一.

微分方程：一般地，含有未知函数导数（或微分）的函数方程称为微分方程.

阶：出现在微分方程中未知函数的最高阶导数或微分的阶数，称为微分方程的阶

常微分：未知函数为一元函数

偏微分：未知函数为多元函数.

微分方程的解：

1） 定义：使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解

2） 通解：微分方程的解中含有任意常数，且独立任意常数的个数和微分方程阶数相同

3） 特解：不含任意常数的解.

初始条件：（定解条件）：用来确定通解中的任意常数，从而得到特解的条件

初值问题：求微分方程满足初始条件的解的问题

二.

一阶微分方程的一般形式：

$F(x, y, y') = 0$ 或 $y' = f(x, y)$

其中 $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ 或 $y_0' = f(x_0, y_0)$

通解：积分曲线（族）

初值问题：$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 为特解

$y'' - y' - 2y = 0$ 解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

三. 可分离变量的微分方程

$g(y)\,dy = f(x)\,dx$ ：可分离变量的方程

$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$

$G(y) = F(x) + C$ 为微分方程通解

变形过程中的特殊情况为特解

四：齐次型微分方程

1. 定义：形如 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

2. 解法：作变量代换：$u = \frac{y}{x}$ 即 $y = xu$

$\therefore \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

代入原式 $u + x\frac{du}{dx} = f(u)$

分离变量 $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$

两边积分得通解.

代回 u

五：一阶线性微分方程.

一阶线性微分方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

1) $Q(x) \equiv 0$ => 一阶齐次线性微分方程

2) $Q(x) \neq 0$ => 一阶非齐次线性微分方程

解法：

1. 线性齐次：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C$$

通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

$\int P(x)dx$ 表示 $P(x)$ 的某个确定的原函数

2. 线性非齐次 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

常数变易法： $y=u(x)e^{-\int p(x)dx}$

$y'=u'(x)e^{-\int p(x)dx}+u(x)[-p(x)]e^{-\int p(x)dx}$

将 y 和 y' 代入原方程得 $u'(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$

$\therefore u(x)=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$

$\therefore y=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$

$\therefore y=\boxed{Ce^{-\int p(x)dx}}+\boxed{e^{-\int p(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx}$

对应齐次方程的通解. 非齐次方程特解

六、伯努利方程：

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

解法：两端除以 $y^n \Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

凑微分： $\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

令 $z=y^{1-n}$ 代得

$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即得

七. 全微分方程：

微分形式的一阶微分方程可以写成：

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

若上式左端恰是某个二元函数的全微分，即

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \equiv du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (2)$$

则称 (1) 为全微分方程或者恰当方程.

$u(x,y)$ 称为微分方程 (1) 的原函数

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 是 (1) 成为全微分方程的充要条件

简单二元函数的全微分：

$$\left.\begin{aligned}
&ydx + xdy = d(xy)\\
&\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)\\
&\frac{-ydx + xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)\\
&\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\\
&\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)\\
&\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)
\end{aligned}\right\}$$

例 2：

八、积分因子.

如果存在连续可微的函数 $\mu(x,y) \neq 0$，使得 $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$ 为全微分方程，即存在函数 $u(x,y)$ 使 $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = du(x,y)$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程(1)的积分因子. 这时 $u(x,y) = C$ 为该全微分方程的通解.

只要方程有解存在，则必有积分因子存在，并且积分因子不是唯一的

只与 x 有关的积分因子的充要条件为 $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \psi(x)$$

相应的积分因子为 $$\mu(x) = e^{\int \psi(x)\,dx}$$

只与 y 有关的积分因子的充要条件为 $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \psi(y)$$

相应的积分因子为 $$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\,dy}$$

此外，可以通过观察法进行"分项组合"而求得积分因子

注： 除上述特殊情形之外，还可以通过观察法进行“分项组合”而求得积分因子。

$xdx + ydy = d(\frac{x^2+y^2}{2})$	$ydx + xdy = d(xy)$
$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$	$\frac{xdy - ydx}{y^2} = d(-\frac{x}{y})$
$\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln\frac{y}{x})$	$\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d(\arctan\frac{y}{x})$
$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = d(\ln\sqrt{x^2+y^2})$	

52

九. 可降阶的二阶微分方程

1. $y'' = f(x)$ 型

解法：两边逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$ 不显含 y.

解法：令 $y' = p(x)$ $p' = f(x,p)$ => 一阶微分，得到 p 再积分

3. $y'' = f(y, y')$ 不显含 x

解法 令 $y' = p(y)$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$\therefore p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$