

离散数学作业 __0

李云浩 241880324

2025 年 3 月 13 日

1 P60-62

T12

p 表示今天是星期一, q 表示碟子里有汤匙, r 表示草地是湿的。

(a) $p \wedge q$ (b) $q \vee r$ (c) $\neg p \wedge \neg r$ (d) $\neg q \wedge r$

T15

(a) 对于任意的整数, 都存在一个整数, 使它们之和为偶数。

(b) 存在一个整数, 使得它与任意的整数之和都为偶数。

T16

(a) 所有的整数都不是素数 (b) 存在一个不是偶数的整数。

T18

(a) $\forall x \neg P(x)$ (b) $\forall x \forall y R(x, y)$

(c) $\neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$ (d) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

T28

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \vee q) \vee \neg q$
F	F	F	T	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	T
T	T	T	F	T

T30

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge \neg r$
F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	T	T	F	F	T	F

T32

p	q	r	$p \downarrow q$	$p \downarrow r$	$(p \downarrow q) \wedge (p \downarrow r)$
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
T	T	F	F	F	F
T	T	T	F	F	F

T35

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \triangle p$
F	F	F	F
F	T	F	F
T	F	F	T
T	T	T	F

2 P66-69**T6**

(a) $\neg r \rightarrow q$ (b) $\neg q \wedge p$ (c) $q \rightarrow \neg p$ (d) $\neg p \rightarrow \neg r$

T7

- (a) 仅当我心情不好时，我会去看电影并且不学习离散数学结构。
 (b) 如果我心情好，那么我会学习离散数学结构或者去看电影。
 (c) 如果我心情不好，那么我不会去看电影或者我会学习离散数学结构。
 (d) 当且仅当我心情很好，我会去看电影并且不学习离散数学结构。

T12

(a) 不定式

p	q	$q \wedge p$	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$
F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
T	T	T	F	F	T

(b) 重言式

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

(c) 不定式

p	q	$q \wedge p$	$p \rightarrow (q \wedge p)$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	F
T	T	T	T

T13

$p \rightarrow q$ 的真值表为:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \rightarrow q$ 为假, 即 $p = T, q = F$, 此时:

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q)) \rightarrow q$
T	F	F	T	F

$(\neg(p \wedge q)) \rightarrow q$ 真值为假。

T14

$p \rightarrow q$ 的真值表为:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \rightarrow q$ 为假, 即 $p = T, q = F$, 此时:

p	q	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p) \vee (p \rightarrow q)$
T	F	F	F	F

$(\neg p) \vee (p \rightarrow q)$ 真值为假。

T15

$p \rightarrow q$ 的真值表为:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \rightarrow q$ 为真, 即 $(p = F) \vee (p = q = T)$, 此时:

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$(p \wedge q) \rightarrow \neg q$
F	F	F	T	T
F	T	F	F	T
T	T	T	F	F

$(p \wedge q) \rightarrow \neg q$ 的真值可能为真可能为假, 无法确定。

T16

$p \rightarrow q$ 的真值表为:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

因此 $p \rightarrow q$ 为真, 即 $(p = F) \vee (p = q = T)$, 此时:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg p$
F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F
T	T	T	F	F	F

$\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg p$ 的真值为假。

T24

- (a) 天气好或者我去上班。
- (b) 卡罗尔没有生病, 去了野餐但卡罗尔玩得不愉快。
- (c) 我进入了比赛并且赢得了这场比赛。

T27

$p \wedge (q \vee r)$ 的真值表为:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
F	F	F	F	F
F	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 的真值表为:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T
T	T	T	T	T	T

因此在 $p \ q \ r$ 的不同的真值指派情况下, 两个命题的真值情况一致, 故两个命题等价。即 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

T28

$\neg(p \vee q)$ 的真值表为:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
F	F	F	T
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	T	F

$(\neg p) \wedge (\neg q)$ 的真值表为:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	F	F	F

因此在 p, q 的不同的真值指派情况下, 两个命题的真值情况一致, 故两个命题等价。即 $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

T29

$$\begin{aligned}
 \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv \neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \\
 &\equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \\
 &\equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge p) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge q) \\
 &\equiv ((\neg p \wedge p) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)) \\
 &\equiv (F \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \vee F) \\
 &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))
 \end{aligned}$$

T30

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \exists x(P(x) \vee Q(x)) \\
 2. \quad P(a) \vee Q(b) \\
 \hline
 3. \quad \therefore \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)
 \end{array}$$

因此 $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

T31

$$\begin{aligned}
 \forall x(P(x) \wedge Q(x)) &\equiv \neg(\exists x(P(x) \vee Q(x))) \\
 &\equiv \neg(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \\
 &\equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)
 \end{aligned}$$

因此 $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

T32

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \rightarrow p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge p) \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q) \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee q) \\
 &\equiv T \wedge T \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

T33

$$\begin{aligned}
 q \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg q \vee (p \vee q) \\
 &\equiv \neg q \vee p \vee q \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

T34

$$\begin{aligned}
 (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q &\equiv (p \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow q \\
 &\equiv ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) \rightarrow q \\
 &\equiv \neg(p \wedge q) \vee q \\
 &\equiv \neg p \vee \neg q \vee q \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

T35

$$\begin{aligned}
((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \vee r) \\
&\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \\
&\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r) \\
&\equiv T
\end{aligned}$$

3 P73-75**T8**

p 、 q 、 r 、 s 分别表示这个学期毕业、通过了物理考试、每星期花 10 个小时学习物理、打排球。

前提: $p \rightarrow q$ 、 $\neg r \rightarrow \neg q$ 、 $r \rightarrow \neg s$ 、 s 证明: $\neg p$

1.

T12

(a)

1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
2. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
3. $\neg q \wedge r$
4. $\neg q$
5. $\neg p \vee q$
6. $\neg q$

7. $\therefore p$

(b)

1. $\neg(p \rightarrow q)$
2. $\neg(\neg p \vee q)$
3. $p \wedge \neg q$
4. p
5. $\therefore \neg q$

T18 证明: n^2 是偶数当且仅当 n 是偶数。

设 p 表示 n 为偶数, q 表示 n^2 为偶数。

证 $p \rightarrow q$:

不妨令 $n = 2k$, 则 $n^2 = 4k^2$, 因此 n^2 为偶数。 $p \rightarrow q$ 成立。

证 $q \rightarrow p$:

反证法: 不妨假设 n 为奇数, 且 n^2 为偶数, 即 $n = 2k + 1$.

所以 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$4k^2 + 4k$ 为偶数, 故 n^2 为奇数, 与假设矛盾, 故假设不成立。 $q \rightarrow p$ 成立。

综上所述, n^2 是偶数当且仅当 n 是偶数。

T20 设 A 和 B 是全集 U 的子集, 证明 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

证 $(A \subseteq B) \rightarrow (\overline{B} \subseteq \overline{A})$:

对于 $\forall x \in \overline{B}$, 即 $x \notin B$ 。因为 $A \subseteq B$, 所以 $x \notin A$, 即 $x \in \overline{A}$ 。成立。

证 $(\overline{B} \subseteq \overline{A}) \rightarrow (A \subseteq B)$:

对于 $\forall x \in A$, 即 $x \notin \overline{A}$ 。因为 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, 所以 $x \notin \overline{B}$, 即 $x \in B$ 。成立。

综上所述: $A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ 。

T22 证明: k 为奇数是 k^3 为奇数的一个充要条件。

证 k 为奇数 $\rightarrow k^3$ 为奇数

令 $k = 2n + 1$, 所以 $k^3 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$ 。此时 k^3 为奇数, 成立。

证 k^3 为奇数 $\rightarrow k$ 为奇数

反证, 假设 k 为偶数, k^3 为奇数。不妨令 $k = 2n$, 所以 $k^3 = 8n^3$ 为偶数, 与假设矛盾。故假设不成立, 原命题成立。

综上所述: k 为奇数是 k^3 为奇数的一个充要条件。

T23 证明或证伪: $n^2 + 41n + 41$ 对每个整数 n 都是一个素数。

取 $n = 41$, 此时 $n^2 + 41n + 41 = 2 \times 41 + 41 \times 41 + 41$, 显然能被 41

整除，命题不成立。

T24 证明或证伪：任何 5 个连续整数之和能被 5 整除。

不妨设五个整数分别为 $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ ，和为： $5n+10$ 能被 5 整除，命题成立。

T30

论证大致正确，当其中可以强调 $b \neq 0$ ，使论证更为严谨。

4 P79-83

T20

(a) 当 $P(n)$ 成立时，即 $2|(2n-1)$ ，因为 $2|2$ ，所以 $2|(2n-1+2)$ ，即 $2|(2n+1)$ ，所以 $P(n+1)$ 也成立。当 $P(n)$ 不成立时，同理 $P(n+1)$ 也不成立。

$P(n) \rightarrow P(n+1)$ 的真值表为：

$P(n)$	$P(n+1)$	$P(n) \rightarrow P(n+1)$
F	F	T
T	T	T

因此 $P(n) \rightarrow P(n+1)$ 为重言式。

(b) 对于任意的整数 n ， $2n-1$ 为奇数，不能被 2 整除。因此 $P(n)$ 对于任意整数 n 不为真。

(c) 不矛盾。分题 (a) 说明的是 $P(n)$ 与 $P(n+1)$ 的真值情况一致，说明可以从 $P(n)$ 的真值情况推出 $P(n+1)$ 那么数学归纳法的原理也是近似，先找出一两个例子，然后利用递推关系推出剩下的所有情况。因此并不矛盾。

T22

论证时指举出了 $P(0)$ 一个例子，但是后续 2^k 以及 2^{k-1} 都使用了这个特例。

T26 证明：设 A 和 B 是方阵，如果 $AB = BA$ ，那么 $(AB)^n = A^n B^n$ 对 $n \geq 1$ 成立。

当 $n = 1$ 时, $AB = BA$ 已由条件给出, 成立。

假设 $n = k$ 时成立, 证明 $n = k + 1$ 时也成立:

$$\begin{aligned}
 (AB)^{k+1} &= (AB)^k AB \\
 &= A^k B^k AB \\
 &= A^k B^{k-1} (BA) B \\
 &= A^k B^{k-1} AB^2 \\
 &\vdots \\
 &= A^{k+1} B^{k+1}
 \end{aligned}$$

证毕。

T28 证明: 每个比 27 大的整数都能写成 $5a + 8b$, 其中 $a, b \in \mathbf{N}$

有: $28 = 5 \times 4 + 8 \times 1$, $29 = 5 \times 1 + 8 \times 3$, $30 = 5 \times 6 + 8 \times 0$,
 $31 = 5 \times 3 + 8 \times 2$, $32 = 5 \times 0 + 8 \times 4$. 根据数学归纳法, 目前存在五个连续的大于 27 的整数满足条件。且 $P(n)$ 成立时, $P(n + 5)$ 显然成立。
 证毕。

T30 证明: 如果 $GCD(a, b) = 1$, 那么对所有 $n \geq 1, GCD(a^n, b^n) = 1$.

因为 $GCD(a, b) = 1$, 即对 a, b 分别进行质因数分解时, 只有 1 这一个共同的公因数。那么当 a, b 分别变为 n 次方后, 分解出来的质因数与一开始的等同, 因此仍然只会存在 1 这一个唯一的公因数。因此如果 $GCD(a, b) = 1$, 那么对所有 $n \geq 1, GCD(a^n, b^n) = 1$ 。

T34

T36