离散数学作业 _5

李云浩 241880324

2025 年 4 月 27 日

1 5.1

1.1 5

每一个整数都有其对应的唯一平方数，且整数的平方数一定为整数。因此 $dom\ f = A \wedge ran\ f \subseteq B \wedge \forall x \in A, f(x)$ 的值唯一。满足函数的要求。

1.2 6

对每一个实数 a，都有唯一对应的 e^a，并且 $\forall a \in R \rightarrow e^a \in R$。因此 $dom\ f = A \wedge ran\ f \subseteq B \wedge \forall x \in A, f(x)$ 的值唯一。满足函数的要求。

1.3 7

对于每一个实数，要么是整数、要么不是整数，并且不能同时即是整数又不是整数。因此 $dom\ f = A \wedge (\forall x \in A, f(x) = 1 \vee f(x) = 0)$。满足函数的要求。

1.4 8

对于每一个实数，都有唯一对应的小于或等于该实数的最大整数。因此 $dom\ f = A \wedge ran\ f \subseteq B \wedge \forall x \in A, f(x)$ 的值唯一。满足函数的要求。

1.5 11

(a) $\forall b(b \in B \rightarrow (\exists a \in A \wedge afb))$，因此满足满射。
$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A(a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$，因此满足单射。

(b) $\nexists a \in A$ 使得 $f(a) = b \lor f(s) = d$，因此不满足满射。
$1 \neq 2 \land f(1) = f(2) = a$，因此不满足单射。

1.6 12

(a) $\nexists a \in A$ 使得 $f(a) = z$，因此不满足满射。
$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A(a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2))$，因此满足单射。
(b) $\forall b \in B, \exists a \in A \to afb$，因此满足满射。
$1.1 \neq 0.06 \land f(1.1) = f(0.06) = p$，因此不满足单射。

1.7 13

(a) $\forall b \in B$ 都有 $(b+1) \in A \to f(b+1) = b$，因此满足满射。
$\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A(a_1 \neq a_2 \to a_1 - 1 \neq a_2 - 1)$，因此满足单射。
(b) $\forall b \in B$ 都有 $b \in A \land -b \in A \to f(b) = b \land f(-b) = b$，因此满足满射。
$-1 \in A \land 1 \in A \land -1 \neq 1 \to f(-1) = f(1)$，因此不满足单射。

1.8 14

(a) $\forall b \in B(\exists (b,1) \in A \to f((b,1)) = b)$，因此满足满射。
$\exists (a,1) \in A(\exists (a,2) \in A \to f((a,1)) = f((a,2)) = a)$，因此不满足单射。
(b) 对于 B 中的元素 $(2,a)$，显然 A 中没有任何一个元素能通过函数关系指向它，因此不满足满射。
$\exists (1,b) \in A, \exists (2,b) \in A \to f((1,b)) = f((2,b)) = (1,a)$, 因此不满足单射。

1.9 15

(a) $\forall (m,n) \in B(\exists (\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}) \in A \to f((\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2})) = (m,n))$, 因此满足满射。
$\forall (m,n) \in B$，有且仅有 $(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}) \in A$，使得 $f(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}) = (m,n)$。因此满足单射。
(b) $\forall b \in B, (\exists \sqrt{b} \in A \to f(\sqrt{b}) = b)$, 因此满足满射。
$\exists a \in A \exists -a \in A(a \notin -a \to f(a) = f(-a) = a^2)$, 因此不满足单射。

1.10 29

对于每个 A 中的元素，其都可以通过函数指向 B 中的任一元素，因此函数的个数为 n^m 个。

1.11 30

$g : B \to C$ 为单射函数
$f : A \to B$ 为双射函数

1.12 31

$C, B,$ 因为 $g : B \to C$ 是满射的，A，因为 $f : A \to B$ 是满射的。

1.13 33

因为 $g \circ f$ 是满射的，则对于 $\forall c \in C(\exists f(x) \to g(f(x)) = c)$。因为 $f(x) \in B$，因此 $g : B \to C$ 是满射的。

1.14 34

因为 $O(a_1, f) \cap O(a_2, f) \neq \varnothing$，所以 $\exists f^{m_1}(a_1) = f^{m_2}(a_2)$。因此 $\forall n \in Z, (f^n(a_1) = f^{n-m_1+m_2}(a_2))$，因此 $O(a_1, f) = O(a_2, f)$。

1.15 40

(a) 令 $a_1 = -1, a_2 = 1$，此时 $f(a_1 + a_2) = f(0) = 0, f(a_1) = 1, f(a_2) = 1 \to f(a_1) + f(a_2) = 2$。因此 $f(a_1 + a_2) \neq f(a_1) + f(a_2)$，因此原式不成立。
(b) 因为 $s_1 \cdot s_2$ 即两个字符串进行拼接，长度为原来两条字符串各自长度的加和。故 $f(s_1 \cdot s_2) = f(s_1) + f(s_2)$ 显然成立。

1.16 41

(a) 因为 $a, b \in A \wedge A = \{0, 1\}$，并且 $a \diamond b = (a + b) mod 2$。因此当且仅当 $a = b$ 时，$(a \diamond b) = 0$。反例：$f(1 \diamond 1) = f(0)$ 为假，$f(1) \vee f(1) = f(1)$ 为真。因此 $f(1 \diamond 1) \neq f(1) \vee f(1)$。

(b)

a	b	$a \diamond b$	$f(a)$	$f(b)$	$f(a \diamond b)$	$f(a) \wedge f(b)$
0	0	0	0	0	假	假
0	1	1	0	1	真	假
1	0	1	1	0	真	假
1	1	0	1	1	假	真

因此 $f(a \diamond b) \neq f(a) \wedge f(b)$

2 5.2

2.1 7

不妨设 $n = pk + q$，其中 $(0 \leq q < k)$。因此从 $1 \sim n$ 中，一共有 p 个 k 的倍数。且 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = p$。因此在 $1 \sim n$ 之间，k 的倍数的个数是 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ 个。

2.2 8

因为 n 是奇数，所以 $n = 2k - 1, k \in Z$。因此 $n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$。因此 $\lceil \frac{n^2}{4} \rceil = k^2 - k + 1$，且 $\frac{n^2+3}{4} = \frac{4k^k - 4k + 4}{4} = k^2 - k + 1$。因此 $\lceil \frac{n^2}{4} \rceil = \frac{n^2+3}{4}$。

2.3 18

(a) 对于每一个 A^* 中的字符串，它都一定有确切的长度。因此 l 是处处有定义的。
(b) 反例：对于 a, b，$l(a) = l(b) = 1$，因此 l 不是单射的。
(c) 题目中给出的函数的陪域是所有整数，但 A^* 中不存在长度为负数的字符串，因此 l 不是满射的。

2.4 20

对于一个布尔变量时，变量的值有两种情况。对于每个变量的值，其对应的布尔函数的值也有两种情况，因此总共有 4 个不同的关于 p 的布尔函数。
对于两个布尔变量时，变量的值有 $2 \times 2 = 4$ 种情况。对于每个变量的值，

其对应的布尔函数的值有两种情况，因此总共有 $2^4 = 16$ 个不同的有两个布尔变量的布尔函数。

2.5 28

根据特征函数的定义：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

因为 A 中共有 n 个元素，对于 A 的任意一个子集，即将 A 中部分元素舍弃掉，此时该元素在子集中的特征方程取值为 0。一共有 n 个元素，因此能组成 2^n 个不同的 01 串，即表示不同的子集。因此 $|pow(A)| = 2^n$。

2.6 29

因为 f_A 是 A 关于全集 U 的特征函数，因此有

$$\forall x \in U, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

因此 f^{-1} 表示：

$$\begin{cases} x \in A, & 1 \\ x \notin A, & 0 \end{cases}$$

因此 $f^{-1}(1)$ 表示所有在集合 A 中的元素。

3 5.3

3.1 11

$\Theta(n\lg(n)) : f_1, f_{12} \quad \Theta(n^2) : f_2 \quad \Theta(a^n) : f_3 \quad \Theta(lg(n)) : f_4 \quad \Theta(1) : f_5$
$\Theta(n) : f_6, f_{10}, f_{11} \quad \Theta(lg(lg(n))) : f_7 \quad \Theta(n^{0.7}) : f_8 \quad \Theta(n^n) : f_9$

3.2 12

$\Theta(1) < \Theta(\lg(\lg(n))) < \Theta(\lg(n)) < \Theta(n\lg(n)) < \Theta(n^{0.7}) < \Theta(n) < \Theta(n^2) < \Theta(a^n) < \Theta(n^n)$

3.3 13

$\Theta(1): f_5 \quad \Theta(n): f_6, f_{10}, f_{11} \quad \Theta(n\lg(n)): f_1 \quad \Theta(\lg(n)): f_4$
$\Theta(n^2): f_2 \quad \Theta(\sqrt{n}):$ 无 $\quad \Theta(2^n):$ 无

3.4 20

$f(n) = 2n \in \Theta(n).$

3.5 21

if 判断中一步，N 和 Q 的两层 for 循环中有一步，三层 N, Q, M 的循环中，要执行乘法、加法、赋值的三步操作，最后还有一步 $return$ 操作。因此步骤函数为 $f(n) = 1 + NQ + 3NQM + 1$。该函数为 $\Theta(n^3)$.

3.6 22

因为 $F(N+1) = 2F(N) + F(N+1), F(0), F(1)$ 的通项公式为 $F(n) = \frac{1}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n$。因此 $F(N) \in \Theta(2^n)$，并且可以得出 $F(N)$ 所需的运算时间大概为 $\frac{1}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n$ 倍的运算 $F(0)$ 的时间。为 $\Theta(2^n)$

3.7 23

$(a) P_n = P_{n-1} + (n-2) + (n-3), P_3 = 1, P_4 = 4$
(b) 由 (a) 可得递推关系为：$P_n = P_3 + \sum_3^n (2k-5) = P_3 + (n+3)(n-2) - 5n + 10 = n^2 - 4n + 5$。因此运行时间为 $n^2 - 4n + 5$ 倍的 P_3 的运行时间。为 $\Theta(n^2)$

3.8 24

(1) 充分性：$0 < a < b \Rightarrow \Theta(n^a)$ 比 $\Theta(n^b)$ 低。
因为 $0 < a < b \to \frac{n^b}{n^a} = n^{b-a} > 1$，因此 $n^b > n^a$。故 $\Theta(n^a)$ 比 $\Theta(n^b)$ 低.
(2) 必要性：$\Theta(n^a)$ 比 $\Theta(n^b)$ 低 $\Rightarrow 0 < a < b$。
反证法：当 $a = b$ 时，$\Theta(n^a)$ 显然与 $\Theta(n^b)$ 同阶。当 $a > b$ 时，$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{n^a} = 0$，与 Θn^a 比 Θn^b 低不符。因此 $0 < a < b$。
综上所述：$\Theta(n^a)$ 比 $\Theta(n^b)$ 低当且仅当 $0 < a < b$。

3.9 25

(1) 充分性：$0 < a < b \Rightarrow \Theta(a^n)$ 比 $\Theta(b^n)$ 低。
因为 $0 < a < b \to a \times a \times \cdots \times a < b \times b \times \cdots \times b$，故 $\Theta(a^n)$ 比 $\Theta(b^n)$ 低。
(2) 必要性：$\Theta(a^n)$ 比 $\Theta(b^n)$ 低 $\Rightarrow 0 < a < b$。
反正法：当 $a = b$, 显然 $\Theta(a^n)$ 与 $\Theta(b^n)$ 同阶。当 $a > b$ 时，由 (1) 可证得：$\Theta(a^n)$ 比 $\Theta(b^n)$ 高阶，因此与前提矛盾。故 $0 < a < b$.
综上所述：$\Theta(a^n)$ 比 $\Theta(b^n)$ 低，当且仅当 $0 < a < b$。

3.10 26

当 $r \neq 0$ 时，存在 $c > r \to |rf(x)| < c|f(x)|$，因此 $rf(x)$ 是 $O(f(x))$。又存在 $d > \frac{2}{|r|} \to d|rf(x)| = 2|f(x)| > |f(x)|$，因此 $f(x)$ 是 $O(rf(x))$。综上所述，$\Theta(rf) = \Theta(f)$。

3.11 27

当 $\Theta(f)$ 比 $\Theta(g)$ 低时，有 $\exists c \in \mathbf{R} \to |f(x)| < c|g(x)|$。因为 $h(x)$ 是一个非零函数，因此 $|h(x)| \neq 0 \to |h(x)||f(x)| < c|h(x)||g(x)|$ 因此：$\exists c \in \mathbf{R} \to |h(x)f(x)| < c|h(x)g(x)|$。即 $\Theta(fh)$ 比 $\Theta(gh)$ 低。

3.12 28

因为 $\Theta(f) = \Theta(h)$，所以 $\exists a_1 \in \mathbf{R} a_1|f| < |h|$。同理，因为 $\Theta(g) = \Theta(h)$，所以 $\exists b_1 \in \mathbf{R} b_1|g| < |h|$。因此 $\frac{a_1+b_1}{2}(|f|+|g|) < |h||$, 所以 $f+g$ 是 $O(h)$ 的。

3.13 29

因为 $\Theta(f) = \Theta(g)$，所以 $\exists a_1, a_2 \in \mathbf{R} a_1|f| < |g|, a_2|f| > |g|$。对于 $\forall c \neq 0$，取 $b_1 = \frac{a_1}{|c|}, b_2 = \frac{a_2}{|c|}$，因此 $b_1|cf| = a_1|f| < |g| \wedge b_2|cf| = a_2|f| > |g|$。因此 $\Theta(cf) = \Theta(g)$。

4　5.4

4.1　12

(a) $(1,4,5)\circ(2,3)\circ(6,8)$
(b) $(1,2,3,4)\circ(5,7,8,6)$

4.2　13

(a) $(1,6,3,7,2,5,4,8)$
(b) $(1,2,3)\circ(5,6,7,8)$

4.3　14

(a) (a,g,e,c,b,d)
(b) (a,d,b,e,g,c)

4.4　15

(a) $(2,6)\circ(2,8)\circ(2,5)\circ(2,4)\circ(2,1)$
(b) $(3,6)\circ(3,1)\circ(4,5)\circ(4,2)\circ(4,8)$

4.5　16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
W	A	E	Y	R	R	H	O	E	U	E

4.6　20

(a) $(1,4,6,8,3)=(1,3)\circ(1,8)\circ(1,6)\circ(1,4)$，偶置换
(b) $(1,7,6,8,5)\circ(2,3,4)=(1,5)\circ(1,8)\circ(1,6)\circ(1,7)\circ(2,4)\circ(2,3)$, 偶置换。

4.7 26

设置换 p 是将 A 中的 $b_1, b_2, \ldots, b_r$ 进行循环,则有 $\{(b_1, b_2), (b_2, b_3), \ldots (b_{r-1}, b_r)\}$。
因此 $p \circ p$ 为 $\{(b_1, b_3), (b_2, b_4), \ldots\}$。
当 r 为奇数时，$p \circ p$ 表示循环 $(b_1, b_3, \ldots b_r, b_2, b_4, \ldots b_{r-1})$。
当 r 为偶数时,$p \circ p$ 可以拆分为两个循环,分别为 $(b_1, b_3, \ldots b_{r-1})$,$(b_2, b_4, \ldots b_r)$。

4.8 28

(a) $p = (1, 4) \circ (2, 3, 5)$
(b) $p^{-1} = (4, 1) \circ (2, 5, 3)$
(c) $p^2 = (2, 5, 3)$
(d) 因为 $(1, 4)$ 的长度为 2，$(2, 3, 5)$ 的长度为 3。因此 $k = LCM(2, 3) = 6$

4.9 29

(a) 当 $n = 1$，已由题目给出，p 是 A 的一个置换。
假设 $n = k$ 时，p^k 是 A 的一个置换，下证：$n = k + 1$ 时，p^{k+1} 是 A 的置换。
因为 p^k 是 A 上的一个置换，因此 p^k 是从 A 到 A 的双射函数。同理，p 也是 A 上的一个双射函数。因为双射函数复合双射函数仍是双射函数，因此 $p^k \circ p = p^{k+1}$ 仍是 A 上的一个双射函数，故 p^{k+1} 是 A 的置换。
综上所述，如果 p 是 A 的一个置换，那么 p^n 也是 A 的一个置换。
(b) 对于一个长度为 r 的循环 $a = \{(a_1, a_2, \ldots, a_r)\}$，$a^r$ 表示其中长度为 r 的路径，该路径长度恰好为循环的长度，因此所有元素都回到自身，即 $a^r = I_a$。
不妨将 p 化为多个互不相交的循环的复合形式，长度分别为 $n_1, n_2, \ldots n_k$。
由上面的结论可知，当 $m = LCM(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ 时，满足所有元素都回到自身，因此 $p^m = I_A$。

4.10 30

不妨设 p 能够转化为多个循环的复合形式,其中一个循环为:$(c_1, c_2, \ldots, c_r)$。
下证 R 是一个等价关系：
(1) 自反性：对于 $\forall x \in A, p^0(x) = x$。因此 $\forall x \in A \to xRx$。满足自反性。
(2) 对称性：对于 $\forall (a, b) \in R \wedge a \neq b$，因此 a, b 一定是 $c_1 \sim c_r$ 中的一个

元素。设 $a = c_i, b = c_j$ $(i < j)$。则：$p^{j-i}(a) = b \wedge p^{r+i-j}(b) = a$。因此 $(b, a) \in R$。所以 $\forall (a, b) \in R \to (b, a) \in R$，满足对称性。
(3) 传递性：对于 $\forall (a, b), (b, d) \in R$，当 $a = b \vee b = d$ 时显然满足传递性。当 $a \neq b \wedge b \neq d$ 时，a, b, d 一定是 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 中的元素，因此不妨设 $a = c_i, b = c_j, d = c_k$ $(i < j < k)$，因此有 $p^{j-i}(a) = b \wedge p^{k-j}(b) = d \to p^{k-i}(a) = d$。故 $\forall (a, b), (b, d) \in R \to (a, d) \in R$。满足传递性。
因此 R 是一个等价关系。
将 p 化为多个互不相交的循环的复合形式。每个循环中的元素组成 R 的一个等价类。剩下单独的元素分别独自组成 R 的等价类。

4.11 37

(a) 3 个，分别为 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3)$
(b) 任选两个摆在奇数位上：$C_4^2 = 6$ 个，其余都能确定。因此总共 6 个。

4.12 38

任意选择两个数字摆在奇数位上：$C_5^2 = 10$ 个，由于具有递增递减性质，因此其余元素的位置也能确定。因此总共有 10 个。

4.13 39

只要选出什么数字摆在奇数位上，则该序列便能确定。当 n 为偶数时，奇数位有 $\frac{n}{2}$ 个数字。当 n 为基数时，奇数位有 $\frac{n+1}{2}$ 个数字。因此，奇数位的数字有 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个。故 A 的增-减置换数等于由 A 中元素形成的长度为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 的递增序列的数目。