离散数学作业 _4.2

李云浩 241880324

2025 年 4 月 14 日

1 4.6

1.1 T2

```
EDGE(i ,j){
    int ptr = VERT[i];
    while(NEXT[ptr] != 0){
        if(HEAD[ptr] == j){
            return T;
        }
        ptr = NEXT[ptr];
    }
    if(NEXT[ptr] == 0 && HEAD[ptr] == j) return T;
    else return F;
}
```

1.2 T3

因为 R 一共有 P 条边，N 个顶点。因此平均每个顶点的出度为 $\frac{P}{N}$。对这 $\frac{P}{N}$ 个出度进行排序，如果要找的边为第 n 条，则需要 n 步，如果找的边不存在，那么则需要 $\frac{P}{N}$ 步。因此平均步数为: $\frac{1+2+\cdots+\frac{P}{N}+(N-\frac{P}{N})(\frac{P}{N})}{N} = \frac{(2N-\frac{P}{N}+1)(\frac{P}{N})}{2N}$

1.3 T4

```
LOOK(NUM, NEXT, START, N, K){
    int ptr = START;
```

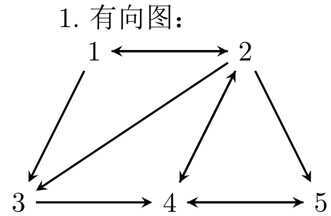
```
        while(NEXT[ptr] != 0){
            if(NUM[ptr] == K) return ptr;
            else ptr == NEXT[ptr];
        }
        if(NUM[ptr] != K) print("NOT FOUND");
        else return ptr;
    }
```

1.4 T6

$VERT$	$TAIL$	$HEAD$	$NEXT$
2	4	1	9
4	1	1	3
7	1	2	5
1	2	1	6
	1	3	0
	2	4	8
	3	4	10
	2	3	0
	4	3	0
	3	3	0

1.5 T8

1. 有向图：



2. 矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.6 T12

$$VERT = [1, 4, 7, 11]$$

$$TAIL = [1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4]$$

$$HEAD = [1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 4]$$

$$NEXT = [2, 3, 0, 5, 6, 0, 8, 9, 10, 0, 12, 13, 0]$$

2 4.7

2.1 T7

(a) $\overline{R} = \{(1, 4), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
(b) $R \cap S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1)\}$
(c) $R \cup S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$
(d) $S^{-1} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

2.2 T8

(a) $\overline{R} = \{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, e), (e, c), (e, d), (e, e)\}$
(b) $R \cap S = \{(a, a), (a, d), (c, b), (e, a), (e, b)\}$
(c) $R \cup S = \{(a, a), (a, b), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, e), (c, b), (c, d), (d, c), (d, d), (e, a), (e, b), (e, d), (e, e)\}$
(d) $S^{-1} = \{(a, a), (a, b), (a, e), (b, c), (b, e), (d, a), (d, c), (d, e), (e, a), (e, e)\}$

2.3 T12

(a) $M_{R\cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $M_{R\cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $M_{\overline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.4 T14

$R \cap S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
划分：$\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$。

2.5 T19

因为闭包运算是往集合里面添加元素的过程，相当于让关系矩阵中的部分的 0 变为 1，但是不能把 1 变为 0。因此例如一个等价关系，往里面不断将 0 化为 1，都不能使其具有非自反、非对称、反对称关系。因此闭包的概念不适用于非自反、非对称、反对称之中。

2.6 T20

(a) $R \circ S = \{(a,c)|a \leq 6c\}$。因为 $2 \leq 6 \times 3 = 18$，因此 $(2,3) \in R \circ S$。
(b) 因为 $8 \geq 6 \times 1$，因此 $(8,1) \notin R \circ S$

2.7 T23

(a) 自反性：假设 R, S 是 A 上的关系，且都具有自反性。$\forall x \in A \to (x,x) \in R \wedge (x,x) \in S$. 所以对于 $R \circ S$ 而言，有 $\forall x \in A, (x,x) \circ (x,x) = (x,x)$。因此 $R \circ S$ 仍为自反的。
反自反性：假设 $R = \{(1,2)\}, S = \{(2,1)\}$, 则 $R \circ S = \{(1,1)\}$。反自反不能保持对称性：假设 $R = \{(1,2),(2,1)\}, S = \{(2,3),(3,2)\}$，则 $R \circ S = \{(1,3)\}$，对称性不能保持。
反对称性：假设 $R = \{(1,2),(2,2)\}, S = \{(2,2),(1,1),(2,1)\}$，则 $R \circ S =$

$\{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1)\}$, 反对称性不能保留传递性:假设 $R=\{(1,2),(2,4)\}, S=\{(2,2),(4,3)\}$，则 $R\circ S=\{(1,2),(2,3)\}$，对称性不能保持。
(b) 自反性：根据 (a) 中可知，自反性质能够保留，因此 $S\circ R$ 是 A 上的自反关系。
对称性:假设 $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}, S=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$。
所以 $S\circ R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2)\}$，不满足对称性。因此 $S\circ R$ 不是 A 上的等价关系

2.8 T24

(a) $M_{R\circ R}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$ (b) $M_{S\circ R}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$

(c) $M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$ (d) $M_{S\circ S}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$

2.9 T26

因为 $R\cap R^{-1}=S\cap S^{-1}=\varnothing$，所以

$$\begin{aligned}(R\cap S)\cap(R\cap S)^{-1}&=(R\cap S)\cap(R^{-1}\cap S^{-1})\\&=(R\cap R^{-1})\cap(S\cap S^{-1})\\&=\varnothing\end{aligned}$$

因此 $R\cap S$ 是非对称的。

$$\begin{aligned}(R\cup S)\cap(R\cup S)^{-1}&=(R\cup S)\cap(R^{-1}\cup S^{-1})\\&=((R\cup S)\cap R^{-1})\cup((R\cup S)\cap S^{-1})\\&=R\cap R^{-1}\cup S\cap R^{-1}\cup R\cap S^{-1}\cup S\cap S^{-1}\\&=S\cap R^{-1}\cup R\cap S^{-1}\\&=S\cap R^{-1}\cup(S\cap R^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

因此，如果 $S\cap R^{-1}=\varnothing$，$R\cup S$ 是非对称的，反之则不是。

2.10 T27

假设 $R=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}, S=\{(1,1),(2,2),(2,1)\}$。因此 $R\cup S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ 是对称的，不是反对称的。
对于 $R\cap S$，如果 $\forall(a,b)((a,b)\in(R\cap S)\wedge(b,a)\in(R\cap S))$，故 $(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R$。因为 R 是反对称的，因此 $a=b$，故 $R\cap S$ 是反对称的。

2.11 T28

对 $\forall a\in A, c\in C$, 有 $a(S\cup T)\circ Rc$

$$\begin{aligned}
a(S\cup T)\circ Rc &\Leftrightarrow (\exists b\in B)(a(S\cup T)b\wedge bRc)\\
&\Leftrightarrow (\exists b\in B)((aSb\vee aTb)\wedge bRc)\\
&\Leftrightarrow (\exists b\in B)(aSb\wedge bRc\vee aTb\wedge bRc)\\
&\Leftrightarrow (\exists b\in B)(aS\circ Rc\vee aT\circ Rc)\\
&\Leftrightarrow (a(S\circ R)\cup(T\circ R)c)
\end{aligned}$$

因此 $(S\cup T)\circ R=(S\circ R)\cup(T\circ R)$

2.12 T30

$\forall a\in A, c\in C$，有 $aT\circ Rc$.

$$\begin{aligned}
aT\circ Rc &\Rightarrow (\exists b\in B)(aTb\wedge bRc)\\
&\Rightarrow (\exists b\in B)(aTb\wedge bSc)\\
&\Rightarrow aT\circ Sb
\end{aligned}$$

因此：$T\circ R\subseteq T\circ S$

2.13 T31

(a) 因为 $\forall a\in A, b\in A, a(R\cap S)b\Leftrightarrow aRb\wedge aSb$。因此 $(a,b)\in(R\cap S)\Leftrightarrow(a,b)\in R\wedge(a,b)\in S$，故 $M_{R\cap S}=M_R\wedge M_S$
(b) 因为 $\forall a\in A\ b\in A, a(R\cup S)b\Leftrightarrow aRb\vee aSb$。因此 $(a,b)\in(R\cup S)\Leftrightarrow$

$(a,b)\in R\vee(a,b)\in S$，故 $M_{R\cup S}=M_R\vee M_S$
(c) 因为 $\forall a\in A,b\in A,(a,b)\in R^{-1}\Leftrightarrow(b,a)\in R$, 故 $M_{R^{-1}}=(M_R)^T$
(d) 因为 $\forall a\in A,b\in A,(a,b)\in\overline{R}\Leftrightarrow(a,b)\notin R$, 故 $M_{\overline{R}}=\overline{M_R}$

2.14 T36

$\forall(a,b)\in R\wedge(a,b)\notin S$ 因为 R,S 都是对称的，因此 $(b,a)\in R\wedge(b,a)\notin S$。故 $\forall(a,b)\in R\wedge(a,b)\notin S\Rightarrow(b,a)\in R\wedge(b,a)\notin S$。因此 $\forall(a,b)\in(R-S)\Rightarrow(b,a)\in(R-S)$，即 $R-S$ 也是一个对称关系。

2.15 T37

(a) 充分性：R 是对称的 $\Rightarrow R=R^{-1}$
$\forall(b,a)\in R\Rightarrow(a,b)\in R^{-1}$，又因为 R 是对称的，因此 $\forall(b,a)\in R\Rightarrow(a,b)\in R$。因此 $R\subseteq R^{-1}$。同理 $R^{-1}\subseteq R$，因此 $R=R^{-1}$。
必要性：$R=R^{-1}\Rightarrow R$ 是对称的
因为 $R=R^{-1}$,$\forall(a,b)\in R\Rightarrow(a,b)\in R^{-1}$，又因为 $\forall(a,b)\in R^{-1}\Rightarrow(b,a)\in R$。因此 $\forall(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R$。故 R 是对称的。
(b) 充分性：R 是反对称的 $\Rightarrow R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$
$\forall a\in A,b\in B$,
当 $a\neq b$ 时，$\forall(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\notin R\Rightarrow(a,b)\notin R^{-1}$。因此 $R\cap R^{-1}=\varnothing$。
当 $a=b$ 时，$\forall(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R\Rightarrow(a,b)\in R^{-1}$，因此 $R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$。
综上所述：R 是反对称的 $\Rightarrow R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$
必要性：$R\cap R^{-1}\subseteq\Delta\Rightarrow R$ 是反对称的
$\forall a\in A,b\in B$,
当 $a\neq b$ 时，$\forall(a,b)\in R\Rightarrow(a,b)\notin R^{-1}\Rightarrow(b,a)\notin R$。因此 $\forall a\in A,\nexists b(b\in A\wedge b\neq a)\Rightarrow(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R$
当 $a=b$ 时，$\forall(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R\Rightarrow(a,b)\in R^{-1}$。
综上所述：$R\cap R^{-1}\subseteq\Delta\Rightarrow R$ 是反对称的
(c) 充分性：R 是非对称的 $\Rightarrow R\cap R^{-1}=\varnothing$
因为 R 是非对称的，因此 $\forall(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\notin R\Rightarrow(a,b)\notin R^{-1}$，故 $R\cap R^{-1}=\varnothing$
必要性：$R\cap R^{-1}=\varnothing\Rightarrow R$ 是非对称的
因为 $R\cap R^{-1}=\varnothing$, 因此 $\forall(a,b)\in R\Rightarrow(a,b)\notin R^{-1}\Rightarrow(b,a)\notin R$，因此 R

是非对称的。

3 4.8

3.1 T8

充分性：$aS^\infty b \Rightarrow R$ 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。
因为 $S = R^2$，因为 $aS^\infty b \Rightarrow \exists i \geq 1 s.t. aS^i b$。又因为 $S^i = R^{2i}$，所以存在一条从 a 到 b 长度为 $2i$ 的路径。即 $aS^\infty b \Rightarrow R$ 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。
必要性：R 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边 $\Rightarrow aS^\infty b$
因为 R 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。不妨设 $aR^{2k}b$，因为 $S = R^2$，故 $aS^k b$. 又因为 $S^k \subseteq S^\infty$，即 $aS^\infty b$。
综上所述：$aS^\infty b$ 当且仅当 R 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。

3.2 T10

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R.$$

因此 $M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3.3 T12

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$M_{R^4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 因此：$M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3.4 T14

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $M_s(R)$ 的传递闭包关系矩阵:$M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{s(R)^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

故：$M_{t(s(R))} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

求 $M_{t(R)}$ 的对称闭包关系矩阵: $M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad M_{R^3} = M_{R^2}$. 因此 $M_{s(t(R))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 因此:R_t 的对称闭包和 R_s 的传递闭包不具有相同的关系

3.5 T18

$A/R = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}, A/S = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$.
$A/(R\cup S)^{\infty} = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$

3.6 T20

因为 19 题的前提条件是两个关系本身是等价关系，不具有普遍性。而 Warshall 算法不需要这个前提条件。

3.7 T23

使用了直接证明法。先假设 $\forall S,(R\subseteq S)$，后续利用 S 的传递性，说明 $S^{\infty}\subseteq S$，又因为满足公式 $S^{\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty}S^{n}\subseteq S$，结合 $R\subseteq S$, 推出 $R^{\infty}\subseteq S^{\infty}\subseteq S$。从而证明是传递关系中最小的。

3.8 T24

使用了构造性证明法。考虑了路径中可能成环，把成环的部分删去，留下顶点各异的部分。因为顶点数不可能超过 n，因此路径的长度也至多是 n。由此证明计算 R^{∞} 并不需要计算比 n 次幂大的 R 的幂。

3.9 T25

设包含 R 的最小等价关系为 S.
S 满足自反性：$\forall x\in A,(x,x)\in S$。
S 满足对称性且 $R\subseteq s$：$\forall a\in A,b\in A\wedge|a|\leq|b|\Rightarrow(a,b)\in R\Rightarrow(a,b)\in S$，因为 S 满足对称性，所以 $|a|\geq|b|\Rightarrow(a,b)\in S\Rightarrow a\in A,b\in Aa\neq b\Rightarrow(a,b)\in S$。
综上所述，$\forall a\in A,b\in A$. 当 $a=b,(a,b)\in S$。当 $a\neq b,(a,b)\in S$。因此，$\forall a\in A,b\in A\Rightarrow(a,b)\in S$ 即 $S=A\times A=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$。