

# 离散数学作业 \_4.1

李云浩 241880324

2025 年 4 月 14 日

## 1 4.1

### 1.1 T16

对于  $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a, b, c) | a \in A_1 \wedge b \in A_2 \wedge c \in A_3\}$ , 因此可能元素的个数为:  $C_{n_1}^1 \times C_{n_2}^1 \times C_{n_3}^1 = n_1 \times n_2 \times n_3$ . 证毕。

### 1.2 T18

投影 (选择 雇员 [部门 = 人力资源部  $\vee$  公共关系])

### 1.3 T24

不是, 划分要求所有划分块的并集应该为原集合。但是因为  $0 \in Z, 0 \notin A_1 \cup A_2$ , 因此  $\{A_1, A_2\}$  不是  $Z$  的一个划分。

### 1.4 T30

(a)  $A_1 = \{x | x \in B \wedge x \mid 2\}, A_2 = \{x | x \in B \wedge x \nmid 2\}$ 。  $\{A_1, A_2\}$  是  $B$  的一个划分。

(b)  $A_1 = \{x | x \in B \wedge x \mid 9\}, A_2 = \{x | x \in B \wedge x \nmid 9 \wedge x \mid 6\}, A_3 = \{x | x \in B \wedge x \nmid 9 \wedge x \nmid 6 \wedge x \mid 3\}$ 。  $\{A_1, A_2, A_3\}$  是  $B$  的一个划分。

### 1.5 T31

$\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

### 1.6 T33

由已知有:  $S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 3$ , 在 31 题中, 两个子集的划分数也为 3, 符合预期。

### 1.7 T34

由已知有:  $S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2 \times 3 = 7$ 。

### 1.8 T35

$S(4, 3) = S(3, 2) + 3S(3, 3) = 3 + 3 \times 1 = 6$ 。

### 1.9 T36

$S(5, 2) = S(4, 1) + 2S(4, 2) = 1 + 2 \times \{S(3, 1) + 2S(3, 2)\} = 1 + 2 \times \{1 + 2 \times 3\} = 15$

### 1.10 T37

设  $(a, b) \in A \times (B \cup C)$ , 有:

$$\begin{aligned} a(A \times (B \cup C))b &= a(A \times (Bb \cup Cb)) \\ &= aA \times (Bb \cup Cb) \\ &= aA \times Bb \cup aA \times Cb \\ &= a(A \times B)b \cup a(A \times C)b \\ &= a((A \times B) \cup (A \times C))b \end{aligned}$$

因此,  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

### 1.11 T38

由已知有:  $B \cap C = \{7\}$ ,  $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 5), (2, 7), (4, 2), (4, 5), (4, 7)\}$   
 $A \times C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (2, 1), (2, 3), (2, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 7)\}$   
因此:  $A \times (B \cap C) = \{(1, 7), (2, 7), (4, 7)\}$ ,  $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 7), (2, 7), (4, 7)\}$ .  
可知:  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

设  $(a, b) \in A \times (B \cap C)$ , 有:

$$\begin{aligned}
 a(A \times (B \cap C))b &= a(A \times (Bb \cap Cb)) \\
 &= aA \times (Bb \cap Cb) \\
 &= aA \times Bb \cap aA \times Cb \\
 &= a(A \times B)b \cap a(A \times C)b \\
 &= a((A \times B) \cap (A \times C))b
 \end{aligned}$$

因此  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ 。

### 1.12 T39

将 B 的划分中的各个集合中的独属于 B 的元素删去, 若删去后为空集则直接将该集合去掉, 否则则保留删除后的集合。那么新子集组成的集合便是 A 的一个划分。

下面验证该过程: 1. 删去了所有的空集, 因此划分块不为空。2. 新的划分块是在 B 的划分块中删元素, 原来不相交, 删除元素后也不会相交。3. 因为只删去了独属于 B 的元素, 因此新的划分包含 A 的所有元素。检验完毕。

### 1.13 T40

1. 证明划分块不为空, 因为  $A_i \neq \emptyset, B_j \neq \emptyset$ , 因此  $A_i \times B_j \neq \emptyset$ 。  
 2. 证明划分块不相交, 因为  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  是 A 的一个划分, 因此对于  $\forall i, j, i \neq j, \forall x \in A_i \rightarrow x \notin A_j$ 。同理, B 也一样。因此对于  $\forall (x, y) \in A_i \times B_j, \rightarrow \forall m \neq i \forall n \neq j, (x \notin A_m \wedge y \notin B_n \rightarrow (x, y) \notin A_m \times B_n)$ 。3. 证明划分块的并集为  $A \times B$ 。由题目可知, 每一个  $A_i$  都与  $B_j$  计算笛卡尔积, 且  $A_i, B_j$  分别包含 A, B 中的所有元素。因此所有  $A_i \times B_j$  的并集为  $A \times B$ 。

## 2 4.2

### 2.1 T20

1. 证明:  $\forall a \forall b (a, b \in A \wedge a \neq b \wedge R(a) \cap R(b) = \{ \}) \subseteq R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$

因为  $R(a) \cap R(b) = \{ \}$ 。

如果  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , 那么  $R(A_1 \cap A_2) = R(\emptyset) = \{ \}$ 。由于  $A_1$  和  $A_2$  之中没有重复元素, 因此对于任意  $A_1, A_2$  中的元素  $a, b$ ,  $R(a) \cap R(b) = \{ \}$ , 所以  $R(A_1) \cap R(A_2) = \{ \}$ 。

如果  $A_1 \cap A_2 = A_3$ , 那么  $R(A_1 \cap A_2) = R(A_3)$ ,  $R(A_1) \cap R(A_2) = (R(A_1 - A_2) \cup R(A_3)) \cap R(A_2) = (R(A_1 - A_2) \cap R(A_2)) \cup (R(A_3) \cap R(A_2)) = R(A_3)$ , 所以  $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$ 。

2. 证明:  $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2) \subseteq \forall a \forall b (a, b \in A \wedge a \neq b \wedge R(a) \cap R(b) = \{ \})$

反证法: 假设  $R(a) \cap R(b) \neq \{ \}$ 。那么取子集  $A_1, A_2$  分别为  $\{a\}, \{b\}$ 。  $R(A_1 \cap A_2) = R(\emptyset) = \{ \}$ 。但是  $R(a) \cap R(b) \neq \{ \}$ 。因此  $R(A_1 \cap A_2) \neq R(A_1) \cap R(A_2)$ 。

因此  $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2) \subseteq \forall a \forall b (a, b \in A \wedge a \neq b \wedge R(a) \cap R(b) = \{ \})$

### 2.2 T25

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.3 T26

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.4 T28

顶点	入度	出度
1	1	3
2	2	2
3	2	0
4	2	3
5	1	0

## 2.5 T32

只保留 B 中元素所代表的行和列。

## 2.6 T34

设  $M_R = [m_{ij}]_{n \times n}$

(a)  $R(a_k) = \{m_{ki} | m_{ki} = 1 \wedge 0 \leq i \leq n\}$

(b)  $R(\{a_l, a_j, a_n\}) = \{m_{ij} | m_{ij} = 1 \wedge (i = l \vee i = j \vee i = n) \wedge m_{ij} = 1\}$

## 2.7 T36

因为  $|\{1, 2, 3\}| = 3, |\{a, b\}| = 2$ , 所以 S 中关系的数量为  $2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$

# 3 4.3

## 3.1 T18

$$\begin{aligned}
 M_{R \cup S} &= \{m_{ij} | i(R \cup S)j\} \\
 &= \{m_{ij} | iRj \vee iSj\} \\
 &= \{m_{ij} | iRj\} \vee \{m_{ij} | iSj\} \\
 &= M_R \vee M_S
 \end{aligned}$$

### 3.2 T19

因为  $R^*$  的定义是  $x = y$  或  $xR^\infty y$ 。因此  $M_{R^*} = \{m_{ij} | i = j\} \vee \{m_{ij} | xR^\infty y\}$  所以  $M_{R^*} = M_{R^\infty} \vee I_n$

### 3.3 T20

$$\pi_2 \circ \pi_1 = 1, 2, 4, 3, 5, 6, 4$$

### 3.4 T21

$$\pi_2 \circ \pi_1 = 1, 7, 5, 6, 7, 4, 3$$

### 3.5 T27

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{其中 } m_{ij} \text{ 表示从 } i \text{ 到 } j \text{ 且长度为 } 2 \text{ 的路线的数目。}$$

### 3.6 T28

$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R$ ,  $M_{R^2}$  表示从  $i$  到  $j$  长度为 2 的路径, 而  $M_R$  中包含所有从  $j$  起始的长度为 1 的路径, 二者复合则为从  $i$  起始的长度为 3 的路径。因此第 27 题的结论可以一般化。

### 3.7 T30

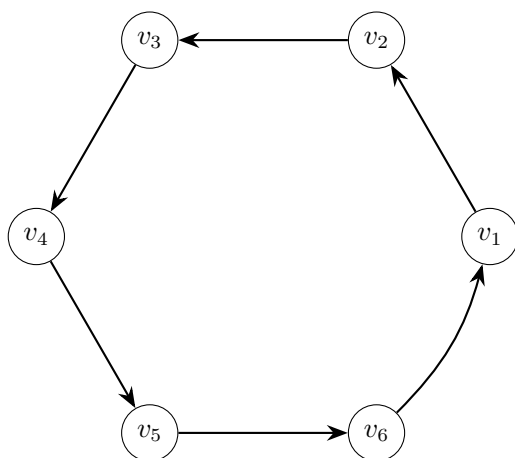
(a) 定理 2 先说明了  $P(2)$  为真, 在此基础上以  $P(n)$  为真作为前提条件, 从而推导出  $P(n+1)$  为真, 最后便可以通过归纳得出结论, 即: 对于整数  $n \leq 2, P(n)$  成立。

(b) 以  $P(n)$  成立作为前提条件, 并把  $P(n)$  翻译为自然语言, 通过自然语言建立  $P(n)$  与  $P(n+1)$  的联系。

### 3.8 T31

设一共有  $n$  个顶点，且每个顶点的出度不为 1。那么  $\forall n \in \mathbb{Z}, R^n$  不为空，因为每个顶点皆有出度。但由于只有  $n$  个顶点，但  $R^\infty$  存在，即存在一条无限长的路径，因此有向图中有环。因此可以得出，如果在  $D$  中无任何环，那么至少有一个顶点的出度是 0

### 3.9 T32



### 3.10 T33

将有向图转换为关系矩阵，这样可以更加直观的看出。

## 4 4.4

### 4.1 T14

1. 自反性:  $\forall x \in A, |x - x| = 0 \leq 2$  成立，因此  $\forall x \in A \rightarrow (x, x) \in R$ 。满足自反性。
2. 反自反性: 由于满足自反性，因此不满足反自反性。
3. 对称性:  $\forall a, b \in A, |a - b| = |b - a|$ ，因此  $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ ，满足对称性。
4. 反对称性: 反例:  $(1, 2) \in R \wedge (2, 1) \in R \wedge 2 \neq 1$ ，因此不满足反对称性。

5. 传递性: 反例:  $(0, 2) \in R \wedge (2, 4) \in R$ , 但是  $(0, 4) \notin R$ , 因此不满足传递性。

## 4.2 T16

1. 自反性:  $\forall x \in A, x + x = 2x$ , 为 2 的倍数即偶数, 因此满足自反性。
2. 反自反性: 由于满足自反性, 因此不满足反自反性。
3. 对称性:  $\forall a, b \in A, a + b = b + a$ 。因此  $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ 。
4. 反对称性: 反例:  $(2, 4) \in R \wedge (4, 2) \in R \wedge 2 \neq 4$ , 因此不满足反对称性
5. 传递性: 如果  $a + b$  为偶数, 那么  $a, b$  要么同为奇数, 要么同为偶数。因此, 对应奇偶性明确的数字  $b$ , 如果  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ , 那么  $a, c$  的奇偶性一定与  $b$  等同, 因此  $a, c$  的奇偶性一致, 因此  $(a, c) \in R$ 。满足传递性。

## 4.3 T18

1. 自反性: 反例:  $4 \in A, (4, 4) \notin R$ , 因此不满足自反性
2. 反自反性: 反例:  $\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in R$ , 因此不满足反自反性
3. 对称性: 因为  $\forall a, b \in A, a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ , 因此  $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ , 满足对称性
4. 反对称性: 取  $a = 1, b = \sqrt{3}$ , 因为  $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \wedge a \neq b$ , 因此不满足反对称性。
5. 传递性: 反例:  $(1, \sqrt{3}) \in R \wedge (\sqrt{3}, 1) \in R \wedge (1, 1) \notin R$ , 因此不满足传递性。

## 4.4 T20

1. 自反性:  $\forall (a, b) \in A$ , 因为  $a = a$ , 所以有  $(a, b)R(a, b)$  满足自反性。
2. 反自反性: 由于满足自反性, 因此不满足反自反性。
3. 对称性:  $\forall (a, b), (c, d) \in A$ , 如果  $a = c \rightarrow c = a$ , 因此  $(a, b)R(c, d) \rightarrow a = c \rightarrow (c, d)R(a, b)$ , 因此满足对称性
4. 反对称性: 反例:  $(1, 3)R(1, 4) \wedge (1, 4)R(1, 3) \wedge (1, 3) \neq (1, 4)$ , 因此不满足反对称性。
5. 传递性:  $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in A \wedge (a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f)$ , 因此有:  $a = c, c = e$ , 因此  $a = e \rightarrow (a, b)R(e, f)$ , 因此满足传递性。



#### 4.5 T22

1. 自反性: 因为直线平行于自身, 因此  $\forall l_i \in A, l_i R l_i$ , 满足自反性。
2. 反自反性: 由于满足自反性, 因此不满足反自反性。
3. 对称性: 因为  $l_i \parallel l_j \rightarrow l_j \parallel l_i$ , 因此  $\forall l_i, l_j \in A \wedge l_i R l_j \rightarrow l_j R l_i$ , 因此满足对称性。
4. 反对称性: 反例:  $l_1 : y = x, l_2 : y = x + 1$ , 因此  $l_1 R l_2 \wedge l_1 \neq l_2$ , 因此不满足反对称性。
5. 传递性: 因为平行本身具有传递性, 因此  $\forall l_i, l_j, l_k \in A$ , 如果  $l_i R l_j \wedge l_j R l_k \rightarrow l_i R l_k$ , 因此满足传递性

#### 4.6 T31

因为集合  $A$  上的关系是反自反, 因此其关系矩阵中的主对角线上全为 0. 那么证明该集合的关系具有反对称的性质可以转换为证明  $\nexists a, b \in A, a R b \wedge b R a$ 。

下用反证法, 不妨假设  $\exists a, b \in A, a R b \wedge b R a$ , 因为该关系具有传递性,  $a R b \wedge b R a \rightarrow a R a$ , 与反自反的条件不符, 因此假设不成立。因此  $\nexists a, b \in A, a R b \wedge b R a$ , 故该关系是反对称的, 并且因为主对角线元素全为 0, 所以还是非对称的。

#### 4.7 T32

反证法: 假设  $R^2$  不满足传递性, 则  $\exists a, c, e \in A, a R c \wedge c R e \wedge a \not R e$ 。因为  $R^2$  是由  $R$  复合运算得来的, 因此  $\exists b, d \in A, a R b, b R c, c R d, d R e$ 。因为  $R$  是传递的, 那么在  $R$  中一定还有  $a R c \wedge c R e$ , 因此  $R^2 = R \circ R$  中会含有  $a R e$ , 与假设不符, 因此假设不成立。

故如果  $A$  上的关系  $R$  是传递的, 那么  $R^2$  也是传递的。

#### 4.8 T33

因为  $R$  是对称的, 因此  $\exists a, b \in A, a R b \wedge b R a$ , 又因为  $R$  是传递的, 因此  $a R b \wedge b R a \rightarrow a R a$ , 因此  $\exists a \in A, (a, a) \in R$ , 因此  $R$  不是非自反的。

#### 4.9 T34

$\forall(a, c) \in R^2$ , 因为  $R^2$  是由  $R$  复合而成, 因此  $\exists b \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ , 又因为  $R$  是对称的, 因此  $(c, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ . 又因为  $R^2 = R \circ R$ , 因此  $(c, a) \in R^2$ . 即  $\forall(a, c) \in R^2 \rightarrow (c, a) \in R^2$ , 因此  $R^2$  也是对称的。

#### 4.10 T35

当  $n = 1$  时, 显然成立。当  $n = 2$  时, 已有上题证出。  
不妨假设当  $n = k$  时, 结论成立, 即  $R^k$  是对称的, 下证  $R^{k+1}$  也是对称的。  
 $\forall(a, c) \in R^{k+1}$ , 因为  $R^{k+1} = R^k \circ R$ , 因此  $\exists b \in A, (a, b) \in R^k \wedge (b, c) \in R$  因为  $R$  和  $R^k$  是对称的, 因此  $(b, a) \in R^k \wedge (c, b) \in R$ . 又因为  $R^{k+1} = R \circ R^k$ , 因此  $(c, a) \in R^{k+1}$ . 即  $\forall(a, c) \in R^{k+1} \rightarrow (c, a) \in R^{k+1}$ , 因此  $R^{k+1}$  也是对称的。  
根据数学归纳法得出: 如果  $A$  上的关系  $R$  是对称的, 那么  $R^n$  对于任意  $n \geq 1$  也是对称的。

#### 4.11 T36

定义: 差 3 关系, 即两数之差为 3 的倍数。  $R = \{(a, b) | (a - b) \mid 3\}$ 。  
1. 自反性:  $\forall a \in Z^+, a - a = 0$ , 为 3 的倍数, 因此  $\forall a \in Z^+, aRa$ . 满足自反性。  
2. 对称性:  $\forall a, b \in Z^+$ , 如果  $(a, b) \in R$ , 即  $(a - b) \mid 3$ , 即  $\exists m \in Z, a - b = 3m$ . 因此  $b - a = -3m$ , 仍为 3 的倍数。因此  $\forall a, b \in Z^+ \wedge (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ , 满足对称性。  
3. 传递性:  $\forall a, b, c \in Z^+, aRb, bRc$ , 因此  $\exists m, n \in Z, (a - b) = 3m, (b - c) = 3n$ . 那么  $a - c = a - b + (b - c) = 3m + 3n = 3(m + n)$ , 仍为 3 的倍数。所以  $\forall a, b, c \in Z^+ \wedge aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$ , 满足传递性。

#### 4.12 T38

- (a)  $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$   
(b)  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c)\}$

### 4.13 T40

1. 充分性:  $R$  是传递的  $\rightarrow$  对于所有  $n \geq 1, R^n \subseteq R$ 。

利用数学归纳法: 当  $n = 2$  时, 因为  $R^2 = R \circ R$ , 因此  $\forall (a, c) \in R^2 \rightarrow \exists b \in A \wedge (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ 。因为  $R$  具有传递性, 因此  $(a, c) \in R$ 。即  $\forall (a, c) \in R^2 \rightarrow (a, c) \in R$ 。即  $R^2 \subseteq R$ 。

当  $n \geq 2$  时, 不妨设  $n = k - 1$  时, 有  $R^{k-1} \subseteq R$ 。下证  $R^k \subseteq R$ 。

因为  $R^k = R^{k-1} \circ R$ ,  $\forall (a, c) \in R^k \rightarrow \exists b \in A \wedge (a, b) \in R^{k-1} \wedge (b, c) \in R$ 。又因为  $R^{k-1} \subseteq R$ , 因此  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ 。因为  $R$  具有传递性, 因此  $(a, c) \in R$ 。即  $\forall (a, c) \in R^k \rightarrow (a, c) \in R$ , 因此  $R^k \subseteq R$ 。证毕。

2. 必要性: 对于所有  $n \geq 1, R^n \subseteq R \rightarrow R$  是传递的。

取  $n = 2$ , 有:  $R^2 \subseteq R$ 。  $\forall (a, b), (b, c) \in R$ , 因为  $R^2 = R \circ R$ 。因此  $(a, c) \in R^2$ 。又因为  $R^2 \subseteq R$ , 因此  $(a, c) \in R$ 。即  $\forall (a, b), (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$ 。因此  $R$  是传递的, 证毕。

## 5 4.5

### 5.1 T19

(a)1. 自反性:  $\forall (a, b) \in A, a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ , 因此  $(a, b)R(a, b)$ , 满足自反性。

2. 对称性:  $\forall (a, b) \in A, a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ , 因此  $(a, b)R(b, a)$ , 满足对称性。

3. 传递性:  $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in A \wedge (a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f)$ 。因此  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ , 所以  $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$ , 即  $(a, b)R(e, f)$ 。故  $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in A \wedge (a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \rightarrow (a, b)R(e, f)$ 。满足传递性。

因为关系  $R$  满足自反、对称、传递性, 因此  $R$  是  $A$  上的一个等价关系。

(b) 在每个等价类中,  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ , 可以理解为坐标到原点的距离相等, 即圆。因此  $A/R$  为以原点为圆心的无数个圆。

### 5.2 T20

因为等价关系具有对称性, 因此只观察关系矩阵的右上角部分, 有:  $\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, b), (b, c), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (e, e)\} \subseteq R$ , 因此不难得出:  $a$  与  $b, c, e$  等价,  $d$  与自身等价。因此  $A/R = \{\{a, b, c, e\}, \{d\}\}$

### 5.3 T22

(a)1. 自反性:  $\forall(a, b) \in A, a + b = a + b$ , 因此  $(a, b)R(a, b)$ 。满足自反性。

2. 对称性:  $\forall(a, b) \in A, a + b = b + a$ , 因此  $(a, b)R(b, a)$ 。满足对称性。

3. 传递性:  $\forall(a, b), (c, d), (e, f) \in A \wedge (a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f)$ 。因此:  $a + b = c + d = e + f$ , 有  $(a, b)R(e, f)$ 。因此满足传递性。

因此  $R$  是一个等价关系。(b) 可以根据  $a + b$  的和来进行等价类划分。 $A/R = \{(1, 1)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}, \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}, \{(2, 4), (3, 3), (4, 2)\}, \{(3, 4), (4, 3)\}, \{(4, 4)\}$

### 5.4 T23

1. 充分性:  $R$  是自反的和循环的  $\rightarrow R$  是一个等价关系。

证  $R$  是等价关系, 即证  $R$  具有自反、对称、传递性。已知,  $R$  具有自反性。

对称性:  $\forall(a, b) \in R$ , 因为自反性, 所以  $(a, a) \in R$ , 根据传递性可以得:  $(a, a) \in R \wedge (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ 。即:  $\forall(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$ 。因此  $R$  是对称的。

传递性:  $\forall(a, b), (b, c) \in R$  根据循环性, 所以  $(c, a) \in R$ 。又因为对称性, 所以  $(a, c) \in R$ 。因此  $\forall(a, b), (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$ 。

2. 必要性:  $R$  是等价关系  $\rightarrow R$  是自反的和循环的。

因为  $R$  是等价的, 因此  $R$  一定是自反的。又因为  $\forall(a, b), (b, c) \in R$ , 因为  $R$  是等价的, 因此  $R$  具有传递性, 所以  $(a, c) \in R$ 。又因为  $R$  具有传递性, 所以  $(c, a) \in R$ 。即  $\forall(a, b), (b, c) \in R \rightarrow (c, a) \in R$ 。因此  $R$  是循环的。

### 5.5 T24

1. 自反性:  $\forall x \in A$ , 因为  $R_1, R_2$ , 具有自反性, 所以  $(x, x) \in R_1, (x, x) \in R_2$ 。因为  $R_1 \cap R_2$  即取  $R_1, R_2$  中的公共元素。因此  $(x, x) \in R_1 \cap R_2$ 。即:  $\forall x \in A \rightarrow (x, x) \in R_1 \cap R_2$ 。满足自反性。

2. 对称性:

$$\begin{aligned} \forall(a, b) \in R_1 \cap R_2 &\Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \\ &\Rightarrow (b, a) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_2 \\ &\Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2 \end{aligned}$$

因此  $R_1 \cap R_2$  满足对称性。

3. 传递性:

$$\begin{aligned}\forall (a, b), (b, c) \in R_1 \cap R_2 &\Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \wedge (a, b) \in R_2 \\ &\Rightarrow (a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2 \\ &\Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2\end{aligned}$$

因此  $R_1 \cap R_2$  满足传递性。

综上所述,  $R_1 \cap R_2$  是  $A$  上的一个等价关系。

## 5.6 T27

因为  $R$  是模 2 同余关系, 有  $\forall x \in R(a)$ ,  $x$  与  $a$  的奇偶性相同。

情况 1:  $a, b$  同奇偶性, 因为  $R(a) + R(b) = \{x | x = s + t, s \in R(a), t \in R(b)\}$ , 且  $s, t$  的奇偶性也相同, 因此  $\forall x \in (R(a) + R(b))$  一定为偶数。又因为  $a, b$  同奇偶性, 因此  $a + b$  亦为偶数。因此:  $\forall x(x \in (R(a) + R(b)) \leftrightarrow x \in R(a + b))$ 。  
情况 2:  $a, b$  的奇偶性相反, 因为  $R(a) + R(b) = \{x | x = s + t, s \in R(a), t \in R(b)\}$ , 且  $s, t$  的奇偶性也相同, 因此  $\forall x \in (R(a) + R(b))$  一定为奇数。又因为  $a, b$  奇偶性相反, 因此  $a + b$  亦为奇数。因此:  $\forall x(x \in (R(a) + R(b)) \leftrightarrow x \in R(a + b))$ 。

综上所述: 对所有  $a, b$ , 有  $R(a) + R(b) = R(a + b)$ 。

## 5.7 T28

不妨设:  $a = (m_a, n_a), b = (m_b, n_b)$ 。

因此  $R(a) = \{(m_i, n_i) | n_i = n_a\}, R(b) = \{(m_j, n_j) | n_j = n_b\}$ , 所以  $R(a) + R(b) = \{(m_k, n_k) | m_k = m_i + m_j, n_k = n_i + n_j, (m_i, n_i) \in R(a), (m_j, n_j) \in R(b)\} = \{(m_k, n_k) | n_k = n_a + n_b\}$ 。因为  $R(a + b) = \{(m_l, n_l) | n_l = n_a + n_b\}$ 。因此  $(R(a) + R(b))$  与  $R(a + b)$  的集合的定义相同, 所以  $R(a) + R(b) = R(a + b)$ 。

## 5.8 T29

因为  $R((a, b)) = \{(m_i, n_i) | an_i = bm_i\}, R((a', b')) = \{(m_j, n_j) | a'n_j = b'm_j\}, R((a + a', b + b')) = \{(m_k, n_k) | (a + a')n_k = (b + b')m_k\}$ 。又因为  $R((a, b)) + R((a', b')) = \{(m_l, n_l) | (m_l, n_l) = (m_i, n_i) + (m_j, n_j), (m_i, n_i) \in R((a, b)), (m_j, n_j) \in R((a', b'))\}$ 。要证  $R((a, b)) + R((a', b')) = R((a + a', b + b'))$ 。

$b')$ ), 即证  $\forall(m_l, n_l) \in (R((a, b)) + R((a', b')) \rightarrow (a + a')n_l = (b + b')m_l$ 。因为  $(a + a')(n_i + n_j) - (b + b')(m_i + m_j) = an_j + a'n_i - bm_j - b'm_i$ 。不一定为 0。因此等式不成立。

较容易举出反例:  $(1, 2)R(2, 4), (1, 3)R(2, 6)$  但是  $(3, 7) \notin R((2, 5))$