关系

笛卡尔积

两个集合A和B的笛卡尔积，是序偶(a, b)的集合，其中

$$a \in A, b \in B$$

，记作：$A \times B$

- 若$A = a, b, B = 1, 2, 3$ 则：$A \times B = (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)$
- 笛卡尔积$A \times B$的子集R称为集合A到集合B的关系

笛卡尔积与关系

给定任意集合A和B，若$R \subseteq A \times B$，则称R为从A到B的**二元关系。**（当$A = B$时，称R为A上的二元关系）**即：关系是笛卡尔积的子集。** 若$(a, b) \in R$,则：

- aRb或$R(a, b)$或$(a, b) \in R$

关系的说明

- aRb：表示$(a, b) \in R$, 即a对b有关系R
- $a\color{red}{\text{\cancel}}Rb$：表示$(a, b) \notin R$，即a对b无关系R

计算

若$|A| = m, |B| = n$,则$|A \times B| = mn$，则A到B的不同的二元关系共有2^{mn}

特殊关系

给定任意集合A和B,

- 若$R = \varnothing$,则称R为A到B上的*空关系*
- 若$R = A \times B$，则称R为A到B上的*全域关系*
- 若$R = (a, a) \mid a \in A$,则称R为A上的*恒等关系*
- 令$A \subseteq Z, R = (a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a|b$，称R为A上的*整除关系*，记作$D_A$

关系的表示方法

- **关系矩阵**:$X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ 到$Y = y_1, y_2, \ldots, y_m$ 的任意关系R的关系矩阵为$M_R = [m_{ij}]*{n \times m}$，其中：(注意行列关系) $ m*{ij} =

$$\{1, \quad (x, y) \in R \; 0, \quad (x, y) \notin R$$

  $$ 其中：
    - *空关系*的关系矩阵为全0矩阵。
    - *全域关系*的关系矩阵为全1矩阵。
    - *恒等关系*的关系举证为单位矩阵。
- **关系图**（有向图）若$(a_i, b_j) \in R$，则从a_i到b_j画一条有向边。

关系的性质

1. **自反性**：$\forall x(x \in A \to xRx)$或$\forall x(x \in A \to (x, x) \in R)$

- 关系矩阵的主对角线全为1
- 关系图的每个顶点都有自回环
- **充要条件**：$I_A \subseteq R$，其中I_A为A上的恒等关系

2. **反自反性**：$\forall x(x \in A \to (x,x) \notin R)$

- 关系矩阵的主对角线全为0
- 关系图的每个顶点均没有自回环
- **充要条件**：$I_A \cap R = \varnothing$,其中I_A为A上的恒等关系

3. **对称性**：$\forall x \forall y(x,y \in A \land (x,y) \in R \to (y,x) \in R)$

- 关系矩阵是对称矩阵
- 关系图中任两个顶点之间若有边，则必有两条方向相反的边。

4. **反对称性**：$\forall x \forall y(x,y \in A \land (x,y) \in R \land (y,x) \in R \to x = y)$

- 关系矩阵中关于主对角线对称的任意两个元素至多有一个1
- 关系图中任两个顶点间至多有一个方向的边

5. **传递性**：$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \land (x,y) \in R \land (y,z) \in R \to (x,z) \in R)$

- 关系矩阵$[r_{ij}]*{n \times n}*中，对*\forall i \forall j \forall k*有，若*r*{ik} = 1且r_{kj} = 1, 则r_{ij} = 1$。
- 关系图中，任意一条长度为2的路径都有从其起始顶点到终止顶点的边。

注意点

- 空集上的关系只有空关系一个，该空关系*既是自反的也是反自反的*。
- 对称性和反对称性可同时满足

关系的运算

1. **复合（合成）运算**：$R \circ S = (a,c) \mid \exists b(b \in B \land aRb \land bSc)$

- $\varnothing \circ R = R \circ \varnothing = \varnothing$
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
- $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
- $R \circ I_A = I_A \circ R = R$
- 矩阵表示：由 $M_R = (a_{ij})*{m \times n}, M_T = (b*{ij})*{n \times p}*，则：*M*{R \circ T} = M_R \circ M_T，其中M_{R \circ T} = (c_{ij})*{m \times p}, c*{ij} = \bigvee_{k = 1}^n(a_{ik} \land b_{kj})$ *（矩阵乘法）*

2. **幂运算**：$R^0 = I_A, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$

- 一般地，对于A上的关系R，有：$R^{2k+1} = R^1, R^{2k} = R^2$
- $R^m \circ R^n = R^{m+n}, (R^m)^n = R^{mn}$
- 若集合A是包含n个元素的有限集合，R是A上的关系，则：$\exists i,j \in N, R^i = R^j$

3. **逆运算**：$R^{-1} = (y,x) | (x,y) \in R$

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
- $(R^{-1})^{-1} = R, \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}, \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}, \quad (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}, \quad \overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}$

闭包运算

添加一些序列来改造R，得到新的关系R_1，使得R_1具有一些R不具有的性质。**需要满足的条件：1.包含，2.满足性质，3.最小**

1. **自反闭包**：设$R \subseteq A \times A$，则$r(R) = R \cup I_A$
2. **对称闭包**：设$R \subseteq A \times A$，则$s(R) = R \cup R^{-1}$
3. **传递闭包**：设$R \subseteq A \times A$且$|A| = n \geq 1$，则$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$

Warshall算法

用于计算传递闭包：$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j] \lor (W_{k-1}[i,k] \land W_{k-1}[k,j])$ 。 口诀：*对$k-1$的矩阵，取k行为1的列，取k列为1的行，将行列交点的0变为1。*

闭包的性质

- 设R是集合A上的二元关系：
  - R是自反的 $\leftrightarrow I_A \subseteq R$
  - R是反自反的 $\leftrightarrow R \cap I_A = \varnothing$
  - R是对称的 $\leftrightarrow R = R^{-1}$
  - R是反对称的 $\leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
  - R是传递的 $\leftrightarrow R^2 \subseteq R$
- 若$R \subseteq A \times A$，则
  - $r(s(R)) = s(r(R))$
  - $r(t(R)) = t(r(R))$
  - $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$

关系与有向图

相关概念

- **出度**：发出多少条边。
- **入度**：多少条边进来。
- **路径长度**： 一条边或多条边相连的序列。其中长度指单位边的个数。
- **环或回路**：在*同一顶点*开始和结束的长度大于等于1的路径。

幂运算与路径长度

- R的n次幂R^n表示在关系R中存在从x到y的长度为n的一条路径。
- R^∞意指R中存在从x到y的某条道路，也称为R的**联通关系。**

等价关系

若R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的**等价关系**

- 若$(a,b) \in R$，称a等价b，记为$a \sim b$。
- 由于R具有对称性，因此等价具有交换性。
- 证明等价性，需要把自反性、对称性和传递性都进行证明。

等价类

设R为非空集合A上的等价关系，对$\forall a \in A$，令$[a]_R = x | x \in A \land aRx$，称$[a]_R$为a关于R的**等价类**

- a的等价类是集合A中**所有与a等价的元素构成的集合**
- 性质：
  - $[a]_R \neq \varnothing$
  - 若$(a,b) \in R$，则：$[a]_R = [b]_R$，即等价的元素的等价类相同。
  - 若$(a,b) \notin R$，则：$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$，即不等价的元素的等价类不相交。
  - $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i]_R = A$，即所有元素的等价类的并为A

商集

以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**，记作A/R

- $A/R = [x]_R | x \in A$

划分

设A为非空集合，若A的子集簇$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足：

- $\varnothing \notin \pi$（划分块不能为空）
- $\forall x \forall y (x, y \in \pi \land x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$ （不同划分块不相交）
- 所有的划分块的并集为A

等价、商集与划分的关系

- 若R为A上的一个等价关系，则对应R的商集A/R为A的一个划分。
- 设$A_1, A_2, ..., A_n$为A的任一划分，将每一个划分块看作一个等价类，则有$R=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times A_i)$