计算方法作业 1

刘彦铭 学号:122033910081

编辑日期: 2022 年 9 月 30 日

李庆杨等, 数值分析, 第 5 版, 华中科大, P.12, 1,2,4,5,10,11,13,14

1. Page12 习题 1

   $\ln(x^*)-\ln(x)=\ln\left(1+\dfrac{x^*-x}{x}\right)=\ln(1+\delta)=\ln(1)+\delta+O(\delta^2)$. 忽略二阶以上的项，误差为 δ .

2. Page12 习题 2

   $\dfrac{(x^*)^n-x^n}{x^n}=\left(\dfrac{x^*}{x}\right)^n-1=\left(1+\dfrac{x^*-x}{x}\right)^n-1$. 记 $\delta=\dfrac{x^*-x}{x}=2\%$, 有:

   $(1+\delta)^n-1=n\cdot\delta+O(\delta^2)$ 忽略二阶以上的项，可得相对误差为 $n\cdot\delta$, 即 $0.02n$.

3. Page12 习题 4

   (1) $|e^*(x_1^*+x_2^*+x_4^*)|\le|e_1^*|+|e_2^*|+|e_4^*|\le 0.5\times10^{-4}+0.5\times10^{-3}+0.5\times10^{-3}=1.05\times10^{-3}$

   (2) $|e^*(x_1^*x_2^*x_3^*)|\le|e_1^*x_2^*x_3^*|+|x_1^*e_2^*x_3^*|+|x_1^*x_2^*e_3^*|\le 0.2148$

   (3) $\left|e^*\left(\dfrac{x_2^*}{x_4^*}\right)\right|\le\left|\dfrac{e_2^*}{x_4^*}\right|+\left|\dfrac{x_2^*e_4^*}{(x_4^*)^2}\right|\le 8.866\times10^{-6}$

4. Page12 习题 5

   $\dfrac{V^*-V}{V}=\dfrac{(R^*)^3-R^3}{R^3}=\left(\dfrac{R^*-R}{R}+1\right)^3-1=3\cdot\dfrac{R^*-R}{R}+O\left(\left(\dfrac{R^*-R}{R}\right)^2\right)$

   忽略二阶以上的项，所以半径的相对误差限应该为 $|\dfrac{R^*-R}{R}|\le\dfrac{1}{3}\times1\%=0.33\%$

5. Page12 习题 10

   绝对误差 $s^*-s=g\cdot t\cdot e_t^*+O((e_t^*)^2)$. 绝对误差关于 t 递增;

   相对误差 $\dfrac{s^*-s}{s}=\dfrac{g}{t}\cdot e_t^*+O((e_t^*)^2)$. 相对误差关于 t 递减。

6. Page12 习题 11

   $y_n=10y_{n-1}-1\Rightarrow e_n=10e_{n-1}\Rightarrow e_{10}=10^{10}\cdot e_0=1.41\times10^{10}$. 该计算过程不稳定。

7. Page12 习题 13

   $f(30)\approx-4.094$

   考虑 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 求 $f(30)$ 时的误差, 由于 30 是整数，在常见计算机系统上没有浮点误差，故而误差来源于 $\sqrt{x^2-1}$ 的开平方操作。设这一误差为 e .

   则计算 $f(30)$ 时的误差估计为 $\dfrac{e}{x-\sqrt{x^2-1}}=(x+\sqrt{x^2-1})e\approx60e$.

   而使用 $-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 计算 $f(30)$ 时的误差估计为 $\dfrac{e}{x+\sqrt{x^2-1}}\approx\dfrac{e}{60}$.

8. Page12 习题 14

   解为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{10^{10}}{10^{10}-1}\\x_2=\dfrac{10^{10}-2}{10^{10}-1}\end{cases}$ 假定只用三位数计算，消元中计算 $10^{10}-1$, $10^{10}-2$ 时会对阶，得到 10^{10} 导致“大数吃掉小数”，从而得到 $x_1=x_2=1$ 的解。虽然在本例中解的误差很小，但这种计算不可靠。