矩阵理论作业 3

刘彦铭 学号:122033910081

编辑日期: 2022 年 10 月 21 日

2.1 节：3；
2.2 节：1，2，3

- 2.1 - 习题 3

对矩阵 A 模拟高斯消元过程可以知道，需要将原第 2 行置于第 1 行，将原第 1 行置于第 2 行，于是可以得到可行的置换矩阵 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

对 PA 模拟高斯消元过程可得:

$$
\begin{aligned}
PA=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\1&2&4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

于是 $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

- 2.2 - 习题 1

交换 1,3 两列,并选取前两列作为列向量的极大无关组。有:$P=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $AP=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&-1&-1&-1\\0&-1&1&0\\-1&-2&0&-1\end{pmatrix}$

对前两列做 Schmidt 正交化，再单位化，得到:

$$
AP=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}&\sqrt{3}&\sqrt{3}\\0&-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\end{pmatrix}=QR
$$

- 2.2 - 习题 2

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 对于 A 的第一列, $A_{:,1}=(-2,-1,1,0)^\top$, 我们希望构造酉矩阵 U_1 使得 $U_1A_{:,1}=(||A_{:,1}||,0,0,0)^\top$. 根据镜面反射矩阵的相关性质，设单位向量 $\beta=\dfrac{A_{:,1}}{||A_{:,1}||}$，$\epsilon=(1,0,0,0)^\top$, 则可构造 $U_1=E-\dfrac{2}{||\beta-\epsilon||^2}(\beta\beta^\top-\epsilon\beta^\top-\beta\epsilon^\top+\epsilon\epsilon^\top)$. 计算过程较繁，这里给出化简结果:

$$U_1=\frac{1}{6-2\sqrt{6}}\times\begin{pmatrix} -4+2\sqrt{6} & 2-\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & 0 \\ 2-\sqrt{6} & 5-2\sqrt{6} & 1 & 0 \\ -2+\sqrt{6} & 1 & 5-2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

计算得到

$$U_1A=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6}/2 & \sqrt{6}/2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

完全类似地，取 $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,-2)^\top$, $\epsilon=(1,0,0)^\top$, 计算得到 3 阶的 U_2，

$$U_2=\frac{1}{6+\sqrt{6}}\times\begin{pmatrix} -1-\sqrt{6} & -1-\sqrt{6} & -2-2\sqrt{6} \\ -1-\sqrt{6} & 5+\sqrt{6} & -2 \\ -2-2\sqrt{6} & -2 & 2+\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

那么 $U_2A_{1:3,1:3}=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，已经是上三角矩阵。这就找到了 A 的第二广义 QR 分解，$A=QR$, 其中 $R=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6}/2 & \sqrt{6}/2 \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6}/2 & \sqrt{6}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}U_1\right)^{-1}=U_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix}$.

- 2.2 - 习题 3

定理 2.2.3 可推广至非方阵的情形:

任一矩阵 $A_{n\times m}$ 具有 QR-分解，其中 Q 是 n 阶酉矩阵，而 R 是 $n\times m$ 的上三角矩阵，且主对角线元素是非负实数。

证明过程，可以完全仿照定理 2.2.3，即不断运用引理 2.2.2 逐一消去矩阵 $A_{n\times m}$ 的列。矩阵是否是方阵，完全不影响引理 2.2.2 的使用。

唯一的区别在于，当矩阵 $A_{n\times m}$ 消去 $\min\{n,m\}$ 列后，不能再继续像定理 2.2.3 证明中那样对剩余的子矩阵分块，所以至多只能消掉前 $\min\{n,m\}$ 列中对角线以下的部分，但这不影响 Q 是酉矩阵以及 R 是非方形的上三角矩阵且对角线元素是非负实数。