

离散数学作业 _2

李云浩 241880324

2025 年 3 月 23 日

1 pp.3-5

1.1 T5

(a) F (b) F (c) F (d) T (e) F (f) F

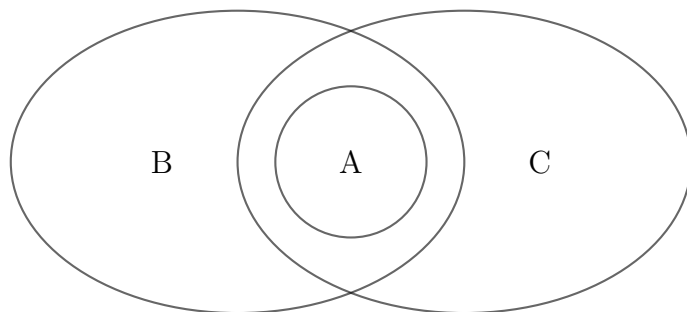
1.2 T10

(a)(e)

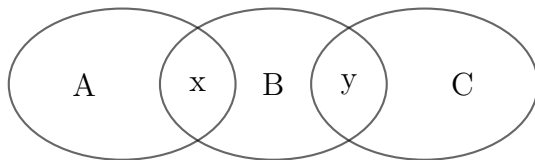
1.3 T16

(a) T (b) T (c) T (d) T (e) T

1.4 T30



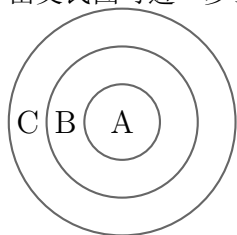
1.5 T31



1.6 T34

由 $A \subseteq B$ ，可知对于 $\forall x \in A$ 都有 $x \in B$ 。同理，由 $B \subseteq C$ ，可知对于 $\forall y \in B$ 都有 $y \in C$ 。因此可推得： $\forall x \in A$ 都有 $x \in C$ ，即 $A \subseteq C$ 。证毕。

由文氏图可进一步验证该结果：



1.7 T36

因为集合 B 是由集合 A 的所有元素以及一个额外的元素组成的，那么 A 的所有子集 S_1, S_2, \dots, S_n 同时也是 B 的子集，有 n 个。同时，对于 A 的每个子集，额外加上那个 B 的特有元素，形成的新集合也是 B 的子集，并且与之前的子集不会重复，有 n 个。故 B 的子集个数为： $n + n = 2n$

2 pp.10-14

2.1 T1

- (a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ (b) $B \cup C = \{a, c, d, e, f, g\}$ (c) $A \cap C = \{a, c\}$
 (d) $B \cap D = \{f\}$ (e) $(A \cup B) - C = \{b, d, e, g\}$ (f) $A - B = \{a, b, c\}$
 (g) $\overline{A} = \{d, e, f, h, k\}$ (h) $A \oplus B = \{a, b, c, d, e, f\}$ (i) $A \oplus C = \{b, g, f\}$
 (j) $(A \cap B) - C = \{g\}$

2.2 T6

$$\begin{aligned} (a) A - B &= \{1, 6, 8\} & (b) B - A &= \{5, 9\} & (c) C - D &= \{1, 2, 3, 4\} \\ (d) \overline{C} &= \{5, 6, 7, 8, 9\} & (e) \overline{A} &= \{3, 5, 7, 9\} & (f) A \oplus B &= \{1, 5, 6, 8, 9\} \\ (g) C \oplus D &= \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} & (h) B \oplus C &= \{1, 3, 5, 9\} \end{aligned}$$

2.3 T10

$$\begin{aligned} (a) \overline{A} \cap \overline{B} &= \{b, d, h\} & (b) \overline{B} \cup \overline{C} &= U & (c) \overline{A \cup A} &= \{b, d, e, h\} \\ (d) \overline{C \cap C} &= \{a, c, d, e, f, g\} & (e) A \oplus B &= \{c, e, f, g\} & (f) B \oplus C &= \{a, b, e, h\} \end{aligned}$$

2.4 T23

定理三:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

因为: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 4, 7, 10, 12\}$, 则
 $|A| = 6$, $|B| = 5$, $|C| = 6$, $|A \cup B \cup C| = 11$, $|A \cap B| = 2$, $|B \cap C| = 3$, $|A \cap C| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 2$

所以: $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 6 + 5 + 6 - 2 - 3 - 3 + 2 = 11 = |A \cup B \cup C|$, 证毕。

2.5 T24

因为: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 则 $|A| = 7$, $|B| = 3$, $|C| = 7$, $|A \cap B| = 3$, $|B \cap C| = 2$, $|A \cap C| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 2$, $|A \cup B \cup C| = 11$

所以: $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 7 + 3 + 7 - 3 - 2 - 3 + 2 = 11 = |A \cup B \cup C|$, 证毕。

2.6 T34

(a) 可能为真, 可能为假 (b) 可能为真, 可能为假 (c) 可能为真, 可能为假
 (d) 可能为真, 可能为假 (e) 可能为真, 可能为假 (f) 可能为真, 可能为假

2.7 T36

(a) 真 (b) 可能为真, 可能为假 (c) 可能为真, 可能为假 (d) 假
(e) 真 (f) 真

2.8 T39

假设 $x \in A \cap B$, 那么 x 属于 A , 所以 $A \cap B \subseteq A$ 。

3 pp.19-21

3.1 T19

公式: $a_n = 3n - 2$

观察序列可知, 每两项之间差值为二, 且第一项为 1。即: $a_n = a_{n-1} + 3, a_1 = 1$ 。由递推关系可证:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \\ &= a_{n-2} + 2 \times 3 \\ &\vdots \\ &= a_1 + (n-1) \times 3 \\ &= 3n - 2 \end{aligned}$$

3.2 T20

公式: $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$

观察序列可知, 后一项为前一项乘 $\frac{1}{2}$, 且第一项为 1。即: $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}, a_1 =$

1. 由递推关系可证:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_{n-2} \\
 &\vdots \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_1 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

3.3 T22

$$\text{公式: } a_n = \frac{15+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{15-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3.4 T25

(a) 属于 (b) 不属于 (c) 属于 (d) 属于 (e) 不属于 (f) 不属于

3.5 T29

$$\begin{aligned}
 (A \oplus B) \oplus C &= (f_A + f_B - 2f_A f_B) \oplus C \\
 &= f_A + f_B - 2f_A f_B + f_C - 2(f_A + f_B - 2f_A f_B) f_C \\
 &= f_A + f_B + f_C - 2f_A f_B - 2f_A f_C - 2f_B f_C + 4f_A f_B f_C \\
 &= f_B + f_C - 2f_B f_C + f_A - 2(f_B + f_C - 2f_B f_C) f_A \\
 &= (f_B + f_C - 2f_B f_C) \oplus A \\
 &= (B \oplus C) \oplus A \\
 &= A \oplus (B \oplus C)
 \end{aligned}$$

证毕。

3.6 T32

- (a) $(a^*b \vee c) = \{ab, ac, aab, aac, \dots\}$, 属于
 (b) $(ab)^*c = \{abc, ababc, \dots\}$, 不属于
 (c) $(a^* \vee b)c^* = \{ac, bc, \dots, a \dots ac \dots c, bc \dots c\}$, 属于

3.7 T34

- (a) $(p \vee q)rq^* = \{prq, qrq, prqq, qrqq, \dots\}$
 (b) $p(qq)^*r = \{pqqr, pqqqqr, \dots, pqq \dots qqr\}$

3.8 T37

因为 8 是一个 S^- 数, 由 (3) 可知, 因为 1 是 8 的倍数, 因此 1 也是一个 S^- 数。因此 1 的所有倍数都是 S^- 数, 所以 S^- 数集合即整数集 \mathbf{Z} 。

4 pp.31-33

4.1 T24

- 因为 $a \mid b$, 所以对于 $\forall m \in \mathbf{Z}$ 有: $a \mid mb$ 。
- 同理: 因为 $a \mid c$, 所以对于 $\forall n \in \mathbf{Z}$ 有: $a \mid nc$
- 由于 $a \mid mb, a \mid nc$, 因此 $a \mid mb + nc$ 。

证毕。

4.2 T25

p 有且只有 p 和 1 两个因数并且 $p \nmid a$, 则 p 不是 a 的因数, 所以 $GCD(a, p) = 1$

4.3 T26

4.4 T27

4.5 T28

4.6 T29

5 pp.41-44

5.1 T6

(a)

$$\begin{aligned} A(BD) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 31 & 27 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB)D &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 31 & 27 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} A(C + E) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 26 & 12 & 18 \\ 19 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC + AE &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 1 & 17 \\ 2 & -8 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 17 & 10 & -11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 26 & 12 & 18 \\ 19 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} FD + AB &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25 & 12 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2 T9

(a)

$$\begin{aligned}
 A^T(D + F) &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 22 & 32 \\ 3 & 10 \\ -31 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 (BC)^T &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^T \\
 &= \text{无法计算}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C^T B^T &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \text{无法计算}
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(B^T + A)C &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25 & 5 & 26 \\ 20 & -3 & 32 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(D^T + E)F &= \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \text{无法计算}\end{aligned}$$

5.3 T16

(a) 假设 A 的第 i 行全为 0，那么在计算 AB 时， AB 的第 i 行元素是 A 的第 i 行元素与 B 的各列元素相乘所得，由于 A 的第 i 行全为 0，故 AB 的第 i 行元素也全为 0。

(b) 如果 B 有一列全为 0，即 B^T 有一行全为零，由 (a) 可知， $B^T A^T$ 也会有一行元素全为 0。因为 $B^T A^T = (AB)^T$ ，因此 $(AB)^T$ 有一行全为零，即 AB 有一列全为 0。

5.4 T17

对于矩阵 $B^T A^T$ ，其第 j 行的元素为 B^T 的第 j 行元素与 A^T 的各列元素相乘所得，即 $(B^T)_j A^T$ ，这里的 $(B^T)_j$ 是 B^T 的第 j 行。因为 $B^T A^T = (AB)^T$ ，所以即有 AB 的第 j 列等于 AB_j ，这里的 B_j 是 B 的第 j 列。

5.5 T23

(a) 证明： $(A^T)^T = A$

因为 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，其元素为 a_{ij} 。那么 A^T 是一个 $n \times m$ 矩阵，

其元素为 a_{ji} 。再次转置后: $(A^T)^T$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 其元素为 a_{ij} , 故 $(A^T)^T = A$, 证毕。

(b) 证明: $(A+B)^T = A^T + B^T$

设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 其元素分别为 a_{ij}, b_{ij} , 因此 $A+B$ 的元素为 $a_{ij}+b_{ij}$ 。对 $A+B$ 进行转置, $(A+B)^T$ 中的元素为 $a_{ji}+b_{ji}$ 。同时, A^T+B^T 的元素亦为 $a_{ji}+b_{ji}$ 。因此 $(A+B)^T = A^T + B^T$, 证毕。

(c) 证明: $(AB)^T = B^T A^T$

设 $A = (a_{ij})_{m \times l}, B = (b_{ij})_{l \times n}$, 则 $[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jl}b_{li}, (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, 另一方面, $[B^T A^T]_{ij}$ 是 B^T 的第 i 行与 A^T 的第 j 列对应元素的乘积之和, 亦即 B 的第 i 列与 A 的第 j 行对应元素的乘积之和。于是 $(B^T A^T)_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{li}a_{jl} = [(AB)^T]_{ij}, (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$. 因此 $(AB)^T = B^T A^T$, 证毕。

5.6 T29

因为

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

所以 AB 可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。

5.7 T41

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}, C = (c_{ij})_{m \times n}$ 。因此

$$\begin{aligned} A \vee (B \vee C) &= (a_{ij})_{m \times n} \vee [(b_{ij})_{m \times n} \vee (c_{ij})_{m \times n}] \\ &= [a_{ij} \vee (b_{ij} \vee c_{ij})]_{m \times n} \\ &= [a_{ij} \vee b_{ij} \vee c_{ij}]_{m \times n} \\ &= [(a_{ij} \vee b_{ij}) \vee c_{ij}]_{m \times n} \\ &= [(a_{ij})_{m \times n} \vee (b_{ij})_{m \times n}] \vee (c_{ij})_{m \times n} \\ &= (A \vee B) \vee C \end{aligned}$$

证毕。

6 pp.47-49

6.1 T24

6.2 T25

6.3 T26

6.4 T27

6.5 T28

6.6 T29

6.7 T35