矩阵理论作业 4

刘彦铭 学号:122033910081

编辑日期: 2022 年 10 月 21 日

2.3 节习题 2；
2.4 节习题 5，6

- 2.3 - 习题 2

  $\Leftarrow$ 存在实正交矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $P^\top BP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{bmatrix}$, 所以 $B = P\left(E_n - 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O_{n-1} \end{bmatrix}\right)P^\top$ 展开即可得到：$B = E - 2p_1p_1^\top$, 其中 p_1 是实正交矩阵的第 1 列，是单位向量，这就验证了 B 是镜面反射矩阵。

  $\Rightarrow$ 由于 B 是镜面反射矩阵，所以存在某个单位长度的 $\delta \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ 使得 $B = E - 2\delta\delta^\star$。

  由于 B 是实方阵，所以 $\delta\delta^\star$ 也必须是实矩阵，即 $\delta_i\delta_j \in \mathbb{R}, \forall 1 \le i,j \le n$，这要求 δ 中的各分量的辐角彼此相差 π 的整数倍，所以 δ 可以拆分作 $\delta = \mathtt{e}^{i\theta}\cdot\delta'$, 其中 δ' 是实单位向量。

  仿照引理 2.2.2 的推导可知，存在实正交矩阵 P 使得 $P^\top\delta' = [1, 0, 0, \cdots, 0]^\top$. (注：引理 2.2.2 是针对复数域的，但由于这里的 δ' 是实向量，故可以按照完全相同的方法构造出实的镜面反射矩阵 P)

  故 $P^\top BP = P^\top(E-2\delta\delta^\star)P = P^\top\left(E - 2(\mathtt{e}^{i\theta}\delta')(\mathtt{e}^{-i\theta}\delta'^\top)\right)P = E - 2(P^\top\delta')(P^\top\delta')^\top = \mathtt{diag}\{-1, E\}$

- 2.4 - 习题 5

  (1) 由于 A 是正规矩阵, 根据正规矩阵基本定理,A 酉相似于对角阵, 即存在酉矩阵 U, $U^\star AU = \mathtt{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 且根据 Schur 引理的推导过程知，对角线上元素 λ_i 为 A 的特征值，在本题中他们两两互异。

  所以 $A = U\Lambda U^\star$, 其中 $\Lambda = \mathtt{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. $AB = BA \Rightarrow U\Lambda U^\star B = BU\Lambda U^\star \Rightarrow$ $\Lambda U^\star BU = U^\star BU\Lambda$. 考虑左右两边的 i, j 位置元素, 可得 $\lambda_i(U^\star BU)_{ij} = \lambda_j(U^\star BU)_{ij}$, 再由 λ_i 两两互异可知，$(U^\star BU)$ 对角线以外的元素均为 0，即 B 酉相似于对角阵，所以 B 是正规矩阵。

  (2) 由 (1) 的推导可知, 任意 $B \in \mathbb{C}(A), AB = BA$, 都有 $B = U\Lambda_B U^\star$, 且对不同的 B, 对应的酉矩阵 U 都相同，都由 A 决定。$U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, 则 $u_1u_1^\star, u_2u_2^\star, \cdots, u_nu_n^\star$ 构成 $\mathbb{C}(A)$ 的一组基。因为对于任意的 B, $B = \sum_i \Lambda_{Bi}u_iu_i^\star$, 且 $u_iu_i^\star$ 之间彼此正交, $\Lambda_{Bi} \in \mathbb{F}$。所以 $\mathbb{C}(A)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间。加法、数乘的封闭性显然。乘法的封闭性由 $(u_iu_i^\star)(u_ju_j^\star) = \delta_{ij}u_iu_i^\star$ 保证。

- 2.4 - 习题 6

  先证明一个性质 $tr(AB) = tr(BA)$. $tr(AB) = \sum_i(AB)_{ii} = \sum_i\sum_k A_{ik}B_{ki} = \sum_k\sum_i B_{ki}A_{ik} = \sum_k(BA)_{kk} = tr(BA)$.

  (1) A_n 是 Hermite 矩阵 $\Leftrightarrow tr(A^2) = tr(A^\star A)$.

  $\Rightarrow$: $A^\star = A$, 故 $tr(AA) = tr(A^\star A)$ 显然成立。

$\Leftarrow$: 据 Schur 引理，存在酉矩阵 Q 使得 $QAQ^\star = U$, 其中 U 是上三角矩阵, $A = Q^\star UQ$.

于是有 $tr(AA) = tr(Q^\star UQQ^\star UQ) = tr(Q^\star UUQ) = tr(UUQQ^\star) = tr(UU)$.

类似地，$tr(A^\star A) = tr(Q^\star U^\star QQ^\star UQ) = tr(Q^\star U^\star UQ) = tr(U^\star UQQ^\star) = tr(U^\star U)$.

注意到 U 是上三角矩阵，$U^\star$ 是下三角矩阵，$tr(UU) = \sum_k U_{kk}U_{kk}$. 而 $tr(U^\star U) = \sum_{i,j} \overline{U_{ij}}U_{ij}$ 由于 $tr(U^\star U)$ 得到的是实数，现考虑 $tr(UU) = \sum_k U_{kk}U_{kk}$ 的实部。容易证明 $\mathtt{Re}(U_{kk}U_{kk}) = \mathtt{Re}(U_{kk})^2 - \mathtt{Im}(U_{kk})^2 \le \mathtt{Re}(U_{kk})^2 + \mathtt{Im}(U_{kk})^2 = \overline{U_{kk}}U_{kk}$. 当且仅当 U_{kk} 为实数时取等号。所以由 $tr(UU) = \sum_k U_{kk}U_{kk} = \sum_{i,j} \overline{U_{ij}}U_{ij} = tr(U^\star U)$ 推出 U_{kk} 都是实数，且 $U_{ij} = 0, \forall i \ne j$.

所以 U 是实对角矩阵，$U^\star = U$. 所以 $A^\star = Q^\star U^\star Q = Q^\star UQ = A$, A 是 Hermite 矩阵。

(2) A, B 都是 Hermite 矩阵, $AB = BA \Leftrightarrow tr((AB)^2) = tr(A^2B^2)$.

$\Rightarrow$: $AB = BA \Rightarrow (AB)^\star = B^\star A^\star = BA = AB$, 所以 AB 是 Hermite 矩阵. 由 (1) 知，$tr((AB)^2) = tr((AB)^\star AB) = tr(BAAB) = tr(AABB) = tr(A^2B^2)$.

$\Leftarrow$: $tr((AB)^2) = tr(A^2B^2) \Rightarrow tr(ABAB) = tr(AABB) \Rightarrow tr(ABAB) = tr(BAAB) \Rightarrow tr(ABAB) = tr((AB)^\star AB)$. 由 (1) 知 AB 是 Hermite 矩阵，所以 $BA = B^\star A^\star = (AB)^\star = AB$.