计算方法 作业 3

刘彦铭 ID: 122033910081

Last Edited: 2022 年 11 月 2 日

李庆杨等, 数值分析, 第 5 版, 华中科大, P.199, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,15,16,17,19,20,21,22,24,26,27,28,30,32,33

1. 习题 1

(1) 中间过程全用 4 位小数计算，直接消元：进行三次行变换 $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5483 & 1 & 0 & 0 \\ -0.8899 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4355 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2573 & 1 & 0 \\ 0 & -1.0845 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -163.8330 & 1 \end{bmatrix}$, 得到线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 \\ 0 & 0.3195 & 0.1998 & -0.0485 \\ 0 & 0 & -0.0006 & -0.1851 \\ 0 & 0 & 0 & 30.6426 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4043 \\ -0.0667 \\ 0.0814 \\ -13.6955 \end{bmatrix}$$

得到解：$[x_1, x_2, x_3, x_4]^\top = [-0.1709, -1.6536, 2.2020, -0.4469]^\top$

(2) 中间过程仍用 4 位小数计算，但选取列主元，进行三次消元（置换 + 消去）

$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5483 & 1 & 0 & 0 \\ -0.8899 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4355 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2372 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9221 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2506 & 1 \end{bmatrix}$, $Ax = b \to (R_3P_3R_2P_2R_1)Ax = (R_3P_3R_2P_2R_1)b$, 即得到线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 \\ 0 & 0.3465 & 0.1184 & 0.2645 \\ 0 & 0 & 0.0906 & -0.2924 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1870 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4043 \\ -0.4318 \\ 0.3315 \\ 0.0835 \end{bmatrix}$$

得到解：$[x_1, x_2, x_3, x_4]^\top = [-0.1826, -1.6632, 2.2179, -0.4465]^\top$

很显然，(2) 和 (1) 的解不完全一样，为对比误差，可计算误差 $||A\hat{x} - b||_2$, 可知 (1) 的解对应的误差范数为 1.5484, (2) 的解对应的误差范数为 1.0858×10^{-4}, 在本例中，列主元消元的解精度更高。

2. 习题 2

(1) 由于消元时不会消去第一行，所以消元前，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^\top \\ a_1 & A_1 \end{bmatrix}$, 且 A_1 是对称矩阵。据消元过程 $A_2 = A_1 - a_{11}^{-1} a_1 a_1^\top$, 显然是对称阵。

(2) $\begin{bmatrix} 0.6428 & 0.3475 & -0.8468 \\ 0.3475 & 1.8423 & 0.4759 \\ -0.8468 & 0.4759 & 1.2147 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4127 \\ 1.7321 \\ -0.8621 \end{bmatrix}$ 这里直接给出 LU 分解的结果 $PA = LU$（对应高斯消元）$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.410368 & 1 & 0 \\ -0.759093 & 0.347838 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} -0.8468 & 0.4759 & 1.2147 \\ 0 & 2.03759 & 0.974375 \\ 0 & 0 & -0.263654 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x = U^{-1}L^{-1}Pb = \begin{bmatrix} 4.587 \\ -0.632 \\ 2.735 \end{bmatrix}$$

3. 习题 3

   (1) 利用数学归纳法证明 $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(1)} - \sum_{t=1}^{k-1} m_{it} a_{tj}^{(t)}$：(a) $k=1$ 时，显然成立；(b) 由 (7.2.9) 的递推式：$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)} = a_{ij}^{(1)} - \sum_{t=1}^{k-1} m_{it}a_{tj}^{(t)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)} = a_{ij}^{(1)} - \sum_{t=1}^{k} m_{it}a_{tj}^{(t)}$.

   (2) 直接代入 $u_{rj} = a_{rj}^{(r)} = a_{rj}^{(1)} - \sum_{t=1}^{r-1} m_{rt}a_{tj}^{(t)} = a_{rj} - \sum_{t=1}^{r-1} l_{rt}u_{tj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj}$. 由 (1) 知: 对于 $i > r$, $a_{ir}^{(r)} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}$, 所以 $l_{ir} = m_{ir} = a_{ir}^{(r)}/a_{rr}^{(r)} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr})/u_{rr}$

4. 习题 4

   记 A_k 表示由 A 的前 k 行前 k 列构成的子矩阵. $LU = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ \star_1 & \star_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & \star_3 \\ 0 & \star_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_kU_k & \star_5 \\ \star_6 & \star_7 \end{bmatrix} = A$. 从而 $A_k = L_kU_k$, $\det(A_k) = \det(L_k)\cdot\det(U_k) \neq 0$, 因为单位三角阵的顺序主子式不为零。

5. 习题 5

   由于顺序主子式均非 0, 所以可以顺利地进行不选择主元的高斯消元，最终得到方程 $A^{(n)}x = b^{(n)}$，其中 $A^{(n)} = L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 A$ 是一个上三角矩阵，而 $L_i, 1 \le i < n$ 均为单位下三角的初等行变换矩阵。

   令 $U = A^{(n)}$, $L = L_1^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}$, 即得到 $A = LU$, 且满足 L 是单位下三角阵，U 是上三角阵。

6. 习题 6

   对于 $i, j \ge 2$, 经过一次消元后（消去第一列），$a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}/a_{11} \times a_{1j}$.

   考虑消元之后的第 i 行，$i > 1$, $|a'_{ii}| = |a_{ii} - a_{i1}/a_{11} \times a_{1i}| \ge |a_{ii}| - |a_{i1}/a_{11}| \cdot |a_{1i}|$

   由于 $\sum_{j>1, j\neq i} |a_{ij}| \le \sum_{j>1, j\neq i} (|a_{ij}| + |a_{i1}/a_{11}| \cdot |a_{1j}|)$，所以

$$\begin{aligned} |a'_{ii}| - \textstyle\sum_{j>1,j\neq i} |a'_{ij}| &\ge |a_{ii}| - |a_{i1}/a_{11}| \cdot |a_{1i}| - \textstyle\sum_{j>1,j\neq i} |a_{ij}| - |a_{i1}/a_{11}| \cdot \textstyle\sum_{j>1,j\neq i} |a_{1j}| \\ &= |a_{ii}| - \textstyle\sum_{j>1,j\neq i} |a_{ij}| - |a_{i1}|/|a_{11}| \cdot \textstyle\sum_{j\neq i} |a_{1j}| \\ &> |a_{ii}| - \textstyle\sum_{j>1,j\neq i} |a_{ij}| - |a_{i1}| \\ &= |a_{ii}| - \textstyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}| \\ &> 0. \end{aligned}$$

   故而 A_2 子矩阵仍是对角占优矩阵。

7. 习题 7

   (1) 由于 A 是对称正定矩阵，故存在 Cholesky 分解：$A = LL^\top$. 从而 $A_{ii} = \sum_k L_{ik}L^\top ki = \sum_{k\le i} L_{ik}^2$. 因为 $A = LL^\top$ 是正定矩阵，故 L 任一行向量不为零向量，所以 $A_{ii} = \sum_{k\le i} L_{ik}^2 > 0$.

   (2) 对消元前的 A 分块，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^\top \\ a_1 & A_1 \end{bmatrix}$, 据高斯消元过程，有 $A_2 = A_1 - (a_{11})^{-1}a_1a_1^\top$ 显然对称. 对于任意 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, 令 $\beta = -(a_{11})^{-1}a_1^\top x \in \mathbb{R}$, 由于 A 正定，故 $[\beta; x^\top] \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^\top \\ a_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ x \end{bmatrix} > 0$, 展开即得：$x^\top A_1 x + 2\beta a_1^\top x + \beta^2 a_{11} = x^\top A_1 x - (a_{11})^{-1}(a_1^\top x)(a_1^\top x) = x^\top A_2 x > 0$. 所以 A_2 对称且正定。

(3) 由于 $A_2 = A_1 - (a_{11})^{-1} a_1 a_1^\top$, $a_1 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $a_{11} > 0$. 显然有 A_2 对角线元素小于等于对应位置的 A_1 中元素，即 $a_{ii}^{(2)} < a_{ii}$，$i = 2, 3, \cdots, n$.

(4) (2) 中我们已证明 A_2 是对称正定阵，所以 A_2 对角线元素大于 0，即 $a_{ii}^{(2)} = a_{ii} - (a_{11})^{-1} a_{i1}^2 > 0$, 于是有 $a_{i1}^2 < a_{11} \cdot a_{ii}$ 这说明 $a_{i1} < \max\{a_{11}, a_{ii}\}, \forall i \neq 1$，说明第 1 列的元素绝对值小于对角线元素绝对值的最大者。设 P_{1k} 是交换第 1 行 (列) 与第 k 行 (列) 的初等置换矩阵，由于 $A = Q\Lambda Q^\top$, $P_{1k}AP_{1k} = (P_{1k}Q)\Lambda(P_{1k}Q)^\top$, 所以 $P_{1k}AP_{1k}$ 也是对称正定矩阵，这就验证了 A 的第 k 列元素绝对值小于对角线元素绝对值的最大者。

(5) 由 (4) 知，$\max_{2\le i,j\le n} |a_{ij}^{(2)}| = a_{kk}^{(2)}$，对于某一个 $k, 2 \le k \le n$ 成立. $\max_{2\le i,j\le n} |a_{ij}| = a_{ll}$，对于某一个 $l, 2 \le l \le n$ 成立. 而由 (3) 知，$a_{kk}^{(2)} \le a_{kk} \le a_{ll}$. 这就证明了命题 (5)

(6) 可用数学归纳法证明，结论显然

8. 习题 8

结论是显然的，但验证较为繁琐，这里方便起见，不妨假设 $i < j$, 对 L_k 作分块:

$L_k = [L_{<k}, l_k, L_{k\dots i}, l_i, L_{i\dots j}, l_j, L_{>j}]$ 其中 l_k, l_i, l_j 是原矩阵的 k, i, j 列，$L_{<k}, L_{k\dots i}, L_{i\dots j}, L_{>j}$ 是由上述三列分割而成的四块矩阵. $L_k I_{ij} = [L_{<k}, l_k, L_{k\dots i}, l_j, L_{i\dots j}, l_i, L_{>j}]$;

$\widetilde{L}_k = I_{ij}(L_k I_{ij}) = [I_{ij}L_{<k}, I_{ij}l_k, I_{ij}L_{k\dots i}, I_{ij}l_j, I_{ij}L_{i\dots j}, I_{ij}l_i, I_{ij}L_{>j}] = [L_{<k}, I_{ij}l_k, L_{k\dots i}, l_i, L_{i\dots j}, l_j, L_{>j}]$

所以 $\widetilde{L}_k$ 相较 L_k 只有第 k 列发生变化，$l_k \to I_{ij}l_k$. l_k 中非零元出现在 k 行以后，且 $l_{k,k} = 1$, 由于 $k < i < j$, 所以 $I_{ij}l_k$ 的非零元也出现在 k 行以后，且 $(I_{ij}l_k)_{k,k} = 1$. 所以 $\widetilde{L}_k$ 也是指标为 k 的初等下三角阵。

9. 习题 9

$A = LU$ 其中 L 是下三角阵，U 是单位上三角阵，于是 $A^\star = U^\star L^\star$, 其中 $U^\star$ 是单位下三角阵，$L^\star$ 是上三角阵。可运用 7.4.1 部分的结论:

(1) $(L^\star)_{1i} = (A^\star)_{1i}, 1 \le i \le n$; $(U^\star)_{i1} = (A^\star)_{i1}/(L^\star)_{11}, i \ge 2$. 即:

$l_{i1} = a_{i1}, i \ge 1$; $u_{1i} = a_{1i}/l_{11}, i \ge 2$.

(2) $(L^\star)_{ri} = (A^\star)_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} (U^\star)_{rk}(L^\star)_{ki}, i \ge r$; 即:

$l_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}, i \ge r$.

(3) $(U^\star)_{ir} = ((A^\star)_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} (U^\star)_{ik}(L^\star)_{kr})/(L^\star)_{rr}, i > r$; 即:

$u_{ri} = (a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki})/l_{rr}, i > r$.

10. 习题 11

(1) 对称正定矩阵 A 是实正规矩阵，故可正交相似于对角矩阵, 即存在正交矩阵 Q, $A = Q\Lambda Q^\top$. $A^{-1} = (Q^\top)^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^\top$, 其中 Λ^{-1} 仍是对角矩阵，故 A^{-1} 也是对称正交矩阵。

(2) L 存在性: $A = Q\Lambda Q^\top = (Q\Lambda^{1/2}Q^\top)(Q\Lambda^{1/2}Q^\top)$. 注意到本题要证明的结论 $A = L^\top L$ 与 Cholesky 分解略不同，但基本思路是一致的。由于 $Q\Lambda^{1/2}Q^\top$ 满秩，故对其列向量组按照 $n \to 1$ 的顺序作 Schmidt 正交化，可以得到分解 $Q\Lambda^{1/2}Q^\top = Q'L$, 其中 Q' 是列正交矩阵，L 是对角线元素为正的下三角矩阵。从而有 $A = (Q'L)^\top(Q'L) = L^\top Q'^\top Q'L = L^\top L$.

L 唯一性: 考虑上述分解存在的必要条件，可按照 $k : n \to 1$ 的顺序计算: $l_{kk} = \sqrt{A_{kk} - \sum_{j=k+1}^{n} l_{jk}^2}$, $l_{ki} = \dfrac{A_{kk} - \sum_{j=k+1}^{n} l_{jk}l_{ji}}{l_{kk}}, \forall i < k$，由此知，如果该分解存在，则唯一

11. 习题 12

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -1/7 & -4/25 & -16/17 \\ & 3/7 & 12/25 & 13/17 \\ & & -7/25 & -8/17 \\ & & & 5/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/3 & 1 & & \\ -5/7 & -1/7 & 1 & \\ -1/5 & 4/25 & -3/25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= E_4$$

所以

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/3 & -1/7 & -4/25 & -16/17 \\ & 3/7 & 12/25 & 13/17 \\ & & -7/25 & -8/17 \\ & & & 5/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/3 & 1 & & \\ -5/7 & -1/7 & 1 & \\ -1/5 & 4/25 & -3/25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{85} \begin{bmatrix} -4 & 50 & -23 & -80 \\ 33 & -30 & 41 & 65 \\ -19 & 25 & -3 & -40 \\ -3 & -5 & 4 & 25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

12. 习题 13

按照公式 $\alpha_1 = b_1, \beta_1 = c_1/b_1$, $\gamma_i = a_i, \alpha_i = b_i - a_i\beta_{i-1}, \beta_i = c_i/\alpha_i, i > 1$ 计算:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3/2 & & & \\ & -1 & 4/3 & & \\ & & -1 & 5/4 & \\ & & & -1 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & & \\ & 1 & -2/3 & & \\ & & 1 & -3/4 & \\ & & & 1 & -4/5 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$Ly = b \Rightarrow y = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right]^\top$, $Ux = y \Rightarrow x = \left[\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right]^\top$

13. 习题 15

由于 A 的某一顺序主子式 $\det(A_2) = 0$，故 A 不能 LU 分解；由于 B 的某一顺序主子式 $\det(B_2) = 0$, 故 B 不能 LU 分解；C 的顺序主子式均非零，故有唯一的 LU 分解。

14. 习题 16

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 交换 1，3 两行，消去第 1 列得: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

交换 2，3 两行，消去第 2 列得: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

经过回代得到 $x = [x_1, x_2, x_3]^\top = \left[\frac{7}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]^\top$

15. 习题 17

首先我们归纳地证明带宽为 $2t+1$ 的带状 n 阶方阵 A_n 作 LU 分解 $A_n = L_nU_n$, 那么 L_n,U_n 也是带宽为 $2t+1$ 的带状矩阵:

(i) $n=1$ 时显然成立;

(ii) 对 $A_{n+1} = L_{n+1}U_{n+1}$ 作分块: $\begin{bmatrix} a_{11} & A_{1,\geq 2} \\ A_{\geq 2,1} & A_n \end{bmatrix} = A_{n+1} = L_{n+1}U_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{\geq 2,1} & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & U_{1,\geq 2} \\ 0 & U_n \end{bmatrix}$, 得到 $n+1$ 阶带状方阵 LU 分解的必要条件: $u_{11} = a_{11}$, $U_{1,\geq 2} = A_{1,\geq 2}$, $L_{\geq 2,1} = (u_{11})^{-1}A_{\geq 2,1}$, $A_n = L_nU_n$. 根据归纳假设 L_n, U_n 都是带宽为 $2t+1$ 的带状矩阵; 因为 A_{n+1} 是带宽为 $2t+1$ 的带状阵, 所以 $U_{1,\geq 2} = A_{1,\geq 2}$ 与 $L_{\geq 2,1} = (u_{11})^{-1}A_{\geq 2,1}$ 的非零元都在前 t 个分量。因此 L_{n+1}, U_{n+1} 也是带宽为 $2t+1$ 的带状矩阵。

由于 L_n, U_n 是带宽为 $2t+1$ 的带状三角阵，充分考虑非零元的位置，显然有:

对 $i \geq r$, $a_{ri} = \sum_{k=1}^{n} l_{rk}u_{ki} = \sum_{k=\max(1,i-t)}^{r-1} l_{rk}u_{ki} + l_{rr}u_{ri}$, 而 $l_{rr}=1$, 所以 $u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=\max(1,i-t)}^{r-1} l_{rk}u_{ki}$.

对 $i > r$, $a_{ir} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kr} = \sum_{k=\max(1,i-t)}^{r-1} l_{ik}u_{kr} + l_{ir}u_{rr}$, 所以 $l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=\max(1,i-t)}^{r-1} l_{ik}u_{kr})/u_{rr}$.

16. 习题 19

(1) $||x||_\infty = \max_i |x_i| \leq \sum_i |x_i| = ||x||_1 \leq \sum_i \max_k |x_k| = n||x||_\infty$

(2) 注意到 $A^\top A$ 是实对称矩阵，$A^\top A = Q\Lambda Q^\top$. $tr(A^\top A) = tr(Q\Lambda Q^\top) = tr(\Lambda Q^\top Q) = tr(\Lambda) = \sum_i \Lambda_{ii}$.
$||A||_2^2 = \lambda_{max}(A^\top A) = \max_k \Lambda_{kk} \leq \sum_i \Lambda_{ii} = tr(A^\top A) = ||A||_F^2$. (因为 $A^\top A$ 特征值非负)
$||A||_F^2 = tr(A^\top A) = \sum_i \Lambda_{ii} \leq n\max_k \Lambda_{kk} = n||A||_2^2$.
所以有 $\sqrt{1/n} \cdot ||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F$

17. 习题 20

- 正定: 由于 $||x||$ 是范数, 所以 $||x||_P = ||Px|| \geq 0$, 且 $||x||_P = ||Px|| = 0 \Rightarrow Px = 0 \Rightarrow x = P^-10 = 0$.
- 齐次: 由于 $||kx|| = |k| \cdot ||x||$, 所以 $||kx||_P = ||P(kx)|| = ||k(Px)|| = |k| \cdot ||Px||$.
- 三角不等式: $||x+y|| \leq ||x||+||y||$, 所以有 $||x+y||_P = ||P(x+y)|| = ||(Px)+(Py)|| \leq ||Px||+||Py|| = ||x||_P + ||y||_P$.

18. 习题 21

- 正定：由于 A 正定，所以 $(Ax, x) = x^\top Ax \geq 0$, $||x||_A = (Ax,x)^{1/2} \geq 0$, 且根据 A 正定的条件，当且仅当 $x=0$ 时取等号.
- 齐次：$(A(kx), kx) = k^2x^\top Ax = k^2(Ax,x)$, 所以 $||kx||_A = (A(kx),kx)^{1/2} = |k| \cdot ||x||_A$.
- 三角不等式：对称正定阵 A 做 Cholesky 分解: $A = LL^\top$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式，有 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle L^\top x, L^\top y\rangle \leq \sqrt{\langle L^\top x, L^\top x\rangle}\sqrt{\langle L^\top y, L^\top y\rangle}$, 展开有: $x^\top Ay = x^\top LL^\top y \leq \sqrt{x^\top LL^\top xy^\top LL^\top y} = \sqrt{x^\top Axy^\top Ay}$. 所以 $(||x||_A + ||y||_A)^2 - ||x+y||_A^2 = 2\left(\sqrt{x^\top Ax}\sqrt{y^\top Ay} - x^\top Ay\right) \geq 0$, 即
$||x||_A + ||y||_A \geq ||x+y||_A$.

19. 习题 22
$(||x||_2 + ||y||_2)^2 - ||x+y||_2^2 = 0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x^\top x}\sqrt{y^\top y} = x^\top y$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式知，上述等式成立当且仅当 x, y 共线.

20. 习题 24
根据矩阵范数的定义即可得到:

$$||A||' = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||'}{||x||'} = \max_{x\neq 0} \frac{||PAx||}{||Px||} = \max_{x\neq 0} \frac{||(PAP^{-1})(Px)||}{||Px||} = ||PAP^{-1}||$$

21. 习题 26

可利用奇异值分解来证明：由于 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，作奇异值分解 $A = Q_1 \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} Q_2$, 其中 Q_1, Q_2 均为 n 阶正交矩阵，$r = r(A) = r(A^\top) = r(AA^\top) = r(A^\top A)$. 所以有

$AA^\top = Q_1 \begin{bmatrix} \Lambda_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} Q_1^\top$，$A^\top A = Q_2^\top \begin{bmatrix} \Lambda_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} Q_2$.

所以 $AA^\top$ 与 $A^\top A$ 正交相似，它们有相同的特征值。

22. 习题 27

根据矩阵范数定义 $||A^{-1}||_\infty = \max_{x\neq 0} \dfrac{||A^{-1}x||_\infty}{||x||_\infty}$, 因为 A 可逆，令 $y = A^{-1}x \neq 0$, 即 $x = Ay$ 有：

$$||A^{-1}||_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{||A^{-1}Ay||_\infty}{||Ay||_\infty} = \max_{y\neq 0} \frac{||y||_\infty}{||Ay||_\infty} = \min_{y\neq 0} \frac{||Ay||_\infty}{||y||_\infty}$$

23. 习题 28

$(A+\delta A)^{-1} = \left(A(E + A^{-1}\delta A)\right)^{-1} = (E + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$. 因为 A 非奇异，故只需要验证 $(E + A^{-1}\delta A)^{-1}$ 存在, 由书中定理 7.18 可以证明其存在性，因为 $||A^{-1}\delta A|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A|| < 1$.

令 $\delta X = A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}$, 则由 $(A^{-1} - \delta X)(A+\delta A) = E$ 知：$\delta X = A^{-1}\delta A(A+\delta A)^{-1}$, 根据定理 7.18 $||(E + A^{-1}\delta A)^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1 - ||A^{-1}\delta A||} \leq \dfrac{1}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A||}$, 所以

$$||\delta X|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A|| \cdot ||A+\delta A|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A|| \cdot ||(E + A^{-1}\delta A)^{-1}|| \cdot ||A^{-1}||$$

所以

$$\frac{||A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}||}{||A^{-1}||} = \frac{||\delta X||}{||A^{-1}||} \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A|| \cdot \frac{1}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A||} = \frac{\mathtt{cond}(A)\dfrac{||\delta A||}{||A||}}{1 - \mathtt{cond}(A)\dfrac{||\delta A||}{||A||}}$$

24. 习题 30

(1) $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(A^\top A)} = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(LD^2L^\top)} = \sqrt{\max_k D_{kk}^2} = \max_k D_{kk}$, 类似地，$||A^{-1}||_2 = \min_k D_{kk}$.
$||W||_2 = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(W^\top W)} = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(A)} = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(LDL^\top)} = \sqrt{\max_k D_{kk}}$, 类似地, $||W^{-1}||_2 = \sqrt{\min_k D_{kk}}$.
所以 $\mathtt{cond}(A)_2 = ||A||_2||A^{-1}||_2 = ||W||_2^2||W^{-1}||_2^2 = [\mathtt{cond}(W)_2]^2$.

(2) $WW^\top = D^{1/2}L^\top LD^{1/2} = D$, 与 $W^\top W$ 正交相似，有相同的特征值，所以 $\mathtt{cond}(W^\top)_2 = \mathtt{cond}(W)_2$.
所以有 $\mathtt{cond}(A)_2 = \mathtt{cond}(W^\top)_2\mathtt{cond}(W)_2$.

25. 习题 32

显然有 $\mathtt{cond}(A)_2 = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(A^\top A)}/\sqrt{\lambda_{\mathtt{min}}(A^\top A)} = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(E)}/\sqrt{\lambda_{\mathtt{min}}(E)} = 1$.

26. 习题 33

$\mathtt{cond}(AB) = ||AB|| \cdot ||(AB)^{-1}|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||B^{-1}|| \cdot ||A^{-1}|| = \mathtt{cond}(A) \cdot \mathtt{cond}(B)$.