矩阵理论 作业 12

刘彦铭 ID: 122033910081

Last Edited: 2023 年 1 月 4 日

101 页: 6、7、8. 其余选做

1. 习题 6

   (1) $||A||_{M_1} := \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$. 由例 4.2.8(1) 可知 $||A||_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$,
   从而有 $||A||_1 \le \sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le i\le n}|a_{ij}| = ||A||_{M_1}$.
   所以对于任意的 $A\in M_n(\mathbb{F}), v\in\mathbb{F}^n$, $||Av||_1 \le ||A||_1||v||_1 \le ||A||_{M_1}||v||_1$, 即 $||-||_{M_1}$ 与 $||-||_1$ 相容。

   (2) 由例 4.2.8(2) 知, $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^\star A)} = \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(A^\star A)}$. 而对 Frobenius 范数 $||A||_F := \sqrt{\sum_{i,j}\bar{a}_{ij}a_{ij}} = \sqrt{\mathtt{tr}(A^\star A)} = \sqrt{\sum_i \lambda_i(A^\star A)} \ge \sqrt{\lambda_{\mathtt{max}}(A^\star A)} = ||A||_2$.
   所以 $||Av||_2 \le ||A||_2||v||_2 \le ||A||_F||v||_2$, 即 $||-||_F$ 与 $||-||_2$ 相容。

   (3) $||A||_{M_\infty} := n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$.

   $p=1$: 由例 4.2.8(1) 知, $||A||_1 = \max_j\sum_i|a_{ij}| = \sum_i|a_{ij'}| \le n\cdot\max_i|a_{ij'}| \le n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}| = ||A||_{M_\infty}$, 同 (1)(2) 的步骤可知，$||-||_{M_\infty}$ 与 $||-||_1$ 相容

   $p=2$: 由 (2) 知, $||A||_2 \le ||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2} \le \sqrt{n^2\cdot(\max_{i,j}|a_{ij}|)^2} = ||A||_{M_\infty}$. 再同 (1)(2) 可得 $||-||_{M_\infty}$ 与 $||-||_2$ 相容

   $p=\infty$: 由例 4.2.8(3) 知, $||A||_\infty = \max_i\sum_j|a_{ij}|$, 完全仿照 $p=1$ 的情况即得 $||-||_{M_\infty}$ 与 $||-||_\infty$ 相容

2. 习题 7

   考虑对 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 作奇异值分解，即 $A = USV$, 其中 U,V 是酉矩阵，$S = \mathtt{diag}(s_A)$, $s_A(1),\cdots,s_A(n)$ 是 A 的全体奇异值。由于 $||-||$ 是酉不变的，所以 $||A|| = ||USV|| = ||S||$.

   按如下方式定义 $\mathbb{R}^n$ 上的范数 N: $N(v) := ||\mathtt{diag}(v)||$. 由于矩阵范数 $||-||$ 满足向量范数的各个要求，所以这样定义出来的 N 也满足向量范数的要求，且显然有 $||A|| = ||S|| = ||\mathtt{diag}(s_A)|| = N(s_A)$.

3. 习题 8

   对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}^+, \lambda\in[0,1]$, $N(\lambda x+(1-\lambda)y) = ||A+(\lambda x+(1-\lambda)y)B|| = ||\lambda A+\lambda xB+(1-\lambda)A+(1-\lambda)yB|| \le ||\lambda A+\lambda xB|| + ||(1-\lambda)A+(1-\lambda)yB|| = \lambda N(x)+(1-\lambda)N(y)$, 这就验证了 $N(x)$ 是凸函数