矩阵理论 作业 11

刘彦铭 ID: 122033910081

Last Edited: 2022 年 12 月 11 日

P94 1、2、3；
P101，1，2，3，4

1. 94 页习题 1

为避免符号混淆，将新定义的范数记为 $||-||_m$, $||\alpha||_m := ||A\alpha||$, A 列满秩.

正定性: 由于 $||-||$ 是向量范数，故而 $||\alpha||_m = ||A\alpha|| \geq 0$. A 可作分解 $A = QR$, 其中 $Q \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 是列酉阵 $Q^\star Q = E_n$, R 是满秩上三角矩阵。故而 $||\alpha||_m = 0 \Rightarrow ||A\alpha|| = 0 \Rightarrow A\alpha = QR\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = R^{-1}Q^\star QR\alpha = 0$.

齐次性: $||k\alpha||_m = ||A(k\alpha)|| = |k|\cdot||A\alpha|| = |k|\cdot||\alpha||_m$.

三角不等式: $||\alpha+\beta||_m = ||A(\alpha+\beta)|| \leq ||A\alpha|| + ||A\beta|| = ||\alpha||_m + ||\beta||_m$.

2. 94 页习题 2

$||\alpha||_p = (\sum_i^n \ \alpha_i{}^p)^{1/p}$. 设 $m = \max_i|\alpha_i| = ||\alpha||_\infty$, 则 $1^{1/p} \leq \dfrac{||\alpha||_p}{||\alpha||_\infty} = \left(\sum_i^n \left(\dfrac{\alpha_i}{m}\right)^p\right)^{1/p} \leq n^{1/p}$.

考虑到 $\lim_{p\to\infty} 1^{1/p} = 1, \lim_{p\to\infty} n^{1/p} = 1$, 所以 $\lim_{p\to\infty}\dfrac{||\alpha||_p}{||\alpha||_\infty} = 1$, 所以 $\lim_{p\to\infty}||\alpha||_p = ||\alpha||_\infty$.

3. 94 页习题 3

(1) 首先验证 $||\alpha||_A = \sqrt{\alpha^\star A\alpha}$ 是一个向量范数，其中 A 是正定 Hermite 矩阵

正定性: 由 A 是 Hermite 矩阵可知 $||\alpha||_A \geq 0$ 且 $||\alpha||_A = 0 \to \alpha = 0$.

齐次性: $||k\alpha||_A = \sqrt{k^2\alpha^\star A\alpha} = |k|\cdot\sqrt{\alpha^\star A\alpha} = |k|\cdot||\alpha||_A$.

三角不等式: 对正定的 Hermite 矩阵 A 作 Cholesky 分解，$A = LL^\star$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, $\forall x, y$, $[L^\star x, L^\star y] \leq \sqrt{[L^\star x, L^\star x]}\sqrt{[L^\star y, L^\star y]}$, 展开即得 $x^\star Ay = x^\star LL^\star y \leq \sqrt{x^\star LL^\star x y^\star LL^\star y} = \sqrt{x^\star Axy^\star Ay}$. 所以 $(||x||_A + ||y||_A)^2 - ||x+y||_A^2 = 2\left(\sqrt{x^\star Ax}\sqrt{y^\star Ay} - x^\star Ay\right) \geq 0$, 即 $||x||_A + ||y||_A \geq ||x+y||_A$.

(2) 为说明"当 A 遍历全部 n 阶 Hermite 正定矩阵时，$||-||_A$ 遍历全部由 V 上内积确定的范数", 只需要说明，对于任意一个 V 上内积 $[-,-]$，存在对应的 Hermite 正定矩阵 A 使得 $\forall\beta\in V, [\beta,\beta] = ||\beta||_A^2$. 考虑 $V = \mathbb{C}^{n\times 1}$ 的一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 其中 e_i 表示第 i 个分量为 1 其余分量全为 0 的向量。对于任意的 $\beta \in V$, 有 $\beta = (e_1, e_2, \cdots, e_n)\beta$. 对于内积 $[-,-]$ 有 $[\beta,\beta] = [\sum_i \beta_i e_i, \sum_i \beta_i e_i] = \sum_i\sum_j \beta_i^\star[e_i, e_j]\beta_j = \beta^\star A\beta$, 其中 $A = \{[e_i, e_j]\}_{ij}$，即 A 是由基 $\{e_i\}$ 之间的内积取值组成的矩阵。由内积的正定性可知 A 是正定矩阵，由内积的对称性可知 A 是 Hermite 矩阵。

4. 101 页习题 1

显然，由于 $||A||_{M_1}$ 相当于矩阵拉平后的向量的 $1-$ 范数，所以 $||-||_{M_1}$ 满足向量范数的要求.

且有 $||AB||_{M_1} = \sum_{i,j}|(AB)_{ij}| = \sum_i\sum_j\sum_k |A_{ij}||B_{jk}| \leq \sum_i\sum_j |A_{ij}|||B||_{M_1} = ||A||_{M_1}||B||_{M_1}$.

5. 101 页习题 2

$0 \le ||A^k|| \le ||A||^k$. 又知 $||A|| < 1$, 所以 $\lim_{k\to\infty} ||A||^k = 0$, 所以 $\lim_{k\to\infty} ||A^k|| = 0$, 故 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.

6. 101 页习题 3

(1) $||UA||_F = \sqrt{\mathtt{tr}\left((UA)^\star(UA)\right)} = \sqrt{\mathtt{tr}(A^\star U^\star UA)} = \sqrt{\mathtt{tr}(A^\star A)} = ||A||_F$;

$||AU||_F = \sqrt{\mathtt{tr}\left((AU)^\star(AU)\right)} = \sqrt{\mathtt{tr}(U^\star A^\star AU)} = \sqrt{\mathtt{tr}(UU^\star A^\star A)} = \sqrt{\mathtt{tr}(A^\star A)} = ||A||_F$.

(2) 正规矩阵 N 可酉相似对角化, $N = U^\star\mathtt{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}U$. 从而有 $||N||_F = ||U^\star\mathtt{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}U||_F = ||\mathtt{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}||_F = \sqrt{\sum_i \bar{\lambda}_i\lambda_i} = \sqrt{\sum_i |\lambda_i|^2}$.

7. 101 页习题 4

(1) 对于任一矩阵 A, $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^\star A)}$. 其中 $\rho(-)$ 表示谱半径。所以

$||UA||_2 = \sqrt{\rho(A^\star U^\star UA)} = \sqrt{\rho(A^\star A)} = ||A||_2$

$||AU||_2 = \sqrt{\rho(U^\star A^\star AU)} = \sqrt{\rho(A^\star A)} = ||A||_2$, 因为 $\det(xE - U^\star A^\star AU) = \det(xE - A^\star A)$.

所以 $||-||_2$ 是酉不变的。

(2) $N = U^\star\mathtt{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}U$, $||N||_2 = ||\mathtt{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}||_2 = \sqrt{\max_i |\lambda_i|^2} = \max_i |\lambda_i|$.