计算方法 作业 5

刘彦铭 ID: 122033910081

Last Edited: 2022 年 11 月 19 日

李庆杨等, 数值分析, 第 5 版, 华中科大, P.43, 1,2,5,6,7,11,12,14,16,17,18,19,21,23,25

1. 习题 1

   对行列式按最后一行展开，有 $V_n(x)=\sum_{k=0}^n x^k\cdot M_{n+1,k+1}$, 其中 $M_{n+1,k+1}$ 是元素 $V_{n+1,k+1}$ 的代数余子式。显然这是一个 n 次多项式，且 n 次项系数非零当且仅当 $x_0,\cdots,x_{n-1}$ 互异。用数学归纳法可以证明，Vandermonde 行列式 $\forall n\in\mathbb{N}^\star, V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$. 所以有

   $$\begin{aligned} V_n(x)=V_n(x_0,\cdots,x_{n-1},x) &= \textstyle\prod_{0\le i<j\le n-1}(x_j-x_i)\prod_{0\le i\le n-1}(x-x_i) \\ &= V_{n-1}(x_0,\cdots,x_{n-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

   由此知 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 是 $V_n(x)$ 的根。

2. 习题 2

   $$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)+f(x_3)l_3(x) = -3\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+4\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)} \\ &= \frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3} \end{aligned}$$

3. 习题 5

   $l_2(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=-\dfrac{1}{2h^3}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-3h)$.

   令 $t=x-x_0$, 考虑 $f(t)=t(t-h)(t-3h)$ 在 $(0,3h)$ 上的两个极值, $f'(t)=3t^2-8ht+3h^2$, 两个极值点分别为 $t_1=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}h$ 与 $t_2=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}h$, 代入有 $f(t_1)=\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}h^3$, $f(t_2)=-\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}h^3$. 所以有 $\max_{x_0\le x\le x_3}|l_2(x)|=\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}h^3\cdot\dfrac{1}{2h^3}=\dfrac{10+7\sqrt{7}}{27}$.

4. 习题 6

   (1) 设 $f(x)=\sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x)$, 显然 $f(x)$ 是一个 n 次多项式。且有 $f(x_i)=\sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x_i)=\sum_{j=0}^n x_j^k\delta_{ij}=x_i^k,\forall i\in\{0,1,\cdots,n\}$. 由于 x_i 互异,满足上述条件的 n 次多项式有且仅有 x^k 这一个, 所以 $f(x)\equiv x^k$.

   (2) 利用 (1) 中的结果，当 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 时, 有

   $$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (x_j-x)^k l_j(x) &= \sum_{j=0}^n\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-x)^{k-i}x_j^i l_j(x) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-x)^{k-i}\sum_{j=0}^n x_j^i l_j(x) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-x)^{k-i}x^i \\ &= (x-x)^k = 0 \end{aligned}$$

5. 习题 7

对 f 在做线性插值，得到 $L(x)=0$. 由线性插值的误差分析可知，当 $x\in[a,b]$ 时，有 $f(x)=f(x)-L(x)=\frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)(x-a)(x-b)$. 所以 $|f(x)|\le\frac{1}{2}|(x-a)(x-b)||f^{(2)}(\xi)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(2)}(x)|$.

6. 习题 11

$$\begin{aligned}\Delta(f_kg_k) &= f_{k+1}g_{k+1}-f_kg_k\\ &= f_{k+1}g_{k+1}-f_kg_{k+1}+f_kg_{k+1}-f_kg_k\\ &= (f_{k+1}-f_k)g_{k+1}+f_k(g_{k+1}-g_k)\\ &= g_{k+1}\Delta f_k+f_k\Delta g_k\end{aligned}$$

7. 习题 12

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}f_k\Delta g_k &= \sum_{k=0}^{n-1}f_kg_{k+1}-f_kg_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}f_kg_{k+1}-f_{k+1}g_{k+1}+f_{k+1}g_{k+1}-f_kg_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}-g_{k+1}\Delta f_k+\sum_{k=0}^{n-1}f_{k+1}g_{k+1}-f_kg_k\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}g_{k+1}\Delta f_k+f_ng_n-f_0g_0\end{aligned}$$

8. 习题 14

$f(x)=a_n\prod_{i=1}^n(x-x_i)$, 对于任意 $x_i, i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $f'(x_i):=\lim_{x\to x_i}\dfrac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i}=a_n\prod_{j\ne i}(x_i-x_j)$. 记 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 Vandermonde 行列式，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\prod_{j\ne i}(x_i-x_j)}\\ &= a_n^{-1}\textstyle\sum_{j=1}^n\dfrac{x_j^k(-1)^{n-j}V_{n-1}(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)}{V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\\ &= a_n^{-1}V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{-1}\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^k\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^k\end{vmatrix}\\ &= \begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ a_n^{-1}, & k=n-1.\end{cases}\end{aligned}$$

其中，第二个等号是由通分得到，第三个等号是由行列式按最后一列展开得到。

9. 习题 16

$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=\dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\dfrac{7!}{7!}=1$, 其中 $\xi\in[1,2^7]$.

$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=\dfrac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$, 其中 $\xi\in[1,2^8]$.

10. 习题 17

完全类同 Lagrange 插值误差的证明，由于设 $L_3(x)$ 是两点三次 Hermite 插值，则 $R_3(x)=f(x)-L_3(x)$ 在 x_k,x_{k+1} 处分别有至少两重零点，即 $R_3(x)=K(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$.

固定 x (x 异于 x_k,x_{k+1}), 令 $\phi(t)=f(t)-L_3(t)-K(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$. ϕ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上有 x_k,x_{k+1},x 三个不同零点。故根据微分中值定理知，ϕ' 在 (x_k,x), (x,x_{k+1}) 上各有一个零点。而根据 Hermite 插值条件有 $\phi'(x_k)=\phi'(x_{k+1})=0$, 故 ϕ' 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上有四个不同的零点。对 ϕ' 连续使用三次微分中值定理，可知存在 $\xi\in(x_k,x_{k+1})$ 使得 $0=\phi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-K(x)\cdot 4!$, 整理得到 $K(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$, 从而 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2}{4!}$.

对于分段三次 Hermite 插值，若分段区间的最大长度是 I, 那么其误差限为 $\dfrac{1}{4!}\times\dfrac{I^4}{2^4}\times\sup\limits_{x_0<x<x_n}|f^{(4)}(x)|$.

11. 习题 18

实在是没看明白这道题想要表达什么。

12. 习题 19

直接待定系数求解即可 $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$,

$$\begin{cases} P(0)=e=0\\ P'(0)=d=0\\ P(1)=a+b+c+d+e=1\\ P'(1)=4a+3b+2c+d=1\\ P(2)=16a+8b+4c+2d+e=1\end{cases},\ a=\frac{1}{4},b=-\frac{3}{2},c=\frac{9}{4},d=e=0.$$ 即 $P(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{9}{4}x^2$.

13. 习题 21

按照 $(x_0,x_1)=(-5,-4),(x_1,x_2)=(-4,-3),\cdots,(x_9,x_{10})=(4,5)$ 进行分段，当 $x_k\le x\le x_{k+1}$ 时，$I_h(x)=\dfrac{1}{1+x_k^2}\cdot\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+\dfrac{1}{1+x_{k+1}^2}\cdot\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$. 列出各区间中点处的函数值与插值多项式的值：

x	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
$f(x)$	0.0471	0.0755	0.1379	0.3077	0.8000	0.8000	0.3077	0.1379	0.0755	0.0471
$I_h(x)$	0.0486	0.0794	0.1500	0.3500	0.7500	0.7500	0.3500	0.1500	0.0794	0.0486

误差不超过 0.05

14. 习题 23

对 $f(x)=x^4$ 在 $[a,b]$ 上作分段三次 Hermite 插值，$x_0=a$, $x_n=b$, $x_{k+1}=x_k+h$. 设插值函数为 $I_h(x)$, 则当 $x_k<x<x_{k+1}$ 时, $I_h(x)=H_3(x)=f(x_k)\alpha_k(x)+f(x_{k+1})\alpha_{k+1}(x)+f'(x_k)\beta_k(x)+f'(x_{k+1})\beta_{k+1}(x)=x_k^4\left(1+2\dfrac{x-x_k}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{h}\right)^2+x_{k+1}^4\left(1-2\dfrac{x-x_{k+1}}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2+4x_k^3(x-x_k)\left(\dfrac{x-x_{k+1}}{h}\right)^2+4x_{k+1}^3(x-x_{k+1})\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2$.

由于 $|f'(x_k)|=|4x_k^3|\le 4\max\{|a|,|b|\}^3$ 误差限 $|f(x)-I_h(x)|\le\sup\limits_{|x_1-x_2|<h}|f(x_1)-f(x_2)|+\dfrac{8}{27}h\cdot 4\max\{|a|,|b|\}^3$

或根据习题 17 中的结论，有 $|f(x)-I_h(x)|\le\dfrac{1}{4!}\times\dfrac{h^4}{16}\times\sup_{x\in[a,b]}f^{(4)}(x)=\dfrac{h^4}{16}$.

15. 习题 25

(1) 积分是线性的，所以该等式显然成立：

$\int_a^b [f''(x)]^2 \mathtt{d}x - \int_a^b [S''(x)]^2 \mathtt{d}x = \int_a^b \left([f''(x)]^2 - [S''(x)]^2\right) \mathtt{d}x = \int_a^b \left([f''(x)] - [S''(x)]\right)^2 + 2S''(x)[f''(x) - S''(x)]\mathtt{d}x = \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 \mathtt{d}x + 2\int_a^b S''(x)[f''(x) - S''(x)]\mathtt{d}x$

(2) 由分部积分容易得到

$$\begin{aligned} \int_a^b S''(f'' - S'')\mathtt{d}x &= \int_a^b S'' \mathtt{d}\,(f' - S') \\ &= [S''(f' - S')]|_a^b - \int_a^b (f' - S')\mathtt{d}S'' \end{aligned}$$

注意到 $S''' = C$ 是常数，$\int_a^b (f' - S')\mathtt{d}S'' = \int_a^b (f' - S')S'''\mathtt{d}x = C(f - S)|_a^b = 0$.（由插值条件，$f(a) = S(a), f(b) = S(b)$）. 所以 $\int_a^b S''(f'' - S'')\mathtt{d}x = [S''(f' - S')]|_a^b = S''(b)[f'(b) - S'(b)] - S''(a)[f'(a) - S'(a)]$.