离散数学作业 _4

李云浩 241880324

2025 年 4 月 22 日

1 4.1

1.1 T16

对于 $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a,b,c)|a \in A_1 \wedge b \in A_2 \wedge c \in A_3\}$, 因此可能元素的个数为：$C_{n_1}^1 \times C_{n_2}^1 \times C_{n_3}^1 = n_1 \times n_2 \times n_3$. 证毕。

1.2 T18

投影 (选择　雇员 [部门 = 人力资源部 $\vee$ 公共关系])

1.3 T24

不是，划分要求所有划分块的并集应该为原集合。但是因为 $0 \in Z, 0 \notin A_1 \cup A_2$，因此 $\{A_1, A_2\}$ 不是 Z 的一个划分。

1.4 T30

(a) $A_1 = \{x|x \in B \wedge x \mid 2\}, A_2 = \{x|x \in B \wedge x \nmid 2\}$。$\{A_1, A_2\}$ 是 B 的一个划分。

(b) $A_1 = \{x|x \in B \wedge x \mid 9\}, A_2 = \{x|x \in B \wedge x \nmid 9 \wedge x \mid 6\}, A_3 = \{x|x \in B \wedge x \nmid 9 \wedge x \nmid 6 \wedge x \mid 3\}$。$\{A_1, A_2, A_3\}$ 是 B 的一个划分。

1.5 T31

$\{\{1,2,3\}\}, \{\{1\},\{2,3\}\}, \{\{2\},\{1,3\}\}, \{\{3\},\{1,2\}\}, \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

1.6 T33

由已知有：$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 3$，在 31 题中，两个子集的划分数也为 3，符合预期。

1.7 T34

由已知有：$S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2) = 1 + 2 \times 3 = 7$。

1.8 T35

$S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,3) = 3 + 3 \times 1 = 6.$

1.9 T36

$S(5,2) = S(4,1) + 2S(4,2) = 1 + 2 \times \{S(3,1) + 2S(3,2)\} = 1 + 2 \times \{1 + 2 \times 3\} = 15$

1.10 T37

设 $(a,b) \in A \times (B \cup C)$，有：

$$\begin{aligned} a(A \times (B \cup C))b &= a(A \times (Bb \cup Cb)) \\ &= aA \times (Bb \cup Cb) \\ &= aA \times Bb \cup aA \times Cb \\ &= a(A \times B)b \cup a(A \times C)b \\ &= a((A \times B) \cup (A \times C))b \end{aligned}$$

因此，$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

1.11 T38

由已知有:$B \cap C = \{7\}, A \times B = \{(1,2),(1,5),(1,7),(2,2),(2,5),(2,7),(4,2),(4,5),(4,7)\}$
$A \times C = \{(1,1),(1,3),(1,7),(2,1),(2,3),(2,7),(4,1),(4,3),(4,7)\}$
因此:$A \times (B \cap C) = \{(1,7),(2,7),(4,7)\}, (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,7),(2,7),(4,7)\}.$
可知：$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

设 $(a,b) \in A \times (B \cap C)$，有：

$$\begin{aligned} a(A \times (B \cap C))b &= a(A \times (Bb \cap Cb)) \\ &= aA \times (Bb \cap Cb) \\ &= aA \times Bb \cap aA \times Cb \\ &= a(A \times B)b \cap a(A \times C)b \\ &= a((A \times B) \cap (A \times C))b \end{aligned}$$

因此 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$。

1.12 T39

将 B 的划分中的各个集合中的独属于 B 的元素删去，若删去后为空集则直接将该集合去掉，否则则保留删除后的集合。那么新子集组成的集合便是 A 的一个划分。

下面验证该过程：1. 删去了所有的空集，因此划分块不为空。2. 新的划分块是在 B 的划分块中删元素，原来不相交，删除元素后也不会相交。3. 因为只删去了独属于 B 的元素，因此新的划分包含 A 的所有元素。检验完毕。

1.13 T40

1. 证明划分块不为空，因为 $A_i \neq \varnothing, B_j \neq \varnothing$，因此 $A_i \times B_j \neq \varnothing$。
2. 证明划分块不相交，因为 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ 是 A 的一个划分，因此对于 $\forall i, j, i \neq j, \forall x \in A_i \to x \notin A_j$。同理，B 也一样。因此对于 $\forall (x,y) \in A_i \times B_j, \to \forall m \neq i \forall n \neq j, (x \notin A_m \wedge y \notin B_n \to (x,y) \notin A_m \times B_n)$。3. 证明划分块的并集为 $A \times B$。由题目可知，每一个 A_i 都与 B_j 计算笛卡尔积，且 A_i, B_j 分别包含 A，B 中的所有元素。因此所有 $A_i \times B_j$ 的并集为 $A \times B$。

2 4.2

2.1 T20

1. 证明：$\forall a \forall b(a, b \in A \wedge a \neq b \wedge R(a) \cap R(b) = \{\ \}) \subseteq R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$

因为 $R(a) \cap R(b) = \{\ \}$。

如果 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 那么 $R(A_1 \cap A_2) = R(\varnothing) = \{\ \}$。由于 A_1 和 A_2 之中没有重复元素，因此对于任意 A_1, A_2 中的元素 a, b，$R(a) \cap R(b) = \{\ \}$，所以 $R(A_1) \cap R(A_2) = \{\ \}$。

如果 $A_1 \cap A_2 = A_3$，那么 $R(A_1 \cap A_2) = R(A_3)$，$R(A_1) \cap R(A_2) = (R(A_1 - A_2) \cup R(A_3)) \cap R(A_2) = (R(A_1 - A_2) \cap R(A_2)) \cup (R(A_3) \cap R(A_2)) = R(A_3)$，所以 $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$。

2. 证明：$R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2) \subseteq \forall a \forall b(a, b \in A \wedge a \neq b \wedge R(a) \cap R(b) = \{\ \})$

反证法：假设 $R(a) \cap R(b) \neq \{\ \}$。那么取子集 A_1, A_2 分别为 $\{a\}, \{b\}$。$R(A_1 \cap A_2) = R(\varnothing) = \{\ \}$。但是 $R(a) \cap R(b) \neq \{\ \}$。因此 $R(A_1 \cap A_2) \neq R(A_1) \cap R(A_2)$。

因此 $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2) \subseteq \forall a \forall b(a, b \in A \wedge a \neq b \wedge R(a) \cap R(b) = \{\ \})$

2.2 T25

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 T26

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 T28

顶点	入度	出度
1	1	3
2	2	2
3	2	0
4	2	3
5	1	0

2.5 T32

只保留 B 中元素所代表的行和列。

2.6 T34

设 $M_R = [m_{ij}]_{n\times n}$

(a) $R(a_k) = \{m_{ki} | m_{ki} = 1 \wedge 0 \leq i \leq n\}$

(b) $R(\{a_l, a_j, a_n\}) = \{m_{ij} | m_{ij} = 1 \wedge (i = l \vee i = j \vee i = n) \wedge m_{ij} = 1\}$

2.7 T36

因为 $|\{1, 2, 3\}| = 3, |\{a, b\}| = 2$，所以 S 中关系的数量为 $2^{3\times 2} = 2^6 = 64$

3 4.3

3.1 T18

$$\begin{aligned} M_{R\cup S} &= \{m_{ij} | i(R\cup S)j\} \\ &= \{m_{ij} | iRj \vee iSj\} \\ &= \{m_{ij} | iRj\} \vee \{m_{ij} | iSj\} \\ &= M_R \vee M_S \end{aligned}$$

3.2 T19

因为 R^* 的定义是 $x = y$ 或 $xR^\infty y$。因此 $M_{R^*} = \{m_{ij}|i = j\} \vee \{m_{ij}|xR^\infty y\}$ 所以 $M_{R^*} = M_{R^\infty} \vee I_n$

3.3 T20

$\pi_2 \circ \pi_1 = 1, 2, 4, 3, 5, 6, 4$

3.4 T21

$\pi_2 \circ \pi_1 = 1, 7, 5, 6, 7, 4, 3$

3.5 T27

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ 其中 m_{ij} 表示从 i 到 j 且长度为 2 的路线的数目。

3.6 T28

$$(M_R)^3 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ 显然，$(M_R)^3$ 的 m_{ij} 不表示从 i 到 j 且长度为 3 的路线的数目。

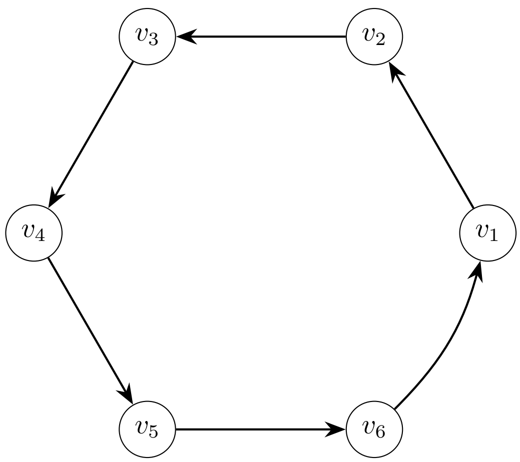
3.7 T30

(a) 定理 2 先说明了 P(2) 为真，在此基础上以 P(n) 为真作为前提条件，从而推导出 P(n + 1) 为真，最后便可以通过归纳得出结论，即：对于整数 $n \leq 2, P(n)$ 成立。(b) 以 P(n) 成立作为前提条件，并把 P(n) 翻译为自然语言，通过自然语言建立 P(n) 与 P(n + 1) 的联系。

3.8 T31

设一共有 n 个顶点，且每个顶点的出度不为 1。那么 $\forall n \in Z, R^n$ 不为空，因为每个顶点皆有出度。但由于只有 n 个顶点，但 R^∞ 存在，即存在一条无限长的路径，因此有向图中有环。因此可以得出，如果在 D 中无任何环，那么至少有一个顶点的出度是 0

3.9 T32



3.10 T33

将有向图转换为关系矩阵，这样可以更加直观的看出。

4 4.4

4.1 T14

1. 自反性：$\forall x \in A, |x-x| = 0 \leq 2$ 成立，因此 $\forall x \in A \rightarrow (x,x) \in R$。满足自反性。
2. 反自反性：由于满足自反性，因此不满足反自反性。
3. 对称性：$\forall a,b \in A, |a-b| = |b-a|$，因此 $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$，满足对称性。
4. 反对称性：反例：$(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R \wedge 2 \neq 1$，因此不满足反对称性。

5. 传递性：反例：$(0,2) \in R \wedge (2,4) \in R$，但是 $(0,4) \notin R$，因此不满足传递性。

4.2 T16

1. 自反性：$\forall x \in A, x+x=2x$，为 2 的倍数即偶数，因此满足自反性。
2. 反自反性: 由于满足自反性，因此不满足反自反性。
3. 对称性：$\forall a,b \in A, a+b=b+a$。因此 $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \to (b,a) \in R$。
4. 反对称性：反例：$(2,4) \in R \wedge (4,2) \in R \wedge 2 \neq 4$，因此不满足反对称性
5. 传递性：如果 $a+b$ 为偶数，那么 a, b 要么同为奇数，要么同为偶数。因此，对应奇偶性明确的数字 b, 如果 $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$，那么 a,c 的奇偶性一定与 b 等同，因此 a,c 的奇偶性一致，因此 $(a,c) \in R$。满足传递性。

4.3 T18

1. 自反性：反例：$4 \in A, (4,4) \notin R$，因此不满足自反性
2. 反自反性: 反例：$\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in R$，因此不满足反自反性
3. 对称性：因为 $\forall a,b \in A, a^2+b^2=b^2+a^2$，因此 $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \to (b,a) \in R$，满足对称性
4. 反对称性：取 $a=1, b=\sqrt{3}$，因为 $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge a \neq b$，因此不满足反对称性。
5. 传递性：反例：$(1,\sqrt{3}) \in R \wedge (\sqrt{3},1) \in R \wedge (1,1) \notin R$，因此不满足传递性。

4.4 T20

1. 自反性：$\forall (a,b) \in A$, 因为 $a=a$，所以有 $(a,b)R(a,b)$ 满足自反性。
2. 反自反性: 由于满足自反性，因此不满足反自反性。
3. 对称性：$\forall (a,b),(c,d) \in A$，如果 $a=c \to c=a$，因此 $(a,b)R(c,d) \to a=c \to (c,d)R(a,b)$，因此满足对称性
4. 反对称性：反例：$(1,3)R(1,4) \wedge (1,4)R(1,3) \wedge (1,3) \neq (1,4)$，因此不满足反对称性。
5. 传递性：$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in A \wedge (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$, 因此有：$a=c, c=e$，因此 $a=e \to (a,b)R(e,f)$，因此满足传递性。

4.5 T22

1. 自反性：因为直线平行于自身，因此 $\forall l_i \in A, l_iRl_i$，满足自反性。
2. 反自反性: 由于满足自反性，因此不满足反自反性。
3. 对称性：因为 $l_i \parallel l_j \to l_j \parallel l_i$，因此 $\forall l_i, l_j \in A \land l_iRl_j \to l_jRl_i$，因此满足对称性。
4. 反对称性：反例：$l_1 : y = x, l_2 : y = x + 1$，因此 $l_1Rl_2 \land l_1 \neq l_2$，因此不满足反对称性。
5. 传递性：因为平行本身具有传递性，因此 $\forall l_i, l_j, l_k \in A$，如果 $l_iRl_j \land l_jRl_k \to l_iRl_k$，因此满足传递性

4.6 T31

因为集合 A 上的关系是反自反，因此其关系矩阵中的主对角线上全为 0. 那么证明该集合的关系具有反对称的性质可以转换为证明 $\nexists a, b \in A, aRb \land bRa$。
下用反证法，不妨假设 $\exists a, b \in A, aRb \land bRa$, 因为该关系具有传递性，$aRb \land bRa \to aRa$，与反自反的条件不符，因此假设不成立。因此 $\nexists a, b \in A, aRb \land bRa$，故该关系是反对称的，并且因为主对角线元素全为 0，所以还是非对称的。

4.7 T32

反证法：假设 R^2 不满足传递性，则 $\exists a, c, e \in A, aRc \land cRe \land a\not{R}e$。因为 R^2 是由 R 复合运算得来的，因此 $\exists b, d \in A, aRb, bRc, cRd, dRe$。因为 R 是传递的，那么在 R 中一定还有 $aRc \land cRe$，因此 $R^2 = R \circ R$ 中会含有 aRe，与假设不符，因此假设不成立。
故如果 A 上的关系 R 是传递的，那么 R^2 也是传递的。

4.8 T33

因为 R 是对称的，因此 $\exists a, b \in A, aRb \land bRa$，又因为 R 是传递的，因此 $aRb \land bRa \to aRa$，因此 $\exists a \in A, (a, a) \in R$，因此 R 不是非自反的。

4.9 T34

$\forall(a,c) \in R^2$，因为 R^2 是由 R 复合而成，因此 $\exists b \in A, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$，又因为 R 是对称的，因此 $(c,b) \in R \wedge (b,a) \in R$. 又因为 $R^2 = R \circ R$，因此 $(c,a) \in R^2$。即 $\forall(a,c) \in R^2 \to (c,a) \in R^2$，因此 R^2 也是对称的。

4.10 T35

当 n = 1 时，显然成立。当 n = 2 时，已有上题证出。
不妨假设当 $n = k$ 时，结论成立，即 R^k 是对称的，下证 R^{k+1} 也是对称的。
$\forall(a,c) \in R^{k+1}$，因为 $R^{k+1} = R^k \circ R$，因此 $\exists b \in A, (a,b) \in R^k \wedge (b,c) \in R$ 因为 R 和 R^k 是对称的，因此 $(b,a) \in R^k \wedge (c,b) \in R$。又因为 $R^{k+1} = R \circ R^k$，因此 $(c,a) \in R^{K+1}$。即 $\forall(a,c) \in R^{k+1} \to (c,a) \in R^{k+1}$，因此 R^{k+1} 也是对称的。
根据数学归纳法得出：如果 A 上的关系 R 是对称的，那么 R^n 对于任意 $n \geq 1$ 也是对称的。

4.11 T36

定义：差 3 关系，即两数之差为 3 的倍数。$R = \{(a,b)|(a-b) \mid 3\}$。
1. 自反性：$\forall a \in Z^+, a - a = 0$，为 3 的倍数，因此 $\forall a \in Z^+, aRa$。满足自反性。
2. 对称性：$\forall a, b \in Z^+$，如果 $(a,b) \in R$，即 $(a-b) \mid 3$，即 $\exists m \in Z, a-b = 3m$。因此 $b-a = -3m$，仍为 3 的倍数。因此 $\forall a, b \in Z^+ \wedge (a,b) \in R \to (b,a) \in R$，满足对称性。
3. 传递性：$\forall a, b, c \in Z^+, aRb, bRc$，因此 $\exists m, n \in Z, (a-b) = 3m, (b-c) = 3n$。那么 $a - c = a - b + (b - c) = 3m + 3n = 3(m+n)$，仍为 3 的倍数。所以 $\forall a, b, c \in Z^+ \wedge aRb \wedge bRc \to aRc$，满足传递性。

4.12 T38

(a) $R = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$
(b) $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,c)\}$

4.13 T40

1. 充分性：R 是传递的 $\rightarrow$ 对于所有 $n \geq 1, R^n \subseteq R$。
利用数学归纳法：当 $n=2$ 时，因为 $R^2 = R \circ R$，因此 $\forall (a,c) \in R^2 \rightarrow \exists b \in A \wedge (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$。因为 R 具有传递性，因此 $(a,c) \in R$。即 $\forall (a,c) \in R^2 \rightarrow (a,c) \in R$。即 $R^2 \subseteq R$。
当 $n \geq 2$ 时，不妨设 $n = k-1$ 时，有 $R^{k-1} \subseteq R$。下证 $R^k \subseteq R$。
因为 $R^k = R^{k-1} \circ R$，$\forall (a,c) \in R^k \rightarrow \exists b \in A \wedge (a,b) \in R^{k-1} \wedge (b,c) \in R$。又因为 $R^{k-1} \subseteq R$，因此 $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$。因为 R 具有传递性，因此 $(a,c) \in R$。即 $\forall (a,c) \in R^k \rightarrow (a,c) \in R$, 因此 $R^k \subseteq R$。证毕。

2. 必要性：对于所有 $n \geq 1, R^n \subseteq R \rightarrow$ R 是传递的。
取 $n=2$，有：$R^2 \subseteq R$。$\forall (a,b),(b,c) \in R$，因为 $R^2 = R \circ R$。因此 $(a,c) \in R^2$。又因为 $R^2 \subseteq R$，因此 $(a,c) \in R$。即 $\forall (a,b),(b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$。因此 R 是传递的，证毕。

5 4.5

5.1 T19

(a)1. 自反性：$\forall (a,b) \in A, a^2+b^2 = a^2+b^2$，因此 $(a,b)R(a,b)$，满足自反性。
2. 对称性：$\forall (a,b) \in A, a^2+b^2 = b^2+a^2$，因此 $(a,b)R(b,a)$，满足对称性。
3. 传递性：$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in A \wedge (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$。因此 $a^2+b^2 = c^2+d^2 = e^2+f^2$，所以 $a^2+b^2 = e^2+f^2$，即 $(a,b)R(e,f)$。故 $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in A \wedge (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \rightarrow (a,b)R(e,f)$。满足传递性。
因为关系 R 满足自反、对称、传递性，因此 R 是 A 上的一个等价关系。

(b) 在每个等价类中，$a^2+b^2 = c^2+d^2$，可以理解为坐标到原点的距离相等，即圆。因此 A/R 为以原点为圆心的无数个圆。

5.2 T20

因为等价关系具有对称性，因此只观察关系矩阵的右上角部分，有：$\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(e,e)\} \subseteq R$,因此不难得出：a 与 b, c, e 等价，d 与自身等价。因此 $A/R = \{\{a,b,c,e\},\{d\}\}$

5.3 T22

(a)1. 自反性：$\forall(a,b)\in A, a+b=a+b$，因此 $(a,b)R(a,b)$。满足自反性。
2. 对称性：$\forall(a,b)\in A, a+b=b+a$，因此 $(a,b)R(b,a)$。满足对称性。
3. 传递性：$\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in A\wedge(a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(e,f)$。因此：$a+b=c+d=e+f$，有 $(a,b)R(e,f)$。因此满足传递性。
因此 R 是一个等价关系。(b) 可以根据 $a+b$ 的和来进行等价类划分。$A/R=\{\{(1,1)\},\{(1,2),(2,1)\},\{(1,3),(3,1),(2,2)\},\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},\{(2,4),(3,3),(4,2)\},\{(3,4),(4,3)\},\{(4,4)\}\}$

5.4 T23

1. 充分性：R 是自反的和循环的 $\to$ R 是一个等价关系。
证 R 是等价关系，即证 R 具有自反、对称、传递性。已知，R 具有自反性。对称性：$\forall(a,b)\in R$，因为自反性，所以 $(a,a)\in R$，根据传递性可以得：$(a,a)\in R\wedge(a,b)\in R\to(b,a)\in R$。即：$\forall(a,b)\in R\to(b,a)\in R$。因此 R 是对称的。
传递性：$\forall(a,b),(b,c)\in R$ 根据循环性，所以 $(c,a)\in R$。又因为对称性，所以 $(a,c)\in R$。因此 $\forall(a,b),(b,c)\in R\to(a,c)\in R$。

2. 必要性：R 是等价关系 $\to$ R 是自反的和循环的。
因为 R 是等价的，因此 R 一定是自反的。又因为 $\forall(a,b),(b,c)\in R$，因为 R 是等价的，因此 R 具有传递性，所以 $(a,c)\in R$。又因为 R 具有传递性，所以 $(c,a)\in R$。即 $\forall(a,b),(b,c)\in R\to(c,a)\in R$。因此 R 是循环的。

5.5 T24

1. 自反性：$\forall x\in A$，因为 R_1,R_2，具有自反性，所以 $(x,x)\in R_1,(x,x)\in R_2$。因为 $R_1\cap R_2$ 即取 R_1,R_2 中的公共元素。因此 $(x,x)\in R_1\cap R_2$。即:$\forall x\in A\to(x,x)\in R_1\cap R_2$。满足自反性。
2. 对称性：

$$\begin{aligned}\forall(a,b)\in R_1\cap R_2 &\Rightarrow (a,b)\in R_1\wedge(a,b)\in R_2\\&\Rightarrow (b,a)\in R_1\wedge(b,a)\in R_2\\&\Rightarrow (b,a)\in R_1\cap R_2\end{aligned}$$

因此 $R_1 \cap R_2$ 满足对称性。
3. 传递性：

$$\begin{aligned}\forall (a,b),(b,c) \in R_1 \cap R_2 &\Rightarrow (a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2 \wedge (a,b) \in R_2 \\ &\Rightarrow (a,c) \in R_1 \wedge (a,c) \in R_2 \\ &\Rightarrow (a,c) \in R_1 \cap R_2\end{aligned}$$

因此 $R_1 \cap R_2$ 满足传递性。
综上所述，$R_1 \cap R_2$ 是 A 上的一个等价关系。

5.6 T27

因为 R 是模 2 同余关系，有 $\forall x \in R(a)$，x 与 a 的奇偶性相同。
情况 1：a,b 同奇偶性，因为 $R(a)+R(b)=\{x|x=s+t, s \in R(a), t \in R(b)\}$，且 s,t 的奇偶性也相同，因此 $\forall x \in (R(a)+R(b))$ 一定为偶数。又因为 a,b 同奇偶性，因此 $a+b$ 亦为偶数。因此：$\forall x(x \in (R(a)+R(b)) \leftrightarrow x \in R(a+b))$。
情况 2:a,b 的奇偶性相反，因为 $R(a)+R(b)=\{x|x=s+t, s \in R(a), t \in R(b)\}$，且 s,t 的奇偶性也相同，因此 $\forall x \in (R(a)+R(b))$ 一定为奇数。又因为 a,b 奇偶性相反，因此 $a+b$ 亦为奇数。因此：$\forall x(x \in (R(a)+R(b)) \leftrightarrow x \in R(a+b))$。
综上所述：对所有 a,b，有 $R(a)+R(b)=R(a+b)$。

5.7 T28

不妨设：$a=(m_a,n_a), b=(m_b,n_b)$.
因此 $R(a)=\{(m_i,n_i)|n_i=n_a\}, R(b)=\{(m_j,n_j)|n_j=n_b\}$，所以 $R(a)+R(b)=\{(m_k,n_k)|m_k=m_i+m_j, n_k=n_i+n_j, (m_i,n_i) \in R(a), (m_j,n_j) \in R(b)\}=\{(m_k,n_k)|n_k=n_a+n_b\}$。因为 $R(a+b)=\{(m_l,n_l)|n_l=n_a+n_b\}$。因此 $(R(a)+R(b))$ 与 $R(a+b)$ 的集合的定义相同，所以 $R(a)+R(b)=R(a+b)$。

5.8 T29

因为 $R((a,b))=\{(m_i,n_i)|an_i=bm_i\}, R((a',b'))=\{(m_j,n_j)|a'n_j=b'm_j\}, R((a+a',b+b'))=\{(m_k,n_k)|(a+a')n_k=(b+b')m_k\}$。又因为 $R((a,b))+R((a',b'))=\{(m_l,n_l)|(m_l,n_l)=(m_i,n_i)+(m_j,n_j), (m_i,n_i) \in R((a,b)), (m_j,n_j) \in R((a',b'))\}$。要证 $R((a,b))+R((a',b'))=R((a+a',b+$

$b'))$，即证 $\forall(m_l,n_l)\in(R((a,b))+R((a',b')))\rightarrow(a+a')n_l=(b+b')m_l$。因为 $(a+a')(n_i+n_j)-(b+b')(m_i+m_j)=an_j+a'n_i-bm_j-b'm_i$。不一定为 0。因此等式不成立。
较容易举出反例：$(1,2)R(2,4),(1,3)R(2,6)$ 但是 $(3,7)\notin R((2,5))$

6 4.6

6.1 T2

```
EDGE(i ,j){
    int ptr = VERT[i];
    while(NEXT[ptr] != 0){
        if(HEAD[ptr] == j){
            return T;
        }
        ptr = NEXT[ptr];
    }
    if(NEXT[ptr] == 0 && HEAD[ptr] == j) return T;
    else return F;
}
```

6.2 T3

因为 R 一共有 P 条边，N 个顶点。因此平均每个顶点的出度为 $\frac{P}{N}$。对这 $\frac{P}{N}$ 个出度进行排序，如果要找的边为第 n 条，则需要 n 步，如果找的边不存在，那么则需要 $\frac{P}{N}$ 步。因此平均步数为：$\frac{1+2+\cdots+\frac{P}{N}+(N-\frac{P}{N})(\frac{P}{N})}{N}=\frac{(2N-\frac{P}{N}+1)(\frac{P}{N})}{2N}$

6.3 T4

```
LOOK(NUM, NEXT, START, N, K){
    int ptr = START;
    while(NEXT[ptr] != 0){
        if(NUM[ptr] == K) return ptr;
        else ptr == NEXT[ptr];
    }
    if(NUM[ptr] != K) print("NOT␣FOUND");
```

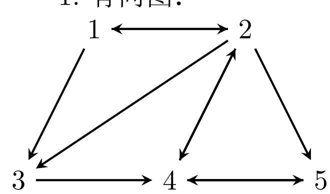
```
        else return ptr;
    }
```

6.4 T6

$VERT$	$TAIL$	$HEAD$	$NEXT$
2	4	1	9
4	1	1	3
7	1	2	5
1	2	1	6
	1	3	0
	2	4	8
	3	4	10
	2	3	0
	4	3	0
	3	3	0

6.5 T8

1. 有向图：



2. 矩阵：

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

6.6 T12

$$VERT = [1, 4, 7, 11]$$
$$TAIL = [1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4]$$
$$HEAD = [1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 4]$$
$$NEXT = [2, 3, 0, 5, 6, 0, 8, 9, 10, 0, 12, 13, 0]$$

7 4.7

7.1 T7

(a) $\overline{R} = \{(1, 4), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
(b) $R \cap S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1)\}$
(c) $R \cup S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$
(d) $S^{-1} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

7.2 T8

(a) $\overline{R} = \{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, e), (e, c), (e, d), (e, e)\}$
(b) $R \cap S = \{(a, a), (a, d), (c, b), (e, a), (e, b)\}$
(c) $R \cup S = \{(a, a), (a, b), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, e), (c, b), (c, d), (d, c), (d, d), (e, a), (e, b), (e, d), (e, e)\}$
(d) $S^{-1} = \{(a, a), (a, b), (a, e), (b, c), (b, e), (d, a), (d, c), (d, e), (e, a), (e, e)\}$

7.3 T12

(a) $M_{R\cap S}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ (b) $M_{R\cup S}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

(c) $R^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$ (d) $M_{\overline{S}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

7.4 T14

$R\cap S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
划分：$\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$。

7.5 T19

因为闭包运算是往集合里面添加元素的过程，相当于让关系矩阵中的部分的 0 变为 1，但是不能把 1 变为 0。因此例如一个等价关系，往里面不断将 0 化为 1，都不能使其具有非自反、非对称、反对称关系。因此闭包的概念不适用于非自反、非对称、反对称之中。

7.6 T20

(a) $R\circ S=\{(a,c)|a\leq 6c\}$。因为 $2\leq 6\times 3=18$，因此 $(2,3)\in R\circ S$。
(b) 因为 $8\geq 6\times 1$，因此 $(8,1)\notin R\circ S$

7.7 T23

(a) 自反性：假设 R, S 是 A 上的关系，且都具有自反性。$\forall x\in A\rightarrow (x,x)\in R\wedge(x,x)\in S$. 所以对于 $R\circ S$ 而言，有 $\forall x\in A,(x,x)\circ(x,x)=(x,x)$。因此 $R\circ S$ 仍为自反的。
反自反性：假设 $R=\{(1,2)\},S=\{(2,1)\}$, 则 $R\circ S=\{(1,1)\}$。反自反不能保持对称性：假设 $R=\{(1,2),(2,1)\},S=\{(2,3),(3,2)\}$，则 $R\circ S=\{(1,3)\}$，对称性不能保持。
反对称性：假设 $R=\{(1,2),(2,2)\},S=\{(2,2),(1,1),(2,1)\}$，则 $R\circ S=$

$\{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1)\}$, 反对称性不能保留传递性:假设 $R=\{(1,2),(2,4)\}, S=\{(2,2),(4,3)\}$，则 $R\circ S=\{(1,2),(2,3)\}$，对称性不能保持。
(b) 自反性：根据 (a) 中可知，自反性质能够保留，因此 $S\circ R$ 是 A 上的自反关系。
对称性:假设 $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}, S=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$。
所以 $S\circ R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2)\}$，不满足对称性。因此 $S\circ R$ 不是 A 上的等价关系

7.8 T24

(a) $M_{R\circ R}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$ (b) $M_{S\circ R}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$

(c) $M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$ (d) $M_{S\circ S}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$

7.9 T26

因为 $R\cap R^{-1}=S\cap S^{-1}=\varnothing$，所以

$$\begin{aligned}(R\cap S)\cap(R\cap S)^{-1}&=(R\cap S)\cap(R^{-1}\cap S^{-1})\\&=(R\cap R^{-1})\cap(S\cap S^{-1})\\&=\varnothing\end{aligned}$$

因此 $R\cap S$ 是非对称的。

$$\begin{aligned}(R\cup S)\cap(R\cup S)^{-1}&=(R\cup S)\cap(R^{-1}\cup S^{-1})\\&=((R\cup S)\cap R^{-1})\cup((R\cup S)\cap S^{-1})\\&=R\cap R^{-1}\cup S\cap R^{-1}\cup R\cap S^{-1}\cup S\cap S^{-1}\\&=S\cap R^{-1}\cup R\cap S^{-1}\\&=S\cap R^{-1}\cup(S\cap R^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

因此，如果 $S \cap R^{-1} = \varnothing$，$R \cup S$ 是非对称的，反之则不是。

7.10 T27

假设 $R = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}, S = \{(1,1),(2,2),(2,1)\}$。因此 $R \cup S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ 是对称的，不是反对称的。
对于 $R \cap S$，如果 $\forall (a,b)((a,b) \in (R \cap S) \wedge (b,a) \in (R \cap S))$，故 $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$。因为 R 是反对称的，因此 $a = b$，故 $R \cap S$ 是反对称的。

7.11 T28

对 $\forall a \in A, c \in C$, 有 $a(S \cup T) \circ Rc$

$$\begin{aligned} a(S \cup T) \circ Rc &\Leftrightarrow (\exists b \in B)(a(S \cup T)b \wedge bRc) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)((aSb \vee aTb) \wedge bRc) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)(aSb \wedge bRc \vee aTb \wedge bRc) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)(aS \circ Rc \vee aT \circ Rc) \\ &\Leftrightarrow (a(S \circ R) \cup (T \circ R)c) \end{aligned}$$

因此 $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

7.12 T30

$\forall a \in A, c \in C$，有 $aT \circ Rc$.

$$\begin{aligned} aT \circ Rc &\Rightarrow (\exists b \in B)(aTb \wedge bRc) \\ &\Rightarrow (\exists b \in B)(aTb \wedge bSc) \\ &\Rightarrow aT \circ Sb \end{aligned}$$

因此：$T \circ R \subseteq T \circ S$

7.13 T31

(a) 因为 $\forall a \in A, b \in A, a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb \wedge aSb$。因此 $(a,b) \in (R \cap S) \Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S$，故 $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$
(b) 因为 $\forall a \in A\ b \in A, a(R \cup S)b \Leftrightarrow aRb \vee aSb$。因此 $(a,b) \in (R \cup S) \Leftrightarrow$

$(a,b) \in R \vee (a,b) \in S$，故 $M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$
(c) 因为 $\forall a \in A, b \in A, (a,b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in R$, 故 $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$
(d) 因为 $\forall a \in A, b \in A, (a,b) \in \overline{R} \Leftrightarrow (a,b) \notin R$, 故 $M_{\overline{R}} = \overline{M_R}$

7.14 T36

$\forall (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S$ 因为 R,S 都是对称的，因此 $(b,a) \in R \wedge (b,a) \notin S$。故 $\forall (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S \Rightarrow (b,a) \in R \wedge (b,a) \notin S$。因此 $\forall (a,b) \in (R-S) \Rightarrow (b,a) \in (R-S)$，即 $R-S$ 也是一个对称关系。

7.15 T37

(a) 充分性：R 是对称的 $\Rightarrow R = R^{-1}$
$\forall (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}$，又因为 R 是对称的，因此 $\forall (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$。因此 $R \subseteq R^{-1}$。同理 $R^{-1} \subseteq R$，因此 $R = R^{-1}$。
必要性：$R = R^{-1} \Rightarrow R$ 是对称的
因为 $R = R^{-1}$,$\forall (a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}$，又因为 $\forall (a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R$。因此 $\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$。故 R 是对称的。
(b) 充分性：R 是反对称的 $\Rightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$
$\forall a \in A, b \in B,$
当 $a \neq b$ 时，$\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \Rightarrow (a,b) \notin R^{-1}$。因此 $R \cap R^{-1} = \varnothing$。
当 $a = b$ 时，$\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}$，因此 $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$。
综上所述：R 是反对称的 $\Rightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$
必要性：$R \cap R^{-1} \subseteq \Delta \Rightarrow R$ 是反对称的
$\forall a \in A, b \in B,$
当 $a \neq b$ 时，$\forall (a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \notin R^{-1} \Rightarrow (b,a) \notin R$。因此 $\forall a \in A, \nexists b (b \in A \wedge b \neq a) \Rightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$
当 $a = b$ 时，$\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}$。
综上所述：$R \cap R^{-1} \subseteq \Delta \Rightarrow R$ 是反对称的
(c) 充分性：R 是非对称的 $\Rightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing$
因为 R 是非对称的，因此 $\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \Rightarrow (a,b) \notin R^{-1}$，故 $R \cap R^{-1} = \varnothing$
必要性：$R \cap R^{-1} = \varnothing \Rightarrow R$ 是非对称的
因为 $R \cap R^{-1} = \varnothing$, 因此 $\forall (a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \notin R^{-1} \Rightarrow (b,a) \notin R$，因此 R

是非对称的。

8 4.8

8.1 T8

充分性：$aS^{\infty}b \Rightarrow R$ 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。
因为 $S = R^2$，因为 $aS^{\infty}b \Rightarrow \exists i \geq 1 s.t. aS^ib$。又因为 $S^i = R^{2i}$，所以存在一条从 a 到 b 长度为 $2i$ 的路径。即 $aS^{\infty}b \Rightarrow R$ 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。
必要性：R 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边 $\Rightarrow aS^{\infty}b$
因为 R 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。不妨设 $aR^{2k}b$，因为 $S = R^2$，故 aS^kb. 又因为 $S^k \subseteq S^{\infty}$，即 $aS^{\infty}b$。
综上所述：$aS^{\infty}b$ 当且仅当 R 中存在从 a 到 b 的一条路径，且该路径具有偶数条边。

8.2 T10

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R.$$

因此 $M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8.3 T12

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$M_{R^4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 因此：$M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8.4 T14

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $M_s(R)$ 的传递闭包关系矩阵:$M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{s(R)^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

故：$M_{t(s(R))} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

求 $M_{t(R)}$ 的对称闭包关系矩阵: $M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad M_{R^3} = M_{R^2}$. 因此 $M_{s(t(R))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 因此:R_t 的对称闭包和 R_s 的传递闭包不具有相同的关系

8.5 T18

$A/R = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}, A/S = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$.
$A/(R \cup S)^\infty = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$

8.6 T20

因为 19 题的前提条件是两个关系本身是等价关系，不具有普遍性。而 Warshall 算法不需要这个前提条件。

8.7 T23

使用了直接证明法。先假设 $\forall S, (R \subseteq S)$，后续利用 S 的传递性，说明 $S^\infty \subseteq S$，又因为满足公式 $S^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \subseteq S$，结合 $R \subseteq S$, 推出 $R^\infty \subseteq S^\infty \subseteq S$。从而证明是传递关系中最小的。

8.8 T24

使用了构造性证明法。考虑了路径中可能成环，把成环的部分删去，留下顶点各异的部分。因为顶点数不可能超过 n，因此路径的长度也至多是 n。由此证明计算 R^∞ 并不需要计算比 n 次幂大的 R 的幂。

8.9 T25

设包含 R 的最小等价关系为 S.
S 满足自反性：$\forall x \in A, (x, x) \in S$。
S 满足对称性且 $R \subseteq s$：$\forall a \in A, b \in A \wedge |a| \leq |b| \Rightarrow (a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in S$，因为 S 满足对称性，所以 $|a| \geq |b| \Rightarrow (a, b) \in S \Rightarrow a \in A, b \in Aa \neq b \Rightarrow (a, b) \in S$。
综上所述，$\forall a \in A, b \in A$. 当 $a = b, (a, b) \in S$。当 $a \neq b, (a, b) \in S$。因此，$\forall a \in A, b \in A \Rightarrow (a, b) \in S$ 即 $S = A \times A = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$。