函数

是非空集A到B的关系，也可以称作**映射或变换** 记为$f:A\to B$ **基本概念**

- A为函数的定义域，记为$domf=A$
- $f(A)$为函数f的值域，记为$ranf=f(x)|\forall x\in A$
- B为函数f的陪域

特点

- 定义域中的每一个元素都必须是f的有序对(a,b)的第一分量。
- $\forall x\in A,f(x)$的值唯一。

函数的个数：B^A 表示从A到B的函数的集合。

- 若有$|A|=m,|B|=n$，那么$|B^A|=n^m$

函数相等：拥有相同的定义域、陪域和有序对集合。

常见函数：

- **常函数**：$\text{\exist}c\in B,s.t.\forall x\in A,f(x)=c$ 。
- **恒等函数**：$\forall x\in A,f(x)=x$。
- **自然映射**：设R是A上的等价关系，令$g:A\to A/R$,对$\forall x\in A,g(x)=[x]$
- **特征函数**：对于全集U的一个子集A，$f_A:U\to 0,1$，且$f_A(u_i)=\{1,u_i\in A\ 0,u_i\notin A$
- **偏函数**：$A'\subseteq A,f'_A:A'\to B$
- **弱取整函数**（地板函数）：$\lfloor x\rfloor$
- **强取整函数**（天棚函数）：$\lceil x\rceil$

函数的性质

1. **满射**：$ran\ f=B\Rightarrow\forall b(b\in B\to\exists a(a\in A\land f(a)=b))$
2. **单射**：$\forall y\in ran\ f$，存在唯一的$\forall x\in A,s.t.f(x)=y$ 。或：$\forall a\forall b(a\neq b\to f(a)\neq f(b))$ 或 $\forall a\forall b(f(a)=f(b)\to a=b)$
3. **双射**：同时是满射和单射。(B中元素的每个入度都为1)

函数的运算

复合运算

设$f:A\to B,g:B\to C$，则$g\circ f=(x,z)|x\in A\land z\in C\land(\exists y)(y\in B\land xfy\land ygz)$ 。记为$g\circ f:A\to C\quad\forall x\in A,(g\circ f)(x)=g(f(x))$

复合运算的性质

- $f\circ I_A=I_B\circ f=f$
- $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$
- 函数的复合运算能保持函数满射、单射、双射的性质
- 设$f:A\to B,g:B\to C$，则：

- 若$g \circ f$是满射，则g是满射
- 若$g \circ f$是单射，则f是单射
- 若$g \circ f$是双射，则f是单射，g是满射

逆运算

$f^{-1} = (y,x)|x \in A \wedge y \in B \wedge xfy$ f^{-1}**存在当且仅当**f**是双射**

函数的置换

集合A到它自身的一个双射称作A的一个**置换**。 若集合A是含有n个元素的一个集合，则A的不同置换数为$n!$ **循环置换**：设$b_1, b_2, ... b_r$ 是集合$A = a_1, a_2, ... a_n$ 中r个不同的元素，置换$p : A \to A$ 定义为：$p(b_1) = b_2, p(b_2) = b_3, ... p(b_r) = b_1$ 且若$x \in A \wedge x \notin b_1, b_2, ..., b_r$ ，则$p(x) = x$。那么称置换p为**长度为**r**的循环置换**。其中*长度为2的置换称为**对换*** 任意循环$(b_1, b_2, ..., b_r)$ 都可以写成对换的复合（积），即$b_1, b_2, ... b_r = (b_1, b_r) \circ (b_1, b_{r-1}) \circ \cdots \circ (b_1, b_3) \circ (b_1, b_2)$ 。

- 若一个置换能表示成偶数个对换的复合，称其为**偶置换。**
- 若一个置换能表示成奇数个对换的复合，称其为**奇置换。**

函数的阶

描述函数在某个过程中的增长或变化速度

- 若存在常数c和k使得对所有的$n \geq k$均有，$|f(n)| \leq c|g(n)|$，则称f是$O(g)$，读作f是g的大O。
- 若f是$O(g)$且g是$O(f)$，则称f和g具有相同的阶。记作$f\Theta g$。其中Θ是一个等价关系。

Θ的等价类

等价类由同阶的函数所组成 **计算机中常见的阶**：$\Theta(1) < \Theta(lg(n)) < \Theta(n^k) < \Theta(a^n)$

函数与集合基数的关系

选取一个标准集合：$N_n = 0, 1, 2, ..., n-1$ ，称为N的截断n。

可数集

若f：$N_n \to A$为双射函数，则称集合A是可数的。

- 情况1：有限集合
- 情况2：基数 = $|Z^+| = |N|$的无限集合

集合的基数

- 与N_n构成双射的集合，指派它的基数为n
- 与N构成双射的集合，指派它的基数为$\aleph_0$
- 指派空集的基数为0

集合基数的比较

- A和B有相同的基数（称A和B等势），当且仅当从A到B有双射函数，记为$|A| = |B|$,或$A \sim B$。
- 若有A到B的单射函数，则$|A| \leq |B|$。

- 若有A到B的单射函数，但无双射函数，则$|A| < |B|$。

常见等价类

- $N \sim Z \sim Q \sim N \times N = \aleph_0$
- $R \sim [0,1] \sim (0,1) = \aleph$