矩阵理论 作业 8

刘彦铭 ID: 122033910081

Last Edited: 2022 年 11 月 18 日

书面作业：59 页：2、5、6
(见课程群) 例 4.13：假设 f, g 是数域 F 上 n 维空间 V 的线性变换，且 fg=0, g²=g. 求证：
（1）V=ker(f) + ker(g);
（2）V=ker(f) ker(g) 当且仅当 r(f)+r(g)=n.

1. 习题 2

⇒: 不妨设 $\sigma : V = W \oplus W^\perp \to W$, 其中 $(w_1, \cdots, w_r)$ 是 W 子线性空间的一组标准正交基, $(w_{r+1}, \cdots, w_n)$ 是 $W^\perp$ 上的一组标准正交基, 显然 $(w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots w_n)$ 构成 $V = W \oplus W^\perp$ 的一组标准正交基。对于 V 上的任意一组标准正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 存在可逆矩阵 Q 使得 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (w_1, \cdots, w_n)Q$, 由于两组都是标准正交基，故而 Q 是酉矩阵。考虑设 σ 在标准正交基 $\{\alpha_i\}$ 下对应矩阵 A, 则有

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A = \sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \sigma(w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_n)Q \\ &= (w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_n)\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q \\ &= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Q^\star \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q\end{aligned}$$

所以 $A = Q^\star \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$ 是 Hermite 矩阵。又 $A^2 = Q^\star \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QQ^\star \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = Q^\star \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = A$, 所以 A 是幂等的。

⇐: 不妨设 σ 在某组标准正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下对应矩阵 A, A 是幂等的 Hermite 矩阵。对于 Hermite 矩阵 A, 存在酉矩阵 $U = (u_1, \cdots, u_n)$ 以及实对角矩阵 Λ, 使得 $A = U\Lambda U^\star$. 由于是幂等的,$A^2 = U\Lambda^2 U^\star = A = U\Lambda U^\star$, 即 $\Lambda^2 = \Lambda$. 所以 Λ 对角线元素为 1 或 0. 不妨设 $\Lambda = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A = \sum_{i=1}^r u_i u_i^\star$. 容易验证 $\forall i \le r, Au_i = u_i, \forall i > r, Au_i = 0$.
构造 $W = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x | x = \sum_{i=1}^r c_i u_i, c_i \in \mathbb{F}\}$, 从而 $W^\perp = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x | x = \sum_{i=r+1}^n c_i u_i, c_i \in \mathbb{F}\}$, 容易验证 $V = W \oplus W^\perp$, 且 σ 是从 V 到 W 的一个正交投影变换, 即 $\forall v \in W, \sigma v = v$, $\forall v \in W^\perp, \sigma v = 0$.

2. 习题 5

(1) $[A, B] := tr(A^\star B) = \sum_i (A^\star B)_{ii} = \sum_i \sum_k (A^\star)_{ik} B_{ik} = \sum_i \sum_k \overline{A_{ki}} B_{ki}$. 容易验证:

* 对称性：$[B, A] = \sum_i \sum_k \overline{B_{ki}} A_{ki} = \overline{\sum_i \sum_k \overline{A_{ki}} B_{ki}} = \overline{[A, B]}$.
* 线性性：$[A, \alpha C + \beta D] = \sum_i \sum_k \overline{A_{ki}}(\alpha C_{ki} + \beta D_{ki}) = \alpha \sum_i \sum_k \overline{A_{ki}} C_{ki} + \beta \sum_i \sum_k \overline{A_{ki}} D_{ki} = \alpha[A, C] + \beta[A, D]$.
* 正定性：$[A, A] = \sum_i \sum_k \overline{A_{ki}} A_{ki} = \sum_i \sum_k |A_{ki}|_2^2 \ge 0$, 当且仅当 $A = 0$ 时取等号。

(2) $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, ee^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 记夹角为 θ, 有 $\cos\theta = [E_{11}, ee^\top]/\sqrt{[E_{11}, E_{11}][ee^\top, ee^\top]} = 1/\sqrt{1 \times 16} = 1/4$, 即 $\theta = \arccos(1/4)$.
该内积空间的一个标准正交基 $\{E_{ij} | i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

3. 习题 6

(1) 容易验证 $E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}$ 是 W 的一组基。所以 $B \in W^{\perp}$, 当且仅当 $[E_{11}, B]=0, [E_{12}+E_{21}, B]=0, [E_{22}, B]=0$. 设 $B=b_{11}E_{11}+b_{12}E_{12}+b_{21}E_{21}+b_{22}E_{22}$, 则有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, 所以 $[b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}]^{\top}=[0, t, -t, 0]^{\top}, t \in \mathbb{R}$.

所以正交补子空间 $W^{\perp}=\{t(E_{12}-E_{21}) | t \in \mathbb{R}\}$.

(2) 由于 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $A \in W, B \in W^{\perp}$, 所以在 W 上的正交投影为 A, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$.

4. 补充例 4.13

对于 $\forall \beta \in \mathtt{im}(g)$, 存在 $\gamma \in V$, $g\gamma = v$. 所以 $f\beta = f(g\gamma) = (fg)\gamma = 0$, 即 $\beta \in \mathtt{ker}(f)$, 故 $\mathtt{im}(g) \subseteq \mathtt{ker}(f)$.

根据课上讲到的结论 (或者考查 g 在某组基下对应的矩阵 A 并运用作业 7 中证明的 55 页习题 4 的结论) 有: $r(g)+r(I_V-g)=n$. 容易验证 $\mathtt{im}(I_V-g) \subseteq \mathtt{ker}(g)$, 因为对任意 $(I_V-g)\gamma, \gamma \in V$ 有 $g(I_V-g)\gamma=0$. 而 $\dim \mathtt{ker}(g) = n-r(g) = r(I_V-g) = \dim \mathtt{im}(I_V-g)$, 所以有 $\mathtt{ker}(g)=\mathtt{im}(I_V-g)$.

考虑任意 $x \in \mathtt{im}(g) \cap \mathtt{im}(I_V-g) = \mathtt{im}(g) \cap \mathtt{ker}(g)$, 有 $x = g\gamma$, 且 $0 = gx = g^2\gamma = g\gamma = x$. 所以 $\mathtt{im}(g) \cap \mathtt{im}(I_V-g) = \{0\}$. 所以有 $V = \mathtt{im}(g) \oplus \mathtt{im}(I_V-g)$.

(1) 对于任意 $v \in V - \mathtt{ker}(f)$, 由于 $v \notin \mathtt{ker}(f)$, $\mathtt{im}(g) \subseteq \mathtt{ker}(f)$, 所以 $v \notin \mathtt{im}(g)$. 又 $V = \mathtt{im}(g) \oplus \mathtt{im}(I_V-g)$, 所以 $v \in \mathtt{im}(I_V-g) = \mathtt{ker}(g)$. 这就验证了 $V = \mathtt{ker}(f) + \mathtt{ker}(g)$.

(2) $\Rightarrow$: 若 $V = \mathtt{ker}(f) \oplus \mathtt{ker}(g)$, 则 $n = \dim \mathtt{ker}(f) + \dim \mathtt{ker}(g) = n-r(f)+n-r(g)$, 故 $r(f)+r(g)=n$.

$\Leftarrow$: 若 $r(f)+r(g)=n$, 则 $\dim \mathtt{ker}(f) = n-r(f) = r(g) = \dim \mathtt{im}(g)$. 又 $\mathtt{im}(g) \subseteq \mathtt{ker}(f)$, 故此时 $\mathtt{ker}(f) = \mathtt{im}(g)$. 又因为 $\mathtt{ker}(g) = \mathtt{im}(I_V-g)$, 所以 $V = \mathtt{im}(g) \oplus \mathtt{im}(I_V-g) = \mathtt{ker}(f) \oplus \mathtt{ker}(g)$.