矩阵理论 作业 7

刘彦铭 ID: 122033910081

Last Edited: 2022 年 11 月 11 日

55 页 1、3、4、5

1. 习题 1

   $\sigma : A \to AB^\top + BA$, 注意到 $BA = (A^\top B^\top)^\top = (AB^\top)^\top$, 所以 $AB^\top + BA$ 是 2 阶的实对称矩阵，仍在 V 中。

   (1) 对任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2 \in V$, 有 $\sigma(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B^\top + B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 \cdot (A_1 B^\top + BA_1) + \lambda_2 \cdot (A_2 B^\top + BA_2) = \lambda_1 \sigma(A_1) + \lambda_2 \sigma(A_2)$.

   (2) 由于 $\sigma(E_{11}) = 2E_{11}$, $\sigma(E_{12} + E_{21}) = -2E_{11} + (E_{12} + E_{21})$, $\sigma(E_{22}) = -(E_{12} + E_{21})$. 故 σ 在这组基下，对应于矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (3) 对于任意 $A \in V$, $A = [E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}] \cdot [c_1, c_2, c_3]^\top, c_i \in \mathbb{R}$,

   $\sigma A = \sigma[E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}] \cdot [c_1, c_2, c_3]^\top = [E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}] \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [c_1, c_2, c_3]^\top = [E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}] \cdot [2c_1 - 2c_2, c_2 - c_3, 0]^\top$, 由此可知 $\{E_{11}, E_{12} + E_{21}\}$ 是像子空间 $\mathtt{im}(\sigma)$ 的一组基。

   (4) 延用 (3) 中的记号，由于 $E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}$ 线性无关，所以 $\sigma A = 0$ 当且仅当 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$, 解为 $[c_1, c_2, c_3]^\top = [c_3, c_3, c_3]^\top, c_3 \in \mathbb{R}$. 故核子空间 $\mathtt{ker}(\sigma)$ 的一组基是 $\{E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}\}$.

   (5) 是直和，且 $V = \mathtt{im}(\sigma) \oplus \mathtt{ker}(\sigma)$. 因为 $\mathtt{im}(\sigma)$ 与 $\mathtt{ker}(\sigma)$ 的基不交，且它们基的并是 V 的一组基。

2. 习题 3

   设 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$ 是 n 维空间 $\mathbb{F}^n$ 的一组基。对于线性变换 σ, 以及任意的 $\alpha \in \mathbb{F}^n$, $\alpha = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] \cdot c^\top$, 其中 $c = [c_1, c_2, \cdots, c_n] \in \mathbb{F}^n$. $\sigma(\alpha) = \sigma[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] \cdot c^\top$. 由于 $\{\eta_i\}$ 是基，故存在矩阵 A 使得 $\sigma[\eta_1, \cdots, \eta_n] = [\eta_1, \cdots, \eta_n] \cdot A$. 再记 $N = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$, 显然 N 可逆，构造 $B = NAN^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$, 有 $B\alpha = B(Nc^\top) = NAN^{-1}Nc^\top = NAc^\top = \sigma(\alpha)$.

3. 习题 4

   (1) $V = W_1 \oplus W_2$, $\sigma : \alpha_1 + \alpha_2 \to \alpha_1$, 其中 $\alpha_i \in W_i$. 取 W_1 的一组基 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$; 取 W_2 的一组基 $(\beta_1, \cdots, \beta_s)$. 那么 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s)$ 是 V 的一组基。对于 V 的任意基 $(\gamma, \cdots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{r+s})$,

有 $(\gamma,\cdots,\gamma_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{r+s})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s)C$, 其中 $C\in M_{r+s}(\mathbb{F})$. 将 σ 作用于其上:

$$\begin{aligned}\sigma(\gamma,\cdots,\gamma_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{r+s}) &= \sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s)\cdot C\\ &= (\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s)\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}C\\ &= (\gamma,\cdots,\gamma_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{r+s})\cdot C^{-1}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}C\end{aligned}$$

从而得到 $A=C^{-1}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}C$, 显然有 $A^2=A$.

(2) (a) 即 $\sigma_A:(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta\to(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A\beta)$. 容易验证对任意 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$, 以及任意 $v_1,v_2\in V$, 有 $\exists\beta_1,v_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta_1$, $\exists\beta_2,v_2=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta_2$, $\sigma(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A\lambda_1\beta_1+A\lambda_2\beta_2)=\lambda_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A\beta_1)+\lambda_2(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A\beta_2)=\lambda_1\sigma(v_1)+\lambda_2\sigma(v_2)$, 所以 σ 是线性变换

(b) $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=(A-E)A=0$. 下考察 $r(A-E)$ 与 $r(A)$ 的关系. 设 $r(A)=r$, 则存在可逆矩阵 $P,Q\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $A=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$, 由于 $A^2=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}QP\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=A$, 所以 QP 具有 $QP=\begin{bmatrix}E_r & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$ 的形式。$A-E=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q-PP^{-1}Q^{-1}Q=P\left(\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E_r & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}^{-1}\right)Q$. 注意到 $\begin{bmatrix}E_r & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}E_r+C_{12}D^{-1}C_{21} & -C_{12}D^{-1}\\ -D^{-1}C_{21} & D^{-1}\end{bmatrix}$, 其中 $D=C_{22}-C_{21}C_{12}$ 是 $(n-r)$ 阶可逆矩阵 (可逆性由 QP 可逆推出). 所以: $\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E_r & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-C_{12}\\ E_{n-r}\end{bmatrix}D^{-1}\left[C_{21};-E_{n-r}\right]$, 从而 $r(A-E)=n-r$.

下面验证 A 的列向量空间和 $A-E$ 的解空间相同，即 $\mathtt{col}(A)=(A-E)^{\perp}$. $v\in\mathtt{col}(A)\Rightarrow\exists\gamma,v=A\gamma\Rightarrow(A-E)v=(A-E)A\gamma=0\Rightarrow v\in(A-E)^{\perp}$, 故 $\mathtt{col}(A)\subset(A-E)^{\perp}$. 又 $\dim(\mathtt{col}(A))=r(A)=r=n-r(A-E)=\dim\left((A-E)^{\perp}\right)$, 所以 $\mathtt{col}(A)=(A-E)^{\perp}$. 同理可得，$\mathtt{col}(A-E)=A^{\perp}$.

令 $W_1=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta|\forall\beta\in A^{\perp}\}$, $W_2=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta|\forall\beta\in(A-E)^{\perp}\}$ (或等价地，$W_1=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta|\forall\beta\in\mathtt{col}(A-E)\}$, $W_2=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta|\forall\beta\in\mathtt{col}(A)\}$), 则 $V=W_1\oplus W_2$ 是满足题意的一个直和分解，验证如下:

(i) 设 $v=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta\in W_1\cap W_2$ 则 $\beta\in A^{\perp}\cap(A-E)^{\perp}$, 于是 $\beta=A\beta=0$, $x=0$. 所以 $W_1\cap W_2=0$.

(ii) $\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(A^{\perp})+\dim((A-E)^{\perp})=(n-r)+r=n=\dim(V)$, 结合 (i) 知，$V=W_1\oplus W_2$.

(iii) $\forall\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta\in W_1$, 有 $\sigma\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A\beta)=0$ 因为 $\beta\in A^{\perp},A\beta=0$. 类似地，$\forall\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\beta\in W_2$, 有 $\sigma\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A\beta)=\alpha$ 因为 $\beta\in(A-E)^{\perp},A\beta=\beta$.

(好像 W_1,W_2 和题目中的顺序反了，算了不改了)

4. 习题 5

设线性变换在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下的对应的矩阵为 A, 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 下对应的矩阵为 B. 根据定义有：$\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A$, $\sigma(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)B$. 考虑到同一线性空间的基之间能互相表示，故存在可逆矩阵 Q 使得 $(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Q$, 从而有

$$\begin{aligned}\sigma(\beta_1, \cdots, \beta_n) &= (\beta_1, \cdots, \beta_n)B = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)QB \\ &= \sigma[(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Q] = (\sigma\alpha_1, \cdots, \sigma\alpha_n)Q = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)AQ\end{aligned}$$

故而 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)(QB - AQ) = 0$, 由于基线性无关，故 $QB - AQ = 0 \Rightarrow A = QBQ^{-1}$, 即 A 与 B 相似。