离散数学作业 _6

李云浩 241880324

2025 年 5 月 8 日

1 6.4

1.1 T6

不是，其下半部分与菱形格同构，因此不是分配格。故也不是布尔代数。

1.2 T8

是，其与 B_2 同构，因此是布尔代数。

1.3 T10

对 60 进行质因数分解 $60 = 2 * 2 * 3 * 5$。因为存在两个相等的因数 2，因此 D_{60} 不是布尔代数。

1.4 T16

要证命题等价，可证 $(a) \to (b) \to (c) \to (d) \to (e) \to (a)$。
$(a) \to (b)$: 因为 $a \vee b = b$，所以 $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$。
$(b) \to (c)$: 因为 $a \wedge b = a$，所以 $a' \vee b = (a' \vee b') \vee b = a' \vee (b \vee b') = a' \vee 1 = 1$。
$(c) \to (d)$：因为 $a' \vee b = 1$，所以 $a \wedge b' = (a' \vee b)' = 0$。
$(d) \to (e)$：因为 $a \wedge b' = 0$，且 $b \wedge b' = 0$ 并且 b 与 b' 已经是互为补元。因此 $a \leq b$。
$(e) \to (a)$：因为 $a \leq b$，所以 $a \vee b = b$。
综上，以上命题均等价。

1.5 T17

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge b') &= ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee b') \\
&= ((a \vee a) \wedge (b \vee a)) \wedge ((a \vee b') \wedge (b \vee b')) \\
&= (a \wedge (b \vee a)) \wedge ((a \vee b') \wedge 1) \\
&= a \wedge (a \vee b') \\
&= a
\end{aligned}
$$

1.6 T18

$$
\begin{aligned}
b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) &= b \wedge (a \vee (a' \wedge 1)) \\
&= b \wedge (a \vee a') \\
&= b \wedge 1 \\
&= b
\end{aligned}
$$

1.7 T19

因为 $(a \wedge b \wedge c) \leq (b \wedge c)$，因此 $(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = b \wedge c$

1.8 T20

$$
\begin{aligned}
((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' &= (a \vee c)' \vee (b' \vee c)' \\
&= (a' \wedge c') \vee (b \wedge c') \\
&= ((a' \wedge c') \vee b) \wedge ((a' \wedge c') \vee c') \\
&= (a' \vee b) \wedge (b \vee c') \wedge (a' \vee c') \wedge (c' \vee c') \\
&= (a' \vee b) \wedge c'
\end{aligned}
$$

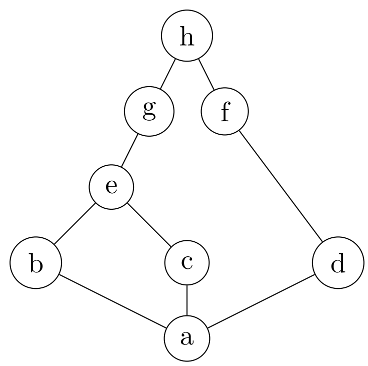
1.9 T21

因为 $a \leq b$，因此有 $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$。所以：

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ &= b \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

1.10 T27

根据 M_R 可绘制出其对应的格，显然这个不是一个布尔代数，d 的补元不唯一。



1.11 T29

(a) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
(b) $2, 3, 5$

1.12 T32

(a) 原子:$001, 010, 100$。其他元素的原子表示：$110 = 100 \vee 010 \quad 101 = 100 \vee 001 \quad 011 = 010 \vee 001 \quad 111 = 100 \vee 010 \vee 001$。
(b) 原子:$2, 3, 7$。其他元素的原子表示：$6 = 2 \vee 3 \quad 21 = 3 \vee 7 \quad 42 = 2 \vee 3 \vee 7$。
(c) 原子：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
其他元素的原子表示：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

2 6.5

2.1 T11

$$\begin{aligned}(x\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)&=(y'\wedge(x\wedge z))\vee(y\wedge(x\wedge z))\\&=(y\vee y')\wedge(x\wedge z)\\&=1\wedge(x\wedge z)\\&=x\wedge z\end{aligned}$$

2.2 T12

$$\begin{aligned}(z\vee(y\wedge(x\vee x')))\vee(y\wedge z)'&=(z\vee(y\wedge 1))\wedge(y\wedge z')'\\&=(z\vee y)\wedge(y'\vee z)\\&=z\wedge(y\vee y')\\&=z\end{aligned}$$

2.3 T13

$$
\begin{aligned}
(y \wedge z) \vee x' \vee (w \wedge w') \vee (y \wedge z') &= x' \vee 0 \vee (y \wedge z') \vee (y \wedge z) \\
&= x' \vee (y \wedge (z \vee z')) \\
&= x' \vee y
\end{aligned}
$$

2.4 T14

$(x' \wedge y' \wedge z' \wedge w) \vee (x' \wedge z' \wedge w' \wedge y') \vee (w' \wedge x' \wedge y \wedge z') \vee (w \wedge x' \wedge y \wedge z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') = (x' \wedge z')$

2.5 T18

$(x \vee (y \wedge z))' \vee z'$

2.6 T19

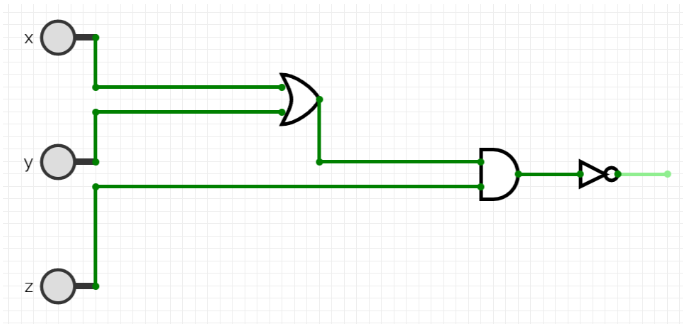
$((x \wedge y) \vee (y \wedge z))'$

2.7 T20

$(x' \wedge x)' \vee ((y \wedge w') \vee ((y \wedge w) \vee z'))$

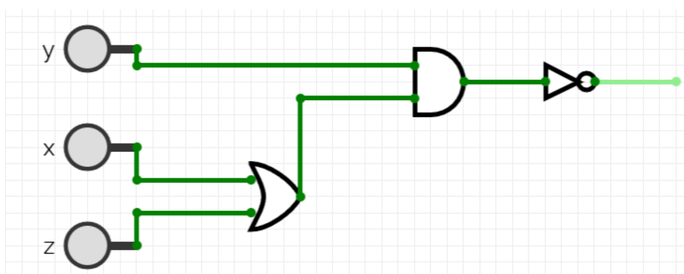
2.8 T21

$$
\begin{aligned}
(x \vee (y \wedge z))' \vee z' &= (x' \wedge (y \wedge z)') \vee z' \\
&= (x' \wedge (y' \vee z')) \vee z' \\
&= (x' \wedge y') \vee (x' \wedge z') \vee z' \\
&= (x' \wedge y') \vee z' \\
&= (x \vee y)' \vee z' \\
&= ((x \vee y) \wedge z)'
\end{aligned}
$$



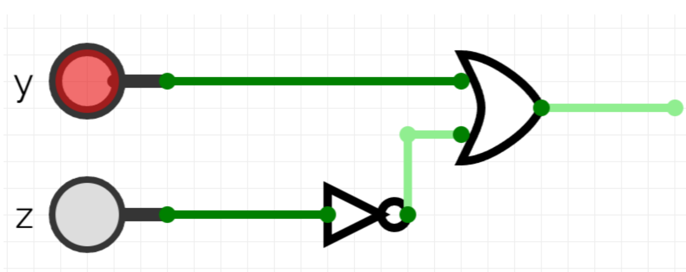
2.9 T22

$$((x \wedge y) \vee (y \wedge z))' = (y \wedge (x \vee z))'$$



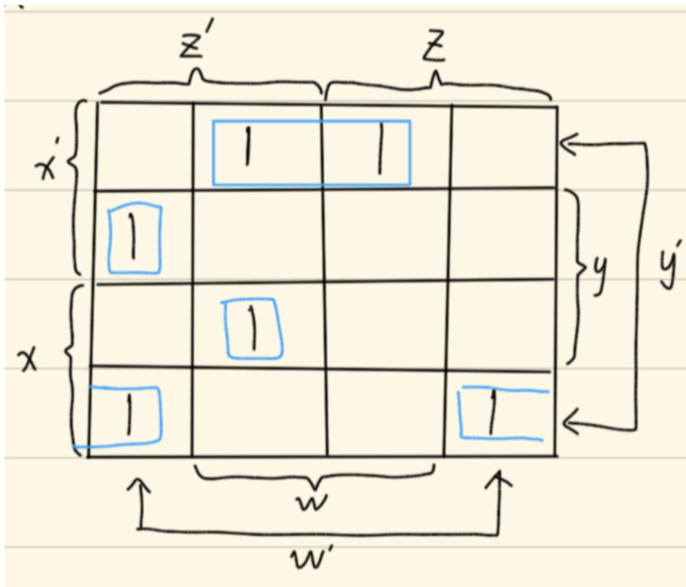
2.10 T23

$$\begin{aligned}(x' \wedge x)' \vee ((y \wedge w') \vee ((y \wedge w) \vee z')) &= 1 \vee ((y \wedge w') \vee (y \wedge w) \vee z') \\ &= y \vee z'\end{aligned}$$



3 6.6

3.1 T8



3.2 T12

$(y' \wedge z) \vee (x' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z')$

3.3 T14

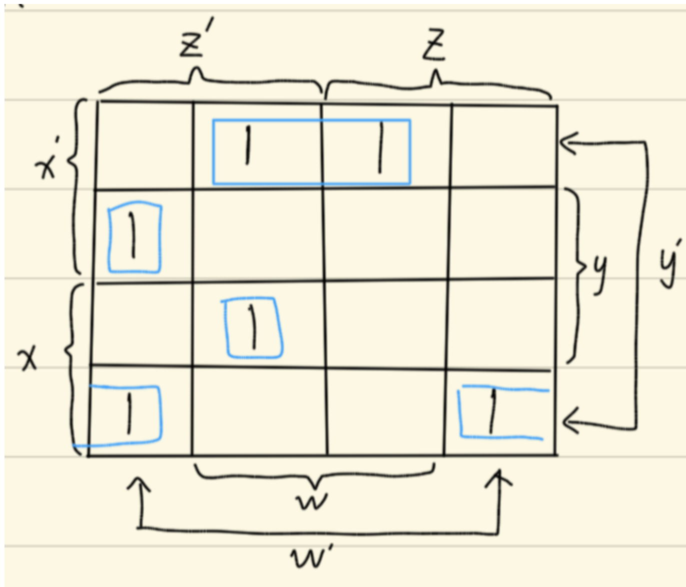
$(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (y \wedge z) = x' \vee (y \wedge z)$

3.4 T16

$(x' \wedge z') \vee (x' \wedge w' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge w')$

3.5 T24

由下图可得：$f = (x' \wedge y' \wedge w) \vee (x \wedge y' \wedge w') \vee (x' \wedge y \wedge w' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge w \wedge z')$



3.6 T25

(a) $(0,0) \to x' \wedge y' \quad (0,1) \to x' \wedge y \quad (1,0) \to x \wedge y'$

(b) 设元素 s_1, s_2 分别表示为 $x_1 x_i, \quad x_1(x_i)'$ 因此 $s_1 \vee s_2 = (x_1 \wedge x_i) \vee (x_1 \wedge x_i') = x_1 \wedge (x_i \vee x_i') = x_1$. 因此不需要变量 x_i。

3.7 T26

(a) $x' \vee y'$

(b)

x	y	$x' \vee y'$	f
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

因此 f 是由 (a) 中的 $x' \vee y'$ 产生的。