计算方法 作业 5

刘彦铭 ID: 122033910081

Last Edited: 2022 年 12 月 3 日

李庆杨等, 数值分析, 第 5 版, 华中科大, P.78, 13,14,16,17,20,22

1. 习题 13

   定义内积 $(f,g)=\int_0^{\pi/2}f(x)g(x)\mathtt{d}x$, 设 $\psi_0=1,\psi_1=x$. $\begin{bmatrix}(\psi_0,\psi_0) & (\psi_0,\psi_1)\\ (\psi_1,\psi_0) & (\psi_1,\psi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\psi_0)\\ (f,\psi_1)\end{bmatrix}$, 计算得到 $(\psi_0,\psi_0)=\pi/2$, $(\psi_0,\psi_1)=\pi^2/8$, $(\psi_1,\psi_1)=\pi^3/24$, $(f,\psi_0)=1$, $(f,\psi_1)=1$. 所以 $\begin{bmatrix}\pi/2 & \pi^2/8\\ \pi^2/8 & \pi^3/24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ 解得: $a=\dfrac{96}{\pi^3}-\dfrac{24}{\pi^2}=0.664439$, $b=\dfrac{8}{\pi}-\dfrac{24}{\pi^2}=0.114771$

2. 习题 14

   (1) 不构成内积，因为 $(f,f)=\int_a^b f'(x)g'(x)\mathtt{d}x=0$ 不能推出 $f=0$.

   (2) 由微分积分的线性性可知 $(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)\mathtt{d}x+f(a)g(a)$ 的线性性显然，对称性也是显然的。关于正定性，显然 $(f,f)=\int_a^b f'(x)f'(x)\mathtt{d}x+f(a)f(a)\geq 0$ 成立。而由于 $\int_a^b f'(x)f'(x)\mathtt{d}x\geq 0$, $f(a)f(a)\geq 0$, 所以 $(f,f)=0$ 当且仅当 $\int_a^b f'(x)f'(x)\mathtt{d}x=0$ 且 $f(a)(a)=0$，这当且仅当 $f'(x)=0,\forall x\in[a,b],f(a)=0$, 当且仅当在 [a, b] 上有 $f=0$.

   所以该定义构成内积。

3. 习题 16

   (1) $\int_{-1}^1(x-ax^2)^2\mathtt{d}x=\int_{-1}^1 x^2-2ax^3+a^2x^4\mathtt{d}x=\int_{-1}^1 x^2\mathtt{d}x+a^2\int_{-1}^1 x^4\mathtt{d}x$, x^2,x^4 在 $[-1,1]$ 上积分为正，故而 $a=0$ 时积分最小

   (2) 由于对称性，先只讨论 $a>0$ 的情形。

   当 $a>1$ 即 $0<1/a<1$ 时, $L=\int_{-1}^1|x-ax^2|\mathtt{d}x=\int_{-1}^0(ax^2-x)\mathtt{d}x+\int_0^{\frac{1}{a}}(x-ax^2)\mathtt{d}x+\int_{\frac{1}{a}}^1(ax^2-x)\mathtt{d}x=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3a^2}$, $\dfrac{\mathtt{d}L}{\mathtt{d}a}=\dfrac{2}{a^3}(a^3-1)$, 当 $a>1$ 时递增，故其最小值在 $a\to 1$ 时取得。

   当 $0\leq a\leq 1$ 时, $L=\int_{-1}^1|x-ax^2|\mathtt{d}x=\int_{-1}^0(ax^2-x)\mathtt{d}x+\int_0^1(x-ax^2)\mathtt{d}x$, $\dfrac{\mathtt{d}L}{\mathtt{d}a}=\int_{-1}^0 x^2\mathtt{d}x+\int_0^1-x^2\mathtt{d}x=0$, 故当 $a\in[0,1]$ 时积分取值都恒定。

   由上可知，取 $-1\leq a\leq 1$ 可使积分最小

4. 习题 17

   (1) 计算得到 $\begin{bmatrix}(\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}(\varphi_1,f)\\ (\varphi_2,f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\ 1/4\end{bmatrix}$, 解得系数 $[a_1,a_2]^\top=[-\dfrac{1}{6},1]^\top$, 故而最佳平方逼近 $x-\dfrac{1}{6}$.

(2) 计算得到 $\begin{bmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) \\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/201 & 1/202 \\ 1/202 & 1/203 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} (\varphi_1,f) \\ (\varphi_2,f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/103 \\ 1/104 \end{bmatrix}$, 解得系数 $[a_1,a_2]^\top = [375.2425, -375.1482]^\top$, 故而最佳平方逼近 $375.2425x^{100} - 375.1482x^{101}$

比较: (1) 中的逼近应该更好一些。一方面系数绝对值小，多项式次数低，计算方便，数值稳定；另一方面，(2) 中的逼近稍作变形即有 $375.2425x^{100} - 375.1482x^{101} = 375.2425x^{100}(1-x) + \beta x^{101}$ 其中 β 是一个约等于 0.1 的系数，该函数的图像在接近 1 时有一个非常陡峭的凸起, 而在 $[0,1]$ 上的大段区间内都接近于 0.

5. 习题 20

(1) Legendre 多项式逼近 $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2/3 & & \\ & & 2/5 & \\ & & & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4\cos(1/2) + 8\sin(1/2) \\ 0 \\ 236\cos(1/2) - 432\sin(1/2) \end{bmatrix}$ 解得 $[a_0,a_1,a_2,a_3]^\top = [0, -6\cos(1/2) + 12\sin(1/2), 0, 826\cos(1/2) - 1512\sin(1/2)]^\top = [0, 0.487611, 0, -0.008218]^\top$,
故 $L(x) = 0.487611x - 0.008218\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$, 图线如图1所示，这里用积分来计算均方误差，得到 $\delta = 9.75309 \times 10^{-11}$

(2) Chebyshev 多项式逼近, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\begin{bmatrix} \pi & & & \\ & \pi/2 & & \\ & & \pi/2 & \\ & & & \pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.761109 \\ 0 \\ -0.008054 \end{bmatrix}$, 解得 $[a_0,a_1,a_2,a_3]^\top = [0, 0.484537, 0, -0.005127]^\top$,
故 $T(x) = 0.484537x - 0.005127(4x^3 - 3x)$. 图线如图2所示，用积分计算均方误差，$\rho = 1$ 对应于 $\delta = 1.31349 \times 10^{-10}$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 对应于 $\delta = 2.03939 \times 10^{-10}$.

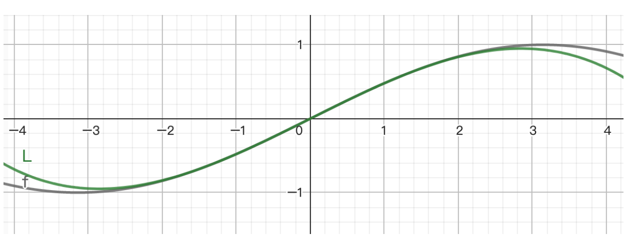

图 1: Legendre 三次最佳平方逼近, 灰色是原函数, 绿色是三次逼近

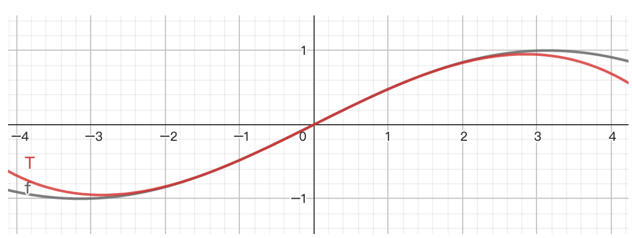

图 2: Chebyshev 三次最佳平方逼近，灰色是原函数，红色是三次逼近

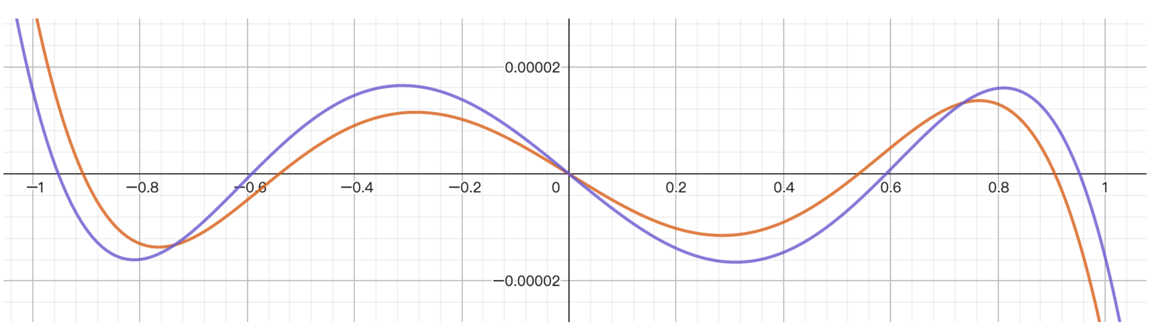

图 3: 误差图线。其中橙色的对应 Legendre 多项式逼近, 紫色的对应 Chebyshev 多项式逼近

6. 习题 22

只需将内积定义为离散形式 $(f,g)=\sum_i f(x_i)g(x_i)$. 计算得到 $\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$, 得到 $[a,b]^\top=[0.97257866, 0.05003512]^\top$, $a+bx^2$. 数据点的函数值 $y=[19.0, 32.3, 49.0, 73.3, 97.8]^\top$, 拟合的对应点函数值 $\hat{y}=[19.03525698, 32.24452866, 49.05632898, 73.22329194, 97.84057098]^\top$, 计算得到 $||y-\hat{y}||_2=0.122569$, 均方误差 $\delta=\dfrac{1}{n}||y-\hat{y}||_2=0.0245138$