

布尔代数

前置知识

格的同构

设 $(L, \vee, \wedge), (L', \vee', \wedge')$ 是两个格, 如果存在一个双射函数 $f: L \rightarrow L'$ 。满足:

- 保并运算: $f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$
- 保交运算: $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$

则 L 和 L' 是同构的格, 记为 $L \cong L'$ 。

幂集所组成的格

对于有限集合 S , $P(S)$ 是一个包含 $2^{|S|}$ 个元素的有限集合。其上的**包含关系**是一个偏序关系。形成 $(P(S), \subseteq)$ 这样的格。

- 对于两个具有相同元素个数的集合 S_1 和 S_2 , 那么 $(P(S_1), \subseteq)$ 和 $(P(S_2), \subseteq)$ 是同构的。

布尔代数

格 B_n

定义与性质: B_n 中有 2^n 个元素, 每一个元素由一个长度为 n 的01序列标记。满足**分配律**并且有**补元**。对于 $B_1, (0, 1, \wedge, \vee, 1, 0, ')$ 可简写为 B 。则 B_n 可以表示为 n 个 B 的积偏序。

布尔代数

一个与 B_n 同构的有限格称为**布尔代数**。(分配的并且有补元的格)

- 满足**结合律、交换律和分配律**
- 包含最大元1和最小元0
- 每个元素都存在补元

例如: D_6 是一个包含6的所有正整数因子的集合。

- D_n 是布尔代数, 当且仅当 n 质因数分解后, 不存在两个相同的因子。