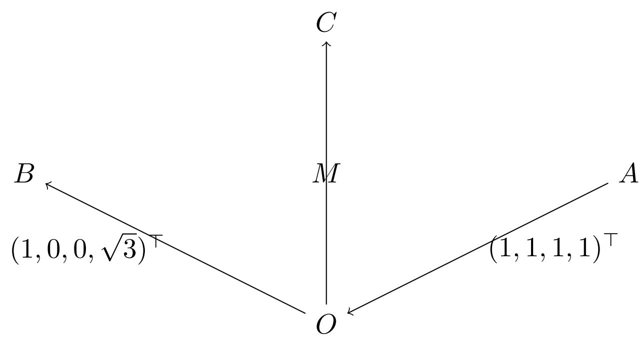
矩阵理论作业 1

刘彦铭 学号:122033910081

编辑日期: 2022 年 9 月 28 日

1. Page 5 习题 1

   从镜面反射变换的几何意义来看:



   镜面方向上的 α 与 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AO}=(0,-1,-1,\sqrt{3}-1)^\top$ 同方向

   故单位向量 $\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}(0,-1,-1,\sqrt{3}-1)^\top$

   所以

$$B=E-2\alpha\alpha^T=\frac{1}{3-\sqrt{3}}\begin{bmatrix}3-\sqrt{3}&0&0&0\\0&2-\sqrt{3}&-1&\sqrt{3}-1\\0&-1&2-\sqrt{3}&\sqrt{3}-1\\0&\sqrt{3}-1&\sqrt{3}-1&\sqrt{3}-1\end{bmatrix}$$

2. Page 11 习题 1

   可将该矩阵分解为行变换矩阵和分块对角阵的乘积:

$$\begin{bmatrix}0&B&0\\E&0&0\\0&0&A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&E&0\\E&0&0\\0&0&E\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}E&0&0\\0&B&0\\0&0&A\end{bmatrix}$$

   故其逆矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&B&0\\E&0&0\\0&0&A\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}E&0&0\\0&B^{-1}&0\\0&0&A^{-1}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&E&0\\E&0&0\\0&0&E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&E&0\\B^{-1}&0&0\\0&0&A^{-1}\end{bmatrix}$$

   行列式:

$$\begin{vmatrix}0&B&0\\E&0&0\\0&0&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&E&0\\E&0&0\\0&0&E\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}E&0&0\\0&B&0\\0&0&A\end{vmatrix}=(-1)^n\cdot\det(A)\cdot\det(B)$$

3. Page 11 习题 3

   注意到对该方阵进行行变换可以得到

$$\begin{bmatrix}E&0\\-C&E\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&E_m\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A&B\\C&D_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&A^{-1}B\\0&D_m-CA^{-1}B\end{bmatrix}$$

上式中左边两个行变换矩阵均满秩，故 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D_m \end{bmatrix}$ 可逆的充要条件为

$$\begin{vmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & D_m - CA^{-1}B \end{vmatrix} = \det(D_m - CA^{-1}B) \neq 0$$

(1) 由上述讨论知，充要条件是 m 阶方阵 $D_m - CA^{-1}B$ 可逆；

(2) 简单起见，令 $D' = D_m - CA^{-1}B$, H 可逆时，D'^{-1} 唯一存在。注意到，运用行变换有:

$$\begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & D'^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & D' \end{bmatrix} = E_{n+m}$$

所以

$$\begin{aligned} H^{-1} &= \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & D'^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & 0 \\ -C & E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D_m - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D_m - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D_m - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D_m - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

非常丑，但验证了一下应该是对的。左上角似乎和 Woodbury 公式的形式是一致的。

4. Page 12 习题 6

考虑当 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 时，对任意列向量 $x' = \left[x^\top ; y\right]^\top \in \mathbb{R}^{(n+1)\times 1}$, 其中 $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, y \in \mathbb{R}$:

计算得到

$$\begin{aligned} f(x') = x'^\top \begin{bmatrix} A & k\alpha \\ k\alpha^\top & 1 \end{bmatrix} x' &= \left[x^\top ; y\right] \begin{bmatrix} A & k\alpha \\ k\alpha^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= x^\top A x + 2ky(x^\top \alpha) + y^2 \\ &= \left(y + k(x^\top\alpha)\right)^2 + x^\top A x - k^2(x^\top \alpha x^\top \alpha) \\ &= \left(y + k(x^\top\alpha)\right)^2 + x^\top (A - k^2 \alpha\alpha^\top) x \end{aligned}$$

- 若 $A - k^2\alpha\alpha^\top$ 是正定矩阵，那么 $\begin{bmatrix} A & k\alpha \\ k\alpha^\top & 1 \end{bmatrix}$ 正定。因为:
  - 一方面 $f(x') \geq 0$ 恒成立;
  - 另一方面, $f(x') = 0$ 可以推出 $x = 0, y = 0, x' = 0$.
- 若 $A - k^2\alpha\alpha^\top$ 是半正定矩阵，那么 $\begin{bmatrix} A & k\alpha \\ k\alpha^\top & 1 \end{bmatrix}$ 半正定。因为:
  - 一方面 $f(x') \geq 0$ 恒成立;
  - 另一方面, 由于存在 $x \neq 0$ 使得 $x^\top(A - k^2\alpha\alpha^\top)x = 0$, 取 $y = -k(x^\top\alpha)$ 即得到非零的 x' 使得 $f(x') = 0$.
- 若 $A - k^2\alpha\alpha^\top$ 是不定矩阵，那么 $\begin{bmatrix} A & k\alpha \\ k\alpha^\top & 1 \end{bmatrix}$ 也是不定的。因为: 此时 $A - k^2\alpha\alpha^\top$ 存在小于 0 的特征值，取 x 为其对应的特征向量，取 $y = -k(x^\top\alpha)$ 即构造得到 x', $f(x') < 0$.

5. Page 13 习题 7

方便起见，令 $C = AB \in \mathbb{F}^{m\times r}$, 直接计算验证：对于任一 $1 \le k \le r$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{1\le i\le m} C_{ik} &= \textstyle\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} A_{ij}\times B_{jk}\\
&= \textstyle\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le i\le m} A_{ij}\times B_{jk}\\
&= \textstyle\sum_{1\le j\le n} B_{jk}\times\left(\sum_{1\le i\le m} A_{ij}\right)\\
&= \textstyle\sum_{1\le j\le n} B_{jk}\times a\\
&= ab
\end{aligned}$$