离散数学作业 _2

李云浩 241880324

2025 年 3 月 24 日

1 pp.3-5

1.1 T5

(a) F (b) F (c) F (d) T (e) F (f) F

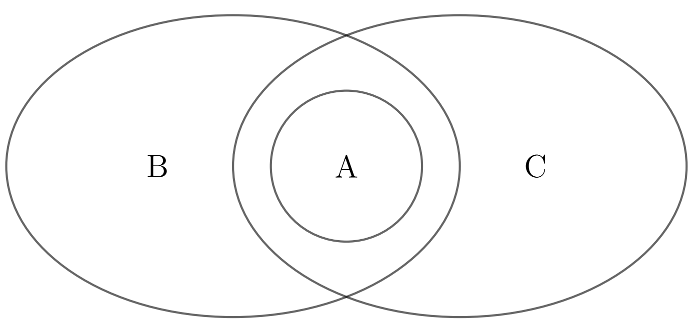
1.2 T10

(a)(e)

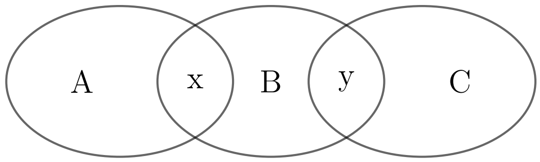
1.3 T16

(a) T (b) T (c) T (d) T (e) T

1.4 T30



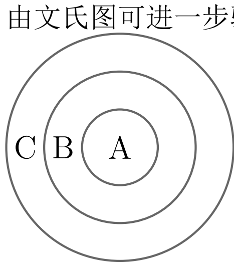
1.5 T31



1.6 T34

由 $A \subseteq B$，可知对于 $\forall x \in A$ 都有 $x \in B$。同理，由 $B \subseteq C$，可知对于 $\forall y \in B$ 都有 $y \in B$。因此可推得：$\forall x \in A$ 都有 $x \in C$，即 $A \subseteq C$。证毕。

由文氏图可进一步验证该结果：



1.7 T36

因为集合 B 是由集合 A 的所有元素以及一个额外的元素组成的，那么 A 的所有子集 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ 同时也是 B 的子集，有 n 个。同时，对于 A 的每个子集，额外加上那个 B 的特有元素，形成的新集合也是 B 的子集，并且与之前的子集不会重复，有 n 个。故 B 的子集个数为：$n + n = 2n$

2 pp.10-14

2.1 T1

$(a) A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ $(b) B \cup C = \{a, c, d, e, f, g\}$ $(c) A \cap C = \{a, c\}$
$(d) B \cap D = \{f\}$ $(e) (A \cup B) - C = \{b, d, e, g\}$ $(f) A - B = \{a, b, c\}$
$(g) \overline{A} = \{d, e, f, h, k\}$ $(h) A \oplus B = \{a, b, c, d, e, f\}$ $(i) A \oplus C = \{b, g, f\}$
$(j) (A \cap B) - C = \{g\}$

2.2 T6

$(a)A-B=\{1,6,8\}\quad(b)B-A=\{5,9\}\quad(c)C-D=\{1,2,3,4\}$
$(d)\overline{C}=\{5,6,7,8,9\}\quad(e)\overline{A}=\{3,5,7,9\}\quad(f)A\oplus B=\{1,5,6,8,9\}$
$(g)C\oplus D=\{1,2,3,4,7,8\}\quad(h)B\oplus C=\{1,3,5,9\}$

2.3 T10

$(a)\overline{A}\cap\overline{B}=\{b,d,h\}\quad(b)\overline{B}\cup\overline{C}=U\quad(c)\overline{A\cup A}=\{b,d,e,h\}$
$(d)\overline{C\cap C}=\{a,c,d,e,f,g\}\quad(e)A\oplus B=\{c,e,f,g\}\quad(f)B\oplus C=\{a,b,e,h\}$

2.4 T23

定理三：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

因为：$A=\{1,2,3,4,5,6\},B=\{2,4,7,8,9\},C=\{1,2,4,7,10,12\}$，则 $|A|=6,|B|=5,|C|=6,|A\cup B\cup C|=11,|A\cap B|=2,|B\cap C|=3,|A\cap C|=3,|A\cap B\cap C|=2$

所以：$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=6+5+6-2-3-3+2=11=|A\cup B\cup C|$，证毕。

2.5 T24

因为:$A=\{1,2,3,4,5,6,7\},\quad B=\{2,3,4\},\quad C=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，则 $|A|=7,|B|=3,|C|=7,|A\cap B|=3,|B\cap C|=2,|A\cap C|=3,|A\cap B\cap C|=2,|A\cup B\cup C|=11$

所以:$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=7+3+7-3-2-3+2=11=|A\cup B\cup C|$, 证毕。

2.6 T34

(a) 可能为真，可能为假　(b) 可能为真，可能为假　(c) 可能为真，可能为假　(d) 可能为真，可能为假　(e) 可能为真，可能为假　(f) 可能为真，可能为假

2.7 T36

(a) 真　(b) 可能为真，可能为假　(c) 可能为真，可能为假　(d) 假　(e) 真　(f) 真

2.8 T39

假设 $x \in A \cap B$, 那么 x 属于 A，所以 $A \cap B \subseteq A$。

3 pp.19-21

3.1 T19

公式：$a_n = 3n - 2$

观察序列可知，每两项之间差值为二，且第一项为 1。即：$a_n = a_{n-1} + 3, a_1 = 1$。由递推关系可证：

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \\ &= a_{n-2} + 2 \times 3 \\ &\vdots \\ &= a_1 + (n-1) \times 3 \\ &= 3n - 2 \end{aligned}$$

3.2 T20

公式：$a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$

观察序列可知，后一项为前一项乘 $\frac{1}{2}$，且第一项为 1。即：$a_n = \frac{a_{n-1}}{2}, a_1 =$

1。由递推关系可证:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} \\ &= (\frac{1}{2})^2 a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= (\frac{1}{2})^{n-1} a_1 \\ &= (\frac{1}{2})^{n-1} \end{aligned}$$

3.3 T22

公式：$a_n = \frac{15+\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{15-\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

3.4 T25

(a) 属于 (b) 不属于 (c) 属于 (d) 属于 (e) 不属于 (f) 不属于

3.5 T29

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \oplus C &= (f_A + f_B - 2f_A f_B) \oplus C \\ &= f_A + f_B - 2f_A f_B + f_C - 2(f_A + f_B - 2f_A f_B) f_C \\ &= f_A + f_B + f_C - 2f_A f_B - 2f_A f_C - 2f_B f_C + 4f_A f_B f_C \\ &= f_B + f_C - 2f_B f_C + f_A - 2(f_b + f_C - 2f_B f_C) f_A \\ &= (f_B + f_C - 2f_B f_C) \oplus A \\ &= (B \oplus C) \oplus A \\ &= A \oplus (B \oplus C) \end{aligned}$$

证毕。

3.6 T32

(a) $(a^*b \vee c) = \{ab, ac, aab, aac, \dots\}$，属于
(b) $(ab)^*c = \{abc, ababc, \dots\}$，不属于
(c) $(a^* \vee b)c^* = \{ac, bc, \dots, a \dots ac \dots c, bc \dots c\}$, 属于

3.7 T34

(a)$(p \vee q)rq^* = \{prq, qrq, prqq, qrqq, \dots\}$
(b)$p(qq)^*r = \{pqqr, pqqqqr, \dots, pqq \dots qqr\}$

3.8 T37

因为 8 是一个 S^- 数，由 (3) 可知，因为 1 是 8 的倍数，因此 1 也是一个 S^- 数。因此 1 的所有倍数都是 S^- 数，所以 S^- 数集合即整数集 $\mathbf{Z}$。

4 pp.31-33

4.1 T24

- 因为 $a \mid b$，所以对于 $\forall m \in \mathbf{Z}$ 有：$a \mid mb$。
- 同理：因为 $a \mid c$，所以对于 $\forall n \in \mathbf{Z}$ 有：$a \mid nc$
- 由于 $a \mid mb, a \mid nc$，因此 $a \mid mb + nc$。

证毕。

4.2 T25

p 有且只有 p 和 1 两个因数并且 $p \nmid a$，则 p 不是 a 的因数，所以 $GCD(a, p) = 1$
$p \mid ab$ 以及 $p \mid p$，因此 $p \mid sab, p \mid tpb$，所以 $p \mid sab + tpb$。

4.3 T26

因为 $GCD(a, c) = 1$，所以由定理 4 可知：有某个整数 s 和 t，使得 $1 = sa + tc$，于是 $b = sab + tcb$ 因为 $c \mid ab, c \mid c$，所以 $c \mid sab, c \mid tcb$，所以 $c \mid sab + tcb$，所以 $c \mid b$。证毕。

4.4 T27

因为 $GCD(a,c)=1$，所以 a 和 c 互质。因为 $a \mid m, c \mid m$，因此，m 拥有因数 a,c。因为 a 和 c 互质，所以 $ac \mid m$。

4.5 T28

因为 $d = GCD(a,b)$，所以 $\exists x, y \in \mathbf{Z}, a = dx, b = yd, GCD(x,y) = 1$。又因为 $a \mid b, c \mid d$，所以 $\exists m, n \in \mathbf{Z}, b = am, d = cn$。所以：$yd = am = dmx, a = dx = cnx$，所以 $ac = c^2nx, bd = yd^2 = yc^2n^2$。又因为 $y = mx$，所以 $bd = c^2n^2mx$。因此 $bd = nmac$，所以 $ac \mid bd$，证毕。

4.6 T29

因为 $c \mid ca, c \mid cb$,所以 c 显然为 ca, cb 的一个公因数,所以 $GCD(ca,cb) = cGCD(a,b)$

5 pp.41-44

5.1 T6

(a)

$$
\begin{aligned}
A(BD) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 31 & 27 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$(AB)D = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 31 & 27 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A(C+E) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 26 & 12 & 18 \\ 19 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AC + AE = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 15 & 1 & 17 \\ 2 & -8 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 17 & 10 & -11 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 26 & 12 & 18 \\ 19 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$FD + AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 12 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

5.2 T9

(a)

$$A^T(D+F) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 32 \\ 3 & 10 \\ -31 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$(BC)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \text{无法计算}$$

$$C^T B^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{无法计算}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
(B^T+A)C &= \left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2 & 2 & 5\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}25 & 5 & 26\\ 20 & -3 & 32\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
(D^T+E)F &= \left(\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 5 & 4 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\\
&= \text{无法计算}
\end{aligned}
$$

5.3 T16

(a) 假设 A 的第 i 行全为 0，那么在计算 AB 时，AB 的第 i 行元素是 A 的第 i 行元素与 B 的各列元素相乘所得，由于 A 的第 i 行全为 0，故 AB 的第 i 行元素也全为 0。

(b) 如果 B 有一列全为 0，即 B^T 有一行全为零，由 (a) 可知，B^TA^T 也会有一行元素全为 0。因为 $B^TA^T=(AB)^T$，因此 $(AB)^T$ 有一行全为零，即 AB 有一列全为 0。

5.4 T17

对于矩阵 B^TA^T，其第 j 行的元素为 B^T 的第 j 行元素与 A^T 的各列元素相乘所得，即 $(B^T)_jA^T$，这里的 $(B^T)j$ 是 B^T 的第 j 行。因为 $B^TA^T=(AB)^T$，所以即有 AB 的第 j 列等于 AB_j，这里的 B_j 是 B 的第 j 列。

5.5 T23

(a) 证明：$(A^T)^T=A$

因为 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，其元素为 a_{ij}。那么 A^T 是一个 $n\times m$ 矩阵，

其元素为 a_{ji}。再次转置后：$(A^T)^T$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，其元素为 a_{ij}，故 $(A^T)^T=A$，证毕。

(b) 证明：$(A+B)^T=A^T+B^T$

设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵,其元素分别为 a_{ij},b_{ij},因此 $A+B$ 的元素为 $a_{ij}+b_{ij}$。对 $A+B$ 进行转置，$(A+B)^T$ 中的元素为 $a_{ji}+b_{ji}$。同时，A^T+B^T 的元素亦为 $a_{ji}+b_{ji}$。因此 $(A+B)^T=A^T+B^T$，证毕。

(c) 证明：$(AB)^T=B^TA^T$

设 $A=(a_{ij})_{m\times l},B=(b_{ij})_{l\times n}$，则 $[(AB)^T]_{ij}=[AB]_{ji}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jl}b_{li},(i=1,\dots,m;j=1,\dots,n)$, 另一方面，$[B^TA^T]_{ij}$ 是 B^T 的第 i 行与 A^T 的第 j 列对应元素的乘积之和，亦即 B 的第 i 列与 A 的第 j 行对应元素的乘积之和。于是 $(B^TA^T)_{ij}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{li}a_{jl}=[(AB)^T]_{ij},(i=1,\dots,m;j=1,\dots,n)$. 因此 $(AB)^T=B^TA^T$，证毕。

5.6 T29

因为

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

所以 AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

5.7 T41

设 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n},C=(c_{ij})_{m\times n}$。因此

$$\begin{aligned}A\vee(B\vee C)&=(a_{ij})_{m\times n}\vee[(b_{ij})_{m\times n}\vee(c_{ij})_{m\times n}]\\&=[a_{ij}\vee(b_{ij}\vee c_{ij})]_{m\times n}\\&=[a_{ij}\vee b_{ij}\vee c_{ij}]_{m\times n}\\&=[(a_{ij}\vee b_{ij})\vee c_{ij}]_{m\times n}\\&=[(a_{ij})_{m\times n}\vee(b_{ij})_{m\times n}]\vee(c_{ij})_{m\times n}\\&=(A\vee B)\vee C\end{aligned}$$

证毕。

6 pp.47-49

6.1 T24

$\forall x, y \in \mathbf{Q} \to (x+y) \in \mathbf{Q}$。$\forall x \in \mathbf{Q} \to \frac{x}{2} \in \mathbf{Q}$。因此 $\forall x, y \in \mathbf{Q} \to \frac{x+y}{2} \in \mathbf{Q}$。封闭性成立。

6.2 T25

$\forall x, y \in \mathbf{Q}, \frac{x+y}{2} = \frac{y+x}{2}$，所以 $x \square y = y \square x$。交换性成立。

6.3 T26

$\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, (x \square y) \square z = \frac{\frac{x+y}{2}+z}{2} = \frac{x+y+2z}{4}$。$x \square (y \square z) = \frac{x+\frac{y+z}{2}}{2} = \frac{\triangledown}{2x+y+z}4$。因为 $(x \square y) \square z \neq x \square (y \square z)$，因此结合律不满足。

6.4 T27

假设存在单位元 n，则 $\forall x \in \mathbf{Q}, x \square n = x$。因为 $x \square n = \frac{x+n}{2}$，当且仅当 $n = x$ $x \square n = x$。因此不存在单位元。

6.5 T28

由于单位元不存在，故逆元也不存在。

6.6 T29

(a) $\forall x, y, w, z \in R$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+w \\ y+z+1 \end{bmatrix} \in R^2$$

因此满足封闭性质。

(b) $\forall x, y, w, z \in R$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+w \\ y+z+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w+x \\ z+y+1 \end{bmatrix}$$

因为：

$$\begin{bmatrix} x+w \\ y+z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w+x \\ z+y+1 \end{bmatrix}$$

因此交换性质成立。

(c)$\forall m,n,w,x,y,z \in R$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \triangledown \left(\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} w+m \\ z+n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+w+m \\ y+z+n+2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right) \triangledown \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+w \\ y+z+1 \end{bmatrix} \triangledown \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+w+m \\ y+z+m+2 \end{bmatrix}$$

结合性质满足

6.7 T35

即证：对于 5×5 的矩阵 A, B，$comp(A \wedge B) = compA \vee compB$，$comp(A \vee B) = compA \wedge compB$。

由 $comp$ 的定义可知，$compA = \overline{A}$ 令 $C = comp(A \wedge B)$，即 $\overline{C} = A \wedge B$。所以

$$\overline{c_{ij}} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = b_{ij} = 1 \\ 0 & else \end{cases} \Rightarrow c_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_{ij} = 0) \vee (b_{ij} = 0) \\ 0 & else \end{cases}$$

$compA \vee compB = \overline{a_{ij}} \vee \overline{b_{ij}}$

$$\overline{a_{ij}} \vee \overline{b_{ij}} = \begin{cases} 1 & (a_{ij} = 0) \vee (b_{ij} = 0) \\ 0 & else \end{cases}$$

因此 $c_{ij} = \overline{a_{ij}} \vee \overline{b_{ij}}$，所以 $C = comp(A \wedge B) = compA \vee compB$。

令 $D = comp(A \vee B)$，即 $\overline{D} = A \vee B$。所以

$$\overline{d_{ij}} = \begin{cases} 1 & (a_{ij} = 1) \vee (b_{ij} = 1) \\ 0 & else \end{cases} \Rightarrow d_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = b_{ij} = 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$compA \wedge compB = \overline{a_{ij}} \wedge \overline{b_{ij}}$

$$\overline{a_{ij}} \wedge \overline{b_{ij}} \begin{cases} 1 & a_{ij} = b_{ij} = 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

因此 $d_{ij} = \overline{a_{ij}} \wedge \overline{b_{ij}}$，所以 $D = comp(A \vee B) = compA \wedge compB$。证毕。