第一节: 线性微分方程的一般理论:

n阶微分方程的一般形式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

n阶线性微分方程的一般形式

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \qquad \text{-----} (2.1)$$

n阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \qquad \cdots\cdots (2.2)$$

其中 $a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数.

方程 (2.1) 的解的存在唯一性定理

定理1

如果 $a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数，则对任一 $t_0 \in [a,b]$ 及任意的 $x_0, x_0^{(1)}, \cdots, x_0^{(n-1)}$，方程 (2.1) 存在唯一解 $x = \varphi(t)$ 定义于区间 $a \le t \le b$ 上，且满足初始条件

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \frac{d\varphi(t_0)}{dt} = x_0^{(1)}, \quad \cdots, \quad \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}} = x_0^{(n-1)}$$

推论: 如果 $a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数 则对任一 $t_0 \in [a,b]$，方程(2.1) 存在唯一解 $x \equiv 0$，定义于区间 $a \le t \le b$ 上，且满足零初始条件 $\varphi(t_0) = 0$，$\frac{d\varphi(t_0)}{dt} = 0$，$\cdots$，$\frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}} = 0$

↳ 即把 x_0 代入 0 3

一、齐线性方程通解的结构

定理2：（叠加原理）如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 是方程 (2.2) 的k个解，则它们的线性组合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ 也是 (2.2) 的解，这里 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是任意常数，但不一定是通解.

函数线性无关和相关：

定义在 $a\le t\le b$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$，如果存在不全为0的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，使得恒等式 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)\equiv 0$，对所有 $t\in[a,b]$ 成立，则称这些函数是线性相关的，否则称是线性无关的

要使得 $c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n\equiv 0 \quad t\in(-\infty,+\infty)$ 则 $c_i=0$

朗斯基行列式：

定义在 $a\le t\le b$ 区间上的k个可微k-1次函数 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$ 所作成的行列式

$$W(t)=W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)]$$
$$=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

称为这些函数的朗斯基行列式

定理3：若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上线性相关，则在 $[a,b]$ 上它们的朗斯基行列式 $W(t)=0$

齐次线性方程组非零解：$r<n$，可逆矩阵行列式不为0

(它的系数行列式 $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$，由线性代数理论方程有非0解的充要条件是系数行列式必须为0，即 $W(t) \equiv 0 \quad a \le t \le b$

但 $W \equiv 0$ 不一定推出线性相关。即其构成的朗斯基行列式为0，但它们也可能线性无关）定理4给出了进一步的结果

定理4：如果方程(2.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性无关，则 $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ 在这个区间的任何点上都不等于0.
即 $W(t) \ne 0 \quad a \le t \le b$

$\exists t_0 \quad a \le t_0 \le b$

$W[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)] = 0$ $\xrightarrow{\text{定理4}}$ / $\xleftarrow{\text{定理3}}$ $x_1(t), x_2(t), \dots, x(n)$ 线性相关

重要结论：

方程(2.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性无关的充要条件为 $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \ne 0 \quad a \le t \le b$

定理5：n 阶齐线性方程(2.2)一定存在 n 个线性无关的解，且任意 $n+1$ 个解都线性相关

定理6（通解结构）

如果 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是方程(2.2)的 n 个线性无关的解，则方程(2.2)的通解可表为 $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t)$，其中 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 是任意常数，且通解(2.11)包括方程(2.2)的所有解 (2.11)

注：二阶齐次线性微分方程解的结构

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$

设 y_1, y_2 是 (1) 的两个解，即

$$\begin{cases} y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \end{cases}$$

则有 $(C_1y_1 + C_2y_2)'' + P(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + Q(x)(C_1y_1 + C_2y_2)$

$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0$

即 $C_1y_1 + C_2y_2$ 也是 (1) 的解

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$

定理6' 如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是方程 (1) 的两个解，并且它们之比不是常数，那么它们的任意线性组合 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 就是方程 (1) 的通解

注：$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，称为 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关

二、非齐次线性微分方程的通解结构

$$\frac{d^nx}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \qquad (2.1)$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0. \qquad (2.2)$$

性质1：如果 $x^*(t)$ 是 (2.1) 的解，$x(t)$ 是 (2.2) 的解，则 $x^*(t) + x(t)$ 也是 2.1 的解

性质2：(2.1) 的任意两个解之差必为 (2.2) 的解

定理7：设 $x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t)$ 为 (2.2) 的基本解组，$x^*(t)$ 是 (2.1) 的某一解，则 (2.1) 的通解为 $x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_nx_n(t) + x^*(t)$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数　且通解包括 2.1 的所有解

定理8：设 $x_1^*(t)$，$x_2^*(t)$ 分别为以下方程的解

$$\frac{d^nx}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_1(t)$$

$$\frac{d^nx}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_2(t)$$

则 $x_1^*(t) + x_2^*(t)$ 为以下方程的解：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_1(t) + f_2(t)$$

定理9: 设 $x_1^*(t) + i x_2^*(t)$ 为以下方程的解:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_1(t) + i f_2(t)$$

其中一切系数 $a_k(t)$ 及 $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ 均为实变量 t 的实函数 $i=\sqrt{-1}$, 则 $x_1^*(t)$ 和 $x_2^*(t)$ 各为以下方程的解

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_1(t)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_2(t)$$

非齐线性方程　　　　齐线性方程

特解 $\xleftarrow{\text{表示}}$ 基本解组

$\downarrow$

非齐线性方程通解

注: 二阶非齐次线性微分方程的结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

定理7' 设 $y^*(x)$ 是该方程的一个特解 $Y(x)$ 是对应的齐次线性方程的通解, 那么该方程通解 $y = Y + y^*$

定理8' 非齐线性方程的叠加原理.

设 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 分别为非齐线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

和 $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解

则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 为非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 一个特解

第二节：常系数线性微分方程的解法

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \quad (2.1')$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0 \quad (2.2')$$

一、二阶常系数齐次线性微分方程的解法

$y''+py'+qy=0$ ⟨1⟩

如果 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是 ⟨1⟩ 两个线性无关的特解，则 ⟨1⟩ 通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

$y=e^{rx}$ 代入 ⟨1⟩

$(r^2+pr+q)e^{rx}=0$

$\because e^{rx}\neq 0 \quad \therefore r^2+pr+q=0$ ⟨2⟩

⟨2⟩ 称为微分方程 ⟨1⟩ 的特征方程，它的根称为特征根

$\Delta=p^2-4q$.

① $\Delta>0$，⟨2⟩ 有 2 个相异实根 $r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

$y_1(x)/y_2(x)=e^{(r_1-r_2)x}\neq C \quad \therefore$ 线性无关

$\therefore$ ⟨1⟩ 通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

② $\Delta=0 \qquad r_{1,2}=-\frac{p}{2} \qquad y_1=e^{r_1x}$

⟨1⟩ 通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$

③ $\Delta<0$ 则 ⟨2⟩ 有一对共轭复根. $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$

$\therefore y_1=e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$

⟨1⟩ 通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

二、n 阶常系数线性齐次微分方程

$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

其中 $p_1,\cdots,p_n$ 为实常数

特征根方程：$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

特征根：	通解的对应项
单实根 λ	$Ce^{\lambda x}$
k重实根 λ	$e^{\lambda x}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对共轭k重根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta$ $+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

三. 常系数非齐次线性微分方程的求解方法

$y''+py'+qy=f(x)$ 2.26

$y''+py'+qy=0$ 2.13

定理2：设 $y^*(x)$ 是(2.26)的一个特解，$Y(x)$ 是(2.13)通解 则(2.26)通解为 $y=Y+y^*$

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

λ 为一个实数，$P_m(x)$ 是 m 次多项式

$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$

$$Q(x)=\begin{cases}Q_m(x) & \lambda\text{不是特征根}\\ xQ_m(x) & \lambda\text{是单特征根}\\ x^2Q_m(x) & \lambda\text{是二重特征根}\end{cases}$$

欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

将 y^* 代入原方程

实际计算，只要把 $Q(x)$ 代入 $Q''+(2\lambda+p)Q'+(\lambda^2+p\lambda+q)Q=P_m(x)$

可利用线性可分 $f(x)$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_n(x)\cos wx+Q_m(x)\sin wx]$

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$

$y''+py'+qy=f(x)$ (*)

$y''+py'+qy=0$ (**)

可设 $y^*=x^ke^{\alpha x}[R_l^{(1)}(x)\cos\beta+R_l^{(2)}(x)\sin\beta x)$

其中 当 $\alpha \pm \beta i$ 不是特征根时 $k=0$,

当 $\alpha \pm \beta i$ 是特征根时 $k=1$

$l = \max(n, m)$

或 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos\beta x$

$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin\beta x$

定理：若 $y^* = y_1(x) \pm i y_2(x)$ 是方程 $y'' + p(x) y' + q(x) y = f_1(x) \pm i f_2(x)$ 一个特解，则

$y_1(x)$ 是 $y'' + p(x) y' + q(x) y = f_1(x)$ 的一个特解

$y_2(x)$ 是 $y'' + p(x) y' + q(x) y = f_2(x)$ 的一个特解

$y^* = x^k e^{(\alpha \pm i\beta)x} Q_n(x)$

$\alpha \pm i\beta$ 不是特征根，取 $k=0$;

$\alpha \pm i\beta$ 是特征根：取 $k=1$;

定理：（非齐次线性方程的叠加原理）

设 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 分别为非齐次线性方程.

$y'' + py' + q(x) = f_1(x)$ 和 $y'' + py' + qy = f_2(x)$ 的特解;

则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 为非齐次方程

$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ 的一个特解.

可扩大

二阶的解法可推广到一般高阶情形 只是 $\alpha \pm i\beta$ 作为特征根 重数 k 取值范围

第四节 一般线性微分方程的一些解法

一、变量变换法

用来解决：1. 将某些特殊类型的变系数方程化为常系数线性方程

2. 将微分方程降阶

(一) 欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

$\downarrow$ p_k 为常数

令 $x = e^t$ 即 $t = \ln x$（当 $x>0$ 时）

常系数线性微分方程

当 $x<0$ 时 令 $x = -e^t$ 即 $t = \ln(-x)$

欧拉方程算子解法：当 $x>0$ 时

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \quad (1)$$

令 $x = e^t$ 则 $t = \ln x$ 则

$$xy' = \frac{dy}{dt} \qquad x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

记 $D = \frac{d}{dt}$ $D^k = \frac{d^k}{dt^k}$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow$ $D^n y + b_1 D^{n-1} y + \cdots + b_n y = f(e^t)$

即 $$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_n y = f(e^t)$$

当 $x<0$ $D^n y + b_1 D^{n-1} y + \cdots + b_n y = f(-e^t)$

即 $$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_n y = f(-e^t)$$

(二) 降阶法

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

$$y = y_1\left[C_1 + C_2\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx\right]$$

称为二阶线性微分方程的刘维尔公式

〈三〉某些可化为常系数线性方程求解的特殊情形

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

$$2p'(x) + p^2(x) - 4Q(x) = a$$

$$y = uv = \left[c_1 e^{\frac{\sqrt{a}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{a}}{2}x}\right] e^{-\int \frac{p}{2}dx}$$

二. 变动任意常数（常数变易法）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$$

对应的齐次方程的通解为 $y = c_1y_1 + c_2y_2$

设非齐次方程的特解: $y^* = u_1y_1 + u_2y_2$

$$W(x) = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$$

$$y = Y + y^*$$

$$= c_1y_1 + c_2y_2 + y_1\int \frac{-y_2f(x)}{W(x)}dx + y_2\int \frac{y_1f(x)}{W(x)}dx$$

三. 二阶线性方程的幂级数解法:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\cdot\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

下面考虑该方程及初始条件.

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}$$

定理: 若 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都可展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x| < R$，则有形如 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的特解，也以 $|x| < R$ 为级数的收敛区间

定理: 若 $p(x)$. $q(x)$ 都具有这样的性质 即 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 均可展成 x 的幂级数 且收敛区间为 $|x| < R$ 则有形如 $y = x^a \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+a}$ 的特解

这里 $a_0 > 0$，a是一个待定常数，该解也以 $|x| < R$ 为收敛区间

刘维尔公式：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

y_1

$$y = y_1\left[C_1 + C_2\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx\right]$$