

离散数学作业 _3

李云浩 241880324

2025 年 3 月 30 日

1 1.3

1.1 T23

A 无限集、不可数。 B 有限集、可数 C 无限集、可数 D 有限、可数 E 有限、可数

1.2 T24

A 无限、可数 B 有限、可数 C 无限、可数 D 无限、不可数 E 无限、不可数

2 3.1

2.1 T25

$$\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

2.2 T26

先把 n 个人排成一列，共有 A_n^n 种排序方法，但由于最后是围绕称一个圆桌。因此相当于把这一列首尾相连，此后谁是首无需在意。因此在次序不变时， n 个人轮流为首的情况是等价的。因此要对原来的结果除以 n 。
故答案为： $\frac{A_n^n}{n}$

2.3 T29

证明: $n \times_{n-1} P_{n-1} =_n P_n$

由于: $_n P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$, $_{n-1} P_{n-1} = \frac{(n-1)!}{[n-1-(n-1)]} = (n-1)!$

所以: $n \times_{n-1} P_{n-1} = n \times (n-1)! = n! =_n P_n$. 证毕。

2.4 T34

末位 0 的个数取决于对 $n!$ 的项进行质因数分解后可以组成多少个 2×5 的搭配。因为 2 的数量显然要比 5 多, 因此末尾 0 的个数只取决于 $n!$ 的项中的因数 5 的数目。其中, 25 中有两个因数 5, 125 中有三个因数 5, 因此对于 $5^k \leq n < 5^{k+1}$, $n!$ 中某位 0 的个数为: $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{25}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{5^k}\right]$ 。其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。

3 3.2

3.1 T19

证明: $_{n+1} C_r =_n C_{r-1} +_n C_r$ 因为: $_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$,

所以: $_{n+1} C_r = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$ $_n C_{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$, 因此:

$$\begin{aligned} _n C_{r-1} +_n C_r &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{rn!}{(n-r+1)r!(n-r)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \left(1 + \frac{r}{n-r+1}\right) \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\ &=_{n+1} C_r \end{aligned}$$

证毕。

3.2 T23

- (a) 每次有两种可能, 故 n 次的记录序列为 2^n 。
 (b) 恰好有 3 个反面, 即在 n 个记录里抽 3 个记录, 令其为反面, 故为: C_n^3 。
 (c) 恰好包含 k 个正面, 即在 n 个记录里抽 k 个记录, 令其为正面, 故为: C_n^k 。

3.3 T27

(a) 后继第一行: 1 5 10 10 5 1, 后继第二行: 1 6 15 20 15 6 1, 后继第三行: 1 7 21 35 35 21 7 1。(b) 设由第 $n-1$ 行得到第 n 行, 满足下列规则:
 $a_{(n,1)} = a_{(n,n)} = 1, \quad a_{(n,k)} = a_{(n-1,k-1)} + a_{(n-1,k)}$

3.4 T32

猜想: 2^{n-1} 。

证明: 因为 Pascal 三角形满足下列递推关系:

$$a_{(n,1)} = a_{(n,n)} = 1, \quad a_{(n,k)} = a_{(n-1,k-1)} + a_{(n-1,k)}$$

其中 Pascal 三角形的起始条件为: $a_{2,1} = a_{2,2} = 1$ 。因为对于 C_n 存在同样的递推关系:

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$$

其中 C_n 的起始条件为: $C_1^0 = C_1^1 = 1$ 。可以观察到二者的递推关系以及起始条件等价, C_n^k 与 $a_{n+1,k+1}$ 也等价。因此 $\sum_{i=0}^n C_n^i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i}$, 故 $\sum_{i=1}^n a_{n,i} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = 2^{n-1}$ 。

4 3.3

4.1 T10

因为前六个数的和为: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, 后六个数的和为: $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 75$ 。两者之差为 $75 - 21 = 54$, 故区间长度为 55。任意选 6 个整数, 它们之和一定也落在这个长度为 55 的区间内。因为 $C_1^{56} = 5005$, 根据鸽巢原理, 把 5005 个数分配到长度为 55 的区间内, 一定有 $\frac{(5005-1)}{55} + 1 > 91$ 。因此一定有 90 种方法的使得所有的选择有相同的和。

4.2 T12

若题目为不超过 $\sqrt{2}$ ，则对于边长为 1 的正方形而言，最长的线段为对角线长度为 $\sqrt{2}$ ，不超过 $\sqrt{2}$ ，因此显然满足。

若题目为不超过 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，可以将大正方形平分为 4 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形，因为一共有 5 个点，因此一定有一个小正方形里面有两个点。因为小正方形内最长的线段为对角线，长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因此，该两个点的距离不超过 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。证毕。

4.3 T17

当 n 为偶数时，当子集取 $\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$ 时，显然这个子集不存在一个数是另一个数的倍数。但是当取多一个 $\frac{n}{2} - 1$ 时，那么 $2 \times (\frac{n}{2} - 1)$ 一定在这个子集之中。因此子集大小为： $\frac{n}{2} + 1$ 。当 n 为奇数时， $n - 1$ 为偶数，因此子集取 $\frac{n+1}{2} + 1$ 。

综上所述：子集应该取 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1$ 大小时，才能保证该子集中的一个数是同一个子集的另一个数的倍数。

4.4 T18

有可能，当选出的 10 张为：1 ~ 10 时，其中任选两张卡片组成的最大的和为 19，小于 21，获胜。

4.5 T19

要使两张牌的和为 21，那么组合可以是：1 + 20, 2 + 19, ..., 10 + 11，共有 10 种搭配，要不使两张牌的和为 21，则选的牌里面不可以有两张牌能组成上面的一个搭配。那么假设每种搭配只选取一张，那么我只能选取出 10 张，剩下的两张必定会与一开始选的 10 张之中的两张成功配对。因此不可能赢得这个游戏。

4.6 T21

考虑和数 $c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$ ，一共有六个数，分别除以 6 时，会得到相应的余数，记为： n_1, n_2, \dots, n_6 。因为除以 6 之后的余数可能仅有 6 种可能。若 $n_1 \sim n_6$ 中，存在 $n_k = 0$ ，则说明其对应的和数

被 6 整除。若 $n_1 \sim n_6$ 中, 不存在 $n_k = 0$, 则该六个余数对应只有 5 种可能, 根据鸽巢原理, 必有 $n_i = n_j, i < j$ 。因此用第 j 个和数与第 i 个和数做差, 其差同样为该六个整数的任意序列的和, 并且能被 6 整除。证毕。

4.7 T22

考虑和数 $c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + c_2 + \dots + c_n$, 分别记为 m_1, m_2, \dots, m_n , 一共有 n 个数。分别除以 n 时会得到相应的余数, 记为: q_1, q_2, \dots, q_n 。因为除以 n 之后的余数可能仅有 n 种可能。若 $q_1 \sim q_n$ 种, 存在 $q_k = 0$, 则说明 m_k 能够被 n 整除。若 $q_1 \sim q_n$ 中, 不存在 $q_k = 0$, 则该 n 个余数对应只有 $n - 1$ 种可能, 根据鸽巢原理, 必有 $n_i = n_j, i < j$ 。因此用第 j 个和数与第 i 个和数做差, 其差为: $c_{i+1} + c_{i+2} + \dots + c_j$, 为 n 个整数的任意序列的和, 并且能被 n 整除。证毕。

4.8 T23

讨论六个正整数中 1 的个数。

- 有三个及以上个 1, 那么必有子集 $\{1, 1, 1\}$, 其和为 3。
- 有且只有两个 1, 如果存在 2 的话, 那么有子集, $\{1, 2\}$, 其和为 3。如果不存在 2 的话, 那么剩下 4 个数字最小为 4(因为如果含有 3 的话, 那么 3 自己就是一个和为 3 的子集), $1 + 1 + 4 \times 4 = 18 > 13$, 不满足。
- 有且只有一个 1, 如果存在 2 的话, 那么有子集, $\{1, 2\}$, 其和为 3。如果不存在 2 的话, 那么剩下 5 个数字最小为 4, 显然不满足和为 13。
- 如果一个 1 也不存在的话, 由于和为 13, 显然需要一个奇数元素, 那么这个奇数元素只能是 5, 其他 5 个元素最小为 2, $5 + 5 \times 2 = 15 > 13$, 不满足。

综上所述, 6 个正整数的任意集合之和若是 13, 则它一定有一个和为 3 的子集。

4.9 T24

任意一个有理数都可以表示为 $\frac{a}{b}$, 其中 $a, b \in \mathbf{Z}, b > 0$ 。对于任意的一个 b , 其可能的余数的数目为 b 个。因此 $\frac{a}{b}$ 利用保留余数的除法, 除上 b

次之后，根据鸽巢原理，必定会有一次余数为 0 或者两次余数相等。余数为 0 时，说明除出来的是一个有限的数。两次余数相等说明会有重复的部分。证毕。

5 3.4

5.1 T34

$$\begin{aligned} (a)P_a &= \frac{5 \times 3}{6^3} = \frac{5}{72} & (b)P_b &= \frac{10+6+3+1}{6^3} = \frac{5}{54} & (c)P_c &= 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216} \\ (d)P_d &= \frac{3 \times 5 \times 5 + 5^3}{6^3} = \frac{25}{27} & (e)P_e &= \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \end{aligned}$$

5.2 T37

当关键字在第一个位置的时候，需要一步；在第二个位置的时候，需要两步；……；在第 n 个位置的时候，需要 n 步。因为关键字在各个位置的概率是相等的，因此平均步数为： $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$ 。

5.3 T38

如果不假设关键字在数组里，那么该题就成为了一个条件概率。设事件 A 为关键字在数组里，事件 B 为找到字的平均步数。因此 $P(B | A) = \frac{n+1}{2}$ ， $P(B | \bar{A}) = 0$ 。

5.4 T39

游戏者获胜的情况分别为： $\{(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ ，共有 6 种情况。游戏期望为： $10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} - 3 = -\frac{11}{9}$ 。

5.5 T40

要是游戏公平，那么总期望应该为 0。设花费为 x ，那么：

$$10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} - x = 0$$

解得： $x = \frac{16}{9}$ 。

5.6 T41

(a) 满足号数为奇数且不是黑色的纸牌一共有 8 张, 因此:

$$\frac{C_8^2}{C_{52}^2} = \frac{14}{663}。$$

(b) 满足号数为奇数且不是黑色的纸牌一共有 8 张, 但是不是黑色的纸牌有 26 张。因此: 假设有且只有一张是奇数, $P_1 = 2 \times \frac{C_8^1}{C_{52}^1} \times \frac{C_{26}^1}{C_{52}^1} = \frac{2}{13}$ 。假设两张都是奇数, 由 (a) 可知, $P_2 = \frac{14}{663}$ 。因此总概率为: $P_1 + P_2 = \frac{116}{663}$

6 3.5

6.1 T14

$$\begin{aligned}c_n &= c_{n-1} + n \\&= c_{n-2} + n + (n-1) \\&\vdots \\&= c_1 + n + (n-1) + \cdots + 2\end{aligned}$$

因为 $c_1 = 4$, 因此 $c_n = 3 + \frac{(n+1)n}{2}$ 。

6.2 T18

因为 $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$, 得特征方程: $r^2 - 4r - 5 = 0$ 。解得: $r_1 = 5, r_2 = -1$ 。设 $a_n = \alpha_1 5^n + \alpha_2 (-1)^n$ 。因为 $a_1 = 2, a_2 = 6$, 带入解得: $\alpha_1 = \frac{4}{15}, \alpha_2 = -\frac{2}{3}$ 。所以: $a_n = \frac{4}{15} 5^n - \frac{2}{3} (-1)^n$ 。

6.3 T26

(a) $r_n = r_{n-1} + n$ 。

(b)

$$\begin{aligned}r_n &= r_{n-1} + n \\&= r_{n-2} + n + (n-1) \\&\vdots \\&= r_1 + n + (n-1) + \cdots + 2\end{aligned}$$

因为一条直线的时候，把平面分成了两个部分，即 $r_1 = 2$ 。因此 $r_n = \frac{(n+1)n}{2} + 1$ 。

6.4 T28

因为 $x^2 - r_1x - r_2 = 0$ 有唯一单根 s ，因此 $r_1^2 + 4r_2 = 0, s^2 - r_1s - r_2 = 0$ 。
 $0a_n = us^n + vns^n$ ，尝试推导出 $a_n = r_1a_{n-1} + r_2a_{n-2}$ 。

$$\begin{aligned}
 a_n &= us^n + vns^n \\
 &= us^{n-2}s^2 + vns^{n-2}s^2 \\
 &= us^{n-2}(r_1s + r_2) + vns^{n-2}(r_1s + r_2) \\
 &= r_1us^{n-1} + r_2us^{n-2} + r_1vns^{n-1} + r_2vns^{n-2} \\
 &= r_1(us^{n-1} + vns^{n-1}) + r_2(us^{n-2} + vns^{n-2}) \\
 &= r_1a_{n-1} + r_2a_{n-2}
 \end{aligned}$$

证毕。

6.5 T34

(a) 三阶。(b) 由: $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ ，得特征方程: $r^3 - 7r - 6 = 0$ 。
 解得: $r_1 = -1, r_2 = 3, r_3 = -2$ 。因此: $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(3)^n + \alpha_3(-2)^n$ 。
 因为: $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 10$ 。解得: $\alpha_1 = -\frac{7}{2}, \alpha_2 = \frac{17}{30}, \alpha_3 = \frac{11}{10}$ 。故递归
 关系为: $a_n = -\frac{7}{2}(-1)^n + \frac{17}{30}(3)^n + \frac{11}{10}(-2)^n$ 。

6.6 T36

因为: $b_1 = 1, b_2 = 3, b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$ ，因此 $b_3 = 7 < (\frac{5}{2})^3 = 15.625$ 。
 假设对 $n = k-1, n = k-2$ 时，有 $b_{k-1} < (\frac{5}{2})^{k-1}, b_{k-2} < (\frac{5}{2})^{k-2}$ 。下证: 对

于 $n = k$, 有 $b_k < (\frac{5}{2})^k$ 成立。

$$\begin{aligned}
 b_k &= b_{k-1} + 2b_{k-2} \\
 &< (\frac{5}{2})^{k-1} + 2(\frac{5}{2})^{k-2} \\
 &= \frac{2}{5}(\frac{5}{2})^k + \frac{8}{25}(\frac{5}{2})^k \\
 &= \frac{18}{25}(\frac{5}{2})^k \\
 &< (\frac{5}{2})^k
 \end{aligned}$$

证毕。