Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique
Module : **Logique Mathématique** – L2 – année : 2017/2018

Chapitre I

Le calcul propositionnel

Par : Mr HABET Md-Said
(reprise des notes de cours de Mr KHEMLICHE Salem)

Contenu du chapitre :

Abréviations : CP : Calcul Propositionnel – v.p : Variable Propositionnelle –
fbf : Formule Bien Formée – TV : Table de Vérité –
FND : Forme Normale Disjonctive – FNC : Forme Normale Conjonctive

I.1/ Introduction :

Définition I.1.1 :

La logique est la science des arguments valides de par leur forme uniquement. Le but de la logique est de distinguer les arguments valides des autres (c-à-d des arguments non valides) en tenant compte uniquement de leur forme.

Le calcul propositionnel a pour objet l'étude des formes de raisonnement dont la validité est indépendante de la structure interne des propositions composantes et résulte uniquement de leurs propriétés d'être vraies ou fausses.

Définition I.1.2 :

Une proposition est un assemblage de mots d'une langue naturelle vérifiant les conditions suivantes :

(a) il est syntaxiquement correct ;
(b) il est sémantiquement correct ;
(c) il est possible de lui affecter sans ambigüité une valeur de vérité vrai ou faux.

Exemples :

- mange la souris le chat
  (a) est non vérifiée ;
- le mur mange le pain
  (b) est non vérifiée ;
- le facteur est-il passé ?
  (c) est non vérifiée.

Remarques :

Toutes les phrases impératives, interrogatives et exclamatives ne sont pas des propositions.

Définition I.1.3 :

Une proposition complexe est formée à partir de propositions élémentaires (simples) et des connecteurs. Les connecteurs usuels sont :

- la négation (NON), symbolisée par : $\neg$
- la disjonction (OU inclusif), symbolisée par : $\vee$
- la conjonction (ET), symbolisée par : $\wedge$
- l'implication (SI .. ALORS …), symbolisée par : $\rightarrow$
- l'équivalence (SI ET SEULEMENT SI), symbolisée par : $\leftrightarrow$

Exemple :

Si Saïd réussit son examen alors il rentrera à l'université ou dans une grande école.

I.2/ Le langage du calcul propositionnel :

I.2.1/ Introduction :

Pour étudier la validité des raisonnements (des propositions complexes), il est nécessaire de traduire du langage naturel vers un langage logique : c'est la formalisation.

I.2.2/ L'alphabet :

L'alphabet du calcul propositionnel (CP) est composé de :

1. un ensemble dénombrable de variables propositionnelles : p_1, p_2, …
2. des connecteurs logiques : $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
3. des parenthèses : (,)

I.2.3/ Syntaxe du CP : formules bien formées (fbf) du CP

L'ensemble des formules bien formées (fbf) du CP est défini inductivement par :

1. Toute variable propositionnelle est une fbf.
2. Si A est une fbf alos (A) est une fbf.
3. Si A est une fbf alors $\neg$A est une fbf.
4. Si A et B sont des fbf alors : $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sont des fbfs.
5. Toute fbf est obtenue par application d'un nombre fini de fois des clauses (1), (2), (3) et (4) précedentes.

Exemple :

$(\neg p \rightarrow (((q \vee r) \rightarrow t) \leftrightarrow \neg p))$ est une fbf.

Remarque :

Lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité, on peut omettre les parenthèses dans une formule.

I.2.4/ Sous-formules :

Pour toutes fbf A, B et C :

1. A est une sous-formule de A.
2. Si $\neg$B est une sous-formule de A alors B est une sous-formule de A.
3. Si B α C est une sous-formule de A et α est un connecteur parmi : $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, alors B et C sont des sous-formules de A.

I.3/ La sémantique du calcul propositionnel :

I.3.1/ Valeur de vérité :

La valeur de vérité d'une proposition A est l'opération qui associe la valeur vrai ou faux à A.

Remarque :

On désigne vrai par le constante logique « 1 » et faux par la constante logique « 0 ».

I.3.2/ Interprétation :

On appelle interprétation I d'une fbf F du CP toute fonction qui associe une valeur de vérité à chaque variable propositionnelle de F.

Exemple : $F = (\neg p \rightarrow q) \vee r$

I définie par : I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1 est une interprétation.

I.3.3/ Table de vérité des connecteurs :

L'objet d'une table de vérité est de regrouper toutes les valeurs de vérité d'une fonction logique correspondantes à toutes les interprétations possibles.

I.3.3.1/ La négation :

p	¬p
0	1
1	0

I.3.3.2/ La disjonction :

p	q	p ∨ q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

I.3.3.3/ La conjonction :

p	q	p ∧ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I.3.3.4/ L'implication :

p	q	p → q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

I.3.3.5/ L'équivalence :

p	q	p ↔ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarque :

Si v désigne la valeur de vérité alors :

- $v(\neg A) = 1 - v(A)$
- $v(A \wedge B) = \min(v(A),v(B))$
- $v(A \vee B) = \max(v(A),v(B))$
- $v(A \rightarrow B) = v(\neg A \vee B) = \max(1-v(A),v(B))$
- $v(A \leftrightarrow B) = v((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) = \min(\max(1-v(A),v(B)), \max(1-v(B),v(A)))$

I.3.4/ Valeurs de vérité d'une fbf complexe du CP :

I.3.4.1/ valeur de vérité d'une fonction complexe pour une interprétation donnée :

Pour une interprétation donnée I, on établit la table de vérité d'une fbf complexe A en tenant compte des sous-formules et des tables de vérité (TV) des connecteurs utilisés.

Exemple :

$A = (\neg p \vee q) \rightarrow q$

Pour I : I(p) = 1, I(q) = 0, on aura :

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	A
1	0	0	0	1

I.3.4.2/ Table de vérité d'une fbf complexe :

La TV d'une fbf complexe A du CP consiste à regrouper toutes les valeurs possibles de A en fonction de toutes les interprétations possibles.

Remarque :

Avec n variables propositionnelles, on obtient 2^n interprétations possibles.

Exemple :

$A = (\neg p \vee q) \rightarrow q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	A
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

I.3.4.3/ Modèle et contre-modèle d'une fbf :

Soit A une fbf. On appelle modèle de A toute interprétation I pour laquelle A est vraie.
On appelle contre-modèle de A, toute interprétation J pour laquelle A est fausse.

I.3.5/ Tautologie et contradiction :

I.3.5.1/ Tautologie :

Une fbf A du CP est appelée tautologie lorsque sa valeur de vérité est vrai pour toutes les interprétations possibles (toutes les interprétations sont des modèles).
On note : $\models A$

Exemples : $\neg p \vee p$, $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ sont des tautologies.

I.3.5.2/ Contradiction (Antilogie) :

Une fbf A du CP est appelée contradiction lorsque sa valeur de vérité est faux pour toutes les interprétations possibles (toutes les interprétations sont des contre-modèles).

Exemples : $\neg p \wedge p$, $((p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge p)$ sont des contradictions.

Remarque :

Certaines fbfs de CP peuvent être allégées en supprimant certaines parenthèses, en tenant en compte de la priorité des connecteurs suivante :

$$\underset{+ \longrightarrow -}{(\,,\,)\,,\ \neg\,,\ \vee\,,\ \wedge\,,\ \rightarrow\,,\ \leftrightarrow}$$

À titre d'exemple la formule : $p \rightarrow q \wedge r$, se lit comme : $p \rightarrow (q \wedge r)$.

I.3.6/ Argument et forme d'argument valide :

- Un argument en langue naturelle est un discours contenant (n+1) propositions. Les n premières propositions sont appelées les prémisses et la dernière la conclusion.
- Un argument est logiquement valide lorsqu'il est impossible que toutes ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.
- Une forme d'argument est le résultat de la formalisation d'un argument en langage naturel dans un langage logique comme le langage du CP.

Définition I.3.6.1 :

Une forme d'argument ayant pour prémisses $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ et pour conclusion Ψ est dite logiquement valide si et seulement si il n'existe aucune interprétation I dans laquelle les prémisses sont toutes vraies et la conclusion fausse.

On note la validité de l'argument : $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \models \Psi$.
Dans ce cas Ψ est dite conséquence logique de $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

Théorème I.3.6.2 :

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \models \Psi$ si et seulement si $\models (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$

Démonstration :

⇒/ Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vDash \Psi$ et que $(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$ n'est pas une tautologie. Il existe donc au moins une interprétation I pour laquelle $(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$ est fausse, i.e : $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ sont simultanément vraies et Ψ fausse : contradiction avec $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vDash \Psi$.

Donc : $\vDash (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$.

⇐/ Supposons $\vDash (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$ (1)

mais que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \nvDash \Psi$, cela veut dire qu'il existe au moins une interprétation I pour laquelle $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ sont simultanément vraies et Ψ fausse ; donc I rend fausse $(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$: contradiction avec (1).

Donc $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vDash \Psi$.

<u>Exemple :</u>

- Saïd a réussi son examen ou il a rejoint la vie active.
- Or il n'a pas rejoint la vie active.

- Donc Saïd a réussi son examen.

Formalisation :

Soient les propositions : p = « Saïd a réussi son examen »

q = « Saïd a rejoint la vie active »

L'argument :

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

est logiquement valide car : $(p \vee q), \neg q \vDash p$; il suffit de vérifier par la table de vérité que :

$\vDash ((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$ (A)

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$	(A)
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1

<u>Proposition I.3.6.3 :</u>

Soit A une fbf de CP ne contenant parmi les connecteurs logiques que : $\neg$, $\vee$, $\wedge$. Soit A^* la formule obtenue à partir de A en remplaçant dans A toute variable propositionnelle p par sa négation $\neg p$ et en changeant les « $\vee$ » par « $\wedge$ » et vice versa. Alors A^* est logiquement équivalente à $\neg A$.

Démonstration :

Par récurrence sur le nombre de connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$ contenus dans A.

n=0 : alors A est p donc A^* est $\neg p$ donc A^* est logiquement équivalente à $\neg A$.

Hypothèse de récurrence : supposons que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$ et montrons qu'elle reste vraie pour n+1.

Le $(n+1)^{\text{ième}}$ connecteur est soit $\neg$ ou $\vee$ ou bien $\wedge$.

*) Si A est de la forme $\neg B$ avec nbocc(B) = n (nbocc : nombre d'occurrences de $\neg$, $\vee$, $\wedge$).

Alors A^* est $\neg B^*$. Par hypothèse de récurrence B^* est équivalente à $\neg B$. D'où A^* est logiquement équivalente à $\neg(\neg B)$ c'est-à-dire $\neg A$.

*) Si A est de la forme $(B \vee C)$:

avec nbocc(A) = nbocc(B) + nbocc(C) + 1 = n+1 ; d'où nbocc(B) + nbocc(C) = n, par conséquent nbocc(B) $\leq$ n et nbocc(C) $\leq$ n. B^* est logiquement équivalente à $\neg B$ et C^* est logiquement équivalente à $\neg C$.

De plus, $A^* = (B \vee C)^* = B^* \wedge C^*$; donc A^* est logiquement équivalente à $(\neg B \wedge \neg C)$ qui est elle-même équivalente à $\neg(B \vee C)$ donc A^* est logiquement équivalente à $\neg(B \vee C)$ i.e $\neg A$.

*) Si A est de la forme $(B \wedge C)$:

avec nbocc(A) = nbocc(B) + nbocc(C) + 1 = n+1 ; d'où nbocc(B) + nbocc(C) = n, par conséquent nbocc(B) $\leq$ n et nbocc(C) $\leq$ n. B^* est logiquement équivalente à $\neg B$ et C^* est logiquement équivalente à $\neg C$.

De plus, $A^* = (B \wedge C)^* = B^* \vee C^*$; donc A^* est logiquement équivalente à $(\neg B \vee \neg C)$ qui est elle-même équivalente à $\neg(B \wedge C)$ donc A^* est logiquement équivalente à $\neg(B \wedge C)$ i.e $\neg A$.

Application : lois de De Morgan

1) $\neg\underbrace{(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)}_{A} = \underbrace{\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \ldots \wedge \neg A_n}_{A^*}$

2) $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) = \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n$

I.3.7/ Formules logiquement valides remarquables :

Deux fbfs A et B du CP sont dites logiquement équivalentes lorsque $(A \leftrightarrow B)$ est une tautologie (i.e $\models (A \leftrightarrow B)$).

Dans ce qui suit on utilisera le méta symbole $\equiv$ pour désigner cette équivalence logique de deux fbfs.

1) Double négation :

$\neg(\neg A) \equiv A$

2) Commutativité et associativité de $\vee$ et $\wedge$:

- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$;
- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$;
- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

3) Lois d'idempotence :

- $(A \wedge A) \equiv A$
- $(A \vee A) \equiv A$

4) Tautologie et contradiction :

- $(\neg A \vee A) \equiv 1$
- $(\neg A \wedge A) \equiv 0$

5) Distributivité :

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
- $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
- $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

6) Absorption :

- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$;
- $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

7) Lois de De Morgan :

- $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

8) Expressions de "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" :

- $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$;
- $(A \leftrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Remarques :

En utilisant ces formules logiquement équivalentes remarquables, certaines fbfs du CP peuvent être simplifiées en remplaçant certaines de leurs sous-formules par des sous-formules qui leur sont équivalentes.

I.4/ Formes normales :

I.4.1/ Les formes normales disjonctives (FND) :

Une fbf A du CP est dite sous forme normale disjonctive lorsqu'elle est de la forme :

$A \equiv (A_{11} \wedge A_{12} \wedge \dots \wedge A_{1n}) \vee (A_{21} \wedge A_{22} \wedge \dots \wedge A_{2m}) \vee \dots \vee (A_{p1} \wedge A_{p2} \wedge \dots \wedge A_{pl})$

où les A_{ij} sont des variables propositionnelles (v.p) ou des négations de v.p.

Exemple :

$A \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$ est une FND.

I.4.2/ Les formes normales conjonctives (FNC) :

Une fbf A du CP est dite sous forme normale conjonctive lorsqu'elle est de la forme :

$A \equiv (A_{11} \vee A_{12} \vee \dots \vee A_{1n}) \wedge (A_{21} \vee A_{22} \vee \dots \vee A_{2m}) \wedge \dots \wedge (A_{p1} \vee A_{p2} \vee \dots \vee A_{pl})$

où les A_{ij} sont des v.p ou des négations de v.p.

Proposition I.4.3 :

Toute fbf A du CP peut être transformée en une fbf équivalente :

1) sous FND ;
2) sous FNC.

Démonstration :

Elle consiste à construire une séquence de fbf logiquement équivalentes $A_1, A_2, \dots, A_n$ où A_n sera sous FND ou FNC.

On obtient A_{i+1} à partir de A_i (i=1,..,n-1) en remplaçant dans A_i certaines sous-formules par des sous-formules équivalentes remarquables vues plus haut.

1. Éliminer dans A tous les connecteurs "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" en remplaçant les sous-formules de la forme $(p \rightarrow q)$ par $(\neg p \vee q)$ et les sous-formules de la forme $(p \leftrightarrow q)$ par $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

2. Déplacer les connecteurs "$\neg$" à droite en appliquant les lois de De Morgan : remplacer les sous-formules $\neg(a \vee b)$ par $(\neg a \wedge \neg b)$ et remplacer les sous-formules $\neg(a \wedge b)$ par $(\neg a \vee \neg b)$.

3. Utiliser la loi de la double négation pour remplacer les sous-formules de la forme $\neg\neg a$ par a.

4.1 Pour la FND :
distribuer les "$\wedge$" par rapports aux "$\vee$".
4.2 Pour la FNC :
distribuer les "$\vee$" par rapports aux "$\wedge$".

<u>Exemple :</u>
Soit $F = (\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow r$
1. • éliminer $\rightarrow$ de F :
$F_1 \equiv (\neg\neg p \vee q) \leftrightarrow r$
• éliminer $\leftrightarrow$ de F_1 :
$F_{1'} \equiv (\neg (\neg\neg p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg\neg p \vee q) \vee \neg r)$
2. utiliser les lois de De Morgan :
$F_2 \equiv ((\neg\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg\neg p \vee q \vee \neg r)$
3. utiliser le loi de la double négation :
$F_3 \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$
4. FND : distribuer les $\wedge$ par rapports aux $\vee$:
$F_{4.1} \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q \vee \neg r)) \vee (r \wedge (p \vee q \vee \neg r))$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee ((r \wedge p) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge \neg r))$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$
car : $(\neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q)) = (\neg(p \vee q) \wedge (p \vee q)) = 0$ et $(r \wedge \neg r) = 0$
FNC : distribuer les $\vee$ par rapports aux $\wedge$:
$F_{4.2} \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

<u>I.4.4/ Extraction des FND et FNC à partir des TV :</u>

On considère le cas des fbf à trois variables propositionnelles. La généralisation se fait facilement pour le cas de n variables, $n > 3$.

<u>I.4.4.1/ Fonctions conjonctions :</u>

Soient trois variables propositionnelles p, q, r. Pour chacune des huit répartitions de valeurs de vérité à p, q, r ; on définit la fonction C_i (i=0,..,7) comme suit : pour $C_i = 1$, chaque variable à 0 sera prise en inverse et chaque variable à 1 sera prise en direct.
Exemple : p = 0, q = 1, r = 0 :
p = 0 donc on prend $\neg p$; q = 1 on prend q ; r = 0 on prend $\neg r$.
D'où $C = \neg p \wedge q \wedge \neg r$.

On établit ainsi huit conjonctions :

à p = 0, q = 0, r = 0 correspond $C_0 = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
à p = 0, q = 0, r = 1 ” $C_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge r$
à p = 0, q = 1, r = 0 ” $C_2 = \neg p \wedge q \wedge \neg r$
à p = 0, q = 1, r = 1 ” $C_3 = \neg p \wedge q \wedge r$
à p = 1, q = 0, r = 0 ” $C_4 = p \wedge \neg q \wedge \neg r$
à p = 1, q = 0, r = 1 ” $C_5 = p \wedge \neg q \wedge r$
à p = 1, q = 1, r = 0 ” $C_6 = p \wedge q \wedge \neg r$
à p = 1, q = 1, r = 1 ” $C_7 = p \wedge q \wedge r$

<u>I.4.4.2/ FND d'une fbf qui n'est pas une contradiction :</u>

Soit une F fbf définie par la TV suivante :

p	q	r	F	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	$C_2 \vee C_4 \vee C_7$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

On constate que F vaut 1 en même temps que C_2, C_4 et C_7.

D'où : $F \equiv C_2 \vee C_4 \vee C_7 \equiv (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

<u>I.4.4.3/ Fonctions disjonctives :</u>

Soient trois variables propositionnelles p, q, r. Pour chacune des huit répartitions de valeurs de vérité à p, q, r ; on définit la fonction disjonctive D_i (i=0,..,7) comme suit : pour $D_i = 0$, chaque variable à 0 sera prise en direct et chaque variable à 1 sera prise en inverse.

Exemple : p = 0, q = 1, r = 0 :

p = 0 donc on prend p ; q = 1 on prend $\neg q$; r = 0 on prend r.

D'où $D = p \vee \neg q \vee r$.

On établit ainsi huit disjonctions :

à p = 0, q = 0, r = 0 correspond $D_0 = p \vee q \vee r$
à p = 0, q = 0, r = 1 ” $D_1 = p \vee q \vee \neg r$
à p = 0, q = 1, r = 0 ” $D_2 = p \vee \neg q \vee r$
à p = 0, q = 1, r = 1 ” $D_3 = p \vee \neg q \vee \neg r$
à p = 1, q = 0, r = 0 ” $D_4 = \neg p \vee q \vee r$
à p = 1, q = 0, r = 1 ” $D_5 = \neg p \vee q \vee \neg r$
à p = 1, q = 1, r = 0 ” $D_6 = \neg p \vee \neg q \vee r$
à p = 1, q = 1, r = 1 ” $D_7 = \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

I.4.4.4/ FNC d'une fbf qui n'est pas une tautologie :

Soit F' une fbf à trois variables définie par la TV suivante :

p	q	r	F'	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	$D_1 \wedge D_3 \wedge D_6$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

On constate que F' vaut 0 en même temps que D_1, D_3 et D_6.

D'où : $F' \equiv D_1 \wedge D_3 \wedge D_6 \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$.

Remarques :

Pour toute fbf F du CP, on a :

$FNC(F) = \neg(FND(\neg F))$

$FND(F) = \neg(FNC(\neg F))$

I.5/ Ensemble complet de connecteurs :

Définition I.5.1 :

Un ensemble E de connecteurs est dit complet lorsque toute fonction de vérité peut être représentée par une forme propositionnelle n'utilisant comme connecteurs que les éléments de E.

Proposition I.5.2 :

Les ensembles $E_1 = \{\neg , \vee , \wedge\}$; $E_2 = \{\neg , \vee\}$; $E_3 = \{\neg , \wedge\}$; $E_4 = \{\neg , \rightarrow\}$ sont complets.

Démonstration :

- E_1 complet ?

  On sait que $\{\neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow\}$ est complet, alors il suffit d'exprimer "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" en fonction des éléments de E_1. En effet : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ et $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$; d'où E_1 complet.
- E_2 complet ?

  E_1 est complet, alors il suffit d'exprimer le "$\wedge$" en fonction des éléments de E_2. En effet :
  $p \wedge q \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$; d'où E_2 complet.
- E_3 complet ?

  E_1 est complet, alors il suffit d'exprimer le "$\vee$" en fonction des éléments de E_3. En effet :
  $p \vee q \equiv \neg(\neg(p \vee q)) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$; d'où E_3 complet.

- E_4 complet ?

  On sait que $\{\neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow\}$ est complet, alors exprimons "$\vee$", "$\wedge$" et "$\leftrightarrow$" en fonction des éléments de E_4. En effet :

  $p \vee q \equiv \neg\neg p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$

  $p \wedge q \equiv \neg\neg(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$

  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p))$

  d'où E_4 complet.

Proposition I.5.3 :

Soient les connecteurs | et $\downarrow$ définis par : $p \mid q = \neg(p \wedge q)$ et $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$.
Les ensembles $\{|\}$ et $\{\downarrow\}$ sont complets.

Démonstration :
Faire en exercice.

----------====---------- Fin du chapitre I ---------====----------