离散数学作业 _3

李云浩 241880324

2025 年 4 月 3 日

1 1.3

1.1 T23

A 无限集、不可数。 B 有限集、可数 C 无限集、可数 D 有限、可数 E 有限、可数

1.2 T24

A 无限、可数 B 有限、可数 C 无限、可数 D 无限、不可数 E 无限、不可数

2 3.1

2.1 T25

$\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$

2.2 T26

先把 n 个人排成一列，共有 A_n^n 种排序方法，但由于最后是围绕称一个圆桌。因此相当于把这一列首尾相连，此后谁是首无需在意。因此在次序不变时，n 个人轮流为首的 n 种情况是等价的。因此要对原来的结果除以 n。故答案为：$\frac{A_n^n}{n}$

2.3 T29

证明：$n \times_{n-1} P_{n-1} =_n P_n$
由于：$_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$, $\quad _{n-1}P_{n-1} = \frac{(n-1)!}{[n-1-(n-1)]} = (n-1)!$
所以：$n \times_{n-1} P_{n-1} = n \times (n-1)! = n! =_n P_n$. 证毕。

2.4 T34

末位 0 的个数取决于对 $n!$ 的项进行质因数分解后可以组成多少个 2×5 的搭配。因为 2 的数量显然要比 5 多，因此末尾 0 的个数只取决于 $n!$ 的项中的因数 5 的数目。其中，25 中有两个因数 5，125 中有三个因数 5，……因此对于 $5^k \leq n < 5^{k+1}$，$n!$ 中某位 0 的个数为：$\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{25}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{5^k}\right]$。其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。

3 3.2

3.1 T19

证明：$_{n+1}C_r =_n C_{r-1} +_n C_r$ 因为：$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$，
所以：$_{n+1}C_r = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \quad _nC_{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$，因此：

$$\begin{aligned}
_nC_{r-1} +_n C_r &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{rn!}{(n-r+1)r!(n-r)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \left(1 + \frac{r}{n-r+1}\right) \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\
&=_{n+1} C_r
\end{aligned}$$

证毕。

3.2 T23

(a) 每次有两种可能，故 n 次的记录序列为 2^n。
(b) 恰好有 3 个反面，即在 n 个记录里抽 3 个记录，令其为反面，故为：C_n^3。
(c) 恰好包含 k 个正面，即在 n 个记录里抽 k 个记录，令其为正面，故为：C_n^k。

3.3 T27

(a) 后继第一行：1 5 10 10 5 1，后继第二行：1 6 15 20 15 6 1，后继第三行：1 7 21 35 35 21 7 1。(b) 设由第 n - 1 行得到第 n 行，满足下列规则：$a_{(n,1)} = a_{(n,n)} = 1, \quad a_{(n,k)} = a_{(n-1,k-1)} + a_{(n-1,k)}$

3.4 T32

猜想:2^{n-1}。
证明：因为 Pascal 三角形满足下列递推关系：

$$a_{(n,1)} = a_{(n,n)} = 1, \quad a_{(n,k)} = a_{(n-1,k-1)} + a_{(n-1,k)}$$

其中 Pascal 三角形的起始条件为:$a_{2,1} = a_{2,2} = 1$。因为对于 C_n 存在同样的递推关系：

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$$

其中 C_n 的起始条件为：$C_1^0 = C_1^1 = 1$。可以观察到二者的递推关系以及起始条件等价，C_n^k 与 $a_{n+1,k+1}$ 也等价。因此 $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i}$，故 $\sum_{i=1}^{n} a_{n,i} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = 2^{n-1}$。

4 3.3

4.1 T10

因为前六个数的和为:$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$，后六个数的和为：$10+11+12+13+14+15 = 75$。两者之差为 $75-21 = 54$，故区间长度为 55。任意选 6 个整数，它们之和一定也落在这个长度为 55 的区间内。因为 $C_1 5^6 = 5005$，根据鸽巢原理，把 5005 个数分配到长度为 55 的区间内，一定有 $\frac{(5005-1)}{55} + 1 > 91$。因此一定有 90 种方法的使得所有的选择有相同的和。

4.2 T12

若题目为不超过 $\sqrt{2}$，则对于边长为 1 的正方形而言，最长的线段为对角线长度为 $\sqrt{2}$，不超过 $\sqrt{2}$，因此显然满足。

若题目为不超过 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，可以将大正方形平分为 4 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形，因为一共有 5 个点，因此一定有一个小正方形里面有两个点。因为小正方形内最长的线段为对角线，长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此，该两个点的距离不超过 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。证毕。

4.3 T17

当 n 为偶数时，当子集取 $\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \ldots, n\}$ 时，显然这个子集不存在一个数是另一个数的倍数。但是当取多一个 $\frac{n}{2}-1$ 时，那么 $2\times\left(\frac{n}{2}-1\right)$ 一定在这个子集之中。因此子集大小为：$\frac{n}{2}+1$。当 n 为奇数时，n - 1 为偶数，因此子集取 $\frac{n+1}{2}+1$。

综上所述：子集应该取 $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ 大小时，才能保证该子集中的一个数是同一个子集的另一个数的倍数。

4.4 T18

有可能，当选出的 10 张为：$1\sim 10$ 时，其中任选两张卡片组成的最大的和为 19，小于 21，获胜。

4.5 T19

要使两张牌的和为 21，那么组合可以是：$1+20, 2+19, \ldots, 10+11$，共有 10 种搭配，要不使两张牌的和为 21，则选的牌里面不可以有两张牌能组成上面的一个搭配。那么假设每种搭配只选取一张，那么我只能选取出 10 张，剩下的两张必定会与一开始选的 10 张之中的两张成功配对。因此不可能赢得这个游戏。

4.6 T21

考虑和数 $c_1, c_1+c_2, \ldots, c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6$，一共有六个数，分别除以 6 时，会得到相应的余数，记为：$n_1, n_2, \ldots, n_6$。因为除以 6 之后的余数可能仅有 6 种可能。若 $n_1\sim n_6$ 中，存在 $n_k=0$, 则说明其对应的和数

被 6 整除。若 $n_1 \sim n_6$ 中，不存在 $n_k = 0$，则该六个余数对应只有 5 种可能，根据鸽巢原理，必有 $n_i = n_j, i < j$。因此用第 j 个和数与第 i 个和数做差，其差同样为该六个整数的任意序列的和，并且能被 6 整除。证毕。

4.7 T22

考虑和数 $c_1, c_1 + c_2, \ldots, c_1 + c_2 + \cdots + c_n$，分别记为 $m_1, m_2, \ldots m_n$，一共有 n 个数。分别除以 n 时会得到相应的余数，记为：$q_1, q_2, \ldots, q_n$。因为除以 n 之后的余数可能仅有 n 种可能。若 $q_1 \sim q_n$ 种，存在 $q_k = 0$，则说明 m_k 能够被 n 整除。若 $q_1 \sim q_n$ 中，不存在 $q_k = 0$，则该 n 个余数对应只有 $n - 1$ 种可能，根据鸽巢原理，必有 $n_i = n_j, i < j$。因此用第 j 个和数与第 i 个和数做差，其差为：$c_{i+1} + c_{i+2} + \cdots + c_j$，为 n 个整数的任意序列的和，并且能被 n 整除。证毕。

4.8 T23

讨论六个正整数中 1 的个数。

- 有三个及以上个 1，那么必有子集 {1, 1, 1}，其和为 3。
- 有且只有两个 1，如果存在 2 的话，那么有子集, {1, 2}，其和为 3。如果不存在 2 的话，那么剩下 4 个数字最小为 4(因为如果含有 3 的话，那么 3 自己就是一个和为 3 的子集)，$1 + 1 + 4 \times 4 = 18 > 13$，不满足。
- 有且只有一个 1，如果存在 2 的话，那么有子集, {1, 2}，其和为 3。如果不存在 2 的话，那么剩下 5 个数字最小为 4，显然不满足和为 13。
- 如果一个 1 也不存在的话，由于和为 13，显然需要一个奇数元素，那么这个奇数元素只能是 5，其他 5 个元素最小为 2，$5 + 5 \times 2 = 15 > 13$，不满足。

综上所述，6 个正整数的任意集合之和若是 13，则它一定有一个和为 3 的子集。

4.9 T24

任意一个有理数都可以表示为 $\frac{a}{b}$，其中 $a, b \in \mathbf{Z}, b > 0$。对于任意的一个 b，其可能的余数的数目为 b 个。因此 $\frac{a}{b}$ 利用保留余数的除法，除上 b

次之后，根据鸽巢原理，必定会有一次余数为 0 或者两次余数相等。余数为 0 时，说明除出来的是一个有限的数。两次余数相等说明会有重复的部分。证毕。

5 3.4

5.1 T34

(a)$P_a = \frac{5\times 3}{6^3} = \frac{5}{72}$ (b)$P_b = \frac{10+6+3+1}{6^3} = \frac{5}{54}$ (c)$P_c = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$ (d)$P_d = \frac{3\times 5\times 5+5^3}{6^3} = \frac{25}{27}$ (e)$P_e = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$

5.2 T37

当关键字在第一个位置的时候，需要一步；在第二个位置的时候，需要两步；………；在第 n 个位置的时候，需要 n 步。因为关键字在各个位置的概率是相等的，因此平均步数为：$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$。

5.3 T38

如果不假设关键字在数组里，那么该题就成为了一个条件概率。设事件 A 为关键字在数组里，事件 B 为找到字的平均步数。因此 $P(B \mid A) = \frac{n+1}{2}$， $P(B \mid \overline{A}) = 0$。

5.4 T39

游戏者获胜的情况分别为：$\{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$，共有 6 种情况。游戏期望为：$10\times\frac{3}{36} + 11\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{1}{36} - 3 = -\frac{11}{9}$。

5.5 T40

要是一个游戏公平，那么总期望应该为 0。设花费为 x，那么：

$$10\times\frac{3}{36} + 11\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{1}{36} - x = 0$$

解得：x = $\frac{16}{9}$。

5.6 T41

(a) 满足号数为奇数且不是黑色的纸牌一共有 8 张，因此：
$\frac{C_8^2}{C_{52}^2} = \frac{14}{663}$。

(b) 满足号数为奇数且不是黑色的纸牌一共有 8 张，但是不是黑色的纸牌有 26 张。因此：假设有且只有一张是奇数，$P_1 = 2 \times \frac{C_8^1}{C_{52}^1} \times \frac{C_{26}^1}{C_{52}^1} = \frac{2}{13}$。假设两张都是奇数，由 (a) 可知，$P_2 = \frac{14}{663}$。因此总概率为：$P_1 + P_2 = \frac{116}{663}$

6 3.5

6.1 T14

$$\begin{aligned}
c_n &= c_{n-1} + n \\
&= c_{n-2} + n + (n-1) \\
&\vdots \\
&= c_1 + n + (n-1) + \cdots + 2
\end{aligned}$$

因为 $c_1 = 4$，因此 $c_n = 3 + \frac{(n+1)n}{2}$。

6.2 T18

因为 $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$，得特征方程：$r^2 - 4r - 5 = 0$。解得：$r_1 = 5, r_2 = -1$。设 $a_n = \alpha_1 5^n + \alpha_2 (-1)^n$。因为 $a_1 = 2, a_2 = 6$，带入解得:$\alpha_1 = \frac{4}{15}, \alpha_2 = -\frac{2}{3}$。所以：$a_n = \frac{4}{15} 5^n - \frac{2}{3}(-1)^n$。

6.3 T26

(a) $r_n = r_{n-1} + n$。

(b)

$$\begin{aligned}
r_n &= r_{n-1} + n \\
&= r_{n-2} + n + (n-1) \\
&\vdots \\
&= r_1 + n + (n-1) + \cdots + 2
\end{aligned}$$

因为一条直线的时候，把平面分成了两个部分，即 $r_1 = 2$。因此 $r_n = \frac{(n+1)n}{2} + 1$。

6.4 T28

因为 $x^2 - r_1x - r_2 = 0$ 有唯一单根 s，因此 $r_1^2 + 4r_2 = 0, s^2 - r_1s - r_2 = 0a_n = us^n + vns^n$，尝试推导出 $a_n = r_1a_{n-1} + r_2a_{n-2}$。

$$\begin{aligned}
a_n &= us^n + vns^n \\
&= us^{n-2}s^2 + vns^{n-2}s^2 \\
&= us^{n-2}(r_1s + r_2) + vns^{n-2}(r_1s + r_2) \\
&= r_1us^{n-1} + r_2us^{n-2} + r_1vns^{n-1} + r_2vns^{n-2} \\
&= r_1(us^{n-1} + vns^{n-1}) + r_2(us^{n-2} + vns^{n-2}) \\
&= r_1a_{n-1} + r_2a_{n-2}
\end{aligned}$$

证毕。

6.5 T34

(a) 三阶。(b) 由：$a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$，得特征方程：$r^3 - 7r - 6 = 0$。解得：$r_1 = -1, r_2 = 3, r_3 = -2$。因此:$a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(3)^n + \alpha_3(-2)^n$。因为：$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 10$。解得：$\alpha_1 = -\frac{7}{2}, \alpha_2 = \frac{17}{30}, \alpha_3 = \frac{11}{10}$。故递归关系为：$a_n = -\frac{7}{2}(-1)^n + \frac{17}{30}(3)^n + \frac{11}{10}(-2)^n$。

6.6 T36

因为：$b_1 = 1, b_2 = 3, b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$，因此 $b_3 = 7 < (\frac{5}{2})^3 = 15.625$。假设对 $n = k-1, n = k-2$ 时，有 $b_{k-1} < (\frac{5}{2})^{k-1}, b_{k-2} < (\frac{5}{2})^{k-2}$。下证：对

于 $n = k$，有 $b_k < (\frac{5}{2})^k$ 成立。

$$\begin{aligned}
b_k &= b_{k-1} + 2b_{k-2} \\
&< (\frac{5}{2})^{k-1} + 2(\frac{5}{2})^{k-2} \\
&= \frac{2}{5}(\frac{5}{2})^k + \frac{8}{25}(\frac{5}{2})^k \\
&= \frac{18}{25}(\frac{5}{2})^k \\
&< (\frac{5}{2})^k
\end{aligned}$$

证毕。