
$\mathbb{R}^n$

Cálculo no $\mathbb{R}^n$ Curso de Verão 2008

IME - USP

Prof. Alexandre Lymberopoulos
www.ime.usp.br/~lymber/verao
Régis da Silva Santos

Prefácio

Este material foi criado a partir de notas de aula do Curso de Verão 2008 no IME-USP.

É permitida a reprodução total ou parcial deste material desde que indicada a autoria.

Este material foi criado para uso pessoal, portanto, adaptado para tal fim, podendo posteriormente ser adaptado para uso coletivo. E está sujeito a conter erros, portanto, são aceitas sugestões e críticas construtivas para melhoria do mesmo.

Régis da Silva Santos
Março de 2008.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Revisão de Cálculo

Definição 1.1 Uma bola de centro x_0 e raio r é o conjunto $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$[1]

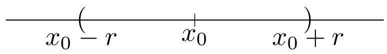
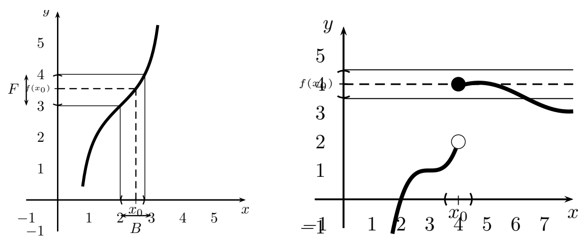


Figura 1.1: Bola aberta

Seja S conjunto no domínio de f tal que $f(s) = \{f(x); x \in S\}$.

1.1 Continuidade

Definição 1.2 Seja f uma função. Dizemos que f é *contínua* em x_0 se para toda bola centrada em $f(x_0)$, F, existe bola centrada em x_0, B tal que $f(B) \subset F$.



(a) Função contínua (b) Função descontínua

[1] http://cr.yp.to/papers/calculus.pdf

Definição 1.3 f é contínua se for contínua em todos os pontos onde está definida.

Exemplo 1.1 $f(x) = 3x$

Solução:
Seja $x_0 \in \mathbb{R}; f(x_0) = 3x_0$

$$
\begin{aligned}
&F = B_\varepsilon (3x_0) \\
&B = B_{\varepsilon/3} (x_0) \Rightarrow f(B) \subset F \\
&B = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < {}^{\varepsilon}\!/_{3}\} \\
&|x - x_0| < {}^{\varepsilon}\!/_{3} \Rightarrow \\
&3 |x - x_0| < \varepsilon \\
&|3x - 3x_0| < \varepsilon \\
&|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\
&\Rightarrow f(B) \subset F
\end{aligned}
$$

$\therefore f$ é contínua. $\square$

Exemplo 1.2 $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{se } x \geqslant 2 \\ 3, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

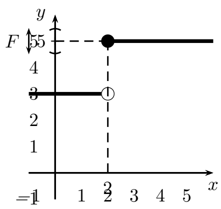


Figura 1.2: Função de duas sentenç as

Solução:
contra-exemplo, $F = B_1 (f(2))$. $\nexists B_r (2)$ tal que $f(B_r(2)) \subset F$. $\square$

Teorema 1.4 *Sejam f e g funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \neq x_0$, então $f(x_0) = g(x_0)$.*

Demonstração:
Vamos provar que $|f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$.
f é contínua em $x_0 \Rightarrow$ dada $F = B_{\varepsilon/2} (f(x_0)) \Rightarrow \exists A$ bola centrada em X_0 tal que $f(A) \subset F$.

g é contínua em $x_0 \Rightarrow$ dada $F = B_{\varepsilon/2}\left(g\left(x_0\right)\right) \Rightarrow \exists B$ bola centrada em X_0 tal que $g\left(B\right) \subset G$.

Existe $x \neq x_0$ tal que $x \in A \cap B$

$f\left(x\right) \in F$ e $\underbrace{g\left(x\right)}_{f(x)} \in F$

$$\begin{aligned}
\left|f\left(x_0\right) - g\left(x_0\right)\right| &= \left|f\left(x_0\right) - f\left(x\right) + \underbrace{f\left(x\right)}_{g(x)} - g\left(x_0\right)\right| \\
&\leqslant \left|f\left(x_0\right) - f\left(x\right) + g\left(x\right) - g\left(x_0\right)\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
\left|f\left(x_0\right) - g\left(x_0\right)\right| &< \varepsilon \\
\Rightarrow f\left(x_0\right) - g\left(x_0\right) &= 0 \\
\Rightarrow f\left(x_0\right) &= g\left(x_0\right)
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.5 *Sejam f e g funções contínuas em x_0, então $f + g$ e $f.g$ são contínuas em x_0.*

Teorema 1.6 *Sejam f e g funções contínuas em $g(x_0)$ e x_0, respectivamente, então $f \circ g$ é contínua em x_0.*

Demonstração:

f é contínua em $g\left(x_0\right)$
$\Rightarrow$ dada $F = B_\varepsilon\left(f\left(f\left(x_0\right)\right)\right), \exists B$ bola centrada em $g\left(x_0\right)$ tal que $f\left(B\right) \subset F$.
g é contínua em x_0
$\Rightarrow$ para B acima $\exists A$ bola centrada em x_0 tal que $g\left(A\right) \subset B$.

$$\begin{aligned}
&g\left(A\right) \subset B \\
&\Rightarrow f\left(g\left(A\right)\right) \subset f\left(B\right) \subset F \\
&\Rightarrow \left(f \circ g\right)\left(A\right) \subset F
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f \circ g$ é contínua em x_0. ■

Exemplo 1.3 $f\left(x\right) = k, k \in \mathbb{R}$

Solução:
dada $F = B_\varepsilon\left(k\right)$ escolha $B = B_r\left(x_0\right), r > 0$ qualquer $\Rightarrow f\left(B\right) \subset F$. □

Exemplo 1.4 $f(x) = x$

Solução:
dada $F = B_\varepsilon(k)$ escolha $B = F \Rightarrow f(B) \subset F$. $\square$

- **Conseqüência**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0; n \in \mathbb{Z}^+; a_i \in \mathbb{R}$$

são contínuas.

Exemplo 1.5 $f(x) = 1/x$ é contínua para $x_0 \neq 0$.

Solução:
dada $B_\varepsilon(1/x_0)$ escolha $B = B_{\frac{1+\varepsilon|x_0|}{|x_0|}}(x_0)$.
exercício $\square$

- **Conseqüência**

1. se f é contínua e $f(x) \neq 0, \forall x$, então $\left(\frac{1}{x} \circ f\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ é contínua.
2. se $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas e $q(x) \neq 0, \forall x$, então $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ é contínua.

1.2 Derivadas

Definição 1.7 Seja f uma função definida em x_0. Dizemos que f é *derivável* em x_0 se existir f_1, função contínua em x_0 tal que

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)}$$

Definição 1.8 Seja f uma função definida em x_0. Então f tem derivada $d \in \mathbb{R}$ em x_0 se
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$ e $f_1(x_0) = d$

Exemplo 1.6 $f(x) = x^2; x_0 = 2$

Solução:

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \\
&x^2 = 2^2 + (x-2) f_1(x) \\
&f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2 \\
&\therefore f'(2) = f_1(2) = 2+2 = 4
\end{aligned}$$

E ainda, num ponto x_0 qualquer, $\forall x_0$, temos:

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x) \\
&\Rightarrow x^2 = x_0^2 + (x - x_0) f_1(x) \\
&\Rightarrow f_1(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \\
&\Rightarrow f'(x_0) = f_1(x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.9 *Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Demonstração:

f é derivável em x_0, então $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$, como $f_1(x)$ é contínua, então, f é contínua em x_0.

■

1.3 Regras de Derivação

Teorema 1.10 (Derivada da Soma) *Sejam f, g deriváveis em x_0. Então $f + g$ é derivável em x_0.*

Demonstração:

f é derivável em x_0, então $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$ e
g é derivável em x_0, então $g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g_1(x)$
então, $h(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned}
&f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (x - x_0)(f_1(x) + g_1(x)) \\
&\Rightarrow h(x) = h(x_0) + (x - x_0) h_1(x)
\end{aligned}$$

h_1 é contínua em x_0 e

$$h'(x) = (f+g)'(x)$$
$$h_1(x_0) = f_1(x_0) + g_1(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

■

Teorema 1.11 (Derivada do Produto) *Sejam f, g deriváveis em x_0. Então $h(x) = f(x).g(x)$ é derivável em x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*

Demonstração:

f é derivável em x_0, então $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$ e
g é derivável em x_0, então $g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g_1(x)$
então, $h(x) = f(x).g(x)$

$$f(x)g(x) = (f(x_0) + (x-x_0) f_1(x))(g(x_0) + (x-x_0) g_1(x))$$
$$= f(x_0)g(x_0) + (x-x_0)[f(x_0)g_1(x) + f_1(x)g(x_0) + f_1(x)g_1(x)(x-x_0)]$$
$$= h(x_0) + (x-x_0)h_1(x)$$
$$\Rightarrow (fg)'(x_0) = h_1(x_0) = f(x_0)g_1(x_0) + f_1(x_0)g(x_0)$$
$$= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

■

Teorema 1.12 (Regra da Cadeia) *Se f é derivável em $g(x_0)$ e g é derivável em x_0, então $f \circ g$ é derivável em x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0)$.*

Demonstração:

Façamos $y = g(x)$ e $y_0 = g(x_0)$
f é derivável em y_0, então $f(y) = f(y_0) + (y - y_0) f_1(y)$ e
g é derivável em x_0, então $g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g_1(x)$

$$f(y) = f(y_0) + \left(g(x_0) + (x-x_0) g_1(x) - \underbrace{y_0}_{g(x_0)} \right) .f_1(y)$$
$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + (x-x_0) \underbrace{g_1(x) f_1(g(x))}$$

$f \circ g$ é derivável em x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f_1(g(x_0)).g_1(x_0)$$
$$= f'(g(x_0)).g'(x_0)$$

■

Exemplo 1.7

$$\begin{array}{l} f(x)=k \\ f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f_1(x) \\ k=k+(x-x_0)\,f_1(x) \\ (x-x_0)\,f_1(x)=0 \Rightarrow f_1(x)=0 \\ \Rightarrow f'(x_0)=f_1(x_0)=0 \end{array}$$

Exemplo 1.8

$$\begin{array}{l} f(x)=x^n \\ f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f_1(x) \\ x^n=x_0^n+(x-x_0)\,f_1(x) \\ f_1(x)=\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=x^{n-2}x_0^1+x^{n-3}x_0^2+...+x^1x_0^{n-2}+x_0^{n-1} \\ \Rightarrow f'(x_0)=f_1(x_0)=nx_0^{n-1} \end{array}$$

Exemplo 1.9

$$\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{x} \\ f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f_1(x) \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x_0}+(x-x_0)\,f_1(x) \\ f_1(x)=-\dfrac{1}{x.x_0} \\ f'(x_0)=f_1(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2} \end{array}$$

Teorema 1.13 (Derivada do Quociente) *Sejam f e g deriváveis em x_0 com $g(x_0)\neq 0$, então f/g é derivável em x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Demonstração:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f.\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\,.\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\,.-\frac{1}{g(x_0)^2}.g'(x_0)$$
$$=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

∎

1.4 A Completude de $\mathbb{R}$ e suas Conseqüências

Definição 1.14 Seja S um conjunto de reais. Um número real c é quota superior de S se $x \leqslant c, \forall x \in S$.

Exemplo 1.10 Seja $c \geqslant \pi$, c é quota superior para $S = \{3, 3.1, 3.14, 3.141, ...\}$. A menor quota superior é π.

Os números reais são completos: todo $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$, com quota superior admite menor quota superior. Essa menor quota superior é o **supremo** de S, $\sup S$.

Exemplo 1.11 $\left\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\right\}$tem quota superior, mas não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.15 (valor intermediário) *Seja f uma função contínua com valores reais. Sejam b, c e y reais tais que $b \leqslant c$ e f definida em $[b, c]$ com $f(b) \leqslant y \leqslant f(c)$.*

Então, existe $x \in [b, c]$ tal que $f(x) = y$.

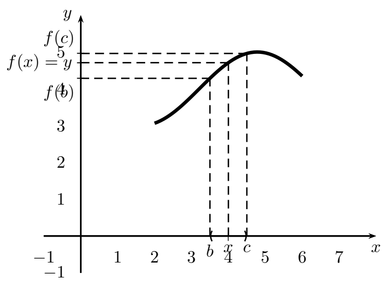


Figura 1.3: TVI

Demonstração:

Seja $S = \{x \in [b, c] : f(x) \leqslant y\}$

$S \neq \emptyset$,pois $b \in S\,(f(b) \leqslant y)$

Stem c como quota superior.

Portanto, S tem supremo: $u = \sup S$.

Vamos provar que $f(u) = y$.

Suponha $f(u) > y$, existe D bola aberta centrada em u tal que $f(x) > y, \forall x \in D$. Seja $t \in D, t < u\,(f(t) > y)$, logo t é quota superior para S e $t < u$.

Contradição, achamos quota superior menor que o supremo, logo, $f(u) \leqslant y$.

Suponha $f(u) < y$, isto implica que $u \neq c$ e então $u < c$.

Por continuidade de f existe D bola aberta centrada em u tal que $f(x) < y, \forall x \in D$.

Seja $x \in D$ tal que $u < x < c$, mas $x \neq S \Rightarrow f(x) > y$.

Contradição, logo, $f(u) \geqslant y$.

Portanto, $f(u) = y$.

■

Teorema 1.16 *Seja f contínua em $[b, c]$ tal que $f(b).f(c) < 0$. Então existe $x \in [b, c]$ tal que $f(x) = 0$.*

Demonstração:

Faça $y = 0$ no teorema 1.15.

■

Teorema 1.17 *Seja f função contínua e b, c reais tais que $b \leqslant c$. Então $f([b, c])$ tem quota superior.*

Demonstração:

Seja $S = \{x \in [b, c] : f([b, x])\}$ é limitada.

$S = \emptyset; b \in S; f([b, b]) = f(b)$(limitada).

Stem quota superior; $x \leqslant c, \forall x \in S$. Então, $u = \sup S$.

Vamos provar que $u = c$.

Pela continuidade de f existe D, bola centrada em u com $f(D) \subset B_1(f(u))$. Seja $t \in D, t < u \Rightarrow \exists x, t < x < u$ tal que $f([b, x])$ é limitada e $f([x, u]) \subset B_1(f(u))$ é limitada.

Logo, $f([b, u])$ é limitada.

Suponha $u < c \Rightarrow \exists v \in D$ tal que $u < v < c$, logo, $f([u, v])$ é limitada. Então, $f([b, v])$ é limitada. Contradição.

Logo, $u \geqslant c \Rightarrow u = c$.

■

Teorema 1.18 (máximo - Weierstrass) *Seja f função contínua e b, c reais com $b \leqslant c$. Então existe $z \in [b, c]$ tal que $f(x) \leqslant f(z), \forall x \in [b, c]$.*

Demonstração:

$f([b, c])$ tem quota superior, teorema 1.17, logo existe $M = \sup\{f([b, c])\}$.

Seja $S = \{x \in [b, c] : \sup\{f([x, c])\} = M\}$

$$S \neq \emptyset : b \in S.$$

Stem quota superior, então, c é quota. $u = \sup S$.
Suponha $f(u) < M$.
Continuidade de f dá bola aberta D centrada em u com $f(D) \subset B_{\frac{M-f(u)}{2}}(f(u))$.
Logo, $\sup \{f(D)\} < M$.
Seja $t \in D, t < u$ e $x \in D$ com $t < x \leqslant u$.
Então $\sup \{f([x,c])\} = M$, pois $x \in S, t < x \leqslant u$.
Mas $\sup \{f([x,u])\} < M$ e então, $u < c$.
Seja $v \in D$ com $u < v < c$ e $\sup \{f([x,v])\} < M$, (pois $[x,v] \subset D$), então, $\sup \{f([v,c])\} = M$.
Contradição, logo, $f(u) \geqslant M \Rightarrow f(u) = M$.

■

Teorema 1.19 *Seja f função contínua e b, c reais com $b \leqslant c$.*
Então existe $u \in [b,c]$ tal que $f(u) \leqslant f(x), \forall x \in [b,c]$.

Demonstração:

$-f$é continua e, pelo teorema 1.18, tem máximo em $[b,c]$, isto é, $\exists u \in [b,c]$ tal que
$-f(x) \leqslant -f(u), \forall x \in [b,c]$
$\Rightarrow f(u) \leqslant f(x), \forall x \in [b,c]$

■

Teorema 1.20 (Teorema de Fermat) *Seja f uma função derivável em x_0. Suponha $f(x_0) \geqslant f(x)$, para todo x numa bola aberta B centrada em x_0. Então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração:
Seja f derivável em x_0, então

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x)$$

f_1 é contínua em x_0.
Suponha $\underbrace{f'(x_0)}_{f_1(x_0)} > 0$.
Existe D bola centrada em x_0 tal que $f_1(x) > 0, \forall x \in D$.
Seja $x \in B \cap D, x > x_0$

$$f(x_0) \geqslant f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{>0} \underbrace{f_1(x)}_{>0} > f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0) \geqslant f(x_0)$$

Contradição. Logo, $f'(x_0) \leqslant 0$.
Analogamente, supondo $f'(x_0) < 0$.

E $x \in B \cap D$, com $x < x_0$, obtemos a mesma contradição.
$f'(x_0) \geqslant 0$.
Portanto, $f'(x_0) = 0$. ■

Teorema 1.21 *Seja f uma função derivável com $f(x_0) \leqslant f(x)$, para todo $x \in B$, bola centrada em x_0. Então, $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração:
Aplique o Teorema 1.20 para $-f$.

$$\begin{aligned} & f(x_0) \leqslant f(x) \Rightarrow -f(x_0) \geqslant -f(x) \\ & \Rightarrow -f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

■

Teorema 1.22 (Teorema de Rolle) *Seja f uma função derivável. Sejam $b < c \in \mathbb{R}$. Se $f(b) = f(c)$, então existe $x \in \,]b, c[$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração:
f é derivável, portanto, f é contínua.
Portanto, assume máximo em algum $x \in [b, c]$.
Se $f(x) > f(b) = f(c)$, então, $x \neq b$ e $x \neq c$, logo, existe B centrada em x tal que

$$f(x) \geqslant f(t)\,; \forall t \in B \Rightarrow f'(x) = 0$$

Analogamente f assume mínimo em algum $u \in [b, c]$ se $f(u) < f(b) = f(c)$.
Então, $u \neq b$ e $u \neq c \Rightarrow f'(u) = 0$.
Por fim, se $f(x) \leqslant f(b) = f(c)$ e $f(u) \geqslant f(b) = f(c)$, então, $f(b) = f(c)$ é máximo e mínimo simultaneamente, logo, f é constante

$$\Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in \,]b, c[$$

■

Teorema 1.23 (Teorema do Valor Médio) *Seja f derivável e b, c reais com $b \leqslant c$. Então, existe $d \in]b, c[$ tal que $f'(d) = \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$.*

Demonstração:
Seja

$$\begin{aligned}
&g(x) = (c-b) f(x) - (x-b)(f(c) - f(b)) \\
&g(b) = (c-b) f(b) \\
&g(c) = (c-b) f(c) - (c-b)(f(c) - f(b)) \\
&g(c) = (c-b) f(b) \\
&\Rightarrow g(b) = g(c)
\end{aligned}$$

g é derivável $\Rightarrow \exists d \in]b, c[$ tal que $g'(d) = 0$.

$$\begin{aligned}
&g'(x) = (c-b) f'(x) - (f(c) - f(b)) \\
&\Rightarrow 0 = g'(d) = (c-b) f'(d) - (f(c) - f(b)) \\
&\Rightarrow f'(d) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}
\end{aligned}$$

■

1.5 Integral de Riemann

Definição 1.24 Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma *partição* de $[a, b]$ é a escolha de $\{t_i\}_{i=0}^{n} \in [a, b]$ tais que $t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ e $P = (t_0, t_1, ..., t_n)$.
A norma de P é $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, ..., n\}$.

Definição 1.25 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função limitada.
A *Soma de Riemann* de f relativa à partição $P = (t_0, t_1, ..., t_n)$ de $[a, b]$ é a escolha $\{c_i\}_{i=1}^{n}, c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ é

$$\boxed{S(f, P, \{c_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1})}$$

Definição 1.26 Dizemos que f é *Riemann Integrável* se existir

$$\lim_{|P| \to 0} S(f, P, \{c_i\})$$

para toda partição P de $[a, b]$ e escolha dos $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.
Neste caso escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

Exercício

1. Calcule $\int_0^1 x^2 dx$, usando $P = (t_i)$, onde $t_i = i/n, i = 0, ..., n$ e $c_i = t_i \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1})\right)$.

Definição 1.27 Uma *primitiva* de f é uma função F tal que $F' = f$.

Teorema 1.28 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *função integrável e* F *sua primitiva. Então*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Demonstração:
Seja $P = (t_0, t_1, ..., t_n)$ partição de $[a,b]$.

$$F(b) - F(a) = F(t_n) - F(t_{n-1}) + F(t_{n-1}) - F(t_{n-2}) + F(t_{n-2}) + ... + F(t_1) - F(t_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F(t_i) - F(t_{i-1})\ (1)$$

De $\dfrac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = F'(t_i)$ (Teorema 1.23 do Valor Médio), temos:

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

O lado esquerdo independe de P e $\{c_i\}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

■

Exemplo 1.12 Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$

Solução:

$$P = (t_i)\,, t_i = i/n$$

i) $c_i =$ algum irracional entre t_{i-1} e t_i

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(c_i)}_{0} (t_i - t_{i-1}) = 0$$

ii) $c_i =$ algum racional entre t_{i-1} e t_i

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(c_i)}_{1} (t_i - t_{i-1}) = 1 - 0 = 1$$

$\therefore f$ não é integrável.

□

1.6 Funções dadas por Integrais

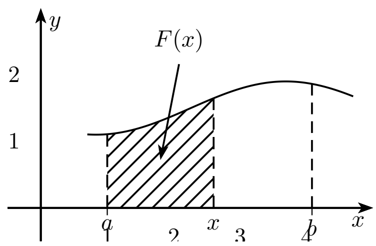


Figura 1.4: Integral

Seja f integrável em $[a, b]$

$$F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Teorema 1.29 *Seja f integrável em $[a, b]$ e contínua.*

Então existe $c \in [a, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

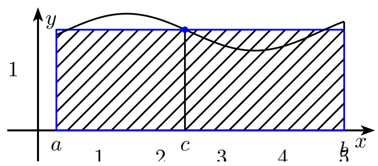


Figura 1.5

Demonstração:

Seja f contínua em $[a, b]$.
Então, f tem máximo (M) e mínimo (m) em $[a, b]$.

$$\Rightarrow m \leqslant f(x) \leqslant M$$
$$\Rightarrow \int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M dx$$
$$\Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$
$$\Rightarrow m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M$$

Pelo, teorema 1.15 do Valor Intermediário, temos

$\exists c \in [a, b]$tal que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

■

Teorema 1.30 *Seja f integrável em $[a,b]$, então, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é contínua em $[a,b]$.*

Demonstração:

Exercício

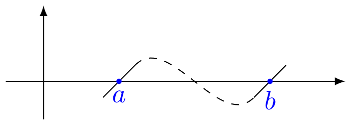
■

Teorema 1.31 *Seja f contínua em $[a,b]$, então, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é derivável em $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$.*

1.7 Exercícios Resolvidos

2. Sejam f uma função derivável e $a < b$ números reais tais que $f(a) = f(b) = 0$ e $f'(a)f'(b) > 0$. Prove que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Solução:
$f'(a)$ e $f'(b)$ são de mesmo sinal, vamos supor que $f'(a)$ e $f'(b) > 0$.



Neste caso, a inclinação das retas tangentes em a e b são crescentes. Basta mostrar que existem $x, y \in (a,b)$ tais que $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$. A tese sai do Teorema do Valor Intermediário (1.15).

f é derivável em a e $f'(a) > 0$, então existe f_1 contínua em a tal que $f(x) = f(a) + (x-a)f_1(x)$ e $f_1(a) = f'(a)$.

Como $f(a) = 0$, então $f(x) = (x-a)f_1(x)$. Como $f'(a) > 0$, fixe $\varepsilon = \dfrac{f'(a)}{2} > 0$.

Como f_1 é contínua em a, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|x-a| < \delta_1$, então

$$\Bigg| f_1(x) - \underbrace{f_1(a)}_{f'(a)} \Bigg| < \varepsilon = \frac{f'(a)}{2}.$$

$$|f_1(x) - f'(a)| < \frac{f'(a)}{2} \Leftrightarrow \frac{-f'(a)}{2} < f_1(x) - f'(a) < f'(a)$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(a)}{2} < f_1(x) < \frac{3f'(a)}{2}$$

$$\text{Tome } x \in (a, a+\delta_1). \text{ Como } f(x) = \underbrace{(x-a)}_{>0}\underbrace{f_1(x)}_{>0}, \text{ então } f(x) > 0.$$

f é derivável em b e $f'(b) > 0$, então existe f_2 contínua em b tal que
$$f(x) = f(b) + (x-b)f_2(x) \text{ e } f_2(b) = f'(b).$$
$$\text{Como } f'(b) > 0, \text{ fixe } \varepsilon = \frac{f'(b)}{2} > 0.$$
Como f_2 é contínua em b, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $|x-b| < \delta_2$, então
$$\left| f_2(x) - \underbrace{f_2(b)}_{f'(b)} \right| < \varepsilon = \frac{f'(b)}{2}.$$

$$|f_2(x) - f'(b)| < \frac{f'(b)}{2} \Leftrightarrow \frac{-f'(b)}{2} < f_2(x) - f'(b) < \frac{f'(b)}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(b)}{2} < f_2(x) < \frac{3f'(b)}{2}$$

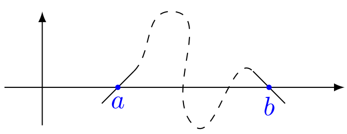
$$\text{Tome } y \in (b-\delta_2, b). \text{ Como } f(y) = \underbrace{(y-b)}_{<0}\underbrace{f_2(y)}_{>0}, \text{ então } f(y) < 0.$$

Conclusão: Como f é derivável, f é contínua, portanto, usando o TVI. (1.15), $\exists c \in (x, y) \subset (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. □

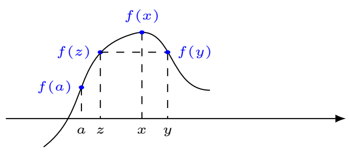
3. Sejam f uma função derivável em I e $a < b$ números reais em I tais que $f'(a)f'(b) < 0$. Prove que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Solução:

Note que $f'(a)$ e $f'(b)$ possuem sinais contrários. Suponhamos $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$, e suponha ainda que $f(a) \neq f(b)$.



(a) fig29



(b) fig30

Precisamos encontrar $x, y \in (a, b)$ com $x < y$ tal que $f(x) = f(y)$, e a tese sai do Teorema de Rolle (1.22).

Suponha que f é estritamente crescente, isto é, $\forall x, y; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Por hipótese, f é derivável em b, então existe f_1 contínua em a tal que $f(x) = f(b) + (x-b)f_1(x)$ e $f_1(b) = f'(b)$.

Lembrando que $f'(b) = f_1(b) < 0$, então $\exists\delta$ tal que $\forall y \in (b-\delta, b), f_1(y) < 0$.

Então, se f é estritamente crescente, $f(y) - f(b) < 0 \Rightarrow y - b < 0$
$\Rightarrow \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b} > 0 \Rightarrow f_(y) > 0$. Absurdo.

Concluímos que f não é estritamente crescente. Então, $\exists x, y \in (a, b)$ com $x < y$ tal que $f(x) \geqslant f(y)$.

1°caso) $f(x) = f(y)$. É imediato com o Teorema de Rolle.

2°caso) $f(x) > f(y)$. Se $f(a) < f(y)$, aplique o TVI e concluímos que $\exists z \in (a, x)$ tal que $f(z) = f(y)$.

Tome $z, y : z < y$ e conclui-se com o Teorema de Rolle (Fig. fig30).

Aplicando o TVI encontramos $c \in (x, y)$ tal que $f(c) = f(a)$.

$\square$

Capítulo 2

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

2.1 Curvas no $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) ; x_i \in \mathbb{R}; 1 \leqslant i \leqslant n\}$
Escrevemos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Definição 2.1 Uma curva em $\mathbb{R}$ é uma função $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.
$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ onde $x_i : I \to \mathbb{R}$.
γ é contínua se cada x_i for contínua.
γ é derivável se cada x_i for derivável e $\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), ..., x_n'(t))$
$\operatorname{Im}\gamma = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$
gráfico $\gamma = \{(t, \gamma(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n+1}$
onde: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = (x_0, (x_1, x_2, ..., x_n))$ e $\mathbb{R}^{n+1} = (x_0, x_1, ..., x_n)$.

Exemplo 2.1 Seja

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = (\cos t,\ \text{sen} t) ; t \in [0, 2\pi]$$

Solução:
Note que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 1$$
$$\Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 1$$

Para ver o ponto inicial basta ver que
para $t = 0 \Rightarrow (1, 0)$ e
para $t = 1 \Rightarrow (0, 1)$

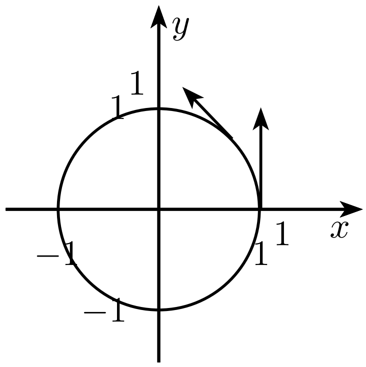


Figura 2.1: Circunferência

ou por derivadas $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ em $[0, \pi/2]$ a derivada decresce, então, x tende a 0, portanto, o sentido de rotação é anti-horário.

Então, a $\operatorname{Im} \in \mathbb{R}^2$ é uma circunferência de raio unitário.

Seu gráfico é $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ $\gamma(t) = \{(t, \cos t, \operatorname{sen} t)\,; t \in [0, 2\pi]\}$

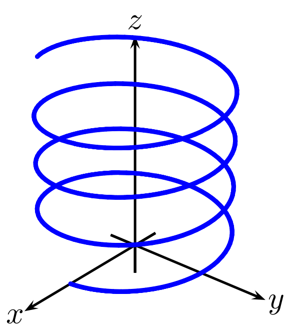


Figura 2.2: Hélice

□

Exemplo 2.2 Seja $\gamma(t) = \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t\right), t \geqslant 0$

Solução:
Calculando a norma do vetor podemos ver a região onde t varia.

$$\|\gamma(t)\| = e^{-t}$$

Calculando a derivada podemos ver o sentido de crescimento da curva.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t, -e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t\right)\\ &= e^{-t}\left(-\cos t - \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t + \cos t\right)\end{aligned}$$

Portanto a $\operatorname{Im}\gamma$ é dada pela figura a seguir.

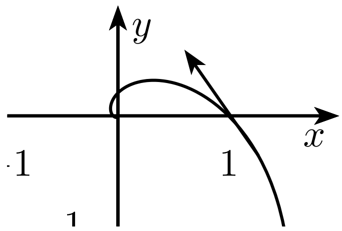


Figura 2.3

□

Exemplo 2.3 Seja

$$\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi]$$

Solução:

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}$$
$$x^2(t) = 4\cos^2 t \Rightarrow \frac{x^2(t)}{4} = \cos^2 t$$
$$y^2(t) = \operatorname{sen}^2 t$$
$$\left[\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1\right]$$
$$\operatorname{Im}\gamma \subset \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$$

A reta tangente a $\gamma(t)$ em $\gamma(t_0)$ é

$$r : x = \gamma(t_0) + s.\gamma'(t_0)$$
$$\text{p/ } t_0 = {}^3\!/\!_4 \Rightarrow \gamma(t_0) = \left(2.-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\sqrt{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, \cos t)$$
$$\gamma'(t_0) = \left(-2\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$r : x = \left(-\sqrt{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + s\left(-\sqrt{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), s \in \mathbb{R}$$

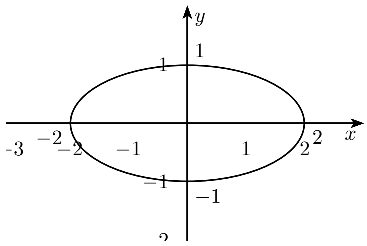


Figura 2.4: Elipse

□

Exemplo 2.4 Seja

$$\gamma(t) = (t, \cos t,\ \mathrm{sen} t), t \geqslant 0$$

Solução:

$$\gamma'(t) = (1, -\,\mathrm{sen} t, \cos t)$$
$$y^2 + z^2 = 1$$

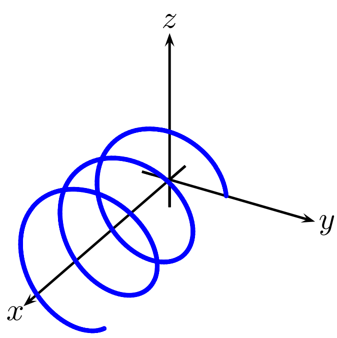


Figura 2.5: Hélice

□

Exemplo 2.5 Seja

$$\gamma(t) = \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\,\mathrm{sen}t, e^{-t}\right), t \geqslant 0$$

Solução:

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{2}e^{-t}$$
$$x^2 + y^2 = \left(e^{-t}\right)^2 = z^2$$

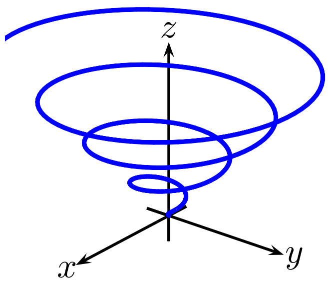


Figura 2.6: Hélice crescente

□

2.2 Comprimento de Curvas

Definição 2.2 Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva com derivada contínua em $[a,b]$. O comprimento de γ é:

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt}$$

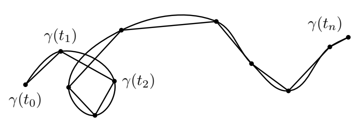


Figura 2.7: Comprimento de curva

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma'(c_i)\| \Delta t_i$$

fazendo $n \to \infty$ temos

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

■

Exemplo 2.6 Seja

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \text{ sen} t), t \in [0, 2\pi]$$

Solução:

$$L(t) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$\gamma'(t) = (1, -\text{sen} t, \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow L(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2}$$

□

Exemplo 2.7 Calcule o comprimento de uma circunferência de raio r.

Solução:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\,\mathrm{sen} t \end{array}\right\} \gamma(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen} t), t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$\gamma'(t) = (-r\,\mathrm{sen} t, r\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = r$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = rt|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

□

Exemplo 2.8 Calcule o comprimento de uma elipse.

Solução:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x(t) = a\cos t$$

$$y(t) = b\,\mathrm{sen} t$$

Não é possível calcular o comprimento de uma elipse apenas com técnicas de integração.

□

Exemplo 2.9 Calcule o comprimento:

a) $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen} t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

b) $\gamma(t) = (\cos 2t,\ \mathrm{sen} 2t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

2.3 Funções de Várias Variáveis a Valores Reais

Definição 2.3 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é uma tripla $(f, A, \mathbb{R})$ onde f é uma regra que associa a cada ponto de A um único ponto em $\mathbb{R}$.

Notação:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

A imagem de f é $\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in A\} = f(A)$
O gráfico de f é $\operatorname{graf} f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 2.4 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a *hipersuperfície* de nível de c de f é $f^{-1}(c) = \{x \in A : f(x) = c\}$.

Observação:
Se $n = 2$ $f^{-1}(c)$ é uma *curva* em $\mathbb{R}^2$. Se $n = 3$ $f^{-1}(c)$ é uma *superfície* em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.10 Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$
Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

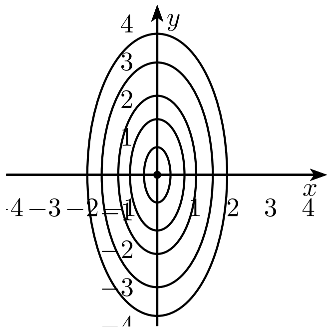
Solução:
Verifiquemos o valor de $f(x, y)$ quando comparamos com um valor c.

$$\begin{aligned} & c < 0 : f^{-1}(c) = \emptyset \\ & c = 0 : f^{-1}(c) = \{(0,0)\} \\ & c > 0 : f^{-1}(c) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\right\} \Rightarrow 2x^2 + y^2 = c \end{aligned}$$

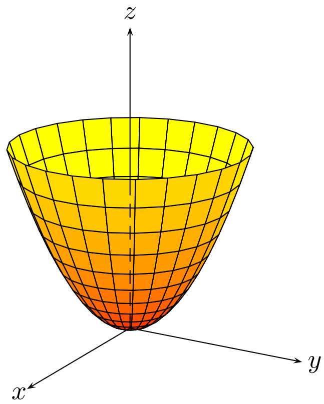
Figuras (2.8a) e (2.8b).

□

Exemplo 2.11 Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$
Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.



(a) Curva de nível: elipse



(b) Gráfico: elipsóide

Figura 2.8: Elipse e elipsóide

Solução:

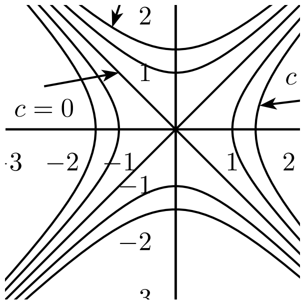
$$
\begin{aligned}
&c < 0 : f^{-1}(c) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\right\} \\
&\Rightarrow x^2 - y^2 = c < 0 \\
&\Rightarrow y^2 - x^2 = -c > 0 \\
&c = 0 : f(x, y) = 0 \\
&\Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \\
&\Rightarrow x^2 = y^2 \\
&\Rightarrow |x| = |y| \\
&\Rightarrow y = \pm x \\
&c > 0 : x^2 - y^2 = c > 0
\end{aligned}
$$

Figuras (2.9a) e (2.9b).

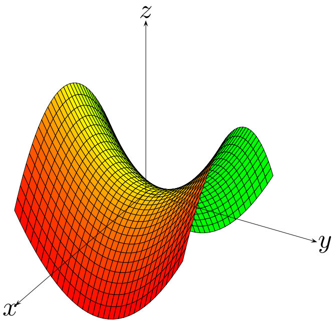
□

Exemplo 2.12 Seja $f(x, y) = \dfrac{y}{x - 1}$

Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.



(a) Curva de nível: hiperbolóide



(b) Gráfico: parabolóide hiperbólico

Figura 2.9: Hiperbolóide e parabolóide hiperbólico

Solução:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \frac{y}{x-1} &= c \\ y &= c\,(x-1) \\ y &= cx - c \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.13 Seja $f\,(x, y) = \ln\,(x - y)$

Determine o domínio e a imagem, desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

Solução:

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\right\}$$

$$\begin{aligned} &\ln\,(x-y) = c \\ &\Rightarrow x - y = e^c \\ &\Rightarrow y = x - e^c \end{aligned}$$

□

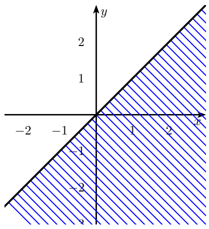


Figura 2.10: Domínio de $f(x,y)$

Exemplo 2.14 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Solução:

$$c < 0 : f^{-1}(c) = \emptyset$$
$$c = 0 : f^{-1}(0) = \{(0,0,0)\}$$
$$c > 0 : x^2 + y^2 + z^2 = c > 0$$

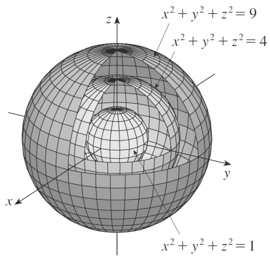


Figura 2.11: Curva de nível: conjunto de esferas.

Obs: Impossível desenhar o gráfico de $f(x,y)$, pois está em $\mathbb{R}^4$. □

Exemplo 2.15 $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2$

Solução:

$$c < 0 : f^{-1}(c) = \emptyset$$
$$c = 0 : f^{-1}(0) = \{(0,0,0)\}$$
$$c > 0 : x^2 + 4y^2 + z^2 = c > 0$$

□

Exemplo 2.16 $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$

2.4 Limite

Definição 2.5 (Ponto de acumulação) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. O ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é de *acumulação* se $B_\varepsilon(x_0) : \{x_0\} \cap A \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$.

Exemplo 2.17 Seja $A = [0, 1]$.
1 é ponto de acumulação.

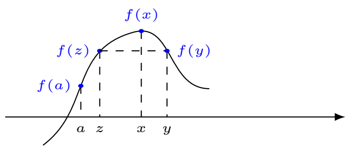


Figura 2.12: Limite

Exemplo 2.18 Seja $A = [0, 1[\cup \{2\}$.
2 não é ponto de acumulação.

Definição 2.6 (Limite) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e x_0 ponto de acumulação de A. Dizemos que f tem *limite* L em x_0 se dada uma bola centrada em L, $B_\varepsilon(L)$, existe bola centrada em x_0, $B_\delta(x_0)$, tal que $f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$.

Notação: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Em outras palavras,
Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemplo 2.19 Seja $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x,y) = \dfrac{-x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$. Calcule o limite da função quando (x, y) tende a $(0, 0)$.

Solução:
Tomando duas retas que passam no ponto $(0, 0)$, temos:
$f(x, 0) = -1$ e $f(0, y) = 1$
Portanto, o limite não existe em $(0, 0)$. □

Teorema 2.7 (Função Composta) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e x_0 ponto de acumulação de A $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Seja ainda γ uma curva contínua tal que $\gamma(t) \in A, \forall t \neq t_0$ e $\gamma(t_0) = x_0$.*
Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então $\lim\limits_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L$.

Demonstração:
Sejam

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f \circ \gamma &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \quad t \to f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

Hipótese, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então, dada $B_\varepsilon(L) \Rightarrow \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$.

γ é contínua, então, dada $B_\delta \underbrace{(x_0)}_{\gamma(t_0)}$, existe $B_r(t_0)$ tal que $\gamma(B_r(t_0)) \subset B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} & f(\gamma(B_r(t_0))) \subset f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L) \\ & \Rightarrow \lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L \end{aligned}$$

■

Obs: Se γ_1 e γ_2 são curvas como no teorema e $\lim\limits_{t \to t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim\limits_{t \to t_0} f(\gamma_2(t))$, então, $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Exemplo 2.20 No exemplo anterior usamos:

Solução:
$\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$,
então, $f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = -1$ e $f(\gamma_2(t)) = f(0, t) = 1$ □

Teorema 2.8 (do confronto) *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, x_0 ponto de acumulação de A e f, g, h funções de A em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para $x \in B_r(x_0) \cap A$ se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ então, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.*

Demonstração:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow$ dada $B_\varepsilon(L)$ existe $B_{\delta_1}(x_0)$ tal que $f(B_{\delta_1}(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$
$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L \Rightarrow$ dada $B_\varepsilon(L)$ existe $B_{\delta_2}(x_0)$ tal que $h(B_{\delta_2}(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(L)$
Seja $z \in B_{\delta_1}(x_0) \cap B_{\delta_2}(x_0) \cap A$, então

$$
\begin{aligned}
& f(z) \leqslant g(z) \leqslant h(z) \\
& |f(z) - L| < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{-\varepsilon < f(z) - L} < \varepsilon \\
& |h(z) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \underbrace{h(z) - L < \varepsilon} \\
& -\varepsilon < f(z) - L \leqslant g(x) - L \leqslant h(z) - L < \varepsilon \\
& |g(x) - L| < \varepsilon \\
& \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L
\end{aligned}
$$

■

Corolário 2.9 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, x_0 ponto de acumulação de A e f, g funções de A em $\mathbb{R}$ com $|g(x)| < M$ (limitada), para $x \in B_r(x_0) \cap A$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Então, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
& |f(x) g(x)| < |f(x)| M \\
& -M |f(x)| < f(x) g(x) < M |f(x)| \\
& \lim_{x \to x_0} \pm M |f(x)| = 0 \\
& \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0
\end{aligned}
$$

■

Exercícios
Prove que:

4. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - L = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

6. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = L, (h \in \mathbb{R}^n)$

7. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, então, $\exists B_r(x_0)$ tal que $f(x) > 0, \forall x \in B_r(x_0)$.

Nota: As propriedades de limite são as mesmas das funções de uma variável.

Exemplo 2.21 Calcule $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$

Solução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \overbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}^{\text{limitada}} = 0$$

Pois $0 \leqslant x^2 \leqslant x^2+y^2 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$ é limitada. □

Exemplo 2.22 Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Solução:
Tomemos duas curvas:

$$\gamma_1(t) = (t,0) \Rightarrow f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = \frac{t^2}{t^2+0} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to0} f(\gamma_1(t)) = 1$$
$$\gamma_2(t) = (0,t) \Rightarrow f(\gamma_2(t)) = f(0,t) = \frac{0}{0+t^2} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to0} f(\gamma_2(t)) = 0$$
$$\therefore \lim_{t\to0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to0} f(\gamma_2(t))$$

Portanto, o limite não existe em $(0,0)$. □

Exemplo 2.23 Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

Solução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}^{\text{limitada}} \operatorname{sen}(x^2+y^2) = 0$$

□

Exemplo 2.24 Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x-y^7}$

Solução:
Se tomarmos $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$

$$\Rightarrow \lim_{t\to0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to0} f(\gamma_2(t)) = 0$$

Mas não é suficiente, pois pode haver infinitas curvas que passem no ponto, então, vamos usar as curvas de nível para ver o comportamento da função.

Curva de nível de $f : f(x,y) = c$

$$\frac{xy}{2x-y^7} = c \Rightarrow x = \frac{y^7 c}{2c-y}$$
$$\gamma(t) = \left(\frac{t^7 c}{2c-t}, t\right)$$
$$t = 0 \Rightarrow \gamma(0) = (0,0)$$
$$f(\gamma(t)) = c \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = c$$

O limite de $f(\gamma(t))$ pode assumir qualquer valor. Portanto, o limite de $f(x,y)$ não existe em $(0,0)$. $\square$

2.5 Continuidade

Definição 2.10 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ ponto de acumulação de A. Dizemos que f é *contínua* em x_0 se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Exemplo 2.25

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução:
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe, pois, tomando $(t,0)$ e $(0,t)$ verificamos limites diferentes. Então f não é contínua em $(0,0)$ mas nos outros pontos ela é. $\square$

Exemplo 2.26

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução:
A função é contínua em $(0,0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0)$. $\square$

Exemplo 2.27

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y^8}{y^8+x^4}\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução:

$\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada e $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y^8}{y^8+x^4}\right)$ também é limitada, mas não resolve a equação, mas $\dfrac{y^8}{y^8+x^4}$ é limitada, então, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen} x^2 = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq f(0) = 1$$

Portanto, $f(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$.

□

Teorema 2.11 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}$ e funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset B$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $f(x_0)$ então, $g \circ f$ é contínua em x_0.*

Demonstração:

g é contínua em $f(x_0) \Rightarrow$ dado $B_\varepsilon(g(f(x_0)))$ existe $B_{\delta_1}(f(x_0))$ tal que

$$g\left(B_{\delta_1}(f(x_0)) \cap A\right) \subset B_\varepsilon(g(f(x_0)))$$

f é contínua em $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow$ para $B_{\delta_1}(f(x_0))$ existe $B_{\delta_2}(x_0)$ tal que

$$f\left(B_{\delta_2}(x_0) \cap A\right) \subset B_{\delta_1}(f(x_0))$$

$$g\left(f\left(B_{\delta_2}(x_0) \cap A\right)\right) \subset g\left(B_{\delta_1}(f(x_0))\right) \subset B_\varepsilon(g(f(x_0)))$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)) \Rightarrow g \circ f$ é contínua em x_0. ■

Teorema 2.12 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, \gamma : I \to \mathbb{R}^n, \gamma(I) \subset A$. Se γ é contínua em $t_0 \in I$ e f é contínua em $\gamma(t_0) \in A$ então, $f \circ \gamma$ é contínua em t_0.*

Capítulo 3

Derivadas

3.1 Derivadas Parciais

Definição 3.1 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e x_0 ponto interior de A. Definimos a *derivada parcial* de f em x_0 na direção e_i (base canônica) por

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}}$$

Na prática, basta derivar f em relação à variável x_i, considerando as outras como constantes.

Exemplo 3.1 $f(x, y) = \arctan\left(x^2 + y^2\right)$

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)} 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)} 2y$$

□

Exemplo 3.2 $z = f(x, y)$ é solução da equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução:
Note que $z^2(x, y)$. Derivando em x, temos:

$$
\begin{aligned}
2x + 2z\frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x}{f(x,y)} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{y}{f(x,y)}
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 3.3 Suponha f contínua e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe. Então, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Solução:
f não varia na direção do eixo x. □

Exemplo 3.4 Seja

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

Solução:
Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$ podemos aplicar a regra do quociente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2\left(x^2+y^2\right) - \left(x^3 - y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2x^2y(1+x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

Em $(0,0)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1-0}{h}
\end{aligned}
$$

que não existe. □

Interpretação geométrica das derivadas parciais

3.2 Derivadas Direcionais

Definição 3.2 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e x_0 ponto interior de A e v um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. Definimos a *derivada direcional* de f em x_0 na direção de v por

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}}$$

Exemplo 3.5 Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Solução:
Seja $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ com $a^2 + b^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\overbrace{((0,0) + h(a,b))}^{(ha,hb)} - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^4ab^3}{h^2(a^2+h^4b^6)} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Então, existe a derivada direcional e é igual a 0 em todas as direções.
Vamos ver agora se f é contínua.
Seja $\gamma(t) = \left(t^3, t\right)$

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{t^6+t^6} = \frac{1}{2}\,(\neq 0 = f(0,0))$$

Portanto, f não é contínua em $(0,0)$. □

3.3 Diferenciabilidade de Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$

Relembrando Cálculo I, temos:
f é derivável em x_0 se

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}=0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\,h}{|h|}=0$$

Onde $f'(x_0)$ é um número real que deve existir e h é um vetor.

Definição 3.3 (Transformação linear) Uma *transformação linear* $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma função tal que

i) $T(x+y)=T(x)+T(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^n$

ii) $T(\alpha x)=\alpha T(x),\forall x\in\mathbb{R}^n$ e $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Definição 3.4 A matriz de T nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é $[T]=(a_{ij})_{m\times n}$ onde $a_{ij}=T(e_j)_i$ (i-ésima coordenada de $T(e_j)$, e_j da base canônica de $\mathbb{R}^n$).

Usando isso, temos, $T(x)=[T]_{m\times n}X_{n+1}$.

Quando $n=1$, f ser diferenciável em x_0 é dizer que existe $T_{x_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T_{x_0}(h)}{|h|}=0$$

e nesse caso, $[T]=f'(x_0)$.

Definição 3.5 (Função diferenciável) Seja $A\subset\mathbb{R}^n$, x_0 ponto interior de A e $f:A\to\mathbb{R}$. Dizemos que f é diferenciável em x_0 se existir $T_{x_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ linear tal que

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T_{x_0}(h)}{\|h\|}=0}\ (1)$$

Onde: $\|h\|$ é a norma do vetor devido ao $\mathbb{R}^n$ e $h\in\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.6 *Se existe T_{x_0} nas condições acima então ela é única.*

Demonstração:
Sejam T_{x_0} e L_{x_0} transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo a equação (1), então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{T_{x_0}(h) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

Escolha $h = h_i e_i$, e_i é da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{T_{x_0}(h_i e_i) - L_{x_0}(h_i e_i)}{\|h_i e_i\|} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{h_i\left(T_{x_0}(e_i) - L_{x_0}(e_i)\right)}{|h_i|} = 0$$

Como, $\lim\limits_{h_i\to 0} \dfrac{h_i}{|h_i|} = \nexists$ não existe

$$\Rightarrow T_{x_0}(e_i) - L_{x_0}(e_i) = 0$$
$$\Rightarrow T_{x_0}(e_i) = L_{x_0}(e_i), \forall i = 1, 2, ..., n$$
$$\Rightarrow L_{x_0} = T_{x_0}$$

■

Teorema 3.7 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, diferenciável em x_0, então*

$$[T_{x_0}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}_{1\times n}$$

Demonstração:
f é diferenciável em x_0, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

Com $h = h_i e_i$, com $h_i \to 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{h_i\to 0}\frac{f\left(x_0+h_ie_i\right)-f\left(x_0\right)-h_iT_{x_0}\left(e_i\right)}{h_i}=0\\
&\Rightarrow \lim_{h_i\to 0}\frac{f\left(x_0+h_ie_i\right)-f\left(x_0\right)}{h_i}-\lim_{h_i\to 0}\frac{\cancel{h_i}T_{x_0}\left(e_i\right)}{\cancel{h_i}}=0\\
&\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0\right)-T_{x_0}\left(e_i\right)=0\\
&\Rightarrow T_{x_0}\left(e_i\right)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0\right),i=1,2,...,n
\end{aligned}$$

■

Nota: T_{x_0} é a diferencial de f em x_0.

Teorema 3.8 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em x_0. Então, f é contínua em x_0.*

Demonstração:
Seja $E\left(h\right)=f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-T_{x_0}\left(h\right)$, f é diferenciável em x_0, então

$$\lim_{h\to 0}\frac{E\left(h\right)}{\|h\|}=0$$

T_{x_0} é contínua

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}T_{x_0}\left(h\right)=T\left(0\right)=0$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}E\left(h\right)=\lim_{h\to 0}\overbrace{\|h\|}^{0}\overbrace{\frac{E\left(h\right)}{\|h\|}}^{0}=0\\
&0=\lim_{h\to 0}E\left(h\right)=\lim_{h\to 0}\left(f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-T_{x_0}\left(h\right)\right)\\
&0=\lim_{h\to 0}\left(f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)\right)-\lim_{h\to 0}\overbrace{T_{x_0}\left(h\right)}^{0}\\
&\lim_{h\to 0}f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em x_0. ■

Exemplo 3.6 Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Esta função é diferenciável em $(0,0)$?

Solução:

f é contínua em $(0,0)$ (tem chance de ser diferenciável, mas o teorema diz o contrário.)

Então, f ser diferenciável em $(0,0)$

$\Rightarrow \exists T_{x_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

Melhorando, para $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) - T_{(0,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Se existe $T_{(0,0)}$, ela é única e

$$\left[T_{(0,0)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix}$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{h} - f(0,0)}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^{0} - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow T_{(0,0)}(h,k) = \left[T_{(0,0)}\right] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - 0 - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3 - h\left(h^2+k^2\right)}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}$$

Vamos chamar $\dfrac{-hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}} = g(h,k)$

Escolhendo $\gamma(t) = (t,t)$, temos:

$$\lim_{t\to 0} g(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{\left(2t^2\right)^{3/2}} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{2\sqrt{2}} \frac{t^3}{|t|^3} = \nexists$$

Logo, f não é diferenciável em $(0,0)$. □

Teorema 3.9 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, x_0 interior a A e $f : A \to \mathbb{R}$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ são contínuas em x_0, então f é diferenciável em x_0.*

Demonstração:
Como A é aberto, existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), contida em A. Sejam h e k tais que $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Temos

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\underbrace{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}_{(I)}+\underbrace{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}_{(II)}$$

Fazendo $G(x) = f(x, y_0 + k)$, pelo TVM 1.23 existe $\overline{x}$, entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$(I) = G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(\overline{x})\, h = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + k)\, h$$

Do mesmo modo, existe $\overline{y}$, entre y_0 e $y_0 + k$ tal que

$$(II) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y})\, k$$

Assim,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + k)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y})\, k$$

Subtraindo a ambos os membros da igualdade acima $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$ obtemos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k =$$
$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] k$$

Segue que

$$\left|\frac{f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)h-\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)k}{\|(h,k)\|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overline{x},y_0+k\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\right|}_{(III)} \overbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}^{\text{limitada}} +$$

$$+\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,\overline{y}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\right|}_{(IV)} \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Pela continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em (x_0,y_0), as expressões (III) e (IV) tendem a zero, quando $(h,k)\to(0,0)$, e, portanto,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)h-\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)k}{\|(h,k)\|}=0$$

logo, f é diferenciável em (x_0,y_0).

■

3.4 Espaço Tangente

Definição 3.10 Seja $f : A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferenciável em x_0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-T_{x_0}\left(h\right)}{\|h\|}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)-T_{x_0}\left(x-x_0\right)}{\|x-x_0\|}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0\right)\left(x_i-x_{0_i}\right)}{\|x-x_0\|}=0$$

Nota: Pode-se escrever, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x$.

Então, seja, $T\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}\left(x_0\right)\left(x_i-x_{0_i}\right)$

Temos, $E\left(x\right)=f\left(x\right)-T\left(x\right)$

Portanto, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{E(x)}{\|x - x_0\|} = 0$
Então, $T : A \to \mathbb{R}$ é a "melhor"aproximação afim de f em torno de x_0.

Definição 3.11 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciável em x_0. O subespaço afim de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$x_{n+1} - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0)(x_i - x_{0_i})$$

$$\boxed{x_{n+1} - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{0_1}) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)(x_n - x_{0_n})}$$

é chamado *espaço tangente* ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$, $T_{(x_0, f(x_0))}\text{graf } f$.
Obs: $\dim T_{(x_0,f(x_0))}\text{graf } f = n$.
A equação para o plano tangente de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ é

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Existe uma direção em $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a $T_{(x_0,f(x_0))}\text{graf } f$, também chamado de *vetor normal*. Sua direção é dada por

$$\overrightarrow{n} = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), ..., f_{x_n}(x_0), -1) = (\nabla f(x_0), -1)$$

Em $\mathbb{R}^2$ o vetor normal é

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) = (\nabla f(x_0, y_0), -1)$$

A *reta normal* ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ $(\mathbb{R}^2)$ é

$$v = v_0 + t(\nabla f(x_0, y_0), -1)$$

$$\boxed{r : (x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)}$$

Exemplo 3.7 Seja $f(x, y) = 3xy^2 - y$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(2, 1)$.

Solução:
Plano tangente

$$\begin{aligned}
&z - f(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)\\
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 11\\
&f(2,1) = 5
\end{aligned}$$

A equação do plano tangente é

$$z - 5 = 3(x-2) + 11(y-1)$$

Reta normal

$$r : (x,y,z) = (2,1,f(2,1)) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1), -1\right), t \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$r : (x,y,z) = (2,1,5) + t(3,11,-1)$$

□

Exemplo 3.8 Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que o gráfico de f não admite plano tangente em $(0,0,f(0,0))$.

Solução:
f não é contínua, pois f não é diferenciável em $(0,0,f(0,0))$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,0)h - f(0,0)}{h} = 0\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0
\end{aligned}$$

Equação do plano tangente

$$\begin{aligned}
&z - 0 = 0(x-0) + 0(y-0)\\
&z = 0
\end{aligned}$$

A curva $\gamma(t) = (t, t, f(t, t))$ tem imagem em graf(f) e

$$\gamma'(t) = \left(1, 1, \frac{d}{dt} f(t, t)\right) = \left(1, 1, \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{2t^2}\right)\right) = (1, 1, 1/2)$$

em particular, $\gamma'(0) = (1, 1, 1/2) \notin \pi : z = 0$ □

3.5 Regra da Cadeia

Dois casos:

1. $\left.\begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \gamma : I \subset \mathbb{R} \to A \end{array}\right\} (f \circ \gamma) : I \to \mathbb{R}$

2. $\left.\begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g : B \subset \mathbb{R}^n \to A \end{array}\right\} (f \circ g) : B \to \mathbb{R}$

Caso 1

Lema 3.12 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e f diferenciável em x_0. Existe $\varphi : A \to \mathbb{R}$ contínua em x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle + \varphi(x) \,.\, \|x - x_0\|$$

Demonstração:
f é diferenciável em x_0, então

$$f(x) - f(x_0) = T_{x_0}(x - x_0) + E(x) = \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle + E(x)$$

Defina

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{E(x)}{\|x - x_0\|} & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

φ é contínua, pois

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

■

Teorema 3.13 *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *$A$ aberto,* $x_0 \in A$ *e* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *tais que* $\gamma(I) \subset A$ *e* $\gamma(t_0) = x_0$. *Se γ é diferenciável em t_0 e f é diferenciável em* $x_0 = \gamma(t_0)$, *temos:*

$$\left.\frac{d}{dt} f \circ \gamma \right|_{t=t_0} = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(t_0) \rangle$$

Demonstração:

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \varphi(x) \|x - x_0\|$$

Fazendo $x = \gamma(t)$, temos

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle + \varphi(\gamma(t)) \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|$$

dividindo ambos os membros por $t - t_0$ e derivando, temos:

$$\lim_{t \to t_0} \left.\frac{d}{dt} f \circ \gamma \right|_{t=t_0} = \left\langle \nabla f(x_0), \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\rangle + \lim_{t \to t_0} \varphi(\gamma(t)) \frac{\overbrace{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}^{0}}{t - t_0} = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(t_0) \rangle$$

■

- Se γ é curva de nível c de f

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(\gamma(t)) = c \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} f \circ \gamma = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

- Seja u unitário e f diferenciável

$$\gamma(t) = x_0 + tu$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} &= \langle \nabla f(x_0), u \rangle \\ \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) &= \langle \nabla f(x_0), u \rangle = \|\nabla f(x_0)\| \cos \theta \end{aligned}$$

Lembrando a definição de derivada direcional na seção 3.2 pág. 39.

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to A$ curva de nível (diferenciável)
Defina

$$\begin{aligned}
&(f \circ \gamma)(t) = c \\
&\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}c \\
&\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)
\end{aligned}$$

Caso 2
Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $\operatorname{Im} g \subset D_f$, temos, $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$C^k(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{R}^n : \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \text{ é contínua} \right\}$$

α é multi-índice de ordem k.
$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é multi-índice de ordem k se $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$

Exemplo 3.9 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\alpha = (1, 0, 2) \\
&\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}
\end{aligned}$$

Exemplo 3.10 $c^0 = \{f : A \to \mathbb{R}^n : f \text{ é contínua}\}$

Teorema 3.14 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funções com A e B abertos e $g(B) \subset A$.*
Se $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$ e $f(x,y)$ são de classe C^1, então, $(f \circ g)(u,v)$ é de classe C^1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v))\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v))\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) \\
\frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v))\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v))\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)
\end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\begin{bmatrix} f_u & f_v \end{bmatrix} = \nabla f.dg = (f_x, f_y) \begin{bmatrix} g_1 u & g_1 v \\ g_2 u & g_2 v \end{bmatrix}$$

Demonstração:

$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ basta "congelar" v.
Seja v constante, então, $g(u, v_0)$ dá uma curva em A.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)(u, v_0) &= \left\langle \nabla f(g(u, v_0)), \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}\right) \right\rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v_0)) \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v_0)) \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v_0) \\
\frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)(u_0, v) &= \left\langle \nabla f(g(u_0, v)), \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial v}\right) \right\rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(g(u_0, v)) \frac{\partial g_1}{\partial v}(u_0, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u_0, v)) \frac{\partial g_2}{\partial v}(u_0, v)
\end{aligned}
$$

■

Exercício

8. Escreva essas fórmulas para $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.11 Seja f de classe C^1. Defina $z(u, v) = f\left(\underbrace{u^2 + v^2}_{x}, \underbrace{uv}_{y}\right)$.

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Solução:
Note que $g(u, v) = \left(u^2 + v^2, uv\right)$ e $z = (f \circ g)(u, v)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} f \circ g = f_x\left(u^2 + v^2, uv\right) 2u + f_y\left(u^2 + v^2, uv\right) v \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} f \circ g = f_x\left(u^2 + v^2, uv\right) 2v + f_y\left(u^2 + v^2, uv\right) u
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 3.12 Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Como achar o vetor tangente a interseccção de duas superfícies de nível de f e g?

Solução:

$\gamma' \perp \nabla f$ e $\gamma' \perp \nabla g \Rightarrow \gamma' \parallel \nabla f \times \nabla g$
γ' é paralelo ao produto vetorial entre ∇f e ∇g.

Por exemplo, seja
$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (nível 2) $g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ (nível 0)

$$\begin{aligned}
&\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, \pm 1)\\
&\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\\
&\gamma' = \nabla f \times \nabla g\\
&\gamma' = (2x,2y,2z)\times(2x,2y,-2z)\\
&\gamma' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = (-8yz, 8xz, 0)\\
&\Rightarrow \gamma' \parallel (-yz, xz, 0)
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.15 (de Schwarz) *Seja $F : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se f é de classe C^2, então,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

3.6 Teorema da Função Implícita

Definição 3.16 Seja $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada implicitamente por F se

$$F(x, g(x)) = 0, \forall x \in D_g$$

Suponha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada implicitamente por $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e g e F são diferenciáveis.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F\ \underbrace{(x, g(x))}_{(x_1,\dots,x_{n+1})} = 0\\
&x = (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Obtemos $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ da seguinte forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

Aplicando $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ dos dois lados.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, g(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}.0 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \overbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}^{0} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}}$$

Exemplo 3.13 Seja

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$F(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 3$$

supõe que $g(x)$ tal que $F\left(x, \underbrace{g(x)}_{y}\right) = 0$ é diferenciável. Calcule $g'(x)$.

Solução:

$$g'(x) = \frac{-F_x}{F_y}$$

$$\begin{cases} F_x = y + 3x^2 \\ F_y = 3y^2 + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-\left(y + 3x^2\right)}{3y^2 + x} = \frac{-\left(g(x) + 3x^2\right)}{3g^2(x) + x}$$

□

Exemplo 3.14 Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solução:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z}$$

□

Exemplo 3.15 Sejam $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas implicitamente por:

$$\begin{cases} F\left(x, y\left(x\right), z\left(x\right)\right) = 0 \\ F\left(x, y\left(x\right), z\left(x\right)\right) = 0 \end{cases}$$

Calcule y' e z'.

Solução:

$$\begin{cases} F_x + F_y.y' + F_z.z' = 0 \\ G_x + G_y.y' + G_z.z' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_y.y' + F_z.z' = -F_x \\ G_y.y' + G_z.z' = -G_x \end{cases}$$

tem solução única se, e somente se,

$$\det\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix} \neq 0$$

se vale isso, então, por Cramer, temos:

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

□

Teorema 3.17 *Seja $F : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e seja $x_0 = \left(x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_{n-1}}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F\left(x_0, y_0\right) = 0$. Se $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\left(x_0, y_0\right) \neq 0$ então existe abertos $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $B \subset \mathbb{R}$ com $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tais que para cada $x \in A$ existe um único $y = g(x)$ tal que $F\left(x, y\right) = 0$ em $A \times B$.*

A função $g(x)$ é diferenciável em A e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}\left(x\right) = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\left(x, y\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\left(x, y\right)}$$

onde, $y = g\left(x\right)$.

Demonstração:
Sem perda de generalidade, façamos $n = 2$.
Suponhamos $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) > 0$.

F de classe C^1: $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ são contínuas, então, F é diferenciável, portanto, F é contínua.

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \exists D = B_\varepsilon (x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D$.

Para y_1 e y_2 tal que $y_1 < y_0 < y_2$ temos,

$$F(x_0, y_1) < 0 \text{ e } F(x_0, y_2) > 0 \, (1)$$

onde $(x_0, y_1) \, \text{e} \, (x_0, y_2) \in D$

$F(x_0, y)$ é crescente em $[y_1, y_2]$.

Seja $B =]y_1, y_2[$. Note que y_0 é o único ponto onde $F(x_0, y)$ se anula.

De (1) e da continuidade de F temos que, existe A (aberto) $\subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ tal que para $x \in A$ e $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ temos $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$.

F contínua em D implica $\exists y \in B$ tal que $F(x, y) = 0$, tal y é único, pois $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ em D, implica que, $F(x, y)$ é crescente para cada $x \in A$ fixado.

Logo, $x \mapsto y$. Defina $y = g(x), g : A \to B$.

Continuidade de g.

Para cada par $(x, g(x))$ em $A \times B$, temos $F(x, g(x)) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) > 0$, então dados $\overline{y_1}$ e $\overline{y_2}$ com $y_1 < \overline{y_1} < g(x) < \overline{y_2} < y_2$ temos, repetindo o argumento, fazendo $x = x_0$ e $g(x) = y_0$, temos que existe $A_1 \subset A, x \in A$, tal que $\overline{x} \in A$, temos, $g(\overline{x}) \in]\overline{y_1}, \overline{y_2}[\Rightarrow g(A_1) \subset]\overline{y_1}, \overline{y_2}[$, isto implica que g é contínua $\forall x \in A$.

Por hipótese, F é diferenciável, pelo Lema 3.12 pág. 48, temos,

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \varphi(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

φ contínua em $(x_0, y_0) = (x_0, g(x_0))$

multiplicando $\varphi(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ por $\dfrac{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}$, obtemos

$$\varphi(x,y)\|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \underbrace{\varphi(x,y)\frac{(x-x_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}(x-x_0)}_{\varphi_1(x,y)} + \underbrace{\varphi(x,y)\frac{(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}(y-y_0)}_{\varphi_2(x,y)}$$

Então,

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varphi_1(x,y)(x-x_0) + \varphi_2(x,y)(y-y_0)$$

onde, $y = g(x)$, $y_0 = g(x_0)$, $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ e $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$.
Então,

$$0=0+F_x(x_0,g(x_0))(x-x_0)+F_y(x_0,g(x_0))(g(x)-g(x_0))+\varphi_1(x,g(x))(x-x_0)+\varphi_2(x,g(x))(g(x)-g(x_0))$$

Fazendo $x \to x_0, \varphi_1 \to 0, \varphi_2 \to 0$

$$\frac{dg}{dx}(x_0) = g'(x_0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}, \forall x_0 \in A$$

■

Exemplo 3.16 A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define uma função diferenciável $y(x)$? Se sim, quem é $y'(x)$?

Solução:

$$F(x,y) = y^3 + xy + x^3 - 4 = 0$$
$$x_0 = 0 \Rightarrow F(0, y_0) = y_0^3 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow y_0 = \sqrt[3]{4}$$

$(x_0, y_0) = \left(0, \sqrt[3]{4}\right)$ é solução de $F(x,y) = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(0, \sqrt[3]{4}\right) \neq 0 \Rightarrow \exists A \subset \mathbb{R}$$

$0 \in A$ e $B \subset \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{4} \in B$ e $g : A \to B$ diferenciável tais que $g(0) = \sqrt[3]{4}$ e

$$g'(x) = \frac{-F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} = \frac{-\left(3x^2 + g(x)\right)}{x + 3g^2(x)}$$

□

Exemplo 3.17 Seja $x^2 + y^2 = 1$

Solução:
O ponto $(1, 0)$ resolve

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$
$$F_x = 2x \Rightarrow F_x(1,0) = 2 \neq 0$$
$$F_y = 2y \Rightarrow F_y(1,0) = 0$$

$$x(y) = \sqrt{1-y^2}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{-F_y}{F_x} = \frac{-2y}{2x} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

Definição 3.18 (Jacobiano) Sejam $f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Definimos o *Jacobiano* de $f_1, f_2, ..., f_n$ em relação às variáveis $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$, $i = 1, 2, ..., n$ por

$$\frac{\partial (f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{in}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{i1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i2}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{in}} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.19 *Sejam $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nessas condições se $\frac{\partial (F, G)}{\partial (y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ existe $I \subset \mathbb{R}$, intervalo aberto com $x_0 \in I$ e $y, z : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $F(x, y(x), z(x)) = 0 = G(x, y(x), z(x))$ com $y(x_0) = y_0$ e $z(x_0) = z_0$. Além disso*

$$y'(x) = \frac{-\frac{\partial (F,G)}{\partial (x,z)}}{\frac{\partial (F,G)}{\partial (y,z)}} \qquad z'(x) = \frac{-\frac{\partial (F,G)}{\partial (x,y)}}{\frac{\partial (F,G)}{\partial (y,z)}}$$

Demonstração:
Como F, G são de classe C^1, então,

$$\frac{\partial (F,G)}{\partial (y,z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$$

é contínua.
Como $\frac{\partial (F,G)}{\partial (y,z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ existe $A \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $(x_0, y_0, z_0) \in A$ tal que

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x,y,z) \neq 0, \forall (x,y,z) \in A$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$
$$\Rightarrow F_y(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \text{ ou } F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

Suponhamos $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, pelo Teorema 3.19, existem $B \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $g : B \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $F(x,y,g(x,y)) = 0, \forall (x,y) \in B$.

Seja $H(x,y) = G(x,y,g(x,y))$, H é de classe C^1.

$$H(x_0,y_0) = G(x_0,y_0,g(x_0,y_0)) = 0$$
$$H_y = G_y + G_z\frac{\partial g}{\partial y}$$
$$H_y(x_0,y_0) = G_y(x_0,y_0,z_0) + G_z(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$
$$H_y(x_0,y_0) = G_y(x_0,y_0,z_0) + G_z(x_0,y_0,z_0)\left(\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\right)$$

O Teorema da Função Implícita para H diz, $\exists I \subset \mathbb{R}, x_0 \in I$ e $k : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $H(x,h(x)) = 0, \forall x \in I$.

Então, $y(x) = h(x)$ e $z(x) = g(x,h(x))$ são definidas em I implicitamente por

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

As expressões das derivadas são

$$\begin{cases} F_x + F_y.y' + F_z.z' = 0 \\ G_x + G_y.y' + G_z.z' = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} F_y.y' + F_z.z' = -F_x \\ G_y.y' + G_z.z' = -G_x \end{cases}$$
$$y' = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

■

3.7 Teorema do Valor Médio

Lema 3.20 (TVM de Cauchy) Sejam f, g deriváveis e contínuas em $]a, b[$, onde g não constante e $g(b) \neq g(a)$. Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demonstração:
Pelo Teorema de Rolle 1.22, temos:

$$\begin{aligned} & h(x) = f(x) - mg(x) \\ & h(a) = h(b) \\ & \Rightarrow m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema de Rolle, $\exists c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(x) \\ 0 = h'(c) &= f'(c) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(c) \end{aligned}$$

■

Proposição 3.21 Se $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável e $x, x_0 \in I$. Então, existe $\overline{x}$ entre x e x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\overline{x})}{2}(x - x_0)^2$$

Demonstração:
Seja $E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$
Então, $E(x_0) = 0$ e $E'(x_0) = 0$.
Seja, $h(x) = (x - x_0)^2$
Então, $h(x_0) = 0$ e $h'(x_0) = 0$.

$$\frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E(x) - E(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$$

Usando o Lema anterior 3.20, temos:

$$\frac{E(x) - E(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{E'(x_1)}{h'(x_1)} = \frac{E'(x_1) - E'(x_0)}{h'(x_1) - h(x_0)}$$

Novamente,

$$\frac{E'(x_1) - E'(x_0)}{h'(x_1) - h(x_0)} = \frac{E''(\overline{x})}{h''(\overline{x})}$$

Portanto, $E''(\overline{x}) = f''(\overline{x})$ e $h''(\overline{x}) = 2$
Então,

$$\begin{aligned}
&\frac{E''(\overline{x})}{h''(\overline{x})} = \frac{f''(\overline{x})}{2} \\
&\Rightarrow \frac{E(x)}{h(x)} = \frac{f''(\overline{x})}{2} \\
&\Rightarrow E(x) = \frac{f''(\overline{x})}{2}(x - x_0)^2 \\
&\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\overline{x})}{2}(x - x_0)^2
\end{aligned}$$

■

Em geral se f é de classe C^{n+1} e $x, x_0 \in I$. Então, existe $\overline{x}$ entre x e x_0 tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{(I)} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{n+1}(\overline{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{(II)}$$

Onde: (I) é o Polinômio de Taylor de ordem n em volta de x_0.
(II) é o resto $E(x)$ de ordem $n+1$.

Teorema 3.22 (Teorema do Valor Médio) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo e $F : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sejam $x, x_0 \in A$. Então, existe $\overline{x}$ no segmento $\overline{xx_0}$ tal que*

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(\overline{x}), x - x_0 \rangle$$

Demonstração:
Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$
$g(0) = f(x_0)$ e $g(1) = f(x)$
g é diferenciável em $]0,1[$, aplicando TVM para g, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'\left(\bar{t}\right), \bar{t} \in]0,1[\\
&\Rightarrow f(x) - f(x_0) = g'\left(\bar{t}\right) = \left\langle \nabla f\left(x_0 + \bar{t}(x - x_0)\right), x - x_0 \right\rangle
\end{aligned}$$

Onde, $x_0 + \bar{t}(x - x_0) = \overline{x}$ entre x e x_0. ■

Corolário 3.23 Nas mesmas condições com $u = \dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$, temos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x})$$

3.8 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

3.8.1 Polinômio de Taylor de Ordem 1

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto convexo e f de classe C^2. Sejam ainda $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \in \mathbb{R}^2, (h, k) \neq (0, 0)$ tal que $(x_0 + h, y_0 + k) \in A$.

Considere $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(t) = f((x_0, y_0) + t(h, k)), t \in [0, 1]$

O *Polinômio de Taylor* de ordem 1 para g em volta de 0:

$$P_1(t) = g(0) + g'(0)(t - 0)$$
$$E(t) = \frac{g''(\bar{t})}{2}(t - 0)^2, \bar{t} \in]0, t[$$
$$\Rightarrow g(1) = g(0) + g'(0)t + E(1)$$
$$g(1) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(\bar{t})}{2}1^2$$
$$\Rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + \frac{g''(\bar{t})}{2}$$

Onde, $\langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$

$$g''(\bar{t}) = \frac{d}{dt}g'(\bar{t})$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k\right)h + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k\right)k\right)$$
$$= f_{xx}\left(x_0+\bar{t}h, y_0+\bar{t}k\right)h^2 + f_{xy}\left(x_0+\bar{t}h, y_0+\bar{t}k\right)hk + f_{yx}\left(x_0+\bar{t}h, y_0+\bar{t}k\right)hk + f_{yy}\left(x_0+\bar{t}h, y_0+\bar{t}k\right)k^2$$
$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

Onde, $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Fazendo $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$ e $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(x_0 + \bar{t}h, y_0 + \bar{t}k\right)$, temos

$$\boxed{\begin{aligned}&f(x,y)=\underbrace{f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{P_1 \text{ de Taylor}}+\\&+\frac{1}{2}\underbrace{\left[f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^2+2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-y_0)^2\right]}_{E(x,y)}\end{aligned}}$$

Exemplo 3.18 Seja $f(x,y)=\ln(x+y)$. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1/2, 1/2)$.

Solução:

$$\begin{aligned}P_1(x,y)&=f(1/2,1/2)+f_x(1/2,1/2)(x-1/2)+f_y(1/2,1/2)(y-1/2)\\&=0+1(x-1/2)+1(y-1/2)\\&=x+y-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_x&=\frac{1}{x+y}=f_y\\f_{xx}&=\frac{-1}{(x+y)^2}=f_{yy}=f_{xy}\\E(x,y)&=\frac{-1}{2(x+y)^2}\left((x-x_0)^2+2(x-x_0)(y-y_0)+(y-y_0)^2\right)\end{aligned}$$

Se $x+y>1$, então

$$|E(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\left((x-1/2)^2+2(x-1/2)(y-1/2)+(y-1/2)^2\right)$$

Repetindo o argumento acima e calculando o Polinômio de Taylor de ordem 2 para $g(t)$ em volta de $t=0$ no ponto $t=1$. (f de classe C^3)

$$\begin{aligned}&g(t)=g(0)+g'(0)+\frac{g''(0)t^2}{2}+\frac{g'''(\overline{t})t^3}{3!}\\&g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{g''(0)}{2}+\frac{g'''(\overline{t})}{3!}\\&f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\\&+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]\end{aligned}$$

Denomina-se Polinômio de Taylor de ordem 2.

$$E(x,y) = \frac{1}{3!}\left[\sum_{k=0}^{3}\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}\frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-k}\partial y^k}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^{3-k}(y-y_0)^k\right]$$

$\square$

Em geral se f é de classe C^{n+1}, A aberto convexo de $\mathbb{R}^2, (x_0,y_0) \in A$ e $(\overline{x},\overline{y})$ entre $(x,y) \in A$ e (x_0,y_0), temos:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}\left(\sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-k}\partial y^k}(x_0,y_0)(x-x_0)^{j-k}(y-y_0)^k\right)+ \\ +\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^{n+1-k}(y-y_0)^k\right) \end{aligned}}$$

Capítulo 4

Máximos e Mínimos

4.1 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aberto. f é constante, então, $\nabla f = (0, ..., 0)$
Se $\nabla f(x) = 0, \forall x \in A$, então, f é constante?
Falso: $f : A \to \mathbb{R}, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\nabla f\,(x, y) = (0, 0)$ e f não é constante.

Teorema 4.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto conexo por caminhos e $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f|_A \equiv 0$. Então, f é constante em A.*

Demonstração:
A conexo por caminhos, implica que dados $x, y \in A$ existe uma poligonal γ que une x a y, $\operatorname{Im}\gamma \subset A$. Tal poligonal pode ser escrita como união de segmentos $\overline{x_{i-1}x_i}, i = 1, 2, ..., n$ com $x_0 = x$ e $x_n = y$. Em cada segmento $\overline{x_{i-1}x_i}$ temos o TVM:

$$\begin{aligned}
&f\,(x_i) - f\,(x_{i-1}) = \langle \nabla f\,(\overline{x})\,, x_i - x_{i-1}\rangle = 0 \\
&\Rightarrow f\,(x_i) = f\,(x_{i-1})\,, i = 1, 2, ..., n \\
&f\,(x) = f\,(x_0) = f\,(x_1) = f\,(x_2) = ... = f\,(x_n) = f\,(y) \\
&\Rightarrow f\,(x) = f\,(y)\,, \forall x, y \in A
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ é constante em A.

∎

Corolário 4.2 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo por caminho e $f, g : A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x) = \nabla g(x), \forall x \in A$. Então, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$.

Demonstração:
Considere a função

$$\begin{aligned}
& h(x) = f(x) - g(x) \\
& \Rightarrow \nabla h(x) = \nabla (f - g)(x) \\
& \Rightarrow \nabla h(x) = \nabla f(x) - \nabla g(x) = 0 \\
& \Rightarrow h(x) = k \\
& \Rightarrow f(x) = g(x) + k
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.1 Ache $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x, y) = \left(3x^2y^2 + 4, 2x^3y + y^2\right)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4 \Rightarrow f(x, y) = x^3y^2 + 4x + g(y)\,(1) \\
& \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + y^2
\end{aligned}$$

Derivando $\overbrace{f(x, y)}^{(1)}$ em relação a y, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + g'(y) \\
& \Rightarrow 2x^3y + y^2 = 2x^3y + g'(y) \\
& \Rightarrow g'(y) = y^2 \\
& \Rightarrow g(y) = \frac{y^3}{3} + k \\
& \Rightarrow f(x, y) = x^3y^2 + 4x + \frac{y^3}{3} + k
\end{aligned}$$

□

Será que sempre existe f dado tal que $\nabla f = (P(x, y), Q(x, y))$?

Proposição 4.3 Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $P, Q : A \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Para que exista $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (P, Q)$ é necessário que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Demonstração:
Se existe f tal que $\nabla f = (P, Q)$, então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

P, Q são de classe C^1, então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ambas são contínuas, então, como f é de classe C^2, pelo Teorema de Schwarz 3.15, temos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

■

Exemplo 4.2 Existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \left(\underbrace{xy}_{P}, \underbrace{y}_{Q} \right)$?

Solução:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Então, não existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (xy, y)$. □

Exemplo 4.3 Existe $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $\nabla f = \left(\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{P}, \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2} - e^{-y}}_{Q} \right)$?

Solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{array} \right. \Rightarrow P_y = Q_x$$

tem chance de existir f.

$$
\begin{aligned}
& f_x = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + g(y) \\
& \Rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} - e^{-y} = f_y = \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) \\
& \Rightarrow g'(y) = -e^{-y} \\
& \Rightarrow g(y) = e^{-y} + k \\
& \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + e^{-y} + k
\end{aligned}
$$

□

Será que a condição da proposição é suficiente?
Isso depende "mais do domínio"do que das expressões de P e Q.

Exemplo 4.4 Considere o campo $(P,Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Solução:

$$
\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-\left(x^2+y^2\right)+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}
$$

Porém, não existe $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (P,Q)$.

Uma justificativa para tal fato é:
Se f é potencial de (P,Q), então,

$$
\int_a^b \left\langle (P,Q), \gamma'(t) \right\rangle dt = 0
$$

para toda curva fechada γ de classe C^1. Ser fechada significa que a curva tem $\gamma(a) = \gamma(b)$.

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b \left\langle (P,Q), \gamma'(t) \right\rangle dt = \int_a^b \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle dt = \\
& \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\, dt = (f \circ \gamma)\big|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0
\end{aligned}
$$

Então, continuando a resolução do exemplo, temos:
Escolhendo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), t = [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \right), (-\operatorname{sen} t, \cos t) \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

Portanto, não existe potencial para (P, Q).

□

Definição 4.4 (Ponto de Máximo e de Mínimo) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ função. $x_0 \in A$ é *ponto de máximo local* de f se existe $B_\delta(x_0)$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in B_\delta(x_0)$ e *máximo global* se $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in A$. Analogamente definimos mínimo local e mínimo global.

Exemplo 4.5 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solução:
$f(x, y) \geqslant 0 = f(0, 0)$, então, $(0, 0)$ é mínimo global de f. □

Exemplo 4.6 Seja $f(x, y) = 2x - y$ definida em $A \subset \mathbb{R}^2$ dada por $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 3$.

Solução:
Temos que, $y \geqslant x$ e $y \leqslant 3 - x$
Fazendo as curvas de nível de f, temos:

$$\begin{aligned} 2x - y &= c \\ y &= 2x - c \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.7

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ 1 - (x-3)^2 - y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

Solução:
$(0, 0)$ é mínimo local (não global)
$3, 0)$ é máximo local (não global)
Os pontos onde $x^2 + y^2 = 4$ são máximo global.

□

Teorema 4.5 *Seja $x_0 \in A, A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se x_0 é ponto extremo de $f : A \to \mathbb{R}$, f diferenciável, então, $\nabla f(x_0) = 0$.*

Demonstração:

Suponha que x_0 é máximo local de f, isto é, existe $B_\delta(x_0)$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0), \forall x \in B_\delta(x_0)$.

Considere $x = (x_1, ..., x_n)$ e $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$

$$g(x_i) = f(x_{01}, x_{02}, ..., x_i, ..., x_{0n})$$

g é uma função real diferenciável, com máximo em x_{0i}, logo

$$\begin{aligned}
&0 = g'(x_{0i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), i = 1, 2, ..., n \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0
\end{aligned}$$

■

Definição 4.6 Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aberto e $x_0 \in A$. Dizemos que x_0 é *ponto crítico* de f se $\nabla f(x_0) = 0$.

Os candidatos a máximo e mínimo de f são pontos críticos.

Exemplo 4.8 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solução:

$\nabla f = (2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

e $(0, 0)$ é mínimo global. □

Exemplo 4.9 Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$

Solução:

$\nabla f = (2x, -2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

$(0, 0)$ não é máximo, pois $f(x, 0) > f(0, 0), x \neq 0$.

$(0, 0)$ não é mínimo, pois $f(0, y) < f(0, 0), y \neq 0$.

$(0, 0)$ é chamado ponto de "sela". □

Exemplo 4.10 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 2\}$

Solução:

$\nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

$(0, 0)$ é mínimo global de f.

$\nabla f(2, 0) = (4, 0) \neq (0, 0)$

$(2, 0)$ é ponto de máximo de f.

Todos os pontos de máximo são max $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$. □

Teorema 4.7 *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2*,* A *aberto e* $x_0 \in A$*. Se* f *tem máximo em* x_0*, então,* $\nabla f(x_0) = 0$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \leqslant 0$*.*

Demonstração:
Se $x = (x_1, ..., x_n)$ e $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ considere

$$g(x_i) = f(x_{01}, x_{02}, ..., x_i, ..., x_{0n})$$

x_{0i} é máximo de g, então, $g'(x_{0i}) = 0$ e $g''(x_{0i}) \leqslant 0$

$$\begin{aligned}
&0 = g'(x_{0i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \\
&g'(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, ..., x_i, ..., x_{0n}) \\
&g''(x_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{01}, ..., x_i, ..., x_{0n}) \\
&0 \leqslant g''(x_{0i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.11 Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. Calcule os máximos e mínimos locais de f em $\mathbb{R}^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}
&\nabla f = (0, 0) \\
&\Rightarrow \left(3x^2 - 3, 3y^2 - 3\right) = (0, 0) \\
&\Rightarrow (x, y) = \begin{cases} (1, 1) \\ (1, -1) \\ (-1, 1) \\ (-1, -1) \end{cases} \text{ pontos críticos} \\
&\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \end{aligned}\right\} \begin{cases} (1, 1) \to \text{ min local} \\ (1, -1) \to \text{ pto de sela} \\ (-1, 1) \to \text{ pto de sela} \\ (-1, -1) \to \text{ max local} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

4.2 Formas Quadráticas em $\mathbb{R}^2$

Definição 4.8 Uma *forma quadrática* em $\mathbb{R}^2$ é uma função do tipo $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, a, b, c \in \mathbb{R}$. Associamos a Q a matriz simétrica

$$
\begin{aligned}
&A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \\
&Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax & by \\ bx & cy \end{pmatrix} \\
&= ax^2 + bxy + bxy + cy^2
\end{aligned}
$$

A matriz A simétrica, então, A é diagonalizável, ou seja, existe uma base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ na qual A é diagonal.

Auto valores de A são $\det(A - xI) = 0$

$$
\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow x^2 - (a+c)\,x - b^2 + ac = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - ac)}}{2}
\end{aligned}
$$

Auto vetores de A são v_i tal que $Av_i = \lambda_i v_i$.
Seja $B = \{v_1, v_2\}$ a base de auto vetores de A.
Nesta base, A é diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
&Q(u,v) = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&Q(u,v) = u^2\lambda_1 + v^2\lambda_2
\end{aligned}
$$

- Se λ_1 e λ_2 são positivos, então, $Q(u,v) > 0, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$
- Se λ_1 e λ_2 são negativos, então, $Q(u,v) \leqslant 0, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$
- Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, existem direções no plano ao longo das quais Q é positiva ou negativa, respectivamente.

  Sabemos o sinal de Q para todo vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Se $\lambda_1 > \lambda_2$, Q assume valor máximo (restrito ao círculo unitário) em $v_1, Q(1,0) = \lambda_1$ e mínimo em $v_2, Q(0,1) = \lambda_2$.

Definição 4.9 (Hessiano) Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 definimos o *Hessiano* de f em (x_0, y_0) por

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Ele define uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$

$$Q_f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$Q_f(x,y) = f_{xx}(x_0,y_0)\,x^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\,xy + f_{yy}(x_0,y_0)\,y^2$$

Existe base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ que diagonaliza Q_f.

$$Q_f(u,v) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

Nesta base, temos

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x_0,y_0) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 > \lambda_2$

Q_f é máxima na direção v_1 e mínima na direção v_2.

Se (x_0, y_0) é ponto crítico de f, o polinômio de Taylor de ordem 1 em volta de (x_0, y_0) é

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \overbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)}^{0} + \overbrace{f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}^{0} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-y_0)^2\right)$$
$$\Rightarrow f(x,y) = f(x_0,y_0) + \tfrac{1}{2}\left(f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-y_0)^2\right)$$

Façamos $(x_0 + h, y_0 + k) = (x, y)$, $(x - x_0)^2 = h^2$ e $(y - y_0)^2 = k^2$.

Então, considere

$$Q_f(h,k) = f_{xx}(\overline{x},\overline{y})\,h^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})\,hk + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})\,k^2$$
$$\widetilde{Q}_f(h,k) = f_{xx}(x_0,y_0)\,h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\,hk + f_{yy}(x_0,y_0)\,k^2$$

O sinal de Q_f é determinado pelos auto valores ou pelos sinais de λ_1 e $\lambda_1\lambda_2$, que são o primeiro elemento e o determinante de $H_f(\overline{x}, \overline{y})$, respectivamente, nesta base.

O sinal de $\widetilde{Q}_f$ só depende do sinal de $f_{xx}(x_0, y_0)$ e $\det H_f(x_0, y_0)$, e ambas são contínuas, isto implica que $\exists B_\varepsilon(x_0, y_0)$ tal que $f_{xx}(x, y)$ e $\det H_f(x, y)$ conservam sinal para $(x, y) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$.

- Se (h, k) é tal que $(x_0 + h, y_0 + k) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$ o sinal de $\widetilde{Q}_f(h, k)$ e $Q_f(h, k)$ são iguais.

  Logo, se $\widetilde{Q}_f(h, k) > 0$, ou seja, $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ e $\det H_f(x_0, y_0) > 0$, temos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\overbrace{Q_f(h, k)}^{>0} \geqslant f(x_0, y_0)$$

  Então, $f(x_0, y_0)$ é mínimo local.

- Se $\widetilde{Q}_f(h, k) < 0$, ou seja, $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ e $\det H_f(x_0, y_0) > 0$

$$\det H_f(x_0, y_0) > 0$$

  Então, $f(x_0, y_0)$ é máximo local.

- Se $\widetilde{Q}_f(h, k)$ não tem sinal definido, $\det H_f(x_0, y_0) < 0$.

  Então, (x_0, y_0) é ponto de sela.

- Se $\det H_f(x_0, y_0) = 0$, nada a afirmar.

Exemplo 4.12 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$

Solução:
Pontos críticos: $(1, 1); (1, -1); (-1, 1); (-1, -1)$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = 6x \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yy} = 6y \end{array}\right\} \Rightarrow \det H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

$(1, 1) : f_{xx} > 0; \det H_f = 36 > 0 \Rightarrow$ min local

$(1, -1) : f_{xx} > 0; \det H_f = -36 < 0 \Rightarrow$ ponto de sela

$(-1, 1) : f_{xx} < 0; \det H_f = -36 > 0 \Rightarrow$ ponto de sela

$(-1, -1) : f_{xx} < 0; \det H_f = 36 > 0 \Rightarrow$ max local

□

Exemplo 4.13 $f(x,y) = 3x^4 + 2y^4$

Solução:

$$\begin{aligned} \nabla f = (0,0) &\Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \\ H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O critério não se aplica, mas $f(x,y) \geqslant 0 = f(0,0)$, portanto, $(0,0)$ é mínimo local. □

Exemplo 4.14 $f(x,y) = x^5 + 2y^5$

Exemplo 4.15 Construa uma caixa sem tampa com volume 1, de custo mínimo sabendo que o material das paredes custa o triplo do usado no fundo.

Solução:

Volume:

$$\begin{aligned} v = abc = 1 &\Rightarrow c = \frac{1}{ab} \\ f(a,b) &= 3(2bc + 2ac) + ab \end{aligned}$$

Custo total:

$$\begin{aligned} f(a,b) &= 3\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right) + ab \\ \nabla f &= \left(-\frac{6}{a^2} + b, -\frac{6}{b^2} + a\right) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 b = 6 \\ ab^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow a = b = \sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{6}$ é ponto crítico de f.

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{aa} & f_{ab} \\ f_{ab} & f_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{12}{b^3} \end{pmatrix}$$

em $\left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\right)$, temos

$$\begin{aligned} H_f\left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \det H_f\left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\right) &= 3 > 0 \\ f_{aa}\left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\right) &= 2 > 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\right)$ é mínimo de f.

Portanto, as dimensões são $\left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}, 6^{-2/3}\right)$. $\square$

4.3 Máximos e Mínimos sobre Conjunto Compacto

Definição 4.10 $A \subset \mathbb{R}^n$ é *limitado* se existe bola $B_\varepsilon(x_0)$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset B_\varepsilon(x_0)$.

Definição 4.11 $A \subset \mathbb{R}^n$ é *fechado* se o seu complementar é aberto.

Definição 4.12 $A \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* se for fechado e limitado.

Teorema 4.13 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ função contínua. Então existem x_1 e x_2 em A tais que*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \forall x \in A$$

Demonstração:

(i) $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e x_0 é acumulação de A, então, $x_0 \in A$;

(ii) Se f é contínua em x_0, existe $B_\varepsilon(x_0)$ tal que $f(B_\varepsilon(x_0))$ é limitado;

(iii) Se $R_i, i \in \mathbb{N}$ é sequência de retângulos encaixantes em $\mathbb{R}^n$, isto é, $R_1 \supset R_2 \supset ...$ e volume $R_i \to 0$ se $i \to \infty$, então, $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \{x_0\}$, isto é, x_0 é o único ponto em todos R_i.

(iv) Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f é limitada em A;

(Dica: Suponha f não limitada em $A \cap R_i$)

(v) Conclua o Teorema.

$\blacksquare$

Exemplo 4.16 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ definida em $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ e } |y| \leqslant 2\right\}$.

Solução:
A compacto e f contínua, implica que f assume máximo e mínimo (globais) em A.
Pontos críticos de f no interior:

$$\nabla f = (0,0) \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1, x = -1 \notin A$$

Portanto, pontos $(1,1)\,;(1,-1)$ em A.

$$\begin{aligned} &f(1,1) = -4 \text{ min local} \\ &f(1,-1) = 0 \text{ ponto de sela} \end{aligned}$$

Na fronteira de A:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,2) : 0 \leqslant x \leqslant 2\} \cup \\ A_2 &= \{(x,-2) : 0 \leqslant x \leqslant 2\} \cup \\ A_3 &= \{(0,y) : -2 \leqslant y \leqslant 2\} \cup \\ A_4 &= \{(2,y) : -2 \leqslant y \leqslant 2\} \end{aligned}$$

Em A_1:

$$\begin{aligned} &g(x) = f(x,2)\,, x \in [0,2] \\ &g(x) = x^3 - 3x + 2 \\ &g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \text{ é ponto crítico} \\ &g''(x) = 6x \Rightarrow g''(1) = 6 > 0 \Rightarrow 1 \text{ é min local de } g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &g(1) = 0 \text{ min local} \\ &g(0) = 2 \\ &g(2) = 4 \text{ max local} \end{aligned}$$

Repetir para A_2, A_3 e A_4 e comparar os valores de f.

$$\begin{aligned} &(1,1) \text{ e } (1,-2) \text{ mínimo } (f = -4) \\ &(2,-1) \text{ e } (2,2) \text{ máximo } (f = 4) \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.17 $f(x,y) = xy$em $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

Solução:
No interior:

$$\begin{aligned} &\nabla f = (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \\ &f(0,0) = 0 \text{ sela} \end{aligned}$$

Na fronteira:
$A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
Tome $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi]$
Parametrize A_1

$$\begin{aligned}
&(f \circ \gamma) = f(\gamma(t)) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos t . \operatorname{sen} t, t \in [0, 2\pi] \\
&g'(t) = \cos(2t) = 0 \Leftrightarrow t = {}^{\pi}/_{4} \text{ e } t = {}^{3\pi}/_{4} \\
&g''(t) = -2\operatorname{sen}(2t) \\
&g''({}^{\pi}/_{4}) = -2 < 0 \Rightarrow {}^{\pi}/_{4} \text{ e max local} \\
&g''({}^{3\pi}/_{4}) = 2 > 0 \Rightarrow {}^{3\pi}/_{4} \text{ e min local} \\
&g(0) = 0 = g(2\pi) \\
&g({}^{\pi}/_{4}) = {}^{1}/_{2} \\
&g({}^{3\pi}/_{4}) = -{}^{1}/_{2} \\
&(0, 0) \text{ sela} \\
&\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ max global} \\
&\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ min global}
\end{aligned}$$

□

Se a fronteira de A é mais "complicada"? (Algo como a curva de nível de uma função de classe C^1).

Teorema 4.14 (Multiplicador de Lagrange) *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $B = \{x \in A : g(x) = 0\}$, onde $g : A \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, com $\nabla g \neq 0, \forall x \in B$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável e tem extremo em $x_0 \in B$, então existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$$

λ_0 é chamado multiplicador de Lagrange.
Obs: *B é fechado, então não necessariamente $\nabla f(x_0) = 0$ se x_0 for extremo de f.*

Demonstração:
Faremos $n = 2$.
Suponha que x_0 é máximo de f sobre B, ou seja, existe $B_\varepsilon(x_0)$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0)$ para $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap B$, isto é, $x \in B_\varepsilon(x_0)$ e $g(x) = 0$.

$$\nabla g(x) \neq 0, \forall x \in B$$

Pelo Teorema da Função Implícita 3.6, existe $\gamma : B_{\delta_1}(t_0) \to \mathbb{R}^2$ com $\gamma(t_0) = x_0$ e $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ e $\gamma(B_{\delta_1}(t_0)) \subset B$, ou seja, $g(\gamma(B_{\delta_1}(t_0))) = 0$.

γ é contínua, isto implica que, existe $B_\delta(t_0)$ tal que $f(\gamma(t_0)) \geqslant f(\gamma(t)), \forall t \in B_\delta(t_0)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left.\frac{d}{dt} f \circ \gamma\right|_{t=t_0} = 0 \\
&\Rightarrow \left\langle \nabla f \left(\underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0} \right), \gamma'(t_0) \right\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) \perp \gamma'(t_0) \text{ e } \nabla g(x_0) \perp \gamma'(t_0) \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) \parallel \nabla g(x_0) \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)
\end{aligned}$$

■

Então, o Teorema diz que os extremos de f sobre B estão entre as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 4.18 Determine máximo e mínimo de $f(x,y) = y + x^3$ sujeito a $y - x^3 = 0$.

Solução:
Seja $g(x,y) = y - x^3$

$$\begin{aligned}
&\nabla f = \left(3x^2, 1\right) \\
&\nabla g = \left(-3x^2, 1\right) \\
&\begin{cases} \left(3x^2, 1\right) = \lambda\left(-3x^2, 1\right) \\ y - x^3 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = -\lambda 3x^2 \\ 1 = \lambda \\ x^3 = y \end{cases} \Rightarrow x = y = 0
\end{aligned}$$

A solução do sistema é $(x,y) = (0,0)$, que não é máximo nem mínimo de f sobre $g(x,y) = 0$, pois $f(0,0) = 0$ e $f\left(x, x^3\right) = 2x^3$ pode ser maior ou menor do que 0. □

Exemplo 4.19 Determine a tangente à elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1; x \geqslant 0; y \geqslant 0$ que forma um triângulo com os eixos de área máxima.

Solução:
Considere a tangente à elipse no ponto (a, b)

$$r = (a, b) + t\,(-g_y, g_x)$$
$$r = (a, b) + t\left(-\tfrac{b}{2}, 2a\right)$$
$$g\,(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$$

Área do triângulo: $A\,(a, b) = \dfrac{2}{ab}$

$$\begin{cases} \nabla A = \lambda \nabla g \\ g\,(a, b) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{-2}{a^2 b}, \dfrac{-2}{ab^2}\right) = \lambda\left(2a, \dfrac{b}{2}\right) \\ a^2 + \dfrac{b^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda a^3 b \\ -4 = \lambda a b^3 \\ a^2 + \dfrac{b^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } b = \sqrt{2}$$

A equação da reta é $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y = 1$.

□

Exemplo 4.20 Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ cuja soma das coordenadas é máxima.

Solução:
Queremos maximizar $f\,(x, y, z) = x + y + z$ com a restrição $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

$$\begin{cases} \nabla f\,(x, y, z) = \lambda \nabla g\,(x, y, z) \\ g\,(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1, 1, 1) = \lambda\,(2x, 4y, 6z) \\ \underbrace{x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1}_{g(x,y,z)} = 0 \end{cases}$$

Como λ deve ser diferente de zero, da 1ª equação tiramos: $x = \dfrac{1}{2\lambda}$, $y = \dfrac{1}{4\lambda}$ e $z = \dfrac{1}{6\lambda}$. Substituindo na última equação obtemos:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} + \frac{3}{36\lambda^2} = 1 \text{ ou } \lambda = \pm\sqrt{\tfrac{11}{24}}$$

Os candidatos a extremantes são:

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right) \text{ e } x_2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right)$$

Da compacidade de B, da continuidade de f e de $f(x_1) > f(x_2)$ segue que o ponto procurado é

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right)$$

$\square$

Teorema 4.15 *Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $B = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$ onde g e h são funções de classe C^1 em A com $\{\nabla g, \nabla h\}$ linearmente independente (L.I.) para todo $x \in B$. Se $x_0 \in B$ é ponto extremo de uma função diferenciável $f : A \to \mathbb{R}$, restrita a B, então existem λ_0, μ_0 reais tais que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0) + \mu_0 \nabla h(x_0)$$

Demonstração:

Suponhamos que (x_0, y_0, z_0) seja ponto de máximo local de f em B, o que significa que existe uma bola aberta V de centro (x_0, y_0, z_0) tal que, para todo $(x,y,z) \in B \cap V$,

$$f(x,y,z) \leqslant f(x_0, y_0, z_0)$$

(como A é aberto, podemos supor $V \subset A$). Consideremos uma curva diferenciável $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo aberto, tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0), \gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ e $\gamma(t) \in B$ para todo t em I (a existência de uma tal curva é garantida pelo teorema das funções implícitas). Da continuidade de γ, segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in \left]t_0 - \delta, t_0 + \delta\right[\Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V$$

Assim, para todo $t \in \left]t_0 - \delta, t_0 + \delta\right[$ tem-se

$$f(\gamma(t)) \leqslant f(\gamma(t_0))$$

Logo, t_0 é ponto mínimo de máximo local de $F(t) = f(\gamma(t))$ e daí $F'(t_0) = 0$, ou seja,

$$(1)\ \nabla f(\gamma(t_0)) . \gamma'(t_0) = 0$$

Por outro lado, de $\gamma(t) \in B$ para todo $t \in I$ seque que

$$g(\gamma(t)) = 0 \text{ e } h(\gamma(t)) = 0$$

para todo t em I; daí

$$(2)\ \nabla g(\gamma(t_0)) . \gamma'(t_0) = 0 \text{ e } \nabla h(\gamma(t_0)) . \gamma'(t_0) = 0$$

De (1) e (2), tendo em vista que $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ e $\nabla g(\gamma(t_0)) \wedge \nabla h(\gamma(t_0)) \neq \overrightarrow{0}$ resulta que existem reais λ_0 e μ_0 tais que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda_0 \nabla g(\gamma(t_0)) + \mu_0 \nabla h(\gamma(t_0))$$

■

Capítulo 5

Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais

5.1 Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Vetoriais

Definição 5.1 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma regra que associa um único vetor $f(x)$ de $\mathbb{R}^m$ a cada vetor x de $A \subset \mathbb{R}^n$ se $x = (x_1, ..., x_n)$ escrevemos

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, ..., x_n) \to f(x_1, ..., x_n) = \left(f^1(x_1, ..., x_n), f^2(x_1, ..., x_n), ..., f^m(x_1, ..., x_n)\right)$$

Exemplo 5.1 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $f(x, y) = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$ é uma função com domínio $\mathbb{R}^2$ e com valores em $\mathbb{R}^3$. Esta função transforma o par ordenado (x, y) na terna (x, y, x^2+y^2). A imagem de f é o conjunto $\left\{\left(x, y, x^2 + y^2\right) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ que é igual a $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$. A imagem de f coincide, então, com o gráfico da função dada por $z = x^2 + y^2$.

Exemplo 5.2 *(Coordenadas polares.)* Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(r, \theta) \mapsto f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)$, onde $r\cos\theta = x$ e $r\,\text{sen}\theta = y$.

5.2 Campo Vetorial

Definição 5.2 Um *campo vetorial* em $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função $f : A \to \mathbb{R}^n$.

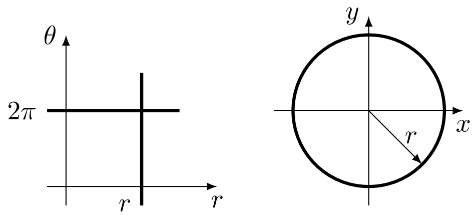


Figura 5.1: f transforma a reta r na circunferência $(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)$

Exemplo 5.3 Represente geometricamente o campo vetorial dado por $f(x,y) = (x,y)$.

Solução:
$\|f(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$; segue que a intensidade do campo é a mesma nos pontos de uma mesma circunferência de centro na origem. Observe que a intensidade do campo no ponto (x,y) é igual ao raio da circunferência, de centro na origem, que passa por este ponto.

□

Definição 5.3 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em x_0 se dada $B_\varepsilon(f(x_0))$ existe $B_g(x_0)$ tal que $f(B_g(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

Teorema 5.4 *Sejam $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = \left(f^1(x), ..., f^m(x)\right)$. Então, f é contínua em x_0 se, e somente se, f^i é contínua em $x_0, \forall i = 1, ..., m$.*

Definição 5.5 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com A aberto. Dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in A$ se existe $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, aplicação linear tal que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

Teorema 5.6 *Se f é diferenciável em x_0, então, L_{x_0} é única e sua matriz na base canônica é*

$$\left[\frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x_0)\right]_{m\times n}$$

com $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$.

5.3 Rotacional

Definição 5.7 Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $f : A \to \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável, $f(x) = (P(x), Q(x), R(x))$. O *rotacional* de f é dado por

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

Obs: Em $\mathbb{R}^2$, faça $R(x) \equiv 0$.

Exemplo 5.4 Seja $f(x,y,z) = \left(xy, yz^2, xyz\right)$. Calcule rot f.

Solução:

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ xy & yz^2 & xyz \end{vmatrix} = (xz - 2yz, 0 - yz, 0 - x)$$

□

Exemplo 5.5 Seja $f(x,y) = (\cos y, \text{sen} x)$. Calcule rot f.

Solução:

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \cos y & \text{sen} x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \cos x + \text{sen} y)$$

□

Definição 5.8 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^{2,3} \to \mathbb{R}^{2,3}$ é *irrotacional* se rot $f \equiv 0$.

Exemplo 5.6 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) \mapsto (0, Q(x,y))$ onde $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas e calcule rot f.

Solução:

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & Q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

□

Exemplo 5.7 Se f é o campo de velocidades no escoamento de um fluído em $\mathbb{R}^2$ para cada y_0 fixado e $x > x_0$ temos, $\|f(x_0, y_0)\| \leqslant \|f(x, y_0)\|$, então, um disco giraria no sentido anti-horário se $Q(x, y) > 0$.

Exemplo 5.8 Considere $v = (P(x, y), Q(x, y))$ de classe C^1, velocidade de um fluído bidimensional. Sejam A e B partículas do fluído.

Solução:

$$\begin{aligned}
&\delta(t) = \|A(t) - B(t)\| \Rightarrow \delta(0) = h \\
&A(t) = (x_1(t), y_1(t)); B(t) = (x_2(t), y_2(t)) \\
&y_2(t) - y_1(t) = \delta(t) \operatorname{sen}\theta_h(t) \\
&y_2'(t) - y_1'(t) = \delta'(t) \operatorname{sen}\theta_h(t) + \delta(t) \cos\theta_h(t) . \theta_h'(t)
\end{aligned}$$

Em $t = 0, \theta_h(0) = 0, \delta(0) = h$, temos,

$$\begin{aligned}
y_2'(0) &= Q(x_0 + h, y_0) \\
y_1'(0) &= Q(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\theta_h'(0) &= \frac{Q(x_0 + h, y_0) - Q(x_0, y_0)}{h} \\
\lim_{h \to 0} \theta_h'(0) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Se o movimento é rígido e com velocidade angular constante ω, então,

$$\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Analogamente, para $c(t)$, com $c(0) = (x_0, y_0 + k)$, temos

$$\omega = \lim_{k \to 0} \varphi_k'(0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Então,

$$2\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = \langle \text{rot } v, e_3 \rangle$$

é o módulo do rotacional. □

Exemplo 5.9 $f(x,y) = \left(\dfrac{-x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2} \right)$

Solução:
$\|f\|^2 = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, que é constante nos círculos.
rot $f = 0$. Tem velocidade angular nula ao longo de retas. □

Exemplo 5.10 Seja $f(x,y) = (-y, x)$. Calcule o rotacional.

Solução:
É tangente a circunferência de raio $\sqrt{x^2+y^2}$. As partículas descrevem essas circunferências.

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2)$$
$$\Rightarrow \omega = 1$$

□

5.4 Divergente

Definição 5.9 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo diferenciável. O *divergente* f é dado por

$$\text{div } f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

Obs: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. ∇f é um campo diferenciável, então,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$
$$\text{div } (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f \text{ (Laplaciano)}$$

Definição 5.10 Seja $f : B \to \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$ fechado é diferenciável se existem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $B \subset \Omega$ e $g_i : \Omega \to \mathbb{R}^m$ diferenciável tal que $g|_B = f$ (g restrito a B).

Exemplo 5.11 Seja $f(x,y) = (0, Q(x,y)), \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) > 0$. Calcule o rotacional e o divergente.

Solução:

$$\begin{aligned}\text{rot } f &= \frac{\partial Q}{\partial x}\\ \text{div } f &= \frac{\partial Q}{\partial y} > 0\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.12 $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ de classe C^1.

Solução:

Seja $v(t)$ o volume da figura $A(t)B(t)C(t)D(t)$.

$$\begin{aligned}
&v(0) = hk\\
&v(t) \approx \|A(t) - B(t)\| . \|A(t) - C(t)\|\\
&A(t) \approx (x_0 + tP(x_0,y_0), y_0 + tQ(x_0,y_0))\\
&B(t) \approx (x_0 + h + tP(x_0+h,y_0), y_0 + tQ(x_0+h,y_0))\\
&C(t) \approx (x_0 + tP(x_0,y_0+k), y_0 + k + tQ(x_0,y_0+k))\\
&P(x_0+h,y_0) \approx P(x_0,y_0) + hP_x(x_0,y_0)\\
&Q(x_0+h,y_0) \approx Q(x_0,y_0) + hQ_x(x_0,y_0)\\
&P(x_0,y_0+k) \approx P(x_0,y_0) + kP_y(x_0,y_0)\\
&Q(x_0,y_0+k) \approx Q(x_0,y_0) + kQ_y(x_0,y_0)\\
&v(t) = \left\|\overline{A(t)B(t)} \wedge \overline{A(t)C(t)}\right\| = ... =\\
&= hk + hktP_x(x_0,y_0) + hktQ_y(x_0,y_0) + hkt^2(P_xQ_y - P_yQ_x)(x_0,y_0)\\
&\frac{v(t) - v(0)}{t} = hk(P_x + Q_y + t(P_xQ_y - P_yQ_x))
\end{aligned}$$

fazendo $t \to 0$, temos:

$$\begin{aligned}v'(0) &= hk(P_x(x_0,y_0) + Q_y(x_0,y_0))\\ &= hk.\text{div } f = v(0).\text{div } f\end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Integrais Duplas

6.1 A Integral de Riemann

Definição 6.1 Seja $R = [a_i, b_i]^n, i = 1, ..., n$ um retângulo em $\mathbb{R}^n$. Uma *partição* P de R é uma escolha $x^k = \left(x_1^k, ..., x_n^k\right), x_i^k \in [a_i, b_i], x_{i-1}^k < x_i^k$.

$$|P| = \max \text{vol } R_i$$
$$|P| \to 0 = \text{vol } R_i \to 0, \forall i$$

Definição 6.2 Seja $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitada ($|f(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$). Definimos a *soma inferior* e *soma de Riemann* para f relativa a uma partição de P de R por

inferior: $s(f, P) = \sum_{R_i} m_i \text{vol } R_i, m_i = \inf f(x), x \in \mathbb{R}_i$

superior: $S(f, P) = \sum_{R_i} M_i \text{vol } R_i, M_i = \sup f(x), x \in \mathbb{R}_i$

Obs:

(i) $s(f, P) \leqslant S(f, P)$

(ii) se P' é refinamento de P, então,

$$s(f, P) \leqslant s(f, P') \leqslant S(f, P') \leqslant S(f, P)$$

Definição 6.3 Seja $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitada e P partição de R. Definimos a *integral inferior* e *superior* de f sobre R por

$$\underline{\int}_R f(x)dx = \sup s(f,P),\ P \text{ partição de } R$$

e

$$\overline{\int}_R f(x)dx = \inf S(f,P),\ P \text{ partição de } R$$

Dizemos que f é integrável sobre R se $\underline{\int}_R f(x)dx = \overline{\int}_R f(x)dx$ e escrevemos $\int_R f(x)dx$.

Obs: $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ sempre existem e $\underline{\int}_R f \leqslant \overline{\int}_R f$.

Exemplo 6.1 Seja $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = k$.

Seja P partição de R. $s(f,P) = \sum_{R_i \in P} m_i \text{vol } R_i = k \sum_{R_i \in P} \text{vol} R_i = k\text{vol } R$

$$\Rightarrow \underline{\int} f(x)dx = \sup s(f,P) = k\text{vol}R$$

$$S(f,P) = \sum_{R_i \in P} M_i \text{vol} R_i = k\text{vol}R$$

$$\Rightarrow \overline{\int}_R f(x)dx = \inf S(f,P) = k\text{vol}R$$

$$\Rightarrow \int_R f(x)dx = k\text{vol}R$$

Exemplo 6.2 Seja $f : [0,1]^2 = R \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{se } (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \cap R \\ 1 & , \text{se } (x,y) \notin \mathbb{Q}^2 \cap R \end{cases}$$

Solução:
Seja P partição de $[0,1]^2$.

$$
\begin{aligned}
s(f,P) &= \sum_{R_i \in P} \overset{m_i}{\cancel{0}}\,\mathrm{vol}R_i = 0 \\
\Rightarrow \int_{-R} f(x)dx &= \sup s(f,P) = 0 \\
S(f,P) &= \sum_{R_i \in P} \overset{M_i}{\cancel{1}}\,\mathrm{vol}R_i = \mathrm{vol}R = 1 \\
\Rightarrow \int_{R}^{-} f(x)dx &= \inf S(f,P) = 1 \\
\Rightarrow \int_{-R} f(x)dx &\neq \int_{R}^{-} f(x)dx
\end{aligned}
$$

Portanto, f não é Riemann integrável. $\square$

Exemplo 6.3 Seja $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$
f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \neq y \\ 0 & \text{, se } x = y \end{cases}
$$

Solução:
Dado $\varepsilon > 0$ considere retângulos de centro (x,x) e lados $\varepsilon/\sqrt{n}$.
Seja P uma partição de $[0,1]^2$ que contém tais retângulos.

$$
\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{R_j \neq R_i} \overset{M_j}{\cancel{1}}\,\mathrm{vol}R_j + \sum_{R_i} \cancel{M_i}^{1}\,\mathrm{vol}R_i \\
&= \sum_{R_j \neq R_i} \mathrm{vol}R_i + n.\frac{\varepsilon^2}{n} \\
&= \sum_{R_j \neq R_i} \mathrm{vol}R_i + \varepsilon^2 \\
s(f,P) &= \sum_{R_j \neq R_i} \overset{m_j}{\cancel{1}}\,\mathrm{vol}R_j + \sum_{R_i} \overset{m_i}{\cancel{0}}\,\mathrm{vol}R_i = \sum_{R_j \neq R_i} \mathrm{vol}R_j
\end{aligned}
$$

Se P' é refinamento de P, temos:

$$\sum_{R_j \neq R_i} \text{vol} R_j \leqslant s(f, P') \leqslant S(f, P') \leqslant \sum_{R_j \neq R_i} \text{vol} R_j + \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-} f - \int^{-} f \right| < \varepsilon^2, \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-} f = \int^{-} f = \text{vol} R = 1$$

□

Definição 6.4 $A \subset \mathbb{R}^n$ tem *conteúdo nulo* se dado $\varepsilon > 0$ existem retângulos $R_1, \ldots, R_n$ tais quem

$$\sum_{i=1}^{n} \text{vol} R_i < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

Teorema 6.5 *Sejam $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada $D = \{x \in R : f$ é descontí?ua em $x\}$. Então, f é Riemann integrável se, e somente se, D tem conteúdo nulo.*

Proposição 6.6 Sejam $f, g : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então

a) $\displaystyle\int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g$

b) $\displaystyle\int_R kf = k \int_R f, k \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle f \geqslant 0 \Rightarrow \int_R f \geqslant 0$

d) $\displaystyle f \leqslant g \Rightarrow \int_R f \leqslant \int_R g$

Demonstração:

Seja P partição de R. $m_i(f) = \inf\limits_{x \in R_i} f(x), R_i \in P$ e $M_i(f) = \sup\limits_{x \in R_i} f(x), R_i \in P$.

a) Temos

$$m_i(f) + m_i(g) \leqslant m_i(f+g) \leqslant M_i(f+g) \leqslant M_i(f) + M_i(g)$$

$$\Rightarrow \int_{-} f + \int_{-} g \leqslant \int_{-} (f+g) \leqslant \int^{-} (f+g) \leqslant \int^{-} f + \int^{-} g$$

$$\Rightarrow \int_{-} (f+g) = \int^{-} (f+g) \Rightarrow (f+g) \text{ é integrável e } \int (f+g) = \int f + \int g.$$

b) $m_i(kf) = km_i(f)$ e $M_i(kf) = kM_i(f) \Rightarrow kf$ é integrável e $\displaystyle\int kf = k\int f$.

c) f integrável $\Rightarrow \displaystyle\int_{-} f = \int^{-} f$

$$f \geqslant 0 \Rightarrow m_i(f) \geqslant 0 \text{ e } s(f,P) \geqslant 0 \Rightarrow \int_{-} f = \int f \geqslant 0$$

d) $f \leqslant g \Rightarrow g - f \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&(c) \Rightarrow \int (g-f) \geqslant 0\\
&(a) \Rightarrow \int g + \int -f\\
&(b) \Rightarrow \int g - \int f \geqslant 0\\
&\Rightarrow \int f \leqslant \int g
\end{aligned}$$

■

Definição 6.7 Sejam $B \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $f : B \to \mathbb{R}$ limitada. Definimos $\displaystyle\int_B f = \int_R f.\mathcal{X}_B$, onde R é o retângulo de $\mathbb{R}^n, B \subset R$ e

$$\mathcal{X}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \in B \\ 0 & \text{, se } x \notin B \end{cases}$$

Proposição 6.8 Sejam $B \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, $\displaystyle\int_B f = 0$.

Demonstração:

B tem conteúdo nulo implica que dado $\varepsilon > 0, B \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} R_i$, com $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \text{vol} R_i < \varepsilon$.

B limitado implica que existe R retângulo de $\mathbb{R}^n$ tal que $B \subset R$.

$$\begin{aligned}
&\left|\int_B f\right| = \left|\int_R f.\mathcal{X}_B\right|\\
&\left|\int_B f\right| \leqslant \int_R |f| \leqslant 0 + \sup f.\sum_{i=1}^{n} \text{vol} R_i \leqslant \sup f.\varepsilon\\
&\Rightarrow \int_B f = 0
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corolário 6.9 Sejam $f, g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $D = \{x \in B : f(x) \neq g(x)\}$. Se D tem conteúdo nulo, então $\int_B f = \int_B g$.

Demonstração:

$$\int_B (f-g) = \int_{B\setminus D} \overset{(f-g)}{\emptyset} + \int_D \overset{(f-g)}{\emptyset} = 0$$
$$\Rightarrow \int_B f = \int_B g$$

$\blacksquare$

Definição 6.10 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto para o qual $\int_A 1$ exista, então definimos vol$A = \int_A 1$.

Teorema 6.11 (valor intermediário para integral) *Sejam $B \subset \mathbb{R}^n$ compacto e conexo por caminhos e $f : B \to \mathbb{R}$ contínua e integrável em B. Então existe $x_0 \in B$ tal que $\int_B f = f(x_0) volB$.*

Demonstração:

f é contínua e B é compacto, então existem $x_1, x_2 \in B$ tal que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \forall x \in B$.

$$\Rightarrow \int_B f(x_1) \leqslant \int_B f(x) \leqslant \int_B f(x_2)$$
$$\Rightarrow f(x_1)\text{vol}B \leqslant \int_B f(x) \leqslant f(x_2)\text{vol}B$$

vol$B = 0 \Rightarrow \int_B f(x) = 0$ e qualquer $x_0 \in B$ satisfaz o enunciado.

$$\text{vol}B \neq 0 \Rightarrow f(x_1) \leqslant \frac{\int_B f(x)}{\text{vol}B} \leqslant f(x_2)$$

B conexo por caminhos implica que, $\exists \gamma : [a,b] \to B$ contínua com $\gamma(a) = x_1$ e $\gamma(b) = x_2$.

Considere $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua.

$$g(a) = f(x_1) \leqslant \frac{\int_B f(x)}{\text{vol}B} \leqslant f(x_2) = g(b)$$

O Teorema do valor intermediário para g implica que $\exists t_0 \in [a,b]$ tal que $g(t_0) = \dfrac{\int_B f(x)}{\text{vol}B}$.

$$f\underbrace{(\gamma(t_0))}_{x_0 \in B} = \frac{\int_B f}{\text{volB}}$$

$\displaystyle\int_B f = f(x_0)\text{vol}B, x_0 = \gamma(t_0)$ é o ponto procurado. ■

Exemplo 6.4 Como calcular $\displaystyle\int_B \frac{x^2}{x^2+y^2}$, onde $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$?

Demonstração:
Note que a integral não é limitada em B.

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{, se } (x,y) \in B \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$g : B \cup \{0,0\} \to \mathbb{R}$ é limitada. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq g(x,y)\}$.
$D = \{(0,0)\}$ tem conteúdo nulo.
Portanto, $\displaystyle\int_B f = \int_B g$. ■

6.2 Teorema de Fubini

Teorema 6.12 (Fubini) *Sejam $A_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $A_2 \subset \mathbb{R}^n$ retângulos e $f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ integrável. Sejam ainda, $f_x : A_2 \to \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) = f(x,y)$ e $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-A_2} f_x$ e $\Psi(x) = \displaystyle\int_{A_2}^{-} f_x$. (Neste caso, f_x não é derivada parcial é fibra de x, ou seja, mantém x fixo e integra y.) Então, $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ são integráveis em A_1 e*

$$\int_{A_1} \phi(x) = \int \psi(x) = \int\limits_{A_1 \times A_2} f(x,y)$$

ou seja,

$$\int\limits_{A_1 \times A_2} f = \int_{A_1} \int_{-A_2} f(x,y) = \int_{A_1} \int_{A_2}^{-} f(x,y)$$

Corolário 6.13 Se $f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\int_{A_1} \overline{\int_{A_2}} f = \int_{A_2} \overline{\int_{A_1}} f = \int_{A_1 \times A_2} f$$

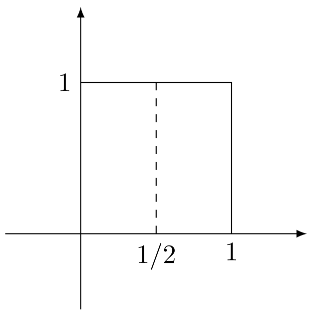
Corolário 6.14 O teorema de Fubini vale para qualquer $\xi : A_1 \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \leqslant \xi(x) \leqslant \Psi(x)$.

Exemplo 6.5 Seja $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \neq 1/2 \\ 1 & \text{, se } x = 1/2 \text{ e } y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{, se } x = 1/2 \text{ e } y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

Calcule $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f$.

Solução:



O conjunto de descontinuidade $D = \{(x,y) \in R : x = 1/2\}$ tem conteúdo nulo, então f é integrável, logo, vale o teorema de Fubini.

$$\int_{[0,1]^2} f = \int_{[0,1]} \left(\underline{\int_{[0,1]}} f_x dy \right) dx = 0$$

□

6.3 Integrais de Linha

Definição 6.15 Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1 por partes. Definimos a *integral de linha* de f sobre γ por

$$\int_\gamma f d\gamma = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

Definição 6.16 Seja γ_1 e γ_2 duas curvas tais que existe $g : [a,b] \to [c,d]$ de classe C^1 com $\gamma_2(t) = \gamma_1(g(t))$ e $g'(t) \neq 0$. Dizemos que γ_2 é *reparametrização* de γ_1 se $u = g(t)$, então, $\dfrac{du}{dt} = g'(t)$

$$\Rightarrow \gamma_2'(t) = \gamma_1'(g(t)).g'(t)$$

Se $g'(t) > 0$ dizemos que g preserva orientação e $g'(t) < 0$ troca a orientação.

Exemplo 6.6 Seja $\gamma_1(t) = (\cos t, \text{ sen}t), t \in [0, 2\pi]$.

$$g(s) = -2s, s \in [0, 2\pi]$$
$$\gamma_2(s) = \gamma_2(g(s)) = (\cos(-2s), \text{ sen}(-2s))$$

Teorema 6.17 *Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo contínuo e Ω aberto, $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \Omega$, tal que γ_2 é reparametrização de γ_1.*

(i) Se γ_1 e γ_2 tem mesma orientação, então $\displaystyle\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F d\gamma_2$.

(ii) Se γ_1 e γ_2 tem orientações opostas, então $\displaystyle\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} F d\gamma_2$.

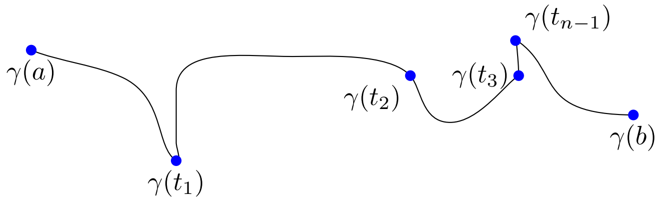
Demonstração:

Se γ_2 é reparametrização de γ_1, então $\exists g : [c,d] \to [a,b]$ de classe $C^1 (g'(t) > 0)$ tal que $\gamma_2(t) = \gamma_1(g(t))$. Fazendo $u = g(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 &= \int_a^b \langle F \circ \gamma_1, \gamma_1' \rangle dt \\
&= \int_c^d \langle F \circ \gamma_1(g(t)), \gamma_1'(g(t)) \cdot g'(t) \rangle dt \\
&= \int_c^d \langle F(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle dt \\
\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 &= \int_{\gamma_2} F d\gamma_2
\end{aligned}$$

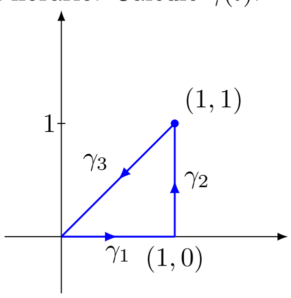
■

Definição 6.18 Uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é C^1 por partes se existem $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que $\gamma|_{]t_{i-1},t_i[}$ é de classe C^1.



Nesse caso, definimos $\displaystyle\int_\gamma F d_\gamma = \sum_{i=1}^{n} \int_I F d\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, onde $I = \gamma_{[t_{i-1},t_i]}$.

Exemplo 6.7 Sejam $F(x,y) = (-y,x)$ e γ um triângulo de vértices $(0,0),(1,0),(1,1)$ percorrido no sentido anti-horário. Calcule $\gamma(t)$.



Solução:

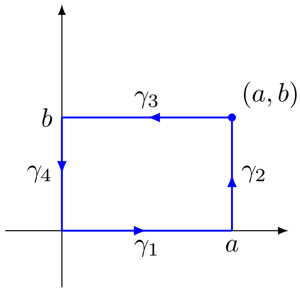
$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t,0), t \in [0,1] \\
\gamma_2(t) &= (1,t), t \in [0,1] \\
\gamma_3(t) &= (1,1) + t(-1,-1) = (1-t, 1-t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F d\gamma &= \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} F d\gamma_3 \\
&= \int_0^1 \langle (0,t),(1,0)\rangle \, dt + \int_0^1 \langle (-t,1),(0,1)\rangle \, dt + \int_0^1 \langle (t-1,1-t),(-1,-1)\rangle \, dt \\
&= 0 + 1 + 0 = \boxed{1}
\end{aligned}$$

□

Proposição 6.19 Seja $F = (P, Q)$ campo de classe C^1 e γ um retângulo de lados $(0,0), (0,a), (0,b), (a,b)$. Seja B o retângulo fechado de lados dados por γ. Se γ é percorrido no sentido anti-horário, então

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



Demonstração:
Para y fixado, temos

$$\int_B \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_0^b \left(\int_0^a \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_0^b Q(a,y) - Q(0,y) dy$$

Para y fixado, temos

$$-\int_B \frac{\partial P}{\partial y} dxdy- = \int_0^a \left(\int_0^b \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_0^a P(x,b) - P(x,0) dx$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma Qdy &= \cancelto{0}{\int_{\gamma_1} Qdy} + \int_{\gamma_2} Qdy + \cancelto{0}{\int_{\gamma_3} Qdy} + \int_{\gamma_4} Qdy \\
&= \int_0^b Q(a,t)dt - \int_0^b Q(0,t)dt \\
&= \int_0^b \left[Q(a,t) - Q(0,t) \right] dt
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} Pdx &= \int_{\gamma_1} Pdx + \cancel{\int_{\gamma_2} Pdx}^{\,0} + \int_{\gamma_3} Pdx + \cancel{\int_{\gamma_4} Pdx}^{\,0} \\
&= \int_0^a P(t,0)dt - \int_0^a P(t,b)dt \\
&= \int_0^a \left[P(t,0) - P(t,b)\right] dt
\end{aligned}$$

$$\int_B \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\gamma} Qdy + \int_{\gamma} Pdx = \int_B Pdx + Qdy$$

$\blacksquare$

6.4 Campos Conservativos

Definição 6.20 Um campo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é *conservativo* se existe $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\bigtriangledown \varphi = F$.

Teorema 6.21 *Sejam $n = 2, 3$ e $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo C^1. Se F é conservativo, então* $\operatorname{rot} F \equiv 0$ *em Ω.*

1-Formas diferenciais

Definição 6.22 Uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma expressão do tipo $\omega = F'dx^1 + F^2dx^2 + \ldots + F^ndx^n$ é associada a um campo $F = \left(F^1, \ldots, F^n\right)$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 6.23 Uma 1-forma diferencial é *exata* se existe $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = F = \left(F^1, \ldots, F^n\right)$.

Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é necessário que $\operatorname{rot} F \equiv 0$ para ω ser exata.

Exemplo 6.8 $\omega = 2xdx + 2ydy$ é exata. De fato, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$.

Exemplo 6.9 $\omega = \underbrace{y}_{P} dx + \underbrace{2x}_{Q} dy$ não é exata. De fato, $2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Sejam $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo (ou ω exata) e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ curva de classe C^1.

$$\begin{aligned}\int_\gamma F d\gamma &= \int_a^b \langle F\circ\gamma, \gamma'\rangle \, dt \\ &= \int_a^b \langle \nabla\varphi\circ\gamma, \gamma'\rangle \, dt \\ &= \int_a^b (\varphi\circ\gamma)'\,(t)dt \\ &= \varphi\circ\gamma(b) - \varphi\circ\gamma(a)\end{aligned}$$

Exemplo 6.10 Seja $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$. γ fechada de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\int_\gamma F d\gamma = 0$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

Exemplo 6.11 Seja $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

$$\gamma(t) = (\cos t,\, \mathrm{sen} t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma F d\gamma = \int_0^{2\pi} \underbrace{\langle F\circ\gamma, \gamma'\rangle}_{1} \, dt = 2\pi$$

Portanto, F não é conservativo.

Teorema 6.24 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto conexo por caminhos e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo contínuo tal que $\int_\gamma F d\gamma$ não depende de γ entre dois pontos dados. Para $a, x \in \Omega$, $\varphi(x) = \int_{\overline{ax}=\gamma} F d\gamma$ é um potencial de F.*

Teorema 6.25 *Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo contínuo em Ω aberto e conexo por caminhos. São equivalentes:*

(i) F é conservativo.

(ii) $\int_\gamma F d\gamma = 0, \forall\gamma$ de classe C^1 fechado.

(iii) $\int_\gamma F d\gamma$ *só depende dos extremos de* γ.

(iv) ω *definida por* F *é exata.*

Definição 6.26 Seja Ω conexo por caminhos. Ω é simplesmente conexo se para toda curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ contínua e fechada existe $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ contínua tal que

$$\begin{cases} H(t,0) = \gamma(t) \\ H(t,1) = \gamma(a) \end{cases}$$

Teorema 6.27 *Se* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *tem* $\operatorname{rot} F \equiv 0$ *e* Ω *é simplesmente conexo, então* F *é conservativo.*

Apêndice A

Avaliações

A.1 Avaliação 01

Grupo 1: Cálculo em uma variável real.

1. Sejam f uma função real derivável, com derivada contínua e $a < b$ números reais tais que $f(a) = f(b) = 0$ e $f'(a)f'(b) > 0$. Prove que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

   Solução:
   $f'(a) > 0$ e $f'(b) > 0$ existe $B_{\delta_1}(a)$ tal que $f'\left(B_{\delta_1}(a)\right) > 0$, implica que, $f\left(B_{\delta_1}(a) \cap]a, b[\right) > 0$.

   $f'(b) > 0$ existe $B_{\delta_2}(b)$ tal que $f'\left(B_{\delta_2}(b)\right) > 0$, implica que, $f\left(B_{\delta_2}(b) \cap]a, b[\right) < 0$.

   f derivável, implica que, f é contínua, implica, pelo TVI, que $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

2. Sejam f uma função real derivável em um intervalo aberto I e $a < b$ números reais tais que $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$. Prove que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. (Note que nada se sabe a respeito da continuidade de f'.)

   Dica. No caso de $f(b) = f(a)$ o resultado segue do Teorema de Rolle. Se $f(b) \neq f(a)$ considere todas as possíveis ordens entre $0, f'(a), f'(b)$ e $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Em cada caso construa uma função contínua $g(x)$ relacionada com a definição usual de derivada de f tal que $g(a)g(b) < 0$. Use o Teorema do Valor Intermediário para g. Agora, use o Teorema do Valor Médio para f num intervalo conveniente e conclua o resultado.

Obs: O resultado acima pode ser generalizado: nas mesmas condições, mas com $f'(a) \neq f'(b)$, para cada $d \in [f'(a), f'(b)]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = d$. Admitindo essa generalização conclua que se $f'(x)$ é crescente (ou decrescente) num intervalo, então, f' é contínua nesse intervalo.

Solução:
f derivável em a, implica que

$$\begin{aligned} & f(x) = f(a) + (x-a) f_1(x) \\ & f'(a) = f_1(a) < 0 \end{aligned}$$

onde $f_1(x)$ é contínua em a.

$\Rightarrow \exists B_\delta(a)$ tal que $f_1(B_\delta(a)) < 0$

$$\begin{aligned} & x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) < f(a) \\ & (x > a) \end{aligned}$$

f derivável em b

$$\begin{aligned} & f(x) = f(b) + (x-b) f_1(x) \\ & f'(b) = f_1(b) > 0 \end{aligned}$$

onde $f_1(x)$ é contínua em b.

$\Rightarrow \exists B_{\delta_2}(b)$ tal que $f_1(B_{\delta_2}(b)) > 0$

$$\begin{aligned} & x \in B_{\delta_2}(b) \Rightarrow f(x) < f(b) \\ & (x < b) \end{aligned}$$

$f(a)$ e $f(b)$ não são mínimos.

f contínua em $[a, b]$, implica, pelo Teorema de Fermat, que f tem mínimo no interior, $c \in]a, b[\Rightarrow f'(c) = 0$.

2Â versão *não tenho o enunciado da questão que foi adaptada em sala de aula.*

(a) Se $f(b) \neq f(a)$, então

$$\begin{aligned} & 0, f'(a), f'(b), \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ & f'(a) < 0 < f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

(é uma das possibilidades), analisemos dois casos:

(i) $f'(a) < 0 < \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(ii) $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 < f'(b)$

Em:

(i) Temos

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{se } x \neq a \\ f'(a) & \text{se } x = a \end{cases}$$

g é contínua, então,

$$\begin{aligned} g(a) &= f'(a) < 0 \\ g(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \end{aligned}$$

Então, $\exists x_1 \in \,]a, b[$ tal que $g(x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(a)}{x - a} = 0$

Pelo TVM, $c \in \,]a, b[$ tal que $\dfrac{f(x_1) - f(a)}{x - a} = f'(c)$.

(ii) Análogo.

(b) Dado $d \in \,]f'(a), f'(b)[$ existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) = d$.
Defina

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - dx \\ g'(x) &= f'(x) - d \\ g'(a) &= f'(a) - d < 0 \, (d > f'(a)) \\ g'(b) &= f'(b) - d > 0 \end{aligned}$$

Implica que, $\exists c \in \,]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} &0 = g'(c) = f'(c) - d \\ &\Rightarrow f'(c) = d \end{aligned}$$

Ainda, f' crescente, implica que, f' é contínua.

$\square$

Grupo 2: Cálculo em várias variáveis reais.

3. Justifique a existência ou não dos limites abaixo. Determine-os, se possível.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Solução:

Seja

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = (t,0) \Rightarrow (f\circ\gamma_1)(t) = \frac{t^2 0}{t^4+0} = 0 \\
&\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) = 0 \\
&\gamma_2(t) = \left(t,t^2\right) \Rightarrow (f\circ\gamma_2)(t) = \frac{t^2t^2}{t^4+t^4} = \frac{1}{2} \\
&\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_2)(t) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, o limite não existe. □

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Solução:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \\
&\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2} = x\frac{x^2}{x^2+y^2} + y\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \\
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} + y\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} \right) = 0
\end{aligned}$$

□

4. Sejam $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$ e γ a curva em $\mathbb{R}^3$ dada pela interseção das superfícies $x^2+y^2=4$ e $z=y^2$.

(a) Determine uma parametrização para γ.

(b) Determine a derivada de f ao longo do vetor tangente de γ para um certo t_0, ou seja, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(\gamma(t_0))$.

(c) Determine os pontos de máximo e mínimo de $(f\circ\gamma)(t)$.

Solução:

(a) Note que as superfícies dadas representam um cilindro e uma parábola, respectivamente, então a parametrização de γ é dada por

$$\begin{aligned}
&\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))\\
&x^2(t) + y^2(t) = 4\\
&z(t) = y^2(t)\\
&\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\,\mathrm{sen}t \quad t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = 4\,\mathrm{sen}^2 t \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Por definição, poderiamos usar

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma(t_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(t_0) + h\gamma'(t_0)) - f(\gamma(t_0))}{h}$$

Mas também podemos usar

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), u \rangle\\
&\frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma(t_0)) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle\\
&\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -1) \Rightarrow \nabla f(\gamma(t_0)) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}t, -1)\\
&\gamma'(t_0) = (-2\,\mathrm{sen}t_0, 2\cos t_0, 8\,\mathrm{sen}t_0 \cos t_0)\\
&\therefore \frac{\partial f}{\partial \gamma'}(\gamma(t_0)) = -8\,\mathrm{sen}t_0 \cos t_0
\end{aligned}$$

(c) Temos

$$\begin{aligned}
&\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\\
&f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\\
&f \circ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\\
&\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = 0
\end{aligned}$$

<u>1° modo</u>

$$
\begin{aligned}
&(f\circ\gamma)(t) = 4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2 t - 4\,\mathrm{sen}^2 t = 4\cos^2 t\\
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = -8\cos t\,\mathrm{sen} t\\
&\Rightarrow -8\cos t\,\mathrm{sen} t = 0\\
&\Rightarrow \cos t = 0 \text{ e } \mathrm{sen} t = 0\\
&\therefore t = \pi/2, 3\pi/2, 0, \pi
\end{aligned}
$$

Por

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t) = 8\,\mathrm{sen}^2 t - 8\cos^2 t = 8\cos 2t$$

Então

$$
\begin{aligned}
&t = \pi/2 \Rightarrow (f\circ\gamma)''(\pi/2) = -8 \Rightarrow \pi/2 \text{ max local}\\
&t = 3\pi/2 \Rightarrow (f\circ\gamma)''(3\pi/2) = -8 \Rightarrow 3\pi/2 \text{ max local}\\
&t = 0 \Rightarrow (f\circ\gamma)''(0) = 8 \Rightarrow 0 \text{ min local}\\
&t = \pi \Rightarrow (f\circ\gamma)''(\pi) = 8 \Rightarrow \pi \text{ min local}
\end{aligned}
$$

<u>2° modo</u>

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = -8\,\mathrm{sen} t\cos t\\
&\frac{d}{dt} = 0 \Rightarrow t = \pi/2, 3\pi/2, 0, \pi
\end{aligned}
$$

□

5. Mostre que

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,1)\end{cases}
$$

é contínua em $(0,1)$ e possui todas as derivadas direcionais nesse ponto. A função f é diferenciável em $(0,1)$? Justifique.

Solução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+(y-1)^2}}_{\text{limitada}}(y-1) = 0 = f(0,1)$$

Portanto, f é contínua.

Seja $u = (a, b)$ e $a^2 + b^2 = 1$, então, calculando a derivada direcional, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(0,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left((0,1) + h\,(a,b)\right) - f\,(0,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f\left((ha, 1+hb)\right) - f\,(0,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2a^2hb}{h^2a^2+h^2b^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3a^2b}{h^2}}{h} = a^2b
\end{aligned}$$

Para verificar se f é diferenciável em $(0, 1)$, façamos

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f\left((0,1)+(h,k)\right) - f\,(0,1) - f_x\,(0,1)\,h - f_y\,(0,1)\,k}{\|(h,k)\|} = \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k}{h^2+k^2} - 0 - 0h - 0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}$$

Seja

$$g\,(h,k) = \frac{h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

então

$$\begin{aligned}
&\gamma_1\,(t) = (t,t) \\
&\lim_{t\to 0} (g\circ\gamma)\,(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2t^2\,(2t^2)^{1/2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2\sqrt{2}\,|t|} \\
&\therefore \lim \nexists
\end{aligned}$$

$\square$

6. Admita que $T(x,y) = 16 - 2x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização da trajetória descrita por um ponto P que se desloca a partir do ponto $(1,2)$ sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

Solução:
Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \geqslant 0$

T cresce mais rápido na direção do vetor gradiente ∇T. Então,

$$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t))$$
$$(x'(t), y'(t)) = (-4x(t), -2y(t))$$
$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) \\ y'(t) = -2y(t) \end{cases}$$

O ponto inicial é $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$, então

$$\begin{aligned}
& x' = -4x \\
& \Rightarrow \frac{x'}{x} = -4 \Rightarrow \int \frac{x'}{x} dt = \int -4dt \\
& \Rightarrow \ln|x(t)| = -4t + c_1 \\
& \Rightarrow |x(t)| = e^{-4t}e^{c_1} \text{ e } |y(t)| = e^{-2t}e^{c_2}
\end{aligned}$$

Quando $t = 0$, $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$, então,

$$\begin{aligned}
1 = x(0) = e^{-4.0}e^{c_1} \Rightarrow e^{c_1} = 1 \Rightarrow |x(t)| = e^{-4t} \\
2 = y(0) = e^{-2.0}e^{c_2} \Rightarrow e^{c_2} = 2 \Rightarrow |y(t)| = 2e^{-2t}
\end{aligned}$$

Então, $\gamma(t) = \left(e^{-4t}, 2e^{-2t}\right), t \geqslant 0$

Note que $x(t) = \dfrac{y^2(t)}{4}$, então, a imagem é

$\square$

A.2 Avaliação 02

Grupo 1: Regra da cadeia.

1. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função harmônica, isto é

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$$

Mostre que $g(u,v) = f\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$ é harmônica nas variáveis u e v.

Solução:
Exercício □

2. Suponha que $f(x,t)$, definida em $\mathbb{R}^2$, é uma função real de classe C^2 que satisfaz à equação $f_{xx} = f_{tt}$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que $g(u,v) = f(u+v, u-v)$ satisfaz $g_{uv} = 0$;

(b) Usando o item anterior determine funções $f(x,t)$ tais que $f_{xx} = f_{tt}$. (Dica: se $g_{uv} = 0$ o que podemos dizer sobre g_v? A partir disso o que podemos concluir sobre g?)

Solução:

(a) $g(u,v) = f(u+v, u-v)$ satisfaz $g_{uv} = 0$, então,

$$\begin{aligned}
g_u &= f_x.1 + f_t.1 \\
g_{uv} &= f_{xx}.1 + \cancel{f_{xt}(-1)} + \cancel{f_{tx}.1} + f_{tt}(-1) \\
g_{uv} &= f_{xx} - f_{tt} = 0
\end{aligned}$$

(b) $g_{uv} = 0$, então

$$\begin{aligned}
& g_v = f_1(v) \\
& g = \int f_1(v)\,dv + f_2(u) \\
& g(u,v) = \int f_1(v)\,dv + f_2(u) \\
& g(u,v) = f(u+v, u-v) \\
& \begin{cases} x = u+v \\ t = u-v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x+t}{2} \\ v = \dfrac{x-t}{2} \end{cases} \\
& \Rightarrow f(x,t) = \int f_1\left(\tfrac{x-t}{2}\right) \tfrac{dx-dt}{2} + f_2\left(\tfrac{x+t}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que a imagem de γ esteja contida no gráfico de f. Mostre que o vetor $\gamma'(t_0)$ está no espaço tangente ao gráfico de f no ponto $\gamma(t_0)$ para todo $t_0 \in I$.

   Solução:

   $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_{n+1}(t))$
   $p \in \text{graf} f \Rightarrow (x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$
   $\Rightarrow \gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t), f(x_1(t), ..., x_n(t)))$
   $\overrightarrow{n} = (\nabla f, -1)$ normal ao espaço tangente
   $\gamma'(t) = (x_1'(t), ..., x_n'(t), \langle \nabla f, (x_1'(t), ..., x_n'(t)) \rangle)$
   $\langle \overrightarrow{n}, \gamma' \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1 \right), \left(x_1', ..., x_n', \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n' \right) \right\rangle = 0$
   $\Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \gamma'$
   $\Rightarrow \gamma' \in T_{\gamma(t_0)} \text{graf} f$

$\square$

Grupo 2: Máximos e mínimos.

4. Determine os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ que estão mais próximos da origem. Justifique corretamente por que os pontos encontrados são de fato pontos de mínimo.

   Solução:

   $$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

   Seja $x^2 = 1 + z^2 + y^2$, então

   $$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 2y^2 + 2z^2}$$

   é mínimo se $y = z = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

   Portanto, $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$.

<u>outro modo</u>: Multiplicador de Lagrange

Minimizar $d^2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeito a $x^2 - y^2 - z^2 = 1$. Seja $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$

$$\begin{cases} \nabla d^2 = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla d^2 = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g = (2x, -2y, -2z)$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y = -\lambda 2y \\ 2z = -\lambda 2z \\ x^2 - y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 0 = z$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

□

5. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy\left(4 - x^2 - y^2\right)$ e considere a região $Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant 2\right\}$.

   (a) Determine os pontos críticos de f que são interiores à região Q e classifique-os quanto a pontos de máximos locais, mínimos locais ou de sela;

   (b) Justifique a existência e determine os valores de máximo e mínimo absolutos de f sobre Q.

Solução:

(a) Pontos críticos em Q:
$\nabla f = (0,0)$
Seja $f(x,y) = 4xy - yx^3 - xy^3$

$$\nabla f = \left(4y - 3x^2y - y^3, 4x - x^3 - 3y^2x\right)$$
$$\begin{cases} 4y - 3x^2y - y^3 = 0 \\ 4x - x^3 - 3y^2x = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y\left(4 - 3x^2 - y^2\right) = 0 \\ x\left(4 - 3y^2 - x^2\right) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x,y) = \begin{cases} \cancel{(0,0)} \\ (1,1) \\ \cancel{(1,-1)} \\ \cancel{(-1,1)} \end{cases}$$
$$f_{xx} = -6xy = f_{yy}$$
$$f_{xx}(1,1) = f_{yy}(1,1) = -6 < 0$$
$$\Rightarrow (1,1) \text{ max local}$$
$$\boxed{f(1,1) = 2}$$

(b) Temos

- $f(x,0) = 0, x \in [0,2]$
- $g(x) = f(x,2) = -2x^3, x \in [0,2]$

$$g'(x) = -6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$x = 2 \text{ min de } g$$
$$\boxed{f(2,2) = -16}$$

- $f(0,y) = 0, y \in [0,2]$
- $f(2,y) = -2y^3$ tem min em $(2,2)$.

Portanto, $(1,1)$ max global e $(2,2)$ min global.

□

Grupo 3: Teorema da função implícita.

6. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = z^3 + 3z + 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

(a) Mostre que a equação $F(x, y, z) = 0$ define uma função $z = f(x, y)$ de classe C^2 em todo o plano;

(b) Determine os pontos críticos de f;

(c) Classifique esses pontos críticos quanto a máximos locais, mínimos locais ou selas;

(d) Escreva o polinômio de Taylor de ordem 1 para f em torno de $(1, 1)$.

Solução:

(a) Devemos provar que z é função de (x, y). Fixemos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, $2x^4 + y^2 - x^2 - 2y = k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&z^3 + 3z + 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y = 0 \\
&z^3 + 3z + k = 0 \\
&g(z) = z^3 + 3z + k \\
&g'(z) = 3z^2 + 3 > 0
\end{aligned}$$

Portanto, g é crescente e sobrejetora.
Então, $\exists! z_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(z_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
&F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 3z^2 + 3\big|_{z=z_0} = 3z_0^2 + 3 > 0
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita 3.6, $\exists A \subset \mathbb{R}^2$ e $B \subset \mathbb{R}$ tal que $(x_0, y_0) \in A$ e $z_0 \in B$ e $F(x, y, z) = 0, \forall (x, y) \in A$ e $z \in B$.
$z = f(x, y)$ e é de mesma diferenciabilidade que F.

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-\left(8x^3 - 2x\right)}{3z^2 + 3} \\
f_y(x, y) &= -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-(2y - 2)}{3z^2 + 3}
\end{aligned}$$

onde, $z = f(x, y)$.

(b) Pontos críticos

$$\nabla f = (0,0)$$

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0, \pm\tfrac{1}{2} \text{ e } y = 1$$

Pontos críticos: $(0,1)\,;(1/2,1)\,;(-1/2,1)$

(c) Temos

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{-\left(24x^2-2\right)\left(3z^2+3\right)+\left(8x^3-2x\right).6z.z_x}{\left(3z^2+3\right)^2} \\ f_{xy} &= \frac{0\left(3z^2+3\right)+\left(8x^3-2x\right).6z.z_y}{\left(3z^2+3\right)^2} = f_{yx} \ \text{(T. Schwarz)} \\ f_{yy} &= \frac{-2\left(3z^2+3\right)+\left(2y-2\right).6z.z_y}{\left(3z^2+3\right)^2} \end{aligned}$$

$f(0,1) = z_0$ tal que $z_0^3 + 3z_0 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} f_{xx}\,(0,1) &> 0 \\ f_{xy}\,(0,1) &= 0 \\ f_{yy}\,(0,1) &< 0 \\ H_f &= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\det H_f\,(0,1) < 0 \Rightarrow (0,1)$ sela

$$\begin{aligned} f_{xx}\,(1/2,1) &> 0 \\ f_{xy}\,(1/2,1) &= 0 \\ f_{yy}\,(1/2,1) &< 0 \end{aligned}$$

$\det H_f\,(1/2,1) > 0 \Rightarrow (1/2,1)$ max local

$$\begin{aligned} f_{xx}\,(-1/2,1) &> 0 \\ f_{xy}\,(-1/2,1) &= 0 \\ f_{yy}\,(-1/2,1) &< 0 \end{aligned}$$

$\det H_f\,(-1/2,1) > 0 \Rightarrow (-1/2,1)$ max local

(d) Temos

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\ &= 0 + \left(\tfrac{-6}{3}\right)(x-1) + 0(y-1) \\ P_1(x,y) &= -2(x-1) \end{aligned}$$

O plano tangente ao gráfico é

$$\begin{aligned} & z = -2x - 2 \\ & 2x + z + 2 = 0 \end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol 1. 5ª Ed. LTC, 2001.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol 2. 5ª Ed. LTC, 2001.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol 3. 5ª Ed. LTC, 2001.

Índice Remissivo