第三章：微分方程组

第一节：微分方程组与线性微分方程组

一、微分方程组的一般概念

含有 n 个未知函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

微分方程组的解：$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \quad i=1,2,\cdots,n$$

高阶微分方程 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$

令 $y' = y_1$, $y'' = y_2$, $\cdots$, $y^{(n-1)} = y_{n-1}$

可化为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \cdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) \end{cases}$$

通解：含有 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases}$$

为方程组的通解，这里 $C_1, C_2, \cdots C_n$ 相互独立

通积分：如通解满足方程组

$$\begin{cases} \varphi_1(t, x_1, \cdots x_n; c_1, \cdots c_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(t, x_1, \cdots x_n; c_1, \cdots c_n) = 0 \end{cases}$$

则称为方程组的通积分

一阶微分方程组的初值条件:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \cdots, x_n(t_0) = x_{n0}$$

一阶微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \\ x_1(t_0) = x_{10}, \cdots, x_n(t_0) = x_{n0} \end{cases}$$

二. 线性方程组的一般概念

<1> 线性方程组的标准形式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

n阶线性微分方程:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t)$$

令 $x = x_1$, $x' = x_2$, $\cdots$ $x^{(n-1)} = x_n$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \vdots \\ \dfrac{dx^{n-1}}{dt} = x_n \\ \dfrac{dx^n}{dt} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 \cdots a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

(2) 函数向量和函数矩阵

n维函数向量 $x(t) = \begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{cases}$

n×n阶函数矩阵 $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ & \vdots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$

$x'(t) = \begin{cases} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{cases}$ $A'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}'(t) & a_{12}'(t) & \cdots & a_{1n}'(t) \\ a_{21}'(t) & a_{22}'(t) & \cdots & a_{2n}'(t) \\ & \vdots & & \\ a_{n1}'(t) & a_{n2}'(t) & \cdots & a_{nn}'(t) \end{pmatrix}$

$\int_{t_0}^{t} x(s)ds = \begin{cases} \int_{t_0}^{t} x_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} x_n(s)ds \end{cases}$ $\int_{t_0}^{t} A(s)ds = \begin{cases} \int_{t_0}^{t} a_{11}(s)ds \cdots \int_{t_0}^{t} a_{1n}(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} a_{n1}(s)ds \cdots \int_{t_0}^{t} a_{nn}(s)ds \end{cases}$

(3) 微分方程组的向量表示

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

初始条件 $x_1(t_0)=x_1^0 \quad x_2(t_0)=x_2^0 \cdots x_n(t_0)=x_n^0$

记 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

$F(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots f_n(t))^T$

$x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)^T$

矩阵形式: $\frac{dx}{dt}=A(t)x+F(t)$

初值条件: $x(t_0)=x_0$

非齐次微分方程组: 若 $F(t)\neq 0$ $\frac{dx}{dt}=A(t)x+F(t)$,

对应的齐次微分方程组 $\frac{dx}{dt}=A(t)x$

第二节: 线性微分方程组解的一般理论:

一. 微分方程组解的存在唯一性定理

定理 3.1: 设 $A(t)$、$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则初值问题

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=A(t)x+F(t)\\ x(t_0)=x_0 \quad t_0\in[a,b]\end{cases}$$

在 (a,b) 内存在唯一解 $x=x(t)$

推论: 设 $A(t)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则初值问题

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=A(t)x\\ x(t_0)=0 \quad t_0\in[a,b)\end{cases}$$

在 (a,b) 内存在唯一解 $x(t)=0$ 即零解或平凡解

二. 线性齐次方程组解的结构 $\frac{dx}{dt}=A(t)x$

定理3.2. 设 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots x_n(t)$ 是齐次线性方程组的解,

则它们的线性组合 $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i(t)$ 也是其解

设 $x_1(t)\cdots\cdots x_m(t)$ 为 I 上的函数向量,若存在一组不全为0的 $c_1,c_2,\cdots c_m$, $\forall t\in I$

有 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)\equiv 0$ 成立

则称此组函数向量在 I 上线性相关. 否则称为线性无关

例3.2 线性代数知识

朗斯基判别准则：设有 n个函数向量

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} \quad x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} \quad \cdots$$

称 $W(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & & x_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$

为这些函数向量组的朗斯基行列式