möglichen Elektronenzuständen, sofern die Spins vernachlässigt werden und von einem Elektron pro Resonator ausgegangen wird. Ebenso ist hervorzuheben, dass auch die Modifikationen des Festkörpers Effekte auf die Frequenzspektren haben, die auch in der Art zu erwarten sind. Denn auch in der Festkörperphysik werden strukturelle Veränderung von Festkörper anhand der Bandstruktur analysiert. Dabei ist ebenfalls anzumerken, dass sowohl Veränderungen innerhalb eines Bandes, wie zum Beispiel das Auftreten von Bandlücken bei abwechselnden Blendendurchmessern, als auch Veränderungen der gesamten Bandstruktur bei variierenden Resonatorlängen beobachtet werden konnten.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Quanten Analogien*. 2019.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [4] Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki u. a. *SymPy: symbolic computing in Python*. Version 1.4. URL: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>.