矩阵理论作业 5

刘彦铭 ID:122033910081

Last Edited: 2022 年 10 月 24 日

2.5 节习题 2、3、5；
2.6 节习题 1

2.5 习题 2 ⇒: A 与 B 酉等价，故而存在酉矩阵 U_m, V_n 使得 $U_m A V_n = B$, $V_n^\star A^\star U_m^\star = B^\star$. 所以存在酉矩阵 $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & U_m \\ V_n^\star & 0 \end{pmatrix}$, 使得 $U_1 \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\star & 0 \end{pmatrix} U_1^\star = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\star & 0 \end{pmatrix}$. 故这两分块矩阵酉相似。

⇐: 考虑到 $A' := \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\star & 0 \end{pmatrix}$ 是 Hermite 矩阵，故其显然也是正规矩阵，酉相似于一对角阵，即存在酉矩阵 U_A, $A' = U_A \Lambda_A U_A^\star$. 同样地，对于 Hermite 阵 $B' = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\star & 0 \end{pmatrix}$, 存在酉矩阵 U_B, $B' = U_A \Lambda_B U_B^\star$.

注意到，有 $\texttt{det}(xE - A') = \texttt{det}(xE - \Lambda_A)$, $\texttt{det}(xE - B') = \texttt{det}(xE - \Lambda_B)$.

由于 A' 酉相似于 B', 即存在酉矩阵 U，$UA'U^\star = B'$, 即 $UU_A\Lambda_A U_A^\star U^\star = U_B \Lambda_B U_B^\star$, 存在酉矩阵 $V = (U_B^\star U U_A)$ 使得 $V\Lambda_A V^\star = \Lambda_B$, 于是有 $\texttt{det}(xE - \Lambda_A) = \texttt{det}(xE - \Lambda_B)$.

从而得到 $\texttt{det}(xE - A') = \texttt{det}(xE - B')$, 利用行变换将 $xE - A'$ 与 $xE - B'$ 消为下三角分块阵得：

$x^{n-m}\texttt{det}(x^2 E_m - A_{m\times n} A^\star_{n\times m}) = x^{n-m}\texttt{det}(x^2 E_m - B_{m\times n} B^\star_{n\times m})$.

由此知 $\texttt{det}(xE - AA^\star) = \texttt{det}(xE - BB^\star)$, 所以 A 和 B 有相同的正奇异值，即存在酉矩阵 $U_m^A, V_n^A, U_m^B, V_n^B$ 以及一个对角阵 $S_{m\times n}$, 使得 $A = U_m^A S_{m\times n} V_n^A$, $B = U_m^B S_{m\times n} V_n^B$, 得到 $A = (U_m^A U_m^{B\star}) B (V_n^{B\star} V_n^A)$, 这就证明了 A 酉等价于 B.

2.5 习题 3 (1) 对于任一可逆矩阵 A_n, A_n 列满秩，列空间为 $\mathbb{C}^n$，A_n 亦有行满秩性质，故 $A^\star$ 列空间也为 $\mathbb{C}^n$. 故得可逆矩阵都是 EP-阵.

对于任一正规矩阵 A_n, 其酉相似于对角阵，即存在酉矩阵 U_n 使得 $UA = \texttt{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)U$, 其中 r 为 A 的列秩。显然地，$UA^\star = \texttt{diag}(\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \cdots, \bar\lambda_r, 0, \cdots, 0)U$, 故而 $A^\star$ 的列秩也是 r.

为证明它们对应的列向量空间相同，记 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $A^\star = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 存在可逆矩阵 U_1 和 U_2 使得 $UA = (U\alpha_1, \cdots, U\alpha_n) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1$, $UA^\star = (U\beta_1, \cdots, U\beta_n) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2$. 方便起见，记 $E_r = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r)$. 对 A 的列向量空间上的任一向量 v, 有

$$v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\gamma = U^{-1}(U\alpha_1, \cdots, U\alpha_n)\gamma = U^{-1}(U\beta_1, \cdots, U\beta_n)U_2^{-1}U_1\gamma = (\beta_1, \cdots, \beta_n)U_2^{-1}U_1\gamma$$

，其中 $\gamma \in \mathbb{C}^n$. 所以存在 $\gamma' = U_2^{-1}U_1\gamma \in \mathbb{C}^n$, $v = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\gamma'$, 所以 v 在 $A^\star$ 的列空间中，这就证明了 A 的列空间是 $A^\star$ 的列空间的子空间。又知二者维数都为 r, 所以两列空间相同。(或者用反之亦然说明 $A^\star$ 列空间是 A 列空间的子空间，进而说明相同)。由此证得，正规矩阵都是 EP-阵.

(2) $\Leftarrow$: 因为 B 是可逆矩阵，故可构造可逆矩阵 $Q_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} Q^\star$, $Q_2 = \begin{pmatrix} B^\star & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} Q^\star$, 有 $Q^\star A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1$, $Q^\star A^\star = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$. 由此，可完全仿照 (1) 中对正规矩阵的讨论，证明方阵 A 是 EP-阵。

$\Rightarrow$: 对 r 秩方阵 A 作 QR 分解，$A = Q_{n\times r} R_{r\times n}$, 其中 Q 是列酉阵，$r(Q) = r(R) = r$, $Q^\star Q = E_r$. 那么 $A^\star = R^\star Q^\star$. 由 A 是 EP-阵知，$A^\star$ 的列向量可由 Q 的列向量线性组合表示，故 $A^\star = QR'$. 由此得 $R^\star Q^\star = QR'$, 故 $R' = Q^\star QR' = Q^\star R^\star Q^\star$, $A^\star = QR' = QQ^\star R^\star Q^\star$, 于是 $A = QRQQ^\star$. 关于 $x \in \mathbb{C}^n$ 的方程 $Q^\star x = 0$ 其解空间是 $n-r$ 维线性空间，从中取出一组单位正交的基，作为列向量组成矩阵 $Q' = (q_{r+1}, \cdots, q_n)$. 容易验证 $U = (Q; Q')$ 是 n 阶的酉矩阵。于是有

$$A = (QR)(QQ^\star) = \left((Q;Q') \times \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left((Q;0) \times \begin{pmatrix} Q^\star \\ Q'^\star \end{pmatrix}\right) = U \begin{pmatrix} RQ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^\star$$

且可以验证 $r(RQ) = r(R) = r(Q) = r$, RQ 是 r 阶可逆矩阵.

2.5 习题 5 (1) 回顾奇异值分解存在性的构造证明可知, V 的后 $n-r$ 列是选取的 $A^\star Ax = 0$ 的解空间的标准正交基。由于 $Ax = 0 \Rightarrow A^\star Ax = 0$, 所以 $Ax = 0$ 的解空间是 $A^\star Ax = 0$ 解空间的子线性空间。又知二者均为 $n-r$ 维，故 $Ax = 0$ 与 $A^\star Ax = 0$ 二者解空间相同，故而 V 的后 $n-r$ 列也是 A 的解空间的一组标准正交基。

(2) $AV = U\Lambda$. 其中 $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 故可知 U 的前 r 列是 AV 的列空间的一组基，且由于是奇异值分解所以它是标准正交的。又由于 V 是酉矩阵，故而 AV 和 A 的列空间相同，这就说明了 U 的前 r 列是 A 的列空间的一个标准正交基。

(3) 回顾奇异值分解存在性的构造证明可知，对于 $U = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 的后 $n-r$ 列中的任意一列，比如 $\alpha_i, i > r$, 有 $AA^\star\alpha_i = \lambda_i\alpha_i = 0$ 因为 $\lambda_i = 0, \forall i > r$. 仿 (1) 可以得到 $AA^\star$ 和 $A^\star$ 的解空间相同，故而 U 的后 $n-r$ 列是 $A^\star$ 解空间的子线性空间。再由二者维数相同知，U 的后 $n-r$ 列是该解空间的一组基，且由于 $A = U\Lambda V^\star$ 是 SVD 分解，所以是标准正交的。

(4) $A^\star = V\Lambda^\star U^\star$, 故 $A^\star U = V\Lambda^\star$, 同 (2) 可证。

2.6 习题 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的 MP 广义逆。经计算得到：有下三角矩阵 $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 8/7 & 1/7 & \\ 10/7 & 9/70 & 1/10 \end{pmatrix}$ 以及行正交的矩阵 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -8 & -1 & 7 & 5 \\ -13 & 6 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 使得 $A = LQ$. 可以验证 $QQ^\star = \mathtt{diag}(7, 140, 240)$.

下面验证 $B = Q^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1}$ 是 A 的广义逆:

a. $ABA = LQQ^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1}LQ = LQ = A$

b. $BAB = Q^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1}LQQ^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1} = Q^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1} = B$

c. $AB = LQQ^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1} = E$ 是 Hermite 矩阵

d. $BA = Q^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1}LQ = Q^\star(QQ^\star)^{-1}Q$ 是 Hermite 矩阵，因为 $QQ^\star$ 是实对角阵

带入具体数值即可求得 A 的 MP 广义逆矩阵

$$B = Q^\star(QQ^\star)^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -13 \\ 1 & -8 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/7 & & \\ & 1/140 & \\ & & 1/240 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & \\ -8 & 7 & \\ -4 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

进一步化简得 $B = \dfrac{1}{48} \times \begin{pmatrix} 20 & 21 & -26 \\ 24 & -30 & 12 \\ 12 & 3 & -6 \\ -20 & 15 & 2 \\ -4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$