

关系

笛卡尔积

两个集合A和B的笛卡尔积，是序偶(a, b)的集合，其中

$$a \in A, b \in B$$

，记作： $A \times B$

- 若 $A = a, b, B = 1, 2, 3$ 则： $A \times B = (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)$
- 笛卡尔积 $A \times B$ 的子集 R 称为集合A到集合B的关系

笛卡尔积与关系

给定任意集合A和B，若 $R \subseteq A \times B$ ，则称R为从A到B的**二元关系**。（当 $A = B$ 时，称R为A上的二元关系）**即：关系是笛卡尔积的子集**。若 $(a, b) \in R$ ，则：

- aRb 或 $R(a, b)$ 或 $(a, b) \in R$

关系的说明

- aRb ：表示 $(a, b) \in R$ ，即a对b有关系R
- $a \cancel{R} b$ ：表示 $(a, b) \notin R$ ，即a对b无关系R

计算

若 $|A| = m, |B| = n$ ，则 $|A \times B| = mn$ ，则A到B的不同的二元关系共有 2^{mn}

特殊关系

给定任意集合A和B，

- 若 $R = \emptyset$ ，则称R为A到B上的**空关系**
- 若 $R = A \times B$ ，则称R为A到B上的**全域关系**
- 若 $R = (a, a) \mid a \in A$ ，则称R为A上的**恒等关系**
- 令 $A \subseteq Z, R = (a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \mid b$ ，称R为A上的**整除关系**，记作 D_A

关系的表示方法

- 关系矩阵**： $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ 到 $Y = y_1, y_2, \dots, y_m$ 的任意关系R的关系矩阵为 $M_R = [m_{ij}]_{n \times m}$ ，其中： $m_{ij} =$

$$\begin{cases} 1, & (x, y) \in R \\ 0, & (x, y) \notin R \end{cases}$$

其中：

- 空关系的关系矩阵为全0矩阵。
- 全域关系的关系矩阵为全1矩阵。
- 恒等关系的关系举证为单位矩阵。
- 关系图**（有向图）若 $(a_i, b_j) \in R$ ，则从 a_i 到 b_j 画一条有向边。

关系的性质

1. **自反性**： $\forall x(x \in A \rightarrow xRx)$ 或 $\forall x(x \in A \rightarrow (x, x) \in R)$

- 关系矩阵的主对角线全为1
- 关系图的每个顶点都有自回环
- 充要条件**： $I_A \subseteq R$ ，其中 I_A 为A上的恒等关系

2. **反自反性**: $\forall x(x \in A \rightarrow (x, x) \notin R)$

- 关系矩阵的主对角线全为0
- 关系图的每个顶点均没有自回环
- 充要条件**: $I_A \cap R = \emptyset$, 其中 I_A 为 A 上的恒等关系

3. **对称性**: $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$

- 关系矩阵是对称矩阵
- 关系图中任两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的边。

4. **反对称性**: $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y)$

- 关系矩阵中关于主对角线对称的任意两个元素至多有一个1
- 关系图中任两个顶点间至多有一个方向的边

5. **传递性**: $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$

- 关系矩阵 $[r_{ij}]_{n \times n}$ 中, 对 $\forall i \forall j \forall k$ 有, 若 $r_{ik} = 1$ 且 $r_{kj} = 1$, 则 $r_{ij} = 1$ 。
- 关系图中, 任意一条长度为2的路径都有从其起始顶点到终止顶点的边。

注意点

- 空集上的关系只有空关系一个, 该空关系既是自反的也是反自反的。
- 对称性和反对称性可同时满足

关系的运算

1. **复合 (合成) 运算**: $R \circ S = (a, c) \mid \exists b(b \in B \wedge aRb \wedge bSc)$

- $\emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset$
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
- $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
- $R \circ I_A = I_A \circ R = R$
- 矩阵表示: 由 $M_R = (a_{ij})_{m \times n}$, $M_T = (b_{ij})_{n \times p}$, 则: $M_{R \circ T} = M_R \circ M_T$, 其中 $M_{R \circ T} = (c_{ij})_{m \times p}$, $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (a_{ik} \wedge b_{kj})$ (矩阵乘法)

2. **幂运算**: $R^0 = I_A, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$

- 一般地, 对于 A 上的关系 R , 有: $R^{2k+1} = R^1, R^{2k} = R^2$
- $R^m \circ R^n = R^{m+n}, (R^m)^n = R^{mn}$
- 若集合 A 是包含 n 个元素的有限集合, R 是 A 上的关系, 则: $\exists i, j \in N, R^i = R^j$

3. **逆运算**: $R^{-1} = (y, x) \mid (x, y) \in R$

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
- $(R^{-1})^{-1} = R, (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}, (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}, (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}, \overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}$

闭包运算

添加一些序列来改造 R , 得到新的关系 R_1 , 使得 R_1 具有一些 R 不具有的性质。需要满足的条件: 1. 包含, 2. 满足性质, 3. 最小

- 自反闭包**: 设 $R \subseteq A \times A$, 则 $r(R) = R \cup I_A$
- 对称闭包**: 设 $R \subseteq A \times A$, 则 $s(R) = R \cup R^{-1}$
- 传递闭包**: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $|A| = n \geq 1$, 则 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$

Warshall算法

用于计算传递闭包: $W_k[i, j] = W_{k-1}[i, j] \vee (W_{k-1}[i, k] \wedge W_{k-1}[k, j])$ 。口诀: 对 $k-1$ 的矩阵, 取 k 行为1的列, 取 k 列为1的行, 将行列交点的0变为1。

闭包的性质

- 设 R 是集合 A 上的二元关系：
 - R 是自反的 $\leftrightarrow I_A \subseteq R$
 - R 是反自反的 $\leftrightarrow R \cap I_A = \emptyset$
 - R 是对称的 $\leftrightarrow R = R^{-1}$
 - R 是反对称的 $\leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
 - R 是传递的 $\leftrightarrow R^2 \subseteq R$
- 若 $R \subseteq A \times A$, 则
 - $r(s(R)) = s(r(R))$
 - $r(t(R)) = t(r(R))$
 - $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$

关系与有向图

相关概念

- **出度**：发出多少条边。
- **入度**：多少条边进来。
- **路径长度**：一条边或多条边相连的序列。其中长度指单位边的个数。
- **环或回路**：在**同一顶点**开始和结束的长度大于等于1的路径。

幂运算与路径长度

- R 的 n 次幂 R^n 表示在关系 R 中存在从 x 到 y 的长度为 n 的一条路径。
- R^∞ 意指 R 中存在从 x 到 y 的某条道路，也称为 R 的**联通关系**。

等价关系

若 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的**等价关系**

- 若 $(a, b) \in R$, 称 a 等价 b , 记为 $a \sim b$ 。
- 由于 R 具有对称性，因此等价具有交换性。
- 证明等价性，需要把自反性、对称性和传递性都进行证明。

等价类

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，对 $\forall a \in A$, 令 $[a]_R = \{x \mid x \in A \wedge aRx\}$, 称 $[a]_R$ 为 a 关于 R 的**等价类**

- a 的等价类是集合 A 中**所有与 a 等价的元素构成的集合**
- 性质：
 - $[a]_R \neq \emptyset$
 - 若 $(a, b) \in R$, 则： $[a]_R = [b]_R$, 即等价的元素的等价类相同。
 - 若 $(a, b) \notin R$, 则： $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$, 即不等价的元素的等价类不相交。
 - $\bigcup_{i=1}^n [a_i]_R = A$, 即所有元素的等价类的并为 A

商集

以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**，记作 A/R

- $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

划分

设 A 为非空集合，若 A 的子集簇 $\pi (\pi \subseteq P(A))$ 满足：

- $\emptyset \notin \pi$ (划分块不能为空)
- $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$ (不同划分块不相交)
- 所有的划分块的并集为 A

等价、商集与划分的关系

- 若 R 为 A 上的一个等价关系，则对应 R 的商集 A/R 为 A 的一个划分。
- 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 A 的任一划分，将每一个划分块看作一个等价类，则有 $R = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times A_i)$