

Рубежный контроль №2

Лиганкина Анна

Вариант 20

7 января 2026 г.

Задание 1

Дан язык SRS $bc \rightarrow cb, ac \rightarrow ccc$ над множеством базисных слов $a^n b^{n+k} c^k$. Определить, является ли язык КС.

Решение

Инварианты данной SRS:

1. количество букв b не меняется, т.е. остается $n + k$;
2. буквы c могут двигаться относительно букв b только влево;
3. количество букв a уменьшается, причем число $2|w|_a + |w|_c = 2n + k$ постоянно (количество c может только увеличиваться на 2 за счет одной буквы a).

Поэтому данный язык можно представить как:

1. В случае, если правило $ac \rightarrow ccc$ еще не было применено:

$$L_1 = \{w \mid w = a^n z \ \& \ z = (b|c)^* \ \& \ |z|_b = n + k \ \& \ |z|_c = k\}$$

2. Если правило $ac \rightarrow ccc$ было применено хотя бы раз:

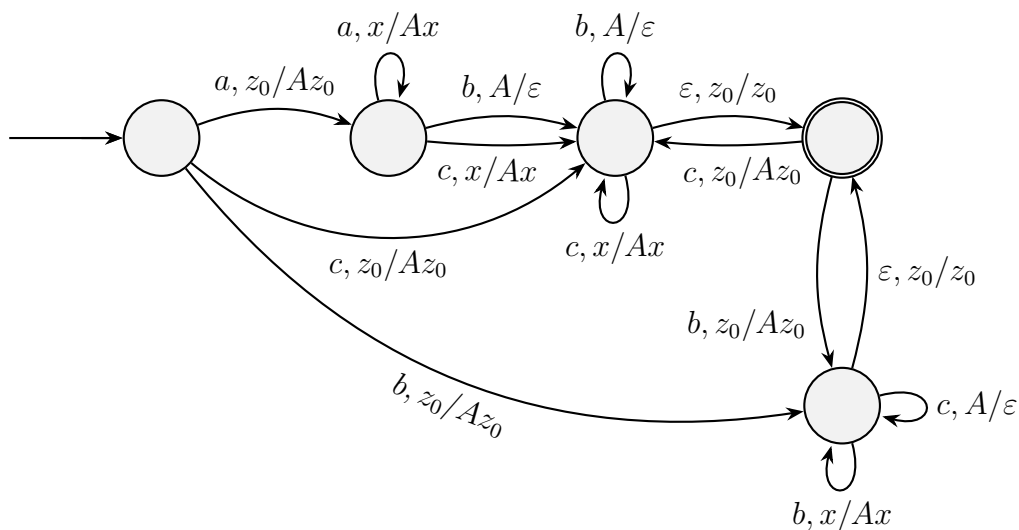
$$L_2 = \{w \mid w = a^{n-i} c^{2i+1} z \ \& \ z = (b|c)^* \ \& \ |z|_b = n + k \ \& \ |z|_c = k - 1 \ \& \\ i, k \geq 1 \ \& \ n \geq i\}$$

Таким образом, исходный язык SRS $L = L_1 \cup L_2$. Поскольку КС языки замкнуты относительно объединения, для доказательства того, что L - КС, достаточно показать, что L_1 и L_2 - КС.

Язык L_1

$$L_1 = \{w \mid w = a^n z \ \& \ z = (b|c)^* \ \& \ |z|_b = n + k \ \& \ |z|_c = k\}$$

Для L_1 можно построить недетеминированный PDA $\Rightarrow L_1$ - КС:

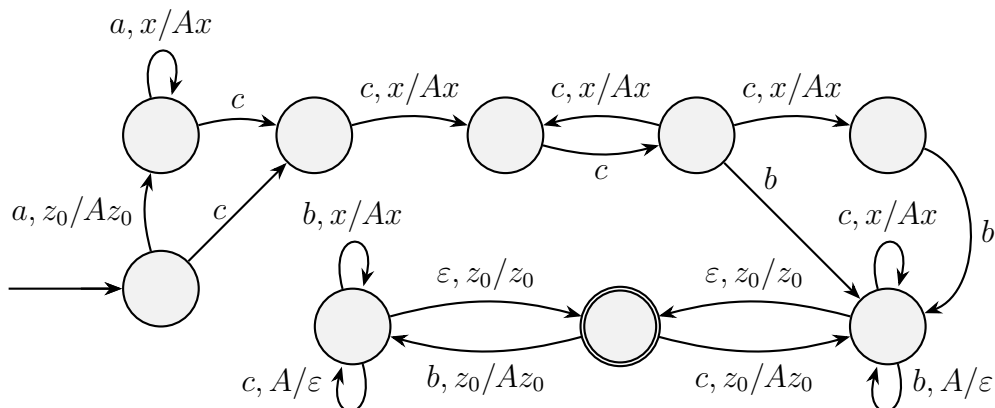


Язык L_2

Для удобства во втором случае переобозначим $n = n - i, k = k - 1$. Тогда

$$L_2 = \{w \mid w = a^n c^{2i+1} z \ \& \ z = (b|c)^* \ \& \ |z|_b = n + k + i + 1 \ \& \ |z|_c = k \\ \& \ i > 0 \ \& \ n, k \geq 0\}$$

Для L_2 можно построить недетеминированный PDA $\Rightarrow L_2$ - КС:



Таким образом, язык L_1 и L_2 - КС, а значит, L - КС. При этом для определения принадлежности слова языку обязателен счетчик \Rightarrow язык нерегулярный.

Ответ: контекстно-свободный, нерегулярный.

Задание 2

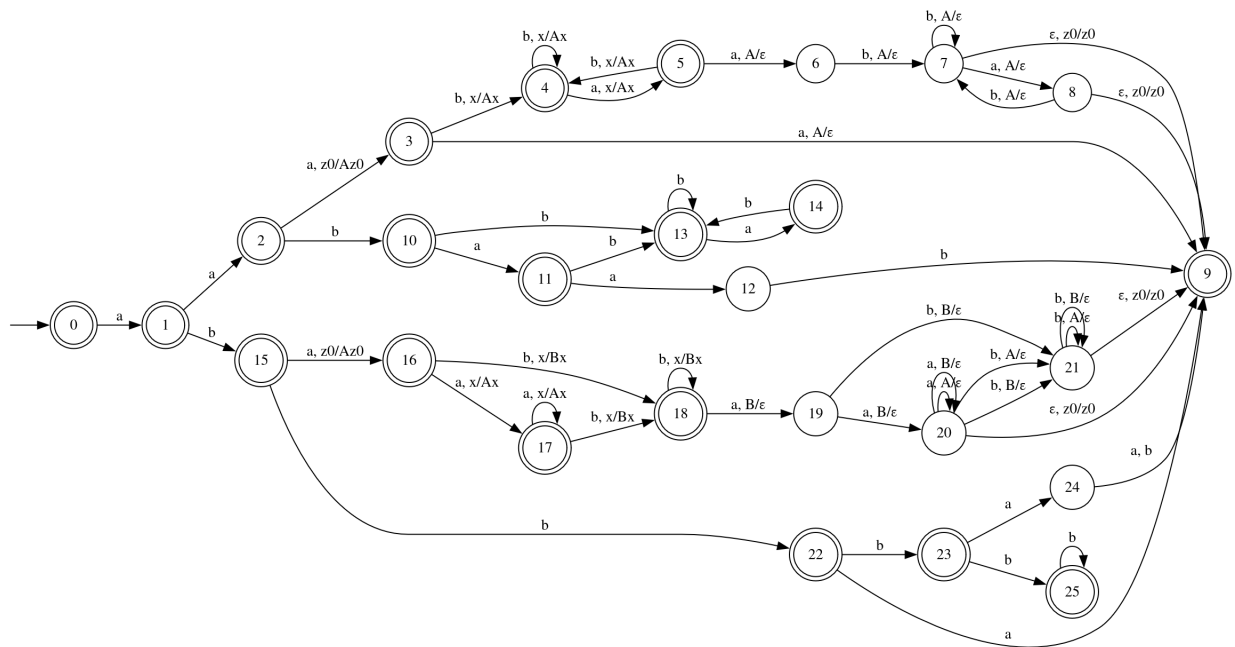
Дан язык $\{w_1 w_2 \mid |w_1| > 1 \ \& \ w_2 = z_1 w_1^R z_2 \ \& \ |z_1| \neq |z_2|\}$. Определить, является ли он DCFL. Если да, то исследовать на LL-свойства.

Решение

Поскольку длина $|w|$ не фиксирована, и т.к. если w^R содержится в слове, то для любой подстроки w существует как подстрока слова w^R ее реверс, можно ограничиться рассмотрением в качестве w только первых двух букв. Однако возникают следующие ситуации:

1. $\underbrace{ab}_w aa \underbrace{ba}_{w^R} ba$, хотя у слова есть разбиение $\underbrace{ab}_w aaba \underbrace{ba}_{w^R}$. Поэтому, если в слове несколько раз встречается реверс первых двух букв (причем с перекрытиями), то слово автоматически принадлежит языку (т.к. хотя бы одно из разбиений будет подходить критерию $|z_1| \neq |z_2|$).
2. $\underbrace{ab}_w a^n \underbrace{ba}_{w^R} a^n, n \geq 2$ - ba встречается лишь один раз, но существует разбиение $\underbrace{aba}_w a^{n-2} \underbrace{aba}_w a^n \Rightarrow w \in L$. Таким образом, еще одна необходимая проверка в слове - наличие реверса первых трех букв. Если это условие выполнено, то слово автоматически принадлежит языку.

Поскольку DCFL замкнуты относительно дополнения, то построим язык L' слов, не принадлежащих L . Нам подходят слова из алфавита $\{a, b\}^*$ такие, что в остатке слова либо не встречается реверс двух первых букв, либо встречается один раз, причем предшествующая им буква не совпадает с третьей, и длины отсекаемых слов равны. Половина DPDA - в файле DPDA.dot/DPDA.svg. Остальная часть - зеркальная (аналогично)



Таким образом, язык L - DCFL. Исследуем теперь язык на LL-свойства.

Язык L не является LL, что доказывается по методу неожиданного конца:

Возьмем префикс длины $> N$: $x = aab^{N+k}aa$ (N такое, что после чтения N букв b в стеке не меньше $k+3$ стековых символов). Также языку принадлежит слово с тем же префиксом x и суффиксом b^{N+k+1} . За чтение $b^k aa$ израсходуется не более $k+2$ стековых символа, а значит, для слова с префиксом x и суффиксом ε стек окажется непустым \Rightarrow язык не LL(k).
Ответ: DCFL, не LL(k).

Задание 3

Дана атрибутная грамматика:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow TbS & ; & S_0.a := S_1.a + 1, S_1.a == T.a \\
 S &\rightarrow T & ; & S.a := T.a \\
 T &\rightarrow aTa & ; & T_0.a := T_1.a + 1 \\
 T &\rightarrow bT & ; & T_0.a := T_1.a \cdot 2 \\
 T &\rightarrow bbT & ; & T.a := 0 \\
 T &\rightarrow aTa & ; & T_0.a := T_1.a + 2 \\
 T &\rightarrow \varepsilon & ; & T.a := 0
 \end{aligned}$$

Определить, является ли язык КС.

Решение

Докажем, что пересечение языка L , порожденного данной атрибутной грамматикой, с регулярным языком

$$R = aaaa (aa)^* b^+ aa$$

или по-другому

$$R = \{a^{2p}b^qaa, p \geq 2, q \geq 1\}$$

не является контекстно-свободным, а значит, и L не является КС.

$L_R = L \cap R$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow TbT & ; & T_1.a == T_2.a \\
 T &\rightarrow aTa & ; & T_0.a := T_1.a + 1 \\
 T &\rightarrow bT & ; & T_0.a := T_1.a \cdot 2 \\
 T &\rightarrow bbT & ; & T.a := 0 \\
 T &\rightarrow aTa & ; & T_0.a := T_1.a + 2 \\
 T &\rightarrow \varepsilon & ; & T.a := 0
 \end{aligned}$$

Обоснование. (От противного). Пусть $w \in L_R$ порождено правилом $S \rightarrow T$. Тогда, т.к. в начале стоит минимум 4 буквы a , то применяется правило $T \rightarrow aTa$ минимум 4 раза, что невозможно, поскольку в конце стоит только 2 буквы a подряд. Поэтому имеем четкое разбиение w по правилу $S \rightarrow TbS$, где $T = aaaa a^*$, а $S = b^+aa$.

При этом последняя S может быть раскрыта только по правилу $S \rightarrow T$, потому что если предположить, что $S \rightarrow TbS$, то T содержит только b^* , а значит, атрибут a для этого T равен 0. Поэтому (при любом представлении $S = b^*aa$) вес этого слова должен быть равен 0. Таким образом, w не принадлежит языку, поскольку вес левой части T точно больше 0.

По этой же причине нужно рассматривать блок b^* в качестве применения правила $T \rightarrow bT$, которое умножает атрибут a (иначе опять уйдем в 0). Получается, что значения атрибута a оценивается так (с учетом правила $S \rightarrow T_1bT_2$):

- для $T_1 : 2 \leq p \leq T_1.a \leq 2p$;
- для $T_2 : 2 \leq 2^{q-1} \leq T_2.a \leq 2^{q-1} \cdot 2$

Таким образом, $T_1.a = T_2.a \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2^{q-1} \leq 2p & p \geq 2^{q-2} \\ p \leq 2^{q-1} \cdot 2 & p \leq 2^q \end{cases} \Leftrightarrow 2^{q-1} \leq 2p \leq 2^{q+1}$$

Т.е. $L_R = \{a^{2p}b^qaa \mid p \geq 2 \text{ \& } 2^{q-1} \leq 2p \leq 2^{q+1}\}$. Теперь воспользуемся леммой о накачке:

Возьмем слово $w = a^{2^{q-1}}b^qaa$, где $q > N$ - длина накачки. Рассмотрим разбиение $w = uvxyz$, где $|vxy| < N$:

- $vxy \subset a^{2p}$: при отрицательной накачке ($k = 0$) выходим из языка, т.к. получаем слово $a^{2^{p-t}}b^qaa$, где $2p = 2^{q-1}, t > 0$;
- $vxy \subset b^q$: при любой положительной накачке ($k > 0$) выходим из языка, т.к. нарушается условие $2^{q-1} = 2p \geq 2^{q+t-1}$;
- vxy попадает на стык a^{2p} и b^q : число накачиваемых букв a меньше N , а значит новое число букв $a < N \cdot k$, а в части b^q накачивается хотя бы 1 буква, поэтому новое число букв $b \geq q + 1$. Получается, новое число букв a

$$2^{q-1} + N \cdot k < 2^{q-1} + q \cdot k \quad \text{т.к. } (q > N) < 2^{q-1} + 2^{q-1} \cdot k \leq 2^q$$

и мы выходим из языка;

- vxy не может задеть блок aa , потому что это автоматически выводит из языка.

Таким образом, согласно лемме о накачке, язык L_R не является КС, а значит, и исходный язык не является КС.

Ответ: не контекстно-свободный.