离散数学作业 _1

李云浩 241880324

2025 年 3 月 19 日

1 P60-62

T12

p 表示今天是星期一，q 表示碟子里有汤匙，r 表示草地是湿的。

(a) $p \wedge q$ (b) $q \vee r$ (c) $\neg p \wedge \neg r$ (d) $\neg q \wedge r$

T15

(a) 对于任意的整数，都存在一个整数，使它们之和为偶数。

(b) 存在一个整数，使得它与任意的整数之和都为偶数。

T16

(a) 所有的整数都不是素数 (b) 存在一个不是偶数的整数。

T18

(a) $\forall x \neg P(x)$ (b) $\forall x \forall y R(x, y)$

(c) $\neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$ (d) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

T28

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \vee q) \vee \neg q$
F	F	F	T	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	T
T	T	T	F	T

T30

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge \neg r$
F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	T	T	F	F	T	F

T32

p	q	r	$p \downarrow q$	$p \downarrow r$	$(p \downarrow q) \wedge (p \downarrow r)$
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
T	T	F	F	F	F
T	T	T	F	F	F

T35

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \triangle p$
F	F	F	F
F	T	F	F
T	F	F	T
T	T	T	F

2 P66-69

T6

(a)$\neg r \to q$ (b) $\neg q \wedge p$ (c) $q \to \neg p$ (d) $\neg p \to \neg r$

T7

(a) 仅当我心情不好时，我会去看电影并且不学习离散数学结构。

(b) 如果我心情好，那么我会学习离散数学结构或者去看电影。

(c) 如果我心情不好，那么我不会去看电影或者我会学习离散数学结构。

(d) 当且仅当我心情很好，我会去看电影并且不学习离散数学结构。

T12

(a) 不定式

p	q	$q \wedge p$	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$
F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
T	T	T	F	F	T

(b) 重言式

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

(c) 不定式

p	q	$q \wedge p$	$p \to (q \wedge p)$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	F
T	T	T	T

T13

$p \to q$ 的真值表为：

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \to q$ 为假，即 $p = T, q = F$，此时：

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q)) \to q$
T	F	F	T	F

$(\neg(p \wedge q)) \to q$ 真值为假。

T14

$p \to q$ 的真值表为：

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \to q$ 为假，即 $p = T, q = F$，此时：

p	q	$\neg p$	$(p \to q)$	$(\neg p) \vee (p \to q)$
T	F	F	F	F

$(\neg p) \vee (p \to q)$ 真值为假。

T15

$p \to q$ 的真值表为：

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \to q$ 为真，即 $(p = F) \vee (p = q = T)$，此时：

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$(p \wedge q) \to \neg q$
F	F	F	T	T
F	T	F	F	T
T	T	T	F	F

$(p \wedge q) \to \neg q$ 的真值可能为真可能为假，无法确定。

T16

$p \to q$ 的真值表为：

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \to q$ 为真，即 $(p = F) \vee (p = q = T)$，此时：

p	q	$(p \to q)$	$\neg(p \to q)$	$\neg p$	$\neg(p \to q) \wedge \neg p$
F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F
T	T	T	F	F	F

$\neg(p \to q) \wedge \neg p$ 的真值为假。

T24

(a) 天气好或者我去上班。

(b) 卡罗尔没有生病，去了野餐但卡罗尔玩得不愉快。

(c) 我进入了比赛并且赢得了这场比赛。

T27

$p \wedge (q \vee r)$ 的真值表为：

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
F	F	F	F	F
F	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 的真值表为：

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T
T	T	T	T	T	T

因此在 p q r 的不同的真值指派情况下，两个命题的真值情况一致，故两个命题等价。即 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

T28

$\neg(p \vee q)$ 的真值表为：

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
F	F	F	T
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	T	F

$(\neg p) \wedge (\neg q)$ 的真值表为：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	F	F	F

因此在 p q 的不同的真值指派情况下，两个命题的真值情况一致，故两个命题等价。即 $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

T29

$$
\begin{aligned}
\neg(p \leftrightarrow q) &\equiv \neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \\
&\equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge p) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge q) \\
&\equiv ((\neg p \wedge p) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)) \\
&\equiv (F \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \vee F) \\
&\equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))
\end{aligned}
$$

T30

$$
\begin{array}{cc}
1. & \exists x(P(x) \vee Q(x)) \\
2. & P(a) \vee Q(b) \\
\hline
3. & \therefore \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)
\end{array}
$$

因此 $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

T31

$$
\begin{aligned}
\forall x(P(x) \wedge Q(x)) &\equiv \neg(\exists x(P(x) \vee Q(x))) \\
&\equiv \neg(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \\
&\equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)
\end{aligned}
$$

因此 $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

T32

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge p) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee q) \\
&\equiv T \wedge T \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$

T33

$$\begin{aligned} q \to (p \lor q) &\equiv \neg q \lor (p \lor q) \\ &\equiv \neg q \lor p \lor q \\ &\equiv T \end{aligned}$$

T34

$$\begin{aligned} (p \land (p \to q)) \to q &\equiv (p \land (\neg p \lor q)) \to q \\ &\equiv ((p \land \neg p) \lor (p \land q)) \to q \\ &\equiv \neg(p \land q) \lor q \\ &\equiv \neg p \lor \neg q \lor q \\ &\equiv T \end{aligned}$$

T35

$$\begin{aligned} ((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r) &\equiv ((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)) \to (\neg p \lor r) \\ &\equiv \neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)) \lor (\neg p \lor r) \\ &\equiv (\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor r)) \lor (\neg p \lor r) \\ &\equiv (p \land \neg q) \lor (q \land \neg r) \lor \neg p \lor r \\ &\equiv (\neg q \lor \neg p) \lor (q \lor r) \\ &\equiv T \end{aligned}$$

3 P73-75

T8

p、q、r、s 分别表示这个学期毕业、通过了物理考试、每星期花 10 个小时学习物理、打排球。

前提：$p \to q$、$\neg r \to \neg q$、$r \to \neg s$、s 证明：$\neg p$

1.

T12

(a)

$$\begin{array}{ll}
1. & (p \to q) \wedge (q \to r) \\
2. & (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \\
3. & \neg q \wedge r \\
4. & \neg q \\
5. & \neg p \vee q \\
6. & \neg q \\
\hline
7. & \therefore p
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll}
1. & \neg(p \to q) \\
2. & \neg(\neg p \vee q) \\
3. & p \wedge \neg q \\
4. & p \\
\hline
5. & \therefore \neg q
\end{array}$$

T18 证明：n^2 是偶数当且仅当 n 是偶数。

设 p 表示 n 为偶数，q 表示 n^2 为偶数。

证 $p \to q$：

不妨令 n = 2k, 则 $n^2 = 4k^2$，因此 n^2 为偶数。$p \to q$ 成立。

证 $q \to p$：

反证法：不妨假设 n 为奇数，且 n^2 为偶数，即 n = 2k + 1.

所以 $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$4k^2 + 4k$ 为偶数，故 n^2 为奇数，与假设矛盾，故假设不成立。$q \to p$ 成立。

综上所述，n^2 是偶数当且仅当 n 是偶数。

T20 设 A 和 B 是全集 U 的子集，证明 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

证 $(A \subseteq B) \to (\overline{B} \subseteq \overline{A})$：

对于 $\forall x \in \overline{B}$, 即 $x \notin B$。因为 $A \subseteq B$, 所以 $x \notin A$，即 $x \in \overline{A}$。成立。

证 $(\overline{B} \subseteq \overline{A}) \to (A \subseteq B)$:

对于 $\forall x \in A$，即 $x \notin \overline{A}$。因为 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, 所以 $x \notin \overline{B}$，即 $x \in B$。成立。

综上所述：$A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$。

T22 证明：k 为奇数是 k^3 为奇数的一个充要条件。

证 k 为奇数 $\to k^3$ 为奇数

令 $k = 2n+1$，所以 $k^3 = (2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$。此时 k^3 为奇数，成立。

证 k^3 为奇数 $\to k$ 为奇数

反证，假设 k 为偶数，k^3 为奇数。不妨令 $k = 2n$, 所以 $k^3 = 8n^3$ 为偶数，与假设矛盾。故假设不成立，原命题成立。

综上所述：k 为奇数是 k^3 为奇数的一个充要条件。

T23 证明或证伪：$n^2 + 41n + 41$ 对每个整数 n 都是一个素数。

取 $n = 41$，此时 $n^2 + 41n + 41 = 2 \times 41 + 41 \times 41 + 41$，显然能被 41 整除，命题不成立。

T24 证明或证伪：任何 5 个连续整数之和能被 5 整除。

不妨设五个整数分别为 $n, n+1, n+2, n+3, n+4$，和为：$5n+10$ 能被 5 整除，命题成立。

T30

论证大致正确，当其中可以强调 $b \neq 0$，使论证更为严谨。

4 P79-83

T20

(a) 当 $P(n)$ 成立时，即 $2|(2n-1)$，因为 $2|2$，所以 $2|(2n-1+2)$，即 $2|(2n+1)$，所以 $P(k+1)$ 也成立。当 $P(n)$ 不成立时，同理 $P(n+1)$ 也不成立。

$P(n) \to P(n+1)$ 的真值表为：

$P(n)$	$P(n+1)$	$P(n) \to P(n+1)$
F	F	T
T	T	T

因此 $P(n) \to P(n+1)$ 为重言式。

(b) 对于任意的整数 n, $2n-1$ 为奇数，不能被 2 整除。因此 $P(n)$ 对于任意整数 n 不为真。

(c) 不矛盾。分题 (a) 说明的是 $P(n)$ 与 $P(n+1)$ 的真值情况一致，说明可以从 $P(n)$ 的真值情况推出 $P(n+1)$ 那么数学归纳法的原理也是近似，先找出一两个例子，然后利用递推关系推出剩下的所有情况。因此并不矛盾。

T22

论证时指举出了 $P(0)$ 一个例子，但是后续 2^k 以及 2^{k-1} 都使用了这个特例。

T26 证明：设 A 和 B 是方阵，如果 $AB=AB$，那么 $(AB)^n=A^nB^n$ 对 $n\geqslant 1$ 成立。

当 $n=1$ 时，$AB=BA$ 已由条件给出，成立。

假设 $n=k$ 时成立，证明 $n=k+1$ 时也成立：

$$\begin{aligned}(AB)^{k+1}&=(AB)^kAB\\&=A^kB^kAB\\&=A^kB^{k-1}(BA)B\\&=A^kB^{k-1}AB^2\\&\vdots\\&=A^{k+1}B^{k+1}\end{aligned}$$

证毕。

T28 证明：每个比 27 大的整数都能写成 $5a+8b$，其中 $a,b\in\mathbf{N}$

有：$28=5\times4+8\times1,\quad 29=5\times1+8\times3,\quad 30=5\times6+8\times0$，$31=5\times3+8\times2,\quad 32=5\times0+8\times4$. 根据数学归纳法，目前存在五个连续的大于 27 的整数满足条件。且 P(n) 成立时。P(n + 5) 显然成立。
证毕。

T30 证明：如果 $GCD(a,b)=1$，那么对所有 $n\geq 1, GCD(a^n,b^n)=1$.

因为 $GCD(a,b)=1$，即对 a,b 分别进行质因数分解时，只有 1 这一个共同的公因数。那么当 a,b 分别变为 n 次方后，分解出来的质因数与一开始的等同，因此仍然只会存在 1 这一个唯一的公因数。因此如果 $GCD(a,b)=1$，那么对所有 $n \geq 1, GCD(a^n, b^n)=1$。

T34

当循环尚未进行时（第 0 次循环），$W_0=Y, Z_0=X$，有 $(Y\times W_0)+Z_0 = X+Y^2$。

假设进入了第 n 次循环，不变量成立。即：$(Y\times W_n)+Z_n = X+Y^2$ 成立。

那么第 n + 1 次时，$W_{n+1}=W_n-1, Z_{n+1}=Z_n+Y$

因此

$$\begin{aligned}(Y\times W_{n+1})+Z_{n+1} &= (Y\times(W_n-1))+(Z_n+Y)\\ &= (Y\times W_n)+Z_n\\ &= X+Y^2\end{aligned}$$

因此 $(Y\times W)+Z = X+Y^2$ 在循环过程中始终成立。

在循环结束时，$W=0$，因此 $Z=X+Y^2$。

T36

当循环尚未进行时（第 0 次循环），$R_0=1, K_0=2M$，有 $R\times N^K = 1\times N^{2M} = N^{2M}$。

假设进入了第 n 次循环，不变量成立。即：$R_n\times N^{K_n} = N^{2M}$。

那么第 n + 1 次时，$R_{n+1}=R_n\times N, K_{n+1}=K_n-1$

因此

$$\begin{aligned}R_{n+1}\times N^{K_{n+1}} &= (R_n\times N)\times(N^{K_n-1})\\ &= R_n\times N^{K_n}\\ &= N^{2M}\end{aligned}$$

因此 $R\times N^K = N^{2M}$ 在循环过程中始终成立。

在循环结束时，$R=N^{2M}, K=0$, 因此 $R=N^{2M}$。

5 P86-87

T20

由 $g_1 = 1, g_2 = 3, g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$，因此 $g_3 = 4, g_4 = 7, g_5 = 11, g_6 = 18, g_7 = 29, g_8 = 37, g_9 = 66, g_{10} = 103$. 因为 $g_2 + g_4 = g_5 - 1 \quad g_2 + g_4 + g_6 = g_7 - 1 \quad g_2 + g_4 + g_6 + g_8 = g_9 - 1$。提出猜想：$\sum_{i=1}^{n} g_{2i} = g_{2n+1} - 1$

T21 因为 $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = g_6 - 3 \quad \sum_{i=1}^{5} g_i = g_7 - 3$, 提出假设：$\sum_{i=1}^{n} g_i = g_{i+2} - 3$。

T22 因为 $g_1 + g_3 = g_4 - 2 \quad g_1 + g_3 + g_5 = g6 - 2 \quad g_1 + g_3 + g_5 + g_7 = g_8 - 2$, 提出猜想：$\sum_{i=1}^{n} g_{2i-1} = g_{2n} - 2$

T23 验证：$g_2 + g_4 + \cdots + g_{2n} = g_{2n+1} - 1$
运用数学归纳法，当 $\mathrm{n} = 1$ 时，$g_2 = g3 - 1$ 成立。
假设当 $n = k$ 时，$\sum_{i=1}^{n} g_{2i} = g_{2n+1} - 1$ 成立，即 $\sum_{i=1}^{k} g_{2i} = g_{2k+1} - 1$。
当 $n = k + 1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} g_{2i} &= \sum_{i=1}^{k} g_{2i} + g_{2k+2} \\ &= g_{2k+1} - 1 + g_{2k+2} \\ &= g_{2k+3} - 1 \\ &= g_{2(k+1)+1} - 1\end{aligned}$$

经检验，猜想成立。

T24 有 T23 可知,对于偶数项有:$\sum_{i=1}^{n} g_{2i} = g_{2n+1} - 1$,要检验 $\sum_{i=1}^{n} g_i = g_{i+2} - 3$，即证明对于奇数项，有 $\sum_{i=1}^{n} g_{2i-1} = g_{2n} - 2$。下面验证奇数项的结论:$\sum_{i=1}^{n} g_{2i-1} = g_{2n} - 2$。运用数学归纳法，当 $n = 1$ 时，$g_1 = g_2 - 2$ 成立。
假设当 $n = k$ 时，$\sum_{i=1}^{n} g_{2i-1} = g_{2n} - 2$ 成立，即 $\sum_{i=1}^{k} g_{2i-1} = g_{2k} - 2$

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} g_{2i-1} &= \sum_{i=1}^{k} g_{2i-1} + g_{2k+1} \\ &= g_{2k} - 2 + g_{2k+1} \\ &= g_{2k+1} - 2\end{aligned}$$

满足猜想形式，猜想成立。

T25 运用数学归纳法，当 $n=1$ 时，$g_1 = g_2 - 2$ 成立。
假设当 $n=k$ 时，$\sum_{i=1}^{n} g_{2i-1} = g_{2n} - 2$ 成立，即 $\sum_{i=1}^{k} g_{2i-1} = g_{2k} - 2$
当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} g_{2i-1} &= \sum_{i=1}^{k} g_{2i-1} + g_{2k+1} \\ &= g_{2k} - 2 + g_{2k+1} \\ &= g_{2k+1} - 2\end{aligned}$$

满足猜想形式，猜想成立。