Nullprodukt - Nullstelle

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Diesen Satz vom Nullprodukt kannst du häufig bei der Berechnung von Nullstellen, Extremstellen oder Wendestellen nutzen.

Um $x^4 + 3x^3 = 0$ zu lösen, wird zunächst x^3 ausgeklammert:

$$x^3(x+3) = 0 => x^3 = 0 \quad \text{oder} \quad x+3 = 0.$$

Damit sind die Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$.

Substitution - Nullstelle

Wenn in einer Gleichun lediglich **gerade Potenzen von x** auftreten, kann eine **Substitution** druchgeführt werden.

$$x^4 - 5x^2 = 36$$

Schritt 1: Bringe alles auf eine Seite

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Schritt 2: Substitution: Setze u=x^2, dann gilt:

$$u^2 - 5u - 36 = 0$$

Schritt 3: Löse die Gleichung (mit nullstellen für 2.Polynom)

$$u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36} => u_1 = 9, u_2 = -4$$

Schritt 4: Rücksubstitution (in u gleichung): Löse x^2=u, also:

$$u_1 = 9 : x^2 = 9 \iff x_1 = 3, x_2 = -3$$

$$u_2 = -4 : x^2 = -4 => \text{keine weiteren Lösungen}$$

Es folgt also $\mathbb{L} = -3; 3$

Polynomdivision - Nullstelle

Für eine ganzrationale Funktion f gilt:
Ist $x = a$ eine Nullstelle von f, so ist das Ergebnis der Polynomdivision wieder eine ganzrationale Funktion, heitß:

$$f(x) : (x - a)$$

Die Nullstellen dieses Ergebnisses zusammen mit $x = a$ sind die Nullstellen von f.
Häufig muss die erste Nullstelle x=a geraten werden.

Man untersucht dabei zunächst die (positiven und negativen) Teiler des Absolutglieds von f, also der Zahl ohne die Variable x.

Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Gesucht sind also die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Hier helfen weder der Satz vom Nullprodukt noch Substitution weiter. Daher muss eine erste Nullstelle geraten werden.

Das Absolutglied ist 6. Die Menge der Teiler von 6 ist gegeben durch $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$

Man bestimmt nun von jedem dieser Teiler den Funktionswert $f(x)$, bis man als Ergebnis 0 erhält.

Setzt man zum Beispiel $x = 1$ ein, so erhält man:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0.$$

Das Ergebnis der Polynomdivision $f(x) : (x - 1)$ ist also wieder eine ganzrationale Funktion. Es gilt:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
\quad -5x^2 + 11x \\
\quad \underline{\;\;5x^2 - 5x} \\
\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\; \underline{-6x + 6}
\end{array}$$

0

Das Ergebnis ist $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Die Funktion g wird nun auf Nullstellen untersucht. Dabei erhält man mit der $p-q$-Formel bzw. Mitternachtsformel:

$$x_2 = 2 \quad \text{und} \quad x_3 = 3.$$

Somit sind die Nullstellen der Funktion f gegeben durch:

$$\mathbb{L} = \{1; 2; 3\}.$$

Newtonsches Näherungsverfahren - Nullstelle

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^3 + 5x - 7$. Gesucht ist die Nullstelle der Funktion f im Intervall $[0; 3]$ mit einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen.

Schritt 1: Fertige eine Wertetabelle an: Je nach Intervallgröße kannst du hierbei ganze Zahlen verwenden oder in kleineren Schritten vorgehen:

x	0	1	2	3
f(x)	-7	-1	11	35

Schritt 2: Wähle einen geeigneten Startwert. Wähle einen geeigneten Startwert x_0 für das Näherungsverfahren, optimalerweise bereits nahe der Nullstelle, zum Beispiel:

$$x_0 = 1.$$

Schritt 3: Bestimme eine Tangentengleichung und deren Nullstelle. Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0 und bestimme deren Nullstelle x_1. Diese Nullstelle ist dann die Näherung im ersten Schritt:

$$t_0(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

also:

$$t_0(x_1) = 0 \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 1 - \frac{-1}{8} = \frac{9}{8} = 1,12...$$

Schritt 4: Verfahre nun mit der Stelle x_1 genauso wie gerade eben mit der Stelle x_0, um x_2 zu erhalten, also:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,125 - \frac{0,049}{8,797} = 1,119.$$

Schritt 5: Erstelle eine Tabelle mit den einzelnen Näherungswerten. Insgesamt gilt für die einzelnen Schritte

x_0	x_1	x_2	...
1.0	1.119	1.119	...

Hier kann man direkt erkennen, dass sich die dritte Nachkommastelle bereits ab x_2 nicht mehr ändert. Eine Näherung der Nullstelle mit der geforderten Genauigkeit (zwei Nachkommastellen) lautet also:

$$x^* = 1,12.$$

Durch die vorangegangene Wertetabelle wurde der Startwert so gut gewählt, dass nur wenige Iterationsschritte nötig waren.

Beachte, dass das Newton-Verfahren abbricht, falls bei einem Interationsschritt die Tangente waagrecht ist. Dann muss ein neuer, geeigneterer Startwert gefunden werden.

Wurzelgleichungen - Gleichungen

Ein Wurzelausdruck ist nur definiert, wenn der Term unter der Wurzel, auch Radikand genannt, größer oder gleich 0 ist.

Der Ausdruck

$$\sqrt{9 - x^2}$$

ist nur für $-3 \leq x \leq 3$ definiert.

An den Stellen $x = -3$ bzw. $x = 3$ ist der Ausdruck gleich 0.

Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{4x + 16} + x + 1 = 0.$$

Schritt 1: Isoliere die Wurzel:

$$\sqrt{4x + 16} = -x - 1$$

Schritt 2: Quadriere beide Seiten und beachte dabei die binomischen Formeln:

$$4x + 16 = (-x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Schritt 3: Löse die entstehende Gleichung mit der p-q-Formel / Mitternachtsformel:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \text{also} \quad x_1 = -3 \quad \text{oder} \quad x_2 = 5$$

Schritt 4: Mit den gefundenen Lösungen eine Probe machen, denn durch das quadrieren können Lösungen dazugekommen sein:

$$x_1 = -3 : \sqrt{4 \cdot (-3) + 16} - 3 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0 => True$$
$$x_2 = 5 : \sqrt{4 \cdot (5) + 16} + 5 + 1 = 6 + 5 + 1 = 12 => False$$

...

Also gilt: $L = \{-3\}$.

Exponentialgleichungen - Gleichungen

Drei Typen von Exponentialgleichung **es gilt $e^t > 0$ und falls $e^t = -1$ dann keine Lösung, heitß: $\mathbb{L} =$ {}**

Typ 1:

Alle Exponential-Terme haben den gleichen Exponenten, zum Beispiel:

$$e^{3x-1} + 2 = 4 - e^{3x-1}.$$

(Typ 1) Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$5e^{2x+1} - 3 = 3e^{2x+1} + 1.$$

Schritt 1: Isoliere den Exponentialterm:

$$\begin{aligned} 5e^{2x+1} - 3 &= 3e^{2x+1} + 1 \\ \iff \quad 2e^{2x+1} &= 4 \\ \iff \quad e^{2x+1} &= 2. \end{aligned}$$

Schritt 2: Logarithmiere beiden Seiten:

$$\ln\left(e^{2x+1}\right) = \ln(2) \iff 2x + 1 = \ln(2).$$

Schritt 3: Löse nach x auf:

$$x = \frac{\ln(2) - 1}{2}.$$

Typ 2:

Es treten verschiedene Exponenten auf, aber dafür keine Zahlen, zum Beispiel:

$$3e^{2x} - 4e^{5x} = 0.$$

(Typ 2) Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$4e^{3x} = 2e^{5x}$$

Schritt 1 Bringe alles auf eine Seite:

$$2e^{5x} - 4e^{3x} = 0.$$

Schritt 2: Klammere die kleinste e-Potenz aus und beachte dabei die Potenzgesetze:

$$e^{3x}\left(2e^{2x} - 4\right) = 0.$$

Schritt 3: Wende den Satz vom Nullprodukt an:

$$e^{3x} = 0 \quad \text{oder} \quad 2e^{2x} - 4 = 0.$$

Die Gleichung $e^{3x} = 0$ besitzt keine Lösung. **Schritt 4:** Bestimme die Lösungsmenge der zweiten Gleichung:

$$2e^{2x} - 4 = 0 \iff e^{2x} = 2$$
$$\iff x = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Typ 3:

Es treten verschiedene Exponenten und auch Zahlen auf, zum Beispiel:

$$e^{2x} - 5e^{x} = 36.$$

(Typ 3) Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$e^{2x} + e^{x} = 6$$

Schritt 1: Bringe alles auf eine Seite:

$$e^{2x} + e^{x} - 6 = 0.$$

Schritt 2: Substitution: Setze u=e^x:

$$u^2 + u - 6 = 0.$$

Schritt 3: Löse entstandene Gleichung mit Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} => u_1 = 2, \quad u_2 = -3.$$

Schritt 4: Rücksubstitution: Löse $e^x = u$:

$$u_1 = 2: \quad e^x = 2 => x = \ln(2)$$
$$u_2 = -3: \quad e^x = -3 => \text{keine weiter Lösungen}$$

Es folgt also $\mathbb{L} = \{\ln(2)\}$

Potenzfunktionen - Funktionen

Standardform einer Potenzfunktion

Die Standardform einer Potenzfunktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = x^r$$

- Die Graphen von Potenzfunktionen verlaufen immer durch den Punkt $(1, 1)$.
- Aus den Potenzfunktionen können durch elementare Verknüpfungen die ganzrationalen Funktionen, die gebrochenrationalen Funktionen und die Wurzelfunktionen gebildet werden.
- Je nach Exponent r können die Graphen von Potenzfunktionen sehr unterschiedliche Gestalt besitzen.

Hinweis:
Die drei wichtigsten Untergruppen von Potenzfunktionen werden in den folgenden Merkkästen untersucht.

Tipp:
Oft wird in Büchern die Standardform einer Potenzfunktion definiert als $f(x) = ax^r$. Es wurde nur der Fall $a = 1$ hier betrachtet. Wie du Graphen strecken und stauchen oder Graphen verschieben und spiegeln kannst, erfährst du in weiteren Kapiteln.

Parabeln n-ter Ordnung

Die einfachsten Potenzfunktionen sind solche mit positiven ganzzahligen Exponenten, also

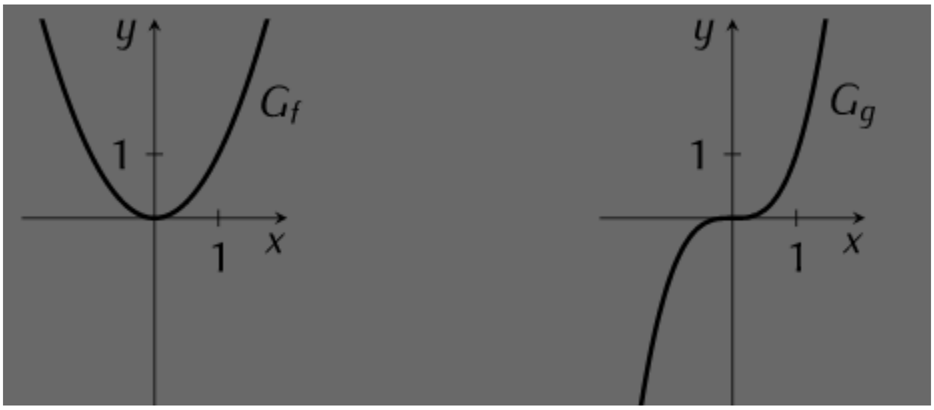
$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ihre Graphen nennt man Parabeln n-ter Ordnung.

Parabelfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Für $x \to +\infty$ gilt $x^n \to +\infty$.

Je nachdem ob der Exponent n gerade oder ungerade ist, liegt ein Parabelast im zweiten oder dritten Quadranten, wie man im folgenden Schaubild an den Funktionsgraphen von erkennen kann.

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^3$$



Entsprechend ergibt sich der Grenzwert für $x \to -\infty$.

Hyperbeln n-ter Ordung

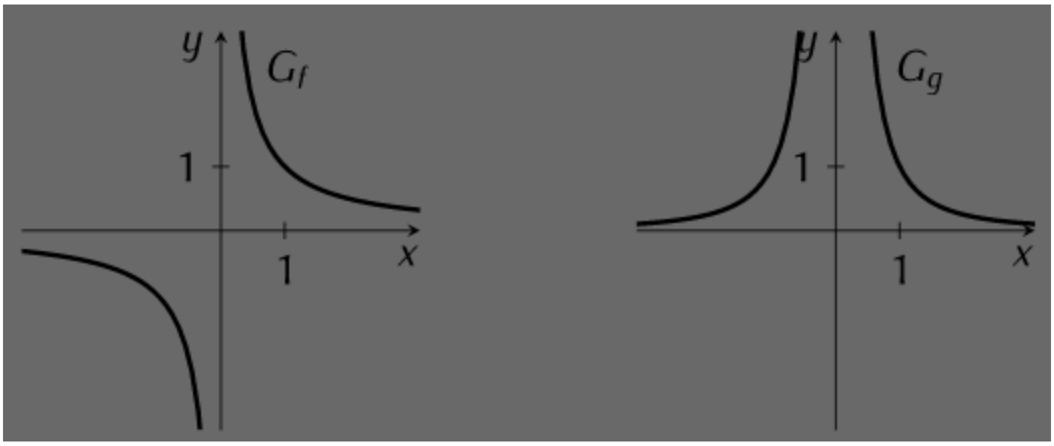
Hyperbelfunktionen n-ter Ordnung sind Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligen Exponenten.

Man kann sie auch schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Hyperbelfunktionen $n - ter$ Ordnung sind für $x \neq 0$ definiert. Für $x \to \pm\infty$ gilt $\frac{1}{x^n} \to 0$. Je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, liegt ein Hyperbelast im zweiten oder dritten Quadranten, wie man im folgenden Schaubild an den Funktionsgraphen von sehen kann.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$



Hyperbeln n-ter Ordnung besitzen zwei Arten von **Asymptoten**. Als Asymptoten bezeichnet man Geraden, denen sich der Funktionsgraph für bestimmte Bereiche des Definitionsbereiches annähert. Alle nicht verschobenen Hyperbeln n-ter Ordnung besitzen die y-Achse als senkrechte Asymptote und die x-Achse als waagerechte Asymptote. Man sagt auch, dass die hier betrachteten Funktionen eine **Polstelle** bei $x = 0$ besitzen.
Tipp: Wenn man Hyperbelfunktionen verschiebt, verschieben sich ihre Asymptoten einfach auf die gleiche Art und Weise mit. Dementsprechend kann man auch das Verhalten im Unendlichen von verschobenen Hyperbeln leicht berechnen.

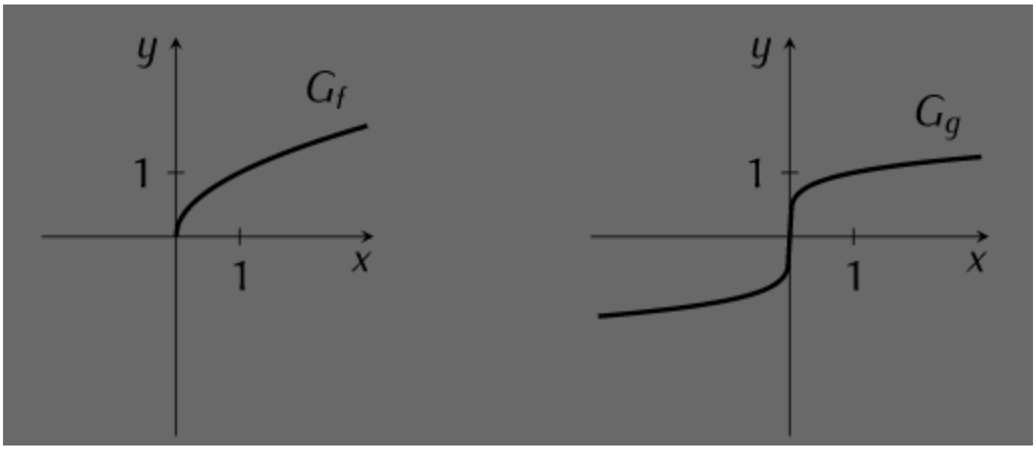
Elementare Wurzelfunktionen

Elementare Wurzelfunktionen kann man darstellen als

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Elementare Wurzelfunktionen sind nur für gerade n nur für $x \geq 0$, für ungerade n aber auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Für $x \to +\infty$ gilt $\sqrt[n]{x} \to +\infty$. Je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, haben elementare Wurzelfunktionen einen oder zwei Äste, wie man im folgenden Schaubild an den Funktionsgraphen von unten: (Info: Elementare Wurzelfunktionen sind Umkehrfunktionen von Parabelfunktionen.)

$$f(x) = \sqrt[2]{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$$



Ganzrationale Funktionen - Funktionen

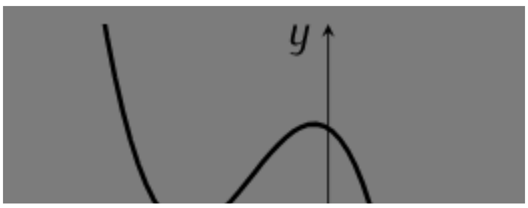
Grundlegendes

Die Standardform einer ganzrationalen Funktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Ganzrationale Funktionen heißen auch **Polynome**. Die höchste auftretende Potenz n heißt Grad der Funktion f , kurz: $\deg(f)$. Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Die Funktion $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 3$ ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 . Also kann f maximal drei Nullstellen haben. Im Schaubild kann man erkennen, dass der Graph von f genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse hat und die Funktion f somit genau eine Nullstelle.

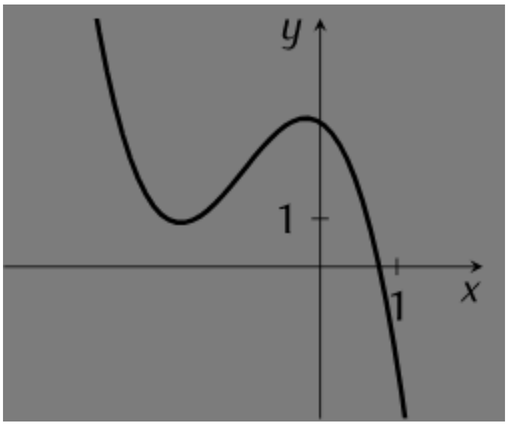


Verhalten im Unendlichen

Um das Verhalten im Unendlichen einer ganzrationalen Funktion zu untersuchen, muss lediglich der Term mit der höchsten Potenz herangezogen werden (Vorzeichen beachten).

- Geht der Term gegen $+\infty$, geht $f(x)$ gegen $+\infty$.
- Geht der Term gegen $-\infty$, geht $f(x)$ gegen $-\infty$.

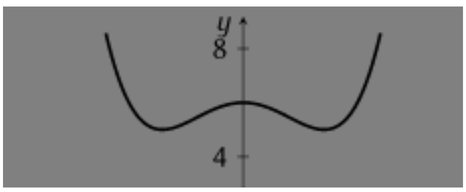
Die Funktion $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 3$ ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 .

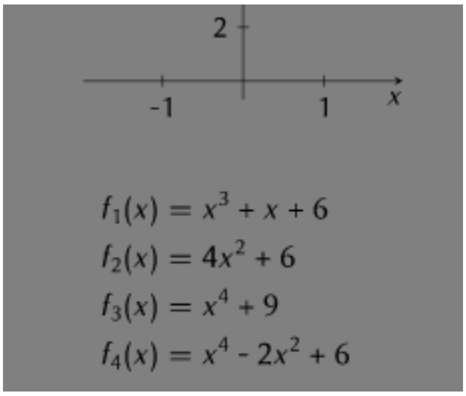


Für $x \to +\infty$ geht $-x^3 \to -\infty$, also $f(x) \to -\infty$.
Für $x \to -\infty$ geht $-x^3 \to +\infty$, also $f(x) \to +\infty$.

Das Verhalten im Unendlichen lässt sich zudem am Graphen der Funktion ablesen.

Polynome Verstehen



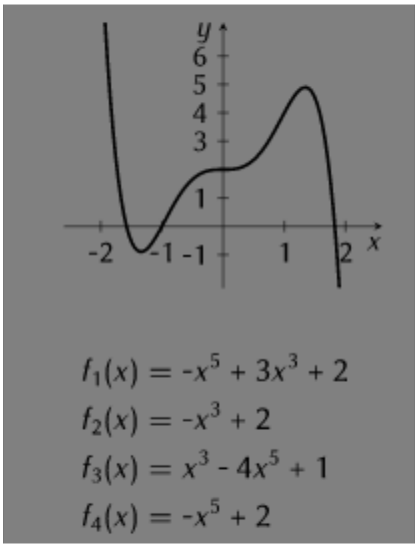


Wenn man den y-Achsenabschnitt betrachtet, fällt auf, dass dieser bei $y = 6$ liegt. Das Absolutglied muss also $+6$ betragen. Damit ist im Schaubild nicht der Graph der Funktion f_3 abgebildet. Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse. Die Exponenten müssen also alle gerade sein, weswegen im Schaubild nicht der Graph von der Funktion f_1 abgebildet ist. Folgende Funktionen sind also noch übrig:

$$f_2(x) = 4x^2 + 6$$
$$f_4(x) = x^4 - 2x^2 + 6$$

Da der Graph der Funktion drei Extrempunkte -- zwei Tiefpunkte und einen Hochpunkt -- besitzt, muss der Grad mindestens 4 betragen. Damit bleibt nur noch die Funktion f_4 übrig. Im Schaubild ist also der Graph der Funktion abgebildet.

$$f_4(x) = x^4 - 2x^2 + 6$$



Da der y-Achsenabschnitt 2 beträgt, muss das Absolutglied $+2$ sein. Damit ist im Schaubild nicht der Graph der Funktion f_3 abgebildet. Wie man am Schaubild erkennen kann, hat die Funktion zwei Extrempunkte und einen Sattelpunkt. Die Ableitung der dargestellten Funktion muss also mindestens drei Nullstellen haben. Der Grad dieser Funktion ist also mindestens 3. Wenn aber nun die Ableitung mindestens Grad 3 hat, muss die Funktion selbst mindestens Grad 4 haben und damit entfällt f_2. Folgende Funktionen sind also noch übrig:

$$f_1(x) = -x^5 + 3x^3 + 2$$
$$f_4(x) = -x^5 + 2$$

Als letzten Schritt betrachtet man die Schnittpunkte mit der x-Achse. Diese muss man hier nicht zwingend ausrechnen. Es genügt, zu überlegen, wie viele Nullstellen die beiden Funktionen haben. Eine der beiden Funktionen muss die Funktion auf dem Schaubild sein, und daher drei Nullstellen haben. Die Nullstellen von f_4 sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} -x^5 + 2 &= 0 \\ x^5 &= 2 \\ x &= \sqrt[5]{2} \end{aligned}$$

Wie man sieht, hat f_4 nur eine Nullstelle. Im Schaubild ist also der Graph der Funktion abgebildet. (unten)

$$f_1(x) = -x^5 + 3x^3 + 2$$

Gebrochenrationale Funktionen - Funktionen

Gebrochenrationale Funktion

Die Standardform einer gebrochenrationalen Funktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Dabei sind g und h ganzrationale Funktionen.

Eine Stelle $x = a$ ist Nullstelle der Funktion f, falls $g(a) = 0$ und gleichzeitig $h(a) \neq 0$ gilt. Ist $h(a) = 0$, so ist $x = a$ eine Definitionslücke von f . Gilt $h(a) = 0$ und $g(a) \neq 0$, so ist die Definitionslücke $x = a$ eine Polstelle von f.

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{2x + 6}{x^2 - 4}.$$

Die Nullstellen des Zählers sind gegeben durch:

$$2x + 6 = 0 \iff x_1 = -3.$$

Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_2 = 2 \quad \text{oder} \quad x_3 = -2.$$

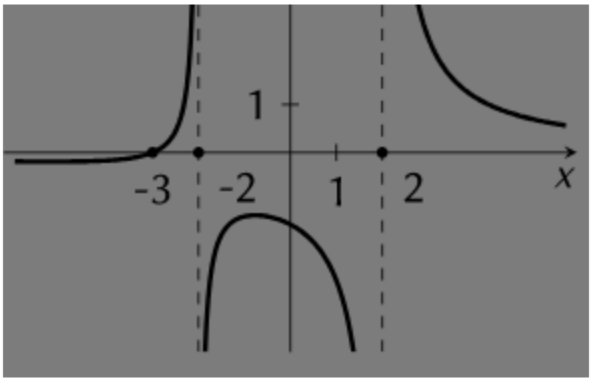
Es gilt also:

Da die Nullstelle x_1 des Zählers keine Nullstelle des Nenners ist, hat f an der Stelle $x_1 = -3$ eine Nullstelle. Die Funktion f hat Definitionslücken bei $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$. Die Definitionsmenge ist daher gegeben durch:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Da die Definitionslücken keine Nullstellen des Zählers sind, hat f an den Stellen $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ Polstellen.

Der Graph von f ist im folgenden Schaubild dargestellt.



Definitionslücken (senkrechte Asymptoten)

Es gibt zwei Arten von Definitionslücken einer gebrochenrationalen Funktion

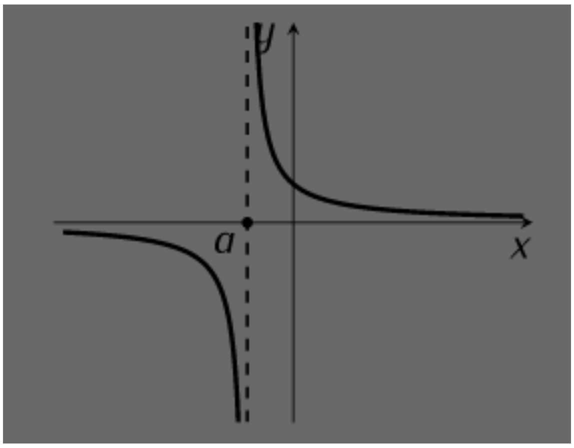
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Gilt an einer Stelle

$$h(a) = 0 \quad \text{und} \quad g(a) \neq 0,$$

so hat die Funktion f an der Stelle $x = a$ eine Polstelle. Der Graph von f hat dort eine senkrechte Asymptote.

Nähert sich x der Polstelle a an, so gilt $f(x) \to +\infty$ oder $f(x) \to -\infty$.



Gilt an einer Stelle

$$h(a) = 0 \quad \text{und} \quad g(a) = 0,$$

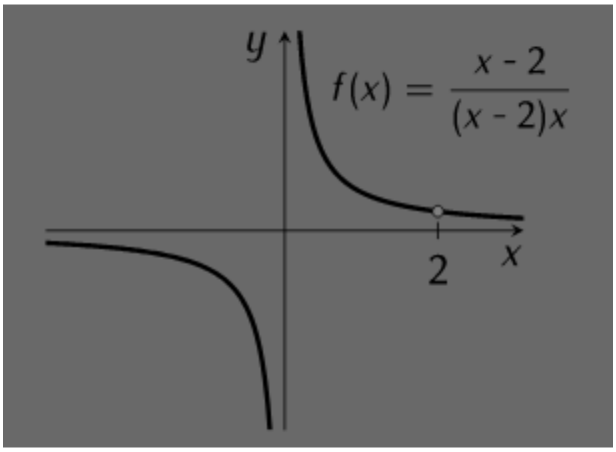
so kann der Term $(x - a)$ aus

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

gekürzt werden.

Falls $x = a$ weiterhin Zähler- und Nennernullstelle ist, muss noch einmal der Term $(x - a)$ gekürzt werden. Dies wird so lange durchgeführt, bis $x = a$ keine Zähler- oder Nennernullstelle mehr ist. Der "gekürzte" Term muss dann erneut auf eine Definitionslücke an der Stelle $x = a$ untersucht werden.

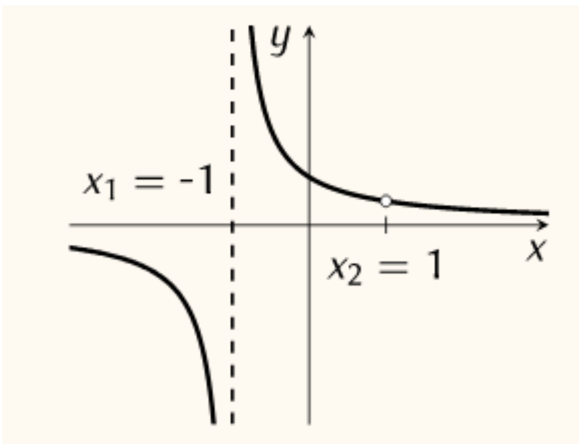
Ist $x = a$ nach dem Kürzen weiterhin eine Nennernullstelle, so hat f an der Stelle $x = a$ eine Polstelle und der Graph von f hat dort eine senkrechte Asymptote. Ist $x = a$ nach dem Kürzen keine Nennernullstelle mehr, so hat f an der Stelle $x = a$ eine hebbare Definitionslücke.



Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}.$$
Die Funktion f hat Definitionslücken an den Nullstellen des Nenners, also
$$x^2 - 1 = 0 => x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$
Damit ist die Definitionsmenge von f:
$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$
Der Zähler hat nur die Nullstelle $x_3 = 1$. Daraus folgt:

Die Stelle $x_1 = -1$ ist eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers. An der Stelle $x_1 = -1$ hat f also eine Polstelle und der Graph von f eine senkrechte Asymptote. Die Stelle $x_2 = 1$ ist sowohl eine Nullstelle des Zählers als auch eine Nullstelle des Nenners. Also kann der Funktionsterm von f gekürzt werden. Mit der dritten Binomischen Formel gilt:
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$
Im gekürzten Term ist $x_2 = 1$ keine Nullstelle des Zählers mehr, damit hat f an der Stelle $x_2 = 1$ eine **hebbare Definitionslücke**.

Der Graph der Funktion f ist im folgenden Schaubild dargestellt.



Verhalten im Unendlichen (Horizontale und schiefe Asymptoten)

Das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion f und deren Graph G_f im Unendlichen wird durch deren Zählergrad (ZG) und den Nennergrad (NG) bestimmt.

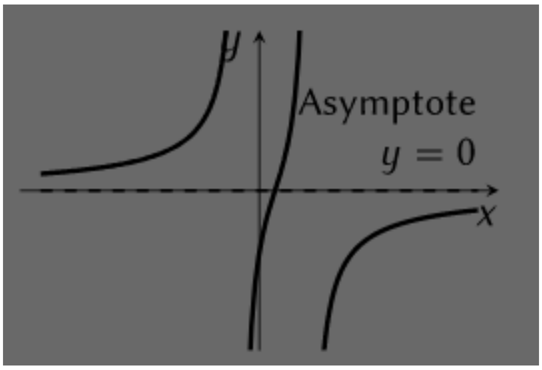
- ZG < NG In diesem Fall gilt:

  $$f(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

  und die x-Achse ($y = 0$) ist eine waagrechte Asymptote von G_f.

  Zum Beispiel:

  $$f(x) = \frac{-2x+1}{x^2-x-1} \Rightarrow \text{Asymptote } y = 0.$$

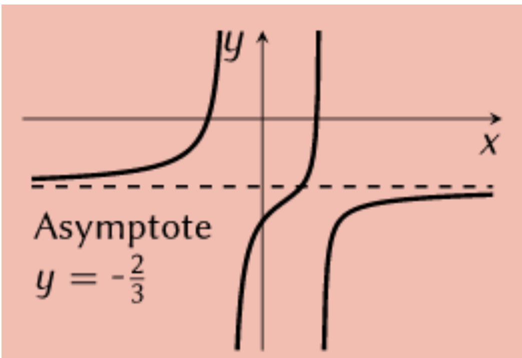
- ZG = NG Sind a und b die Koeffizien Sind a und b die Koeffizienten vor den höchsten Potenzen in Zähler und Nenner, so gilt:

  $$f(x) \to \frac{a}{b} \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

  und G_f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{a}{b}$.

  Zum Beispiel:

  $$f(x) = \frac{-2x^2+1}{3x^2-x-1} \Rightarrow \text{Asymptote } y = \frac{-2}{3}.$$

- ZG > NG In diesem Fall gibt es keine waagrechte Asymptote.

  Ist die Funktionsgleichung von f von der Form

  $$f(x) = mx + c + g(x)$$

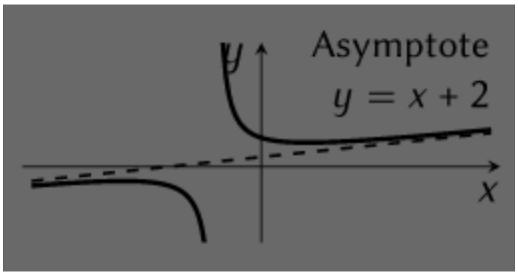
  und gilt

  $$g(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty,$$

  so hat G_f eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $y = mx + c$.

Zum Beispiel:

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1} \text{ => schiefe Asymptote } y = x + 2.$$



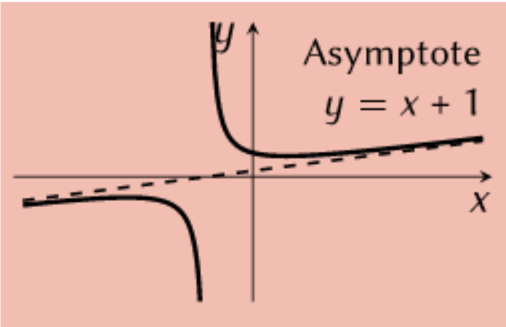
- ZG > NG In diesem Fall gibt es keine waagrechte (horizontale) Asymptote.

  Im Fall $ZG = NG + 1$ hat G_f eine schiefe Asymptote.

  Um die Gleichung der Asymptote zu bestimmen, führt man eine Polynomdivision (Zähler durch Nenner) durch. Der Teil vor dem Rest beschreibt die Gleichung der schiefen Asymptote von G_f.

  Zum Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} \overset{\text{P-Division}}{=>} f(x) = x + 1 + \frac{3}{x+1} // \text{ => schiefe Asymptot}$$



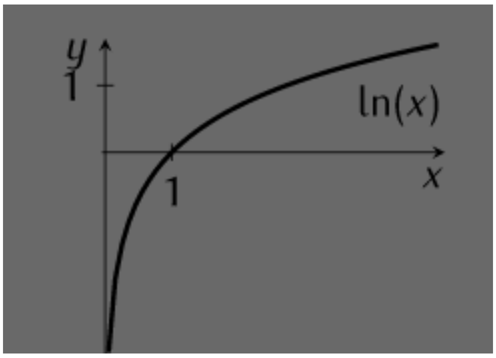
Logarithmusfunktion - funktionen

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ nennt man (natürliche) Logarithmusfunktion.

- Die Logarithmusfunktion ist nur für $x > 0$ definiert.
- Es gelten: $\ln(x) < 0$ für$0 < x < 1$ und $\ln(x) > 0$ für $x > 1$.
- Es gelten: $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

- Für $x \to \infty$ gilt$\ln(x) \to \infty$.
- Für $x \to 0$ gilt $\ln(x) \to -\infty$



Tipp: Die Logarithmusfunktion wächst für $x \to +\infty$ sehr langsam gegen unendlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere:

$$\frac{\ln(x)}{x^n} \to 0 \text{ für } x \to +\infty.$$

Logarithmusgesetze

Es gelten die folgenden Logarithmusgesetze:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln(x : y) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln(x^y) = y \ln(x)$$

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = e^{2x} + e^x - 2.$$

Bestimme folgenden Funktionswert $f(\ln(t))$ und vereinfache danach diesen Ausdruck so weit wie es geht.

Es gilt:

$$f\left(\ln(t)\right) = e^{2\ln(t)} + e^{\ln(t)} - 2.$$

Mit den Potenzgesetzen folgt:

$$f(\ln(t)) = \left(e^{\ln(t)}\right)^2 + e^{\ln(t)} - 2.$$

Damit ist:

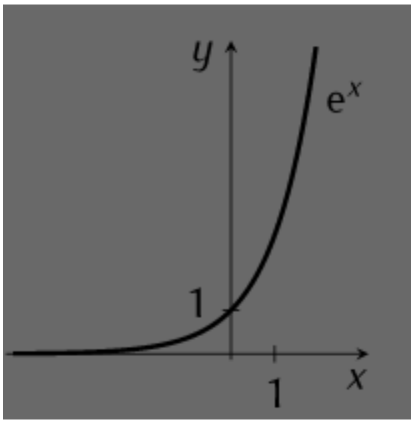
$$f\left(\ln(t)\right) = t^2 + t - 2.$$

Exponentialfunktion (e-Funktion) - Funktionen

Eigenschaften der Exponentialfunktion (e-Funktion)

Die Funktion $f(x) = e^x$ nennt man Exponentialfunktion.

- Es gilt: $e^x > 0$ für alle Werte von x. Somit hat die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ keine Nullstellen.
  - Es gilt: $e^0 = 1$.
  - Für $x \to +\infty$ gilt $e^x \to +\infty$.
  - Für $x \to -\infty$ gilt $e^x \to 0$.

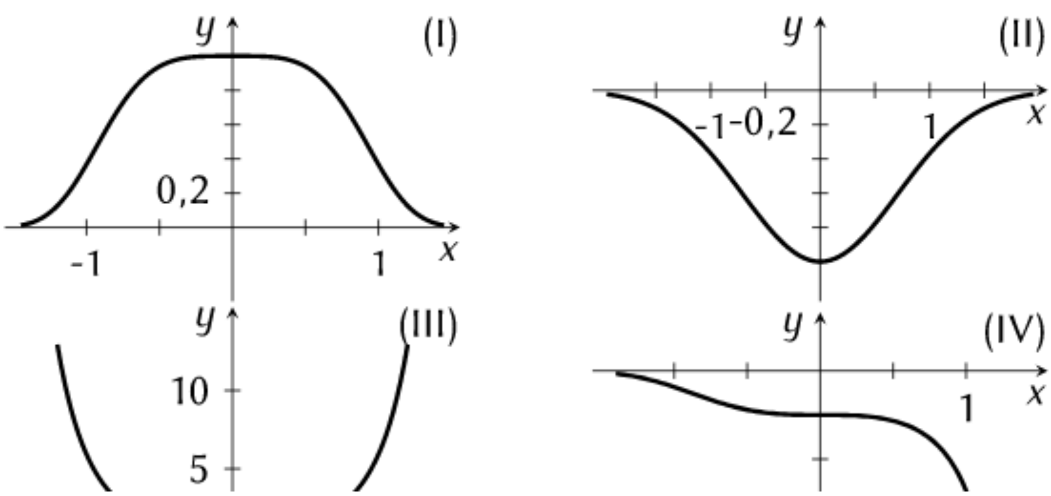


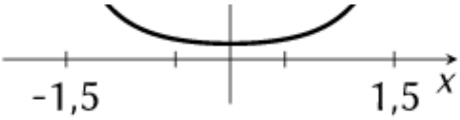
Die Exponentialfunktion wächst für $x \to +\infty$ sehr schnell gegen unendlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere:

$$\frac{e^x}{x^n} \to +\infty \text{ für } x \to +\infty.$$

e - Funktion verstehen

$f(x) = e^{x^2}$
$g(x) = e^{-x^4}$
$h(x) = -e^{x^3}$
$i(x) = -e^{-x^2}$





- Für die Funktion f und deren Graph G_f gelten folgende Eigenschaften:

Der Graph G_f ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:
$$f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x).$$
Damit können nur die Graphen (I), (II) oder (III) zur Funktion f gehören. - Für die Ableitung f' gilt:
$$f'(x) = 2xe^{x^2}.$$
Die Ableitung nimmt damit für $x > 0$ positive Werte an und G_f ist damit für $x > 0$ monoton steigend. Damit kann der Graph (I) nicht zur Funktion f gehören. Es bleiben also noch die Graphen (II) oder (III) übrig. - Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph (II) gehört also zur Funktion f.

- Für die Funktion g und deren Graph G_g gelten folgende Eigenschaften: - Der Graph G_g ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:
$$g(-x) = e^{-(-x)^4} = e^{-x^4} = g(x).$$
Damit können nur die Graphen (I), (II) oder (III) zur Funktion g gehören. - Für die Ableitung g' gilt:
$$g'(x) = -4x^3e^{-x^4}.$$
Die Ableitung nimmt damit für $x > 0$ negative Werte an und G_g ist damit für $x > 0$ monoton fallend. Damit muss der Graph (I) zur Funktion g gehören.

- Für die Funktion h und deren Graph G_h gelten folgende Eigenschaften: - Es gilt $h(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit können nur die Graphen (II) oder (IV) zur Funktion h gehören. - Für die Ableitung h' gilt:
$$f'(x) = -3x^2e^{x^3}.$$
Die Ableitung nimmt damit für $x > 0$ positive Werte an und G_h ist damit für $x > 0$ monoton fallend. Der Graph (VI) gehört also zur Funktion h.

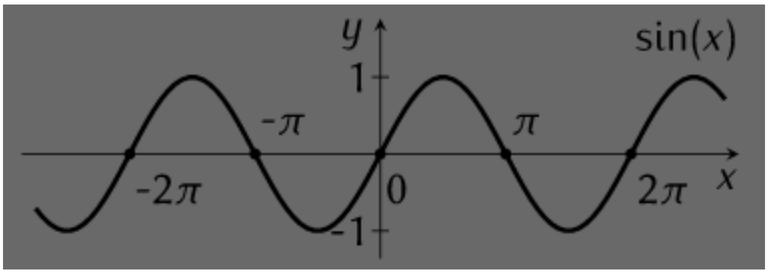
- Für die Funktion i und deren Graph G_i gelten folgende Eigenschaften: - Es gilt $i(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit können nur die Graphen (II) oder (VI) zur Funktion i gehören. - Der Graph G_i ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:
$$i(-x) = -e^{(-x)^2} = e^{-x^2} = i(x).$$
Der Graph (VI) gehört also zur Funktion i.

Trigonometrische Funktionen - Funktionen

Sinusfunktion

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ nennt man Sinusfunktion.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- Die Sinusfunktion hat die Periode 2π. Es gilt also: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$
- Die Nullstellen von $\sin(x)$ sind $\ldots - 2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ (allgemein: $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$).



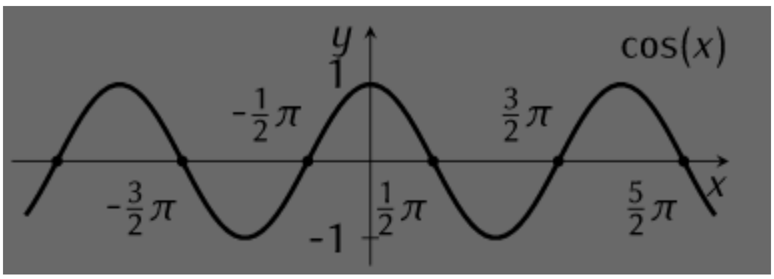
Eine typische Aufgabenstellung könnte folgendermaßen aussehen: Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = \sin(2x + 4\pi$ im Intervall $[-2\pi; 0)$. Es gilt:
$$\sin(2x + 4\pi) = 0, \quad \text{also} \quad 2x + 4\pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
Das ist gleichbedeutend mit:
$$2x = k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2}.$$
Im Intervall $[-2\pi; 0)$ ist die Menge $\mathbb{N}$ der Nullstellen von f also gegeben durch
$$N = \left\{ -2\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\pi; -\frac{1}{2}\pi \right\}.$$

Die Kosinusfunktion

Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ nennt man Kosinusfunktion.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
- Die Kosinusfunktion hat die Periode 2π. Es gilt also: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
- Die Nullstellen von $\cos(x)$ sind $\ldots - \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

$$\left(\text{allgemein:} \quad \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$$



Hinweis

Man erhält den Graphen der Kosinusfunktion, indem der Graph der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$

nach links verschoben wird:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x).$$

Beispiel

Gesucht sind die Nullstellen von $f(x)=2\cos(x)+2$ im Intervall $[-2\pi;2\pi]$.

$$2\cos(x)+2=0 => \cos(x)=-1$$

$$\text{gleichzeitig} => x=(2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Die Menge N der Nullstellen von f im Intervall $[-2\pi;2\pi]$ ist also gegeben durch:
$\mathbb{N}=\{-\pi;\pi\}$

Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion

Die allgemeine Sinusfunktion ist gegeben durch

$$f(x)=a\sin(b(x+c))+d.$$

Die Amplitude a bestimmt den maximalen Ausschlag der Nulllinie in y-Richtung. Die Periode b bestimmt die Periodenlänge $p=\frac{2\pi}{b}$ Die Phasenverschiebung c bewirkt eine Verschiebung entlang der x-Achse, nach links für $c>0$ und nach rechts für $c<0$. Der Parameter d bestimmt die Verschiebung in y-Richtung.

Hinweis Dies gilt genau so für die Kosinusfunktion.
Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=2\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+1.$$

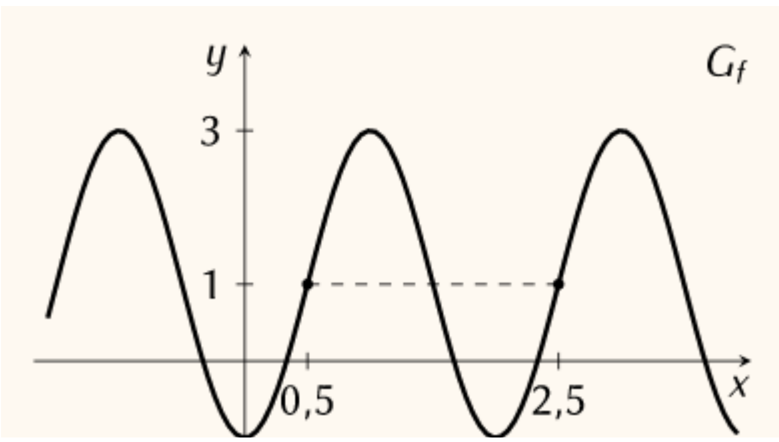
Der Graph G_f der Funktion$f$ soll skizziert werden. Um einen Aufbau der Funktion wie im Merksatz zu erhalten, klammert man zunächst den Faktor vor dem x aus:

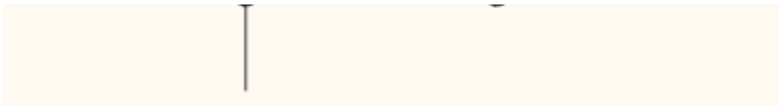
$$f(x)=2\sin\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+1.$$

Man liest folgende Eigenschaften ab:

- Amplitude: $a=2$
- Periodenlänge: $p=\frac{2\pi}{\pi}=2$
- Verschiebung nach rechts: $c=\frac{1}{2}$
- Verschiebung nach oben: $d=1$

Man erhält folgende Skizze:





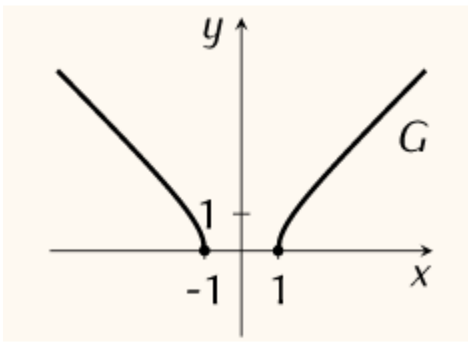
Wurzelfunktionen - funktionen

Eigenschaften von Wurzelfunktionen

Die Standardform einer Wurzelfunktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

- Meistens ist dabei die Funktion g unter der Wurzel, auch Radikand genannt, eine ganzrationale Funktion und $n = 2$, also die normale Quadratwurzel.
- Es ist wichtig, bei Wurzelfunktionen auf den Definitionsbereich zu achten.
- Die Nullstellen von f sind die gleichen wie die von g, sofern die letzteren im Definitionsbereich von f liegen.
  Bestimmen den Definitionsbereich, sowie mögliche Nullstellen einer Wurzelfunktion:
  Die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ist eine typische Wurzelfunktion. Sie ist zwischen $-$ und 1 nicht definiert, da in diesem Fall der Radikand negativ ist. Die Funktion f kann maximal zwei Nullstellen haben.
  Der Graph G der Funktion f ist im folgenden Schaubild dargestellt.



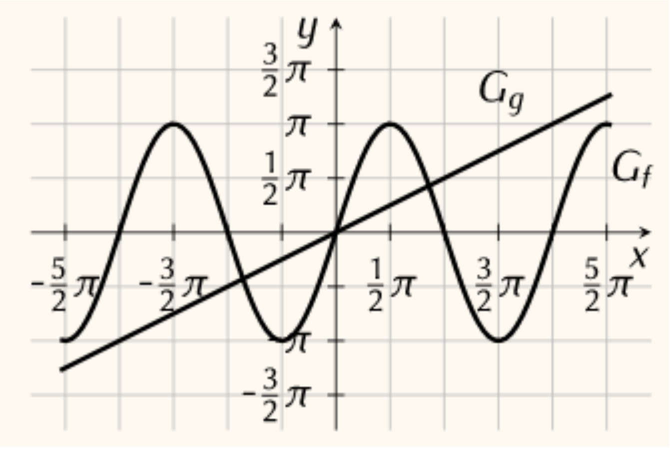
Zu beachten ist, dass die Grenzen des Definitionsbereiches mit ausgefüllten Kreisen gekennzeichnet werden, wenn die Grenzen so wie in diesem Beispiel mit im Definitionsbereich liegen. Falls die Grenzen nicht im Definitionsbereich enthalten sind, werden sie im Graphen mit offenen Kreisen dargestellt.

Zusammengesetzte Funktionen - Funktionen

Aus zwei Funktionen f und g kann auf unterschiedliche Arten eine neue Funktion h definiert werden:

- Die Funktionen g und f werden hintereinander ausgeführt. Man schreibt: $f\left(g(x)\right)$ oder auch manchmal $\left(f \circ g\right)(x)$.
- Die Funktionen f und g können durch Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation die neue Funktion h definieren. Zum Beispiel $h(x) = g(x) \cdot f(x)$.

In der folgenden Abbildung sind die Graphen G_f und G_g zweier Funktionen f und g gegeben.



Auch ohne Kenntnis der Funktionsterme kann man nur aus den Graphen Erkenntnisse über zusammengesetzte Funktionen wie zum Beispiel h_1 und h_2 mit
$$h_1(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{und} \quad h_2(x) = f\left(g(x)\right)$$
gewinnen. Beispielsweise:

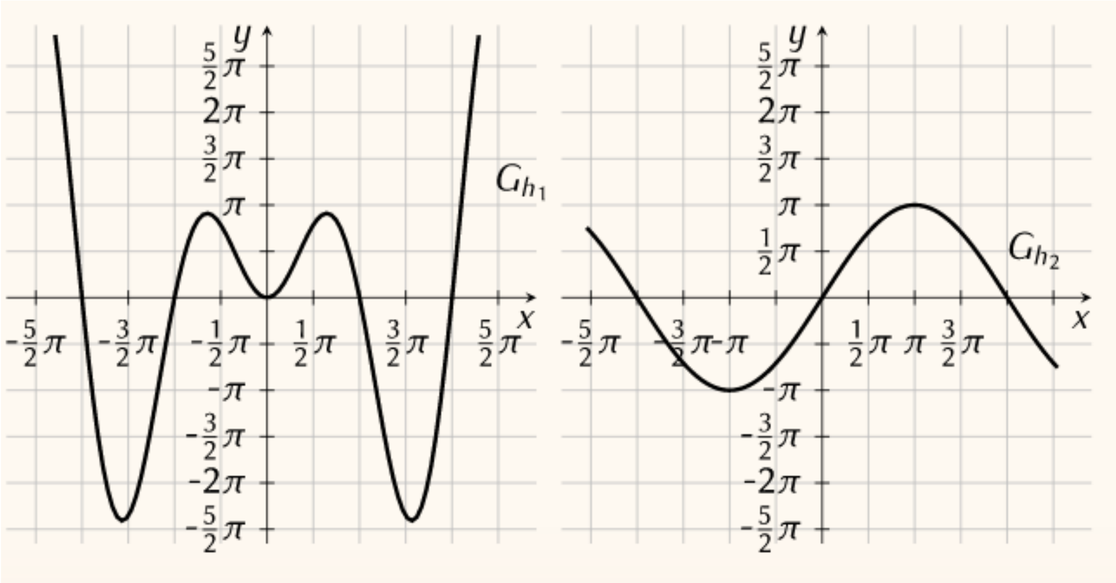
- Bei allen Nullstellen der Funktionen f und g hat auch h_1 eine Nullstelle, da die Funktionswerte von h_1 aus der Multiplikation der Funktionswerte von f und g entstehen.

Für h_2 muss dies nicht gelten.

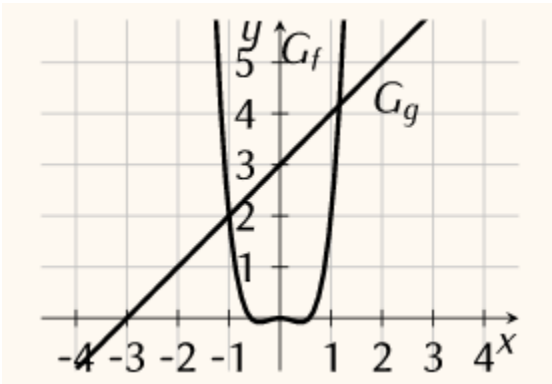
- Es gilt $h_1(0,5\pi) = \pi \cdot 0,25\pi = 0,25\pi^2$
- Es gilt $h_2(\pi) = f\left(g(\pi)\right) = \pi, \quad \text{da} \quad g(\pi) = 0,5\pi \quad \text{und} \quad f(0,5\pi) = \pi.$

Sind die Funktionsterme von f und g bekannt, kann man auch die Funktionsterme von zusammengesetzten Funktionen wie h_1 und h_2 aufstellen. In diesem Beispiel gilt $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ und $g(x) = 0,5x$. Somit ergeben sich für h_1 und h_2:
$$h_1(x) = 0,5\pi x \cdot \sin(x) \quad \text{und} \quad h_2(x) = \pi \sin(0,5x).$$
Die zugehörigen Graphen der beiden zusammengesetzten Funktionen h_1 und h_2 sehen

ziemlich unterschiedlich aus wie folgende Abbildungen zeigen.



Beispiel In der folgenden Abbildung sind die Graphen G_f und G_g zweier Funktionen f und g gegeben.



Auch ohne Kenntnis der Funktionsterme kann man nur aus den Graphen Erkenntnisse über zusammengesetzte Funktionen wie zum Beispiel h_1 und h_2 mit

$$h_1(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{und} \quad h_2(x) = f\,(g(x))$$

gewinnen. Beispielsweise:

- Bei allen Nullstellen der Funktionen f und g hat auch h_1 eine Nullstelle, da die Funktionswerte von h_1 aus der Multiplikation der Funktionswerte von f und g entstehen.

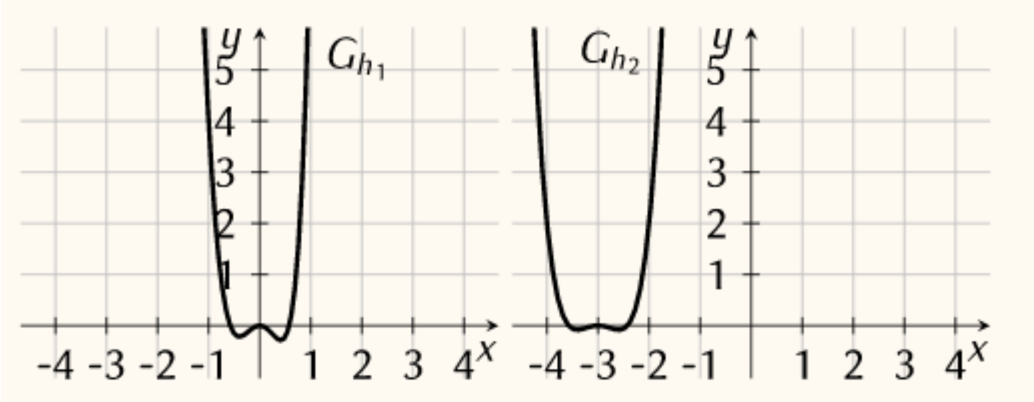
Für h_2 muss dies nicht gelten.

- Es gilt $h_2(-3) = f(g(-3)) = f(0) = 0.$

Sind die Funktionsterme von f und g bekannt, kann man auch die Funktionsterme von zusammengesetzten Funktionen wie h_1 und h_2 aufstellen. In diesem Beispiel gilt $f(x) = 3x^4 - x^2$ und $g(x) = x + 3$. Somit ergibt sich für h_1 und h_2:

$$h_1(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x^5 + 9x^4 - x^3 - 3x^2$$
$$h_2(x) = f\,(g(x)) = 3x^4 + 36x^3 + 161x^2 + 318x + 234$$

Die zugehörigen Graphen G_{h_1} und G_{h_2} der beiden zusammengesetzten Funktionen h_1 und h_2 sehen ziemlich unterschiedlich aus, wie folgende Abbildungen zeigen.



Steckbriefaufgaben - Funktionen

Bestimmung von Funktionsgleichungen

In Steckbriefaufgaben wird die Gleichung einer unbekannten Funktion gesucht. Die Eigenschaften des Graphen der Funktion (Position der Hoch-, Tief-, Wendepunkte, Nullstellen, ...) sind durch die Aufgabenstellung gegeben.

Merksatz: Eine Standard-Aufgabenstellung: Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph G am Ursprung einen Extrempunkt und einen Wendepunkt in $W(1|1)$ hat.

- Schritt 1: Schreibe die allgemeine Funktionsgleichung 3. Grades und ihre Ableitungen auf:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

- Schritt 2: Schreibe alle Informationen in Formelschreibweise. Achtung: Manche Informationen ergeben zwei Gleichungen.:

$$\begin{aligned} \text{G geht durch Ursprung => } f(0) = 0 \quad (I) \\ \text{G hat Extrempunkt am Ursprung => } f'(0) = 0 (II) \\ \text{G hat Wendepunkt in W (1|1) => } f''(1) = 0 (III) \\ \text{G geht druch Punkt W(1|1) => } f(1) = 1 (IV) \end{aligned}$$

- Schritt 3: Setze die Gleichungen in die allgemeine Funktionsgleichung ein: Kurze die Nullen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & = & 0a & + & 0b & + & 0c & + & d & (I) \\
0 & = & 0a & + & 0b & + & c & + & 0d & (II) \\
0 & = & 6a & + & 2b & + & 0c & + & 0d & (III) \\
1 & = & a & + & b & + & c & + & d & (IV)
\end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & = & 0a & + & 0b & + & 0c & + & d & (I) \\
0 & = & 0a & + & 0b & + & c & (II) \\
0 & = & 6a & + & 2b & (III) \\
1 & = & a & + & b & + & c & + & d & (IV)
\end{array}$$

- Schritt 4: Löse das entstehende LGS:

$$c = 0, \quad d = 0, \quad , a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}.$$

  Die gesuchte Funktion lautet damit

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

Steckbriefaufgaben begegnen dir meist in Form von Textaufgaben. Anhand der Aufgabenstellung gilt es nun herauszulesen, welcher Funktionstyp (ganzrationale Funktion, Exponentialfunktion, ...) gesucht ist.

Beispiel: Aufgabe: Ein radioaktiver Zerfallsvorgang von 100 Gramm eines Isotops wird beschrieben durch die Funktion

$$B(t) = ae^{-bt},$$

t in Jahren seit Beobachtungsbeginn, $B(t)$ in Gramm. Die Halbwertszeit des Isotops beträgt 10 Jahre. Bestimme a und b.

- Schritt 1: Schreibe die Bedingungen als Gleichungen:

$$\text{Zu Beginn 100 Gramm} => B(0) = 100$$
$$\text{Nach 10 Jahren nur noch 50 Gramm} => B(10) = 50$$

- Schritt 2: Löse die Gleichungen

$$100 = ae^0 => a = 100$$
$$50 = 100e^{-10b} => b = -\frac{1}{10}\ln(\frac{1}{2}) = 0.069$$

  Die gesuchte Funktion lautet $f(t) = 100e^{-0{,}069t}$.

Tipp zu Steckbriefaufgaben: Oft muss man die Bedingungen statt aus einem Text aus einer Skizze ablesen.

Stetigkeit - Funktionen

Gegeben sind zwei stetige bzw. differenzierbare Funktionen f und g. Der Graph der Funktion f soll an der Stelle $x = a$ an den Graphen der Funktion g angeschlossen werden.
Dabei heißt der Übergang an der Stelle $x = a$:

- stetig, falls $f(a) = g(a)$ gilt.
- differenzierbar, falls zusätzlich $f'(a) = g'(a)$ gilt.
- zweimal differenzierbar bzw. krümmungsruckfrei, falls zusätzlich $f''(a) = g''(a)$ gilt.

Beispiel: Betrachtet werden die folgenden beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \quad \text{für} \quad x \leq 0 \\ g(x) &= -x^2, \quad \text{für} \quad x > 0 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 0$ geht der Graph der Funktion f in den Graphen der Funktion $g$über.
Es gelten:

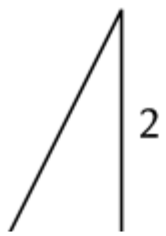
$$\begin{aligned} f(0) &= 0 = g(0) \\ f'(0) &= 0 = g'(0) \\ f''(0) &= 2 \neq -2 = g''(0). \end{aligned}$$

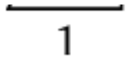
Somit ist der Übergang der Graphen f und g zwar stetig und differenzierbar, aber nicht krümmungsruckfrei.

Ableitung - Derivative

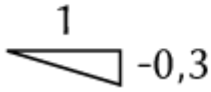
Was ist eine Steigung?

Die Ableitung f' gibt Auskunft über die Steigung von f. Darum zuerst eine kurze Erklärung, was eine Steigung ist. Ist die Steigung zum Beispiel gleich 2, so bedeutet dies: Wenn du einen Schritt nach rechts gehst, gehst du 2 Schritte nach oben.



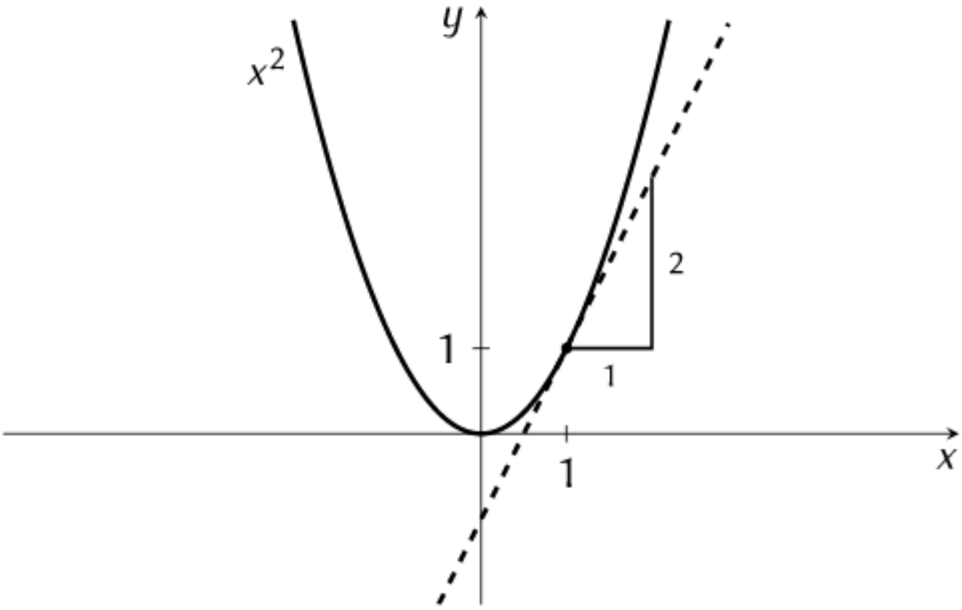


Entsprechend bedeutet Steigung -0,3: Wenn du einen Schritt nach rechts gehst, gehst du 0,3 Schritte nach unten.



Was ist die Steigung einer Funktion?

An jeder Stelle hat der Graph einer Funktion eine Steigung. Diese entspricht der Steigung einer Tangente, die du an diese Stelle legst. So kannst du beispielsweise ablesen, dass der Graph der Parabel $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 1$ die Steigung 2 hat.



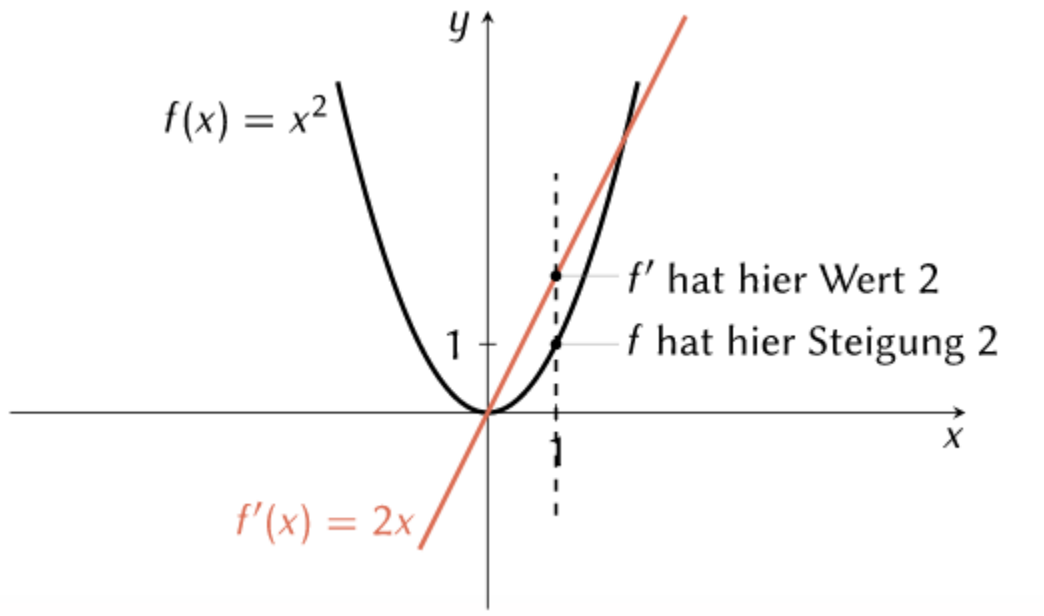
Auch siehst du, dass an der Stelle $x = 0$ die Steigung 0 ist. Eine Tangente an der Stelle $x = 0$ geht hier weder nach oben noch nach unten, sondern ist waagerecht. Die Steigung einer Funktion f wird durch die Ableitung f' angegeben. So bedeutet $f'(1) = 2$, dass der Graph von f an der Stelle $x = 1$ die Steigung 2 hat. Entsprechend bedeutet $f'(0) = 0$, dass der Graph der Funktion an der Stelle $x = 0$ Steigung 0 hat.

Was ist nun die Ableitung?

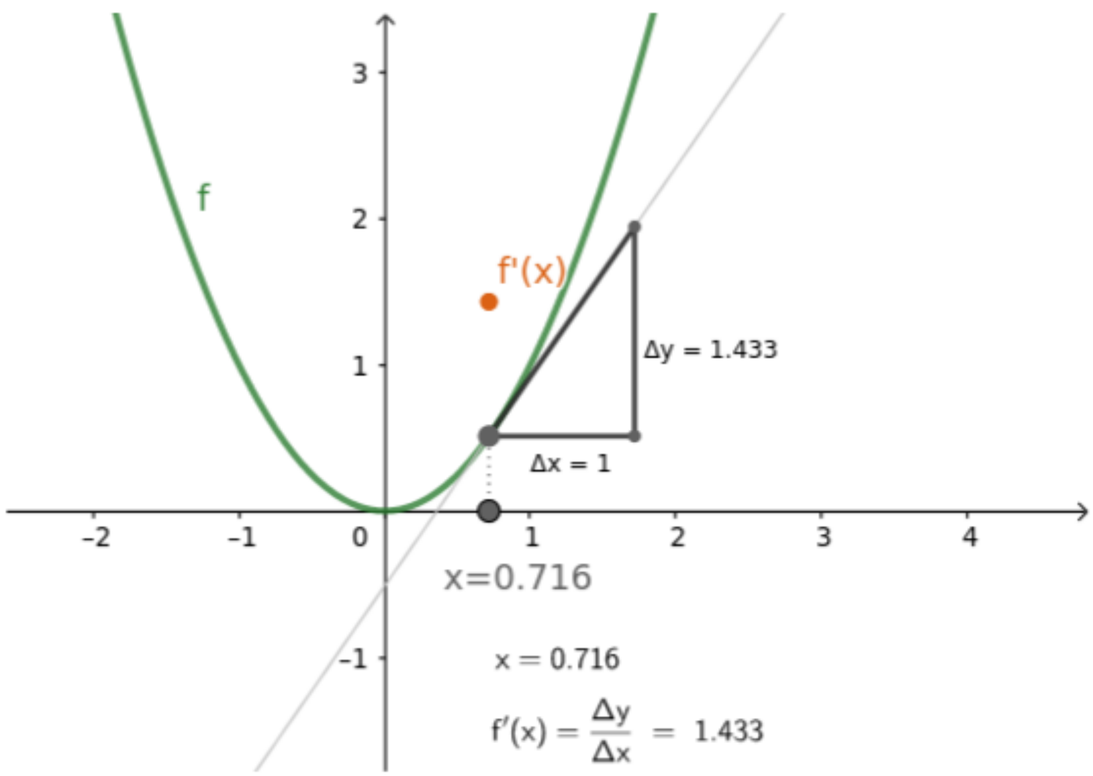
Die Ableitung ist eine Funktion. Sie wird mit einem kleinen Strich gekenzeichnet: f' ist die Ableitung von f. Manche sagen dazu auch Änderungsrate. Ableiten wird auch differenzieren genannt. Die Ableitung f' nimmt an jeder Stelle x den Wert der Steigung von f an der Stelle x an. Beim Schaubild der Parabel $f(x) = x^2$ hast du die Steigungen an den Stellen 0 und 1 schon abgelesen. Wenn du für weitere Stellen die Steigung abliest, so erhältst du folgende Tabelle:

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$ (Steigung von f)	-4	-2	0	2	4

Diese Punkte kann man in ein Schaubild zeichnen und zu einer Funktion f' verbinden.



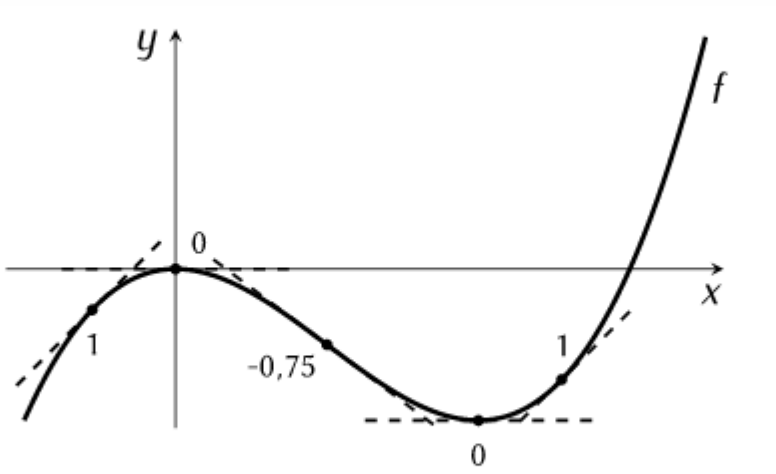
Die Ableitungsfunktion f' der Funktion $f(x) = x^2$ ist eine Gerade mit der Gleichung $f'(x) = 2x$. In der Grafik unten siehst du das ganze nochmal interaktiv. Du kannst den Bezugspunkt auf der x-Achse verschieben, um so zu sehen, wie sich daraus die Ableitung (orange) entwickelt.



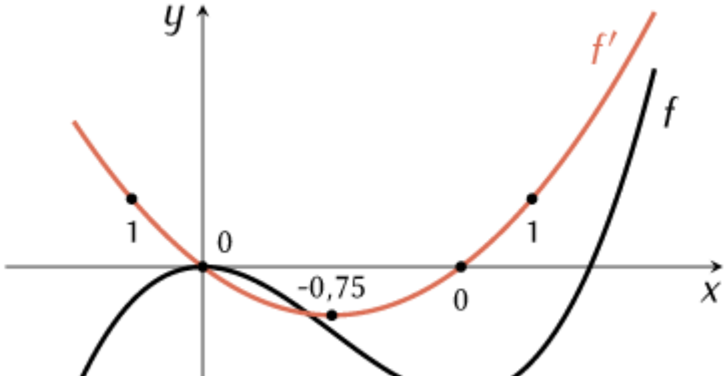
Eine exakte mathematische Beschreibung zum Begriff der Ableitung und der Unterscheidung zwischen durchschnittliche/mittlere Änderungsrate und momentane Änderungsrate findest du hier: Differenzenquotient

Die Steigung ablesen und zu einer Funktion ergänzen

Du kannst zu jedem gegebenen Schaubild einer Funktion f die Ableitung f' einzeichnen. Dazu suchst du dir Stellen im Schaubild der Funktion f aus, an denen du die Steigung gut erkennen kannst. An Hoch-, Tief- und Sattelpunkten ist die Steigung beispielsweise 0. Wenn die Funktion f ansteigt, also nach oben geht, ist die Steigung größer null, wenn sie nach unten geht, ist die Steigung kleiner null.



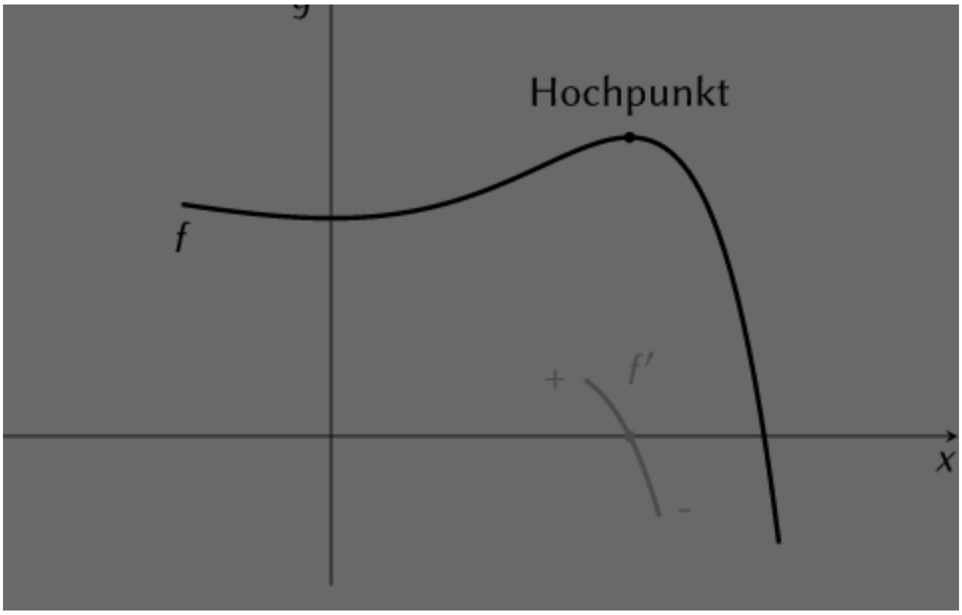
Wenn du nun alle Werte der Steigung als Funktionswerte in das Schaubild zeichnest und zu einem Graphen verbindest, erhältst du das Schaubild der Ableitungsfunktion f'



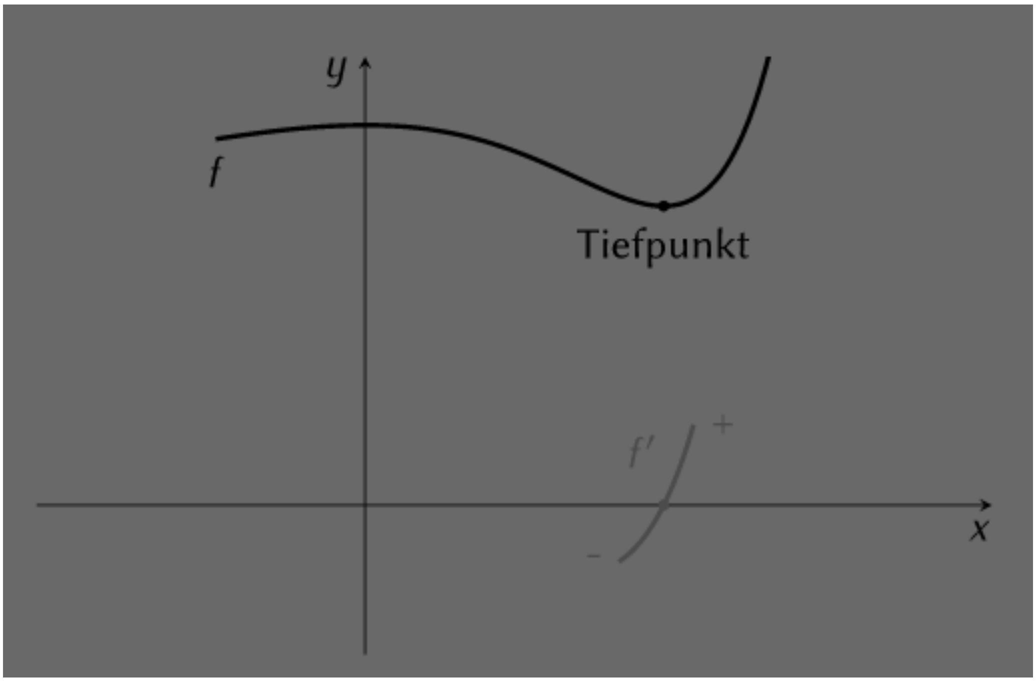
Fürs Abi ist es nützlich, wenn du dir folgendes klar machst:

Merksatz

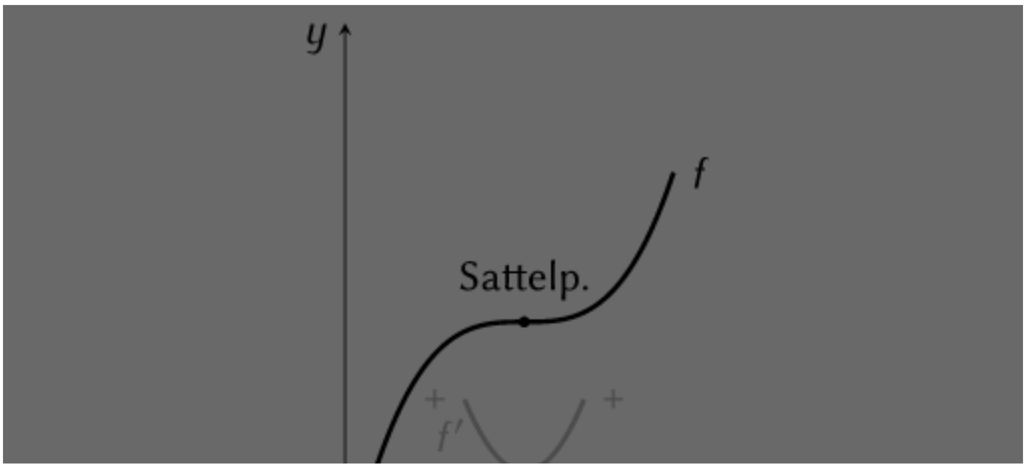
Hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Hochpunkt, dann ist $f'(x_0) = 0$. Die Ableitungsfunktion f' ist links von x_0 positiv, und rechts vonx_0 negativ.



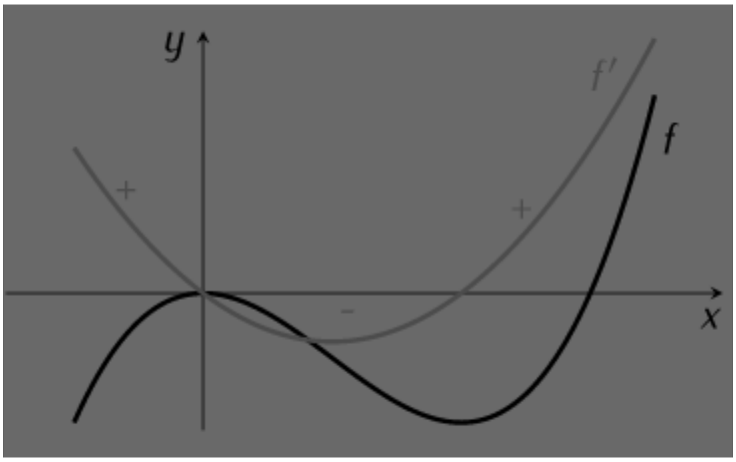
Hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt, dann ist $f'(x_0) = 0$. Die Ableitungsfunktion f' ist links von x_0 negativ, und rechts von x_0 positiv.



Hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Sattelpunkt/Terassenpunkt, dann ist $f'(x_0) = 0$. Die Ableitungsfunktion f' wechselt das Vorzeichen aber nicht und berührt an der Stelle x_0 die $x0$-Achse.



Steigt der der Gaph von f, dann ist dort die Ableitung positiv (also $f'(x) > 0$). Fällt der der Gaph von f, dann ist dort die Ableitung negativ (also $f'(x) < 0$).



Weitere Beispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen zum graphischen Ableiten findest du hier: Graphisches Ableiten

Ableitungsregeln elementarer Funktionen

Die Ableitungsfunktionen von Potenzfunktionen, e-Funktion, Logarithmusfunktion, Wurzelfunktion und trigonmetrischen Funktionen (Sinus, Cousins, Tangens) solltest du (je nach Bundesland) im Abi auswendig parat haben:

Funktion	Ableitungsfunktion
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$

Die erste Regel ist besonders wichtig, denn jetzt kannst du alle ganzrationalen Funktionen (d.h. Polynome) ableiten. Die Funktion

$$f(x) = 5x^5 + 4x^2 + 3$$

hat die Ableitung

$$f(x) = 5 \cdot 5x^{5-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} + 0$$
$$= 25x^4 + 8x.$$

Übungsaufgaben zum Ableiten von ganzrationalen Funktionen findest du hier:
Potenzfunktionen

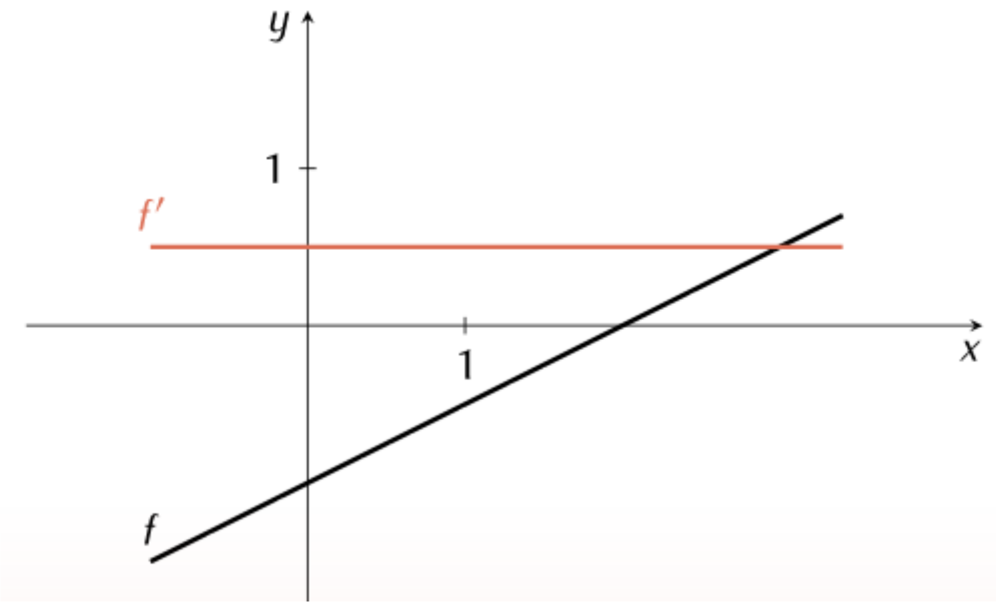
Die Schaubilder der Ableitungsfunktion der wichtigsten elementaren Funktionen

Hilfreich ist es, wenn du ungefähr weißt, wie die Schaubilder der wichtigsten Funktionen und deren Ableitungen aussehen. Eine Gerade hat stets eine konstante Steigung. So hat die Gerade

$$f(x) = 0,5x - 1$$

die konstante Ableitungsfunktion

$$f'(x) = 0,5.$$

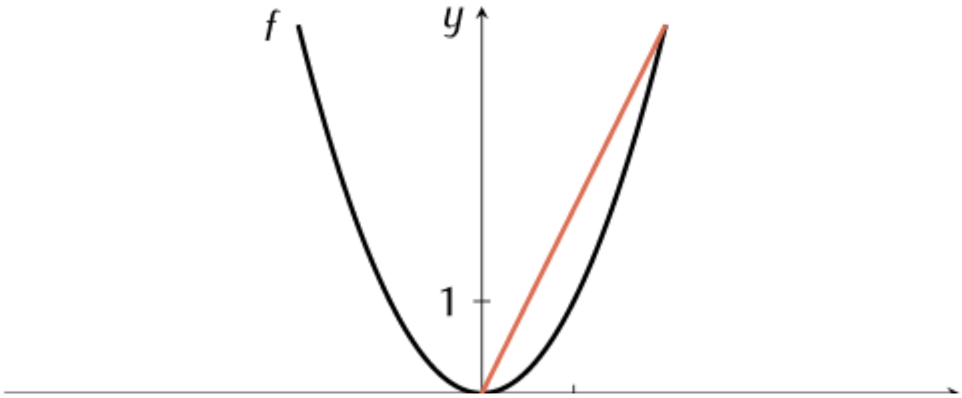


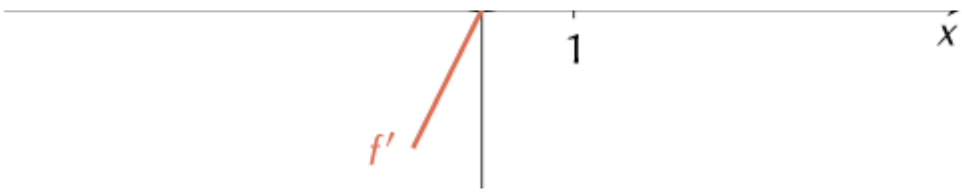
Die Parabel

$$f(x) = x^2$$

hat die Ableitungsfunktion

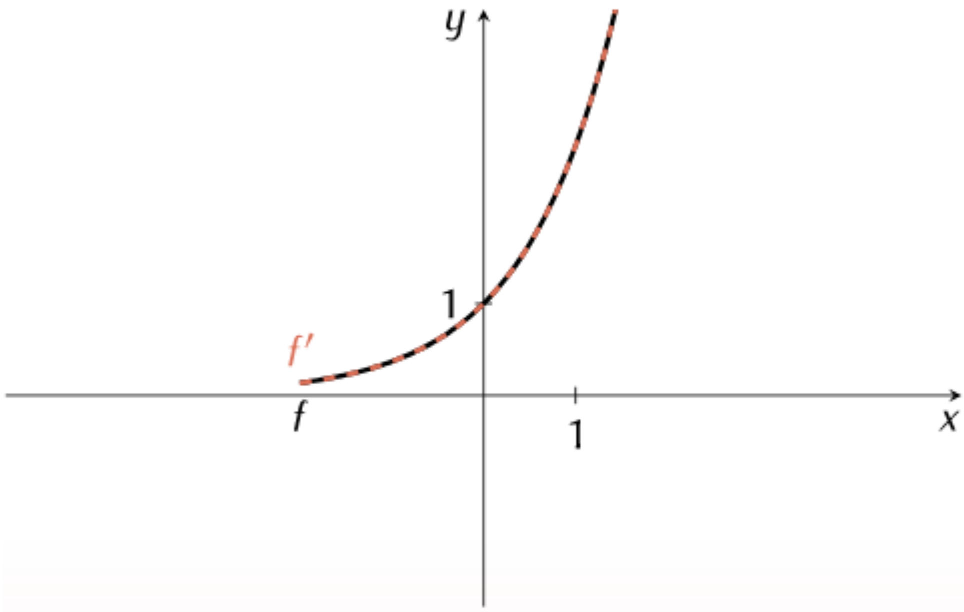
$$f'(x) = 2x.$$





Die e-Funktion und ihre Ableitungsfunktion sind identisch:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$



Die Exponential-Funktion zeigt also stets die eigene Steigung an. Sie hat beispielsweise an der Stelle $x = 1$ den Funktionswert $f(1) = e^1 = e \approx 2,718\ldots$ und die damit identische Steigung $f'(1) = e^1 = e \approx 2,718\ldots$.

Kettenregel

$$(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Der passende Merkspruch zu dieser Regel lautet: "Äußere Ableitung mal innere Ableitung"
Hierzu ein Beispiel: Die Funktion

$$f(x) = \left(x^2 - x\right)^3$$

hat die innere Funktion

$$h(x) = x^2 - x$$

und die Äußere Funktion

$$g(z) = z^3.$$

Deren Ableitungen sind:

$$h'(x) = 2x - 1$$
$$g'(z) = 3z^2$$

Wie im Merksatz oben kannst du daher die Funktion f auch so schreiben:

$$f(x) = \left(x^2 - x\right)^3 = g(h(x))$$

Damit kannst du f' bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x)' &= (g\,(h(x)))' \\ &= g'\,(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= 3(x^2 - x)^2 \cdot (2x - 1) \end{aligned}$$

Das kann man noch vereinfachen, wenn man will.

Eine ausführliche Erklärung zur Kettenregel mit vielen Beispielen und Übungsaufgaben findest du hier: Kettenregel

Produktregel

$$(g(x) \cdot h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

Gesucht ist die Ableitung von

$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$

Die Funktion f ist das Produkt von zwei Funktionen, nämlich

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \\ h(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Die Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \\ h'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Jetzt kannst du mithilfe der Produktregel f' ausrechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g(x) \cdot h(x))' \\ &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\ &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \end{aligned}$$

Im Abi musst du oft die Produkt-oder Kettenregel anwenden und dann die Gleichung $f'(x) = 0$ ausrechnen. (Beispielsweise um die Extremstellen von f zu bestimmen.) Merke dir, dass du dann sehr oft durch Ausklammern die Gleichung $f'(x) = 0$ lösen kannst. Im Beispiel oben wäre das

$$\begin{aligned} 0 &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= e^x \cdot \left(2x + x^2\right) \\ &= e^x \cdot (2x + x^2) \\ & e^x \cdot x \cdot (2 + x) \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt erhältst du die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

Ableitungsregeln - Derivative

Die Ableitungen der wichtigsten Elementaren Funktionen und Regeln zum Nachschlagen

Wenn du mit den Ableitungsregeln noch nicht so vertraut bist, dann überspringe diesen Abschnitt.

Funktion	Ableitungsfunktion
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$

* Kettenregel für $f(x) = h\left(g(x)\right)$

$$f'(x) = g'(x)h'\left(g(x)\right).$$

* Produktregel für $f(x) = h(x) \cdot g(x)$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g'(x) \cdot h(x).$$

* Quotientenregel für $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}.$$

Eine Funktion der Form

$$f(x) = x^n$$

hat die Ableitung

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Zudem gilt:

- Die Ableitung von Konstanten (bspw. 23,5) ist 0
- Vorfaktoren bleiben bei der Ableitung erhalten. Bspw. hat $f(x) = 5,23 \cdot x^3$ die Ableitung $f'(x) = 5,23 \cdot 3 \cdot x^2$
- Summen werden getrennt abgeleitet. Wenn du bspw. $f(x) = x^3 + 4x$ ableiten möchtest, dann kannst du die Ableitungen von x^3 und $4x$ getrennt ausrechnen und addieren. Das führt zu $f'(x) = 3x^2 + 4$.
  Falls die Funktion f als Produkt zweier Funktionen u und v geschrieben werden kann, gilt für die Ableitung f' folgende Beziehung:
  $$f(x) = u(x) \cdot v(x) => f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Beispiel

$$f(x) = (x^2+3)\cdot e^{7x} \quad => \quad f'(x) = 2x\cdot e^{7x} + (x^2+3)\cdot 7e^{7x}$$

Falls die Funktion fr als Hintereinanderausführung oder Verkettung der beiden Funktionen u und v geschrieben werden kann, also $f = u\big(v(x)\big)$, dann gilt für die Ableitung f' folgende Beziehung:

$$f(x) = u\big(v(x)\big) => f'(x) = u'\big(v(x)\big)\cdot v'(x).$$

In diesem Zusammenhang heißt v die innere und u die äußere Funktion von f. Statt $u\big(v(x)\big)$ schreibt man auch manchmal $\big(u\circ v\big)(x)$

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (3x^7+2x)^4$. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen: \begin{align}v(x)=3x^7+2x \text{ (innere Funktion), } \u(x)=x^4 \text{(äußere Funktion)} \end{aligin}

Die Ableitung der Funktion f kann dann mit Hilfe der Kettenregel bestimmt werden:

$$f'(x) = 4\cdot(3x^7+2x)^3\cdot(21x^6+2).$$

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x^2+2x}$. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen:

$$v(x) = x^2+2x \text{ (innere Funktion),}$$
$$u(x) = e^x \text{ (äußere Funktion).}$$

Die Ableitung der Funktion f kann dann mit Hilfe der Kettenregel bestimmt werden:

$$f'(x) = (2x+2)\cdot e^{x^2+2x}$$

merksatz Wann musst die Quotientenregel anwenden?

Falls die Funktion f als Quotient zweier Funktionen u und v geschrieben werden kann, gilt für die Ableitung f' folgende Beziehung:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} => f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Die Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ hat gegenüber der x-Achse einen Steigungswinkel von $\alpha = \tan^{-1}(m)$ Grad.

Indem man den kleineren vom größeren Winkel abzieht, erhält man auch den Schnittwinkel zweier beliebiger Geraden. Nicht vergessen, den Taschenrechner auf DEG zu stellen.

Gegeben sind die folgenden beiden Geradengleichungen:

$$f(x) = 2x+3$$
$$g(x) = x+2.$$

Die Steigungswinkel der jeweiligen Geraden gegenüber der x-Achse sind gegeben durch:

$$\alpha_f = \tan^{-1}(2) = 64.43°$$
$$\alpha_g = \tan^{-1}(1) = 45°$$

Somit schließt der Graph von f einen Winkel von $64.43°$ und der Graph von g einen Winkel von $45°$ mit der x-Achse ein. Der Schnittwinkel der beiden Geraden beträgt:

$$\alpha = 64.43° - 45° = 18.43°.$$

Seien f und g zwei Funktionen, deren Graphen sich im Punkt $P(a|f(a))$ schneiden. Dann gilt für den Schnittwinkel α der Graphen von f und g im Punkt P die Formel

$$\alpha = \left|\tan^{-1}(f'(a)) - \tan^{-1}(g'(a))\right|.$$

Gegeben sind die Funktionen f und g mit:

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = x + 1.$$

Die zugehörigen Graphen schneiden sich in den Punkten $Q(0|1)$ und $P(1|1)$. Für $P(1|1)$ gilt:

$$f'(1) = 2$$
$$g'(1) = 1.$$

Somit gilt für den Schnittwinkel der beiden Graphen im Punkt $P(1|1)$:

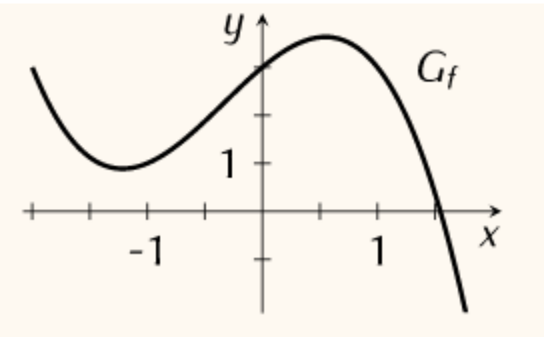
$$\alpha = |\tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(1)| \approx |63.43° - 45°| = 18,43°$$

Graphisches Ableiten - Derivative

Merksatz Gegeben ist der Graph G_f der Funktion f. Beim Skizzieren des Graphen $G_{f'}$ der Ableitung f' kann wie folgt vorgegangen werden:

Stellen, an denen G_f Extrempunkte hat, werden zu Schnittpunkten mit VZW des Graphen von f' mit der x-Achse. Stellen, an denen G_f Sattelpunkte / Terrassenpunkte hat, werden zu Berührpunkten von $G_{f'}$ mit der x-Achse. Stellen, an denen G_f Wendepunkte hat, werden zu Extrempunkten des Graphen von f'. In allen Abschnitten, in denen der Graph von f steigt, verläuft der Graph von f' oberhalb der x-Achse. In allen Abschnitten, in denen der Graph von f fällt, verläuft der Graph von f' unterhalb der x-Achse.

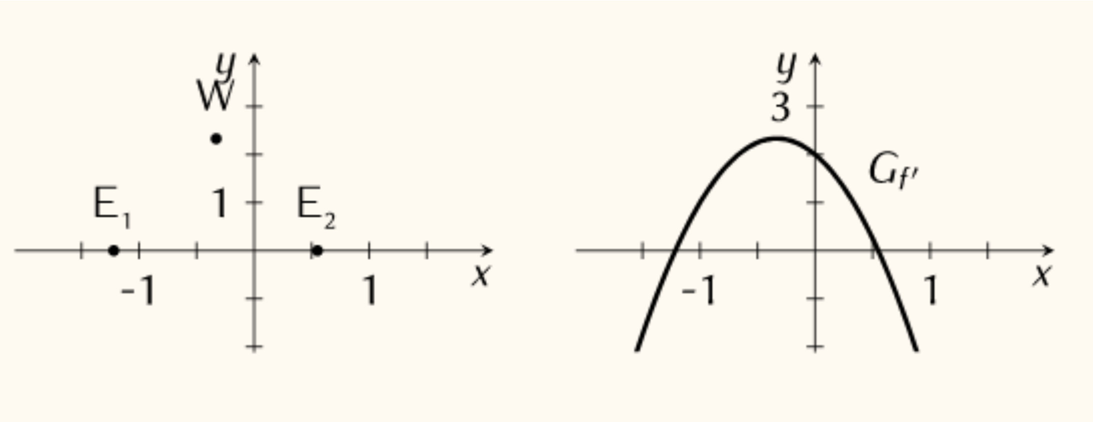
Der Graph G_f der Funktion f ist im folgenden Schaubild dargestellt. Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



Es gelten:

Der Graph von $$ hat etwas links von $x = -1$ und etwas rechts von $x = 0,5$ Extrempunkte. Also hat der Graph von f' dort die Nullstellen E_1 und E_2
Der Graph G_f hat zwischen den beiden Extrema eine Wendestelle mit maximaler Steigung. Also hat $G_{f'}$ dort einen Hochpunkt W

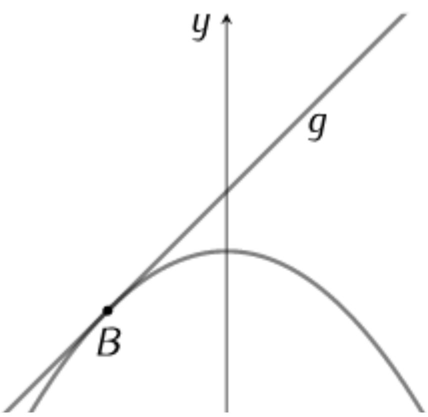
Daraus entsteht die untenstehende linke Skizze. In allen Intervallen, in denen der Graph von f fällt, liegt der Graph von f' unterhalb der x-Achse. In allen Intervallen, in denen der Graph von f steigt, liegt der Graph von f' oberhalb der x-Achse. Damit ergibt sich die Skizze des Ableitungsgraphen rechts:

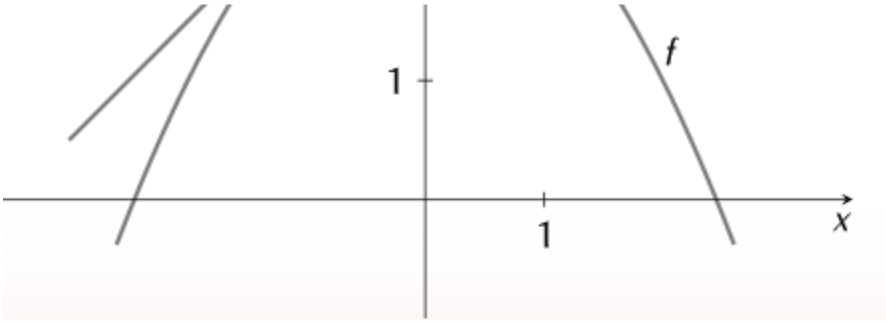


Tangente - Derivative

Was ist eine Tangente?

Eine Tangente ist eine Gerade g, die eine gegebene Funktion $f(x)$ in einem Punkt B berührt. Das heißt, sie hat mit der Funktion einen gemeinsamen Punkt und dort die gleiche momentante Steigung wie die Funktion.





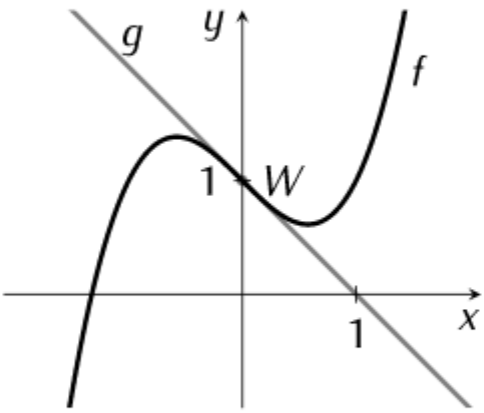
Das heißt jede (differenzierbare) Funktion hat in jedem Punkt ihres Graphen genau eine Tangente.

Wie hängen die Begriffe "Ableitung" und "Tangente" zusammen?

Wenn Du die Steigung der Tangente an einem bestimmten x-Wert einer Funktion $f(x)$ bestimmen möchtes, so ist die Tangentensteigung gerade der Wert der Ableitung von $f(x)$ an diesem x-Wert. Möchtest Du wissen, welche Steigung die Tangente der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $B(2, 4)$ hat, so berechne zunächst die Ableitung von $f(x)$. Diese ist $f'(x) = 2x$. Der x-Wert von B ist 2. Daher ist die Steigung der Tangente, die $f(x)$ in B berührt, gleich $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

Was ist eine Wendetangente?

Als Wendetangente bezeichnet man eine Tangente, deren Berührpunkt ein Wendepunkt ist. Um sie zu berechnen, muss man zunächst den Wendepunkt W der Funktion bestimmen. Im zweiten Schritt berechnet man die Tangente durch den Punkt W (Wie das geht, erfährst Du im nächsten Abschnitt).



Typische Tangentenprobleme und ihre Lösung Tangente in einem Kurvenpunkt bestimmen

Gegeben sind der Graph G der Funktion f mit

$$f(x) = -3x^3 - x$$

und ein Kurvenpunkt $P(-1|f(-1))$. Bestimme eine Gleichung der Tangente an G im Punkt P

- Schritt 1: Die allgemeine Geradengleichung lautet:
  $$y = mx + c.$$
  Dabei entspricht der Parameter m der Steigung und der Parameter c dem y-Achsenabschnitt der Geraden.
- Schritt 2: Leite die Funktion f ab:
  $$f'(x) = -9x^2 - 1.$$
- Schritt 3: Setze den x-Wert von P in die Ableitung f' ein, das liefert die Steigung m:
  $$m = f'(-1) = -10.$$
- Schritt 4: Damit ist ein Ansatz für die Tangentengleichung:
  $$y = -10x + c.$$
- Schritt 5: Bestimme den $$-Wert des Punktes P:
  $$f(-1) = -3 \cdot (-1)^3 - (-1) = 4 => P(-1|4).$$
- Schritt 6: Setze P in die Tangentengleichung ein, das liefert den y-Achsenabschnitt c:
  $$4 = (-10) \cdot (-1) + c => c = -6.$$

Damit ist eine Gleichung der Tangente gegeben durch
$$y = -10x - 6.$$

Es gibt auch eine Formel für die Gleichung der Tangente t an den Graphen einer Funktion f im Kurvenpunkt $P(b|f(b))$:
$$t(x) = f'(b) \cdot (x - b) + f(b).$$

Tangente mit vorgegebener Steigung an Kurve bestimmen

Gegeben ist der Graph G der Funktion f mit
$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

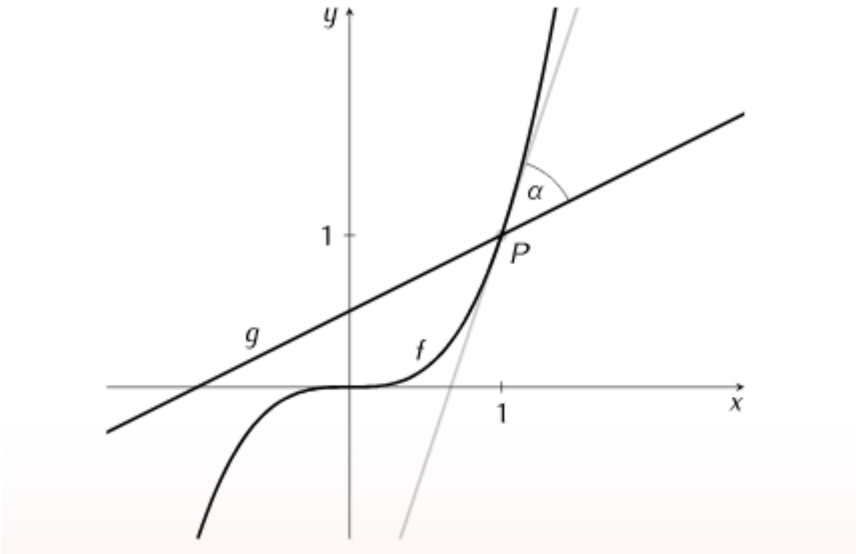
Bestimme die Gleichungen aller Tangenten an G mit der Steigung $m = 6$.

- Schritt 1: Bestimme die Ableitung von f:
  $$f'(x) = 2x + 2.$$
- Schritt 2: Löse die Gleichung $f'(x) = m$. Das liefert die x-Koordinate des Berührpunktes:
  $$2x + 2 = 6 => x = 2.$$
- Schritt 3: Bestimme den Funktionswert an der Berührstelle:
  $$f(2) = (2)^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9 => P(2|9)$$
- Schritt 4: Ein Ansatz für die Tangentengleichung ist also gegeben durch:
  $$y = 6x + c.$$
- Schritt 5: Setze die Koordinaten von P in die Tangentengleichung ein, das liefert c:
  $$9 = 6 \cdot 2 + c => c = -3.$$

Damit ist die Gleichung der gesuchten Tangente gegeben durch
$$y = 6x - 3.$$

Schnittwinkel zwischen Gerade und Funktion berechnen

Oftmals ist im Abi nach dem Schnittwinkel einer Funktion f mit einer Geraden g gefragt. Genau genommen handelt es sich dabei um den Schnittwinkel zwischen der Geraden und der Tangenten von f im Schnittpunkt P.



Diesen kann man mit Hilfe einer Formel bestimmen, sobald der x-Wert des Schnittpunkts bekannt ist.

Ist m die Steigung der Geraden g und x_P die x-Koordinate des Schnittpunkt von f und g, so ist der Schnittwinkel gegeben als

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\left|\frac{m - f(x_P)}{1 + m \cdot f(x_P)}\right|\right)$$

Seien $f(x) = x^3$ und die Gerade $g(x) = 0,5x + 0,5$ gegeben. Es soll der Schnittwinkel von $f(x)$ und $g(x)$ im Schnittpunkt $P(1|1)$ bestimmt werden. Die Ableitung von f ist $f'(x) = 3x^2$. Die Ableitung am x-Wert des Schnittpunkts ist $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$. Die Geradensteigung kann man ablesen als $m = 0,5$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1}\left(\left|\frac{0{,}5 - 3}{1 + 0{,}5 \cdot 3}\right|\right)\\ &= \tan^{-1}\left(\left|\frac{-2{,}5}{2{,}5}\right|\right)\\ &= \tan^{-1}(|-1|)\\ &= \tan^{-1}(1)\\ &= 45°\end{aligned}$$

Der Schnittwinkel von $f(x$ und $g(x)$ in P beträgt also $45°$

Kurvendisussion

Definitionsbereich

Grundsätzlich kann der Definitionsbereich einer Funktion vom Aufgabensteller willkürlich festgelegt werden. So kann zum Beispiel der Verfasser einer abi Aufgabe entscheiden, dass die Funktion f nur für das Intervall$\mathbb{D}_f = [2; 4]$untersucht werden soll. Wenn das Ziel einer Aufgabe jedoch ist, den "Definitionsbereich zu bestimmen", so ist damit der maximale Definitionsbereich gemeint. Die Frage lautet also: Welche Werte fürx darf ich theoretisch in diese Funktion einsetzen?

Beispiel: Jeder weiß, dass man niemals durch Null teilen darf (Apokalypse vermeiden, etc.). Der Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist demnach $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\text{\without} \{0\}$, auch $\mathbb{R}^*$ geschrieben. Wer mit dieser Schreibweise nicht allzu viel anfangen kann, liest am besten erst einmal den nächsten Abschnitt. Wichtige Symbole

Es gibt nichts ärgerlicheres als die Bedeutung eines Symbols nicht zu kennen und deshalb eine Aufgabe nicht lösen zu können. Deshalb wurden hier die wichtigsten Symbole für die Beschreibung von Mengen einmal zusammengefasst: Zeichen & Bedeutung
$\mathbb{D}$ oder $\mathbb{D}$ Definitionsmenge
$\varnothing$ oder $\{\}$ Leere Menge
$\{a, b, \ldots\}$ Menge bestehend aus a, b, etc.
$\{a|T(a)\}$ oder $\{a : T(a)\}$ Menge aller a, die die Bedingung $T(a)$ erfüllen
$A \cup B$ Vereinigung der Mengen A und B
$A \cap B$ Schnittmenge zwischen A und B
$A\text{\out}B$ Menge A ohne B
$b \in B$ b Element von B
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Natürliche Zahlen einschließlich 0
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}|m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ Rationale Zahlen
$\mathbb{I}$ Irrationale Zahlen: Reelle Zahlen die nicht als Bruch darstellbar sind. Die Dezimaldarstellung einer irrationalen Zahl hat unendlich viele Stellen und ist nicht periodisch. Beispiel: $\sqrt{2}, e, \pi$ $\mathbb{R}$ Reelle Zahlen: alle Zahlen die auf dem Zahlenstrang darstellbar sind. Die reellen Zahlen bestehen aus den Rationalen und Irrationalen Zahlen $(\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I})$
$\mathbb{R}^+$ Alle positiven reellen Zahlen ohne 0
$\mathbb{R}_0^+$ Alle positiven reellen Zahlen mit 0
$\mathbb{R}^-$ Alle negativen reellen Zahlen ohne 0
$\mathbb{R}_0^-$ Alle negativen reellen Zahlen mit 0

Definitionsbereich bestimmen

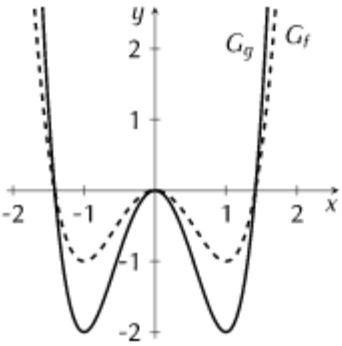
Den Definitionsbereich bestimmen bedeutet also lediglich: Herausfinden, welche Werte von x man in eine gegebene Funktion nicht einsetzen darf. Dafür schaut man zuerst aus welchen Arten von Funktionen die betrachtete Funktion besteht und wendet dann die folgenden Regeln an.

Streckung und Stauchung in y-Richtung

Für eine Veränderung des Graphen G_f in y-Richtung multipliziert man den gesamten Funktionsterm mit dem Faktor a. Beispiel: Den Graphen der Funktion f(x) = $x^4 - 2x^2$ um den Faktor $a = 2$ in y-Richtung strecken. Der Funktionsterm der gestreckten Funktion g sieht dann folgendermaßen aus:

$$g(x) = a \cdot f(x)$$
$$= 2 \cdot (x^4 - 2x^2)$$
$$= 2x^4 - 4x^2$$

Die Graphen der beiden Funktionen sehen dann so aus:



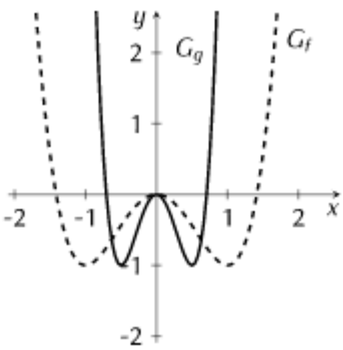
$$a \cdot f(x), \quad a > 1 \Rightarrow \text{Streckung von } G_f \text{ in y-Richtung}$$
$$a \cdot f(x), \quad a < 1 \Rightarrow \text{Stauchung } G_j \text{ in y-Richtung}$$

Streckung und Stauchung in x-Richtung

Für eine Veränderung des Graphen G_f in x-Richtung multipliziert man das Funktionsargument mit dem Faktor a. Beispiel: Betrachte die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$ um den Faktor $a = 2$ in x-Richtung stauchen. Unsere gestauchte Funktion g sieht dann folgendermaßen aus:

$$g(x) = f(a \cdot x)$$
$$= (2 \cdot x)^4 - 2 \cdot (2 \cdot x)^2$$

Die Graphen der beiden Funktionen sehen dann so aus:



$$f(a \cdot x), \quad a > 1 \Rightarrow \text{Stauchung von} G_f \text{in x-Richtung}$$
$$f(a \cdot x), \quad a < 1 \Rightarrow \text{Streckung von} G_j \text{in x-Reichtung}$$

Der Faktor a wird sowohl für die Transformation in x - als auch in y-Richtung verwendet. Achtet darauf, dass $a > 1$ in y-Richtung einer Streckung und in x-Richtung einer

Stauchung entspricht.

Graphen verschieben und spiegeln

Kurzgesagt:

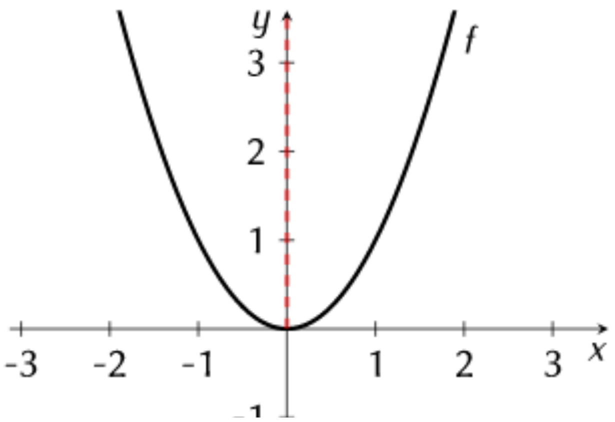
- Spiegelt man den Graphen von f an der x-Achse, so erhält man den Graphen, der zur Funktion $-f(x)$ gehört.
  - Spiegelt man den Graphen von f an der y-Achse, so erhält man den Graphen, der zur Funktion $f(-x)$ gehört.
  - Spiegelt man den Graphen von f am Ursprung, so erhält man den Graphen, der zur Funktion $-f(-x)$ gehört.

Symmetrie - Kurvendisussion

Allgemeines

Es gibt zwei verschiedene Arten von Symmetrien, die hier betrachten werden: Zum einen die Achsensymmetrie und zum anderen die Punktsymmetrie. Die für uns wichtigsten Spezialfälle sind die Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung. Bei Symetreie anschauen menschen was Symmetrie bedeutet und wie man sie rechnerisch nachweist. Achsensymmetrie zur y-Achse

Eine Funktion ist genau dann Achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn der Graph auf der linken Seite der y-Achse ein Spiegelbild der rechten Seite ist. Rechnerisch bedeutet dies, dass $f(-x) = f(x)$ gelten muss. Im Schaubild ist das ganz klassische Beispiel $f(x) = x^2$ zu sehen. Die Symmetrieachse ist dort rot dargestellt.



Damit der Graph einer Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, muss gelten:

$$f(-x) = f(x)$$

Bei ganzrationalen Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

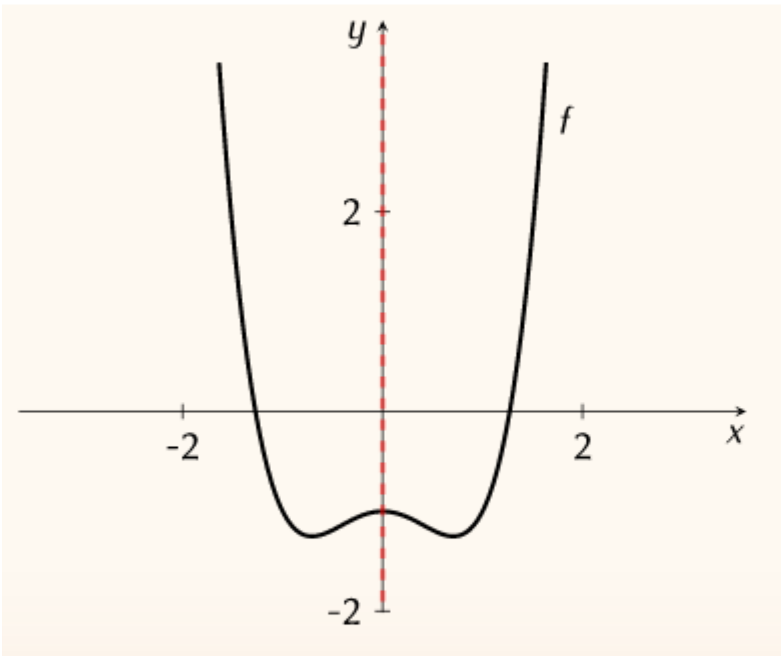
kann man spezielle Symmetrien auf einen Bilck erkennen. Hat das ausmultiplizierte Polynom ausschließlich gerade Exponenten, besteht Symmetrie zur y-Achse.

Ist $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ achsensymmetrisch zur y-Achse?

Setzen man erst $-x$ in die Funktion f ein und überprüfen dann, ob $f(-x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - (-x)^2 - 1 \\ &= x^4 - x^2 - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Somit wurde die Achsensymmetrie zur y-Achse nachgewiesen. Im nachfolgenden Schaubild ist die Symmetrie gut zu erkennen.



$-x$ in $f(x)$ einsetzen. Gilt $f(-x) = f(x)$? Anders gefragt: Entspricht die linke der rechten Seite der Gleichung? Dann ist die Funktion f symmetrisch zur y-Achse.

Achsensymmetrie zu einer beliebigen Achse

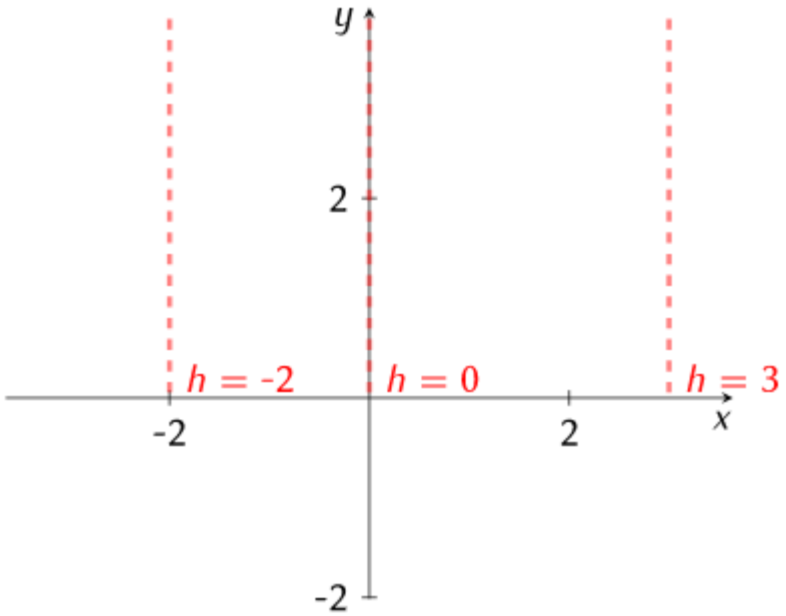
Was im vorherigen Abschnitt gelernt wurde, ist jetzt ein guter Einstieg in das Thema “Symmetrie” und stellt recht plakativ dar worauf es ankommt. Wenn die Achsensymmetrie zu nachweisen ist, wählet man eine Achse - entlang der eine Symmetrie zu vermuten ist - und prüfet sein sollte ob diese vorliegt. Bislang wurde dazu die y-Achse verwendet. Diese wird beschrieben durch die Gleichung $x = 0$. Die Bedingung, die im letzten Abschnitt verwendet wurde, war: $f(-x) = f(x)$

Nun sind Funktionen nicht immer entlang der y-Achse symmetrisch. Die bislang verwendete Bedingung $f(-x) = f(x)$ ist also nur für diesen einen Spezialfall (Symmetrieachse bei $x = 0$) gültig. Für alle anderen vertikalen Achsen verwendet man folgenden Merksatz um Symmetrie zu überprüfen: Der Graph der Funktion $f(x)$ ist genau dann symmetrisch zu der Achse $x = h$, wenn

$$f(h - x) = f(h + x).$$

für alle x gilt.

h beschreibt lediglich den x-Wert der vermuteten Symmetrieachse. Zur Verdeutlichung:



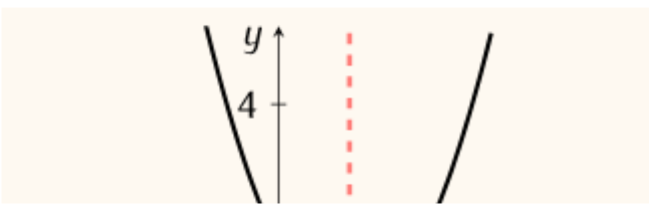
In diesen Abschnitt wurde schon mehrmals über vermutete Symmetrieachsen gesprochen. Da der obere Merksatz nur dazu da ist Symmetrie entlang einer potenziellen Symmetrieachse zu prüfen, muss man zuvor überlegen welche Achsen in Frage kommen. Dazu hervorheben sich folgende **Optionen**:

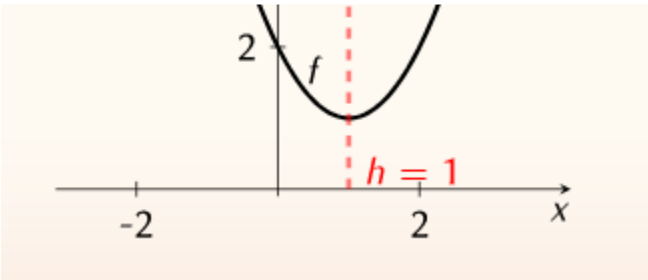
Die zu prüfende Symmetrieachse wird in der Aufgabenstellung explizit genannt. Es handelt sich um eine in x-Richtung verschobene Funktion. So zu berechnen ist die Extremstellen der Funktion.

Option a)
Setze einfach die angegebene Achsengleichung $x = h$ in die Formel $f(h - x) = f(h + x)$ ein.

Option b)
Schaue dir an um welchen Wert h die Funktion in x-Richtung verschoben wurde.

$f(x) = (x - 1)^2 + 1$ wurde in x-Richtung um 1 nach rechts verschoben.





Die Achse mit der Gleichung $x = h$ ist ein guter Kandidat für eine Achsensymmetrie. Wenn du dir bei diesem Thema noch unsicher bist, schaue dir gerne den Artikel Graphen verschieben und spiegeln an.

Option c)
Berechne die Extremstellen der Funktion. Ist der Graph der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 9$ achsensymmetrisch? Zunächst ist es zu bestimmen einen Extremwerte um potentielle Symmetrieachsen zu finden:

$$f'(x) = 2x - 6$$
$$f''(x) = 2$$

Durch berechnen der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ und durch überprüfen der hinreichenden Bedingung $f''(x) \neq 0$ erhaltent man $x = 3$ als potentielle Symmetrieachse. Als nächstes überprüfen man die Bedingung aus dem Merksatz:

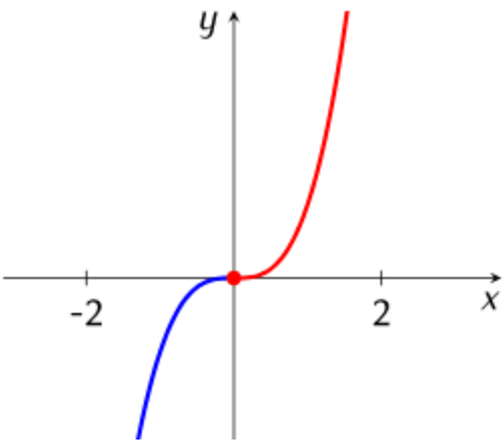
$$f(3 + x) = (3 + x)^2 - 6(3 + x) + 9 = x^2$$
$$f(3 - x) = (3 - x)^2 - 6(3 - x) + 9 = x^2$$
$$f(3 - x) = f(3 + x)$$

Somit ist es gezeigt, dass der Graph der Funktion achsensymmetrisch zu der Achse $x = 3$ ist.

Die Berechnung der Extremstellen bedeutet zwar mehr Rechenaufwand, kann jedoch immer angewendet werden.

Punktsymmetrie zum Ursprung

Eine weitere Form der Symmetrie ist die Punktsymmetrie, auch Zentralsymmetrie genannt. Hier wird eine Funktion nicht entlang einer Achse sondern über einen Punkt gespiegelt. Eine Funktion gilt als punktsymmetrisch, wenn sie durch eine Spiegelung am Symmetriepunkt auf sich selbst abgebildet wird.



Dreht man den roten Teil des Graphens 180° um den Symmetriepunkt und erhält den blauen, ist die Funktion punktsymmetrisch. Diese graphische Betrachtung wird uns in einer Aufgabe aber leider nicht helfen Punktsymmetrie nachzuweisen. Deshalb gibt es folgenden Merksatz:

Gilt

$$f(-x) = -f(x),$$

dann ist $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

Bei ganzrationalen Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

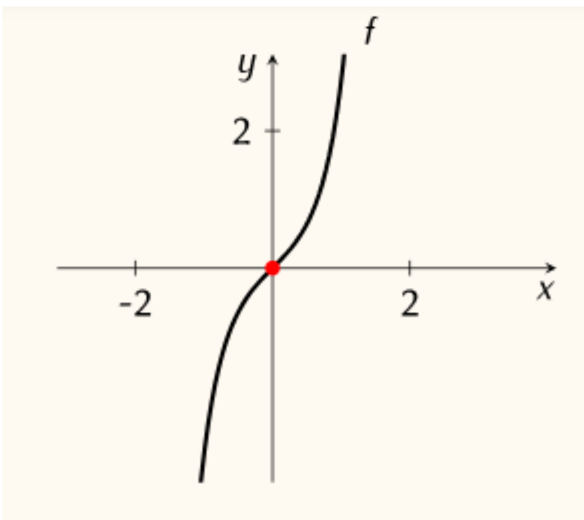
kann man spezielle Symmetrien auf einen Bilck erkennen. Hat das ausmultiplizierte Polynom ausschließlich ungerade Exponenten, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Ist der Graph von $f(x) = xe^{x^2}$ punktsymmetrisch zum Ursprung?

Überprüfet man die Bedingung $f(-x) = -f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)e^{(-x)^2} \\ &= -xe^{x^2} \\ &= -(f(x)) \end{aligned}$$

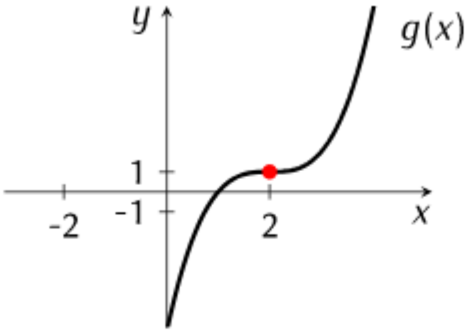
Die Funktion ist somit punktsymmetrisch zum Ursprung.



Punktsymmetrie zu einem beliebigen Punkt

Der Graph einer Funktion kann auch punktsymmetrisch zu einem beliebigen Punkt im Koordinatensystem sein. Hier ist das Verfahren ähnlich wie beim Abschnitt "Achsensymmetrie zu einer beliebigen Achse". Auch hier wird beim Überprüfen die

Funktion auf den Ursprung zurück geführt und getestet ob sie dort symmetrisch ist. So ist zum Beispiel $f(x) = x^3$ symmetrisch zum Ursprung und die um 2 Werte nach rechts und einen nach oben verschobene Funktion $g(x) = f(x-2) + 1 = (x-2)^3 + 1$ symmetrisch zu dem Punkt $P(2|1)$. Potentielle Symmetriepunkte sind Wendestellen.



Der Graph einer Funktion $f(x)$ ist genau dann Symmetrisch zu dem Punkt $P(a|b)$, falls

$$f(a+x) - b = -(f(a-x) - b)$$

gilt.

Ist der Graph von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ punktsymmetrisch?

Um einen Kandidaten zu finden bestimmt man zunächst die Wendestelle der Funktion. Diese findet man durch die Nullstellen der 2. Ableitung. In diesem Fall ist die Wendestelle $WS(1|-2)$. Man prüfen anhand des Merksatzes ob die Bedingung für Punktsymmetrie erfüllt wird.

$$f(1+x) - (-2) = (2+x)^3 - 3(1+x)^2 + 4(1+x) + 4 + 2 = x^3$$

$$f(1-x) - (-2) = (1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 4(1-x) + 4 + 2 = -x^3 - x = -(x^3$$

Mit den oben durchgeführten Rechnungen haben ist es gezeigt, dass die Funktion Punktsymmetrisch zu dem Punkt $WS(1|-2)$ ist.

Monotom - Kurvendisussion

Das Monotonieverhalten

Das Monotonieverhalten soll häufig im Kontext von Kurvendiskussionen oder anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen bestimmt werden. Die Monotonie einer Funktion beschreibt dabei den Verlauf des zugehörigen Graphen der Funktion: Du sollst also entscheiden, ob (oder auf welchen Intervallen) der Graph der Funktion monoton steigt oder monoton fällt.
Gegeben ist eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G. Das Monotonieverhalten von

G lässt sich wie folgt an der ersten Ableitung ablesen:

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow G \text{ ist monoton steigend}$$
$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow G \text{ ist monoton fallend}$$

Die Monotonie von G kann sich nur an Definitionslücken von f und Nullstellen von f' ändern.

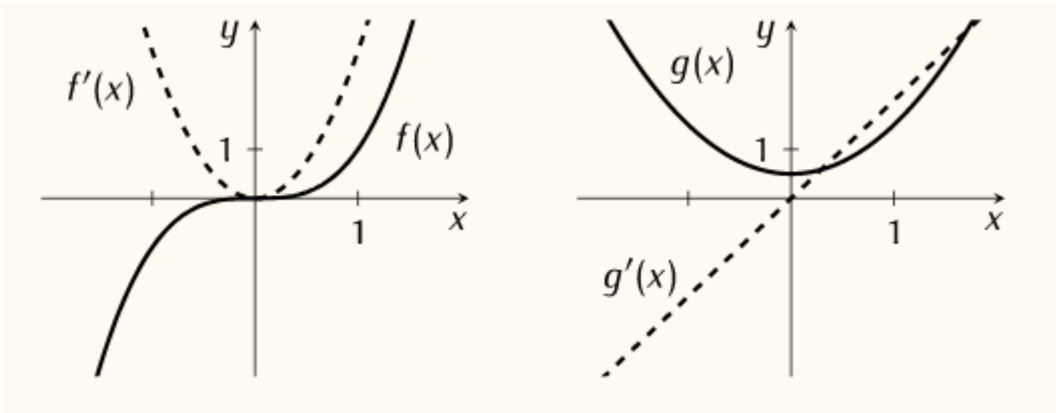
Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend, denn:

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph der Funktion $g(x) = x^2 + 0,5$ ist im Bereich $x \leq 0$ monoton fallend, denn:

$$g'(x) = 2x \leq 0 \iff x \leq 0.$$

Die Graphen der entsprechenden Funktionen sind in den nachfolgenden Schaubildern abgebildet.



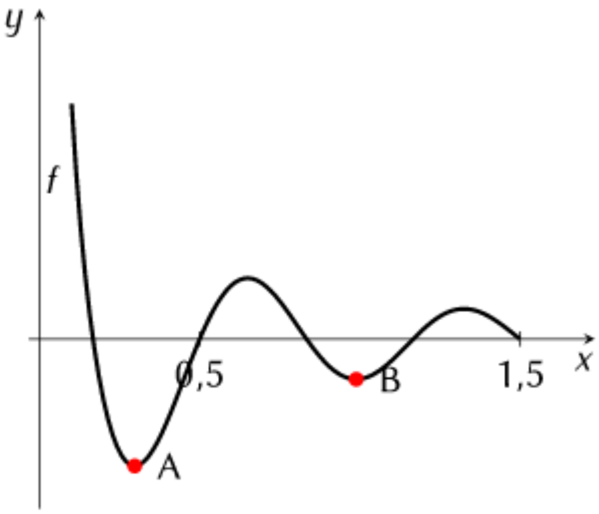
Extermpunkte - Kurvendisussion

Extrempunkt, Extremstelle und Extremwert

Die obere Erklärung zum Punkt gilt analog für Extrempunkte. Ein Extrempunkt wird demnach durch eine Extremstelle und einen Extremwert beschrieben, Extrempunkt (Extremstelle|Extremwert). Was ist ein Extrempunkt?

Ein Extrempunkt ist entweder der höchste oder der tiefste Punkt auf einem Intervall des Funktionsgraphen. Handelt es sich um den höchsten Punkt, spricht man von einem Maximum oder Hochpunkt. Geht es um den tiefsten Punkt, handelt es sich um ein Minimum oder einen Tiefpunkt.

Je nachdem wie man das Intervall wählt, kann es sich bei einem Extrempunkt um ein lokales Minimum/Maximum (auch relatives Minimum/Maximum genannt), oder um ein golables Minimum/Maximum (auch absolutes Minimum/Maximum genannt) handeln. Betrachtet man die Funktion $f(x) = \frac{cos(3\pi x)}{x}$ auf dem Definitionsbereich $D_f(0.1|1.5)$, erhält man folgenden Graphen:



Für den Definitionsbereich D_f gilt A als globales Minimum. Für das Intervall $[0.5; 1.5]$ ist B das lokale Minimum. Man beachte, dass ein Extrempunkt immer mit einem Richtungswechsel des Graphen einhergeht (steigend → fallend oder fallend → steigend).

Extrempunkt-Metapher

Wenn dir die vorherige Erklärung etwas zu mathematisch war, hilft dir die folgende Metapher vielleicht, das Thema besser zu verstehen.

Wenn die Graphen einer Funktion als Gebirge vorstellen sind, dann sind Extrempunkte einer Funktion die Punkte, an denen das Gebirge entweder einen Gipfel oder ein Tal hat. Dort wo die Funktion zunächst steigt und dann fällt, hat es einen Gipfel (Hochpunkt), dort wo sie zunächst fällt und dann steigt, hat es ein Tal (Tiefpunkt).

Nun hat das Gebirge - das aus mehreren Bergen besteht - mehrere Gipfel und Täler. Der höchste Gipfel des gesamten Gebirges wird als golables Maximum (auch absolutes Maximum) beschrieben. Schaut man sich einen einzelnen Berg an, würde man bei dessen Gipfel von einem lokalen Maximum (auch relatives Maximum) sprechen. Die gleiche Überlegung gilt für globale und lokale Minima.

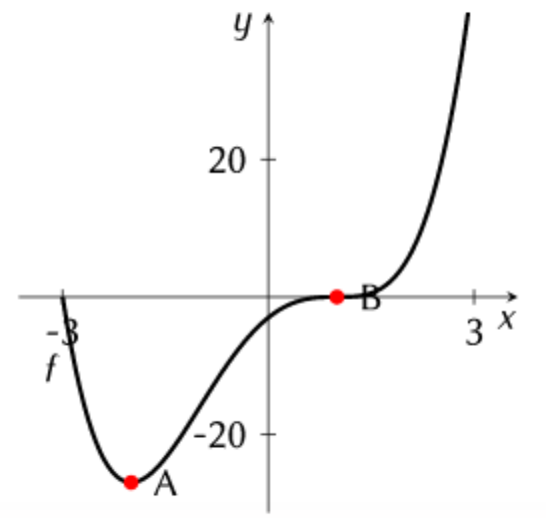
Extrempunkt berechnen

Um einen Extrempunkt zu finden, berechnet man zuerst die Steigung der Funktion. Informationen über die Steigung eines Graphen erhaltet man über die Ableitung. Zur

Erinnerung:

- Positive Ableitung → Graph steigt.
- Negative Ableitung → Graph fällt.
- Ableitung $f'(x) = 0$ → Graph steigt oder fällt nicht.

Ein Extrempunkt zeichnet sich dadurch aus, dass der Graph einen Richtungswechsel vollzieht (steigend → fallend oder fallend → steigend). Wenn ein Graph seine Richtung ändert, gibt es genau einen Punkt an dem er weder steigt noch fällt. Die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt lautet also $f'(x) = 0$. Diese notwendige Bedingung reicht aber noch nicht, um zu beweisen, dass es sich um einen Extrempunkt handelt. Um es zur Erläuterung, folgenden Graphen:



Für beide Punkte A und B gilt $f'(x) = 0$. Nun ist aber nur A ein Extrempunkt. Der Punkt B wird Terrassenpunkt oder auch Sattelpunkt genannt. Er zeichnet sich dadurch aus, dass der Graph seine Richtung nicht ändert. Um die Existenz eines Extrempunkts zu beweisen, muss man also nicht nur eine, sondern zwei Bedingungen überprüfen:

- $f'(x) = 0$ (notwendige Bedingung)
- Der Graph ändert seine Richtung (hinreichende Bedingung)

Um zu erkennen ob der Graph seine Richtung ändert oder nicht (hinreichende Bedingung), hat man wiederum zwei Möglichkeiten: die zweite Ableitung der Funktion und das Vorzeichenwechselkriterium.

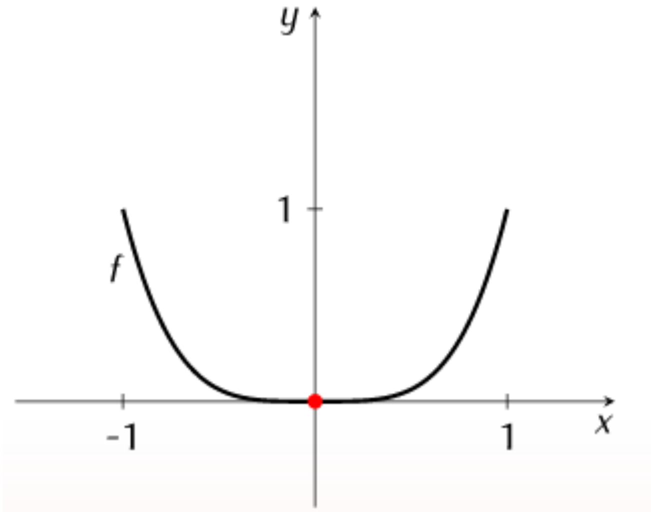
Zweite Ableitung

Davon ausgegangen ist, dass die Funktion f abgeleitet und seine Nullstelle x_0 berechnet wurde. Die Stelle x_0 ist somit unser Extremstellen-Kandidat.

Um zu überprüfen, ob x_0 eine Extremstelle ist, leiten man die Funktion f' ein zweites Mal ab und erhalten f''. Nun setzten man x_0 in f'' ein. Wenn $f''(x_0) \neq 0$, handelt es sich um eine Extremstelle. Außerdem gilt:

- Bei $f``(x_0) < 0$ handelt es sich um einen Hochpunkt.
- Bei $f``(x_0) > 0$ handelt es sich um einen Tiefpunkt.

!Achtung! Es kann sich obwohl $f''(x_0) = 0$ ist, um eine Extremstelle handeln. Die Funktion $f(x) = x^4$ zum Beispiel, hat die Ableitung: $4x^3$ und den Extremwert-Kandidaten $x_0 = 0$. Überprüft man nun die zweite Ableitung, erhält man $f''(x_0) = 0$. Trotzdem ist $x_0 = 0$ eine Extremstelle.



Wenn die zweite Ableitung f'' an der untersuchten Stelle 0 ist, wendet man zusätzlich das Vorzeichenwechsel-Kriterium (auch Vorzeichenvergleich genannt) an.

Vorzeichenwechsel-Kriterium

Geht man wieder einmal davon aus, dass es die Funktion f abgeleitet und seine Nullstelle x_0 berechnet ist. Die Stelle $x_0 = 2$ ist somit unser Extremstellen-Kandidat.

Um das Vorzeichenwechsel-Kriterium zu überprüfen, geht man wie folgt vor: Zu suchen sind zwei Stellen in der Nähe von x_0 aus, zum Beispiel $x_a = x_0 - 1$ und $x_b = x_0 + 1$. Nun setzen man x_a und x_b in die erste Ableitung $f'(x)$ ein und überprüfen das Vorzeichen.

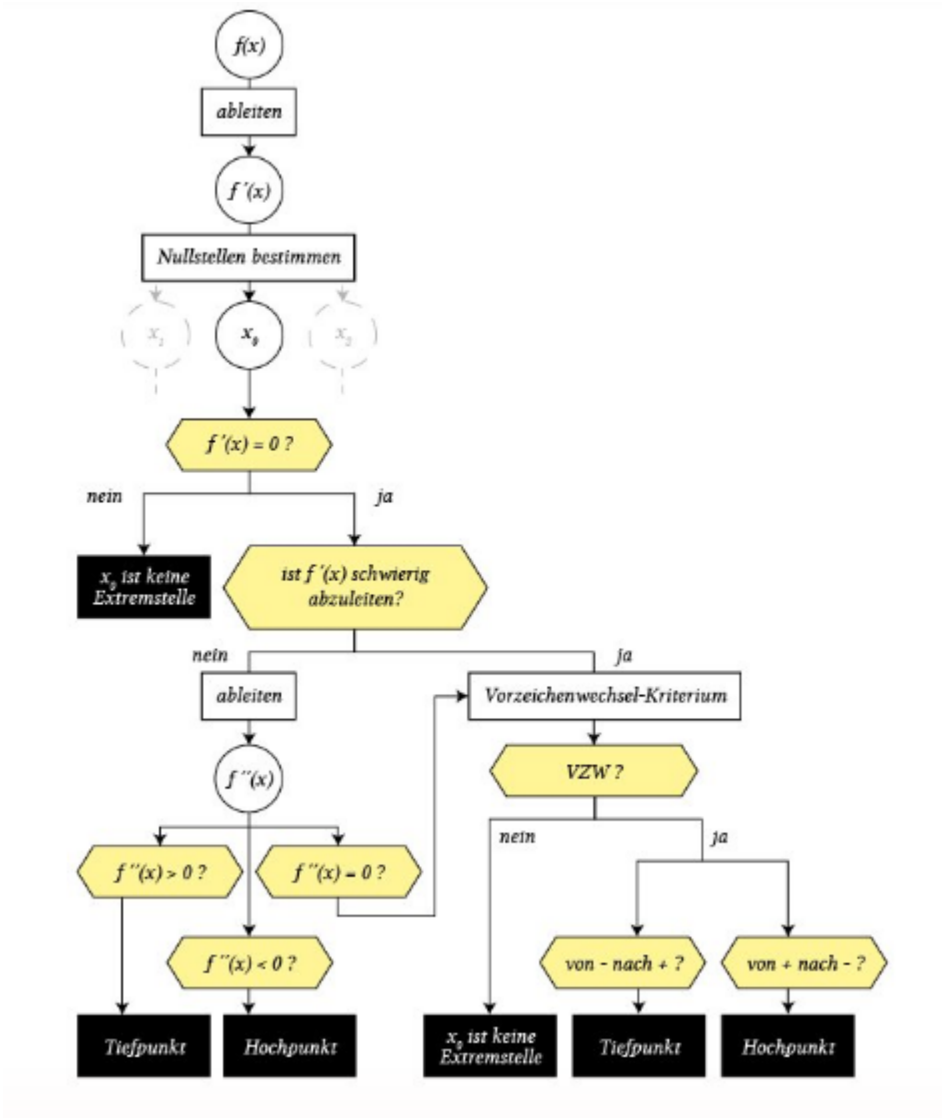
	x_a	x_0	x_b
x-Wert	1	2	3
Wert von $f'(x)$	-1	0	1
Vorzeichen von $f'(x)$	-	0	+

Da das Vorzeichen sich in diesem Beispiel ändert, handelt es sich um den Punkt bei x_0 um einen Extrempunkt. **Merksatz**

- Hat die Funktion f' an der Stelle $x = a$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, so hat G an der Stelle $x = a$ einen Tiefpunkt.
- Hat die Funktion f' an der Stelle $x = a$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, so hat G an der Stelle $x = a$ einen Hochpunkt.
- Funktion ableiten.

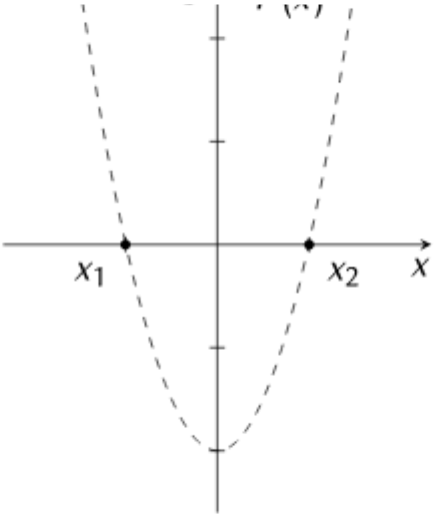
- Nullstellen der Ableitung berechnen. Die gefundenen Nullstellen sind Kandidaten für Extrempunkte.
- Werte in der Nähe der gefundenen Nullstellen in die Ableitung einsetzen und prüfen, ob ein Vorzeichenwechsel stattfindet.

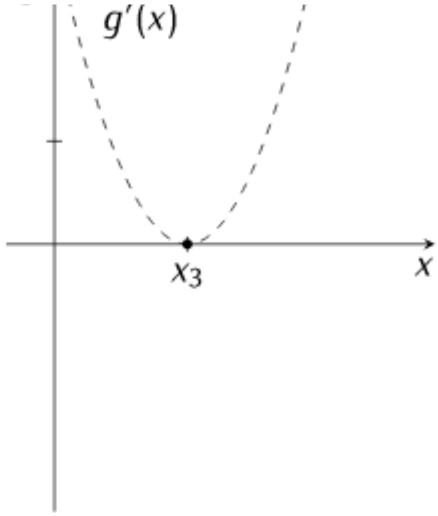
Extrempunkt-Ablaufdiagramm



Extrempunkte graphisch bewerten

Für zwei Funktionen f und g sind im folgenden Schaubild die Graphen der Ableitungen f' beziehungsweise g' abgebildet.





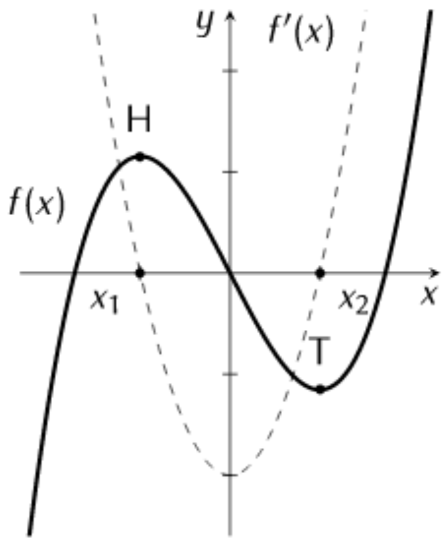
Aus dem Schaubild von f' kann abgelesen werden:

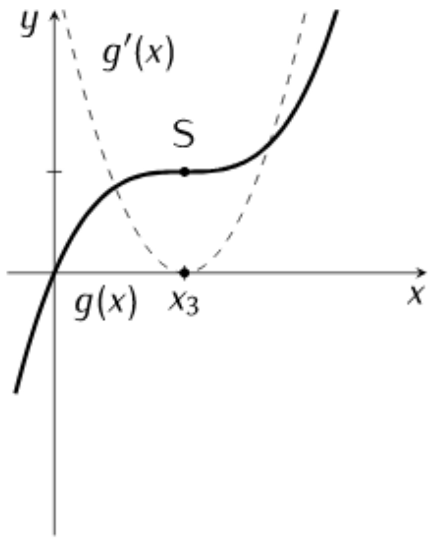
- Der Graph der Ableitung von f wechselt zweimal das Vorzeichen.
- Beim VZW von $+$ nach $-$ an der Stelle x_1 besitzt der Graph von f ein Maximum H
- Beim VZW von $-$ nach $+$ an der Stelle x_2 besitzt der Graph von f ein Minimum T

Aus dem Schaubild von g' kann abgelesen werden:

- Der Graph der Ableitung von g hat an der Stelle x_3 zwar eine Nullstelle, aber keinen Vorzeichenwechsel.
- Der Graph von g besitzt an der Stelle x_3 einen Sattelpunkt / Terrassenpunkt S

Nun können die Graphen von f beziehungsweise g skizziert werden.





Berechnungsbeispiel

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = e^x - x.$$

Der Graph der Funktion f wird mit G bezeichnet. Bestimme alle Extremstellen von G.

Schulish werden Extrempunkte einer Funktion meist in einem Sachzusammenhang abgefragt. Typischerweise werden Schlagworte wie “am Höchsten”, “maximal” oder “minimal” gebraucht.

- Schritt 1: Bestimme die Ableitung von f. Es gilt:
$$f'(x) = e^x - 1.$$
- Schritt 2: Berechne die Nullstelle von f':
$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0.$$
- Schritt 3: Untersuche, ob und welche Art von Extremum vorliegt.

Lösungsweg mit f'': Bestimme zunächst die zweite Ableitung von f. Es gilt:
$$f''(x) = e^x$$

und damit
$$f''(0) = 1 > 0.$$

Der Graph von f hat also bei $x = 0$ ein Minimum.

Lösungsweg mit VZW: Untersuche, ob die Ableitung f' an der Stelle $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel aufweist. Setze in die Ableitung f' je einen Wert etwas links und etwas rechts von der Nullstelle von f' ein. Vergleiche die Vorzeichen. Es gelten:
$$f'(-1) = e^{-1} - 1 \approx -0,6 < 0$$
$$f'(1) = e - 1 \approx 1,7 > 0.$$
Damit hat die Ableitung an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ und der Graph von f an dieser Stelle ein Minimum.

Krümmung - Kurvendisussion

Herleitung

Die Krümmung eines Graphen ist ein Teilaspekt jeder Kurvendiskussion (Übersicht). In diesem Artikel lernst du, wie du die Krümmung berechnest und welche Eigenschaften sich daraus für den Graphen einer Funktion ergeben. Gegeben ist eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G. Das Krümmungsverhalten von G lässt sich wie folgt an der zweiten Ableitung ablesen:
$$f''(x) > 0 => G \quad \text{ist linksgekrümmt (konvex)}$$
$$f''(x) < 0 => G \text{ist rechtsgekrümmt (konkav)}$$
Das Krümmungsverhalten von G kann sich nur an Definitionslücken von f und Nullstellen von f'' ändern.

Gegeben ist die Funktion f durch
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4.$$

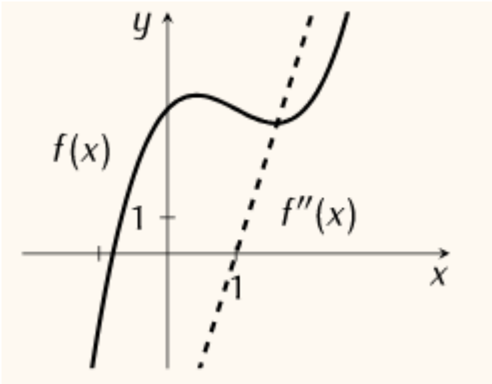
In welchem Bereich ist der Graph von f rechtsgekrümmt? Gesucht sind also diejenigen Werte für x, für welche $f''(x) < 0$ gilt. Zunächst werden dafür die ersten beiden Ableitungen von f bestimmt:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$
$$f''(x) = 6x - 6.$$

Damit gilt:

$$f''(x) > 0 \iff 6x - 6 < 0 \iff x < 1.$$

Damit ist für alle $x < 1$ der Graph von f rechtsgekrümmt.



Wendepunkt - Kurvendisussion

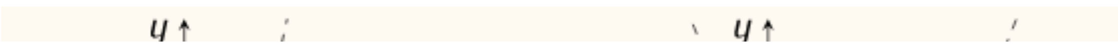
Bedingungen für die Wendepunktbestimmung

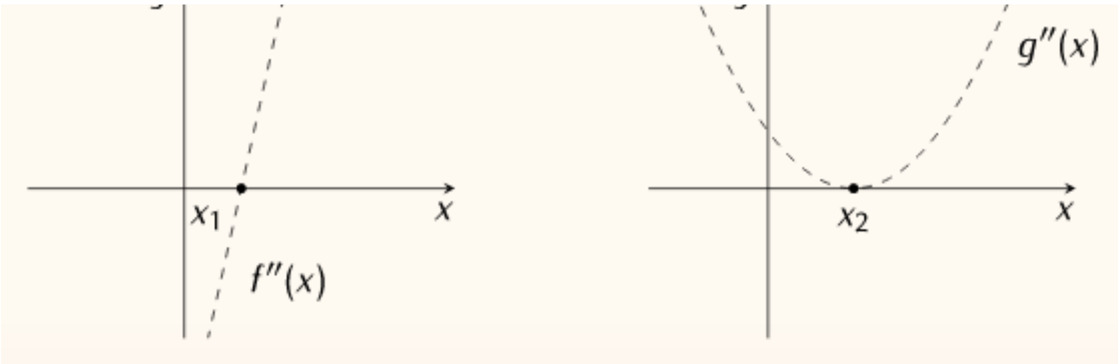
Für eine Funktion f und den zugehörigen Graphen G gelten folgende Aussagen:

- Der Graph G hat an der Stelle $x = a$ genau dann eine Wendestelle, wenn die zweite Ableitung f'' an der Stelle $x = a$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW) hat.
- Falls $x = a$ eine Wendestelle von G ist, so gilt $f''(a) = 0$. Allerdings kann $f''(a) = 0$ sein, ohne dass a eine Wendestelle von G ist.
- Gilt $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$, so ist $x = a$ eine Wendestelle von G Allerdings kann auch $f'''(a) = 0$ sein und $x = a$ ist trotzdem eine Wendestelle von G

Wendestellen von G sind genau die Extremstellen des Graphen von f'. Daher genügt es, Extremstellen berechnen zu können, um Wendestellen zu berechnen.

Für zwei Funktionen f und g sind im folgenden Schaubild die Graphen der zweiten Ableitungen f'' beziehungsweise g'' abgebildet.

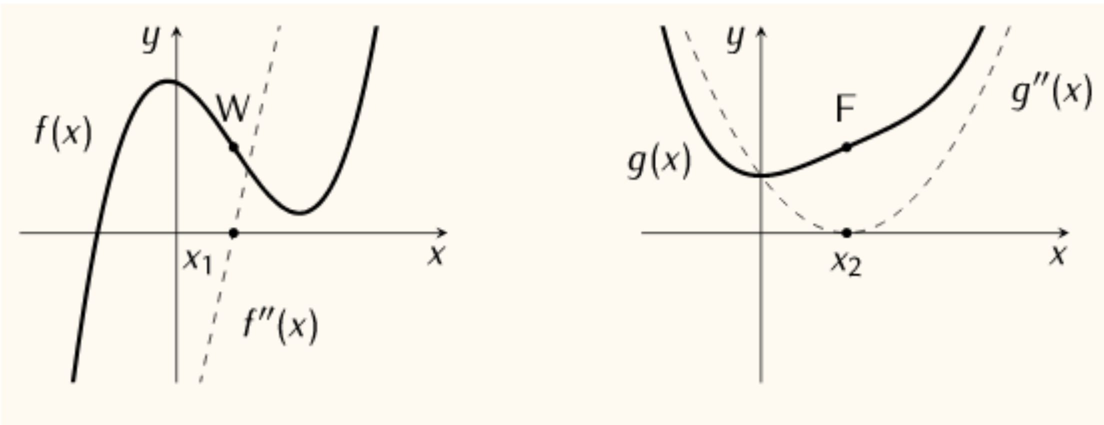




Aus dem Schaubild von f'' kann abgelesen werden:

- Der Graph von f'' wechselt an der Stelle x_1 das Vorzeichen.
- Der Graph von f besitzt damit an der Stelle x_1 einen Wendepunkt. Aus dem Schaubild von g'' kann abgelesen werden:
- Der Graph von g'' hat an der Stelle x_2 zwar eine Nullstelle, jedoch ohne Vorzeichenwechsel.
- Der Graph von g hat an der Stelle x_2 keinen Wendepunkt, sondern einen sogenannten Flachpunkt F (Dieser Begriff wird nicht Schul-relevant). In diesem Fall gilt auch $g'''(x_2) = 0$

Nun können die Graphen der Funktionen f beziehungsweise g skizziert werden.



Bestimmung aller Wendestellen einer Funktion

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Der Graph der Funktion f wird mit G bezeichnet. Bestimme alle Wendestellen von G

- Schritt 1: Bestimme die ersten beiden Ableitungen von f. Es gelten:
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$
$$f''(x) = 6x - 6.$$
- Schritt 2: Berechne die Nullstellen von f'':
$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \iff x = 1.$$
    - Untersuche, ob tatsächlich eine Wendestelle vorliegt.

- Lösungsweg mit f''': Bestimme zunächst die dritte Ableitung von f. Es gilt:
$$f'''(x) = 6$$
und damit
$$f'''(1) = 6 \neq 0$$
Der Graph von f hat also bei $x = 1$ eine Wendestelle.
- Lösungsweg mit VZW: Untersuche, ob die Ableitung f'' an der Stelle $x = 1$ einen Vorzeichenwechsel aufweist. Setze in die Ableitung f'' je einen Wert etwas links und etwas rechts von der Nullstelle von f'' ein. Vergleiche die Vorzeichen:
$$f''(0) = -6 < 0$$
$$f''(2) = 6 > 0$$
Damit hat die zweite Ableitung and er Stelle $x = 1$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel und der Graph von f an dieser Stelle eine Wendestelle.

Verhalten im Unendlichen und Limes - Kurvendisussion

der Funktionswerte für betragsmäßig große Werte von $x(x \rightarrow \pm\infty)$ oder des Graphen einer Funktion für betragsmäßig große Werte von $x(x \rightarrow \pm\infty)$gemeint. Dazu werden die Grenzwerte $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ untersucht. In diesem Abschnitt lernst du Rechenregeln für den Umgang mit Grenzwerten kennen. Die Stetigkeit der Funktionen wird dabei vorausgesetzt.

Grenzwertsätze Für stetige Funktionen f und g gelten folgende Grenzwertsätze:

- Summenregel
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$$
- Differenzenregel
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \lim_{x \to +\infty} g(x)$$
- Produktregel
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x)$$
- Quotientenregel
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}}{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)}$$

Hier muss zusätzlich noch gelten, dass $\lim_{x \to +\infty} g(x) \neq 0$gilt, ansonsten ist es etwas komplizierter. Die Sätze gelten natürlich auch für $\lim_{x \to -\infty}$

Umkehrfunktion - Kurvendisussion

Was ist die Umkehrfunktion?

Sei f eine Funktion. Gilt $g(f(x)) = x$ und $f(g(x)) = x$, hebt also g die Wirkung von f beziehungsweise hebt f die Wirkung von g gerade auf, so heißt g die Umkehrfunktion von f
Für die Definitions- und Wertebereiche beider Funktionen gelten:

- $D_f = W_g$
- $D_g = W_f$

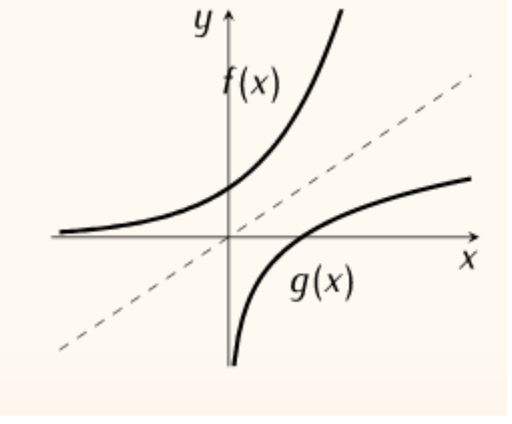
Der Graph von g geht aus dem Graphen von f mittels Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden hervor. Nicht jede Funktion lässt sich umkehren.

Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Die Umkehrfunktion von$f$ist die Funktion $g(x) = \ln(x)$, denn es gelten:

$$g(f(x)) = \ln(e^x) = x$$
$$f(g(x)) = e^{\ln(x)} = x.$$

Weiter gilt $D = \mathbb{R}$ und $W_f = (0; +\infty)$ Somit ist $D_g = (0; +\infty)$ und $W_g = \mathbb{R}$

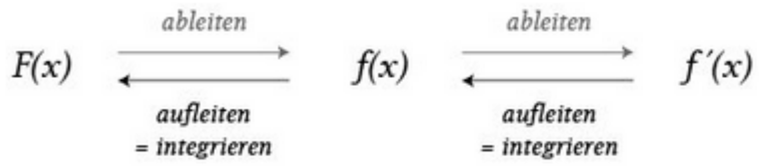
In der Skizze sieht man deutlich, wie der Graph von g durch Spiegelung des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden hervorgeht.



Integrale

Herleitung

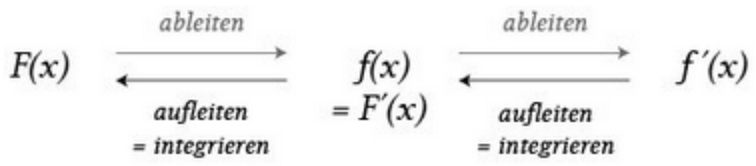
Die Differential- und die Integralrechnung gehören logisch zusammen, denn das eine ist die Umkehrung des anderen. Wenn du die Integralrechnung verstehen möchtest, hilft es also sich zuerst mit Ableitung der Potenzfunktion zu beschäftigen. Wie die Integralrechnung und die Differentialrechnung zusammenhängen lässt sich am besten in einem Bild darstellen:



Durch die Ableitung der Ausgangsfunktion f erhält man f'. Wenn man die Funktion f integriert (oder aufleitet), erhält man eine Stammfunktion F.

Merksatz:
Stammfunktionen werden mit Großbuchstaben gekennzeichnet. F ist demnach eine Stammfunktion von f

Nach der im obigen Bild beschriebenen Logik ist aber nicht nur F eine Stammfunktion von f, sondern auch f eine Stammfunktion von f'. Um die Konvention mit den Großbuchstaben zu wahren, zu schreiben ist also:



es entspricht der Definition der Stammfunktion.

Stammfunktion

Eine Funktion F ist eine Stammfunktion einer Funktion f, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Die Aufgabe "bestimme eine Stammfunktion von f" kann also auch folgendermaßen interpretiert werden: "Finde eine Funktion F, die abgeleitet wieder der Ausgangsfunktion f entspricht".

Beispiel: gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = 3x^2$ Anders gesagt: gesucht ist eine Funktion F, die abgeleitet $3x^2$ ergibt.

Leitet man x^3 ab, erhält man $3x^2$ $F(x) = x^3$ ist also eine Stammfunktion von $f(x)$

Doch "eine", statt "die" Stammfunktion... aber wieso? Das liegt daran, dass es zu einer gegebenen Ausgangsfunktion nicht nur eine Stammfunktion gibt, sondern unendlich viele. Das Beispiel von eben noch genauer angeschaut zu haben: Im vorherigen Beispiel wurde es festgestellt, dass $F(x) = x^3$ eine Stammfunktion von $f(x) = 3x^2$ ist. Die Bedingung dafür lautet: Die Ableitung von$F(x) = x^3$ muss $f(x) = 3x^2$ ergeben.

Merksatz: Zum anderen möglich "C" (Konstanten) in Stammfunktion Eine Funktion f hat beliebig viele Stammfunktionen $F(x) + C$, C = konst

Das unbestimmte Integral

Da es etwas umständlich ist diese Stammfunktionen als "die unendliche Menge aller Stammfunktionen der Ausgangsfunktion f" zu bezeichnen, verwendet man stattdessen das unbestimmte Integral.
Das unbestimmte Integral von f ist die Menge aller Stammfunktionen von f. Es gilt:

$$\int f(x)x = F(x) + C$$

mit einer beliebigen Zahl $C \in \mathbb{R}$.

Anhand letztens Beispiel von oben: Zur Erinnerung: $f(x) = 3x^2$ und $F(x) = x^3$
Möchten man dies nun in die Form $\int f(x)x = F(x) + C$ bringen, gilt:

$$\int 3x^2x = x^3 + C$$

Ein Integral beginnt mit dem Integrationszeichen und endet mit dx. Das dx markiert aber nicht nur das Ende des Integranden, sondern gibt auch Aufschluss darüber, über welche Variable integriert wird. Vergesst also bitte nie das dx ans Ende des Integrals zu schreiben.

Integrationsregeln

Potenzregel

$$\int x^n x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad , \text{für } n \neq -1$$

e-Funktion

$$\int e^x x = e^x + C$$

sin-Funktion

$$\int sin(x)x = -cos(x) + C$$

cos-Funktion

$$\int cos(x)x = sin(x) + C$$

Kehrwert

$$\int \frac{1}{x} x = ln|x| + C$$

Faktorregel

$$\int c \cdot f(x)x = c \cdot \int f(x)x$$

Summenregel

$$\int f(x) + g(x)x = \int f(x)x + \int g(x)x$$

Differenzenregel

$$\int f(x) - g(x)x = \int f(x)x - \int g(x)x$$

Weitere Grundintegreale

Funktion f	**Integral** $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
0	$0 + C$
$k (k \in \mathbb{R})$	$kx + C$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad , wenn\ n \neq -1$

	$\ln\lvert x\rvert + C \quad , wenn\ n = -1$
nx^{n-1}	$x^n + C$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$2x$	$x^2 + C$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}(\sqrt[n]{x})^{n+1} + C, wenn\ n \neq -1$
$3x^2$	$x^3 + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x^{n-1}})}$	$\sqrt[n]{x} + C$
$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{x^2} + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$
e^x	$e^x + C$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$
$a^x \ln a \ (a > 0)$	$a^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$x^x(1 + \ln(x))$	$x^x + C$, für $x > 0$
$e^{x \ln\lvert x\rvert}(\ln\lvert x\rvert + 1)$	$\lvert x\rvert^x = +C$, für $x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$x^n \ln x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C, \quad n \geq 0$
$u'(x) \ln u(x)$	$u(x) \ln u(x) - u(x) + C$
$\frac{1}{x}\ln^n x \ \ (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}\ln^{n+1} x + C$
$\frac{1}{x}\ln x^n \ \ (n \neq 0)$	$\frac{1}{2n}\ln^2 x^n + C = \frac{n}{2}\ln^2 x + C$
$\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$	$\log_a x + C$
$\frac{1}{x \ln x}$	$\ln\lvert\ln x\rvert + C$, für $x > 0$ und $x \neq 1$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}(x \ln x - x) + C$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) + C$
$\sin(kx)\ \cos(kx)$	$-\frac{1}{4k}\cos(2kx) + C$
$\sin(kx)\ \cos(kx)$	$\frac{1}{2k}\sin^2(kx) + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot x + C$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$
$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$
$\operatorname{arccot} x$	$x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + C$
$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x + C$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\tanh x$	$\ln\cosh x + C$
$\coth x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert + C$
$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\tanh x + C$
$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\coth x + C$
$\operatorname{arsinh}\ x$	$x\ \operatorname{arsinh}\ x - \sqrt{x^2 + 1} + C$
$\operatorname{arcosh}\ x$	$x\ \operatorname{arcosh}\ x - \sqrt{x^2 - 1} + C$

$\operatorname{artanh}\ x$	$x\ \operatorname{artanh}\ x + \frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + C$
$\operatorname{arcoth}\ x$	$x\ \operatorname{arcoth}\ x + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}\ x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$	$\operatorname{arcosh}\ x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert < 1$	$\operatorname{artanh}\ x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert > 1$	$\operatorname{arcoth}\ x + C$

Integrationsregeln

$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{x}$
$F(x)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	e^x	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\ln\lvert x\rvert$

Umgang mit Summen und Differenzen

Summen und Differenzen von Funktionen werden getrennt aufgeleitet. Konstante Faktoren bleiben stehen.

Gesucht ist eine Stammfunktion von

$$f(x) = 10x^4 + \frac{3}{x}.$$

Entsprechend obiger Regel werden beide Summanden getrennt aufgeleitet. Die Faktoren 10 und 3 bleiben einfach stehen, also

$$F(x) = 10 \cdot \frac{1}{5}x^5 + 3\ln(x) = 2x^5 + 3\ln(x).$$

Gesucht ist eine Stammfunktion von

$$f(x) = 10x^4 + 3x^2$$

Entsprechend obiger Regel werden beide Summanden getrennt aufgeleitet. Die Faktoren 10 und 3 bleiben einfach stehen, also

$$F(x) = 10 \cdot \frac{1}{5}x^5 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 = 2x^5 + x^3.$$

Lineare Substitution

Eine Verkettung der Form $f(x) = g(mx + c)$ wird nach folgender Regel aufgeleitet:

$$F(x) = \frac{1}{m}G(mx + c).$$

In Worten: "Äußere Aufleitung mal den Kehrwert der inneren Ableitung."

Gegeben ist die Funktion f(x)=\cos(-3x+2) Mit der Notation wie im Merksatz gilt:

$$g(x) = \cos(x), \quad m = -3, \quad c = 2,$$

Demnach gilt:

$$F(x) = -\frac{1}{3}\sin(-3x + 2).$$

Um die Stammfunktion durch den Punkt P zu finden, bildet man zunächst eine allgemein Stammfunktion mit konstantem Term c und setzt dann die Werte von P ein, um herauszufinden, was c ist.

Partielle Integration - Integrale

Regel: Partielle Integration

Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt folgende Regel:

$$\int f(x) \cdot g(x)x = F(x)g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)x.$$

Ist der Term $F(x) \cdot g'(x)$ leichter aufzuleiten als der ursprüngliche Term, so ist dies ein Hinweis, partielle Integration anzuwenden.

Anwendung der partiellen Integration

Gesucht ist eine Stammfunktion von $h(x) = xe^x$

- Schritt 1: Schreibe die Faktoren hin, und entscheide, welcher Faktor die Rolle von $f(x)$und welcher die Rolle von $g(x)$ einnimmt. Im Folgenden ist dies durch Pfeile gekennzeichnet:
  $$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{e^x} x.$$
  Wähle hier $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$. Es ist dann $F(x) = e^x$ und $g'(x) = 1$.
- Schritt 2: Schreibe die Formel hin und setze ein:
  $$\int xe^x x = g(x)F(x) - \int F(x)g'(x)x = xe^x - \int e^x x.$$
- Schritt 3: Löse das verbleibende Integral auf. Eventuell muss dabei erneut partielle Integration angewendet werden:
  $$H(x) = \int xe^x x = xe^x - e^x.$$

Bei der Produktintegration muss ein Faktor aufgeleitet, der andere abgeleitet werden.

Dabei hat man freie Wahl. Man wählt immer so, dass das Produkt $F(x)g'(x)$ möglichst einfach aufzuleiten ist. Ist ein Faktor eine e-Funktion, ist es praktisch immer sinnvoll, sie aufzuleiten, also als $f(x)$ zu wählen.

Ein schwieriger Spezialfall von partieller Integration wird im obigen Rezept noch nicht abgedeckt. Dieser wird im folgenden Beispiel erläutert: Gesucht ist die Stammfunktion von

$$h(x) = \cos(x) \cdot e^x.$$

Partielle Integration liefert:

$$\int \underset{\downarrow}{\cos(x)} \cdot \underset{\uparrow}{e^x} x = \cos(x) e^x + \int sin(x) \cdot e^x dx$$

Das Integral kann man nicht direkt ausrechnen. Es kann allerdings erneut mit partieller Integration vereinfacht werden:

$$\int \cos(x) e^x x = \cos(x) \cdot e^x + \int \sin(x) cdote^x dx$$
$$= cos(x) \cdot e^x + sin(x) \cdot - \int cos(x) \cdot e^x de$$

Jetzt ist man scheinbar genauso schlau wie vorher. Allerdings kann man jetzt das unbestimmte Integral $\int \cos(x) \cdot e^x x$ wie eine Variable betrachten und danach auflösen. Es folgt die Gleichung:

$$2 \int \cos(x) \cdot e^x x = \cos(x) \cdot e^x + sin(x) \cdot e^x$$
$$=> \int cos(x) \cdot e^x dx = \frac{1}{2}(cos(x) \cdot e^x + sin(x) \cdot e^x)$$

Integration durch Substitution - Integrale

Wann und wie die Integration durch Substitution in Nutzung brigen?

Gesucht ist die Stammfunktion von

$$f(x) = 3x \cdot (x^2 + 1)^7.$$

Bei der Funktion $f(x)$ gibt es eine innere Funktion $(x^2 + 1)$ deren Ableitung $(2x)$ in abgewandelter Form außen als Faktor auftritt. Dies ist immer als Signal für eine

Substitution zu sehen. Dafür geht man wie folgt vor: Schritte

- Schritt 1: Nenne die innere Funktion $t(x)$:
$$t(x) = x^2 + 1.$$
- Schritt 2: Bestimme die Ableitung von $t(x)$, benutze dabei die Differentialschreibweise und löse nach dx auf:
$$\frac{\mathrm{d}t}{dx} = t'(x) = 2x => dx = \frac{1}{2x} \cdot \mathrm{d}u.$$
- Schritt 3: Ersetze im Integralausdruck die innere Funktion durch $t(x)$ und das dx durch den Ausdruck aus dem letzten Schritt:
$$\begin{aligned} F(x) = \int 3x \cdot (x^2+1)^7 dx \\ = \int 3x \cdot t^7 \cdot \frac{1}{2x} dt \\ \int \frac{3}{2} t^7 dt \end{aligned}$$
- Schritt 4: Bilde die Stammfunktion der substituierten Funktion:
$$F(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot t^8.$$
- Schritt 5: Führe die Rücksubstitution durch. Ersetze dabei $t(x)$ durch den Term aus Schritt 1, d.h. durch die ursprüngliche innere Funktion.
$$F(x) = \frac{3}{16} t(x)^8 = \frac{3}{16} (x^2+1)^8.$$

Hinweis: Die Differentialschreibweise ist eine altmodische Schreibweise für die Ableitung einer Funktion $f(x)$. Dabei schreibt man
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$
Der Zähler benennt **was** abgeleitet wird, der Nenner benennt **wonach** abgeleitet wird. Da man mit $\mathrm{d}f$ und dx wie mit Variablen rechnen kann, ist diese Schreibweise eine praktische Merkhilfe für die Substitution.

Logarithmische Substitution

Sei f eine Funktion der folgenden Bauart:
$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Dann ist eine Stammfunktion von $f(x)$ gegeben durch
$$F(x) = \ln|g(x)|.$$

Tipp: Die Betragsstriche können oftmals weggelassen werden.
Gegeben sei die Funktion:
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2}.$$
Der Zähler ist "fast"die Ableitung des Nenners. Nach einer kleinen Umformung gilt

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2}.$$

Somit ist eine Stammfunktion von f gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3 + 3x^2|.$$

Bestimmte Flächeninhalte und Flächeninhalte - Integrale

Was ist ein bestimmtes Integral?

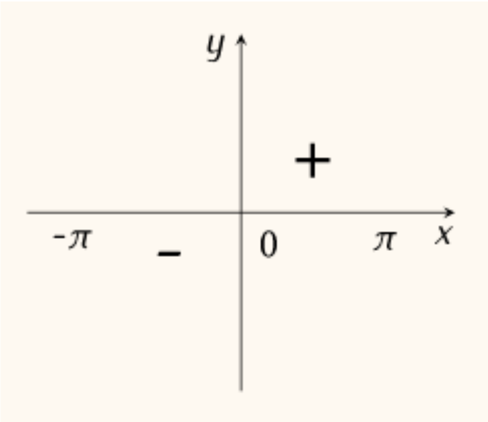
Das bestimmte Integral drückt den orientierten Flächeninhalt aus, den der Graph von f im Intervall $[a; b]$ mit der x-Achse einschließt. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

falls F eine Stammfunktion von f ist.

Der Flächeninhalt ist orientiert. Das bedeutet, dass Flächen oberhalb der x-Achse positiv und Flächen unterhalb der x-Achse negativ gewertet werden.

Beispiel: Das Integral von $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[-\pi; \pi]$ hat den Wert 0, da sich die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse genau aufheben.



Dies lässt sich auch wie folgt nachrechnen:

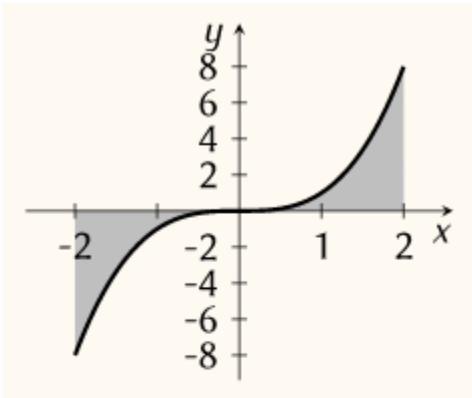
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)x = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0$$

Ist man stattdessen am Flächeninhalt A interessiert, der im Bereich $-\pi \leq x \leq \pi$

zwischen $f(x) = \sin(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird, so muss man das Integral entsprechend aufteilen und jeden Bereich getrennt ausrechnen. Dort, wo die Funktion unterhalb der x-Achse verläuft, wird das Integral mit einem Minuszeichen versehen. Es gilt:

$$\begin{aligned} A = -\int_{-\pi}^{0} \sin(x)x + \int 0_{\pi}^{\sin(x)} x = -[-cos(x)]_{-\pi}^{0} + [-cos(x)]_{\pi}^{0}. \\ = -(-cos(0) - (-cos(-\pi))) + (-cos(\pi) - (-cos(0))) \\ = cos(0) - cos(-\pi) - cos(\pi) + cos(0) \\ = 1 - (-1) - (-1) + 1 = 4 \end{aligned}$$

Weiteres Beispiel: Das Integral von $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[-2, 2]$ hat den Wert 0, da sich die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse genau aufheben.



Dies lässt sich auch wie folgt nachrechnen:

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = [\frac{1}{4}x^4]_{-2}^{2} = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 = 4 - 4 = 0$$

Ist man stattdessen am Flächeninhalt A interessiert, der im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ zwischen $f(x) = x^3$ und der x-Achse eingeschlossen wird, so muss man das Integral entsprechend aufteilen und jeden Bereich getrennt ausrechnen. Dort, wo die Funktion unterhalb der x-Achse verläuft, wird das Integral mit einem Minuszeichen versehen. Es gilt:

$$\begin{aligned} A = -\int_{-2}^{0} x^3 x + \int_{0}^{2} x^3 dx \\ = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{0} + [\frac{1}{4}x^4]_{0}^{2} \\ = -\left(0 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^4\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot (2)^4 - 0\right) \\ = -(-4) + 4 \\ = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

Besonderheiten bei der Berechnung des bestimmten Integrals

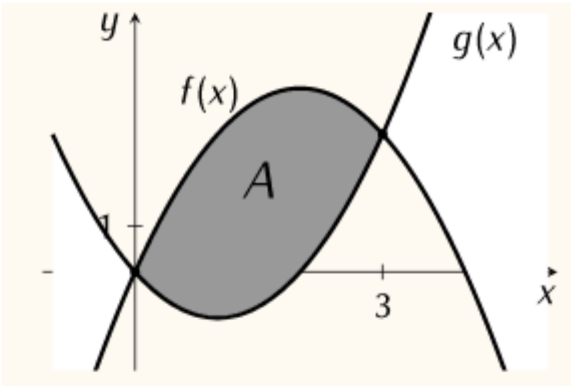
Verläuft der Graph der Funktion f im Intervall $[a; b]$ oberhalb des Graphen der Funktion g, so kann man die Fläche zwischen den Graphen von f und g mit der folgenden Formel bestimmen:

$$A = \int ab(f(x) - g(x))x.$$

Bei dieser Formel ist es irrelevant, ob Teile des Graphen von f oder g unterhalb der x-Achse verlaufen.
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = -x^2 + 4x$$
$$g(x) = x^2 - 2x.$$

Es soll der Flächeninhalt A, der von den Graphen der Funktionen f und$g$ eingeschlossen wird, berechnet werden.



Zunächst bestimmt man die Integrationsgrenzen. Dazu berechnet man die Schnittstellen von f und g. Es folgt

$$-x^2 + 4x = x^2 - 2x => x_1 = 0, x_2 = 3.$$

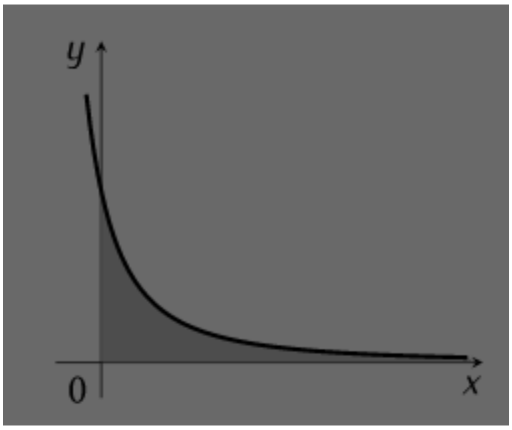
Da der Graph von f oberhalb des Graphen von g verläuft, gilt:

$$A = \int 03(f(x) - g(x))x = \int_0^3 (-x^2 + 4x - (x^2 - 2x))dx$$
$$= \int_0^3 -2x^2 + 6xdx$$
$$= [-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2]_0^3 = -\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 0 = 9$$

Uneigentliche Integrale - Integrale

Definition

Merksatz:
Eine Fläche kann ins Unendliche reichen und dennoch endlichen Flächeninhalt besitzen. In diesem Fall spricht man von einem uneigentlichen Integral. Im nachfolgenden Beispiel reicht die Fläche in Richtung der x-Achse unendlich weit. Dennoch könnte der Flächeninhalt endlich sein:



Schema: Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x}$ und der x-Achse für $x \geq 0$

- Schritt 1: Führe eine variable rechte Grenze z ein und stelle einen Term $A(z)$ für den Flächeninhalt auf:
$$A(z) = \int_0^z e^{-x} x.$$
- Schritt 2: Berechne das Integral in Abhängigkeit von z:
$$A(z) = \int 0_z^{e^{-x}} x = [-e^{-x}]_0^z = -e^{-z} + 1.$$
- Schritt 3: Bestimme den Grenzwert für $z \to \infty$
$$A = \lim_{z \to \infty} A(z) = \lim_{z \to \infty} -e^{-z} + 1 = 1.$$

  Der Flächeninhalt beträgt genau $1FE$.

Mittelwert - Integrale

Wie kann der Mittelwert einer Funktion berechnet werden?

Sei Wie kann der Mittelwert einer Funktion berechnet werden?

Sei f eine Funktion. Der Mittelwert M von f auf dem Intervall $[a; b]$ berechnet sich als
$$M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)x.$$

Der Mittelwert einer Funktion soll häufig im Kontext von anwendungsbezogenen Aufgaben berechnet werden. Eine mögliche Formulierung einer solchen Aufgabe findest du im folgenden **Beispiel**: Ein Auto beschleunigt 30 Sekunden lang. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{5}{4}t,$$

t in Sekunden, $f(t)$ in $18.75_{m/s}$.

Es soll berechnet werden, wie groß die Durchschnittsgeschwindigkeit während dieser 30 Sekunden ist. Für die Durchschnittsgeschwindigkeit M gilt

$$M = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} \frac{5}{4}tdt = \frac{1}{30}[\frac{5}{8}t^2]_0^{30} = \frac{1}{30}\cdot\frac{5}{8}\cdot 30^2 = \frac{75}{4} = 18.75$$

Im Schnitt ist das Auto also mit einer Geschwindigkeit von $18.77_{m/s}$ gefahren. f eine Funktion. Der Mittelwert M von f auf dem Intervall $[a; b]$ berechnet sich als

$$M = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)x.$$

Rotationskörper - Integrale

Wie entsteht ein Rotationskörper?

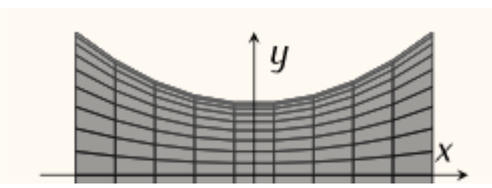
Lässt man den Graphen einer Funktion f im Bereich $[a; b]$ um die x-Achse rotieren entsteht ein Rotationskörper.

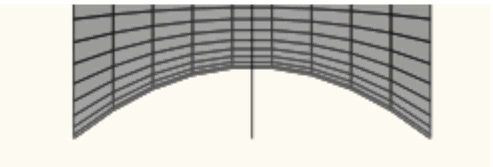
Für das Volumen V des Rotationskörpers gilt:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2x.$$

!Achtung:! Erst quadrieren, dann aufleiten! Beim Rechnen das π nicht vergessen!

Wie diese Formel angewendet wird, siehst du in folgendem Beispiel: Bei der Rotation der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ um die x-Achse im Intervall $[-1; 1]$ entsteht ein Rotationskörper. Dessen Volumen V soll bestimmt werden.





Mit obiger Formel gilt dann für das Volumen:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 x = \pi \int_{-1}^{1} (x^4+2x^2+1)dx$$
$$= \pi[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x]_{-1}^{1} = \pi(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1-(-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1)) = \frac{56}{15}\pi$$

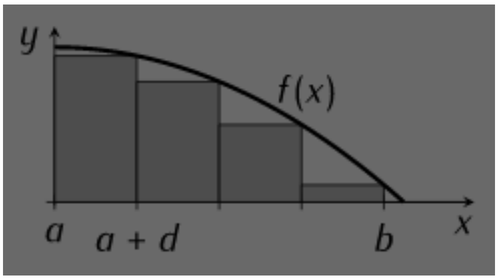
Numerische Integration - Integrale

Unter- und Obersumme

Gesucht ist die Fläche A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse von a bis b.

Lässt sich keine Stammfunktion von f bestimmen, so kann das gesuchte Integral näherungsweise durch Ober- oder Untersumme bestimmt werden. Dazu wird das Intervall $[a; b]$ in n gleichlange Streifen der Länge $d = \frac{b-a}{n}$ zerschnitten.

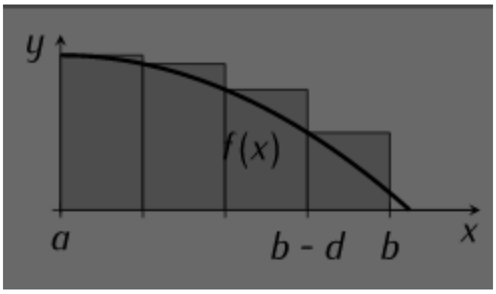
Als Untersumme U bezeichnet man die Gesamtfläche an Streifen, deren Höhen bis zum jeweils niedrigsten Punkt auf der Streifenbreite reichen. Sie ist eine untere Abschätzung von A



Es gilt:

$$U = d \cdot (\ f(a+d) + f(a+2d) + \cdots + f(b)\ ).$$

Als Obersumme O bezeichnet man die Gesamtfläche an Streifen, deren Höhen jeweils bis zum höchsten Punkt über der Streifenbreite reichen. Sie ist eine obere Abschätzung von A.



Es gilt:

$$O = d \cdot (\ f(a) + f(a+d) + \cdots + f(b-d)\ )\ .$$

Die Näherung kann weiter verbessert werden, wenn man den Mittelwert von O und U verwendet:

$$A \approx \frac{O+U}{2}.$$

Für monoton steigende Funktionen sind die Formeln für Ober- und Untersumme genau vertauscht. In der Regel wird aber der Mittelwert der beiden Werte gesucht.

Gesucht ist die Fläche unter der Funktion $f(x) = 16 - x^2$ zwischen 0 und 4. Um das Integral näherungsweise zu bestimmen zerlegt man die Fläche in 4 Streifen. In diesem Fall ist

$$d = \frac{4-0}{4} = 1.$$

Dann gilt:

$$O = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 16 + 15 + 12 + 7 = 50.$$
$$U = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 15 + 12 + 7 = 34.$$

Der exakte Wert des Integrals beträgt

$$\int_0^4 (16 - x^2)x = \frac{128}{3} = 42,67.$$

Das arithmetische Mittel von Obersumme und Untersumme ist

$$M = \frac{O+U}{2} = \frac{50+34}{2} = 42.$$

Somit ist ersichtlich, dass der Mittelwert eine deutliche Verbesserung der Näherung gibt.

Berechnung der Bogenlänge - Integrale

Beispiel

Die Bogenlänge einer Kurve, welche im Bereich $[a; b]$ durch eine Funktion f gegeben ist, kann berechnet werden mittels:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} x.$$

Bis auf ganz wenige Ausnahmen wird zur Berechnung der Bogenlänge ein GTR oder CAS benötigt.
Die Bogenlänge der Kurve, welche durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ im Intervall $[-2; 2]$ beschrieben werden kann, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x + 2 + e^{-x})^2} dx \\ &= \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} e^x + e^{-x} dx \\ &= e^2 - e^{-2} \end{aligned}$$

Resources & Annotations:

- https://www.wikipedia.org/ (https://www.wikipedia.org/)
- https://math.wikia.org/wiki/Math_Wiki (https://math.wikia.org/wiki/Math_Wiki)
- http://notable.math.ucdavis.edu/wiki/Mathematics_Jobs_Wiki (http://notable.math.ucdavis.edu/wiki/Mathematics_Jobs_Wiki)
- https://www.w3.org/wiki/Main_Page (https://www.w3.org/wiki/Main_Page)
- https://4chan-science.fandom.com/wiki/Mathematics (https://4chan-science.fandom.com/wiki/Mathematics)
- https://arxiv.org/archive/math (https://arxiv.org/archive/math)
- https://www.education.com/resources/math/ (https://www.education.com/resources/math/)
- https://docs.python.org/3/library/math.html (https://docs.python.org/3/library/math.html)
- https://www.math.uni-hamburg.de/en.html (https://www.math.uni-hamburg.de/en.html)
- https://www.calculator.net/math-calculator.html (https://www.calculator.net/math-calculator.html)
- https://www.stanford.edu/ (https://www.stanford.edu/)
- https://www.youtube.com/channel/UCdwo4k1RQHTcq_-WS7Cazqg

(https://www.youtube.com/channel/UCdwo4k1RQHTcq_-WS7Cazqg)
- https://www.youtube.com/channel/UCX7Y2qWriXpqocG97SFW2OQ (https://www.youtube.com/channel/UCX7Y2qWriXpqocG97SFW2OQ)
- https://www.youtube.com/channel/UC_z-9eqGN0AMERbXJwNzheQ (https://www.youtube.com/channel/UC_z-9eqGN0AMERbXJwNzheQ)
- https://www.youtube.com/channel/UCoxcjq-8xIDTYp3uz647V5A (https://www.youtube.com/channel/UCoxcjq-8xIDTYp3uz647V5A)
- https://www.youtube.com/channel/UC0LfPSALkn8YDhXZf8-Pl5A (https://www.youtube.com/channel/UC0LfPSALkn8YDhXZf8-Pl5A)
- https://www.youtube.com/channel/UCfzlCWGWYyIQ0aLC5w48gBQ (https://www.youtube.com/channel/UCfzlCWGWYyIQ0aLC5w48gBQ)
- https://www.youtube.com/channel/UCK8XIGR5kRidIw2fWqwyHRA (https://www.youtube.com/channel/UCK8XIGR5kRidIw2fWqwyHRA)
- https://www.youtube.com/channel/UCbE3PU7rYtS1PkmVmm6CfpA (https://www.youtube.com/channel/UCbE3PU7rYtS1PkmVmm6CfpA)
- https://www.youtube.com/channel/UCzn6vAfspIcagLax1fck_jw (https://www.youtube.com/channel/UCzn6vAfspIcagLax1fck_jw)
- https://mathegym.de/start (https://mathegym.de/start)
- https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/mathematik-uebersicht.html (https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/mathematik-uebersicht.html)
- https://www.abi-mathe.de/buch/ (https://www.abi-mathe.de/buch/)
- https://mathworld.wolfram.com/ (https://mathworld.wolfram.com/)
- http://www.math.com/ (http://www.math.com/)
- https://www.mathsisfun.com/ (https://www.mathsisfun.com/)
- https://www.khanacademy.org/math (https://www.khanacademy.org/math)
- https://abiturma.de/mathe-lernen (https://abiturma.de/mathe-lernen)
- https://www.integral-calculator.com/ (https://www.integral-calculator.com/)
- https://studyflix.de/ (https://studyflix.de/)
- https://danieljung.io/ (https://danieljung.io/)
- https://www.studyhelp.de/online-lernen/mathe/differentialgleichung/ (https://www.studyhelp.de/online-lernen/mathe/differentialgleichung/)
- https://www.youtube.com/user/beckuplearning (https://www.youtube.com/user/beckuplearning)
- https://www.youtube.com/channel/UCjTfChr0yyz4iZq0x12Q6xA (https://www.youtube.com/channel/UCjTfChr0yyz4iZq0x12Q6xA)
- https://www.haw-landshut.de/aktuelles/news/news-detailansicht/article/online-zum-mathe-meister.html (https://www.haw-landshut.de/aktuelles/news/news-detailansicht/article/online-zum-mathe-meister.html)

```
In [ ]:
```