基本结构

集合

（对象的一个**无序**的聚集）

相关定义

- **基数**：描述集合的大小，即集合中的元素个数。符号：|A|
  - $|\{1,2,3\}|=3$
  - $|\varnothing|=0$
  - $|\{\varnothing\}|=1$
- **幂集**：一个集合所有子集的集合。记作$P(A)$
  - *一个有n个元素的集合的幂集的基数为*2^n
- **元组**：有序集合
  - **有序2-元组**称为序偶。（只有两个元素的元组）
- **笛卡尔积**：两个集合A和B的笛卡尔积，是序偶(a, b)的集合，其中$a\in A,b\in B$，记作：$A\times B$
  - 若$A=\{a,b\},B=\{1,2,3\}$则：
    $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$
  - 笛卡尔积$A\times B$的子集R称为集合A到集合B的关系
- **真值集**：U中使$P(x)$为真的元素的集合。
- **差集**：$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}=A\cap\overline{B}$
- **对称差**：$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$
- **集合的特征函数**
  - $f(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$
  - **运算性质**
    - $f_{A\cap B}=f_Af_B$
    - $f_{A\cup B}=f_A+f_B-f_{AB}$
    - $f_{A\oplus B}=f_A+f_B-2f_{AB}$
- **交集和并集的拓展**
  - $\cup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$
  - $\cap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$

注意点

- 空集不同于包含空集的集合: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$
- 子集的证明：对于$\forall x \in A$，都有$x \in B$，则有$A \subseteq B$。
- 笛卡尔积不具有互换性：$A \times B \neq B \times A$

序列

（元素的**有序**列表）

1,2,3,5,8(有限)

1,3,9,27,81,. . .（无限：无穷序列）（可以没有规律）

相关定义

- **几何级数**：等比数列
- **算数级数**：等差数列
- **斐波拉契数列**：$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
    - $|f_{n-1}^2 - f_n f_{n-2}| = 1$
    - $|f_n f_{n-1} - f_{n+1} f_{n-2}| = 1$
    - 两个较大的斐波那契数列之比接近黄金分割比例。
- **字符串**：有限集合（字母表）中的有限字符序列
    - *空串*：记为λ 或 Λ,长度为0
    - *长度*：字符串中元素的个数
    - A^*：所有由A（字符集合）中元素生成的有效序列的集合。
        - A^*中的元素成为A的词或串
    - *链接* $\circ$：假设A是集合，$w_1 = s_1 s_2 \ldots s_n, w_2 = t_1 t_2 \ldots t_m$都是$A^*$中的元素，则$w_1$和$w_2$的连接为：$w_1 \circ w_2 = s_1 s_2 \ldots s_n t_1 t_2 \ldots t_m$。
- **正则表达式**：由A中的元素和符号:$(,), \vee, *, \wedge$按一定规则构造的字符串
    - *正则集合(正则子集)*：A的每个正则表达式联系着A^*的一个正则子集。
    - 求解法则：如果α, β分别对应A^*的子集M和N的正则表达式
        - $\alpha\beta = M \cdot N = \{s \circ t | s \in M, t \in N\}$，表示M中的串和N$中的串的所有连接的集合。
        - $\alpha \vee \beta = M \cup N$。
        - $(a)^* = M^*$

注意点

- 元组的本质是集合，外侧有花括号。序列外侧没有花括号。

- 序列里的项可以重复、可以无规律，但是是有顺序的。

数论

研究整数的性质

相关定义

- **整除**：对于任意两个整数a和b且$a \neq 0$，如果存在整数c使得b = ac,则a整除b，记作$(a \mid b)$。如：$3 \mid 12, 3 \mid -15$。称：b是a的一个*倍数*，a是b的一个*约数*或*因子*。
  - **整除的性质** 假设a,b,c是整数且$a \neq 0$，则：
    - 如果$a \mid b$且$a \mid c$。则对于$\forall x, y \in Z$，有$a \mid (xb + yc)$.
    - 若$a \mid b$，则$a \mid (bc)$.
    - 若$b \neq 0, a \mid b$且$b \mid c$，则$a \mid c$.
    - 若$b \neq 0, a \mid b$且$b \mid a$，则$a = \pm b$
- **同余**：设n是整数，a和b是整数，如果$n \mid (a - b)$，则称**a模n同余于b，或a与b模n同余**，记作$a \equiv b(mod\ n)$，n称为**模**。
  - **同余的性质** 若$a \equiv b(mod\ n), c \equiv d(mod\ n)$，则：
    - $a \pm c \equiv (b \pm d)(mod\ n)$
    - $ac \equiv (bd)(mod\ n)$
- **最大公因子（公约数）**：记作$GCD(a, b)$。
  - **最大公因子的性质**
    - *线性合成*：设$a, b \in \mathcal{Z}^+$，则：$(\exists s, t \in \mathcal{Z}^+)(GCD(a, b) = sa + tb)$。
    - *辗转相减*：设$a, b \in \mathcal{Z}^+, a < b$，则$GCD(a, b) = GCD(a, b - a)$
    - *辗转相除*：设$a, b \in \mathcal{Z}^+, a < b$，则$GCD(a, b) = GCD(a, a \bmod b)$ **欧几里得算法**
- **互质**：如果整数a和b的最大公因子为1，则称a与b互质。
- **最小公倍数**：记作$LCM(a, b)$。
- **裴蜀等式**：对于不全为0的整数a,b和d，方程$sa + tb = d$存在整数解s和t当且仅当$GCD(a, b) \mid d$。
  - 方程$sa + tb = d$称为裴蜀等式。
- **费马小定理**：
  - 假设p是素数，对于任意整数a，有：$a^p \equiv a(mod\ p)$
  - 假设p是素数，整数a和p互素，有：$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$
- **欧拉函数**：$\varphi(n)$是小于n的正整数中与n互素的数的数目。
  - 若p是素数，则$\varphi(p) = p - 1$
  - 若p 和 q是两个不同的素数，则$\varphi(p \times q) = (p - 1)(q - 1)$
  - 若n和a是互素的正整数，则有$a^{\varphi(n)} \equiv 1(mod\ n)$

注意点

- 余数始终为正。
- 定理：设$a \in \mathcal{Z}^+$，则：
  - $GCD(0, a) = a$ (0是所有数的倍数)
  - $GCD(1, a) = 1$
  - $LCM(1, a) = a$
- 设$a, b \in \mathcal{Z}^+$, 则$GCD(a, b) \cdot LCM(a, b) = ab$

布尔矩阵

所有元素为1 或 0 的矩阵。

相关运算

- **取反（补）**：$A = [a_{ij}]_{m\times n}$，则$\overline{A} = [1 - a_{ij}]_{m\times n}$
- **并**：$A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$，则:$A \vee B = [a_{ij} \vee b_{ij}]_{m\times n}$
- **交**：$A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$，则:$A \wedge B = [a_{ij} \wedge b_{ij}]_{m\times n}$
- **布尔积**：$A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{n\times r}$，则:$A \oplus B = C$,其中

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & 若存在k, 1 \leqslant k \leqslant n, 使得a_{ik} = 1且b_{kj} = 1 \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

- **相关运算**
  - $(A \vee B)^T = A^T \vee B^T$
  - $(A \wedge B)^T = A^T \wedge B^T$
  - $(A \oplus B)^T = B^T \oplus A^T$