实验三——公钥密码算法 RSA

1611532 刘一静 信息安全

实验要求： 通过实际编程了解公钥密码算法 RSA 的加密和解密过程，加深对公钥密码算法的了解和使用。

目录

一、RSA 简介

RSA 是一种非对称加密，也就是需要一对密钥，公钥用于加密，私钥用于解密。

RSA 算法涉及五个关键参数：

公钥：e，N；

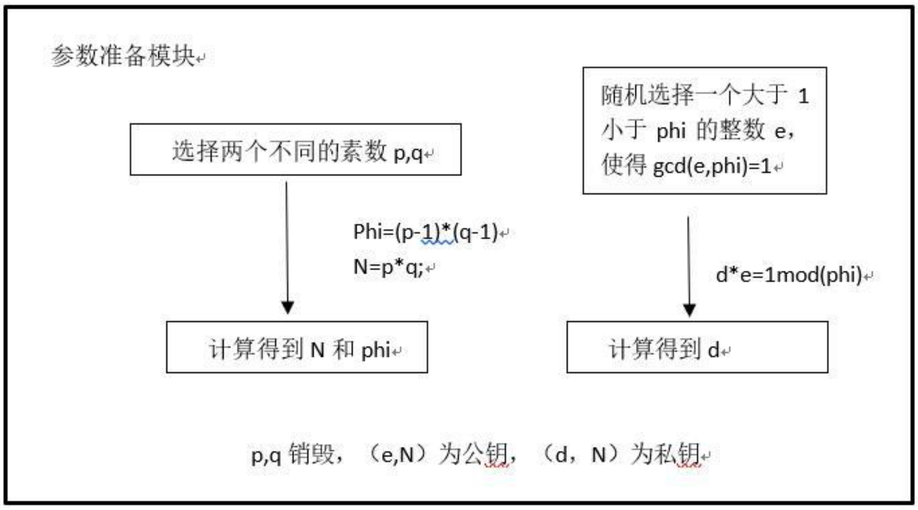
私钥：d，N；

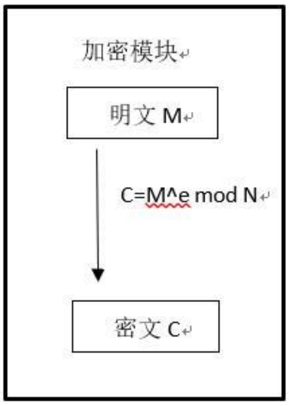
明文：m；

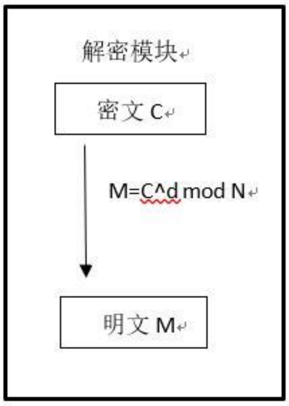
密文：c；

其中 N 是两个大素数 p，q 的积，e、d 满足 e*d mod((p-1)*(q-1))=1。

实现 RSA 算法的完整流程图如下：





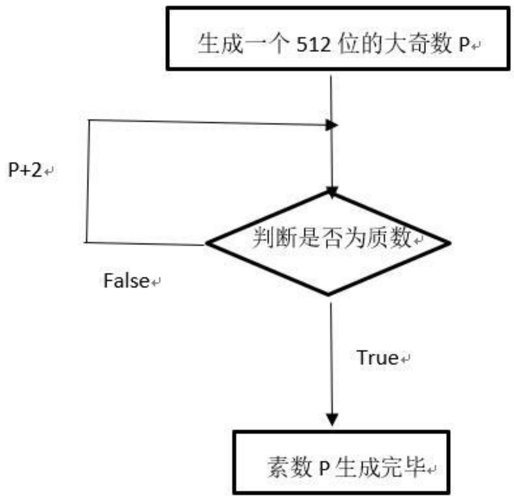


二、密钥的生成

RSA 算法密钥的生成是很麻烦的，因为生成大素数是一个不太容易的事情，同样，在破解 RSA 时，如果攻击者获得了 n、e 和密文 c，为了破解密文必须计算出私钥 d，为此需要先分解 n。当 n 的长度为 512 比特时，在目前还是安全的，但从因式分解技术的发展来看，512 比特并不能保证长期的安全性。为了达到更高的安全性，要求在一般的商业应用中使用 1024 比特的长度，在更高级别的使用场合，要求使用 2048 比特长度。

本次实验的第一个关键问题就是如何快速生成 512 比特的素数。

流程图：



1、随机数的生成

除了 2 之外的素数都是都是奇数，因此首先生成一个大奇数，然后判断它是否为一个素数，若不是，则将其加 2，用该相邻的奇数继续判断，只到通过素性检验，即可认定生成了一个大素数。

2、Miller—Rabin 素性检验

在进行素性检验时，一般采用 Miller-Rabin 素性检验算法。若该算法返回值为 false，则说明输入的 n 一定是合数；若返回值为 true，也不能肯定 n 一定是一个质数，要多检验几次，一般来说检测 5 次，若 5 次返回值均为 true，则可认为输入的 n 为一个质数。

Miller-Rabin 算法的理论基础：如果 n 是一个奇素数， 将 $n-1$ 表示成 2^s*r 的形式(r 是奇数)，a 是和 n 互素的任何整数， 那么 $a^r\equiv1 \pmod n$ 或者对某个 $j(0\leqslant j \leqslant s-1, j\in Z)$ 等式 $a^{(2^j*r)}\equiv-1 \pmod n$ 成立。 这个理论是通过一个事实经由 Fermat 定理推导而来： n 是一个奇素数，则方程 $x^2\equiv 1 \bmod n$ 只有 ±1 两个解。

该算法的伪代码如下：

```
Miller-Rabin(n,t)
 输入：一个大于3的奇整数n和一个大于等于1的安全参数t
 输出：返回n是否是素数，bool类型返回值
   输入的n-1;
   二进制形式表示为：bk,bk-1,.....b0;
   i from 0 to t
        随机生成一个随机数a,且1<a<n-1
        d <- 1
        j from k to 0
            x <- d;
            d = (d*d) % n;
            如果 d == 1 并且x != 1 并且  x != m: 返回false;
            如果 bj 等于1: d = (a*d) % n;
     如果 d 不等于1: 返回false
  返回true;
```

三、加解密原理

1、加密算法

对于明文 m，由 c = m^e mod n，得到密文 c。

2、解密算法

对于密文 c，由 m = c^d mod n，得到明文 m。

四、关键代码

1、大整数类的定义与实现

本次实验中需要自己定义 BigInt 大整数类，来支持 512 比特数据的加减乘数等基本运算。

具体代码不在实验报告中赘述，具体定义见源码中 BigInt.h 文件。

2、大素数的产生

这模块在源码中的 RSA2 类中进行定义，下面为四个核心的函数：

```
//产生一个素数
BigInt RSA2::createPrime(unsigned int n, unsigned int k){ ... }

//产生奇数
BigInt RSA2::random_odd(unsigned int n){ ... }

//判断是否为素数
bool RSA2::isPrime(const BigInt & n, unsigned int k){ ... }

//素性检验中需要产生一个大于1小于n-1的随机数
BigInt RSA2::random_a(const BigInt & n){ ... }
```

3、快速模、乘法逆元

这模块在源码中的 match 类中进行定义，下面为四个主要的函数：

```
BigInt gcd(BigInt a, BigInt b);//欧几里德求GCD
BigInt mod_fast(BigInt a, BigInt b, BigInt p);//快速幂模
BigInt extgcd(BigInt a, BigInt b, BigInt &x, BigInt &y);//扩展欧几里德实现乘法逆
BigInt inverse(BigInt a, BigInt m);//求a模m的逆元
```

4、加解密的实现

该模块的实现比较简单，调用上述基本函数即可完成加解密。

加解密函数定义在 RSA2 类中，代码如下：

```
BigInt RSA2::encrypt(const BigInt & m)
{
    //c=m^e (modn)
    BigInt c;
    match mat;
    c = mat.mod_fast(m, e, N);
    return c;
}

BigInt RSA2::decode(const BigInt & c)
{
    //m=c^d(modn)
    BigInt m;
    match mat;
    m = mat.mod_fast(c, d, N);
    return m;
}
```

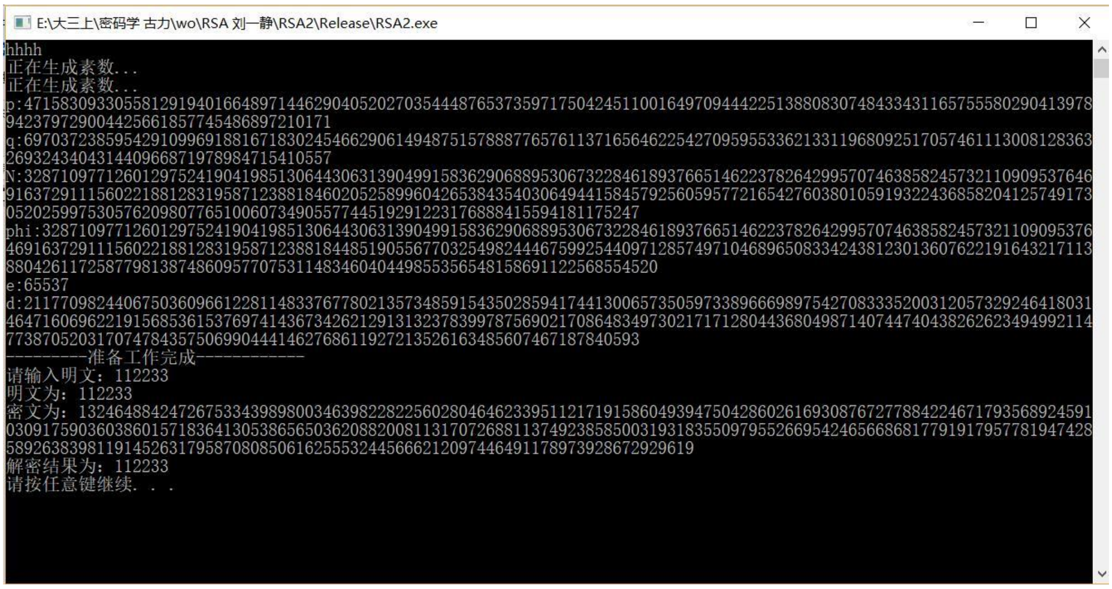
五、最终效果

所有函数都正确编写完成后进行测试：生成一个 512 比特素数的时间存在很大的随机性，平均每 15 秒左右可以产生一个素数。算法效率还可以。

生成的素数经在线检测确定为素数，证明了算法的正确性。

（https://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM）

下面是运行结果：



解密加密之后的明文可以得到正确的明文，正确实现了 RSA 算法的加密与解密。